



Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



O uso da projeção na determinação do campo elétrico para distribuições contínuas de carga

Teresina

2020

Felipe Brandão de Oliveira

O uso da projeção na determinação do campo elétrico para distribuições contínuas de carga

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Afonso Noberto da Silva

Teresina

2020

FELIPE BRANDÃO DE OLIVEIRA

**O USO DA PROJEÇÃO NA DETERMINAÇÃO DO CAMPO
ELÉTRICO PARA DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE
CARGA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em
Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA

Aprovado por:

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Presidente e examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha

Prof. MSc. Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha - Examinador Externo
Instituto Federal do Piauí - IFPI

Natã Firmino Santana Rocha

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Herbert José Aquino Sousa

Prof. MSc. Herbert José Aquino Sousa - Examinador Externo
Instituto Federal do Maranhão - IFMA

Ailton Campos do Nascimento

Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento - Examinador
Instituto Dom Barreto - IDB

TERESINA
Novembro/2020

O48u Oliveira, Felipe Brandão de.
O uso da projeção na determinação do campo elétrico para distribuições contínuas de carga / Felipe Brandão de Oliveira. – 2020.
90 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Teresina - PI, 2020.
Área de Concentração: Matemática.
"Orientador: Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva."

1. Ensino de Matemática. 2. Projeções geométricas. 3. Fluxo elétrico.
4. Interdisciplinaridade. I. Título.

CDD: 516

Ficha Catalográfica elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Ana Angélica Pereira Teixeira (Bibliotecária) CRB 3^ª/1217

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Felipe Brandão de Oliveira graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática (IFPI) no ano de 2011, concluiu Especialização em Educação Profissional Integrado à Educação Básica na Modalidade de Educação de Jovens e Adultos (IFPI) no ano de 2012. É professor da rede pública e privada do Piauí.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Amanda , a minha mãe Lina Maria, ao meu padrasto Rafael (in memoriam), a minha avó Antônia Angélica (in memoriam) e aos meus amigos, os quais foram muito importantes em todo o processo desta dissertação.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS, por ter me dado saúde e força para enfrentar as dificuldades do curso.

À minha esposa Amanda por ser tão especial em minha vida. Por me ajudar e me apoiar e incentivar em todos os momentos.

À minha MÃE Lina Maria Brandão Lapa e a meu PADRASTO Rafael de Sousa Lapa (in memoriam), pela educação, carinho e amor. Tenho muito orgulho de vocês.

Ao meu orientador Professor Afonso Noberto, pela orientação, dedicação, apoio, cobranças e, especialmente, pelos momentos de troca de experiências tão importantes para minha formação profissional e pessoal.

Aos professores Hélder Borges e Herbert Aquino que colaboraram ativamente na sugestão do tema do trabalho e nas indicações de muitos materiais de estudo.

A todos os meus amigos, em especial Edivan Luz, Elienai Stanley, Daniel Brandão, Hélder Borges, Josemar Lopes, Jonathan Pierot e Paulo Airton pelo companheirismo e amizade.

A todos os meus colegas de classe da turma do PROFMAT/UESPI, cada um a sua maneira, mas todos tiveram uma participação nessa conquista.

Aos professores do Programa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, por contribuírem com sabedoria e competência na mediação da construção do conhecimento.

“Tudo posso naquele que me fortalece”

Filipenses 4:13

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo abordar a ideia de projeções geométricas na resolução de problemas de fluxo elétrico, de forma a contribuir na interdisciplinaridade na docência, aproximando os conteúdos da aula ao cotidiano do aluno, de modo que o ensino se torne mais dinâmico. Dessa forma, será usado como embasamento teórico o estudo das projeções geométricas na matemática com aplicabilidade na física, levando-se em consideração o fluxo elétrico, e tomando como base as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Parte-se da apresentação das motivações dessa análise, seguido da definição de cônicas, tratativa da elipse e da projeção do círculo da superfície em um plano, até chegar aos exemplos de fluxo elétrico.

Palavras-chave: Interdisciplinaridade, Ensino, Projeções Geométricas, Fluxo Elétrico.

ABSTRACT

This paper aims to address the idea of geometric projections in solving electrical flow problems, in order to contribute to interdisciplinary teaching, bringing the contents of the class closer to the student's daily life, so that teaching becomes more dynamic. Thus, the study of geometric projections in mathematics with applicability in physics will be used as a theoretical basis, taking into account the electrical flow, and based on the guidelines of the National Curriculum Parameters (PCN). It starts with the presentation of the motivations of this analysis, followed by the definition of conics, dealing with the ellipse and the projection of the circle of the surface on a plane, until reaching the examples of electrical flow.

Keywords: Interdisciplinarity, Teaching, Geometric Projections, Electrical Flow.

Lista de Figuras

| | | |
|----|--|----|
| 1 | Retas e e g concorrentes e não perpendiculares | 17 |
| 2 | Superfície cônica de duas folhas | 17 |
| 3 | Plano α perpendicular à reta e | 19 |
| 4 | Plano α oblíquo à reta e | 19 |
| 5 | Plano α é paralelo a uma geratriz g | 20 |
| 6 | Plano α é oblíquo à reta e e corta as duas folhas da superfície cônica . | 20 |
| 7 | Elipse | 21 |
| 8 | Traçado de uma elipse | 22 |
| 9 | Elipse e seus elementos | 22 |
| 10 | Elipse com focos no eixo das abscissas. | 24 |
| 11 | Elipse com focos no eixo das ordenadas. | 26 |
| 12 | Sistema de coordenadas $x'Cy'$ | 27 |
| 13 | Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ paralelo a Oy | 28 |
| 14 | Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ paralelo a Oy | 28 |
| 15 | Conjunto dos pontos do plano α cujas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 de α têm uma diferença, em módulo, é igual a $2a$ | 29 |
| 16 | Hipérbole cujos ramos passam por A_1 e A_2 , respectivamente. | 30 |
| 17 | Elementos de uma hipérbole | 30 |
| 18 | Hipérbole com centro em O e $\overline{A_1A_2} \subset Ox$ | 31 |
| 19 | Hipérbole com eixo imaginário contido no eixo das ordenadas. | 33 |
| 20 | Hipérbole de assíntotas $y = \pm \frac{b}{a}x$ | 33 |
| 21 | Gráfico da hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ | 34 |
| 22 | Gráfico da hipérbole $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ | 35 |
| 23 | Gráfico da hipérbole $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$ | 35 |

| | | |
|----|--|----|
| 24 | Parábola representada pelo conjunto $\{P \in \alpha PF = PP'\}$ | 36 |
| 25 | Gráfico de $y^2 = 2px$ | 37 |
| 26 | Gráfico de $x^2 = 2py$ | 38 |
| 27 | Gráfico de $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ | 39 |
| 28 | Gráfico de $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ | 39 |
| 29 | Uma rotação de ângulo θ em torno da origem no sentido anti-horário. . . | 40 |
| 30 | Calculando a área da elipse. | 54 |
| 31 | A esfera de centro O e raio R | 55 |
| 32 | Calotas e zona esféricas. | 56 |
| 33 | O segmento esférico de duas bases e altura h | 56 |
| 34 | Segmentos esféricos de uma base e altura h | 57 |
| 35 | Calculando o volume da esfera. | 58 |
| 36 | Obtendo as coordenadas de P_1 a partir de P | 61 |
| 37 | Relação entre y e y_1 | 62 |
| 38 | Projeção do círculo sobre o plano Oxy | 64 |
| 39 | (a) Placa de vidro perpendicular aos raios solares e (b) placa de vidro paralela aos raios solares. Nesta figura definimos o vetor \vec{A} , que é normal à superfície frontal da placa, como apontado no sentido do lado 2 para o 1. | 66 |
| 40 | Uma espira retangular em um fluido | 67 |
| 41 | A espira retangular inclinada a um ângulo θ | 68 |
| 42 | A superfície é frontal ao campo elétrico: \vec{E} e \vec{A} são paralelos (o ângulo entre \vec{E} e \vec{A} é $\theta = 0$ | 70 |
| 43 | A superfície está inclinada em relação a uma orientação frontal, for- mando um ângulo θ | 71 |

| | | |
|----|---|----|
| 44 | A superfície é lateral ao campo elétrico: \vec{E} e \vec{A} são perpendiculares (o ângulo entre \vec{E} e \vec{A} é $\theta = 90^\circ$ | 72 |
| 45 | Carga positiva dentro da caixa, fluxo de dentro para fora. | 72 |
| 46 | Carga negativa dentro da caixa, fluxo de fora para dentro. | 73 |
| 47 | Fluxo elétrico através de uma esfera centrada sobre uma carga puntiforme. | 73 |
| 48 | Esfera e um objeto piramidal. | 75 |
| 49 | Carga puntiforme q a uma distância r , onde uma superfície dA cuja a normal não é paralela a r | 76 |
| 50 | Corpo hemisférico oco uniformemente carregado. | 77 |
| 51 | Construção dos elementos diferenciais de área em coordenadas polares | 78 |
| 52 | Triângulo retângulo | 78 |
| 53 | Contribuição infinitesimal de um campo elétrico devido a um elemento de carga do hemisfério uniformemente carregado | 80 |
| 54 | Duas cargas a uma distância $2L$ e círculo que é perpendicular à distância e localizado no ponto médio entre as cargas. | 82 |
| 55 | Coroa de raio R' e espessura dR' a uma distância L da carga $q+$ | 83 |
| 56 | Esfera de raio R e carga Q localizada em seu centro. | 85 |
| 57 | Cilindro com uma carga q no seu centro. | 86 |

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 15 |
| 2 | Cônicas | 17 |
| 2.1 | Elipse | 21 |
| 2.2 | Elementos principais | 22 |
| 2.3 | Equação reduzida da elipse | 23 |
| 2.4 | Hipérbole | 29 |
| 2.5 | Elementos principais | 30 |
| 2.6 | Equação reduzida da hipérbole | 31 |
| 2.7 | Parábola | 36 |
| 2.8 | Elementos principais | 36 |
| 2.9 | Equação reduzida da parábola | 37 |
| 2.10 | Equações quadráticas e rotação de eixos | 39 |
| 3 | O Princípio de Cavalieri | 52 |
| 3.1 | Área da elipse | 53 |
| 3.2 | A esfera e a calota esférica | 55 |
| 3.3 | Projeção | 61 |
| 4 | Fluxo Elétrico | 65 |
| 4.1 | Fluxo de um campo elétrico uniforme | 70 |
| 4.2 | Fluxo de um campo elétrico não uniforme | 73 |
| 4.3 | Lei de Gauss | 74 |
| 4.4 | Força do campo elétrico devido a um copo hemisférico oco com carga uniforme | 77 |

1 Introdução

Falar de projeção geométrica é tratar de fenômenos físicos que ocorrem rotineiramente na natureza. É o processo pelo qual se incidem raios sobre um objeto em um plano, determinando, assim, sua representação gráfica. Os raios solares e raios luminosos são exemplos clássicos disso. A geometria projetista é um área da matemática que se dá em diversos segmentos do nosso cotidiano. De acordo com os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCN):

[...] é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de artes, pinturas, desenhos, esculturas e artesanatos, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1990)

Nesse contexto, a realização deste trabalho surgiu da observação da prática docente, da qual percebe-se a necessidade de se expandir o estudo de projeções geométricas a outras áreas do conhecimento, pelo fato de sua aplicabilidade fazer parte do nosso cotidiano; desenvolvendo, dessa forma, a interdisciplinaridade entre as matérias e cursos.

Os PCN orientam para o desenvolvimento de um currículo que contemple a integração das áreas. Sob essa ótica, o presente material visa a abordagem da interdependência entre a matemática e a física, que se tratam de duas ciências da mesma natureza e, portanto, ideais para o entendimento desse processo.

“O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas,[...]” (BRASIL, 1999)

Essa análise tem por objetivo contribuir de forma significativa no entretenimento das aulas, tornado-as mais dinâmicas e, conseqüentemente, melhorando, também, o relacionamento entre professor e aluno. A ideia parte de apresentar outras maneiras,

por exemplo, de resolver uma determinada situação de física, abrindo-se um leque de possibilidades para as soluções que forem apresentadas.

É notório que o processo de ensino e aprendizagem vem enfrentando algumas dificuldades. Avaliações externas demonstram isso e, muitas vezes, são resultantes de conteúdos escolares desvinculados da realidade ou com a maneira que são apresentados em sala de aula, sem aproximação e aplicação dos conteúdos ensinados e o cotidiano do educando, em um enfoque disciplinar.

Com isso, pode-se afirmar que o tema proposto vai auxiliar na comunicação em sala de aula, impulsionando o aluno na simplificação de cálculo e na otimização de tempo, proporcionando, assim, maior domínio e segurança na disciplina.

Para ficar claro ao leitor a sequência do trabalho, o primeiro capítulo contempla a introdução onde são apresentados as motivações, justificativas que nortearam este estudo, a questão da pesquisa e o objetivo em sua maior dimensão.

Os capítulos dois e três contará com a definição de cônicas, seguido pelo princípio de Cavalieri, em que será abordada a área da elipse e a ideia de projeção de um círculo da superfície esférica em um dado plano. Por fim, nos demais capítulos, será feita a exposição de fluxo elétrico, com exemplos da física e, também, considerações finais.

2 Cônicas

Consideremos duas retas e e g concorrentes em V e não perpendiculares (Figura 1).

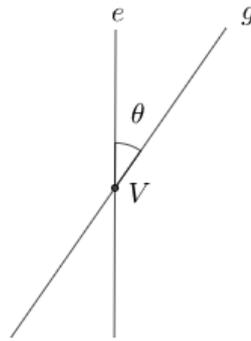


Figura 1: Retas e e g concorrentes e não perpendiculares

Com a reta e fixa pelo ponto V façamos g girar 360° em torno de e , mantendo constante o ângulo θ formado por elas. A reta g gera uma superfície denominada superfície cônica de duas folhas (Figura 2). A reta g é chamada geratriz dessa superfície.

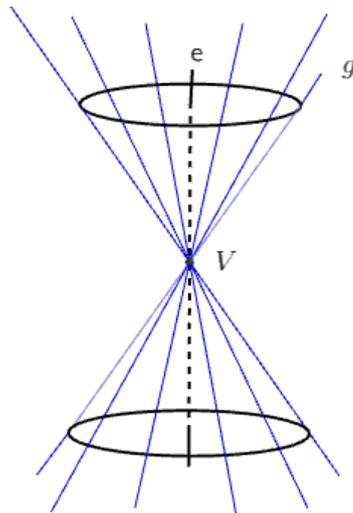


Figura 2: Superfície cônica de duas folhas

Segundo (DELGADO et al., 2017), historiadores atribuem a Menaecmo (380 - 320 a.C. aproximadamente), matemático e discípulo de Eudoxio na academia de Platão, a descoberta das cônicas. Ele mostrou que as curvas que mais tarde foram denominadas elipses, hipérbolas e parábolas são obtidas como secções de um cone quando cortado por um plano não paralelo à sua base. Esta descoberta se deu enquanto Menaecmo resolvia um problema sobre a duplicação do cubo, pois sabia que a parábola e a hipérbole ofereciam as propriedades necessárias para a solução desse problema, descobrindo aí a elipse.

Ainda, segundo o autor acima citado, nos escritos de Pappus de Alexandria (290 -350 aproximadamente) que é creditado a Aristeu (370 - 300 a.C.) se encontra a publicação do primeiro tratado sobre secções cônicas que, mais tarde, o matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga realizou uma nova compilação aprimorada sobre esse assunto em sua obra *Secções Cônicas*, onde finalmente as curvas receberam os nomes pelas quais são conhecidas atualmente, no entanto, os nomes hipérbole e parábola já tinham sido usados anteriormente. As obras *Secções Cônicas* de Apolônio e *Elementos* de Euclides são consideradas o ápice da matemática grega.

Segundo (IEZZI et al., 2017), os estudos das curvas obtidas com as secções de uma superfície cônica por um plano realizado por Apolônio de Perga por volta de 200 a.C. se mostraram de grande ajuda a muitos pensadores sobretudo aos astrônomos, a exemplo de Copérnico, Kepler, Halley e Newton que a utilizaram para explicar diversos fenômenos físicos, tais como as trajetórias percorridas por planetas e as descritas por projéteis.

Apolônio de Perga, iniciou o estudo das curvas obtidas quando se secciona uma superfície cônica por um plano α . Dependendo da posição desse plano α , diferentes secções podem ser obtidas.

Se o plano α é perpendicular à reta e , a seção obtida é uma circunferência. Em particular, se α passa por V , a seção obtida é um ponto.

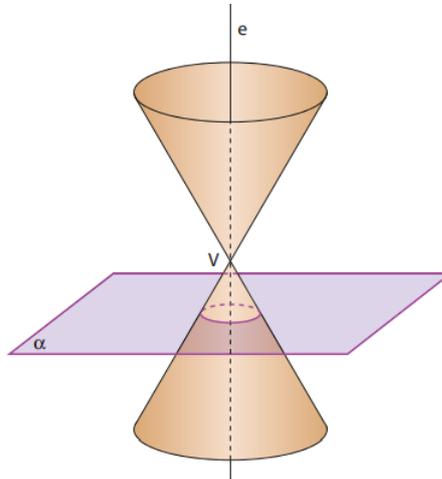


Figura 3: Plano α perpendicular à reta e

Se o plano α é oblíquo à reta e , mas corta apenas uma das folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma elipse.

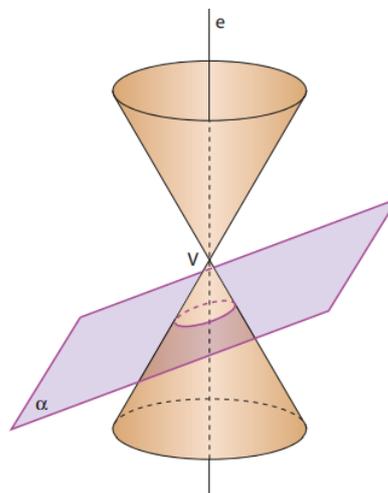


Figura 4: Plano α oblíquo à reta e

Se o plano α é paralelo a uma geratriz g da superfície cônica, a seção obtida é uma parábola.

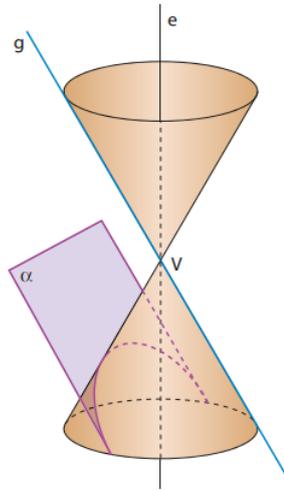


Figura 5: Plano α é paralelo a uma geratriz g

Se o plano α é oblíquo à reta e e corta as duas folhas da superfície cônica, a seção obtida é uma hipérbole.

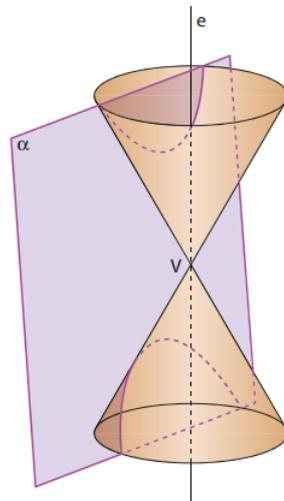


Figura 6: Plano α é oblíquo à reta e e corta as duas folhas da superfície cônica

2.1 Elipse

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles e O o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$. Elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual à constante $2a$ ($2a > 2c$).

$$\bullet QF_1 + QF_2 = 2a$$

$$\bullet RF_1 + RF_2 = 2a$$

$$\bullet SF_1 + SF_2 = 2a$$

$$\bullet A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$$

$$\bullet B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$$

$$\bullet A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$$

$$\bullet B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$$

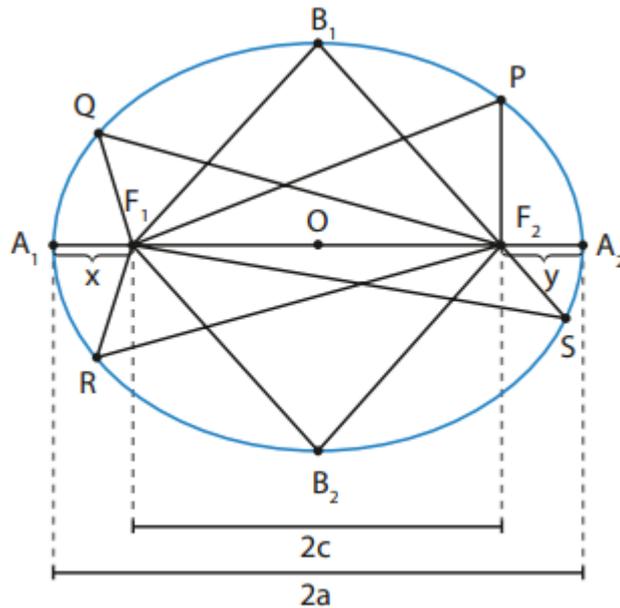


Figura 7: Elipse

Notemos que $A_1A_2 = 2a$, pois $A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_2F_1$. Daí,

$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c),$$

e, conseqüentemente, $x = y$. Então,

$$A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a.$$

Na figura 8 é possível compreender o traçado de uma elipse.

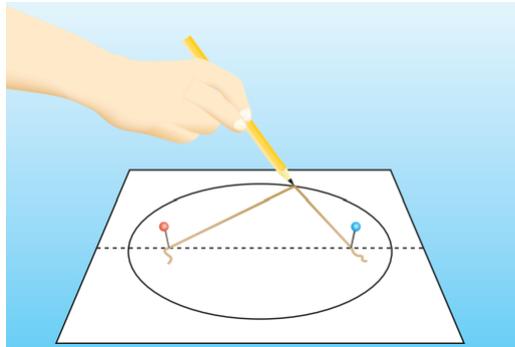


Figura 8: Traçado de uma elipse

2.2 Elementos principais

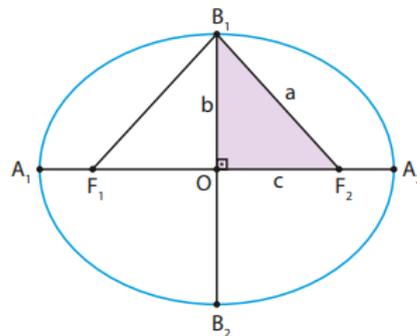


Figura 9: Elipse e seus elementos

- F_1 e F_2 : focos
- O : centro
- $\overline{A_1A_2}$: eixo maior
- $\overline{B_1B_2}$: eixo menor
- $2c$: distância focal
- $2a$: medida do eixo maior
- $2b$: medida do eixo menor
- $\frac{c}{a}$: excentricidade

Numa elipse, a medida do semieixo maior (a), a medida do semieixo menor (b) e a metade da distância focal (c) verificam a relação $a^2 = b^2 + c^2$, que decorre do teorema de Pitágoras aplicado ao $\triangle OF_2B_1$.

2.3 Equação reduzida da elipse

Fixando um plano cartesiano, dois casos de equação da elipse podem ser obtidos.

1° **Caso**: Equação da elipse com centro na origem do sistema de coordenadas.

a): O eixo maior contido no eixo das abscissas:

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal (Figura 10) tal que os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ estão contidos em x e y , respectivamente.

É notório que os focos são os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Chama-se equação reduzida da elipse a equação que o ponto genérico $P(x, y)$ da curva verifica. Assim, $P \in$ elipse se, e somente se $PF_1 + PF_2 = 2a$.

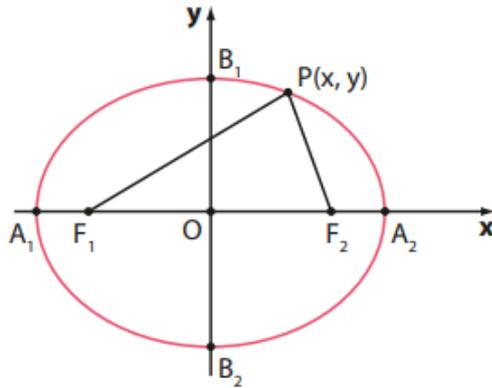


Figura 10: Elipse com focos no eixo das abscissas.

Deduzindo a fórmula, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a,$$

isto é,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo, vem:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

ou seja,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

assim,

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Portanto,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando ao quadrado novamente, temos

$$a^2(x - c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2,$$

ou seja,

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

assim,

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2,$$

consequentemente,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Portanto,

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

que dividindo por a^2b^2 , resulta $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) O eixo maior contido no eixo das ordenadas.

Analogamente, se a elipse apresenta os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ contidos em x e y , respectivamente, temos

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2},$$

que, repetindo o raciocínio anterior, decorre novamente a equação da elipse $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$.

2° **Caso:** Equação da elipse com centro fora da origem do sistema de coordenadas.

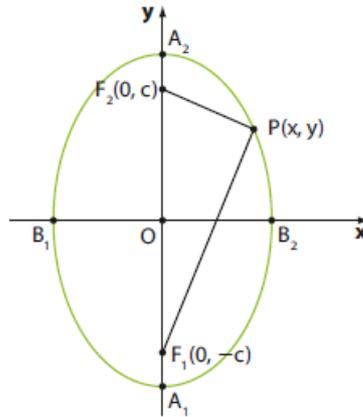


Figura 11: Elipse com focos no eixo das ordenadas.

Analogamente ao que acontece com uma elipse com centro na origem $O(0,0)$, uma elipse cujo centro é um ponto qualquer $C(x_0, y_0)$, distinto de O e com seus eixos paralelos aos eixos coordenados, podemos citar duas possibilidades, a do eixo maior $\overline{A_1A_2}$ ser paralelo ao eixo Ox ou ao eixo Oy .

Na figura 12 podemos observar que o sistema cartesiano de coordenadas $x'C'y'$ é um sistema tal que $x' \parallel x$ e $y' \parallel y$ e x' e y' tem respectivamente o mesmo sentido positivo de x e y logo, $x'C'y'$ pode ser considerado uma translação do sistema xOy . Podemos observar ainda que no eixo Ox , temos

$$OP_1 = OC'_1 + C'_1P_1 \Rightarrow x = x_0 + x',$$

e no eixo Oy , temos

$$OP_2 = OC'_2 + C'_2P_2 \Rightarrow y = y_0 + y'.$$

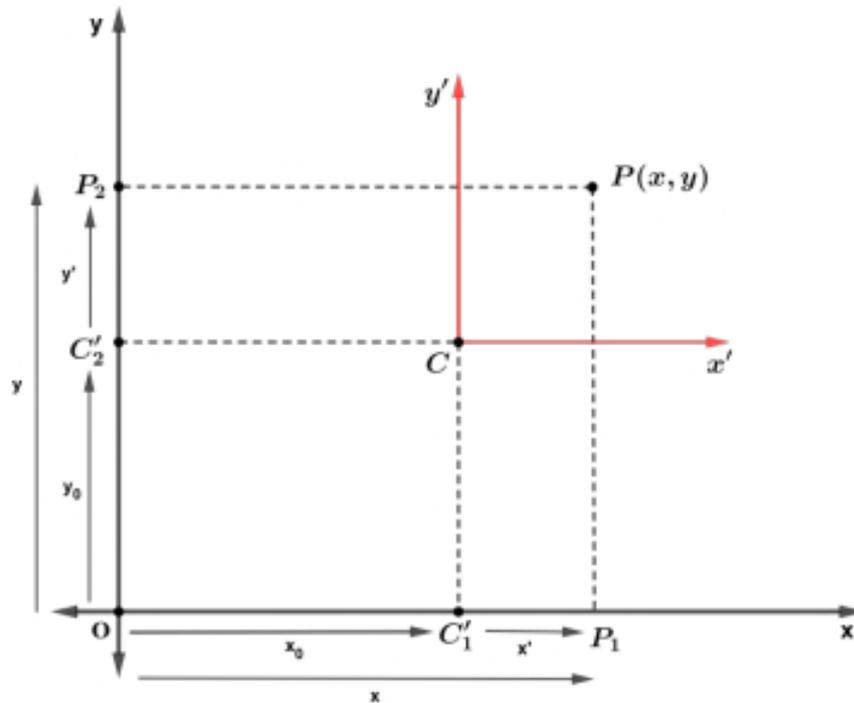


Figura 12: Sistema de coordenadas $x'Cy'$

a) O eixo maior $\overline{A_1A_2}$ é paralelo ao eixo Ox .

Na figura 13 vemos uma elipse cujo centro é o ponto $C(x_0, y_0)$, seu eixo maior está contido no eixo x' e seu eixo menor está contido no eixo y' . Assim, sua equação reduzida em relação ao sistema $x'Cy'$ é representada por $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$.

Substituindo x e y pelas fórmulas da translação vistas anteriormente, a equação reduzida da elipse em relação ao sistema auxiliar $x'Cy'$ fica representada por

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

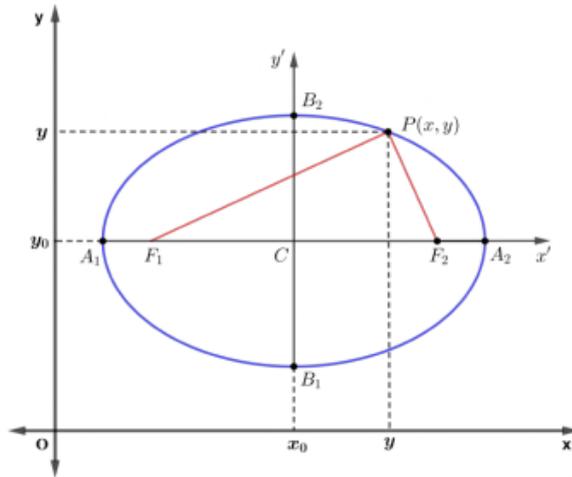


Figura 13: Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ paralelo a Oy

Na figura 14 a elipse tem centro $C(x_0, y_0)$, seu eixo maior está contido no eixo y' e seu eixo menor está contido no eixo x' e, raciocinando de modo análogo ao caso anterior, se o eixo maior $\overline{A_1A_2}$ é paralelo ao eixo Oy sua equação reduzida em relação ao sistema $x'Cy'$ passa a ser representada por $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$.

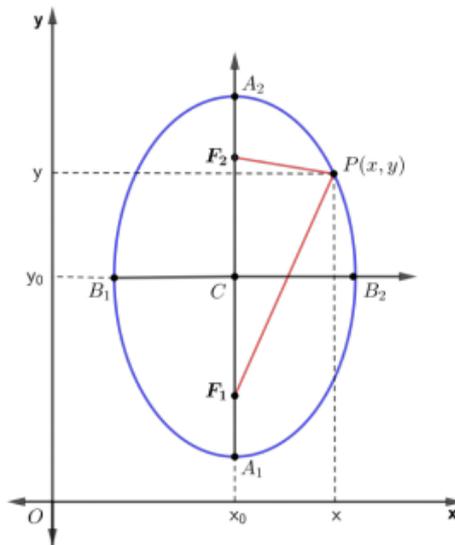


Figura 14: Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2}$ paralelo a Oy

2.4 Hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles e O o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ (Figura 15). Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ (com $0 < 2a < 2c$).

Assim, temos:

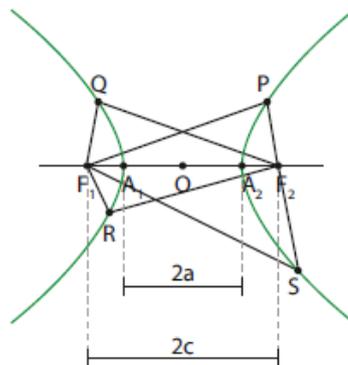


Figura 15: Conjunto dos pontos do plano α cujas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 de α têm uma diferença, em módulo, é igual a $2a$.

- $|QF_2 - QF_1| = 2a$
- $|RF_2 - RF_1| = 2a$
- $|SF_1 - SF_2| = 2a$
- $|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a$
- $|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a$

Na figura 16, temos $m = n$, onde m e n são, respectivamente, os segmentos F_1A_1 e A_2F_2 . De fato, pois de

$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a \Rightarrow A_2F_1 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow (2c - n) - n = 2a,$$

segue que $c = a + n$, e de

$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a \Rightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow (2c - m) - m = 2a,$$

segue que $c = a + m$. Logo, $c = a + n = a + m \Rightarrow m = n$.

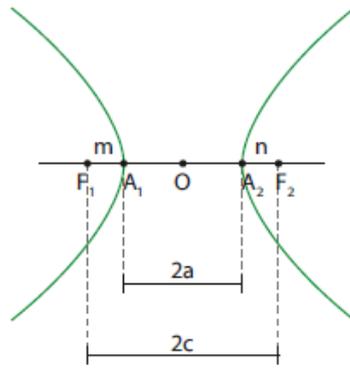


Figura 16: Hipérbole cujos ramos passam por A_1 e A_2 , respectivamente.

2.5 Elementos principais

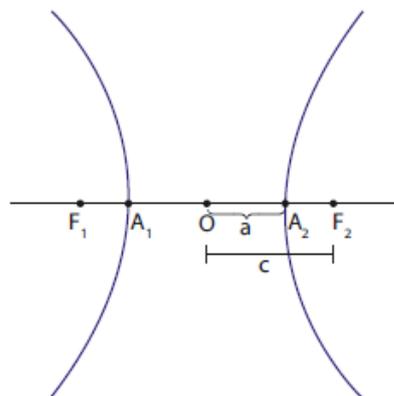


Figura 17: Elementos de uma hipérbole

- F_1 e F_2 : focos

- O : centro
- A_1A_2 : eixo real ou transverso
- $2c$: distância focal, em que $c = OF_1 = OF_2$
- $2a$: medida do eixo real, em que $a = OA_1 = OA_2$
- $\frac{c}{a}$: excentricidade

2.6 Equação reduzida da hipérbole

Fixando um plano cartesiano, podemos obter a equação reduzida da hipérbole em dois casos.

1° **Caso:** Equação da hipérbole com centro na origem do sistema de coordenadas

a) O eixo real contido no eixo das abscissas:

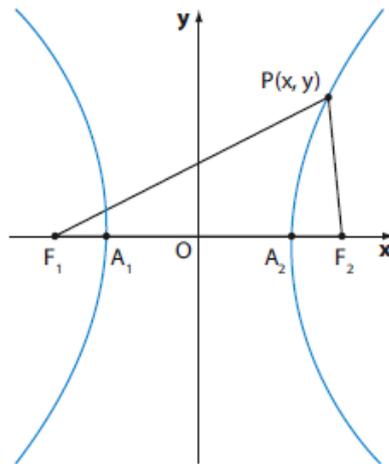


Figura 18: Hipérbole com centro em O e $\overline{A_1A_2} \subset Ox$

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que $\overline{F_1F_2}$ esteja contido no eixo x e a reta perpendicular a esse segmento, passando por O (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$) seja o eixo y . O eixo real é $\overline{A_1A_2}$ e sua medida é $2a$. Os focos são os pontos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

$$P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$$

Chama-se equação reduzida da hipérbole a equação que o ponto genérico da hipérbole, $P(x, y)$, verifica.

Deduzindo, temos

$$\begin{aligned} |PF_1 - PF_2| &= 2a \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= \pm 2a \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \end{aligned}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando novamente os dois membros ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} (cx - a^2)^2 &= a^2 \cdot (x-c)^2 + a^2 y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow c^2 x^2 - 2a^2 cx + a^4 &= a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 c^2 + a^2 y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \end{aligned}$$

Chamando $c^2 - a^2 = b^2$, observando que $a < c \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$, temos que

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Dividindo ambos os membros por $a^2 b^2$, resulta na equação reduzida da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observe que, se $x = 0$, temos

$$\frac{0}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow y^2 = -b^2.$$

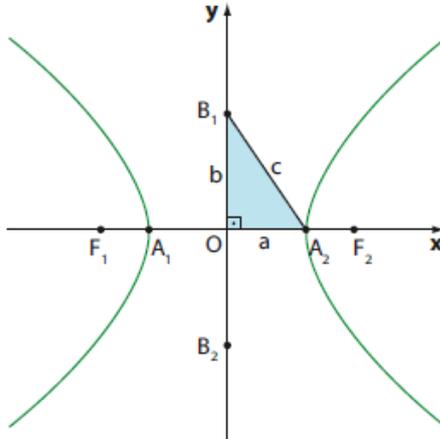


Figura 19: Hipérbole com eixo imaginário contido no eixo das ordenadas.

Como $b \in \mathbf{R}_+^*$, temos que $y \notin \mathbf{R}$. Desse modo, não há pontos em comum entre a hipérbole e o eixo y . Os pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ não pertencem à hipérbole mas determinam o segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida $2b$, que é chamado eixo imaginário da hipérbole.

Daí surge a relação notável $c^2 = a^2 + b^2$.

Traçando por A_1 e A_2 retas verticais e traçando por B_1 e B_2 retas horizontais, obtemos o retângulo $CDEF$, cujos vértices são as interseções dessas retas.

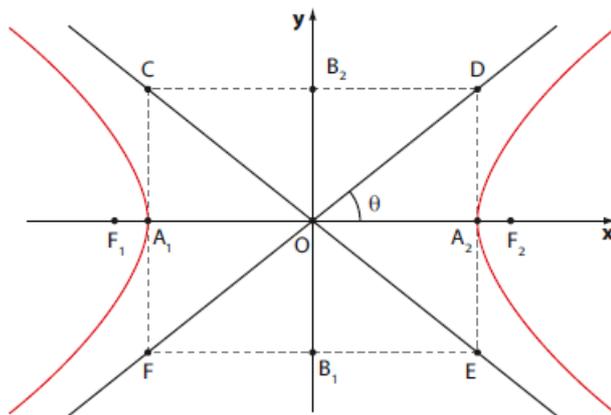


Figura 20: Hipérbole de assíntotas $y = \pm \frac{b}{a}$.

A reta suporte da diagonal \overline{DF} passa por $O(0,0)$ e tem coeficiente angular igual a $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$. Sua equação reduzida é $y = \frac{b}{a}x$.

Analogamente, a equação da reta suporte da diagonal \overline{CE} é $y = -\frac{b}{a}x$.

As retas de equações $y = \pm \frac{b}{a}x$ são chamadas assíntotas da hipérbole. E estas não intersectam a hipérbole, mas, na medida em que tomamos pontos da hipérbole muito afastados do centro O (para a esquerda de O ou à direita de O), o traçado da hipérbole aproxima-se das assíntotas.

b) O eixo real contido no eixo das ordenadas:

Analogamente ao que vimos, se a hipérbole apresenta eixo real $\overline{A_1A_2}$ e eixo imaginário $\overline{B_1B_2}$ contidos em y e x , respectivamente, temos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$ em que $c > 0$.

Se $P(x, y)$ pertence à hipérbole, então:

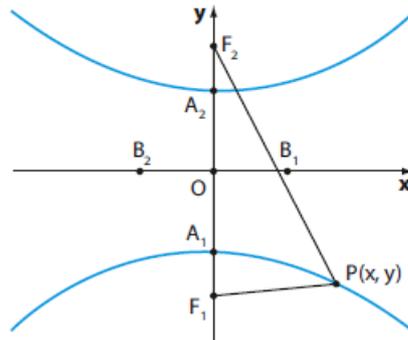


Figura 21: Gráfico da hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \pm 2a$$

Daí obtemos a equação da hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ e suas assíntotas têm equações $y = \pm \frac{a}{b}x$.

2º Caso: Equação da hipérbole com centro fora da origem do sistema de coordenadas

Se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} \parallel Ox$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'O'y'$ é $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$.

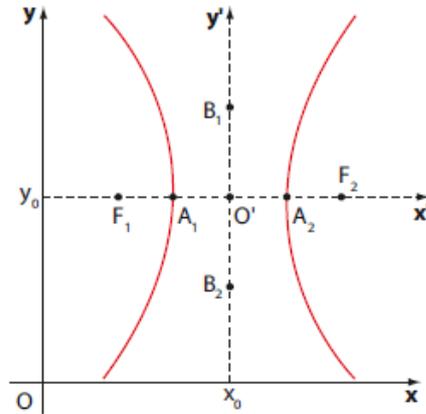


Figura 22: Gráfico da hipérbole $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Observe a hipérbole a seguir (Figura 23), que tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $\overline{A_1A_2} \parallel Oy$. Analogamente, sua equação relativa ao sistema xOy é $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$.

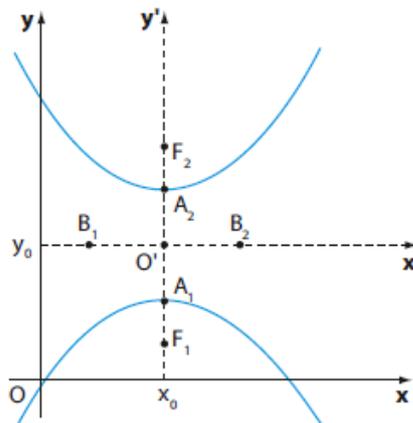


Figura 23: Gráfico da hipérbole $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$.

2.7 Parábola

Dados um ponto F pertencente a um plano α e uma reta d contida em α , com $F \notin d$, seja p a distância entre o ponto F e a reta d . Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d , ou seja, é o conjunto $\{P \in \alpha \mid PF = PP'\}$.

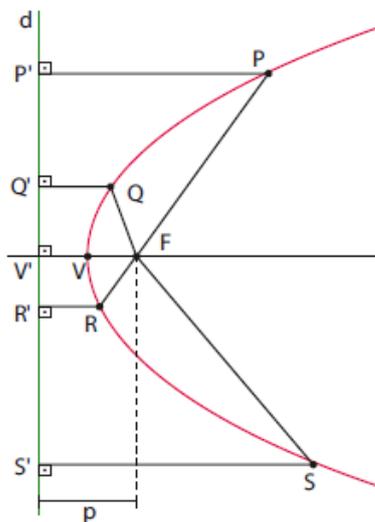


Figura 24: Parábola representada pelo conjunto $\{P \in \alpha \mid PF = PP'\}$.

Assim, temos $VF = VV'$, $PF = PP'$, $QF = QQ'$, $RF = RR'$, $SF = SS'$.

2.8 Elementos principais

- F : foco
- d : diretriz
- p : parâmetro
- V : vértice
- \overline{VF} : eixo de simetria (é a reta que passa por F e é perpendicular à diretriz)

Relação notável: $VF = \frac{p}{2}$, pois $VF = VV'$.

2.9 Equação reduzida da parábola

1º **Caso:** Parábola com vértice na origem e eixo de simetria sobre um dos eixos coordenados

a) O eixo de simetria contido no eixo das abscissas:

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. Como a distância entre F e d é p , temos que $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, e a diretriz d tem equação $x = -\frac{p}{2}$.

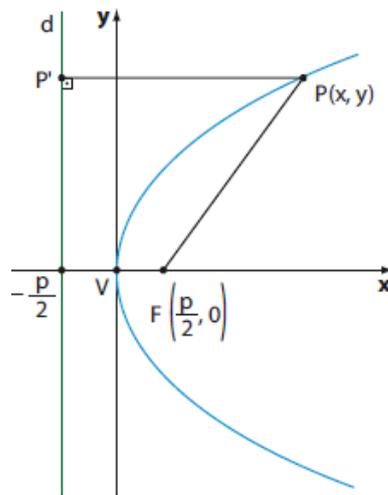


Figura 25: Gráfico de $y^2 = 2px$.

Nessas condições, chama-se equação reduzida da parábola a equação que o ponto genérico da curva $P(x, y)$ vai verificar. Vamos deduzi-la.

$$P \in \text{parábola} \Leftrightarrow PF = PP'.$$

Então,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2},$$

elevando ambos os membros ao quadrado, segue

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Simplificando, resulta $y^2 = 2px$.

b): O eixo de simetria contido no eixo das ordenadas.

Analogamente ao que já vimos, se a parábola apresentar vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, temos:

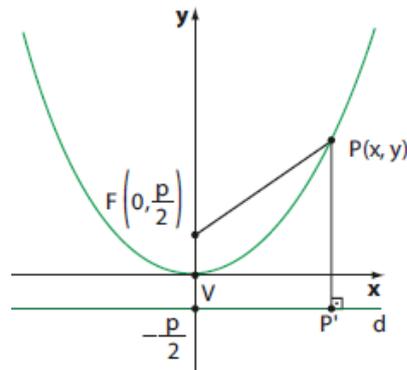


Figura 26: Gráfico de $x^2 = 2py$.

$$PF = PP' \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Daí, decorre a equação da parábola $x^2 = 2py$.

2° **caso**: Parábola com vértice $V'(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados

a) Vertice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas:

Se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overline{VF} \parallel Ox$, sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$ é $(y')^2 = 2px'$.

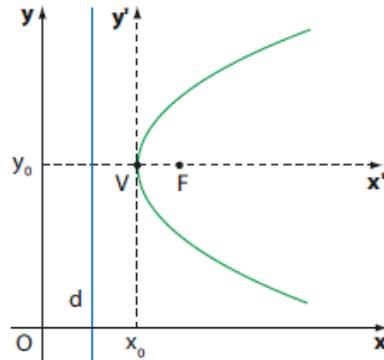


Figura 27: Gráfico de $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

b) Vértice $V'(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas:

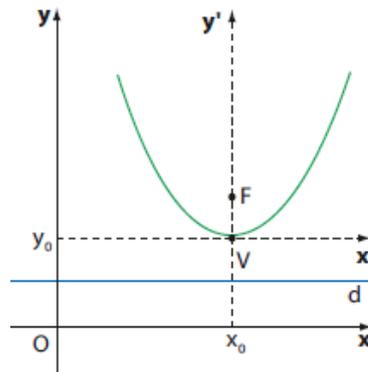


Figura 28: Gráfico de $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $\overline{VF} \parallel Oy$, sua equação relativamente ao sistema xOy é $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

2.10 Equações quadráticas e rotação de eixos

Nesta seção, examinamos o gráfico da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

em que A , B e C não são todos nulos, e mostramos que ela é quase sempre uma seção elipse ou uma hipérbole ou uma parábola. As exceções são os casos nos quais podem também representar um par de retas, uma só reta, um ponto ou o conjunto vazio, que são as chamadas cônicas degeneradas. É convenção chamar todos os gráficos da equação (1), curvos ou não, de curvas quadráticas.

Suponha um sistema cartesiano ortogonal Oxy (Figura 29). Neste sistema é dado um ponto $P(x, y)$. Rotacionando o sistema Oxy em torno de O um ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) pode-se obter um outro sistema cartesiano ortogonal $Ox'y'$, mantendo em cada eixo a mesma escala do sistema de origem. Neste novo sistema as coordenadas de P agora são $P(x', y')$.

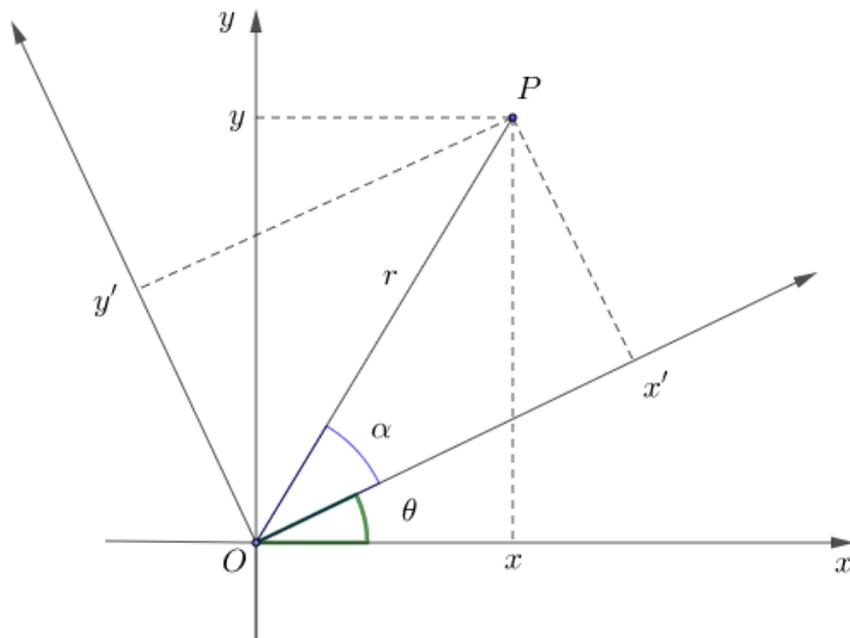


Figura 29: Uma rotação de ângulo θ em torno da origem no sentido anti-horário.

É possível obter uma relação entre as coordenadas de P nos dois eixos. Supondo

que o segmento \overline{OP} de medida r faz um ângulo α com o eixo x' , obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\theta + \alpha) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \operatorname{sen}(\theta + \alpha) = r(\operatorname{sen}\theta \cos\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\alpha) \\ \cos(\theta + \alpha) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos(\theta + \alpha) = r(\cos\theta \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha) \end{cases} \quad (2)$$

Como

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cos\alpha, \quad (3)$$

segue que

$$\begin{cases} y = r(\operatorname{sen}\theta \cos\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \\ x = r(\cos\theta \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad (4)$$

Quando aplicamos as equações (4) à equação quadrática (1), rotacionamos os eixos desta, transformando-a em uma nova equação quadrática da forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0. \quad (5)$$

Desse modo, obtemos:

$$\begin{aligned} & A(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + \\ & C(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta) + \\ & E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação e colocando em evidência os coeficientes A, B, C, D e E, respectivamente, segue

$$\begin{aligned} & A(x'^2 \cos^2\theta - 2x'y' \operatorname{sen}\theta \cos\theta + y'^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \\ & B(x'^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + x'y' \cos^2\theta - x'y' \operatorname{sen}^2\theta - y'^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta) + \\ & C(x'^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2x'y' \operatorname{sen}\theta \cos\theta + y'^2 \cos^2\theta) + \\ & D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta) + E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0, \end{aligned}$$

organizando a equação, temos

$$\begin{aligned}
 & (A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta) x'^2 + \\
 & [-2A \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + 2C \operatorname{sen} \theta \cos \theta] x' y' + \\
 & (A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) y'^2 + (D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta) x' + \\
 & (-D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta) y' + F = 0,
 \end{aligned}$$

usando as relações trigonométricas, segue

$$\begin{aligned}
 & \left(A \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \right) x'^2 + [(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta] x' y' + \\
 & \left(A \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \cos^2 \theta \right) y'^2 + (D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta) x' + \\
 & (-D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta) y' + F = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto a equação é dada por

$$\begin{aligned}
 & \left(A \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \right) x'^2 + [(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta] x' y' + \\
 & \left(A \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \cos^2 \theta \right) y'^2 + (D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta) x' + \\
 & (-D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta) y' + F = 0 \tag{6}
 \end{aligned}$$

Logo, de (5) e (6), resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A' = A \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \\
 B' = (C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta \\
 C' = A \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \cos^2 \theta \\
 D' = D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta \\
 E' = -D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta \\
 F' = F
 \end{array} \right. \tag{7}$$

Essas equações em (7) mostram, entre outras coisas, que, quando começamos com uma equação de uma curva na qual o termo misto está presente ($B \neq 0$), podemos determinar um ângulo de rotação θ que produz uma equação na qual nenhum termo misto aparece. Para tanto, fazemos $B = 0$ na segunda equação em (7) e resolvermos a equação resultante

$$(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta = 0,$$

para determinar θ , observando-se, nesse caso, que para $A = C$, teremos

$$B \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

e, ainda, para $A \neq C$, teremos $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}$. Como $1 + \operatorname{tg}^2 2\theta = \sec^2 2\theta$, segue que $\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}}$, se $\frac{B}{A - C} > 0$, ou $\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}}$, se $\frac{B}{A - C} < 0$, pois, sendo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ implica $2\theta \in (0, \pi)$, $\cos 2\theta$ e $\operatorname{tg} 2\theta$ têm o mesmo sinal.

Conhecendo $\cos 2\theta$, podemos determinar o ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por meio das relações trigonométricas $\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$ e $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$.

Exemplo 2.1. *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0 \quad (8)$$

em outra equação desprovida do termo misto de grau dois e, em seguida, determine a sua excentricidade.

Resolução.

Sejam $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 20$, $E = 20$, $F = 44$, os coeficientes da equação (8). Seja, ainda, $Ox'y'$ o sistema de eixos ortogonais obtido girando os eixos Ox e Oy de um ângulo $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, no sentido positivo, de modo que a equação (8) fique na forma canônica nas coordenadas x' e y' deste sistema.

Como $A \neq C$, temos $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} > 0$. Logo,

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16/9}} = \frac{3}{5} > 0,$$

de onde obtemos:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ \operatorname{sen} \theta &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 3/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.\end{aligned}$$

Assim, as equações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta = \frac{2\sqrt{5}x' - \sqrt{5}y'}{5} \\ y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta = \frac{\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y'}{5} \end{cases} \quad (9)$$

Substituindo-se as equações de (9) na equação (8), obtemos

$$\begin{aligned}5 \left(\frac{2\sqrt{5}x' - \sqrt{5}y'}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{2\sqrt{5}x' - \sqrt{5}y'}{5} \right) \left(\frac{\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y'}{5} \right) + \\ 2 \left(\frac{\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y'}{5} \right)^2 + 20 \left(\frac{2\sqrt{5}x' - \sqrt{5}y'}{5} \right) + 20 \left(\frac{\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y'}{5} \right) + 44 = 0.\end{aligned}$$

Desenvolvendo os quadrados e aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, segue

$$\begin{aligned}4x'^2 - 4x'y' + y'^2 + \frac{x'^2 + 12x'y' - 8y'^2}{5} + \frac{2x'^2 + 8x'y' + 8y'^2}{5} + 8\sqrt{5}x' - 4\sqrt{5}y' + \\ 4\sqrt{5}x' + 8\sqrt{5}y' + 44 = 0.\end{aligned}$$

Multiplicando a equação por 5, temos

$$6x'^2 + y'^2 + 12\sqrt{5}x' + 4\sqrt{5}y' + 44 = 0$$

onde, completando os quadrados, segue que

$$6(x'^2 + 2\sqrt{5}x') + (y'^2 + 4\sqrt{5}y') = -44.$$

Completando quadrados, segue

$$6(x'^2 + 2\sqrt{5}x' + 5) + (y'^2 + 4\sqrt{5}y' + 20) = -44 + 30 + 20.$$

Consequentemente, temos

$$6(x' + \sqrt{5})^2 + (y' + 2\sqrt{5})^2 = 6.$$

Dividindo ambos os membros por 6, segue

$$(x' + \sqrt{5})^2 + \frac{(y' + 2\sqrt{5})^2}{6} = 1,$$

que é a equação de uma elipse de forma canônica $\frac{(x' - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y' - y_0)^2}{a^2} = 1$. Logo, $a^2 = b^2 + c^2$ implica $6 = 1 + c^2$, assim $c = \sqrt{5}$ e, consequentemente, sua excentricidade é igual a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

A proposição a seguir traz duas consequências interessantes que, juntamente com uma específica translação de eixos, permitem determinar a excentricidade da equação do exemplo anterior de uma outra maneira.

Proposição 2.1. *Seja Oxy um sistema de eixos ortogonais, e considere o sistema $Ox'y'$ obtido girando os eixos Ox e Oy de um ângulo θ , $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, no sentido positivo, em torno da origem. Se $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ é a equação de segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, nas coordenadas x' e y' , então $A' + C' = A + C$ e $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$, para todo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Demonstração. De fato, tomando-se as equações de (7), segue que

$$\begin{aligned} A' + C' &= \left(A \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \right) + \left(A \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \cos^2 \theta \right) \\ &= A (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) + C (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = A + C \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B'^2 - 4A'C' &= [(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta]^2 - \\ &\quad 4 \left[A \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \right] \left[A \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \cos^2 \theta \right] \\ &= (C - A)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta + 2B(C - A) \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + B^2 \cos^2 2\theta - \\ &\quad (A^2 + C^2) \operatorname{sen}^2 2\theta - 4AC (\operatorname{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) + 2AB \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta - \\ &\quad 2BC \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + B^2 \operatorname{sen}^2 2\theta \\ &= -2AC \operatorname{sen}^2 2\theta + 2B(C - A) \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta - \\ &\quad 2B(C - A) \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + B^2 (\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta) - \\ &\quad 4AC (1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta) \\ &= -2AC \operatorname{sen}^2 2\theta + B^2 - 4AC + 8AC \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= -2AC \operatorname{sen}^2 2\theta + B^2 - 4AC + 2AC \operatorname{sen}^2 2\theta \\ &= B^2 - 4AC \end{aligned}$$

□

Voltando à discussão quanto a determinação da excentricidade do exemplo 2.1, inicialmente, faremos uma translação de eixos de modo que os termos de 1º grau sejam nulos. Para tanto, substituímos $x = x' + h$ e $y = y' + k$ na equação (8), isto é,

$$5(x' + h)^2 + 4(x' + h)(y' + k) + 2(y' + k)^2 + 20(x' + h) + 44 = 0,$$

que, após simplificação, obtemos

$$5x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 + (10h + 4k + 20)x' + (4h + 4k + 20)y' + 5h^2 + 4hk + 2k^2 + 20k + 44 = 0 \quad (10)$$

Pondo os coeficientes de x' e y' da equação (10) iguais a zero, segue que

$$\begin{cases} 10h + 4k = -20 \\ 4h + 4k = -20 \end{cases} \Leftrightarrow h = 0 \text{ e } k = -5. \quad (11)$$

De (10) e (11), tem-se

$$5x'^2 + 4x'y' + 2y'^2 - 6 = 0. \quad (12)$$

Em seguida, transformaremos a equação (12) da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, $D = E = 0$ e $F = -6$, em uma equação $A''x''^2 + B''x''y'' + C''y''^2 + D''x'' + E''y'' + F'' = 0$, onde $B'' = 0$ e $F'' = F = -6$. Para isso, utilizaremos a proposição (2.1). Assim, $A' + C' = A + C = 5 + 2 = 7$ e $B''^2 - 4A''C'' = B^2 - 4AC$ implica em $-4A''C'' = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2$, sendo $A''C'' = 6$. Logo, o sistema

$$\begin{cases} A'' + C'' = 7 \\ A''C'' = 6 \end{cases}$$

admite como solução o par $(A'', C'') = (1, 6)$, que conduz à nova equação $\frac{x''^2}{6} + y''^2 = 1$, que representa uma elipse de excentricidade $\frac{\sqrt{30}}{6}$ e eixo maior contido no eixo Ox . Por outro lado, o par $(A'', C'') = (6, 1)$ é outra solução, que conduz à equação $x''^2 + \frac{y''^2}{6} = 1$, que também representa uma elipse de excentricidade $\frac{\sqrt{30}}{6}$ e eixo maior contido no eixo Oy . A única diferença é que se trata de outro sistema, rotacionando $\frac{\pi}{2}$ em relação ao utilizado anteriormente.

Como os eixos podem ser rodados para eliminar o termo misto, então não há perda de generalidade em supor que isso foi feito e nossa equação tem a forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

que pode representar:

- a) uma **circunferência** se $A = C \neq 0$ (casos especiais: o gráfico é um ponto ou não há gráfico);
- b) uma **parábola** se a equação é quadrática em uma variável e linear na outra;
- c) uma **elipse** se A e C são ambos positivos ou ambos negativos (casos especiais: círculo, um único ponto ou não há gráfico);
- d) uma **hipérbole** se A e C têm sinais opostos (casos especiais: um par de retas concorrentes);
- e) uma **reta** se A e C são nulos e pelo menos um entre D e E é diferente de zero;
- f) **uma ou duas retas** se o lado esquerdo da equação puder ser decomposto como um produto de dois fatores lineares.

A proposição (2.1) nos diz que para uma rotação de eixos de um ângulo θ tem-se $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$, o que significa dizer que $B^2 - 4AC$ é invariante. Daí, se tomarmos $B' = 0$,

$$B^2 - 4AC = -4A'C',$$

que nos ajuda a dizer, de acordo com a classificação acima da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, que se $A'C' = 0$, a curva é uma parábola, uma elipse se $A'C' > 0$ e uma hipérbole se $A'C' < 0$. Então, a curva tem de ser uma parábola se $B^2 - 4AC = 0$,

uma elipse se $B^2 - 4AC < 0$ e uma hipérbole se $B^2 - 4AC > 0$. Chamaremos o número $B^2 - 4AC$ de o **discriminante** da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Se a única informação que queremos é dizer que tipo de seção cônica determinada equação representa, colecionamos, na proposição a seguir, a classificação das curvas quadráticas através do discriminante das mesmas.

Proposição 2.2. (Teste do discriminante) *Entendendo que casos degenerados ocasionais podem ocorrer, a curva quadrática $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é (para aprofundamento segue [3]):*

a) uma **parábola** se $I = B^2 - 4AC = 0$,

b) uma **elipse** se $I = B^2 - 4AC < 0$,

c) uma **hipérbole** se $I = B^2 - 4AC > 0$.

Exemplo 2.2. *Sejam Σ uma esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e Ω um plano de equação $ax + by + cz = d$, sendo a, b e c não simultaneamente nulos. Considerando-se os hemisférios da esfera Σ determinados pelo plano Oxy , mostrar que a projeção da curva $\Sigma \cap \Omega$ no plano Oxy é uma elipse.*

Demonstração.

Com efeito, sem perda de generalidade, tomaremos $z > 0$; logo, $c \neq 0$. Sendo $z = \frac{d - ax - by}{c}$, temos

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{d - ax - by}{c} \right)^2 = R^2,$$

que, após simplificação, obtém a forma

$$(a^2 + c^2)x^2 + 2abxy + (b^2 + c^2)y^2 - 2adx - 2bdy + d^2 - R^2c^2 = 0.$$

Pondo $A = a^2 + c^2$, $B = 2ab$, $C = b^2 + c^2$, $D = -2ad$, $E = -2bd$ e $F = d^2 - R^2c^2$, obtemos a equação geral do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

nas variáveis x e y , que é exatamente a equação da projeção da curva $\Sigma \cap \Omega$ no plano XOY .

Como $I = B^2 - 4AC$ pode nos dizer se tal equação quadrática é **parábola** ($I = 0$), **elipse** ($I < 0$) ou **hipérbole** ($I > 0$), de acordo com a proposição (2.2), faremos as devidas substituições para obtermos o discriminante I . Assim,

$$\begin{aligned} I &= B^2 - 4AC \\ &= (2ab)^2 - 4 \cdot (a^2 + c^2) \cdot (b^2 + c^2) \\ &= 4a^2b^2 - 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^4) \\ &= -4(a^2c^2 + b^2c^2 + c^4). \end{aligned} \tag{13}$$

Sabendo-se que dentre os valores a , b e c , referentes à equação do plano Ω , pelo menos um deles seja diferente de zero, segue que $a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 > 0$ e, conseqüentemente, $I < 0$. Logo, a equação quadrática em análise é uma **elipse**, ou, em caso especial, seria uma circunferência se o plano Ω fosse paralelo ao plano XOY que acontece quando o vetor normal do plano Ω tem a forma $(0, 0, c)$, isto é, quando $a = b = 0$ e $c \neq 0$. Além disso, é imediato descartar os casos degenerados ser um único ponto e não existir gráfico. \square

Exemplo 2.3. *Sejam a esfera $S : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ e o plano $\pi : 2x - 2y - y = -9$. Mostre que a projeção do círculo $C = S \cap \pi$ no plano Oxy representa uma elipse.*

Demonstração.

A esfera S tem centro no ponto $O = (3, -2, 1)$ e raio $\rho = 10$, e o plano π é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (2, -2, -1)$ e passa pelo ponto $(0, 0, 9)$. Sendo

$$d(O, \pi) = \frac{|2(3) - 2(-2) - 1 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{18}{3} = 6 < 10 = \rho,$$

a esfera S e o plano π de fato se intersectam ao longo de um círculo C .

Substituindo-se $z = 5x + 2y - 3$ na equação $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$, obtemos a projeção do círculo C no plano Oxy representada pela equação

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 + 26x - 28y - 23 = 0. \quad (14)$$

Comparando-se a equação (14) com a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos $A = C = 5$. Logo, pela Proposição 2.1, tem-se $\theta = \frac{\pi}{4}$ por ângulo de rotação. Assim, as equações de rotação são:

$$\begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4} \\ y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y'). \quad (15)$$

Substituindo-se as equações (15) na equação (14), obtemos após algumas simplificações a equação

$$x'^2 + 9y'^2 - \sqrt{2}x' - 27\sqrt{2}y' - 23 = 0,$$

que completando quadrados, segue que

$$\begin{aligned} x'^2 + 9y'^2 - \sqrt{2}x' - 27\sqrt{2}y' - 23 = 0 &\iff \\ \left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 9\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 41 - 23 = 0 &\iff \\ \frac{\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{64} + \frac{\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{64/9} = 1, \end{aligned}$$

que representa uma elipse. Portanto, a projeção do círculo $C = S \cap \pi$ no plano Oxy é uma elipse. □

3 O Princípio de Cavalieri

O estudo de volumes de sólidos no ensino médio tem como base o Princípio de Cavalieri. Esse princípio também pode ser usado para áreas de regiões do plano. Existem, inclusive, versões mais gerais desse princípio, tanto para áreas como para volumes, em que a razão entre os comprimentos, ou áreas das fatias não precisa ser 1, mas pode ser uma razão positiva qualquer.

O Princípio de Cavalieri, normalmente adotado como postulado nos textos para ensino da Matemática Elementar, é, na verdade, um teorema. Para demonstrá-lo é suficiente usar alguns poucos conceitos da teoria de integração de funções reais. O Princípio de Cavalieri é adotado sem demonstração para evitar as dificuldades de se apresentar precocemente essa teoria. As dificuldades ficam concentradas em uma única afirmação, que é assumida como plausível mediante uma boa explicação do professor. A ideia traduzida por esse princípio é fácil de entender, e parece que os estudantes do ensino médio não têm resistência em aceitá-la.

Esses princípios levam o nome do matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que os chamava de método dos indivisíveis e os divulgou (em versões mais restritas) através de seu famoso livro *Geometria Indivisibilibus*, de 1635. Mas, na verdade, esse método é muito anterior a Cavalieri. Era conhecido dos antigos gregos, que o utilizavam para obter volumes de sólidos. Esses resultados eram depois demonstrados pelo método da dupla redução ao absurdo, já que na época não tinham uma teoria de integração. O mesmo faziam muitos matemáticos dos séculos XVI e XVII.

Vejamos duas versões desse princípio, uma para áreas e outra para volumes. As demonstrações podem ser encontradas em [13]

Princípio de Cavalieri para áreas. Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r , as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas de R e S é essa constante.

É possível demonstrar esse resultado desde que as regiões não sejam muito complicadas. Em particular, vale para discos e regiões elípticas. A ideia inicial da demonstração é simples: estamos “fatiando” as duas regiões. Se a quantidade de fatias for finita e se cada fatia de uma região tiver área sempre na mesma razão que a fatia correspondente da outra região, então somamos as áreas das fatias de cada região e obtemos o resultado. A dificuldade é que, no Princípio de Cavalieri, as “fatias” são segmentos. Portanto, não têm área, mas comprimentos, e sua quantidade é infinita. Assim, para a demonstração, precisamos de uma técnica que permita obter a área de uma região através da soma dos comprimentos de infinitos segmentos. Essa técnica é fornecida pela teoria de integração de funções reais, estudada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

Princípio de Cavalieri para volumes. Sejam P e Q sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α , as interseções de P e Q com β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas é constante. Então a razão entre os volumes de P e Q é essa constante.

3.1 Área da elipse

A seguir apresentamos a área da elipse, relacionada à projeção ortogonal de um círculo contido em uma esfera de um plano que contém o seu centro ser uma elipse.

Proposição 3.1. *A área da região elíptica de semieixos a e b é igual a πab .*

Demonstração.

Suponhamos $b \geq a > 0$, e consideremos, em um sistema de coordenadas Oxy , a região R dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ e $y \geq 0$.

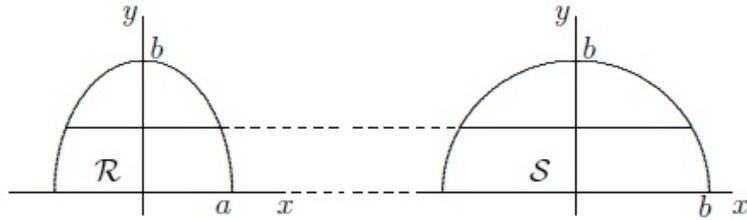


Figura 30: Calculando a área da elipse.

Sejam $f_1(y) = -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ e $f_2(y) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, para $0 \leq y \leq b$. Agora, consideremos a região S dada por $x^2 + y^2 \leq b^2$ e $y \geq 0$. Sejam $g_1(y) = -\sqrt{b^2 - y^2}$ e $g_2(y) = \sqrt{b^2 - y^2}$, para $0 \leq y \leq b$. Tomando uma reta paralela ao eixo Ox e de ordenada y , a interseção dessa reta com R é um segmento de comprimento $f_2(y) - f_1(y)$, e com S é um segmento de comprimento $g_2(y) - g_1(y)$. Observemos que

$$f_2(y) - f_1(y) = 2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} = \frac{a}{b}[g_2(y) - g_1(y)].$$

Concluimos, então, pelo Princípio de Cavalieri, que $A(R) = \frac{a}{b}A(S)$, isto é,

$$A(R) = \frac{a}{b} \cdot \frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi ab}{2},$$

que é a área da região semi-elíptica. Assim, duplicando essa área, segue o resultado esperado. \square

3.2 A esfera e a calota esférica

A esfera e a calota esférica é muito utilizada em diversos problemas de fluxo elétrico. Assim, considere a proposição a seguir.

Definição 1. *Sejam dados um ponto O do espaço e um real positivo R . A **esfera** Σ , de centro O e raio R , denotada $\Sigma(O; R)$, é o lugar geométrico dos pontos do espaço que distam R de O (conforme Figura 31).*

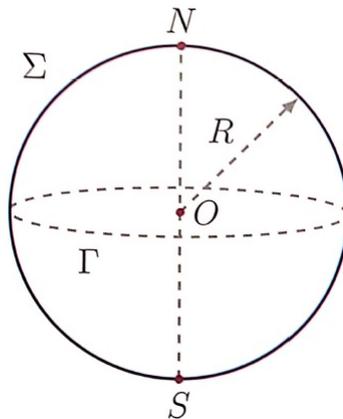


Figura 31: A esfera de centro O e raio R .

Definição 2. *Seccionando uma superfície esférica por dois planos paralelos entre si, dividimos essa superfície em três partes; a que está entre os dois planos, reunida às duas circunferências-seção, é chamada **zona esférica**, e cada uma das outras duas, reunidas à respectiva circunferência-seção, é chamada **calota esférica** (conforme Figura 32).*

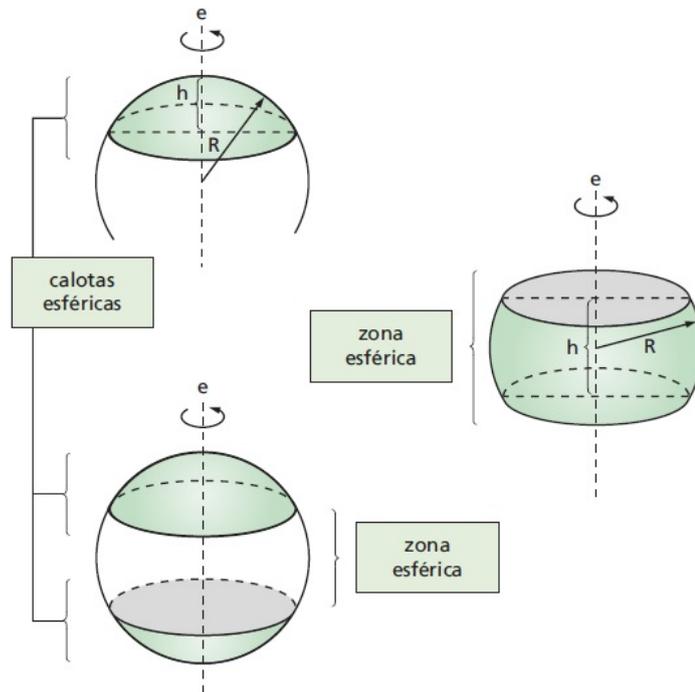


Figura 32: Calotas e zona esféricas.

Definição 3. Consideremos um segmento circular de duas bases e um eixo (reta) perpendicular a essas bases pelo centro e que divide o segmento em duas partes congruentes. Girando uma dessas partes em torno do eixo, obtém-se um sólido que é chamado **segmento esférico de duas bases** (conforme Figura 33).

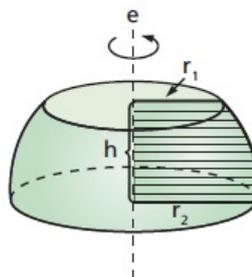


Figura 33: O segmento esférico de duas bases e altura h

Definição 4. Consideremos um segmento circular de uma base e um eixo (reta) perpendicular a ela pelo centro e que divide o segmento em duas partes congruentes. Girando uma dessas partes em torno do eixo, obtém-se um sólido que é chamado **segmento esférico de uma base** (conforme Figura 34).

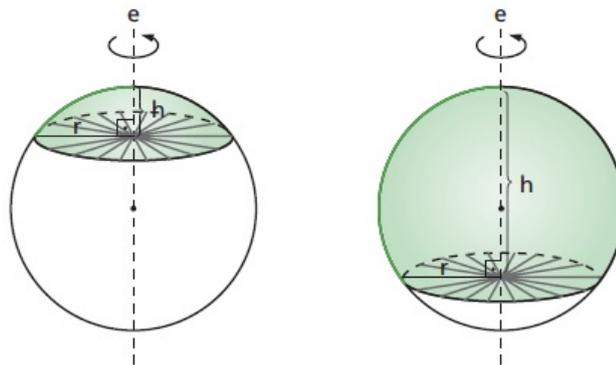


Figura 34: Segmentos esféricos de uma base e altura h .

Proposição 3.2. O volume de uma esfera de raio R é igual a $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Demonstração.

Seja C um cilindro sólido de altura $2R$, tendo por bases dois círculos de raio R (conforme figura 35, à esquerda).

Inscruva em C dois cones sólidos, ambos com altura R e tendo por bases as bases do cilindro; então, o vértice dos cones coincide com o centro do quadrado. Por fim, seja S o sólido formado pela porção do cilindro exterior à união dos cones.

Sejam α o plano de uma das bases do cilindro e E uma esfera de centro O e raio R , tangente a α e situada, em relação a α , no mesmo semiespaço que C (conforme figura 35, à direita).

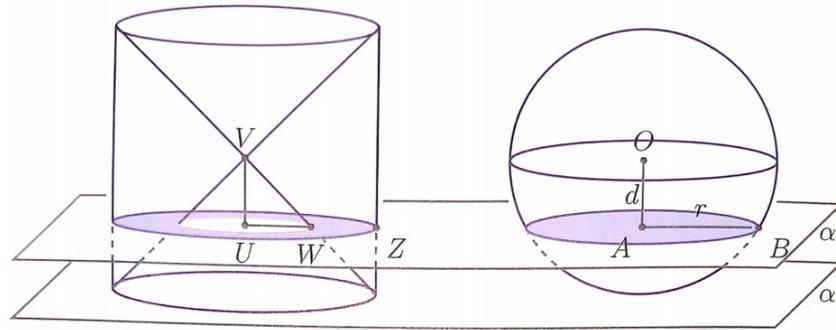


Figura 35: Calculando o volume da esfera.

Seja α' um plano paralelo a α , contido no mesmo semiespaço, em relação a α , que S e E , e situado à distância d do ponto O , com $d < R$. Como C tem altura igual ao diâmetro de E , segue que α' intersecta S se, e só se, intersecta E . Sendo esse o caso, temos que α' secciona S segundo uma coroa circular de raios $UW = d$ e $UZ = R$, e, portanto, área igual a $\pi(R^2 - d^2)$, enquanto secciona E em um disco de centro A e raio $AB = \sqrt{R^2 - d^2}$, e, portanto, área igual a $\pi r^2 = \pi(\sqrt{R^2 - d^2})^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Logo, as áreas de tais seções são sempre iguais, de forma que, pelo Princípio de Cavalieri, S e E têm volumes iguais.

Por fim, como o volume de S é a diferença entre os volumes do cilindro sólido C e da união dos dois cones de vértices V , temos

$$V(E) = V(C) - 2V(\text{cone}) = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

□

Proposição 3.3. *Seja Σ uma esfera de raio R . O volume do segmento esférico de Σ com apenas uma base e altura h é igual a $\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$.*

Demonstração.

Nas condições da figura 35, inicialmente, consideremos a calota de altura $h < R$. Sendo esse o caso, o volume da calota esférica, pelo Princípio de Cavalieri, é igual ao volume do cilindro de altura h e raio R subtraído do tronco de cone de altura h e raios R e $R - h$, uma vez que as seções obtidas, as do círculo de raio $AB = r$ e a da coroa circular de raios d e R , tem sempre a mesma área para qualquer valor de d . Logo,

$$\begin{aligned} V_{\text{calota}} &= \pi R^2 \cdot h - \frac{\pi h}{3} [R^2 + R \cdot (R - h) + (R - h)^2] \\ &= \pi R^2 \cdot h - \frac{\pi h}{3} (3R^2 - 3Rh + h^2) \\ &= \frac{\pi h^2}{3} (3R - h). \end{aligned}$$

O mesmo ocorre para $h > R$, basta ver que os volumes dos dois segmentos, um de altura h e outro de altura $2R - h > R$, resulta o volume da esfera Σ , isto é,

$$\begin{aligned} V_{\text{esfera}} &= \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) + \frac{\pi (2R - h)^2}{3} [3R - (2R - h)] \\ &= \frac{\pi}{3} [3Rh^2 - h^3 + (4R^2 - 4Rh + h^2)(R + h)] \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

□

Mostramos a seguir, que as fórmulas para cálculo do volume apresentadas nas Proposições 3.2 e 3.3 permitem divisar um argumento heurístico instrutivo para o cálculo da área de uma esfera e de uma calota esférica.

Para tanto, considere esferas concêntricas Σ e Σ' , de raios respectivamente R e $R + \epsilon$, onde $\epsilon > 0$, e seja S o sólido compreendido entre as esferas Σ e Σ' . Particione Σ em um número finito de triângulos esféricos. Se tais triângulos forem suficientemente pequenos, é razoável supor, para ϵ muito pequeno em relação a R , que possamos considerar S como uma reunião de um número finito de “prismas”, todos de altura ϵ e tendo por

bases os triângulos esféricos em questão. Portanto, poderemos aproximar o volume de S pela soma dos volumes desses “prismas” de altura ϵ , os quais são tais que a soma das áreas de suas bases é igual à área A de Σ .

Mas, como o volume de S também é igual à diferença entre os volumes das esferas Σ' e Σ , segue que

$$\epsilon A \cong \frac{4}{3}\pi (R + \epsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi \left(R^2\epsilon + R\epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3} \right),$$

ou, ainda,

$$A \cong 4\pi \left(R^2 + R\epsilon + \frac{\epsilon^2}{3} \right).$$

Por fim, como também é plausível supor que a aproximação acima seja tanto melhor quanto menor for o ϵ tomado, concluímos, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, que $A = 4\pi R^2$.

Agora, de modo inteiramente análogo, podemos determinar a área de uma calota esférica tomando-se a diferença entre os volumes dos segmentos esféricos concêntricos aproximadamente igual ao volume de “prismas” reunidos cuja altura de cada um é ϵ e a soma de suas bases igual a A' de Σ , isto é,

$$\epsilon A' \cong \frac{\pi (h + \epsilon)^2}{3} [3(R + \epsilon) - (h + \epsilon)] - \frac{\pi h^2}{3} (3R - h).$$

Desenvolvendo o quadrado e aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, segue

$$\epsilon A' \cong \frac{\pi}{3} (h^2 + 2h\epsilon + \epsilon^2) (3R - h + 2\epsilon) - \frac{\pi h^2}{3} (3R - h).$$

Organizando a equação, temos

$$\epsilon A' \cong \frac{2\pi h^2 \epsilon}{3} + \frac{\pi (2h\epsilon + \epsilon^2)}{3} (3R - h + 2\epsilon).$$

Consequentemente

$$A' \cong \frac{2\pi h^2}{3} - \frac{2\pi h^2}{3} + 2\pi hR + \frac{4\pi h\epsilon}{3} + \pi R\epsilon - \frac{\pi h\epsilon}{3} + \frac{2\pi\epsilon}{3}.$$

Portanto

$$A' \cong 2\pi hR + \pi h\epsilon + \pi R\epsilon + \frac{2\pi\epsilon}{3}$$

onde, para $\epsilon \rightarrow 0$, temos $A' = A_{\text{calota}} = 2\pi hR$.

3.3 Projeção

Na Seção 2.10 foi mostrado que um círculo contido numa esfera tem uma elipse por projeção ortogonal em um plano que contém o seu centro. No que segue, apresentamos uma outra maneira mais direta e mais geral de verificar que a projeção, ortogonal ou não, de um círculo sobre um plano, que forma um ângulo α com o plano do círculo, é reconhecidamente uma elipse e, em seguida, determinamos a relação entre as áreas do círculo e a elipse

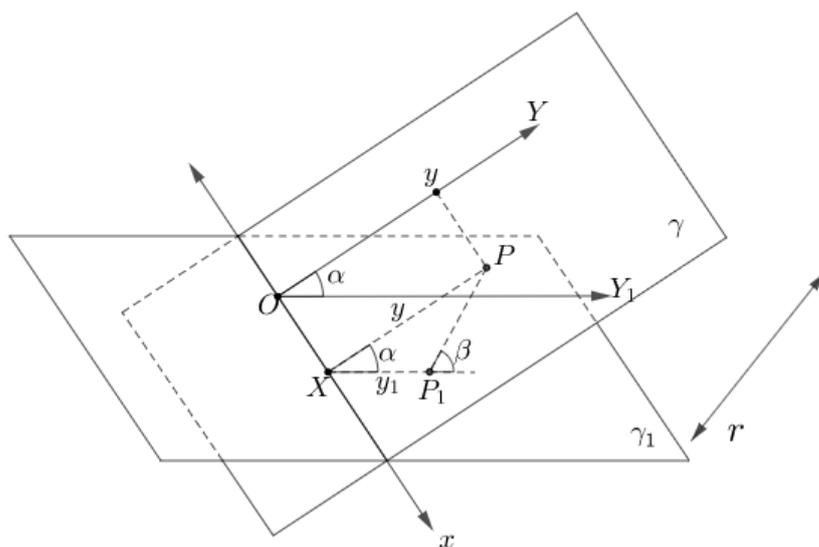


Figura 36: Obtendo as coordenadas de P_1 a partir de P .

Dados os planos γ , γ_1 e a reta r , não paralela a γ nem a γ_1 , seja $F : \gamma \rightarrow \gamma_1$ a projeção paralelamente a r . Se esses planos são paralelos então F é uma isometria, ou seja, um movimento rígido, que preserva distâncias, logo qualquer circunferência em γ se projeta por F numa circunferência de mesmo raio. Suponhamos então que os planos γ e γ_1 não sejam paralelos e que sua interseção seja a reta s (ver Figura 36).

Consideremos inicialmente uma circunferência C , de raio r , cujo centro O está sobre a reta s . Tomemos em γ um sistema OXY de eixos ortogonais cuja origem é O e cujo eixo OX das abscissas coincide com s . Em γ_1 tomamos outro sistema OXY_1 , com a mesma origem O e mesmo eixo de abscissas OX . Sabemos que a projeção $F : \gamma \rightarrow \gamma_1$ leva um ponto $P = (x, y)$ no ponto $F(P) = P_1 = (x_1, y_1)$, cujas coordenadas no sistema OXY_1 são x_1 e $y_1 = y \cos \alpha - y \sin \alpha \cdot \cotg \beta = y (\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cotg \beta)$. Em particular, quando F é a projeção ortogonal de γ sobre γ_1 , temos $\beta = 90^\circ$ e, com isso, $y_1 = y \cos \alpha$.

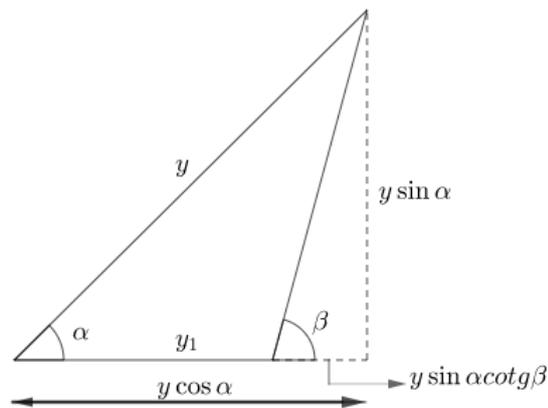


Figura 37: Relação entre y e y_1 .

O ponto P pertence à circunferência C se, e somente se, $x^2 + y^2 = r^2$. Esta igualdade equivale a

$$x_1^2 + \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 = r^2, \text{ ou seja, } \frac{x_1^2}{r^2} + \frac{y_1^2}{(ra)^2} = 1, \quad (16)$$

onde $a = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \cotg \beta$.

Portanto, $P = (x, y)$ está na circunferência C se, e somente se, sua projeção $P_1 = (x_1, y_1)$ está na elipse definida pela equação (16).

Se o centro de C não estiver na reta s , interseção de γ e γ_1 , tomamos um novo plano γ' , paralelo a γ_1 , passando por esse centro. Pelo que acabamos de ver, a projeção de C sobre γ' paralelamente a r é uma elipse E' . Então a projeção de C sobre γ_1 é uma elipse E , congruente a E' , concluindo a demonstração.

Reciprocamente, toda elipse num plano γ_1 pode ser obtida como projeção de uma circunferência situada noutro plano γ . A projeção pode até mesmo ser tomada ortogonal a γ_1 . Com efeito, tomando no plano γ_1 um sistema de eixos OX_1Y_1 no qual OX_1 e OY_1 são os eixos da elipse, a equação dessa curva se escreve como

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 y_1^2 = a^2. \quad (17)$$

ou seja,

$$x_1^2 + \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 = r^2 \quad (18)$$

Sem perda de generalidade, podemos admitir que $b \leq a$, de modo que $0 \leq \left(\frac{a}{b}\right)^2 \leq 1$. Seja γ um plano que corta γ_1 ao longo do eixo OX , e forma com γ_1 um ângulo α tal que $\cos \alpha = \frac{b}{a}$. Em γ , consideramos um sistema OXY de eixos ortogonais com a mesma origem O , e com $OX = OX_1$.

A circunferência C , de centro O e raio a no plano γ , é formada pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $x^2 + y^2 = a^2$. Sua projeção ortogonal sobre γ_1 é formada pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ tais que $x_1 = x$ e $y_1 = y \cos \alpha = \frac{b}{a}y$, portanto pelos pontos (x_1, y_1) em γ_1 tais que

$$x_1^2 + \left(\frac{a^2}{b^2}\right) y_1^2 = a^2, \quad (19)$$

ou ainda,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (20)$$

Assim, a elipse inicialmente considerada no plano γ_1 é a projeção ortogonal da circunferência C , situada no plano γ .

Conforme os exemplos 2.2, 2.3 e, agora, com o que foi mostrado acima, o círculo contido na superfície esférica tem uma elipse como projeção no plano Oxy (ver figura 38). Nesse caso, sendo r o raio do círculo, e colocando $AP = 2b$ e $AB = 2r$, segue, da razão trigonométrica aplicada ao triângulo retângulo ABP , que

$$\cos \theta = \frac{AP}{AB} = \frac{2b}{2r} \Rightarrow b = r \cdot \cos \theta.$$

Sabe-se que a área do círculo é dada por $A_c = \pi r^2$ e a área da elipse, de acordo com a proposição 3.1, por $A_e = \pi ab$. Então,

$$\frac{A_e}{A_c} = \frac{\pi ab}{\pi r^2} = \frac{r \cdot r \cos \theta}{r^2} \Rightarrow A_e = A_c \cdot \cos \theta.$$

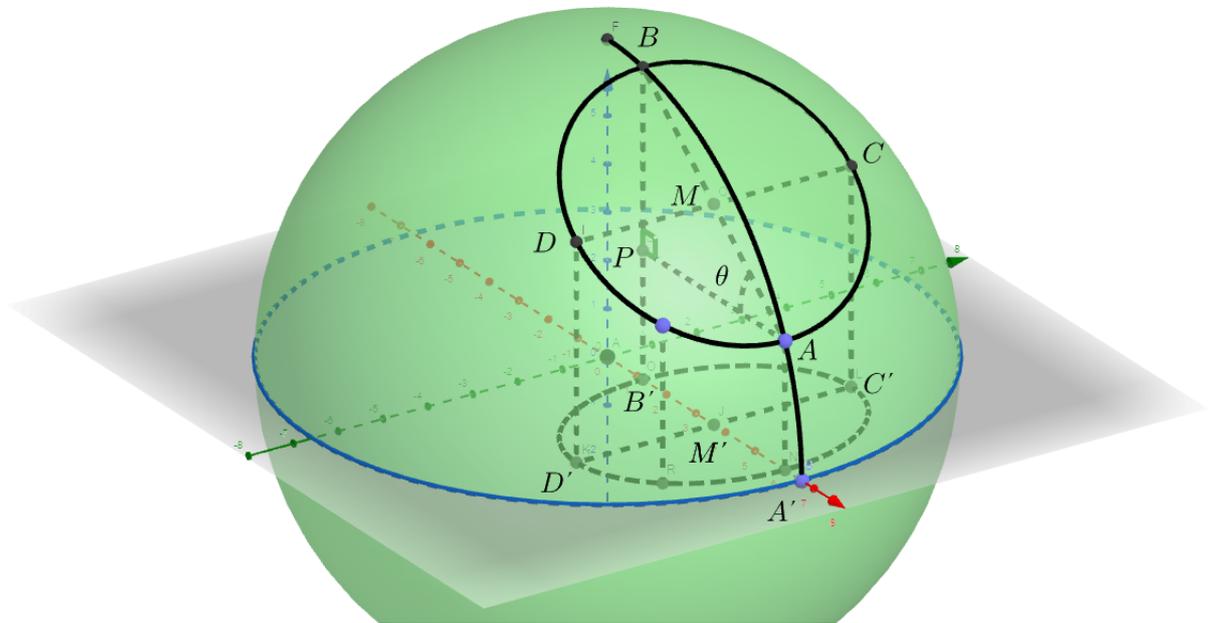


Figura 38: Projeção do círculo sobre o plano Oxy .

4 Fluxo Elétrico

Até o presente momento foram vistos, as definições, propriedades e toda a teoria matemática necessária para um bom entendimento de projeções para ajudar na resolução de problemas de fluxo elétricos que até então são resolvidos por integrais, no qual será apresentada. Dessa forma, sendo este o foco deste trabalho, este capítulo visa a aplicação de projeções na resolução de situações problemas na Física, visto que projeções é um conteúdo ministrado no ensino fundamental e médio, além de evidenciar a importância da interdisciplinaridade das matérias de Física e Matemática, já que essas duas áreas das ciências exatas tem em certos momentos conteúdos semelhantes.

A interdisciplinaridade também constitui um elemento muito importante que pode ser agregado a este trabalho. Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) “Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista”.

Assim, será exposto na seção a seguir a ideia de fluxo elétrico e problemas de fluxo elétrico desenvolvidos por integrais e por projeções, contribuindo assim para um ensino de fluxo elétrico mais prático, servindo dessa forma como um referencial para os professores de matemática e física do Ensino Básico. Quem acompanha noticiários em feriados prolongados está a todo momento sendo informado que passam tantos carros por minuto no posto da Polícia Federal da BR. Quanto maior o número de carros por minuto, maior o fluxo. Daí, já introduzimos basicamente o conceito de fluxo. Da mesma forma, o proprietário de um parque de diversão mede a sua clientela pela quantidade de gente que passa pela porta de entrada, em determinado intervalo de tempo.

Qualquer que seja o caso, veremos facilmente que o fluxo depende da quantidade

daquilo que flui e da área através da qual passa o “fluido”. Portanto, quanto maior o número de clientes ou quanto maior a porta de entrada, maior será o fluxo de clientes para o interior do parque. Essa noção intuitiva está na origem daquilo que podemos denominar fluxo do campo elétrico.

Define-se o fluxo elétrico por analogia com um fluido incompressível¹. No escoamento do fluido, as linhas de campo são tangentes à velocidade do fluido em cada ponto e o fluxo do campo de velocidades é igual ao volume de fluido que passa através da superfície, por unidade de tempo. Em outras palavras “quanto de uma determinada grandeza passa através de uma área específica”. (A palavra “fluxo” deriva do latim e a palavra “escoamento” geralmente é usada como sinônimo de “fluxo”).

Por exemplo, podemos analisar o fluxo de luz solar através de uma placa de vidro completamente transparente em sua área maior. Na análise da figura 39 definiremos o vetor \vec{S} associado à intensidade e direção da luz solar, o vetor \vec{A} associado ao tamanho da área da placa e com orientação igual ao vetor normal à superfície ($\vec{A} \equiv \vec{n}A$) e θ , como o ângulo entre os vetores \vec{S} e \vec{A} .

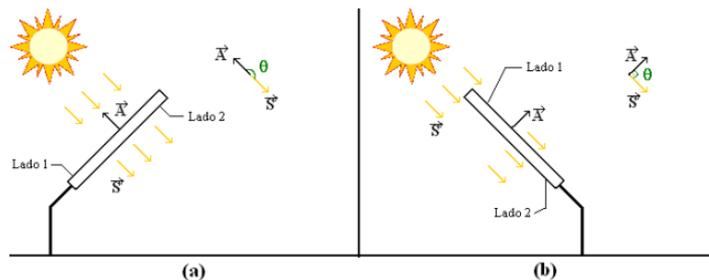


Figura 39: (a) Placa de vidro perpendicular aos raios solares e (b) placa de vidro paralela aos raios solares. Nesta figura definimos o vetor \vec{A} , que é normal à superfície frontal da placa, como apontado no sentido do lado 2 para o 1.

¹Incompressível significa que a densidade do fluido é independente da pressão, no intervalo de pressões considerado. Para mais detalhes em [14].

Uma outra situação é o fluxo elétrico líquido através de uma superfície fechada, do qual, é diretamente proporcional à carga líquida existente no interior dessa superfície. Para ficar mais claro, vamos mostra a analogia entre um campo elétrico e um campo de velocidade no escoamento de um fluido. (Lembrando de que isso é somente uma analogia; um campo elétrico não esco.)

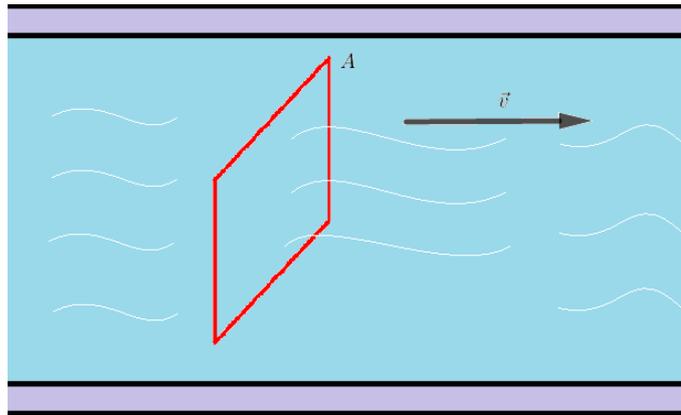


Figura 40: Uma espira retangular em um fluido

A figura 40 indica um fluido escoando de modo constante da esquerda para a direita. Assim é possível examinar a vazão volumétrica $\frac{dV}{dt}$ (digamos, em metros cúbicos por segundo) através da espira retangular de arame com área A . Quando a área está perpendicular à velocidade do escoamento (Figura 40) e a velocidade do escoamento é a mesma em todos os pontos do fluido, a vazão volumétrica $\frac{dV}{dt}$ é igual ao produto da área A pelo módulo da velocidade v (para se aprofundar no assunto, temos [15]):

$$\frac{dV}{dt} = v \cdot A.$$

Quando o retângulo está inclinado a um ângulo θ (Figura 41), de modo que sua face não é perpendicular a \vec{v} , a área que conta é o perfil da área quando observamos o retângulo na direção de \vec{v} , ou seja, é a área da projeção que o retângulo A faz sobre um plano que seja perpendicular ao vetor \vec{v} . Chamando essa área projetada de A_{\perp} , temos

que:

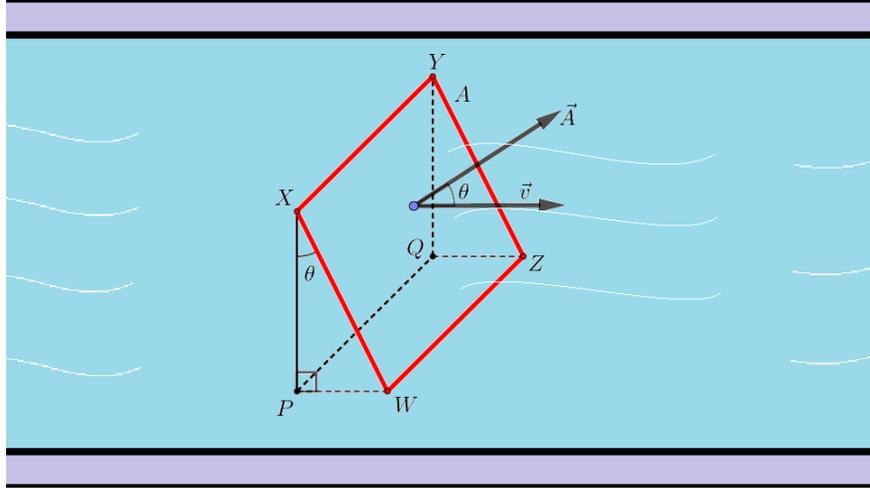


Figura 41: A espira retangular inclinada a um ângulo θ

$$\cos \theta = \frac{XP}{XW} \iff XW = XP \cdot \cos \theta \quad (21)$$

e que

$$A_{\perp} = XP \cdot PQ \quad (22)$$

Como a vazão volumétrica $\frac{dV}{dt}$ é igual ao produto da área A_{\perp} pelo módulo da velocidade v , segue que:

$$\frac{dV}{dt} = v \cdot A_{\perp} \iff \frac{dV}{dt} = v \cdot XP \cdot PQ, \quad (23)$$

onde $A_{\perp} = XP \cdot PQ$.

Pela figura 41, é notório que o retângulo $XYQP$ nada mais é que a projeção que o retângulo $XYZW$ faz sobre o plano XPY . Assim, é fácil perceber que o triângulo XWQ é retângulo em Q . Dessa forma temos que:

$$\cos \theta = \frac{XP}{XW} \Rightarrow XP = XW \cdot \cos \theta \quad (24)$$

Como $QP = ZW$ e $XQ \cdot ZW = A$, podemos concluir que:

$$\frac{dV}{dt} = v \cdot XP \cdot QP = v \cdot XW \cdot \cos \theta \cdot ZW.$$

Fazendo as respectivas substituições, temos:

$$\frac{dV}{dt} = v \cdot A \cdot \cos \theta.$$

Portanto, para calcular o fluxo elétrico líquido de uma superfície fechada podemos usar:

$$\frac{dV}{dt} = v \cdot A \cdot \cos \theta.$$

Quando θ for igual a 90° , $\frac{dV}{dt} = 0$; o retângulo é paralelo ao escoamento e não passa nenhum fluido através dele (exemplo da Figura 29.b). Além disso, $v \cos \theta$ é o componente do vetor perpendicular ao plano da área A . Usando o símbolo v_\perp para esse componente, podemos reescrever a vazão volumétrica na forma:

$$\frac{dV}{dt} = v_\perp A.$$

Podemos expressar mais resumidamente a vazão volumétrica usando o conceito de vetor área \vec{A} , uma grandeza vetorial cujo módulo fornece área A e cuja direção é perpendicular ao plano da área que estamos descrevendo. O vetor área \vec{A} indica o tamanho da área e sua orientação no espaço. Com base na área \vec{A} , podemos escrever a vazão volumétrica do fluido através do retângulo indicado na figura 41 como um produto escalar:

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}.$$

Veja que usamos a analogia entre campo elétrico e escoamento de um fluido, assim podemos definir o fluxo elétrico com um método semelhante ao que acabamos de usar para definir a vazão volumétrica de um fluido; basta substituir a velocidade \vec{v} pelo campo elétrico \vec{E} .

4.1 Fluxo de um campo elétrico uniforme

Para fluxo elétrico, usamos o símbolo Φ_E (letra grega maiúscula *phi* com o índice inferior *E* para lembrarmos que estamos considerando fluxo elétrico). Inicialmente, considere uma superfície plana com área A perpendicular a um campo elétrico uniforme (Figura 42).

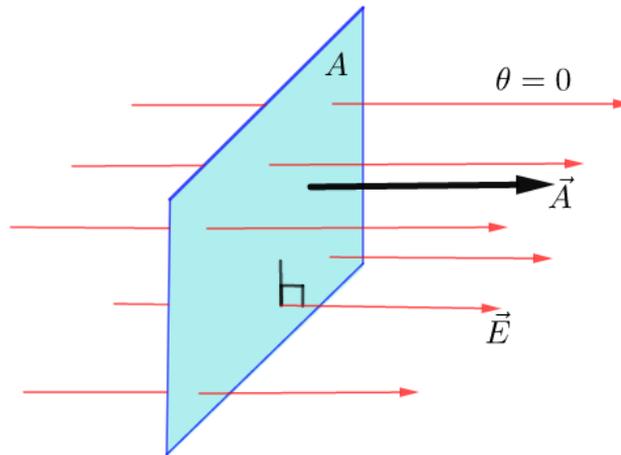


Figura 42: A superfície é frontal ao campo elétrico: \vec{E} e \vec{A} são paralelos (o ângulo entre \vec{E} e \vec{A} é $\theta = 0$).

Definimos o fluxo elétrico através dessa área como o produto do módulo E pela área A :

$$\Phi_E \doteq E \cdot A.$$

De modo aproximado, podemos descrever Φ_E em termos das linhas de campo que passam através da área A . Quando a área aumenta, um número maior de linhas de \vec{E} passa através dela, fazendo aumentar o fluxo elétrico; campos elétricos mais fortes correspondem a linhas de \vec{E} agrupadas mais compactamente e, portanto, mais linhas por unidade de área, de modo que, novamente, o fluxo elétrico é maior.

Quando a área A é plana, mas não perpendicular ao campo \vec{E} (Figura 43), um número menor de linhas passa através dela. Nesse caso, a área que conta é o perfil dela

quando a observamos na direção de \vec{E} . Essa área é indicada pelo símbolo A_{\perp} , sendo dada por $A \cdot \cos \theta$ (como visto anteriormente).

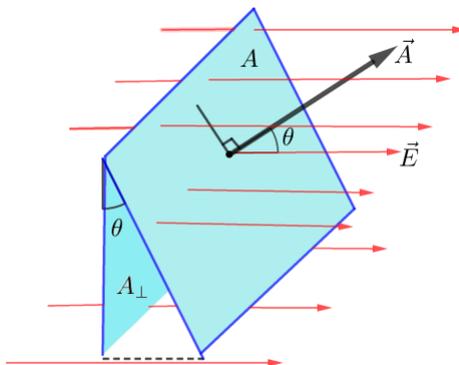


Figura 43: A superfície está inclinada em relação a uma orientação frontal, formando um ângulo θ

Generalizamos a definição de fluxo elétrico para um campo elétrico uniforme por meio da relação.

$$\Phi_E = E \cdot A \cdot \cos \theta. \quad (25)$$

Como $E \cos \theta$ é o componente da perpendicular à área, podemos reescrever a equação (25) na forma

$$\Phi_E = E_{\perp} A. \quad (26)$$

Com base no vetor da área \vec{A} perpendicular à área, podemos escrever o fluxo elétrico como o produto escalar entre os vetores \vec{E} e \vec{A} :

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}. \quad (27)$$

As equações (25), (26) e (27) são formas equivalentes para calcular o fluxo elétrico para o caso de uma superfície plana e um campo elétrico uniforme. No SI, a unidade de fluxo elétrico é $1 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Note que, se a área for lateral ao campo (Figura 44), \vec{E} e \vec{A} serão perpendiculares e o fluxo será igual a zero.

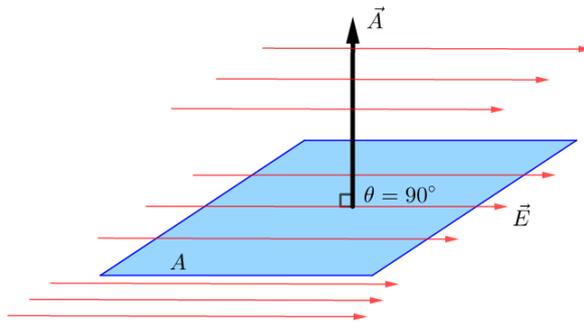


Figura 44: A superfície é lateral ao campo elétrico: \vec{E} e \vec{A} são perpendiculares (o ângulo entre \vec{E} e \vec{A} é $\theta = 90^\circ$).

Podemos representar um vetor área \vec{A} usando um vetor unitário \vec{n} perpendicular à área; \vec{n} representa a palavra “normal”. Logo,

$$\vec{A} = A \cdot \vec{n}$$

Uma superfície possui dois lados, portanto, existem dois sentidos possíveis para os vetores \vec{A} e \vec{n} . Devemos sempre especificar qual é o sentido escolhido. Na figura 45, relacionamos a carga no interior de uma superfície fechada com o fluxo elétrico que passa através da superfície. Quando a superfície é fechada, sempre escolhemos o sentido de \vec{n} para fora e dizemos que o fluxo elétrico sai dela fechada.

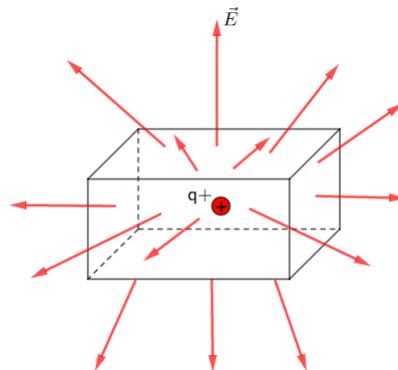


Figura 45: Carga positiva dentro da caixa, fluxo de dentro para fora.

Logo, quando falamos que “um fluxo elétrico sai da superfície”, queremos dizer que Φ_E é positivo, e quando falamos que “um fluxo elétrico entra na superfície”, queremos dizer que Φ_E é negativo. Na figura 46 temos uma carga negativa no interior de uma superfície fechada.

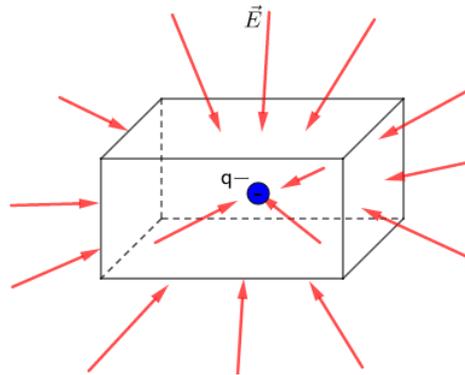


Figura 46: Carga negativa dentro da caixa, fluxo de fora para dentro.

4.2 Fluxo de um campo elétrico não uniforme

O Fluxo de um campo elétrico é considerado não uniforme quando parte da superfície de A é curva (ver figura 47), ou seja, o campo elétrico \vec{E} não é uniforme, pois cada ponto ao longo da superfície varia em relação a outro.

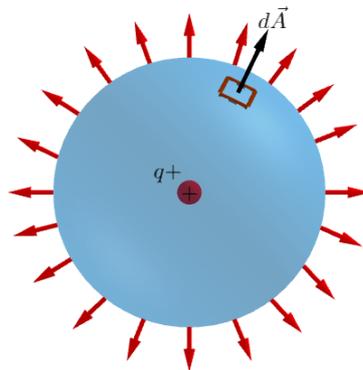


Figura 47: Fluxo elétrico através de uma esfera centrada sobre uma carga puntiforme.

Assim, dividimos a figura 47 em pequenos elementos de superfície de área dA . Cada um deles possui um vetor unitário perpendicular à respectiva superfície e um vetor área $d\vec{A} = \vec{n}dA$. Calculamos o fluxo elétrico através de cada um desses elementos e integramos o resultado para obter o fluxo elétrico total:

$$\phi_E = \int E \cdot \cos \theta \cdot dA = \int E_{\perp} dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Na fórmula apresentada temos E como módulo do campo elétrico \vec{E} . O $\cos \theta$ como ângulo entre \vec{E} e normal à superfície, o dA como elemento da área da superfície, o E_{\perp} como componente de \vec{E} perpendicular à superfície e $d\vec{A}$ como elemento vetorial da área da superfície.

Essa integral é chamada integral de superfície do componente E_{\perp} sobre a área considerada ou a integral de superfície $\vec{E} \cdot d\vec{A}$. Para se aprofundar, temos [16]

4.3 Lei de Gauss

A lei de Gauss é uma alternativa elegante e rápida para resolver cálculos de campo elétrico toda vez que nossa configuração de cargas exibir uma simetria alta. Esta lei relaciona os valores do campo elétrico em pontos de uma superfície (gaussiana) com a carga total dentro da superfície.

Antes de apresentarmos a lei de Gauss precisamos ter a ideia de ângulo sólido.

O ângulo sólido é o análogo tridimensional de um ângulo ordinário. O ângulo plano é determinado quando duas semirretas se encontram em um vértice. No caso do ângulo sólido ele será determinado por uma figura tridimensional que tem sua origem também em um ponto.

Podemos definir o ângulo sólido como o ângulo do espaço que cobre um objeto visto de um ponto, que corresponde à área do espaço limitada pelas linhas que se projetam do objeto para o observador. Explicado de forma simples, podemos saber o ângulo que

uma figura forma, conhecendo a superfície (S) que ela cria em uma esfera ao dividir a superfície pelo raio total (R) ao quadrado. Não é necessariamente necessário ver que se trata de uma esfera, pode ser obtida a qualquer distância conhecendo sua superfície e raio.

Imagine uma esfera e um objeto cônico ou piramidal como na figura 48.

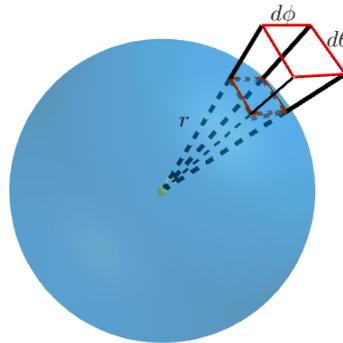


Figura 48: Esfera e um objeto piramidal.

É notório que o volume da pirâmide ou do cone divide o espaço em duas regiões. O ângulo entre a esfera e o objeto delimita na superfície da esfera uma calota de superfície A e raio r , onde $\Omega = \frac{A}{r^2}$. Essa fórmula é uma analogia com um ângulo plano.

Dada uma carga puntiforme q a uma distância r , considere uma superfície dA cuja a normal não é paralela a r .

Como vimos anteriormente, definimos o ângulo sólido em uma esfera onde ela é perpendicular ao raio, ou seja, devemos projetar a área dA numa direção perpendicular a r , como mostrado na figura 49.

Veja que se dA forma com $\vec{E}(\vec{r})$ um ângulo θ , então o ângulo entre as superfícies também será θ . Assim temos que a área projetada será $dA \cos \theta$.

Portanto, podemos representar o ângulo sólido por:

$$d\Omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2} \iff dA \cos \theta = d\Omega \cdot r^2 \quad (28)$$

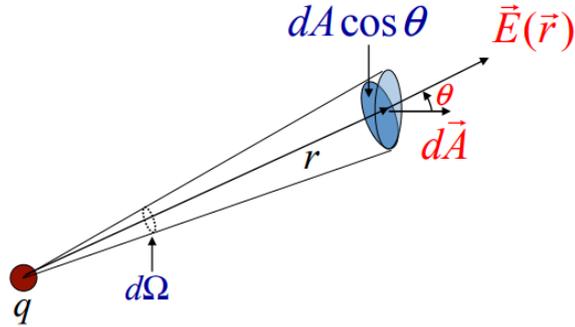


Figura 49: Carga puntiforme q a uma distância r , onde uma superfície dA cuja a normal não é paralela a r .

Vamos considerar o campo elétrico de uma única carga puntiforme positiva q . As linhas de campo se irradiam para fora da carga igualmente em todas as direções. Colocamos essa carga no centro de uma superfície esférica imaginária de raio r . Substituindo a equação (28) na fórmula do fluxo elétrico, segue que

$$\Phi_E = \int E \cos \theta dA \iff \Phi_E = \int E \cdot d\Omega \cdot r^2. \quad (29)$$

Como a carga é puntiforme então o módulo do campo elétrico é dado por

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2}. \quad (30)$$

Substituindo o módulo do campo elétrico na fórmula do fluxo, segue que

$$\Phi_E = \int \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \cdot r^2 \cdot d\Omega = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon} \int d\Omega. \quad (31)$$

Como a superfície é fechada então o $d\Omega$ dá uma volta inteira, daí podemos considerar:

$$\int d\Omega = 4\pi. \quad (32)$$

Substituindo (32) em (31), segue que

$$\Phi = \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon} \iff \Phi = \frac{q}{\epsilon}. \quad (33)$$

O fluxo elétrico é independente do raio R da esfera. Ele depende apenas da carga q existente no interior da esfera.

4.4 Força do campo elétrico devido a um copo hemisférico oco com carga uniforme

Exemplo 4.1. A figura 50 mostra um corpo hemisférico oco uniformemente carregado e com densidade de carga superficial σ Coul/m². Determine a força do campo elétrico em seu centro C .

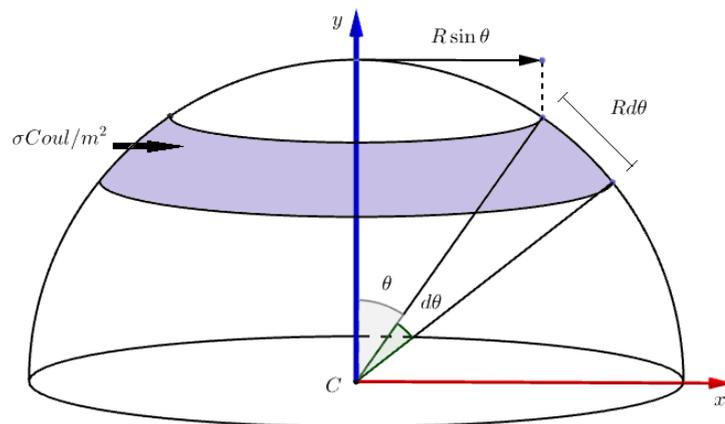


Figura 50: Corpo hemisférico oco uniformemente carregado.

Resolução 1.

Consideramos um anel elementar em sua superfície de largura angular $d\theta$ em um ângulo θ de seu eixo.

A largura do anel pode ser descrita pela forma simplificada do comprimento de arco (figura 41), $\ell = Rd\theta$, onde ℓ é a largura do anel, R é o raio da circunferência e $d\theta$ é a

variação infinitesimal do ângulo central.

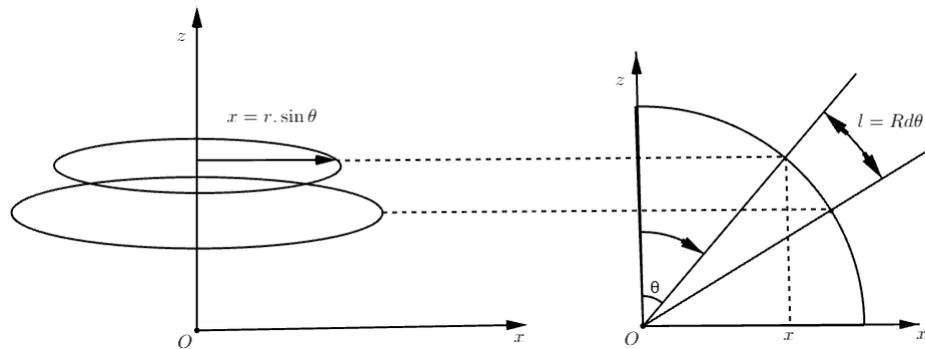


Figura 51: Construção dos elementos diferenciais de área em coordenadas polares

Mas, se este anel tiver largura infinitesimal, os raios se confundem e o perímetro do anel de largura infinitesimal é dado por:

$$C(x) = 2\pi x, \quad (34)$$

observando que o mesmo está em função do raio x .

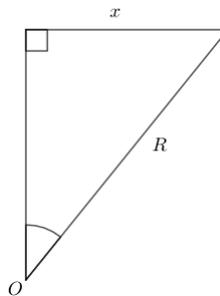


Figura 52: Triângulo retângulo

Fazendo uma transformação para coordenadas polares, destacamos o triângulo retângulo da figura 51 e representado na figura 52, obtendo-se

$$x = R \cdot \sin(\theta), \quad (35)$$

onde $R^2 = x^2 + \ell^2$.

Substituindo o membro da direita da equação (35) em (34), segue que:

$$C(\theta) = 2\pi \cdot R \cdot \sin(\theta). \quad (36)$$

Vejam que agora o perímetro C está em função do ângulo central θ . Então, a área da superfície do anel de largura infinitesimal (dA) será dada pelo produto de seu perímetro C por sua altura ℓ :

$$dA(\theta) = C(\theta) \cdot \ell = 2\pi \cdot R \cdot \sin(\theta) \cdot R \cdot d\theta = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta. \quad (37)$$

A carga neste anel do elemento é:

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta. \quad (38)$$

Agora, devido a este anel, a força elétrica no centro C pode ser dada como:

$$\begin{aligned} dE_R &= dE \cdot \cos \theta = \frac{K_o \cdot dq}{R^2} \cdot \cos \theta = \frac{2\pi \cdot K_o \cdot \sigma \cdot R^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta}{R^2} \cdot \cos \theta \\ &= 2\pi \cdot K_o \cdot \sigma \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta = \pi \cdot K_o \cdot \sigma \cdot (2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta) d\theta \\ &= \pi \cdot K_o \cdot \sigma \cdot \sin(2\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (39)$$

Como o ângulo θ varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$, obtemos anéis da esfera somente na parte superior ao eixo dos x , e, conseqüentemente, somente a metade da área de sua superfície. Para encontrar a área total, basta multiplicar por 2.

O campo elétrico líquido no centro pode ser obtido integrando esta expressão entre os limites de 0 a $\frac{\pi}{2}$, assim temos que:

$$\begin{aligned} E_R &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot K_o \cdot \sigma \cdot \sin 2\theta d\theta = \pi \cdot K_o \cdot \sigma \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \\ &= \pi \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \sigma \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \pi \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin u du \\ &= -\pi \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2} \cdot [\cos u]_0^{\pi} = \frac{\sigma}{4\epsilon_o}. \end{aligned} \quad (40)$$

Portanto, o fluxo elétrico do campo elétrico é dado por:

$$E_R = \frac{\sigma}{4\epsilon_o}. \quad (41)$$

Resolução 2.

Seja $\Delta \vec{E}$ a contribuição infinitesimal do campo elétrico devido a uma carga infinitesimal Δq no centro de uma esfera em que se distribui a carga total do lóbulo (superfície esférica) mostrado na figura 53 .

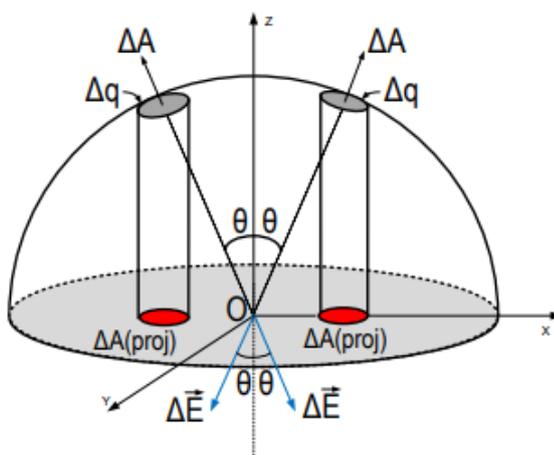


Figura 53: Contribuição infinitesimal de um campo elétrico devido a um elemento de carga do hemisfério uniformemente carregado

Logo, o módulo da contribuição infinitesimal do campo elétrico será:

$$|\Delta \vec{E}| = \frac{k_0}{R^2} \cdot |\Delta q|. \quad (42)$$

Sabe-se que a densidade superficial de cargas σ do lóbulo é constante, assim podemos escrever:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A} \iff \Delta q = \sigma \Delta A. \quad (43)$$

Substituindo-se o resultado da equação (42) na equação (43) obtemos:

$$|\Delta \vec{E}| = \frac{K_0}{R^2} \cdot \sigma \cdot \Delta A. \quad (44)$$

A componente vertical do campo elétrico no ponto O produzida pelo elemento de

superfície ΔA é dada por:

$$|\Delta \vec{E}_Y| = |\Delta \vec{E}| \cdot \cos \theta. \quad (45)$$

Substituindo-se a equação (44) na equação (45) conclui-se que:

$$|\Delta \vec{E}_Y| = \frac{K_0}{R^2} \cdot \sigma \cdot \Delta A \cdot \cos \theta. \quad (46)$$

Em que θ é o ângulo entre a normal ao elemento de área e a vertical. Mas $\Delta A \cdot \cos \theta$ é a área de projeção do elemento ΔA no plano horizontal. Assim, o campo elétrico resultante no ponto O pode ser determinado pela equação:

$$\begin{aligned} |\vec{E}_R| &= \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{E}_Y| \\ |\vec{E}_R| &= \sum_{i=1}^N \frac{K_0}{R^2} \cdot \sigma \cdot \Delta A \cdot \cos \theta \\ |\vec{E}_R| &= \frac{K_0}{R^2} \cdot \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^N \Delta A \cdot \cos \theta \right). \end{aligned}$$

É fácil perceber que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Delta A \cdot \cos \theta &= A_{\text{projetada}} \\ |\vec{E}_R| &= \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{E}_Y| = \frac{K_0}{R^2} \cdot \sigma \cdot A_{\text{projetada}} \end{aligned}$$

Veja que $A_{\text{projetada}}$ é a área projetada do lóbulo no plano horizontal. Para o problema proposto, temos $A_{\text{projetada}} = \pi \cdot R^2$. Logo:

$$\begin{aligned} |\vec{E}_R| &= \frac{K_0}{R^2} \cdot \sigma \cdot (\pi R^2) \\ |\vec{E}_R| &= \frac{\sigma(\pi R^2)}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

Em resumo, para calotas esféricas ou lóbulos podemos afirmar que o campo elétrico no centro da esfera será dado por:

$$|\vec{E}_R| = \sum_{i=1}^N |\Delta \vec{E}_Y| = \frac{K_0}{R^2} \cdot \sigma \cdot A_{\text{projetada}}.$$

Assim, podemos concluir pelas duas resoluções o resultado foi o mesmo.

Exemplo 4.2. *As cargas pontuais $+q$ e $-q$ situam-se a uma distância $2L$ uma da outra. Determine o fluxo eletrostático através do círculo de raio R . Seja ε_0 a permissividade do meio.*

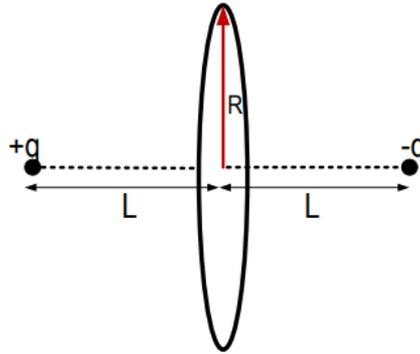


Figura 54: Duas cargas a uma distância $2L$ e círculo que é perpendicular à distância e localizado no ponto médio entre as cargas.

Resolução 1.

Primeiro, vamos dividir o círculo em várias coroas concêntricas e vamos destacar uma coroa de raio R' e espessura dr como apresentada na figura 55.

Na figura 55, temos um triângulo retângulo de catetos e hipotenusa medindo, respectivamente, L , R' e r , e uma coroa de comprimento $2rR'$ e espessura dR' . Daí, temos

$$r^2 = L^2 + R'^2 \Rightarrow r = (L^2 + R'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (47)$$

$$\cos \theta = \frac{L}{r}, \quad (48)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R'}{L} \Rightarrow R' = L \cdot \operatorname{tg} \theta \Rightarrow dr = L \cdot \sec^2 \theta d\theta. \quad (49)$$

Temos, também, que se esta coroa tiver largura infinitesimal, os raios se confundem e o perímetro do anel de largura infinitesimal é dado por:

$$C(R') = 2\pi R' \quad (50)$$

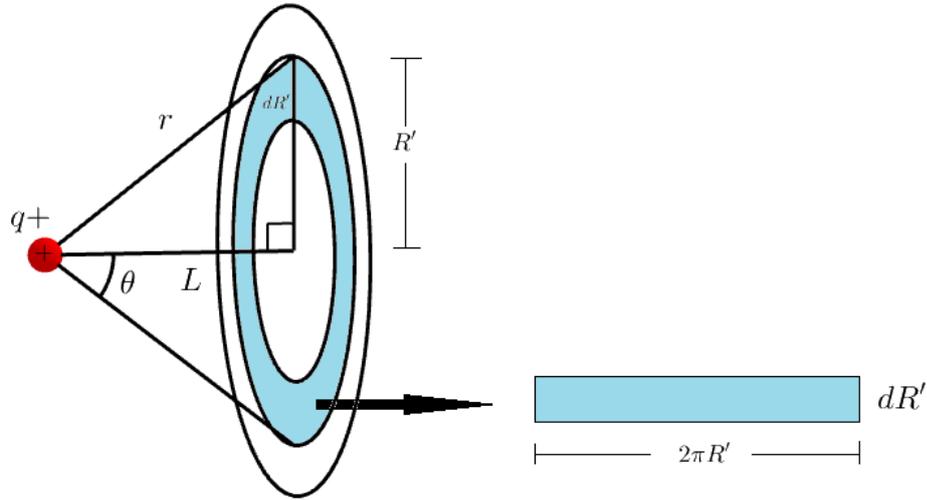


Figura 55: Coroa de raio R' e espessura dR' a uma distância L da carga $q+$.

Veja que o perímetro C está em função do raio R' . Com isso, definimos a área:

$$dA = 2\pi \cdot dR' \quad (51)$$

Sabemos que o fluxo elétrico é definido como um valor escalar (um número) que corresponde às linhas de campo elétrico que atravessam a superfície na mesma direção de dA , ou seja, o fluxo elétrico é uma medida do quão perpendicular o campo elétrico é em relação à essa superfície. Um elemento infinitesimal de fluxo elétrico seria:

$$d\phi_E = E \cdot dA = |E|dA \cos(\theta). \quad (52)$$

Substituindo o valor de $|E|$ e a equação (51) em (52), segue que

$$d\phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot 2\pi R' \cdot dr \cdot \frac{L}{r}. \quad (53)$$

Substituindo, (48) em (53), segue que:

$$d\phi_E = \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot \frac{R' \cdot dr \cdot L}{(L^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (54)$$

Agora substituindo (49) em (54), temos que:

$$d\phi_E = \frac{q}{2\varepsilon_o} \cdot \frac{L \cdot \tan \theta \cdot L^2 \cdot \sec^2 \theta d\theta}{(L^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (55)$$

A expressão $(L^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}$ da equação (55), pode ser representa da seguinte forma:

$$(L^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} = (L^2 + L^2 \cdot \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = L^3(1 + \tan^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = L^3 \sec^3 \theta.$$

Vamos substituir o valor da expressão $(L^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}$ na equação (55). Assim, temos que:

$$d\phi_E = \frac{q}{2\varepsilon_o} \cdot \frac{L \cdot \tan \theta \cdot L^2 \cdot \sec^2 \theta d\theta}{L^3 \sec^3 \theta}. \quad (56)$$

Portanto,

$$d\phi_E = \frac{q}{2\varepsilon_o} \cdot \frac{\tan \theta d\theta}{\sec \theta}. \quad (57)$$

Assim, o fluxo da carga $q+$ é dada por

$$\begin{aligned} \phi_E &= \int_0^\theta \frac{q}{2\varepsilon_o} \cdot \frac{\tan \theta}{\sec \theta} d\theta = \frac{q}{2\varepsilon_o} \int_0^\theta \frac{\tan \theta}{\sec \theta} d\theta \\ &= \frac{q}{2\varepsilon_o} \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta}} d\theta = \frac{q}{2\varepsilon_o} \cdot \int_0^\theta \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (58)$$

$$= \frac{q}{2\varepsilon_o} \cdot (1 - \cos \theta). \quad (59)$$

O processo feito foi para determinar a fluxo que uma carga faz sobre uma superfície circular, cuja distância entre elas é L . Veja que a segunda carga $-q$ também está a uma distância L da superfície. Dessa forma, para encontrar a carga na superfície gerada pelas duas cargas, basta pegar o fluxo que uma carga faz sobre a superfície e multiplicar por 2. Portanto, $\phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o} \cdot (1 - \cos \theta)$.

Resolução 2.

Imagine uma superfície gaussiana esférica de raio r em torno da carga, de tal modo que o círculo determine uma calota como mostrado na figura 56.

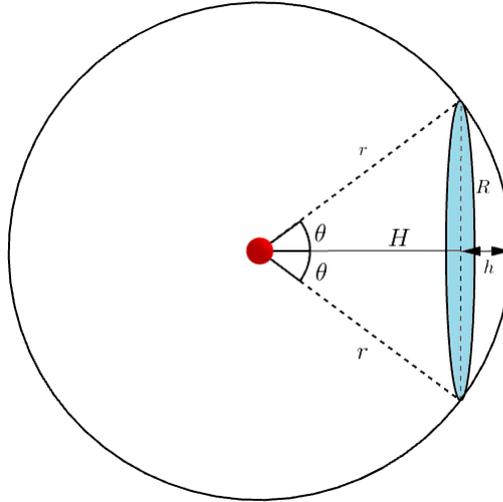


Figura 56: Esfera de raio R e carga Q localizada em seu centro.

Devido à simetria em todos os pontos da superfície esférica, o módulo do vetor campo elétrico será constante e paralelo ao vetor normal em cada ponto da mesma.

Para a superfície esférica, podemos determinar a relação entre os fluxos elétricos total e parcial usando a definição de fluxo elétrico:

$$\Phi_{\text{parcial}} = E \cdot A_{\text{parcial}}$$

$$\Phi_{\text{total}} = E \cdot A_{\text{total}}$$

$$\frac{\Phi_{\text{parcial}}}{\Phi_{\text{total}}} = \frac{E \cdot A_{\text{parcial}}}{E \cdot A_{\text{total}}} \iff \frac{\Phi_{\text{parcial}}}{\Phi_{\text{total}}} = \frac{A_{\text{parcial}}}{A_{\text{total}}}$$

Sabe-se que a área total será igual a área da superfície esférica que é dada por $A_{\text{total}} = 4\pi \cdot R^2$, enquanto a área parcial será dada pela área da calota esférica, que é $A_{\text{total}} = 2\pi \cdot R \cdot h$.

Daí, por geometria elementar, temos $\cos \theta = \frac{H}{R} \Rightarrow H = R \cdot \cos \theta$. Assim,

$$h = R - H = R - R \cdot \cos \theta \Rightarrow h = R(1 - \cos \theta).$$

Por fim,

$$A_{\text{parcial}} = 2\pi \cdot R^2 \cdot (1 - \cos \theta).$$

Logo,

$$\frac{\Phi_{\text{parcial}}}{\Phi_{\text{total}}} = \frac{2\pi \cdot R^2 \cdot (1 - \cos \theta)}{4\pi \cdot R^2} \Rightarrow \frac{\Phi_{\text{parcial}}}{\frac{q}{\epsilon_0}} = \frac{(1 - \cos \theta)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_{\text{parcial}} = \frac{q}{2\epsilon_0} \cdot (1 - \cos \theta).$$

Podemos perceber que o fluxo elétrico sobre a calota esférica (AB) será um mesmo de um disco de raio $r(AB)$, já que o número de linhas que atravessam ambas as superfícies são iguais.

Seguindo a mesma linha da solução anterior, temos que, para encontrar a carga na superfície circular gerada pelas duas cargas, basta pegar o fluxo que uma carga faz sobre a superfície e multiplicar por 2. Assim, segue que

$$\Phi_{\text{parcial}} = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot (1 - \cos \theta).$$

Exemplo 4.3. *Uma carga elétrica puntiforme q encontra-se no centro do cilindro de altura $2L$ e raio da base R . Determine o fluxo do campo elétrico no cilindro (figura 57).*

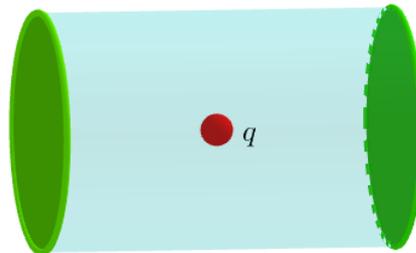


Figura 57: Cilindro com uma carga q no seu centro.

Resolução.

Neste exemplo será usada apenas a ideia de projeção já vista nos problemas anteriores. Observe que o fluxo gerado na bases é o mesmo processo da questão anterior.

Lembrando que a carga está a uma distância L de um círculo de raio R . Sendo assim, temos que o fluxo das bases será dado por:

$$\Phi_{\text{bases}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \cdot (1 - \cos \theta).$$

5 Conclusão

O presente trabalho discorre sobre a importância da interdisciplinaridade na sala de aula, de modo que proporcione ao educador novas metodologias de ensino, unindo clareza, segurança e interesse do aluno.

Nesse sentido, foi apresentado um estudo para resolver problemas de fluxo elétrico usando apenas a ideia de projeções que, por se tratar de uma área pouco abordada em livros e artigos escritos, representa uma forma de complementar essa carência e dar uma base para aqueles que desejam se aventurar nesse desafiador universo.

Essa abordagem é direcionada, principalmente, ao professor de matemática e física, com o objetivo de oferecer um conteúdo mais refinado e, com isso, proporcionar ao docente outras técnicas de resolução de questões e situações, tornando a prática mais dinâmica.

Portanto, é relevante que o professor trabalhe suas aulas com uma didática contextualizada, relacionando as informações e as disciplinas para aprofundar o conhecimento. É através do ensino interdisciplinar que os professores possibilitarão aos alunos uma inovação na aprendizagem, integrando, de maneira recíproca, várias ciências.

Referências

- [1] DELGADO, Jorge, FRENSEL, Katia e CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*, 1ª Edição, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [2] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica*, Volume 10. 7ª Edição. São Paulo: Atual, 2013.
- [3] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Geometria*, 1ª Edição, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [4] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de. *Coleção elementos de matemática: números complexos, polinômios, geometria analítica*, Volume 4. 1ª Edição. Belém: Vestseller, 2013.
- [5] PATERLINI, Roberto Ribeiro. Os “Teoremas” de Cavalieri. *Revista do Professor de Matemática* nº 72, 2º quadrimestre de 2010, pp. 43-47. Disponível em: <<https://www.dm.ufscar.br/profs/ptlini/>>. Acesso em 26/10/2020.
- [6] THOMAS, G. B. *Cálculo*, Volume 2. 10ª Edição. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.
- [7] BRASIL, M. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, p. 88-89, 1999.
- [8] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.
- [9] GUPTA, D. C. *Electrostatics for JEE Main e Advanced*. Disha Publications. 2018.

- [10] IEZZI, Gelson. Matemática : ciência e aplicações, volume 3 : ensino médio (et. al.] . 9. ed. São Paulo : Saraiva, 2016.
- [11] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física: Eletromagnetismo. 8 a ed. Rio de janeiro: LTC, 2009. v3.
- [12] CHAVES, Alaor. Física Básica : Eletromagnetismo. Rio de Janeiro. Editora LTC, 2007.
- [13] https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94823
- [14] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. Curso de física básica, 2. 4 ed. rev, -São Paulo: Edgard Blücher, 2004.
- [15] HALLIDAY, David. Fundamentos de física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro, 2016
- [16] Ávila, G., Cálculo, Vol. 3, Editora LTC, 7 Edição, 2006.