UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS TRÊS LAGOAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Roger Gomes Soares da Silva

Um estudo sobre Inequações e Médias do Ponto de vista Geométrico.

Três Lagoas - MS

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS TRÊS LAGOAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Um estudo sobre Inequações e Médias do Ponto de vista Geométrico.

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, câmpus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Allan Edley R. de Andrade.

Roger Gomes Soares da Silva

Um estudo sobre Inequações e Médias do Ponto de vista Geométrico

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT- da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS, Câmpus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.. Área de Concentração: Matemática. Orientador: Prof. Dr. Allan Edley R. De Andrade

Apresentado em: 30/10/2020

BANCA EXAMINADORA

Allan Edley

Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade (Orientador)

UFMS/CPTL

E. Opazo

Profª. Drª Eugenia Opazo Uribe

UFMS/CPTL

Renato Cesar da Silva

Prof. Dr. Renato Cesar da Silva

UFMS/CPTL

Três Lagoas - MS

2020

Roger Gomes Soares da Silva graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, especializou-se em Metodologia do Ensino da Física pela Faculdade de Educação São Luiz– FESL, é professor do quadro temporário da Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso do Sul desde 2016. Discente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Três Lagoas (CPTL).

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Luana Beatriz Cardoso e ao meu filho Gabriel Gomes Cardoso e a todos pelo apoio e parcimônia dedicados a mim.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus que sempre me dá forças para seguir em frente, a minha mãe Dirce Soares de Souza e meu pai Amelino Pereira da Silva que sempre me motivaram a seguir em frente e a desafios, aos meus irmãos Rafael Gomes Soares da Silva e Rangel Gomes Soares da Silva pela ajuda e força nos momentos mais difíceis e até mesmo pela compreensão perante minhas ausências.

A minha esposa Luana Beatriz Cardoso que está comigo desde a graduação em matemática, especialização e agora em minha pós-graduação certamente carregou o maior fardo, pois, por mais que sejam enormes os desafios do dia-a-dia e as responsabilidades como companheira, esposa, mãe, professora, estudiosa e amiga, realmente eu não seria eu capaz de chegar até aqui sem tamanho apoio e comprometimento e ainda me deu a honra e a alegria de ser pai do Gabriel Gomes Cardoso.

Ao meu Professor, Orientador e Tutor Dr. Allan Edley Ramos de Andrade pelo apoio, paciência, motivação e ensinamento, pois mesmo com tantas atividades a realizar ainda sim é capaz de ser gentil e parceiro para quem precisar de seu apoio, sempre me acalmando nos momentos de desespero e preocupações inerentes ao psicológico

A minha Professora e Orientadora do PET Profa. Dra. Eugenia Opazo Uribe, que confiou em mim e me apoiou durante a graduação e tão gentilmente aceitou participar da minha banca de defesa de mestrado.

Gostaria ainda de agradecer a todos os membros do corpo docente e administrativo da Escola Estadual Afonso Francisco Xavier Tranin aonde trabalho desde minha formação de licenciado em matemática até agora quando estou a completar meu mestrado, sempre me apoiando em oração e palavras positivas.

E a todos que diretamente e/ou indiretamente contribuíram de forma sólida para minha formação enquanto cidadão e trabalhador da área da educação, afinal essa formação acontece todos os dias a cada novo desafio imposto.

Resumo

Essa dissertação apresenta uma proposta de ensino de inequações e médias, onde utiliza-se uma abordagem geométrica afim de apresentar uma forma mais suave de ensino ao estudante, faz-se uso do software GeoGebra e também de tabelas feitas no PowerPoint.

O intuito é gerar um material didático para apoio a profissionais no ensino da matemática para a educação básica, são propostas algumas atividades didáticas para desenvolvimento do conhecimento geométrico dos estudantes, alinhando a teoria com a prática.

Palavras-chave: Inequações, médias, Tic's na educação.

Abstract

This dissertation presents a proposal for teaching inequalities and averages. So a geometric approach is used to demonstrate a gentler way of learning to the student, using the GeoGebra software and also tables made in PowerPoint.

The intention is to generate didactic material to support professionals in the teaching of mathematics for students of junior high school with didactic activities that are proposed for the development of student's geometric knowledge, aligning theory with practice.

Keywords: Inequalities, averages, Tic’s in education.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

O ensino de inequações e de sua representação gráfica é de suma importância para a formação do aluno do ensino fundamental e médio, utilizar métodos clássicos para a sua abordagem ainda é uma das principais escolhas adotadas por professores da rede pública e particular. O seu entendimento permite ao estudante compreender noções matemáticas como a teoria dos conjuntos, aritmética, álgebra e geometria sendo assim é um conteúdo bastante completo.

Todas as figuras contidas nesse trabalho foram feitas e/ou editadas pelo autor, utilizando o software GeoGebra, ou ainda a ferramenta PowerPoint do pacote office do Windows, o GeoGebra pode ser baixado através do site https://www.geogebra.org/download, tendo versões para o Windows e ainda para Smartphones, tendo ainda versão online em https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT não havendo a necessidade de baixar, é um Software completo e gratuito, que permite sua utilização em diversas etapas de ensino.

Esse trabalho tem o intuito de expressar formas de ensinar esse conteúdo através do software GeoGebra, software este gratuito e com diferentes formas de acesso, tal metodologia se insere na lógica de que os estudantes demonstram geralmente maior compreensão e interesse quando se utiliza ferramentas geométricas e visuais afim de apoiar o ensino de conteúdos de todas as áreas do saber, e ainda visa a utilização de novas tecnologias familiarizando o estudante a ferramentas poderosas de cálculo matemático.

A atual geração que se encontra na sala de aula é conhecida pela familiaridade com as TICs - Tecnologias da Informação e Comunicação -, desde cedo estão a utilizar ferramentas e equipamentos como smartphones, computadores e vídeo games, percebe-se certa facilidade de aprendizado da referida geração, em contrapartida perdem o interesse e foco rapidamente se as atividades em sala não forem interessantes, logo o professor deve incorporar as suas aulas as TICs saindo do modelo tradicional praticado a muito tempo.

> As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as

> potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes (MORAN, 2007, p. 164).

Pensadores clássicos como Piaget, Wallon, Dewey, Leif, Vygotsky, defendem que o uso do lúdico é essencial para a prática educacional, no sentido da busca do desenvolvimento cognitivo, intelectual e social dos alunos. Tais definições motivam a buscar sempre novos mecanismos de ensino que tenha efeito lúdico nos estudantes trazendo assim uma abordagem mais suave dos conteúdos sem perder o rigor matemático envolvido.

No capítulo 1, abordaremos o conteúdo motivacional que levou a estruturação desse trabalho, levando em consideração a experiência pessoal do autor em sala de aula, suas percepções em relação a aplicabilidade de maneiras geométricas de ensinar em consonância com a parte algébrica dos conteúdos.

Já no capítulo 2, foi introduzido os conteúdos que se sugestiona ao professor em sala de aula reforçar antes de começar com o método sugerido nesse trabalho, como definir funções, domínio, contradomínio e imagem, conteúdos esses que se faz de suma importância afim de atingir os objetivos nesse trabalho descrito.

No capítulo 4, explana-se o método prático para a resolução de inequações de n raízes, apoiando-se em dois teoremas importantes apresentados no capítulo.

No capítulo 5, apresenta-se sistemas de inequações e métodos para a sua solução, tudo de maneira ilustradas através de figuras utilizando o GeoGebra.

No capítulo 6, aborda-se médias aritméticas, geométricas, harmônicas e quadráticas e ainda se demonstra a desigualdade entre de médias de forma algébrica e geométrica, mostrando assim as vantagens da utilização dessa abordagem, ainda se resolve exemplos utilizando destas desigualdades.

Ainda é apresentado um apêndice com um exemplo da aplicação da abordagem geométrica em sala de aula como sugestão ao docente.

CAPÍTULO 1- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capitulo será tratado sobre a motivação deste trabalho e a busca por utilizações de ferramentas digitais em sala de aula, afim de aproximar a geração de estudantes do ensino básico de hoje ao saber matemático, sabendo ainda que esses jovens possuem certa facilidade ao se tratar de TICs, porém perdem o interesse rápido em aulas clássicas, foi ainda, pensando no professor em sala de aula e em sugestões de ensino de inequações que surgiu o trabalho que aqui segue.

A estruturação da matemática na realidade dos educandos brasileiros, possui o preceito da dificuldade como intrínseca para os mesmos, tornando-se necessário aos educadores a busca pela transversalidade do saber, sendo assim, as flexibilizações da abordagem das matérias trouxeram o trato com o lúdico, em que o educador deixa de ser o único detentor do conhecimento e garante a horizontalidade do ensino.

> "A Matemática é uma disciplina que se destaca em relação às outras, muito mais pela dificuldade que representa para muitos alunos do que pela sua importância enquanto área de conhecimento. Dificuldade entendida como algo complexo, complicado, custoso de entender e de fazer". (Thomaz, 1999).

Para Damn 1999,

> "A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação (DAMM, 1999, p. 137). "

A BNCC e o PCN visam a flexibilização da abordagem da matemática, onde é possível verificarmos a importância do aprendizado como um todo. Ao tirarmos a visão conteudista é possível ter como embasamento tal preceito o que coopera com o trato de assuntos até então mistificados, tais quais as funções, as inequações, a média geométrica e a média harmônica.

Ao aprofundarmos o estudo algébrico dos discentes que não obtiveram contato com o lúdico, percebe-se que o conhecimento sobre funções, equações e inequações são superficiais e resultado de exercícios de memorização, fazendo com que o aluno não compreenda a relação entre equações e funções, e tão poucas inequações. Segundo Duval, R. 2003.

> “As representações mentais, ocultam o conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhes está associado”.

Ressalta-se a importância da psicologia da aprendizagem, para a formação do conhecer como um todo, levando em consideração todas as vertentes presentes no processo de ensino e aprendizagem.

> [...]o ensino de Matemática, assim como todo ensino, contribui (ou não) para as transformações sociais não apenas através da socialização (em si mesma) do conteúdo matemático, mas também através de uma dimensão política que é intrínseca a essa socialização. Trata-se da dimensão política contida na própria relação entre o conteúdo matemático e a forma de sua transmissão assimilação Duarte, Newton.1987.

Ainda sobre a BNCC (Base Nacional Curricular Comum) os educandos desenvolvem o pensamento algébrico, em que ele pode utilizar diferentes escritas algébricas a fim de identificar a dependência entre duas grandezas, e ainda solucionar situações problema utilizando equações e inequações.

Os documentos regulatórios da educação fixam que o conceito de inequação deve ser tratado desde as séries iniciais do ensino fundamental II até ser aprofundado no ensino médio. Considerando a dificuldade que os alunos têm para compreender inequações como um todo, buscou-se auxiliar na compreensão deste saber matemático, com tal intuito utilizamos o software GeoGebra, pretendendo-se obter representações geométricas. Elucidou-se que a abordagem de inequações através da visualização favorece a fixação do conteúdo de inequações, bem como a troca de conhecimentos envolvendo este tópico.

> Sobre isso, Duval, R. 2003, diz que: É essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, linguagem natural, etc.) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. [...] O recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os

> objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações

Ainda sobre esta ótica Bardin, Laurence, 1977 afirma que,

> "Não se trata de um instrumento, mas de um leque de apetrechos; ou, com maior rigor, será um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo muito vasto" (BARDIN, 2011, p. 37).

Partindo da concepção de que o conhecimento nada mais é do que agrupamento de diversos outros precedentes, buscou-se correlacionar a temática das inequações com médias, mais precisamente a questão das desigualdades que ocorrem entre as médias aritméticas, harmônicas e geométricas. Logo, demonstrando a importância de ressaltar a familiaridade presente nos tópicos matemáticos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – Matemática, p.29 – 1997).

> "Ao relacionar ideias matemáticas entre si, podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas. O estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania..."

Para estabelece uma metodologia matemática alternativa, buscou-se a utilização do Software GeoGebra, com isso constatou-se que era favorável o envolvimento de tecnologias, pois se trata de uma compreensão da ciência no meio social em que o aluno está inserido. O enfoque deste trabalho foi trabalhar na expansão dos relacionamentos entre ideias matemáticas, e tomar como viés a utilização da informática nos tópicos matemáticos, buscando emergir o interesse dos educandos na importância do aprendizado de estruturas algébricas, essa geração com tal engajamento em mídias sociais e TICs é ainda chamada de nativos digitais. Referente a tal embasamento,

> Borba, Marcelo de C. M. G. Penteado, 2001, explana que além de trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, as novas mídias, como os computadores com

> softwares gráficos e calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia e de física.

Visando sobrepujar as barreiras existentes sobre o ensino de inequações, buscou-se neste trabalho formalizar a relação entre inequações algébricas e o software Geogebra, onde a visualização do comportamento deste conteúdo é responsável pelo complemento da aprendizagem. A abordagem do GeoGebra para a construção de figuras permite aos educandos compreender intuitivamente a questão das desigualdades e até mesmo concilia-las com demonstrações algébricas. Como afirma Assis, Cibelle de Castro,2014.

> A utilização dos softwares em sala de aula deve ser norteada por interesses pedagógicos, pois o software em si, não implica em nenhuma mudança no processo educacional. Com a introdução do computador como mediador didático, desenvolveram-se softwares específicos para serem utilizados em contextos de ensino aprendizagem.

Este software foi desenvolvido por Markus Horenwarter, da Universidade de Salzburg, para estudos de diversas áreas da matemática e, principalmente, da geometria, destacada neste trabalho. O GeoGebra está disponível para download, é gratuito, de fácil acesso e entendimento. Este recurso favoreceu a percepção gráfica das figuras estudadas e a investigação dos conceitos que a compõem. Alguns autores como Borba, Marcelo de C. M. G. Penteado,2001, destacam que o uso do GeoGebra pode substituir o uso do caderno de desenho geométrico.

> O software GeoGebra pode substituir satisfatoriamente o caderno de desenho geométrico. Podemos utilizar sua interface gráfica e suas ferramentas para traçar retas, ângulos, circunferências etc. uma das vantagens do uso do GeoGebra é que as construções são dinâmicas, isto é, sem a perda dos vínculos geométricos. Isso permite que o usuário faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas.

CAPÍTULO 2- NOÇÕES BÁSICAS

Neste capítulo introduziremos conceitos fundamentais de função, tendo em vista que esse conceito é de extrema importância para a compreensão do método que será apresentará a seguir, afim de explorarmos um método alternativo no ensino de inequações, as definições matemáticas desse capítulo seguem do autor Gelson Iezzi, Carlos Murakami, 2013.

2.1 - Definição de função, Domínio, Contradomínio, imagem e igualdade de função.

2.1.1 - Função

Dados dois conjunto A e $B^{(*)}$ não vazios, uma relação $f \subseteq A \times B$ de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagem em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é } aplicação\ de\ A\ em\ B \iff (\forall\, x \in A, \exists|\, y \in B|\, (x, y) \in f)$$

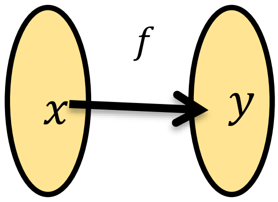


Figura 1-Definição de função

$(*)$ Em todo o nosso estudo de funções, fica estabelecido que A e B são conjuntos formados de números reais, isto é, A e B contidos em ℝ. Vejamos agora com o auxílio do esquema de flechas alguns exemplos e casos de funções e de não funções:

1. O diagrama a seguir representa uma função?

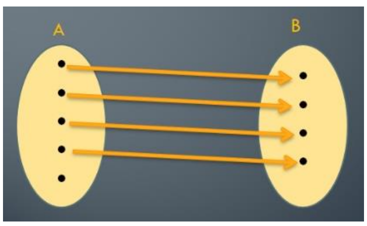


Figura 2-Exemplo 1

Não é uma função, pois é necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha.

2. O diagrama a seguir representa uma função?

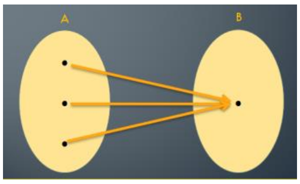


Figura 3-Exemplo 2

É função, pois para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Ou seja todo elemento de A serve como ponto de partida de uma flecha.

3. O diagrama a seguir representa uma função?

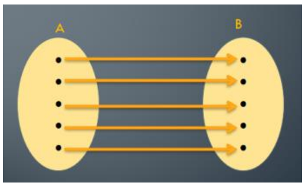


Figura 4- Exemplo 3

É função, pois para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Ou seja, todo elemento de A serve como ponto de partida de uma flecha.

4. O diagrama a seguir representa uma função?

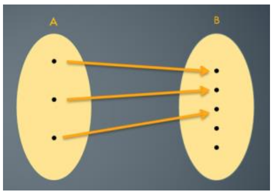


Figura 5- Exemplo 4

É função, pois para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Ou seja, todo elemento de A serve como ponto de partida de uma flecha.

5. O diagrama a seguir representa uma função?

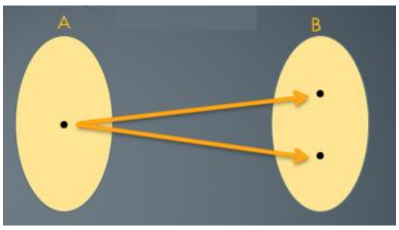


Figura 6- Exemplo 5

Não é função pois existe $x \in A$ tal que x se relaciona com dois elementos distintos de B, ou seja não é função se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.

6. O diagrama a seguir representa uma função?

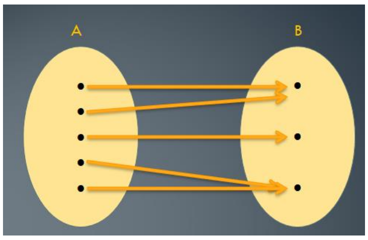


Figura 7- Exemplo 6

. É função, pois para todo elemento $x \in A$, sem exceção, existe um só elemento $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Ou seja todo elemento de A serve como ponto de partida de uma flecha.

7. O diagrama a seguir representa uma função?

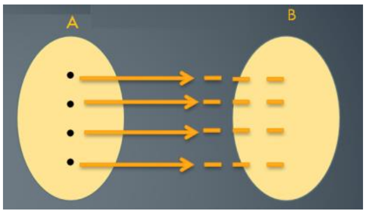


Figura 8- Exemplo 7

f não é função pois os elementos de A não corresponde com nenhum elemento de B, afinal B é um conjunto vazio.

8. O diagrama a seguir representa uma função?

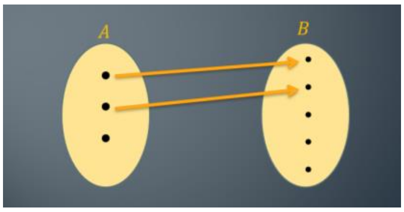


Figura 9 - Exemplo 9

f não é função, pois é necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

Toda função é uma relação binária de A em B; portanto, toda função é um conjunto de pares ordenados.

Para indicarmos uma função f, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos uma das seguintes notações:

$$\boldsymbol{f: A \rightarrow B} \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \mathbf{A \xrightarrow{f} B}$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Como toda função f de A em B é uma relação binária, então f tem um domínio e uma imagem.·.

2.1.2 - Domínio e Contradomínio

Chamamos de Domínio da função o conjunto D formado pelos elementos $x \in A$ para os quais existem y ∈ B tal que (x, y) ∈ f. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

$$domínio \ = \ conjunto\ de\ partida$$

isto é: D = A.

Chamamos de Contradomínio da função o conjunto B.

2.1.3 - Imagem

Chamamos de imagem o conjunto Im dos elementos y ∈ B para os quais existe x ∈ A tal que $(x, y) \in f$.

Segue abaixo uma representação usando diagrama de flechas:

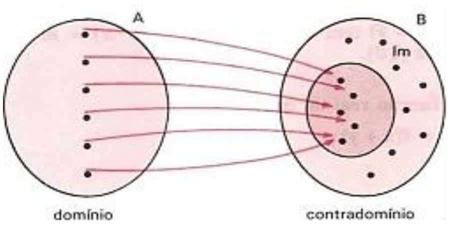


Figura 10 - Domínio, contradomínio e imagem

No caso do Domínio (D) e Imagem (Im) serem conjuntos não discretos temos as seguintes formas de interpreta-los através dos gráficos das funções:

(D) é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f, isto é, é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f.

(Im) é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f, isto é, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f.

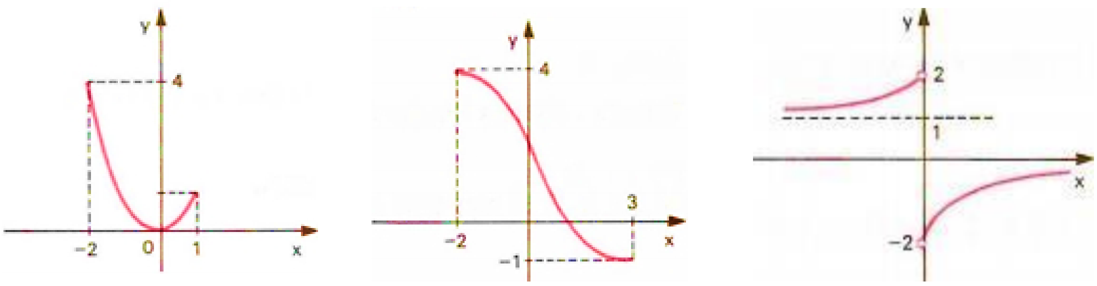


Figura 11 - Exemplos Gráficos

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

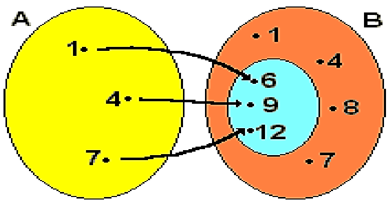
$Im = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 4\}$ $\quad Im = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 4\}$ $\quad Im = \{y \in \mathbb{R} | -2 < y < 0 \; ou \; 1 < y < 2\}$

Quando nos referimos à função f e damos apenas a sentença aberta y $= f(\mathrm{x})$ que a define, subentendemos que D é o conjunto dos números reais x cujas imagens pela aplicação f são números reais, isto é, D é formado por todos os números reais x para os quais é possível calcular $f(x)$.

$$x \in D \leftrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Exemplos

1.

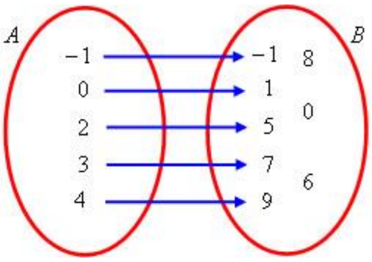


$D = \{1,4,7\}$

$CD = \{1,4,6,7,8,9,12\}$

$Im = \{6,9,12\}$

2.

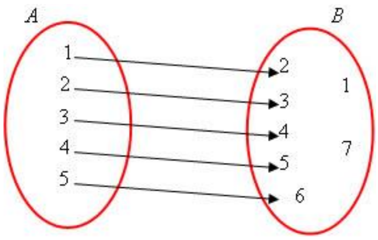


$D = \{-1,0,2,3,4\}$

$CD = \{-1,0,1,5,6,7,8,9\}$

$Im = \{-1,1,5,7,9\}$

3.



$D = \{1,2,3,4,5\}$

$CD = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$Im = \{2,3,4,5,6\}$

2.1.4 - Igualdade de Funções

Duas funções, f de A em B e g de C em D são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplos:

1º) Sejam $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = (x-1)(x+1)$ funções de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ então, temos que $f(x)$ e $g(x)$ são iguais, pois

$$g(x) = (x-1)(x+1) = \mathrm{x}(\mathrm{x}+1) - (x+1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1 = f(x)$$

Ou seja, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ temos que: $f(x_0) = g(x_0)$.

2º) As funções $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ são iguais, pois $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

3º) As funções $f(x) = x$ e $g(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ não são iguais, pois $x \neq |x|$ para $x < 0$.

CAPÍTULO 3 - INTRODUÇÃO SOBRE INEQUAÇÕES

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos e definições sobre inequações assim como abordar um método do ponto de vista geométrico no ensino de inequações; para isto usamos como referência principal (Iezzi, 2013).

Sejam as funções f e g cujos domínios são respectivamente $D_1 \subset \mathbb{R}$ e $D_2 \subset \mathbb{R}$. Chamamos *inequações* na incógnita x, a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

Exemplos:

1º) $5x - 4 > x$ é uma inequação onde $f(x) = 5x - 4$ e $g(x) = x$.

2º) $-x - 5 < 2$ é uma inequação onde $f(x) = -x - 5$ e $g(x) = 2$.

3º) $4x^2 - 3 \geq \frac{1}{x}$ é uma inequação onde $f(x) = 4x^2 - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x}$.

4º) $\sqrt{8x - 2} \leq \frac{1}{x-5}$ é uma inequação onde $f(x) = \sqrt{8x - 2}$ e $g(x) = \frac{1}{x-5}$.

3.1 - Domínio de validade

Chamamos de domínio de validade da inequação $f(x) < g(x)$ o conjunto $D = D_1 \cap D_2$ onde D_1 é o domínio da função f e D_2 é o domínio da função g. É evidente que para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é: $x_0 \in D \Leftrightarrow (x_0 \in D_1$ e $x_0 \in D_2)$ $\Leftrightarrow (f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $g(x_0) \in \mathbb{R}.)$

Nos exemplos anteriores, temos:

1º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

2º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

3º) $D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$

4º) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{4}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{4} \ e \ x \neq 5\}$

3.2 - Conjunto Solução

O número real x_0 é solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$. O conjunto S de todos os números reais x tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira, chamamos de *conjunto-solução* da inequação.

Exemplo

O número real 3 é uma solução da inequação $2x + 1 > x + 3$, pois

$$f(3) > g(3)$$

$$2.3 + 1 > 3 + 3$$

é uma sentença verdadeira. Sendo que o conjunto solução da inequação $2x + 1 > x + 3$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$, isto é, para qualquer $x_0 \in S$ a sentença $2.x_0 + 1 > x_0 + 3$ é verdadeira

Se não existir o número real x tal que a sentença $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, diremos que a inequação $f(x) > g(x)$ é impossível e indicaremos o conjunto solução por $S = \emptyset$.

Exemplo

O conjunto-solução da inequação $x + 1 > x + 2$ é $S = \emptyset$, pois não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que a sentença $x_0 + 1 > x_0 + 2$ seja verdadeira.

Resolver uma inequação significa determinar o seu conjunto-solução. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$, então, x_0 é tal que $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $g(x_0) \in \mathbb{R}$, isto é, $x_0 \in D$ (domínio de validade da inequação). Assim sendo, temos

$$x_0 \in S \ \Rightarrow x_0 \in D$$

ou seja, o conjunto-solução é sempre subconjunto do domínio de validade da inequação.

Duas inequações são equivalentes em $D \subset \mathbb{R}$ se o conjunto-solução da primeira é igual ao conjunto-solução da segunda.

Exemplos:

1º) $3x + 6 > 0$ e $x + 2 > 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois o conjunto-solução de ambas é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

2º) $x < 1$ e $x^2 < 1$ não são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois $x_0 = -2$ é solução da primeira mas não é da segunda.

O conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ pode ser interpretado geometricamente como sendo o conjunto dos valores x para os quais a imagem $f(x)$ esta acima da imagem $g(x)$. Considere por exemplo o gráfico abaixo

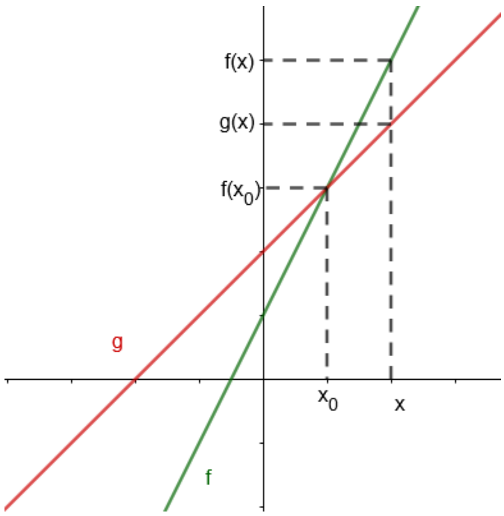


Figura 12 – Representação Geométrica Inequação

Observe que para $x > x_0$ os valores $f(x)$ estão acima dos valores de $g(x)$, assim o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > x_0\}$.

Em particular quando encontramos o conjunto solução da Inequação $f(x) > 0$, estamos procurando para quais valores de x, o valor da imagem $f(x)$ esta acima do gráfico da função nula $g(x) = 0$, ou seja, para quais valores $f(x)$ esta acima do eixo x.

3.3 - Inequações de funções Afim

As funções cuja lei de associação são dadas por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ são chamadas de funções afins. Observe que para $x = -\frac{b}{a}$ temos

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0.$$

Analisemos agora, através de análise gráfica, para quais valores ocorre $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$.

Lembremos que o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta. Sendo que o sinal de a (denominado coeficiente angular) mostra se a reta terá inclinação positiva $(a > 0)$ quando a função for crescente ou inclinação negativa $(a < 0)$ quando a função for decrescente como ilustrado abaixo:

1º caso: $a > 0$

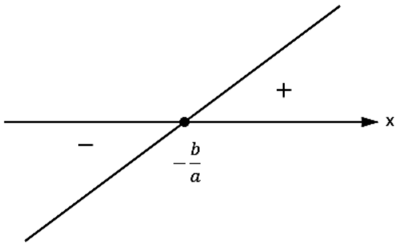


Figura 13 - Crescente

2º caso: $a < 0$

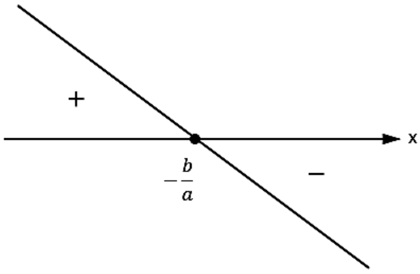


Figura 14 – Decrescente

No decorrer da dissertação usaremos a seguinte representação tabular:

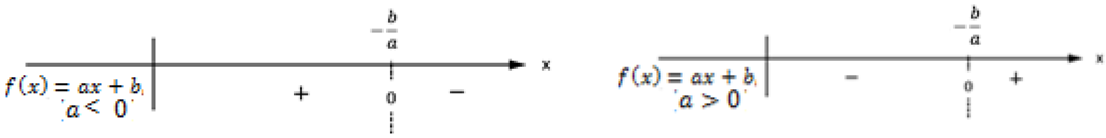


Figura 15 - Análise Tabular

3.4 - Inequações de 2º grau

Se $a \neq 0$ as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ e $ax^2 + bx + c \leq 0$ são denominadas inequações do 2º grau.

Resolver, por exemplo, a inequação

$$ax^2 + bx + c > 0$$

É equivalente a responder a seguinte pergunta: " existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?" Como comentado anteriormente a resposta a essa pergunta se encontra no gráfico da função f. Assim, analisando seu gráfico obtemos a seguinte configuração:

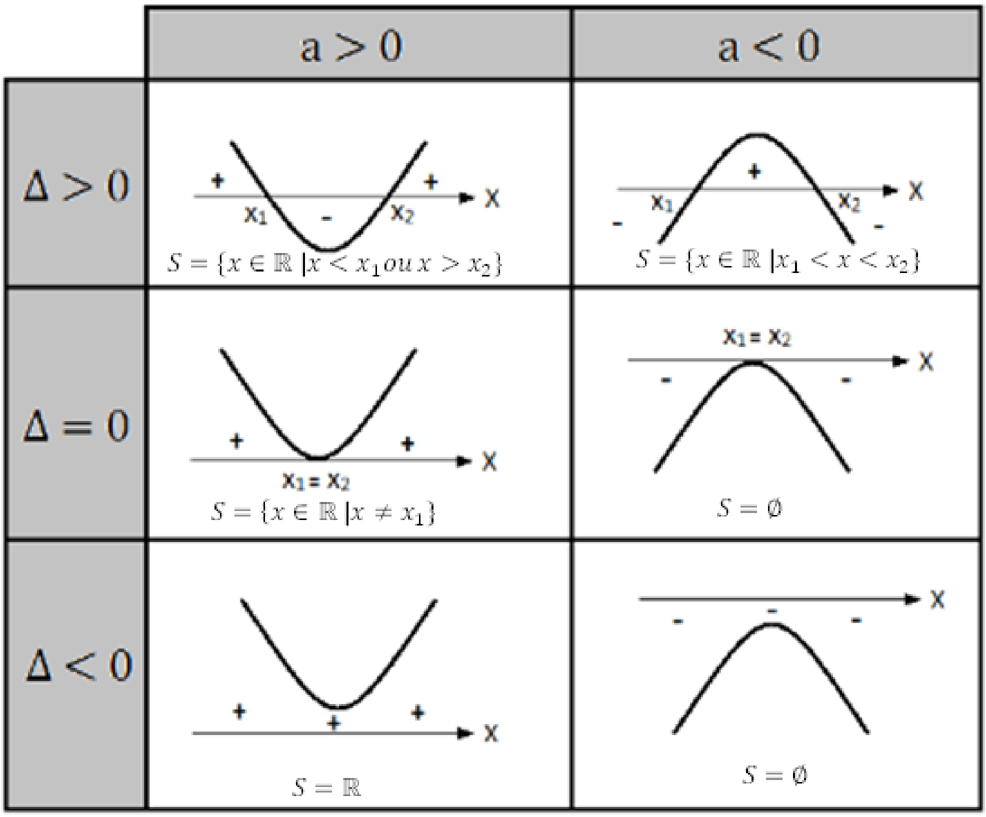


Figura 16 - Análise de concavidade e raízes

3.5 - Princípios

Na resolução de uma inequação procuramos sempre transformá-la em outra equivalente e mais "simples", em que o conjunto-solução possa ser obtido com maior facilidade. Surge, então a indagação "quais transformações podem ser feitas em uma inequação para obter-se uma inequação equivalente? ". A resposta a esta indagação são os dois princípios dados a seguir:

P-1) Sejam as funções f e g definidas em D_1 e D_2, respectivamente. Se a função h é definida em $D_1 \cap D_2$, as inequações

$$f(x) < g(x) \;\text{ e }\; f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$$

são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Uma inequação da forma $f(x) > g(x)$ pode ser entendida como uma representação de uma balança de dois pratos

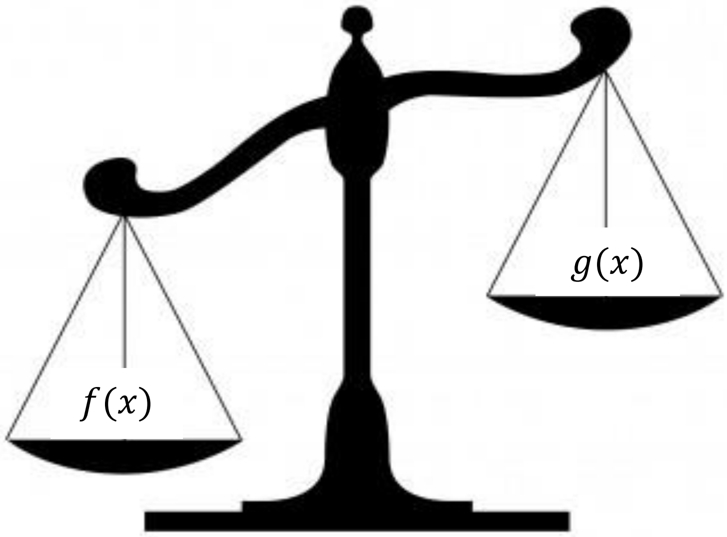


Figura 13 - balança inequação

onde no lado esquerdo é colocado uma quantidade pesando $f(x)$ e do lado direito uma quantidade pesando $g(x)$; e neste caso a inequação $f(x) > g(x)$ simboliza que o lado esquerdo tem uma quantidade que pesa mais que a quantidade da direita. Além disso, se adicionarmos a mesma quantidade $h(x)$ de ambos os lados a balança ainda ficará na mesma posição, ou seja, $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$ obtendo assim um interpretação da validade do princípio P-1.

Exemplo:

Considere a inequação

$$3x - 1 > 2x + 3 \qquad (1)$$

adicionando $h(x) = -2x + 1$ em ambos os membros:

$$(3x - 1) + (-2x + 1) > (2x + 3) + (-2x + 1)$$

Efetuando as simplificações possíveis obtemos:

$$x > 4 \qquad (2)$$

portanto, como (1) é equivalente a (2), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

Observe que temos a seguinte consequência da propriedade P-1 :

$$f(x) < h(x) + g(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) < g(x).$$

De fato, ao somarmos $-h(x)$ em ambos os lados da inequação $f(x) < h(x) + g(x)$, obtemos

$$f(x) + \big(-h(x)\big) < \big(h(x) + g(x)\big) + \big(-h(x)\big) \Rightarrow f(x) - h(x) < g(x).$$

Assim, no exemplo anterior, teríamos:

$$3x - 1 > 2x + 3 \Leftrightarrow 3x - 1 - 2x > 3 \Leftrightarrow x > 4.$$

P-2) Sejam as funções f e g definidas em D_1 e D_2, respectivamente. Se a função $h(x)$ é definida em $D_1 \cap D_2$ e tem sinal constante, então:

a) se $h(x) > 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.
b) se $h(x) < 0$, as inequações $f(x) < g(x)$ e $f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$ são equivalentes em $D_1 \cap D_2$.

Exemplos

1º) $\frac{x}{2} - \frac{3}{4} > \frac{1}{3}$ e $6x - 9 > 4$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda inequação foi obtida a partir da primeira através de uma multiplicação por 12, ou seja, multiplicamos ambos os lados pela função constante $h(x) = 2$.

2º) $-2x^2 + 3x > 1$ e $2x^2 - 3x < -1$ são equivalentes em $\mathbb{R}$, pois a segunda foi obtida da primeira através de uma multiplicação por -1 e inversão de sentido da desigualdade. Observe que neste caso multiplicamos ambos os lados pela função constante $h(x) = -2$.

3º) $\frac{4x-3}{x^2+1} > 0$ e $4x - 3 > 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$. Notemos que a segunda foi obtida da primeira através da multiplicação por $x^2 + 1 > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Na prática, aplicamos a propriedade P-2 com o seguinte enunciado:

"em uma inequação podemos multiplicar o dois membros pela mesma expressão mantendo ou invertendo o sentido da desigualdade, conforme essa expressão seja positiva ou negativa, respectivamente."

Observe que os casos mais básicos de funções que mantém o sinal são as funções constantes $h(x) = \mathrm{c}$ ($c \neq 0$) e neste caso temos

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} c \cdot f(x) > c \cdot g(x), & \dfrac{f(x)}{c} > \dfrac{g(x)}{c} \ \ (\ caso\ \ c > 0) \\ c \cdot\ f(x) < c \cdot g(x), & \dfrac{f(x)}{c} < \dfrac{g(x)}{c} \ \ (\ caso\ \ c < 0) \end{cases}$$

Exemplos:

Vamos resolver em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\frac{2x-3}{5} + \frac{3x+1}{3} \geq x$$

Solução:

A inequação proposta é equivalente à inequação que se obtém multiplicando pelo $m.m.c.(5,3) = 15$:

$$3(2x-3) + 5(3x+1) \geq 15x.$$

Efetuando as operações, temos:

$$21x - 4 \geq 15x,$$

ou ainda

$$6x \geq 4.$$

Dividindo ambos os membros por 6, temos

$$x \geq \frac{2}{3}$$

e, portanto,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}.$$

2) Resolver em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$\frac{2x-3}{x-1} \leq 2$$

Solução:

A inequação proposta é equivalente a $\frac{2x-3}{x-1} - 2 \leq 0$ que reduzindo ao mesmo denominador, fica $\frac{-1}{x-1} \leq 0$.

Notemos que a fração $\frac{-1}{x-1}$ deverá ser não positiva, como o numerador -1 é negativo, então o denominador $x-1$ deverá ser positivo. Lembrando que o denominador não poderá ser nulo

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

e, portanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

Muitos estudantes de matemática ao ver um exercício como esse se sentiriam tentados a multiplicar a inequação por $x-1$ em ambos os lados da desigualdade obtendo

$$2x - 3 \leq 2(x-1) \ \Leftrightarrow \ 2x - 3 \ \leq 2x - 2 \ \Leftrightarrow -3 \ \leq \ -2$$

como $-3 \ \leq \ -2$ é uma sentença verdadeira, o conjunto solução da inequação seria $S = \mathbb{R}$, chegando assim em uma resposta incorreta. O erro ao se fazer tal procedimento está no fato de que $x-1$ pode assumir valores negativos e sendo assim haveria a necessidade de estudar os casos e inverter o sinal da inequação em um deles.

Resolveremos agora esses problemas de comparação entre inequações fazendo o uso das visualizações gráficas de cada função e utilizando o GeoGebra como o nosso software de apoio:

Exemplo : Resolver em $\mathbb{R}$, a inequação:

$$2x - 4 > x + 1$$

seja $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = x + 1$ construindo simultaneamente as funções no software obtemos a seguinte figura:

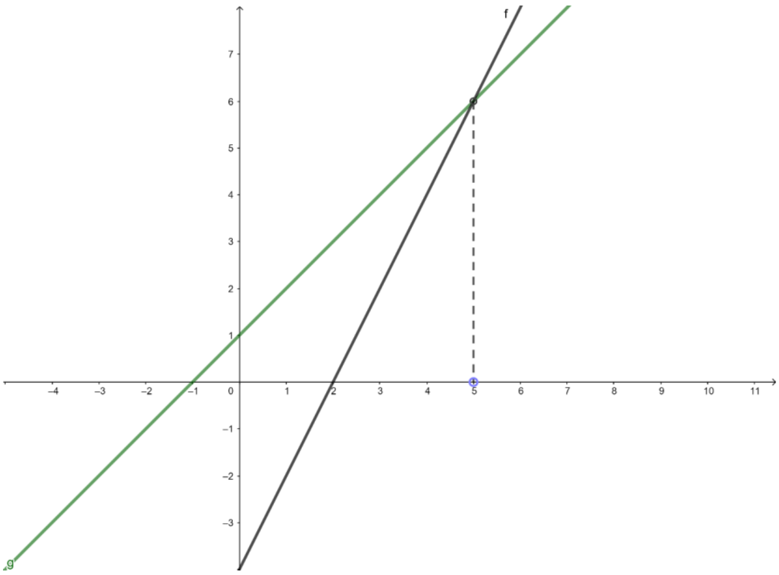


Figura 18-Comparação entre funções

Observemos que a função f assume valores maiores que $g(x)$ a partir do ponto de interseção em $x = 5$, em outras palavras, para todo valor de $x > 5$ temos $f(x) > g(x)$, ou seja ,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}.$$

Exemplo : Resolver em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação: (essa construção segue passa a passo no apêndice do trabalho)

$$x^2 - x - 12 \geq 2x - 8$$

Tomemos $f(x) = x^2 - x - 12$ e $g(x) = 2x - 8$, construindo no mesmo eixo cartesiano ambos os gráficos das funções $f\ e\ g$, temos:

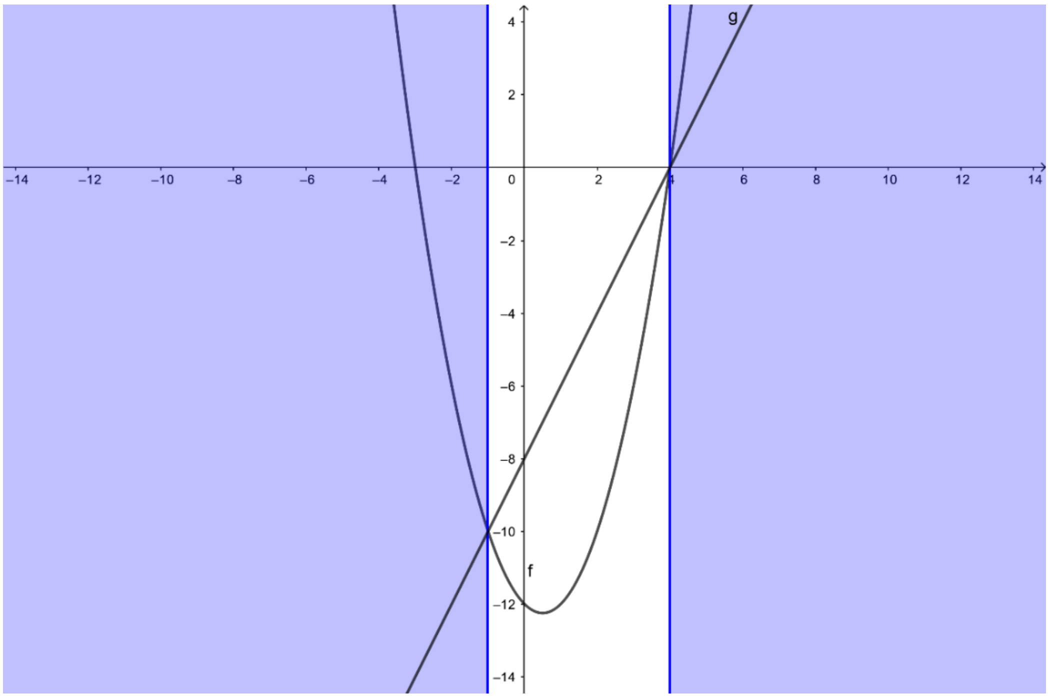


Figura 19- exemplo comparação parábola

Observamos que o gráfico de f (parábola) é maior ou igual ao de $g(x)$ na área azul da figura ou seja:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \; ou \; x \geq 4\}$$

3.5.1 -Inequações Simultâneas

A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x, separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x) < h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) & (I) \\ \quad e & \\ g(x) < h(x) & (II) \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto-solução de (I) e S_2 o conjunto-solução de (II), o conjunto-solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo

Resolver $3x + 2 < -x + 3 \leq x + 4$

Temos que resolver duas inequações:

(1) $3x + 2 < -x + 3 \Rightarrow 4x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$

(2) $-x + 3 \leq x + 4 \Rightarrow -2x \leq 1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

A intersecção desses dois conjuntos é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{4}\right\}.$$

3.5.2 - Inequações Produto

Sendo f e g duas funções na variável x, as inequações $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ são denominados inequações-produto. Vejamos, por exemplo, como determinamos o conjunto solução S da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$.

De acordo com a regra de sinais do produtos de números reais, um número x_0 é solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$ são não nulos e tem o mesmo sinal. Assim, são possíveis dois casos:

1º) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

Se S_1 e S_2 são respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto-solução do sistema.

2º) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações, então

$S_3 \cap S_4$ é o conjunto-solução do sistema.

Daí concluímos que o conjunto-solução da inequação do produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ é $S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$

Raciocínio análogo seria feito para a inequação

$$f(x) \cdot g(x) < 0.$$

Exemplo:

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(2x - 4)(x + 1) > 0$.

Analisando os dois casos possíveis

1º) caso

Cada um dos fatores é positivo, isto é:

$$2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad \text{e} \quad x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1.$$

A intersecção das duas soluções é

$$S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}.$$

2º) caso

Cada um dos fatores é negativo, isto é:

$2x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2 \quad \text{e} \quad x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

A intersecção das duas soluções é

$$S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}.$$

O conjunto-solução da inequação $(2x - 4)(x + 1) > 0$ é:

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}.$$

Portanto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \ ou \ x > 2\}.$$

Vejamos agora outro processo para a resolução dessa inequação:

Na inequação $(2x - 4)(x + 1) > 0$ chamaremos $2x - 4$ e $x + 1$ de $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente, cujos gráficos são dados abaixo

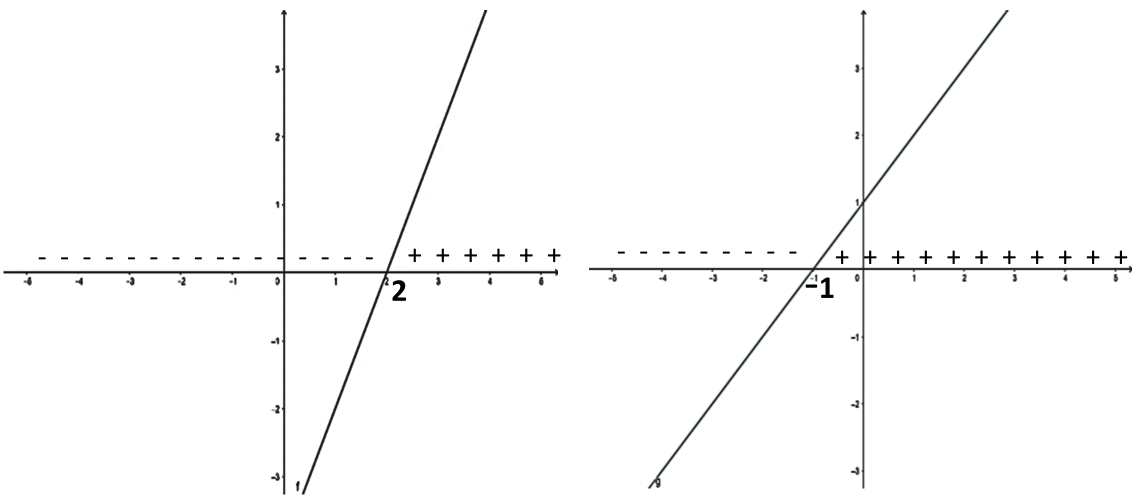


Figura 14 - Análise de sinais

Assim, temos a seguinte representação dos sinais de $f, g\ \ e\ \ f \cdot g$.

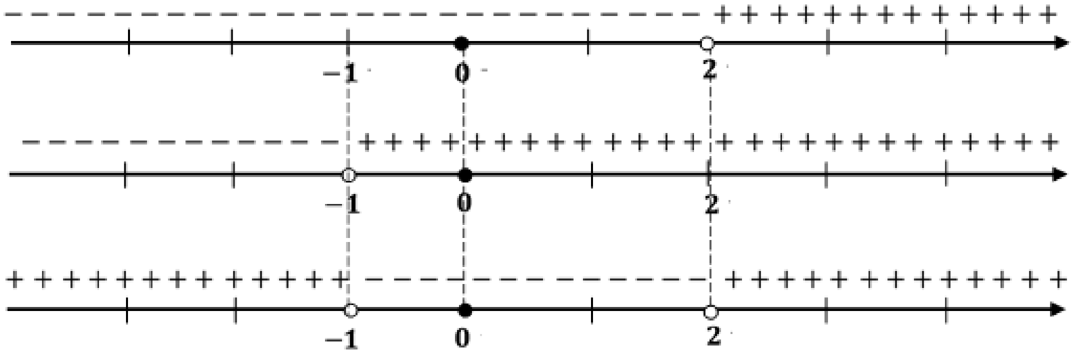


Figura 15 - Análise Tabular

Portanto o conjunto solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ é dado por :

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \ ou\ x > 2\}.$$

A inequação $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ tem por conjunto-solução S a reunião do conjunto-solução S_1 da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ com o conjunto solução S_2 da equação $f(x) \cdot g(x) = 0$, isto é

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) > 0 \\ \quad ou \\ f(x) \cdot g(x) = 0 \end{cases}$$

Exemplo

Resolver a inequação $(2x - 4)(x + 1) \geq 0$ em $\mathbb{R}$.

A inequação $(2x - 4)(x + 1) \geq 0$ é equivalente a:

$$\begin{cases} (2x - 4)(x + 1) > 0 \quad (I) \\ \quad ou \\ (2x - 4)(x + 1) = 0 \quad (II) \end{cases}$$

Pelo exemplo anterior obtemos a solução de (I) : $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\ ou\ x > 2\ \}$.

Resolvendo (II) temos $S_2 = \{-1{,}2\ \}$.

O conjunto-solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\ ou\ x > 2\} \cup \{-1{,}2\ \} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\ ou\ x \geq 2\}.$$

Exemplo: Resolver em ℝ a inequação $(x^2 - x - 12)(2x - 8) \leq 0$.

Seja $f(x) = x^2 - x - 12$ e $g(x) = 2x - 8$ e fazendo a análise tabular, temos:

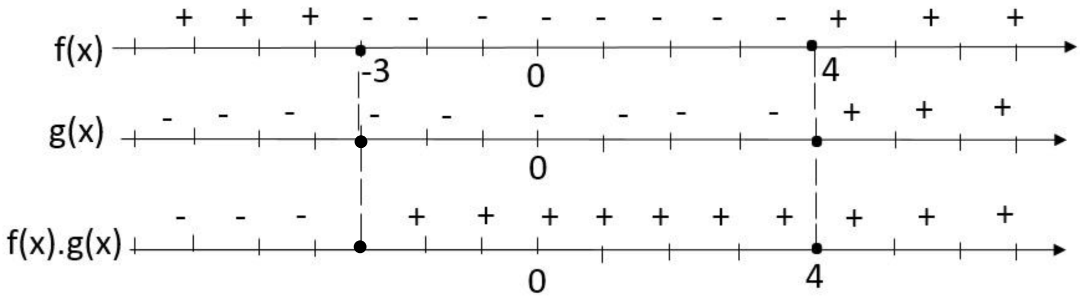


Figura 16 - Análise Tabular

Portanto o conjunto solução de nossa inequação fica:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}.$$

Dentre as inequações-produto, são importantes as inequações: $[f(x)]^n > 0$, $[f(x)]^n < 0$, $[f(x)]^n \geq 0$ e $[f(x)]^n \leq 0$, onde $n \in \mathbb{N}^*$

Para resolvermos estas inequações, vamos lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:

1º) "toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base", isto é

$$\begin{aligned} a^{2n+1} > 0 &\Leftrightarrow a > 0 \\ a^{2n+1} = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \\ a^{2n+1} < 0 &\Leftrightarrow a < 0 \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

2º) "toda potência de base real e expoente par é um número real não negativo", isto é

$$a^{2n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim sendo temos as seguintes equivalências:

$$[f(x)]^n > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \; se\ n\ é\ ímpar \\ f(x) \neq 0 \;\; se\ n\ é\ par \end{cases}$$

$$[f(x)]^n < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \; se\ n\ é\ ímpar \\ \nexists x \in \mathbb{R} \;\; se\ n\ é\ par \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \; se\ n\ é\ ímpar \\ \forall x \in D(f) \;\; se\ n\ é\ par \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \; se \; n \; é \; ímpar \\ f(x) = 0 \;\; se \; n \; é \; par \end{cases}$$

Exemplos:

1º) $(3x-2)^3 > 0 \Leftrightarrow 3x - 2 > 0$; $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

2º) $(4x-3)^6 > 0 \Leftrightarrow 4x - 3 \neq 0$; $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{4}\right\}$

3º) $(2x+1)^5 < 0 \Leftrightarrow 2x + 1 < 0$; $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$

4º) $(x-2)^4 < 0$; $\quad S = \emptyset$

5º) $(3-5x)^7 \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 5x \geq 0$; $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{5}\right\}$

6º) $(4x-5)^2 \geq 0$; $\quad S = \mathbb{R}$

7º) $(8-2x)^4 \leq 0 \Leftrightarrow 8 - 2x = 0$; $\quad S = \{4\}$

3.5.3 - Inequações Quociente

Sendo f e g duas funções na variável x, as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \quad e \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

são denominadas inequações-quociente.

Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos fazer a análise tabular da mesma forma que feito com o produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

3.6 - Inequações com Raízes Racionais

Nesta seção mostraremos alguns resultados da álgebra que podem ser útil na resolução de inequações do tipo $f(x) > 0$, onde f possui raízes racionais.

A seguir apresentaremos um teorema que mostra como encontrar os candidatos à raiz racional de um polinômio com coeficientes inteiros.

Teorema 1 : Sejam $p\ e\ q$ inteiros primos entre si. Se $\frac{p}{q}$ é uma solução da equação $P(x) = 0$, onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ $(a_n \neq 0\ e\ a_0 \neq 0)$, cujos coeficientes são inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração: Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$, então devemos ter:

$$a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \Rightarrow$$

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1} = -\frac{a_0 q^n}{p}$$

Vemos que o primeiro membro da igualdade representa um número inteiro (afinal $p, a, a_n, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1 e\ a_0$ são números inteiros), assim $-a_0 q^n/p$ também é um número inteiro. Logo, $a_0 q^n$ é divisível por p e, como $p\ e\ q$ são primos entre si, segue que p é divisor de a_0.

Analogamente obtemos

$$a_n q^{n-1} + a_{n-1}pq^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1} = -\frac{a_n p^n}{q}$$

e, seguindo raciocínio análogo, podemos concluir que q é divisor de a_n.

É importante observar que essa propriedade não garante a existência de raízes racionais nas equações algébricas com coeficientes inteiros, mas se estas existirem, a propriedade nos apresenta um critério para determina-las.

Definição. Considerando os polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não nulo, dividir $p(x)$ por $h(x)$ é determinar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

$$p(x) = h(x) \cdot q(x) = r(x)$$

$$grau(r) < grau(h) \; ou \; r(x) \equiv 0.$$

A diferença entre o grau do dividendo e o do divisor, ou seja, $grau(q) = grau(p) - grau(h)$ determina o grau do quociente na divisão de polinômios. Quando é obtido $r(x) \equiv 0$ dizemos que $p(x)$ é divisível por $h(x)$. A divisão não exata estará finalizada quando $grau(r) < grau(h)$.

Teorema 2 : O resto da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$ é igual a $f(a)$.

Demonstração: Da divisão de $f(x)$ por $x - a$, podemos escrever: $f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x)$, com $q(x)$ e $r(x)$ unicamente determinados e tais que $r(x)$ tem grau menor do que o grau de $(x - a) = 1$. Assim, $r(x)$ é um polinômio constante, isto é, $r(x) = c$.

Calculando os valores desses polinômios para $x = a$, vem

$$f(a) = (a - a) \cdot q(a) + r(a)$$

Isto é, $r(a) = f(a)$. Como $r(x) = r(a) = c$ e $r(a) = f(a)$ segue que $r(x) = f(a)$.

Uma consequência importante do Teorema do Resto é o Teorema de D'Alembert, que enunciamos e demonstraremos a seguir:

Teorema 3: Um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a for raíz de f.

Demonstração: Há duas implicações a provar:

(i) $f(x)$ ser divisível por $x - a$ implicar que a é raíz de f. De fato, se $f(x)$ é divisível por $x - a$, temos $r = 0$ e, pelo Teorema do resto, $r = f(a) = 0$, do que concluímos que a é raíz de f.

(ii) a é raíz de $f(x)$ implicar que $f(x)$ é divisível por $x - a$. Com efeito, como a é raíz de $f(x)$, temos $f(a) = 0$, pelo Teorema do resto, o resto r da divisão de $f(x)$ por $x - a$ é igual a $f(a)$. Assim, $r = f(a) = 0$, mostrando que $f(x)$ é divisível por $x - a$.

A seguir veremos como utilizar estes teoremas na resolução de inequações

Exemplo

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação: $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} > 0$.

Resolução:

Primeiro obtemos uma inequação equivalente em termos de uma função polinomial com coeficientes inteiros.

Temos

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} > 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^3 - x^2 + 2x - 1 > 0$$

Considere agora $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ onde $a_3 = 2$ e $a_0 = -1$. Pelo teorema 1 se $\frac{p}{q}$ é uma raíz de $f(x)$ então p divide (-1) e q divide 2, assim os candidatos à raiz racional de $f(x)$ é $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm\frac{1}{2}$. Calculando os valores $f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ é verificado que apenas $\frac{1}{2}$ é raíz de $f(x)$. Agora segue do teorema 3 que $f(x)$ é divisível por $x - \frac{1}{2}$.

Efetuando a divisão de $f(x)$ por $x - \frac{1}{2}$, obtemos $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$. Observe que $g(x) = (x^2 + 1)$ é uma função quadrática onde $a = 1 > 0$, $b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$ assim $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim o sinal de $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)$, coincide com o sinal de $x - \frac{1}{2}$, ou seja ,

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} > 0 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{1}{2} > 0 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{2}.$$

Portanto, o conjunto da inequação $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} > 0$ é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}.$$

CAPÍTULO 4 - MÉTODO PRÁTICO PARA INEQUAÇÔES COM RAÍZES SIMPLES

Nesta seção apresentaremos um método prático de resolução de inequações do tipo $f(x) > 0$, para uma função polinomial $f(x)$ dada por

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n),$$

onde $a_0 \in \mathbb{R}^*, e \; r_1, r_2, \dots, r_n$ são números reais, distintos dois a dois.

Podemos supor que $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ sem perda de generalidade. Então, as n raízes (com $n \in \mathbb{N}^*$) determinam $n + 1$ intervalos abertos, como segue:

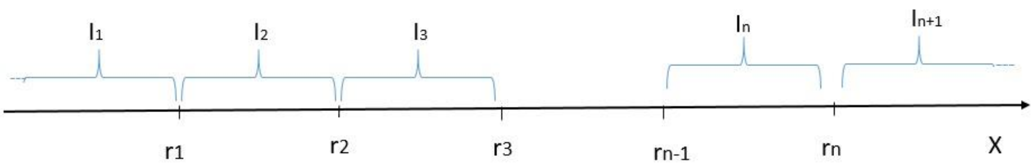


Figura 17- intervalos

A seguir demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema 1: Seja $f(x)$ um polinômio real com todas as suas raízes r_i reais e simples. Seja $I_p = \left(r_{p-1}, r_p\right)$ e seja x_0 um elemento qualquer de I_p. Nessas condições:

- Se $f(x_0) > 0$, então $f(x) > 0$, para todo $x \in I_p$;
- Se $f(x_0) < 0$, então $f(x) < 0$, para todo $x \in I_p$.

Isto é, dentro de I_p, $f(x)$ não muda de sinal.

Demonstração: Um dos segredos para agilizar a demonstração consiste em representar esses intervalos de maneira prolixa; em vez de $I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < r_1\}$, que é uma maneira correta, usamos a seguinte notação, também correta, mas redundante:

$$h = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x < r_1) \wedge (x < r_2) \wedge \dots \wedge (x < r_n)\right\}.$$

De forma análoga, o intervalo $I_p = \left\{x \in \mathbb{R} \mid r_{p-1} < x < r_p\right\}$, pode ser dado como segue:

$$I_p = \left\{x \in \mathbb{R} \mid (x > r_1) \wedge (x > r_2) \wedge \dots \wedge (x > r_{p-1}) \wedge \\ (x < r_p) \wedge (x < r_{p+1}) \wedge \dots \wedge (x < r_n)\right\}.$$

O último intervalo, I_{n+1}, será expresso assim:

$$I_{n+1} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > r_1) \wedge (x > r_2) \wedge \dots \wedge (x > r_n)\}.$$

Com essas considerações, deste ponto em diante, usaremos o termo raízes consecutivas para indicar qualquer par de raízes $\{r_p\ ,\ r_{p+1}\}$. Também usaremos o termo intervalos consecutivos para indicar qualquer par de intervalos $\{I_p\ ,\ I_{p+1}\}$.

Encerrando estas preliminares, vamos observar que as inequações $x < r$ e $x - r < 0$ são equivalentes, assim como as inequações $x > s$ e $x - s > 0$ são equivalentes. Logo, fica estabelecido que o intervalo I_p, com $1 < p \leq n$, pode ser descrito como segue:

$I_p = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - r_1 > 0) \wedge \ldots \wedge (x - r_{p-1} > 0) \wedge (x - r_p < 0) \wedge (x - r_{p+1} < 0) \wedge \ldots \wedge (x - r_n < 0)\}$.

Vamos retomar o polinômio descrito anteriormente,

$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$,

e atribuir a x dois valores u e v , ambos num mesmo intervalo $I_{p=}(r_{p-1}, r_p)$. Analisemos, agora, o produto $f(u) . f(v)$:

$$f(u) = a_0 . \prod_{i-1}^{n} (u - r_i) \ \ e \ \ f(v) = a_0 . \prod_{i-1}^{n} (v - r_i)$$

Empregando as propriedades associativa e comutativa da multiplicação, obtemos:

$$f(u). f(v) = a_0^2 . \prod_{i=1}^{n} (u - r_i)(v - r_i) \qquad (*)$$

Como u e v estão ambos num mesmo intervalo $I_p = (r_{p-1}, r_p)$ se tivermos $u - r_i > 0$, resultará também que $v - r_i > 0$. Do mesmo modo, se para um certo i, tivermos $u - r_i < 0$, resulta também $v - r_i < 0$.

Assim,

$[(u - r)(v - r_i)] > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$.

Além disso, $a_0^2 > 0$, pois $a_0 \in \mathbb{R}^*$.

Segue que o segundo membro de $(*)$ é um produto de fatores todos positivos e, portanto, $f(u). f(v) > 0$. Assim, $f(u) > 0$ e $f(v) > 0$, ou $f(u) < 0$ e $f(v) < 0$, ou seja , $f(x)$ não muda de sinal em cada intervalo I_p. $\square$

Mostraremos agora como se comporta o sinal da f em intervalos consecutivos.

Teorema 2**:** Seja, $f(x)$ um polinômio real com todas as suas raízes reais e simples, e sejam I_p e I_{p+1} dois intervalos consecutivos quaisquer. Então, em I_p e I_{p+1}, $f(x)$ terá sinais contrários. Isto é, $f(x)$ assume valores numéricos de sinais contrários, quando a variável x passa de um intervalo a um intervalo consecutivo.

Demonstração:

Considere o polinômio $f(x)$ descrito anteriormente, vamos detalhar $f(x)$ do seguinte modo:

$f(x) = a_0(x-r_1)(x-r_2)\dots(x-r_{p-1})(x-r_p)(x-r_{p+1})\dots(x-r_n)$.

Desta vez atribuiremos à variável x dois valores u e v pertencentes a intervalos consecutivos: $u \in I_p\ e\ v \in I_{p+1}$.

Como no polinômio anterior, iremos obter o sinal do produto $f(u)\cdot f(v)$ e, para isso, vamos explicitar os seus fatores do seguinte modo:

$$f(u)\cdot f(v) = a_0^2 \cdot \prod_{i=1}^{p-1}[(u-r_i)(v-r_i)]\cdot[(u-r_p)(v-r_p)]\cdot\prod_{i=p+1}^{n}[(u-r_i)(v-r_i)]$$

Com relação ao segundo membro, observe-se que:

- de $a_0 \in \mathbb{R}^*$, tem-se que $a_0^2 > 0$,

- para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que $1 \le i \le p-1$, tem-se que $u > r_i$ e

$v > r_i$ (pois $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$) e, portanto, segue que:

$$\prod_{i=1}^{p-1}[(u-r_1)(v-r_1)] > 0.$$

Agora para todo $i \in \mathbb{R}$, tal que $p+1 < i < n$, tem-se que $u < r_i$ e $v < r_i$ (pois $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$) e, portanto, segue que:

$$\prod_{i=p+1}^{p-1}[(u-r_1)(v-r_1)] > 0.$$

Resta analisar o produto $(u-r_p)(v-r_p)$. Ora,

$u \in I_p \Rightarrow u-r_p < 0$ e $v \in I_{p+1} \Rightarrow v-r_p > 0$.

Logo, $(u-r_p)(v-r_p) < 0$.

Dessas quatro observações, podemos concluir que $f(u)\,.\,f(v) < 0$, ou seja $f(u)$ e $f(v)$ tem sinais trocados em I_p.

Os dois teoremas demonstrados nos itens anteriores nos permitem afirmar que o sinal do polinômio $f(x)$ alterna quando x passa de um intervalo a um intervalo consecutivo (situado à sua esquerda ou à sua direita, indiferentemente).

Ora, isso permite obter a distribuição completa, de sinais de $f(x)$ em $\mathbb{R} - \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, bastando conhecer as raízes e o sinal de $f(x)$ em apenas um valor de x escolhido em qualquer dos intervalos I_p.

Exemplo

Dar a distribuição de sinais do polinômio

$f(x) = 14(x - 5)(x + 3)(7 - 4x)(x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$

Resolução:

Inicialmente vamos reescrever $f(x)$ como no teorema anterior.

Temos $f(x) = 14(x-5)(x+3).(-4)\left(x - \frac{7}{4}\right)(x+1)$, ou seja,

$$f(x) = -56(x-(-3))(x-(-1))\left(x-\frac{7}{4}\right)(x-5).$$

As raízes, que são $-3, -1, \frac{7}{4}$ e 5, determinam os intervalos descritos abaixo:

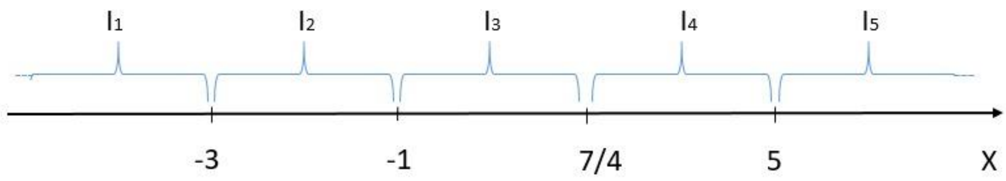


Figura 18 - intervalos

Vamos escolher (arbitrariamente) $x = 0$ $(0 \in I_3)$.

$$f(0) = -56(-5)(3)\left(-\frac{7}{4}\right)(1)$$

$$f(0) < 0 \quad \text{(três fatores negativos).}$$

Logo, $f(x)$ é negativo em I_3. Então, aplicando os teoremas 1 e 2:

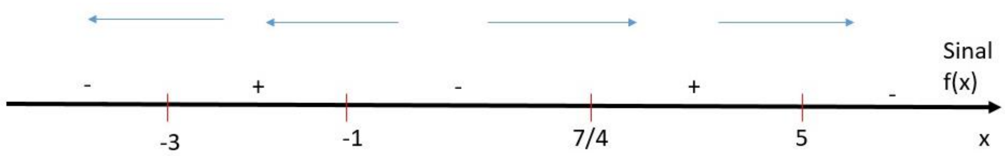


Figura 19 - sinais

Exemplo

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação : $(4x^3 - 9x)(x - 3) < 16\,(x^2 - 3x).$

Resolução:

Inicialmente, devemos obter uma inequação $g(x) \ < \ 0$, equivalente à inequação dada e com $g(x)$ na forma definida anteriormente.

$$x(4x^2 - 9)(x - 3) - 16x(x - 3) \ < \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 3)(4x^2 - 25) \ < \ 0 \ \Leftrightarrow$$

$$4x(x-3)\left(x^2 - \frac{25}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow 4x(x-3)\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right) < 0$$

Observa-se que o polinômio $g(x) = 4\left(x + \frac{5}{2}\right)(x)\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-3)$ satisfaz todas as condições dos Teoremas 1 e 2. Suas raízes determinam os seguintes intervalos:

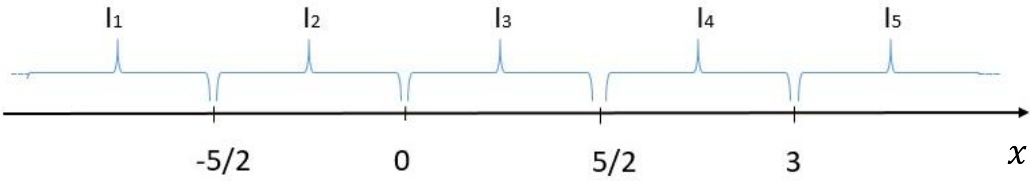


Figura 20 - intervalos

Vamos atribuir a x o valor 10 (escolhido arbitrariamente em I_5):

$$g(10) = 4\left(10 + \frac{5}{2}\right)(10)\left(10 - \frac{5}{2}\right)(10 - 3) > 0$$

Logo, $g(x)$ é positivo em I_5. Pelos teoremas 2 e 3, resulta:

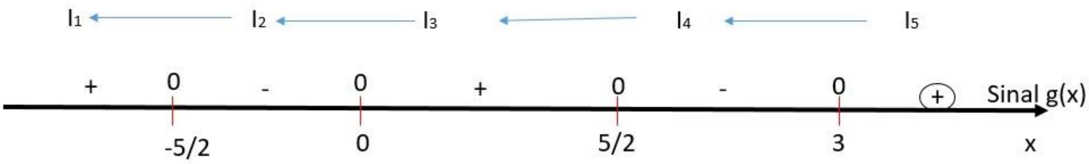


Figura 21 - intervalos

Finalmente, a inequação $g(x) \ < \ 0$, que é equivalente à inequação dada, tem como conjunto solução a união dos intervalos I_2 e I_4:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(-\frac{5}{2} < x < 0\right) ou \left(\frac{5}{2} < x < 3\right)\right\}.$$

4.1 - Inequações Racionais com Raízes Simples

O método aqui exposto para resolver inequações de funções polinomiais com raízes reais e simples pode ser aplicado para resolver inequações quociente do tipo

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0\,, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \quad , \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções polinomiais com raízes e simples. De fato, como o sinal de $\frac{1}{g(x)}$ coincide com o sinal de $g(x)$ para $g(x) \neq 0$, então

o sinal de $\frac{f(x)}{g(x)}$ coincide com o sinal de $f(x) \cdot g(x)$ para $g(x) \neq 0$.

Exemplo

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação: $\frac{2(-15-5x)(x+1)}{x^2-16} \geq 0$

Resolução:

A inequação dada pode ser expressa na forma:

$\frac{-10(x+3)(x+1)}{(x-4)(x+4)} \geq 0$ que é da forma $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

As raízes -3 e -1 de $f(x)$, 4 e -4 de $g(x)$ determinam os seguintes intervalos:

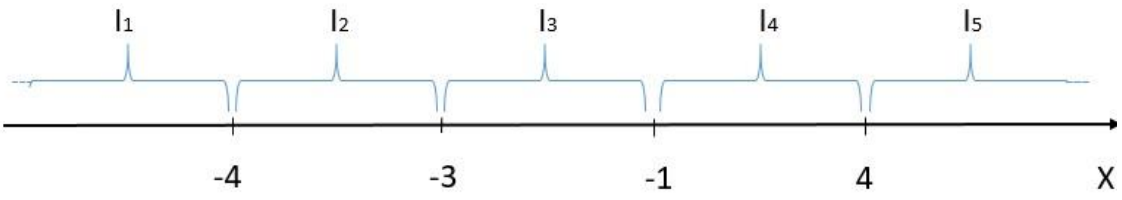


Figura 22 - intervalos

Sendo $x = 10$, obtemos

$\frac{-10(10+3)(10+1)}{(10-4)(10+4)} < 0$ (o quociente é negativo em I_3)

Aplicando os teoremas 2 e 3, temos a seguinte distribuição de sinais:

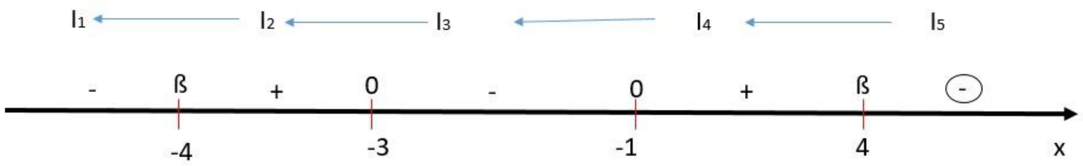


Figura 23-intervalos e sinais

Segue que o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid (-4 < x \leq -3) \ ou \ (-1 \leq x < 4)\}$$

4.2 - Inequações com Raízes Múltiplas

Consideremos, agora, um polinômio do tipo $A(x) = (x - r)^{2m}$, onde $m \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$. Neste caso diz-se que r é uma raiz de $A(x)$ de multiplicidade $2m$ (par). Quanto aos sinais de $A(x)$ temos

- $A(x) = 0$ se, e somente se, $x = r$;
- para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq r$, tem-se $A(x) > 0$.

Usando esta observação podemos concluir que se $P(x) = g(x) \,.\, (x - r)^{2m}$, com $m \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$, e onde $g(x)$ é um polinômio do qual r não é raiz., então

$P(r) = 0$, e para $x \neq r$, $P(x)$ terá a mesma distribuição de sinais que $g(x)$.

Isto é, para obter a distribuição de sinais de $P(x)$, com $x \neq r$, pode-se omitir o fator $(x - r)^{2m}$ e estudar a distribuição de sinal de $g(x)$.

Exemplo

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)^6 < 0$.

Resolução:

Estudemos a distribuição do sinal de $f(x) = (x - 1)(x - 2)$, obtido pela omissão de $(x - 3)^6$. Repare-se que $f(0) > 0$ (logo, $f(x)$ é positivo em I_1).

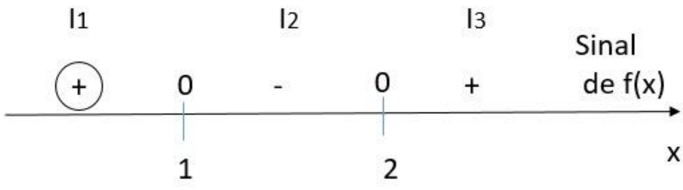


Figura 24 - sinais de f(x)

A distribuição de sinal de $P(x) = f(x) \,.\, (x - 3)^6$ é :

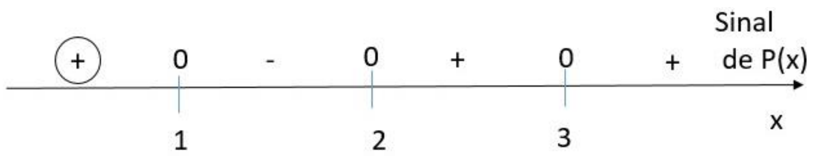


Figura 25 - Sinal P(X)

O conjunto solução da inequação dada é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 2\} \cup \{3\}.$$

Seja agora $P(x) = g(x) . (x - r)^{2m+1}$, onde $m \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}$ e $g(x)$ é um polinômio do qual r não seja raiz. Neste caso r é uma raiz de multiplicidade ímpar de $P(x)$.

Note-se que $P(x) = g(x)(x - r)(x - r)^{2m}$ e, consequentemente, $P(x)$ tem a mesma distribuição de sinais que $g(x) . (x - r)$.

Finalmente, seja $P(x) = f(x)(ax^2 + bx + c)$, onde $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ e $f(x)$ é um polinômio como foi definido anteriormente.

Nessas condições, $ax^2 + bx + c$ é positivo para todo $x \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $P(x)$ terá a mesma distribuição de sinais que $f(x)$. Portanto, para estudar o sinal de $P(x)$, pode-se simplesmente omitir o fator $ax^2 + bx + c$.

4.3 - Análise gráfica do Teorema de Raízes Simples

O teorema 1 acima vale inclusive para o caso em que a função não se decompõe como produto de n raízes simples. De fato, considere uma função polinomial:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

com raízes $r_0 < r_1 < \ldots < r_k$. Em particular $f(x)$ é uma função contínua, assim se $u, v \in I_p = (r_{p-1}, r_p)$ então

caso I: $f(u) > 0$ e $f(v) > 0$;

caso II: $f(u) < 0$ e $f(v) < 0$,

De fato, supondo sem perda de generalidade que $u < v$ com $f(u) > 0$ e $f(v) < 0$, então pela continuidade de f(x) existiria um $x \in (u, v)$ tal que $f(x) = 0$,

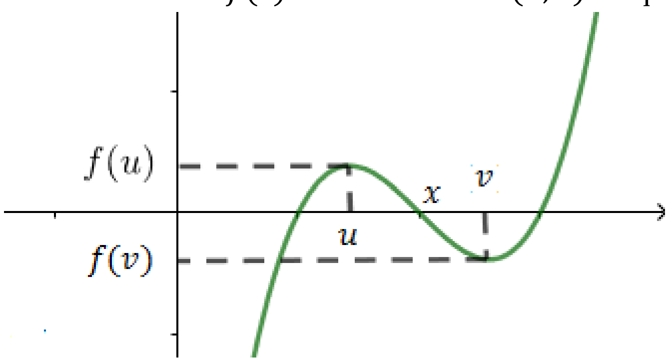


Figura 26 - Representação

ou seja existiria $x \in I_p = (r_{p-1}, r_p)$ tal que f(x) $= 0$, contrariando o fato de não existir raíz entre duas raízes consecutivas.

A afirmação de que o sinal da função alterna entre intervalos consecutivos verificada no teorema 2, continua verdadeira inclusive para o caso mais geral onde a função não possui necessariamente todas as n raízes reais e simples, basta que as raízes reais que existirem sejam simples. De fato, considere uma função polinomial:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com raízes $r_0 < r_1 < \ ... < \ r_k$, onde cada raiz r_ié simples.

Suponha por absurdo que existam $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$ tais que $f(u) > 0$ e $f(v) > 0$

Como r_p é raiz de $f(x)$ e pelo teorema anterior $f(x)$ mantém o sinal em I_p e I_{p+1}, então em torno de r_p $f(x)$ seria da forma

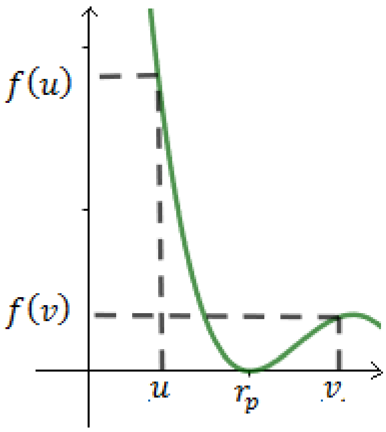


Figura 27 - Curva

Observe que neste caso devemos ter $f'(r_p) = 0$.

Por outro lado, reescrevendo

$f(x) = (x - r_p)\, g(x)$, com $g(x) = a_0 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n} (x - r_i)$,

temos $f'(x) = (x - r_p)' g(x) + g'(x)(x - r_p) = g(x) + g'(x)(x - r_p)$.

Aplicando em r_p obtemos $f'(r_p) = g(r_p) \neq 0$. Analogamente não podemos ter $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$ tais que $f(u) < 0$ e $f(v) < 0$, portanto para $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$ temos $f(u)$ e $f(v)$ com sinais alternados.

CAPÍTULO 5 - INEQUAÇÕES DO TIPO $\boldsymbol{f(x) < y < g(x)}$.

O conjunto solução de uma inequação da forma $y > f(x)$, é o conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > f(x)\}$$

Graficamente este conjunto solução representa a parte superior do gráfico da função $y = f(x)$, como ilustrado na imagem abaixo:

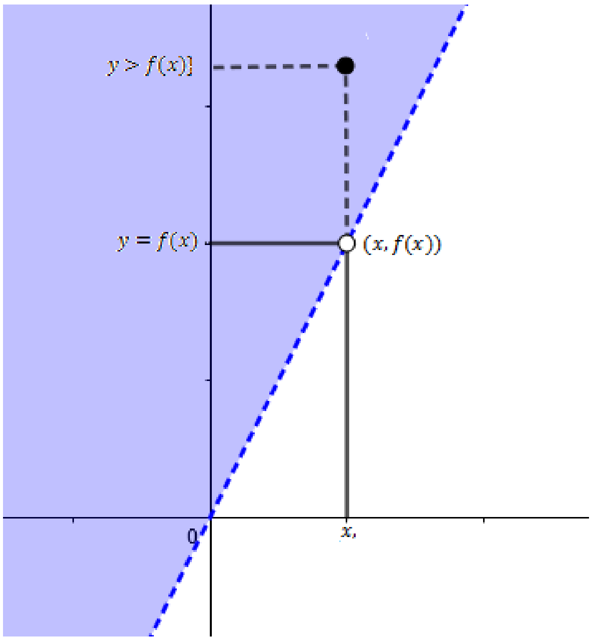


Figura 28 - Conjunto solução

Analogamente o conjunto solução de $y < f(x)$ é o conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < f(x)\}$$

Graficamente este conjunto solução representa a parte inferior do gráfico da função $y = f(x)$.

Exemplo

Abaixo temos uma representação do conjunto solução da equação $y = 2x$ e das inequações $y > 2x$ e $y < 2x$

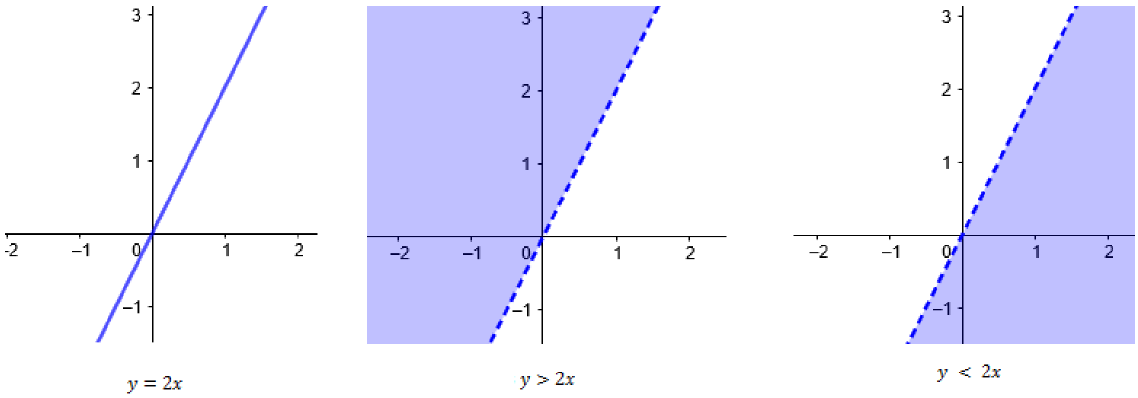


Figura 29 - Conjunto solução

Exemplo

Abaixo temos uma representação das inequações $y > x^2$ e $y < x^2$

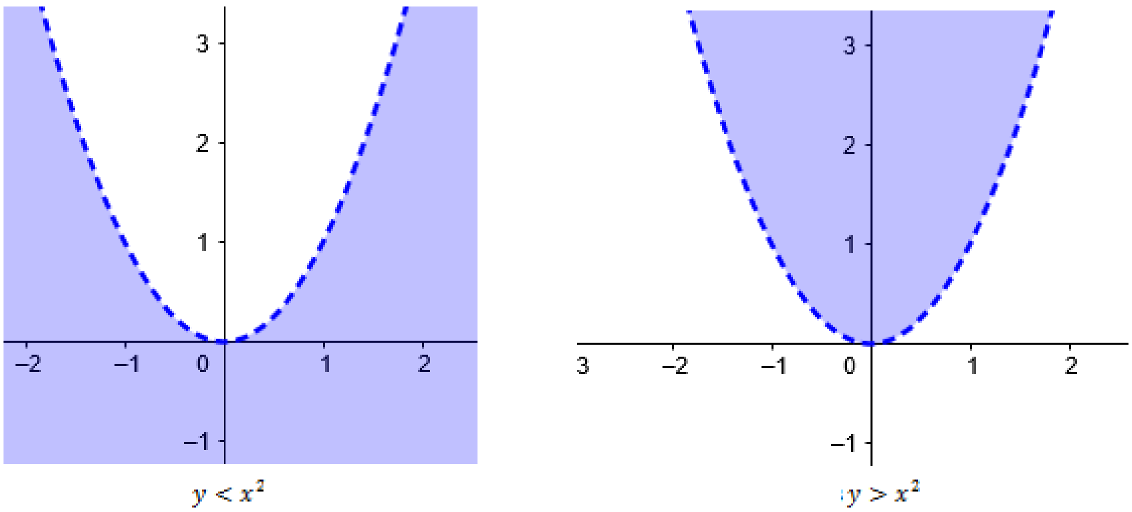


Figura 30 - Conjunto Solução

O conjunto solução de um sistema da forma

$$\begin{cases} y > f(x) \\ y < g(x) \end{cases}$$

é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > f(x) \ \ e \ \ y < g(x)\}$$

Graficamente este conjunto solução representa a intersecção da parte superior ao gráfico da função $y = f(x)$ e da parte inferior ao gráfico da função $y = g(x)$

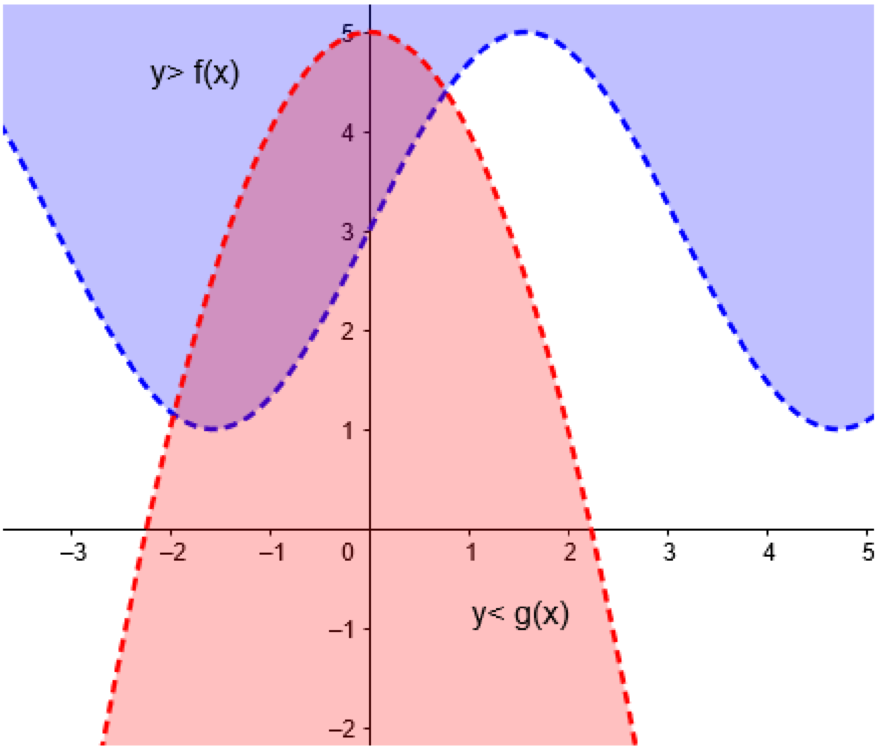


Figura 31 - Conjunto Solução

Exemplo

Abaixo temos uma representação da solução do sistema

$$\begin{cases} y > x \\ y < -x^2 + 1 \end{cases}$$

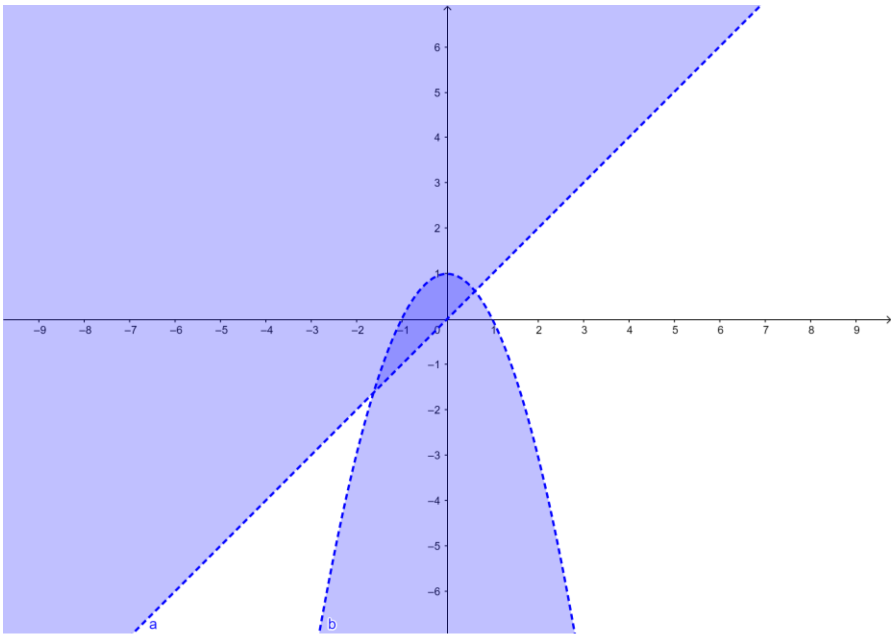


Figura 32 - Intersecções de curvas

Exemplo

Abaixo temos uma representação da solução da inequação $x^2 + y^2 < 1$.

Observe que esta inequação se traduz em um sistema de equações, de fato

$$x^2 + y^2 < 1 \iff y^2 < 1 - x^2 \iff \begin{cases} y > -\sqrt{1 - x^2} \\ y < \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

Abaixo temos a representação das inequações $y > -\sqrt{1 - x^2}$ e $y < \sqrt{1 - x^2}$

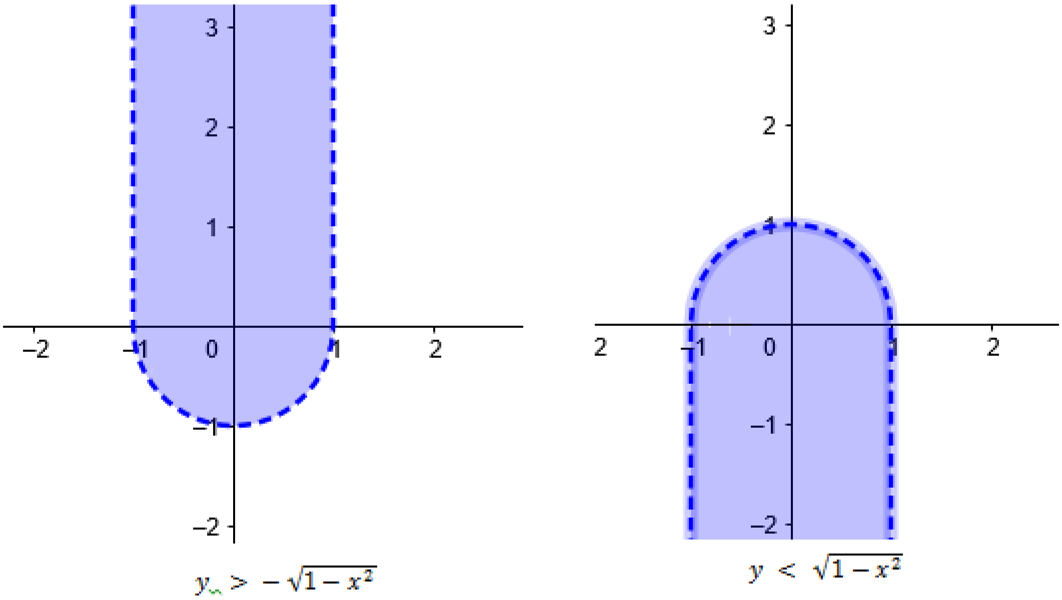


Figura 33 - Conjunto Solução

Assim, o conjunto solução da inequação $x^2 + y^2 < 1$ é solução do sistema $\begin{cases} y > -\sqrt{1 - x^2} \\ y < \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$ e é representado graficamente pela região interior ao círculo unitário centrado na origem

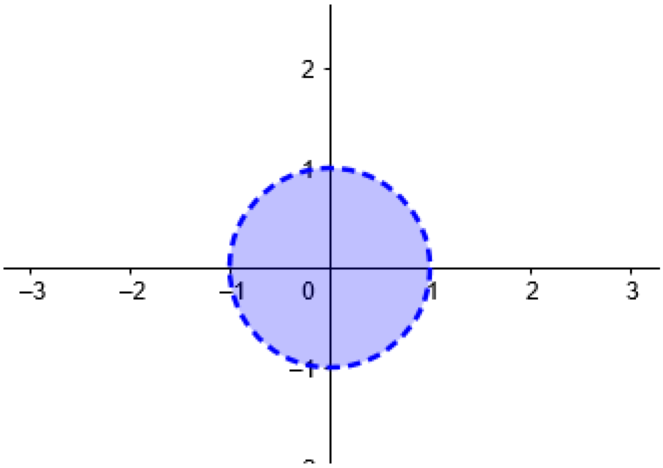


Figura 34 – Circunferência

Observe que $x^2 + \ y^2 = 1$ representa a equação de um círculo unitário centrado na origem, e o conjunto solução da inequação $x^2 + \ y^2 < 1$ é representado graficamente pela região interior a este círculo. De maneira análoga obtém-se que o conjunto solução da inequação $x^2 + \ y^2 > 1$ é representado graficamente pela região exterior a este círculo

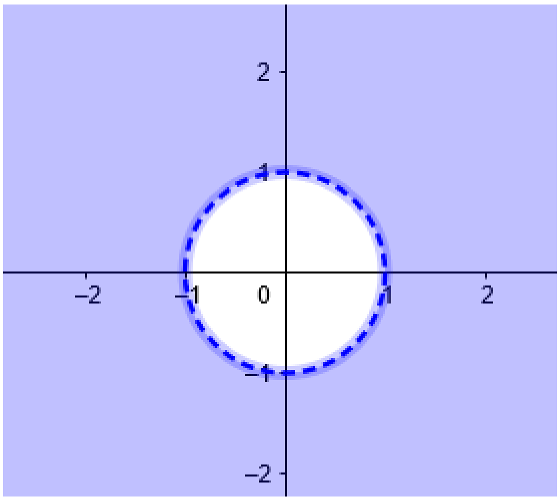


Figura 35 – Circunferência complementar

Utilizando a geometria analítica é possível chegar a soluções de inequações mais geral do tipo $ax^2 + \ b\,y^2 + cxy + dx\ + e\,y\ + f\ > 0$.

Exemplo

Representar graficamente a solução da inequação

$$9x^2 - 4\,y^2\ - 54\,x\ + 8\,y + 113 > 0.$$

Agrupando os termos de mesma variável, temos

$$(9x^2 - 54\,x) - (4\,y^2 - 8y) > -113.$$

Colocando em evidência os coeficientes de x^2 e y^2

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) > -113$$

Ou, $9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) > -113 + 9(9) - 4(1)$

Obtendo $9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 > -36.$

Dividindo ambos os lados da inequação por -36 obtemos

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} < 1.$$

Sabemos que

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

é equação de uma hipérbole com centro em $C = (3,1)$ e eixo real paralelo ao eixo y

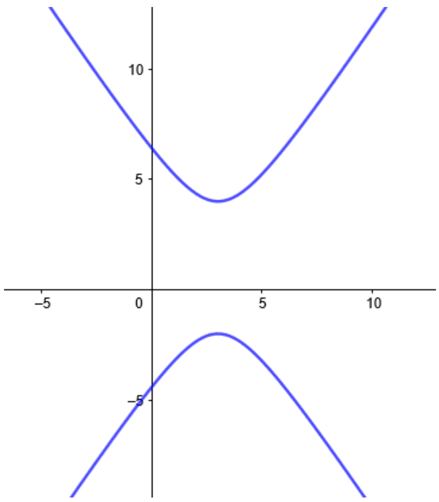


Figura 36 - Hipérbole

Da equação $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} < 1$, obtemos

$\frac{(y-1)^2}{9} < \frac{(x-3)^2}{4} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 < 9\frac{(x-3)^2}{4} + 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 < \sqrt{9\dfrac{(x-3)^2}{4} + 9} \\ y - 1 > -\sqrt{9\dfrac{(x-3)^2}{4} + 9} \end{cases} \quad ou$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < 1 + \sqrt{9\dfrac{(x-3)^2}{4} + 9} \\ y > 1 - \sqrt{9\dfrac{(x-3)^2}{4} + 9} \end{cases} \quad ou$$

Assim, a solução da inequação $9x^2 - 4\,y^2 \; - 54\,x \; + 8\,y + 113 > 0$ é solução das inequações

$$\begin{cases} y > \; f(x) \\ y < g(x) \end{cases}$$

para $f(x) = = 1 - \sqrt{-9\frac{(x-3)^2}{4} + 9}$ e $g(x) = \; 1 + \; \sqrt{-9\frac{(x-3)^2}{4} + 9}$, e a representação gráfica é dada por

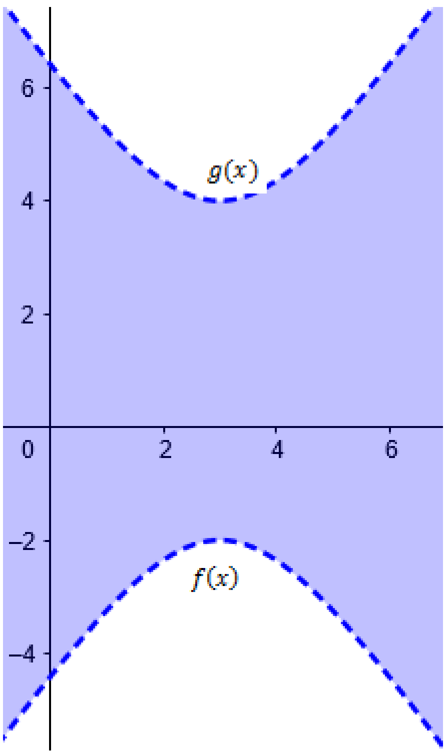


Figura 37 - Hipérbole

Exemplo

Representar graficamente a solução da inequação

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7\sqrt{2}\ x + 5\sqrt{2}\,y + 10 < 0$$

Observe que neste caso o termo $2x.y$ impossibilita realizar um completamento de quadrado como no caso anterior; neste caso fazendo a seguinte mudança de variável

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Podemos reescrever a inequação acima da seguinte forma

$$3\,x'^2 + y'^2 + 12\ x' - 2\,y' + 10 < 0$$

E realizando um completamento de quadrados assim como feito no exemplo anterior obtemos

$$\frac{(x'+2)^2}{1} - \frac{(y'-1)^2}{3} < 1$$

Para um estudo sobre reconhecimento de cônicas que envolve mudança de variável vide (*Santos*, *2019*). Isolando y' na inequação acima obtemos

$$\frac{(y'-1)^2}{3} > \frac{(x'+2)^2}{1} - 1$$

$$(y'-1)^2 > 3(x'+2)^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 1 + \sqrt{3(x'+2)^2 - 3} \\ y' < 1 - \sqrt{-3(x'+2)^2 + 3} \end{cases} \text{ ou}$$

Assim, a solução da inequação

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7\sqrt{2}\ x + 5\sqrt{2}\,y + 10 < 0$$

é solução das inequações

$$\begin{cases} y' > f(x') \\ y' < g(x') \end{cases}$$

para $f(x') = 1 + \sqrt{3(x'+2)^2 - 3}$ e $g(x') = 1 - \sqrt{-3(x'+2)^2 + 3}$, e a representação gráfica é dada por

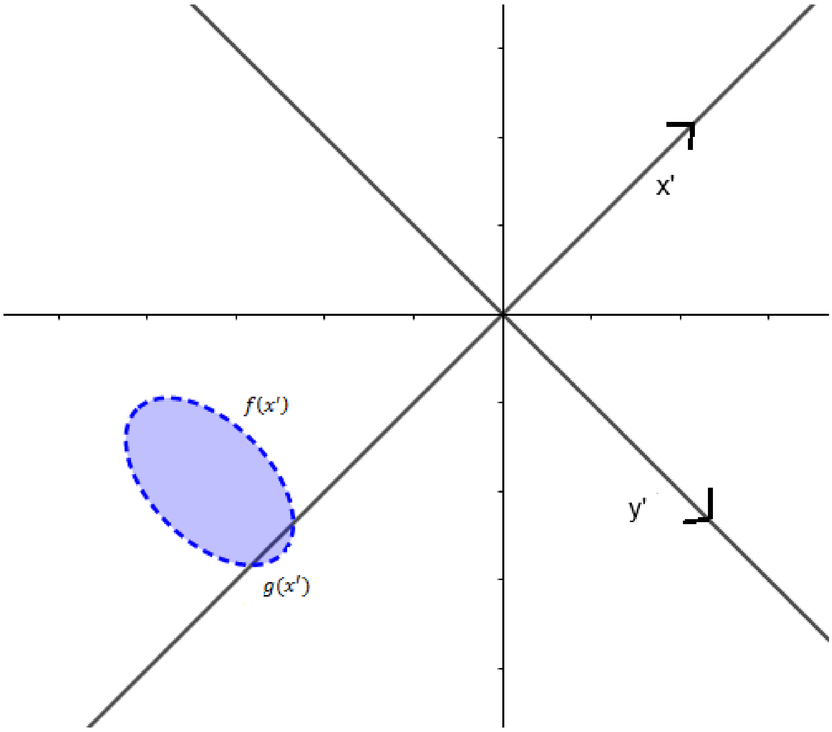


Figura 38 - Elipse

CAPÍTULO 6 - DESIGUALDADES ENTRE MÉDIAS

Neste capítulo será mostrado através de métodos geométricos as desigualdades de médias e ainda através dessas desigualdades será feito aplicações dessas desigualdades na resolução de problemas matemáticos, mostrando que o conhecimento básico dessa desigualdade é importante na resolução simples de diversificados problemas matemáticos, neste capítulo usamos como referência (Souza, 2015), (Pereira, 2014), (Carvalho,2012), (Ferreira,2017) e (Velame,2014).

6.1 - Média Aritmética Simples e Média Ponderada

Dados n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com $n > 1$ a média aritmética M_A entre eles é dada por

$$M_A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Neste caso todos os números têm o mesmo peso no cálculo da média. Já no caso de cada valor x_i ter um certo peso p_i usamos a chamada média ponderada M_P que é dada por

$$M_P = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

6.2 - Média Geométrica e Harmônica

Dados n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com $n > 1$ a média geométrica M_G e Média Harmônica M_P entre eles são dadas respectivamente por

$$M_G = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$$

e

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

A seguir iremos demonstrar como se relacionam estas médias M_A, M_G e M_H para o caso de duas variáveis x_1 e x_2.

Proposição: Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ com médias

$M_G = \sqrt{x_1 . x_2}$, $M_H = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}}$ e $M_A = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Então $M_A \geq M_G \geq M_H$. Além disso, as igualdades ocorrem se, e somente se, $x_1 = x_2$.

Prova: Mostremos inicialmente que $M_A \geq M_G$.

Temos $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow x_1 - 2\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} + x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1\cdot x_2}\ .$$

Portanto, $M_A = \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1\cdot x_2} = M_G$. Note que a igualdade ocorre, se e somente se, $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow\; x_1 = x_2$.

Mostremos agora que $M_G \geq M_H$.

Temos $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 - 2\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} + x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow\; x_1 + x_2 \geq\; 2\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} \;\;\Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2} \geq \frac{2\sqrt{x_1\cdot x_2}}{x_1+x_2} \;\Leftrightarrow 1 \geq \frac{2\sqrt{x_1\cdot x_2}}{x_1+x_2}$$

$$\Leftrightarrow\; 1 \geq \frac{2\sqrt{x_1\cdot x_2}}{x_1+x_2} \;\;\Leftrightarrow\; 1\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2} \geq \frac{2\sqrt{x_1\cdot x_2}}{x_1+x_2}\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2} \;\;\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1\cdot x_2} \geq \frac{2\cdot x_1\cdot x_2}{x_1+x_2}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{x_1\cdot x_2}}{2} \geq \frac{x_1\cdot x_2}{x_1+x_2} \;\;\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_1\cdot x_2}}{2} \geq \frac{1}{\frac{(x_1+x_2)}{x_1\cdot x_2}} \;\;\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_1\cdot x_2}}{2} \geq \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}.$$

Portanto, $M_G = \frac{\sqrt{x_1.x_2}}{2} \geq \frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} = M_H$. Note que a igualdade ocorre, se e somente se, $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow\; x_1 = x_2$.

6.1.1 - Demonstração Geométrica de $M_A \geq M_G \geq M_H$.

Vamos aqui demonstrar a já conhecida desigualdade das médias utilizando a geometria plana.

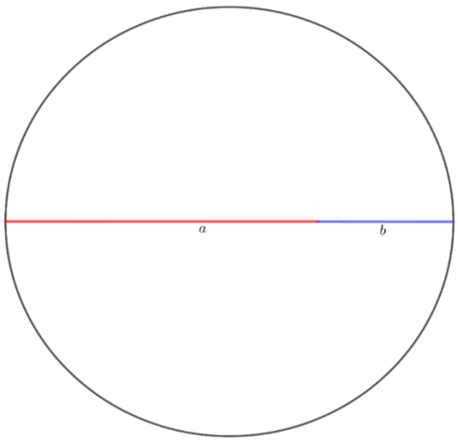


Figura 39 - Demonstração média aritmética

Observemos na figura uma circunferência, onde o diâmetro é dado por $a+b$, ou seja

Seja r o raio da circunferência, temos:

$$2r = a + b$$

$$r = \frac{a+b}{2}$$

Logo podemos dizer que r é a média aritmética de a e b, ou seja,

$$M_A(a,b) = r.$$

Daí, observemos a figura abaixo:

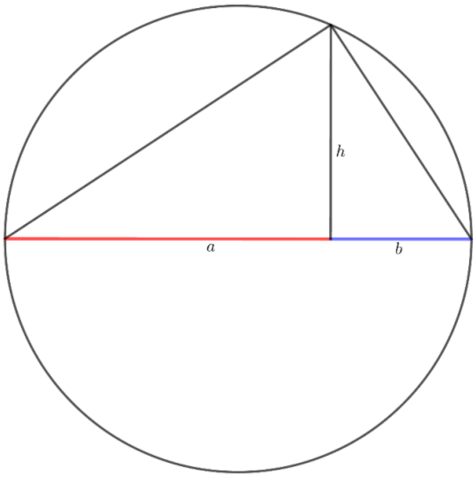


Figura 40 - Demonstração média geométrica

Do mesmo círculo onde temos que $a + b$ é o diâmetro traçamos a altura h na interseção entre os segmentos a e b e fechamos um triangulo como o descrito na figura, observe que se trata de um triângulo retângulo, pois se um triângulo está dentro de uma circunferência e um dos seu lados é um diâmetro, segue de geometria que se trata de um triangulo retângulo de hipotenusa $a + b$, ainda se faz importante saber as relações métricas válidas em um triângulo retângulo, dentre essas relações a uma que faz valer a seguinte igualdade neste caso:

$$h^2 = a \cdot b$$

$$h = \sqrt{a \cdot b}$$

ora, temos assim que: ´

$$M_G(a,b) = h$$

Ou seja, a média geométrica de a e b é igual a altura nesse triângulo, e geometricamente podemos observar que

$$r \geq h\ .$$

Além disso, temos que $r = h$ se, somente se, o ponto médio $(\frac{a+b}{2})$ de onde é traçado a altura coincide com o centro da circunferência, ou seja , se , e somente se, $a = b$.

Podemos ainda construir a seguinte figura partindo da primeira figura:

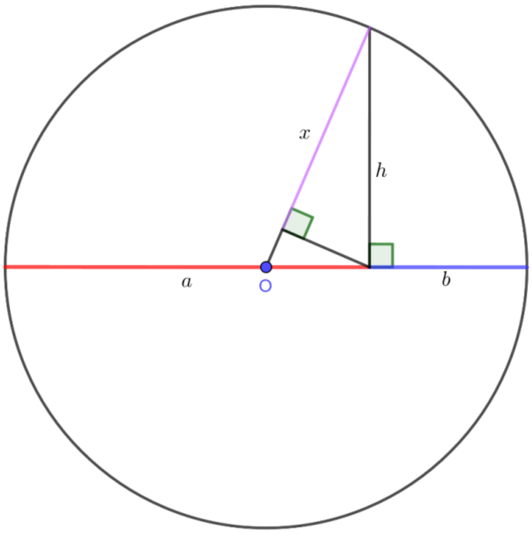


Figura 41 - Demonstração média harmônica

Observemos na figura que temos agora três triângulos semelhantes, e que a distância do ponto O até a circunferência é igual a r, segue de semelhança de triângulos que:

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{r}$$

$$x = \frac{h^2}{r}$$

Usando as igualdades obtidas anteriormente temos que:

$$x = \frac{h^2}{r} = \frac{a.b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \qquad (*)$$

Por outro lado sabemos que a média harmônica de a e b é dada por:

$$M_H(a,b) = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Logo temos de $(*)$ que $M_H(a,b) = x$, ora, temos que:

$$r \geq h \geq x.$$

Portanto, $M_A(a,b) \geq M_G(a,b) \geq M_H(a,b)$, como queríamos demonstrar.

6.2 - Desigualdade com a Média Quadrática para dois valores

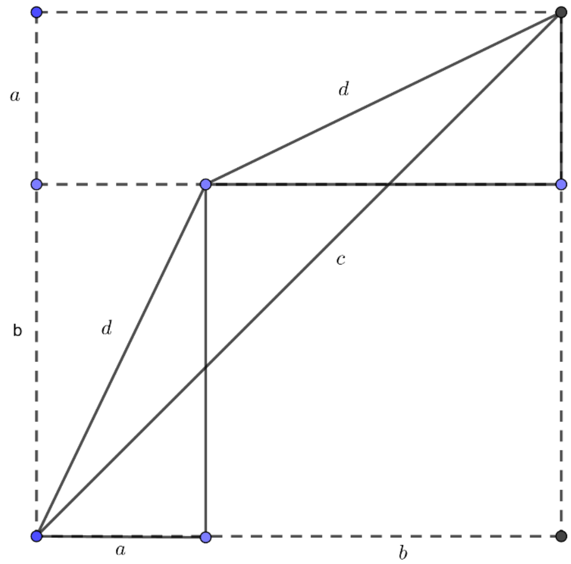


Figura 42 - desigualdade geométrica

A média quadrática (M_Q) entre dois valores a e b, é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados de a e b e é dada pela expressão:

$$M_Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Podemos verificar a relação de ordem existente entre a média aritmética e a média quadrática através de um quadrado de lado $a+b$, como a feito na figura 42.

Pela forma como foi decomposto o quadrado podemos utilizar a desigualdade triangular entre os triângulos para estabelecer mais uma relação entre médias.

Como apenas queremos usar as medias de a e b, vamos determinar c e d em função de a e b, através do Teorema de Pitágoras.

c é a hipotenusa do triangulo retângulo de catetos $a+b$ e por isso:

$$c = \sqrt{2(a+b)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{2}(a+b).$$

Ainda temos que d, é a hipotenusa dos triângulos de catetos a e b, assim:

$$d = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Observando a figura 42, podemos verificar que pela desigualdade triangular, $c \leq d + d$,

pois cada um dos lados tem que ser menor que a soma da medida dos outros dois, logo:

$$\sqrt{2}(a+b) \leq 2\sqrt{a^2+b^2} \overset{\times\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\iff} \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Através da figura 43 construindo o segmento $\overline{CE}$, também podemos demonstrar a relação estabelecida entre as duas médias.

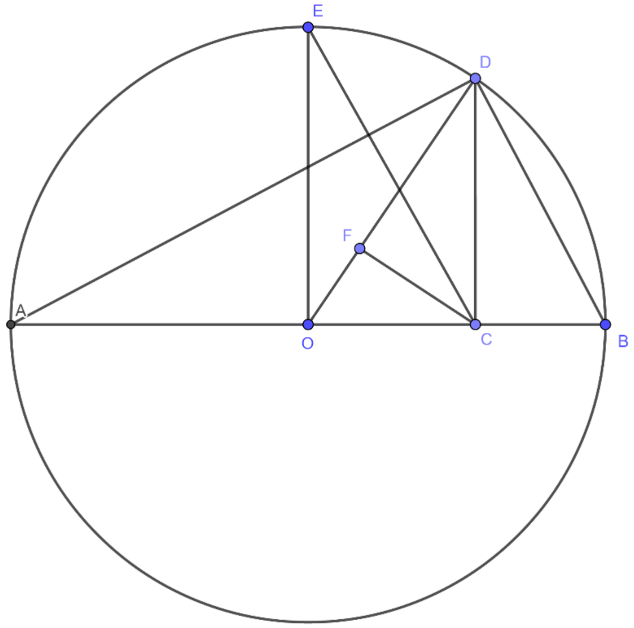


Figura 43 - Média Quadrática

$$\begin{aligned}\overline{CE} &= \sqrt{\overline{OE}^2 + \overline{OC}^2}\\ &= \sqrt{\overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{CD}^2}\\ &= \sqrt{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}\\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\end{aligned}$$

$\overline{OE} = \frac{a+b}{2}$ como já vimos anteriormente.

Por construção podemos afirmar que $\overline{OE} \leq \overline{CE}$.

Sendo assim, também se prova através dessa figura que

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Problema 1. A fim de encher um tanque, tem-se que as três torneiras $T_1, T_2\ e\ T_3$, ligadas sozinhas podem enche-lo em 3 horas, 4 horas e 6 horas respectivamente. Ao abrir-se as três torneiras simultaneamente em quanto tempo o tanque irá ser enchido?

Solução. Considerando que o volume do tanque é x, que $v_1, v_2\ e\ v_3$ representam as respectivas vazões das torneiras $T_1, T_2\ e\ T_3$ e lembrando que a vazão é definida como a divisão do volume pelo tempo, temos: $v_1 = x/3$, $v_2 = x/4$ e $v_3 = x/6$. Seja v a razão simultânea das três torneiras, e t o tempo necessário para que as bombas encham o tanque, temos:

$$v = \frac{x}{\mathrm{t}} \qquad (*)$$

Sabemos também que $v = v_1 + v_2 + v_3$ (*,*). Igualando as equações (*) e (*,*), obtemos:

$$\frac{x}{t} = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = x \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \rightarrow t = \frac{4}{3}.$$

Portanto, o tempo necessário é de $4/3$ de hora, o que equivale a 1 hora e 20 minutos.

Qual relação desse problema com as médias? Observe que a média harmônica H dos tempos que as torneiras levam para encher o tanque é :

$$H = \frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{3}{\frac{4+3+2}{12}} = \frac{3}{\frac{9}{12}} = \frac{3\cdot 12}{9} = 4$$

e que dividindo esse valor por 3 chegamos na resposta do problema. Podemos explicar essa relação notando que na resolução obtivemos a equação

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} \to t = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$$

que, quando multiplicada pela fração $3/3$, forma-se a equação

$$t = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}\right)\cdot\frac{3}{3} = \left(\frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}\right)\cdot\frac{1}{3} = H\cdot\frac{1}{3} = \frac{H}{3}.$$

Portanto, para resolvermos os clássicos problemas que envolvem as torneiras, basta calcular a média harmônica e depois dividirmos o resultado pelo número de torneiras.

Problema 2. Para encher um tanque são necessárias duas torneiras T_1 *e* T_2 que enchem separadamente esse tanque em 5 horas e 8 horas respectivamente. Com o intuito de esvaziar o tanque é preciso uma terceira torneira T_3, que leva 10 horas para esvazia-lo. Caso as três torneiras sejam ligadas simultaneamente, quanto tempo levará para o tanque encher?

Solução. Como vimos acima, basta calcularmos a média harmônica dos tempos e dividirmos o resultado pelo número de torneiras. Um detalhe importante a observar antes de efetuarmos os cálculos é a necessidade de considerarmos os tempos das torneiras T_1 *e* T_2 como positivos, pois elas enchem o tanque e o tempo da torneira T_3 como negativo, pois esta esvazia o tanque. Assim temos,

$$H = \frac{3}{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{-10}} = \frac{3}{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{5+8-4}{40}} = \frac{3}{\frac{9}{40}} = 3\cdot\frac{40}{9} = \frac{40}{3}.$$

Então, o tempo t procurado é :

$$t = \frac{40}{3} \div 3 = \frac{40}{9}$$

que é aproximadamente 4 horas e 26 minutos.

Problema 3. Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro $2p$, o quadrado é o de maior área.

Solução. Sejam a e b os lados do retângulo, então o perímetro $2p$ é dado por $2a + 2b$, que implica $p = a + b$. Seja S a área do retângulo, assim $S = a \cdot b$. Pela desigualdade das médias $M_A \geq \mathrm{M}_G$ temos:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \rightarrow \frac{p}{2} \geq \sqrt{S} \rightarrow S \leq \frac{p^2}{4}.$$

A maior área possível é $S = p^2/4$, que ocorre quando $a = b$, portanto, o retângulo de maior área é um quadrado.

Problema 4. Veremos a seguir uma adaptação do Teorema de Euclides, o qual resolveremos usando desigualdade entre médias.

De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual tem área máxima?

Consideramos os lados do retângulo x e y e o perímetro $2p$, então temos que $x + y = p$, com média aritmética de x e y igual a $\frac{P}{2}$. A área do retângulo é $A = xy$. Aplicando a desigualdade entre a média aritmética e a geométrica temos

$$\sqrt{A} = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{P}{2}.$$

Logo,

$$A \leq \frac{P^2}{4}$$

E a igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de área $\frac{P^2}{4}$.

Problema 5. Iremos trabalhar um problema envolvendo a geometria plana, onde abordamos a figura do retângulo, perímetro e diagonal. Para tanto utilizaremos a desigualdades entre as médias aritméticas e quadráticas.

Sejam $a, b, c \geq 0$, em que a, b são os comprimentos dos lados do retângulo e c a média da diagonal do retângulo, de acordo a figura a seguir. Concluir que de todos os retângulos com medidas de lado e com a diagonal o que tem maior perímetro é o quadrado de medida de lado $2\sqrt{2}c$ e o que tem a maior área é o quadrado de medida de lado $c^2/2$.

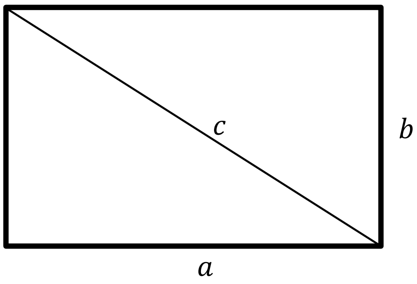


Figura 44 - Paralelepípedo, diagonal

6.3 - Desigualdade de Cauchy- Schwarz no Plano

A desigualdade de Cauchy-Schwarz no plano é uma importante desigualdade que afirma que, se (a, b) e (c, d) forem vetores de $\mathbb{R}^2$, então o valor absoluto de seu produto escalar não excederá o produto de seus comprimentos, ou seja:

$$|a \cdot c + b \cdot d| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, (a, b) é paralelo à (c, d), ou um dos vetores é nulo. Como aplicação direta dessa desigualdade obtemos a desigualdade triangular no plano que afirma a dado um triângulo Δ de vértice em A, B e C então

$$\|\overrightarrow{AC}\| < \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$$

Ou seja, o comprimento de um dos lados é sempre menor que a soma dos outros dois

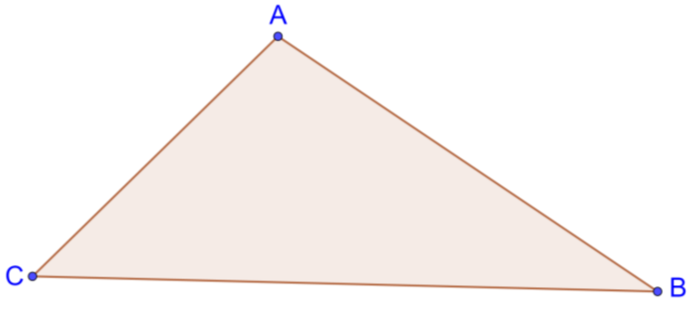


Figura 45 - Triângulo ABC

De fato, considere os vértices em A, B e C, assim obtemos os vetores

$\overrightarrow{AB} = (a, b)$, $\overrightarrow{BC} = (b, c)$ com

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vetores não nulos e não paralelos, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|a \cdot c + b \cdot d| < \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\| \quad (*).$$

Observe que

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2 \cdot (a \cdot c + b \cdot d) + \|\overrightarrow{BC}\|^2 = a^2 + b^2 + 2(a \cdot c + b \cdot d) + c^2 + d^2$$
$$= (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Por outro lado,

$$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \|(a,b)+(c,d)\|^2 = \|(a+c,b+c)\|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2 .$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 2\cdot(a\cdot c+b\cdot d) + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 < \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 2\cdot|ac+bd| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2.\end{aligned}$$

Utilizando $(*)$ obtemos

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 < \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 2\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|\right)^2 .$$

Assim, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 < \left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|\right)^2$ e tomando a raiz quadrada de ambos os lados obtemos

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| < \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|.$$

Uma demonstração geométrica da desigualdade de Cauchy-Schwarz é devida a R. Nelsen na revista Mathematics Magazine v. 67, n° 1, fevereiro de 1994, e baseia-se na afirmação evidente:

Afirmação: Fixados os comprimentos dos lados de um paralelogramo, sua área máxima ocorrerá quando ele for um retângulo.

Justificando a Afirmação: Considere um paralelogramo cujos lados medem x e y cujo ângulo entre eles seja $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ como indicado na figura abaixo

Figura 46 - Paralelogramo Theta

Como $sen(\theta) = \frac{h}{y}$ e a área é dada por $A = x \cdot y$, obtemos

$$A = x \cdot y \cdot sen(\theta)$$

Como $0 < sen(\theta) \leq 1$, então o maior valor da área é obtido para $sen(\theta) = 1$, com $\theta = \frac{\pi}{2}$. Considere então as figuras:

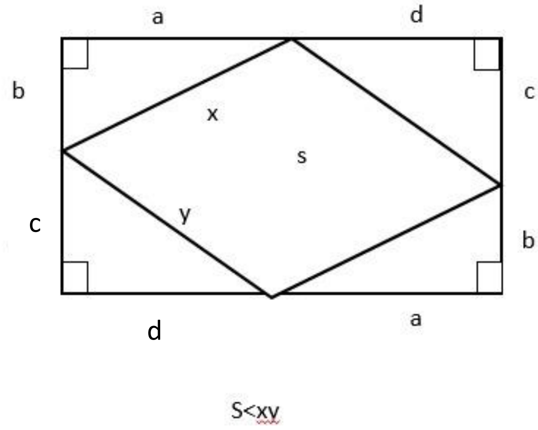


Figura 38 - Paralelepípedo

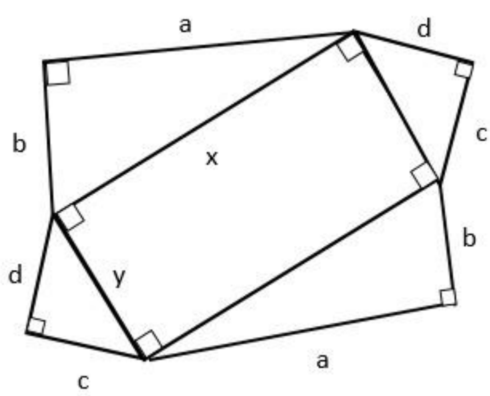


Figura 39 - Retângulo

Pela afirmação acima, a área da figura da esquerda não excede a da direita, isto é:

$$(a+d)(b+c) \leq 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + 2 \cdot \frac{c.d}{2} + x \cdot y$$

Desenvolvendo o lado esquerdo obtemos $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot d + c \cdot d$. Por outro lado como x e y são hipotenusas segue do teorema de Pitágoras que $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $y = \sqrt{c^2 + d^2}$, assim o lado esquerdo fica $2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + 2 \cdot \frac{c \cdot d}{2} + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = a \cdot b + c \cdot d + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$.

Portanto, obtemos

$$a \cdot b + a \cdot c + b \cdot d + c \cdot d \leq a \cdot b + c \cdot d + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Segue que

$$a \cdot c + b \cdot d \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} ,$$

obtendo assim a desigualdade de Cauchy-Schwarz para números reais positivos.
Levando em conta, porém, que $|a \cdot c + b \cdot d| \leq |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d|$ segue que

$$|a \cdot c + b \cdot d| \leq |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| \leq \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \cdot \sqrt{|c|^2 + |d|^2}.$$

Como $x^2 = |x|^2$, para qualquer x ∈ ℝ, então

$$|a \cdot c + b \cdot d| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Essa ideia pode ser usada também para mostrar quando é que ocorrerá a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz. De fato, a igualdade das áreas das duas figuras ocorrerá se, e somente se, o paralelogramo da esquerda for retângulo; nesse caso, da semelhança dos triângulos que o cercam obtemos $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ou seja, os vetores de coordenadas positivas (a, b) e (c, d) serão paralelos e de mesmo sentido.

Para o caso geral se tivermos

$$|a \cdot c + b \cdot d| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2},$$

podemos utilizar novamente que $|a \cdot c + b \cdot d| \leq |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d|$ e obter

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \leq |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d|.$$

Além disso, da desigualdade de Cauchy-schwarz para números positivos temos

$|a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$, ou seja,

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \leq |a| \cdot |c| + |b|.|d| \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \cdot$$

Concluímos assim que $|a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{|a|^2+|b|^2} \cdot \sqrt{|c|^2+|d|^2}$.

Pelo caso anterior se os vetores são não nulos, devemos ter que esta igualdade é verdadeira se, e somente se, os vetores $(|a|,|b|)$ e $(|c|,|d|)$ são paralelos.

Se $\mathrm{c}=0$ então usando que os vetores $(|a|,|b|)$ e $(|c|,|d|)$ são paralelos devemos ter $a=0$, de onde segue $(a,b)=(0,b)$ é paralelo à $(c,d)=(0,d)$; analogamente se $d=0$ então $b=0$, de onde segue $(a,b)=(a,0)$ é paralelo à $(c,d)=(c,0)$.

Resta analisar o caso $c \neq 0$ e $d \neq 0$. Neste caso como $(|a|,|b|)$ e $(|c|,|d|)$ são paralelos, então $\frac{|a|}{|c|}=\frac{|b|}{|d|}$ de onde segue que $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ou $\frac{a}{c}=-\frac{b}{d}$.

Observe que se $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ então os vetores (a,b) e (c,d) são paralelos. Assim, resta analisar o caso em que $\frac{a}{c}=-\frac{b}{d}$ ocorre. Neste caso devemos ter $a \cdot c \geq 0$ e $b \cdot d \leq 0,$ ou $a \cdot c \leq 0$ e $b \cdot d \geq 0$.

Como $|a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = |a.c+b.d|,$ se $\mathrm{a} \cdot \mathrm{c} \geq 0$ e $b \cdot d \leq 0$, então

$$|a \cdot c + b \cdot d| = |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| = a \cdot c - b \cdot d .$$

Como $|a \cdot c + b \cdot d| = a \cdot c + b \cdot \mathrm{d}$ ou $|a \cdot c + b \cdot d| = -a \cdot c - b \cdot d$ e chegamos que $|a.c+b.d| = a.c - b.d$, então ocorre uma das possibilidades

$$\begin{cases} a \cdot c + b \cdot d = a \cdot c - b \cdot d \ \Rightarrow \ b \cdot d = 0 \ \Rightarrow b = 0 \\ -a \cdot c - b \cdot d = a \cdot c - b \cdot d \ \Rightarrow a \cdot c = 0 \ \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

Além disso, como $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}=-\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}},$ então $\mathrm{a}=0 \Leftrightarrow \mathrm{b}=0$, concluindo assim que o vetor (a,b) é nulo. Analogamente se $\mathrm{a} \cdot \mathrm{c} < 0$ e $b \cdot d > 0$, obtemos que o vetor (a,b) é nulo.

Portanto,

$$|a \cdot c + b \cdot d| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

se, e somente se, (a,b) é paralelo à (c,d), ou um dos vetores é nulo.

Problema 6. Esta aplicação faz uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, abordando propriedades de triângulos retângulos.

Entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $S=a+b$ é o triângulo Isósceles. Temos que

$$a+b = a \cdot 1 + b \cdot 1 \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{1^2+1^2} = c\sqrt{2},$$

e este máximo é obtido quando $a=\alpha \cdot 1$ e $b=\alpha \cdot 1$ ou $1=\alpha \cdot a$ e $1=\alpha \cdot b$. Em todo caso devemos ter que $a=b$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento desse trabalho é possível observar que ao se trabalhar com desigualdades, ferramentas gráficas de visualização se mostram eficazes e de suma importância para a compreensão do estudante, vimos ainda que algumas demonstrações feitas de forma meramente algébrica, podem ser visualizadas de maneira geométrica permitindo assim melhor compreensão e aflorando o intuitivo matemático.

A utilização de ferramentas visuais e de tecnologias para o ensino-aprendizagem de matemática é uma acepção emergente e muitas vezes o professor em sala de aula não sabe como expressar determinados conteúdos de cunho meramente algébrico de forma que o estudante possa visualizar e compreender os fenômenos matemáticos ali demonstrados, dessa forma o GeoGebra e até mesmo as ferramentas básicas do Office ajudam a expressar essas grandezas e essa interpretação, por mais que imagens possam não demonstrar, elas são capazes de facilitar a assimilação de diversos assuntos relacionados a matemática e outros saberes, esse trabalho ainda oferece vasta aplicabilidade de desigualdades até mesmo em se tratando de diferentes tipos de médias.

Bibliografia

Almouloud, S.A. *Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.* São Paulo : CEMA-PUC, 1997. Vol. III.

Assis, Cibelle de Castro. *Formação continuada para professores de Matemática: integrando softwares educativos à prática docente*. In: XIII Conferência interamericana de Educação Matemática – CIAEM, p.1-12. Recife: Jun 2011. Disponível em: http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/629. Acesso em 10/08/2020

Bardin, Laurence. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1977.

Bicudo, M.ªV. (org.). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo : Unesp, 1999.

Boavida, A.M. *Resolução de problemas: que rumos para a educação matemática?* In: Educação Matemática. J.P. Pontes (org.). : Instituto de Inovação Educacional, p.115-122, 1992.

Borba, Marcelo de C. M. G. Penteado. I*nformática e Educação Matemática.* Autêntica, 2001.

Borba, M. C. *Tecnologias da informática na educação matemática e reorganização do pensamento.* In: BICUDO, M. A. V. (org). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: UNESP, 1999.

Carneiro, José Paulo Q. *Demonstrações Visuais*. Revista do Professor de Matemática (RPM). 27.

Carvalho,L.M.A.C. *Problemas com Desigualdades para o Ensino secundário.* Portugal : Universidade de Lisboa, 2012.

Damm, R. F. *Registros de Representação*. In: MACHADO, S. D. A. et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: Educ, p. 135-153, 1999.

Duarte, Newton. *O Ensino de Matemática na Educação de Adultos.* São Paulo: Cortez, 1987.

Duval, R. *Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.* In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.* Campinas: Papirus, 2003. p. 11- 33.

Ferreira, Luiz da Silva. *Uma abordagem sobre médias e suas aplicações no ensino médio.* s.l. : Macapá, 2017.

Fink, A. M. *An Essay on the History of Inequalities. s.l. : Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000. v.249, p.118-134.

Iezzi, Gelson; Murakami ,Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar 1.* São Paulo : Atual, 2013. 9º Edição.

Gerônimo, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. *Geometria Euclidiana Plana: Um estudo com o software Geogebra.* Maringá. EDUEM, 2010.

Pereira, Jakson Da Cruz. *Médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica*. Campinas SP:UNICAMP, 2014.

Júnior, Armando Traldi. *A importância dos registros de representação no estudo de sistemas de inequações*. Faculdades de Guarulhos : s.n.

Moran, José Manuel. As Mídias na Educação- texto publicado no livro: *Desafios na Comunicação Pessoal.* 3ª Ed. São Paulo: Paulinas, 2007, p. 162-166.

Nelsen, Roger B. *proofs without Words. s.l. : Mathematical Association of America*, 1997. ISBN 978-0-88385-700-7.

Oliveira, K.I.M; Fernandes, A.J.C. *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções*. Rio de Janeiro : s.n., 2010.

Parâmetros Curriculares Nacionais : *matemática / Secretaria de Educação Fundamental*. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

Santos, Thayná da Silva. *Reconhecimento de Cônicas e Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares*. Três Lagoas : UFMS, 2019.

Silva, Karina Alessandra Pessôa da. *Modelagem matemática e semiótica: algumas relações.* Londrina : s.n., 2008.

Souza, Fabio Henrique Teixeira de. Desigualdades – Aula 6 – *Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica (MA-MG) (19m43s)*. Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=da1prIpZniQ>. Acesso em: 02 AGO 2020.

Thomaz, T.C. *Não gostar de Matemática: que fenômeno é este?* Cadernos de Educação/UFPel, Pelotas, n. 12, 1999.

Velame, Gabriel Carvalho. *Uma Abordagem sobre Desigualdades e suas Aplicações.* Cruz das Almas, 2014.

Apêndice A

Construções no GeoGebra

Construção de funções e intersecções no Software GeoGebra.

Passo 1 : Abrir o GeoGebra Clicar com o botão direito do mouse clique em malha, para remover a malha quadriculada afim de não gerar poluição visual.

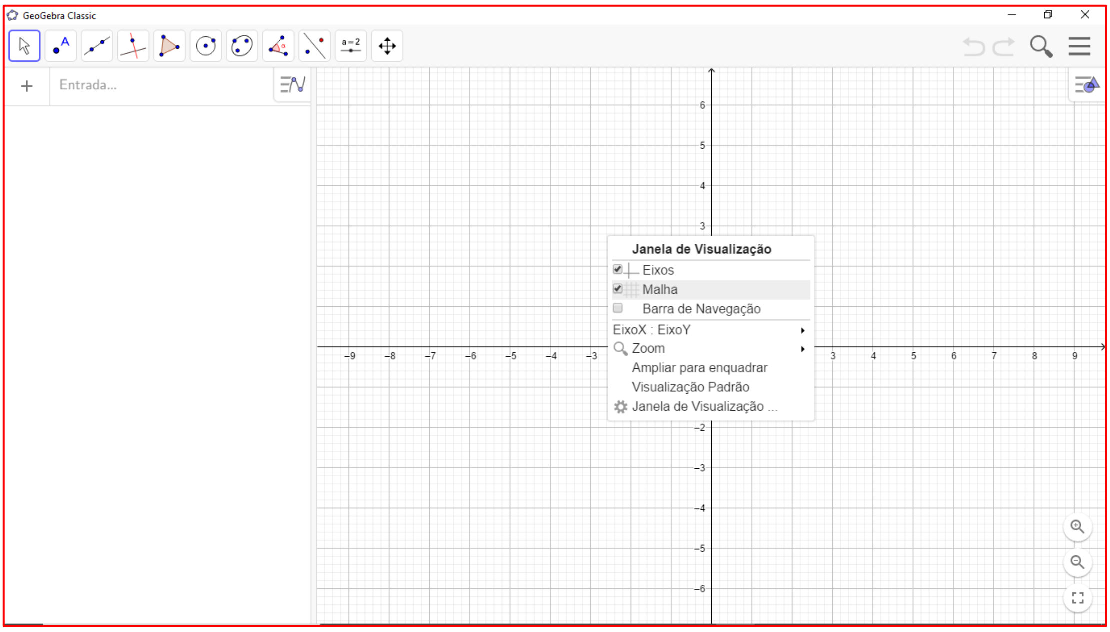


Figura 47 - imagem apêndice

Passo 2 : Agora clique em entrada, no lado superior esquerdo e digite a função $f(x) = x^2 - x - 12$ de Enter.

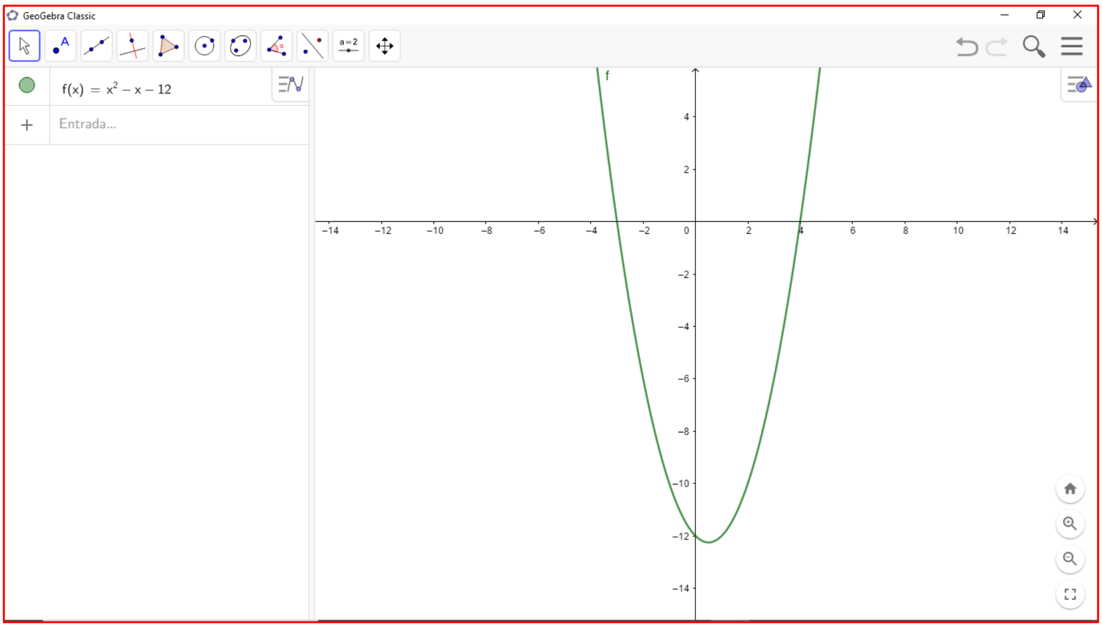


Figura 48 - imagem apêndice

Passo 3: Agora clique no o botão esquerdo do mouse na bolinha do lado na função na caixa de entrada, repare que o gráfico da função $f(x)$ irá sumir, e ainda clicando em entrada novamente adicione o gráfico da função $g(x) = 2x - 8$.

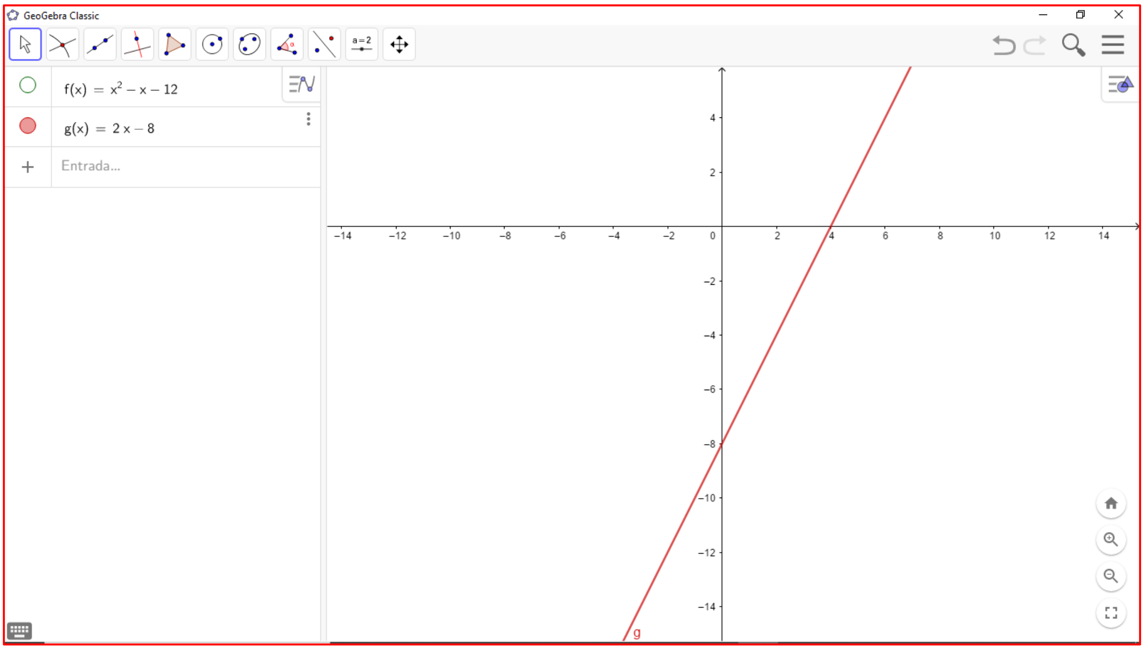


Figura 49 - imagem apêndice

Passo 4: Clique novamente na bolinha ao lado de $f(x)$ para desocultar o gráfico, tendo assim ambos os gráficos simultaneamente no mesmo eixo cartesiano.

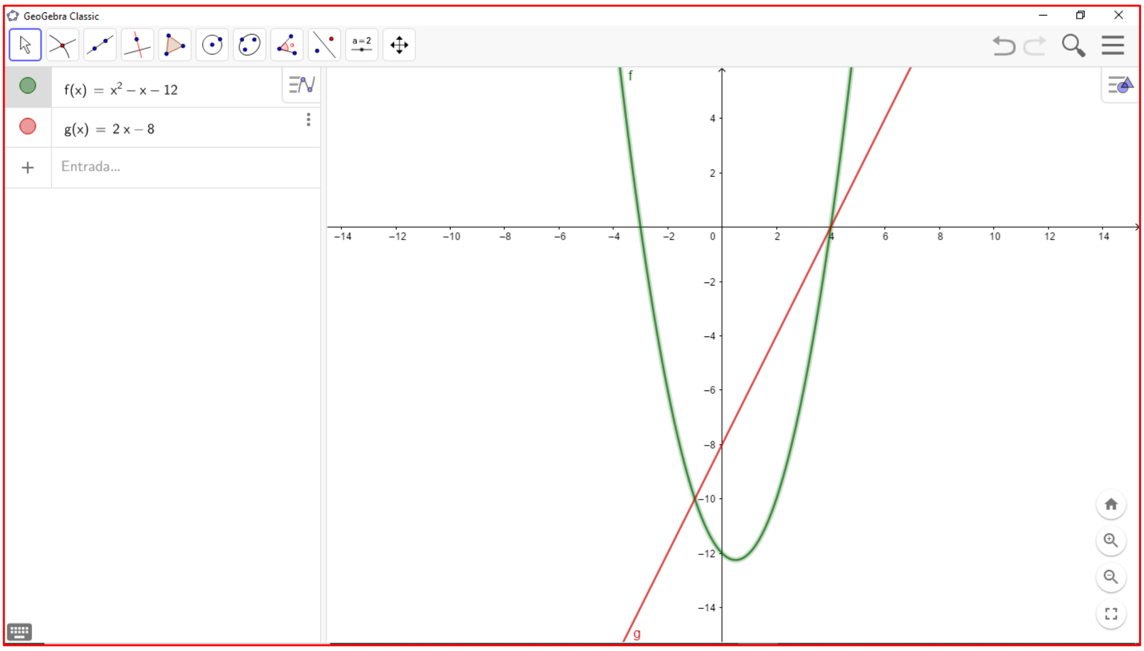


Figura 50 - imagem apêndice

Passo 5: Agora nas funções do GeoGebra encontre a interseção entre dois objetos, e clique respectivamente nas duas curvas, tal função dará os pontos aonde as curvas se encontram.

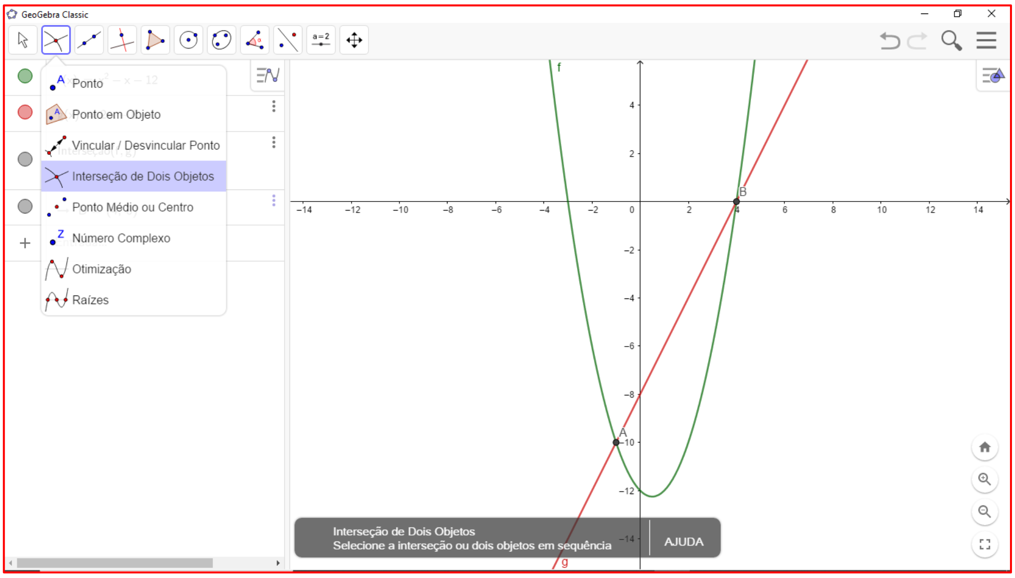


Figura 51 - imagem apêndice

Passo 6: Como queremos visualizar aonde $f(x) > g(x)$, basta analisarmos por inspeção aonde que a curva f encontra maiores valores em y do que a curva g, dai para efeito visual no campo entrada adicione a curva $x < -1$ de enter, e ainda a curva $x > 4$ que é aonde a curva f encontra os maiores valores do que a curva g em y.

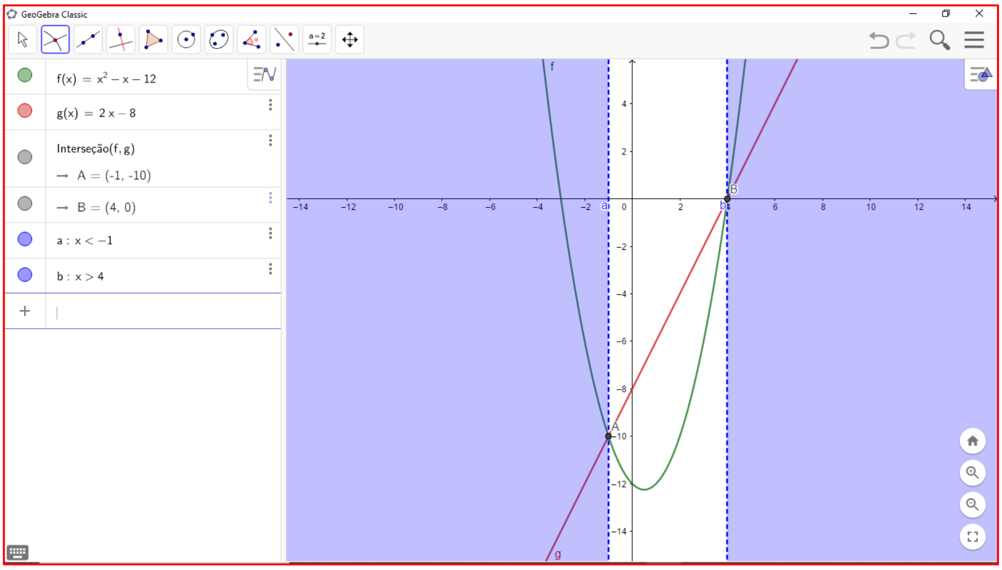


Figura 52 - imagem apêndice

Encontramos assim a solução para esse sistema de inequações dada pela região em azul.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|x < -1 \; ou \; x > 4\}$$