UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MARCOS AURÉLIO TOMAZ DE OLIVEIRA

A GEOMETRIA DO CONJUNTO DE CANTOR, DO TAPETE DE SIERPINSKI E DA ESPONJA DE MENGER

FORTALEZA

2020

MARCOS AURÉLIO TOMAZ DE OLIVEIRA

A GEOMETRIA DO CONJUNTO DE CANTOR, DO TAPETE DE SIERPINSKI E DA ESPONJA DE MENGER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino da Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2020

Ficha Catalográfica

de Oliveira, Marcos Aurélio Tomaz

A geometria do conjunto de Cantor, do tapete de Kierpinski e da esponja de Menger / Marcos Aurélio Tomaz de Oliveira. – Fortaleza, 2020

43 p.: il., figs., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, departamento de matemática

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Conjuntos. 3. Funções. 4. Fractais. 5. Ensino médio. I. Título.

MARCOS AURÉLIO TOMAZ DE OLIVEIRA

A GEOMETRIA DO CONJUNTO DE CANTOR, DO TAPETE DE SIERPINSKI E DA ESPONJA DE MENGER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.
Área de concentração: Ensino da Matemática.

Aprovada em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. ???
Instituição ?

Prof. Dr. ???

Instituição ?

A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza. (*Stephen Hawking*)

Dedico este trabalho à minha esposa Antônia Alves
e aos meus filhos Murilo e Érika.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter-me possibilitado realizar este sonho, já há muito desejado.

Às pessoas importantes na minha trajetória de vida: minha esposa Antônia Alves, pelo incentivo e paciência durante esses anos, e ao meu filho Murilo e à minha filha Érika pelo apoio. Hoje podemos comemorar: tarefa cumprida e sonho realizado! Meu eterno reconhecimento e gratidão a todos.

A todos os colegas de turma, em especial Ana Maria, Fabrício e Lucas por tudo que me ajudaram.

A colega de trabalho, professora Kátia de Sá pelos conselhos e apoio durante esse período.

Aos mestres que muito contribuíram para o meu aprendizado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, por me conduzir a alcançar um novo degrau em minha vida.

RESUMO

Este trabalho está inserido no contexto do Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e apresenta a construção do conjunto de Cantor. Para exibir as propriedades do conjunto de Cantor, exploramos conteúdos presentes no Currículo Nacional do Ensino Básico de Matemática, tais como conjuntos, funções, intervalos reais e progressões geométricas. Utilizamos uma linguagem acessível aos alunos do Ensino Básico e apresentamos atividades envolvendo outros fractais, obtidos de forma semelhante ao conjunto de Cantor, bem o tapete de Sierpinski e a esponja de Menger.

Palavras-chave: Conjuntos, Funções, Conjunto de Cantor, Fractais, Ensino Médio.

ABSTRACT

This work is inserted in the context of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network - PROFMAT and presents the construction of the Cantor set. To display the properties of the Cantor set, we explored contents present in the National Curriculum of Basic Education in Mathematics, such as sets, functions, real intervals and geometric progressions. We use language accessible to elementary school students and present activities involving other fractals, obtained in a similar way to the Cantor set, as well as the Sierpinski rug and the Menger sponge.

Keywords: Sets, Functions, Singer Set, Fractals, High School.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, filho de emigrantes dinamarqueses, nasceu em S. Petersburgo, Rússia, em 1845. Em 1856 sua família transferiu-se para Frankfurt, Alemanha. O pai de Cantor era um judeu convertido do protestantismo e a mãe nascera na religião católica. Georg se interessou profundamente pelos argumentos da teologia medieval sobre a continuidade e o infinito. Como consequência, não quis seguir uma carreira na engenharia como o seu pai sugeria, quis se dedicar à matemática, à filosofia e à física. Estudou em Zurique, Göttingen e Berlim - onde recebeu a influência de Karl Weierstrass e obteve o doutorado em 1867, com uma tese sobre a teoria dos números. De 1869 a 1905, desenvolveu sua carreira docente na Universidade de Halle. Faleceu em 1918, no hospital de doenças mentais de Halle.

Cantor percebeu que os conjuntos infinitos não são todos iguais. No caso infinito, dizemos que os conjuntos de elementos têm o mesmo número (cardinal) se puderem ser postos em correspondência biunívoca. De modo um tanto similar, Cantor se dispôs a construir uma hierarquia dos conjuntos infinitos conforme a Mächtingkeit ou "potência" do conjunto. O conjunto dos quadrados perfeitos tem a mesma potência que o conjunto de todos os inteiros positivos, uma vez que eles podem ser postos em correspondência biunívoca. Cantor mostrou que o conjunto de todas as frações racionais é enumerável ou contável, ou seja, também pode ser posto em correspondência biunívoca com os inteiros positivos e, por conseguinte, tem a mesma potência. Com essas constatações, começaram a pensar que todos os conjuntos infinitos possuíam a mesma potência. Todavia, Cantor provou que isso estava longe de ser verdade. Ele demonstrou que o conjunto dos números reais tem potência maior que o conjunto dos números inteiros positivos e o determinou não-enumerável. Seus incríveis resultados levaram-o ao estabelecimento da Teoria dos Conjuntos.

Cantor passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle, nunca conseguindo realizar uma de suas grandes aspirações que era a de ser professor na Universidade de Berlim, devido à perseguição de Kronecker, que duvidava da teoria da infinidade completa de Cantor.

O reconhecimento de suas realizações, depois de algum tempo, mereceu a exclamação de Hilbert: “Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.”

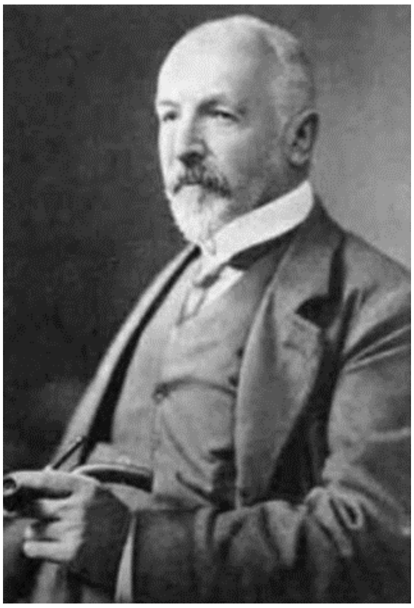


Figura 1: Georg Cantor (1845 – 1918)

Neste trabalho, apresentamos o conjunto de Cantor, um engenhoso exemplo de um subconjunto da reta que é também não-enumerável e é considerado o precursor da geometria fractal, ramo da geometria não-euclidiana, que desde 1975 vem obtendo avanços significativos em diversos setores do conhecimento. Através deste conjunto, exploraremos conteúdos contemplados no Currículo Nacional de Matemática do Ensino Básico, tais como funções, conjuntos, o conjunto dos números reais, intervalos reais, recorrências, progressões geométricas e noções de limite. Este trabalho foi elaborado para que se possa compreender e apreciar as principais ideias e concepções de finitude, infinitude que temos na matemática e suas implicações. Além disso, foi elaborado uma proposta didática voltado para os alunos do ensino médio, bem como o relato de sua aplicação em duas escolas diferentes, sendo uma escola pública e uma particular.

É importante ressaltar que o conceito de infinito está presente na prática escolar, por exemplo, na geometria se diz que em uma reta existem infinitos pontos, é estudado a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, os números racionais e irracionais na forma decimal possuem uma representação infinita, bem como na construção dos fractais e estas são apenas algumas situações, entre tantas outras na matemática. Embora finitude e infinitude sejam assuntos complexos de se abordar, as ideais principais são expressas através de conceitos básicos da matemática, como conjuntos e funções, de forma que um aluno da primeira série do ensino médio é capaz de entender. Portanto, esta dissertação serve como material de apoio para professores e alunos interessados em um maior aprendizado sobre o tema.

No primeiro capítulo, apresentamos noções de conjuntos, funções e as definições de conjunto finito e conjunto infinito. O segundo capítulo está destinado à construção do conjunto de Cantor, bem como ao estudo de suas propriedades. Sendo o conjunto de Cantor um fractal, no terceiro capítulo, fazemos uma exposição breve e superficial de outros fractais que são obtidos através de processos recursivos. No último capítulo, algumas propostas didáticas são discutidas.

2 SOBRE CONJUNTOS E FUNÇÕES

Neste capítulo de caráter preliminar ao estudo do conjunto de Cantor, apresentaremos a linguagem básica de conjuntos e funções nas duas primeiras seções, linguagem essa fundamental para os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. Na terceira seção, daremos uma atenção especial aos conjuntos finitos e infinitos.

As principais referências para este capítulo são [1], [5] e [6].

2. 1 Conjuntos

Conjunto é uma reunião de elementos, podemos dizer que essa definição é bem primitiva, mas a partir dessa ideia podemos relacionar outras situações. O conjunto universo e o conjunto vazio são tipos especiais de conjuntos, ou seja, a noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se usa na linguagem corrente: é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, sistema. Vejamos alguns exemplos:

1) Conjunto das consoantes;

2) Conjunto dos números pares não nulos;

3) Conjunto dos algarismos romanos.

Um conjunto é constituído por elementos, podendo ainda não possuir elemento algum.

Quando um conjunto não possui elementos, este é denominado de conjunto vazio e é representado pelo símbolo $\varnothing$ ou por { }.

Nos exemplos anteriores, os elementos dos conjuntos mencionados são:

1) b, c, d, f, g, h, j, ..., z;

2) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...;

3) I, II, III, IV, V, VI, VII.

respectivamente.

Quando um conjunto possui um único elemento, ele é chamado de conjunto unitário. A relação entre um elemento e um conjunto chama-se relação de pertinência, um elemento pode pertencer ou não ao conjunto e apenas uma das alternativas é verdadeira.

Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x pertence a A e escrevemos

$$x \in A$$

Se, porém, *x* não é um dos elementos do conjunto A, dizemos que *x* não pertence a A e escrevemos

$$x \notin A$$

Dois recursos principais para descrever um conjunto e seus elementos são utilizados: ou enumeramos (listamos) os elementos do conjunto ou damos uma propriedade característica dos elementos do conjunto.

• Quando um conjunto é dado pela enumeração de seus elementos, indicamos escrevendo seus elementos entre chaves. Retornando aos exemplos acima, temos:

1) Conjunto das consoantes: {b, c, d, f, g, h, j, ..., z};

2) Conjunto dos números pares não nulos: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...};

3) Conjunto dos algarismos romanos: {I, II, III, IV, V, VI, VII}.

Como podemos verificar no exemplo (2), que esta notação também é usada quando o conjunto é infinito. Escrevemos outros elementos que evidenciam a lei de formação do conjunto e em seguida colocamos reticências, como no exemplo abaixo:

4) Conjunto dos números ímpares maiores que 1: {3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...}

• Para descrever um conjunto A através de uma propriedade de característica P de seus elementos *x*, escrevemos

$$A = \{x \mid x \text{ goza da propriedade P}\}$$

e lemos: A é o conjunto dos elementos *x* tal que *x* goza da propriedade P. Vejamos os próximos exemplos:

1) $\{x \mid x$ é natural e $0 < x < 100\}$ é uma forma de descrever o conjunto {1, 2, 3, 4, ..., 99}.

2) $\{x \mid x$ é divisor de $10\}$ é uma forma de descrever o conjunto {–10, –5, –2, –1, 1, 2, 5, 10}.

A relação entre conjuntos chama-se relação de continência. Para indicar este tipo de relação, utilizamos os símbolos $\subset$ (está contido) e $\not\subset$ (não está contido).

Escrevemos $A \subset B$, para indicar que um conjunto A está contido num conjunto B. Para indicar que um conjunto A não está contido num conjunto B, escrevemos $A \not\subset B$. Para que um conjunto esteja contido em outro é necessário que todos os seus elementos pertençam também a esse outro conjunto. Quando $A \subset B$, dizemos que A é um subconjunto de B ou uma parte de B. A notação $B \supset A$ para indicar que A é um subconjunto de B também é utilizada e lê-se: B contém A.

Para exemplificar a relação de continência, vejamos que o conjunto D dos divisores de 10 está contido em A o conjunto dos números inteiros compreendidos entre -20 e 20; simbolicamente: $D \subset A$. Lembramos que o conjunto A dos números inteiros compreendidos entre -20 e 20 conta com 39 caracteres, denominados números, onde 8 desses números são divisores de 10 e os 31 demais não são divisores de 10.

Operações entre conjuntos

Chama-se reunião (ou união) de dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos que pertencem a A ou a B.

Esse conjunto indica-se pela notação: $A \cup B$, que se lê: A reunião B ou, A união B. Portanto, afirmar que $x \in A \cup B$ significa dizer que pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira: $x \in A$ ou $x \in B$. Podemos, pois, escrever

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Vejamos o exemplo:

1) $A = \{x \mid x$ é par e $1 < x < 10\}$ e $B = \{x \mid x$ é divisor positivo de $20\}$

Então, $A \cup B = \{x \mid x$ é par e $1 < x < 10$ ou x é divisor positivo de $20\}$, ou seja, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20\}$.

A intersecção dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$, formado pelos comuns a A e B. Assim, afirmar que $x \in A \cap B$ significa que dizer que se tem, ao mesmo tempo, $x \in A$ e $x \in B$. Portanto, podemos escrever:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Considerando A e B como em 1, temos $A \cap B = \{2, 4, 5\}$.

Pode ocorrer que não exista elemento algum x tal que $x \in A$ e $x \in B$. Neste caso, tem-se $A \cap B = \varnothing$. O que nos permite afirmar que os conjuntos A e B são disjuntos.

Vejamos o exemplo:

2) Sejam M o conjunto das consoantes e N o conjunto das vogais do alfabeto da língua portuguesa. É evidente que $M \cap N = \varnothing$ e os conjuntos M e N são disjuntos.

Chama-se diferença entre dois conjuntos A e B ao conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a B. Esse conjunto indica-se pela notação: $A - B$, que se lê: A menos B ou diferença entre A e B. Portanto, simbolicamente, temos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

É importante perceber que não se exige que B esteja contido em A para formar a diferença $A - B$. Quando A e B são disjuntos, nenhum elemento de A pertence a B, consequentemente A – B = A. Em qualquer caso, temos: A – B = A – (A $\cap$ B). Quando temos B $\subset$ A, a diferença A – B é dita o complementar de B em relação a A e escrevemos:

$$A - B = C_A B$$

Notemos que $x \in C_A B$ se, e somente se, $x \notin$ B.

Vejamos o exemplo:

3) Sejam A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x \leq 10\}$ e B = $\{x \in \mathbb{Z} \mid 8 < x \leq 15\}$. Então A – B = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x < 8\}$ e B – A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid 10 < x \leq 15\}$.

Importante ainda notar que, se A e B são duas partes quaisquer de um mesmo conjunto D, então a diferença A – B exprime-se por meio da interseção e da complementação, pois temos:

A – B = $\{x \mid x \in$ A e $x \notin$ B$\}$ = $\{x \mid x \in$ A e $x \in C_D B\}$, isto é, $A - B = A \cap C_D B$

De fato, $x \in A - B \Leftrightarrow x \in$ A e $x \notin$ B $\Leftrightarrow x \in$ A e $x \in C_D B \Leftrightarrow x \in A \cap C_D B$.

Sejam A e B conjuntos e dados os objetos m, n, pertencentes a A e B, respectivamente, o par ordenado (m, n) fica formado quando se escolhe um desses objetos para ser a primeira coordenada, neste caso m, e o objeto n para ser a segunda coordenada do par. Dois pares ordenados (m, n) e (m', n') são iguais quando suas primeiras coordenadas, m e m', são iguais e suas segundas coordenadas, n e n', também. Sendo assim

$$(m, n) = (m', n') \Leftrightarrow m = m' \text{ e } n = n'$$

O produto cartesiano dos conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos os pares ordenados (m, n) cuja primeira coordenada pertence a A e a segunda coordenada pertence a B. Desse modo:

$$A \times B = \{(m, n) \mid m \in A \text{ e } n \in B\}$$

Vejamos o exemplo:

4) Sejam A = {1, 2, 3} e B = {4, 5, 6}. Então,

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$.

2. 2 Funções

Uma função f : A $\to$ B consta de três partes: um conjunto A, chamado o domínio da função, ou o conjunto onde a função está definida, um conjunto B, chamado contradomínio da função, ou o conjunto onde a função toma valores, e uma lei que permite associar a cada elemento $x \in$ A, um único elemento f(x) $\in$ B, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x). A lei que permite obter o valor f(x) $\in$ B, quando é dado $x \in$ A, é arbitrária, porém sujeita a duas condições:

• Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer f(x) para todo $x \in$ A;

• Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in$ A, a regra deve fazer corresponder um único f(x) $\in$ B.

Usaremos a notação $x \to$ f(x) para indicar que f faz corresponder a x o valor f(x).

Não se pode confundir f com f(x), pois f é a função, enquanto que f(x) é o valor que a função assume num ponto x do seu domínio.

Duas funções f: A $\to$ B e g: C $\to$ D são iguais se, e somente se, apresentarem domínios iguais (A = C), contradomínios iguais (B = D) e a mesma regra de correspondência, ou seja, f(x) = g(x) para todo x do domínio.

O gráfico da função f: A $\to$ B é o subconjunto G(f) do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados (x, f(x)), onde x $\in$ A é arbitrário, ou seja:

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

Uma função f : A $\to$ B é injetiva (ou biunívoca) se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Simbolicamente, temos:

$$\begin{aligned} &f : A \to B \\ &f \text{ é injetiva} \Rightarrow \forall x_1,\ x_1 \in A,\ \forall x_2,\ x_2 \in B \text{ e } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$

Um exemplo simples de função injetiva é a função identidade $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por f(x) = x para todo $x \in \mathbb{Z}$. Claramente, temos que f(x) = f(y) $\Leftrightarrow$ x = y.

Uma função f : A $\to$ B é sobrejetiva (ou sobre B) se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que f(x) = y. Simbolicamente, temos:

$$\begin{aligned} &f : A \to B \\ &f \text{ é sobrejetiva} \Leftrightarrow \forall y,\ y \in B,\ \exists x,\ x \in A \mid f(x) = y \end{aligned}$$

É importante lembrar que f : A $\to$ B é sobrejetiva se, e somente se, o conjunto imagem de f for igual ao contradomínio (B), ou seja:

$$\begin{aligned} &f : A \to B \\ &f \text{ é sobrejetiva} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = B \end{aligned}$$

Uma situação clara de função sobrejetiva é o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, ou seja, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\right\}$. Vejamos:

Podemos verificar facilmente, que a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ dada por $f(p, q) = \frac{p}{q}$, para todo $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, é sobrejetiva, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Vejamos agora outra situação:

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida pela lei $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Observamos que f não é injetora, pois $f(-5) = f(5)$, embora $-5 \neq 5$. Tampouco f é sobrejetiva, afinal não existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = -3$, por exemplo. Por outro lado, se considerarmos $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 3x + 2$, então g é injetiva. Com efeito, se $g(x) = g(y)$ então $3x + 2 = 3y + 2$, ou seja, $3x = 3y$, donde $x = y$. Porém, g não é sobrejetiva, pois não existe um inteiro x tal que $3x + 2 = 0$, por exemplo. Finalmente, seja $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida assim $h(1) = 1$ e, para cada número natural $x > 1$, $h(x)$ é o número de fatores primos distintos que entram na composição de x. Então h é sobrejetiva, pois $h(2) = 1$, $h(15) = 2$, $h(120) = 3$, $h(840) = 4$ e muitos outros. Mas é claro que h não é injetiva. Por exemplo, x e y são dois números primos quaisquer, tem-se $h(x) = h(y)$.

Uma função $f : A \to B$ é dita bijetiva (ou bijeção, ou uma correspondência biunívoca) quando é injetiva e sobrejetiva concomitantemente.

A mais simples das bijeções é a função identidade supramencionada.

Dados uma função $f : A \to B$ e um subconjunto $X \subset A$, chama-se a imagem de X pela função f ao conjunto f(x) formado pelos valores f(x) que f assume nos pontos $x \in X$. Em outras palavras:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in B \mid y = f(x),\ x \in X\}$$

Evidentemente, f(x) é um subconjunto de B. Para que $f : A \to B$ seja sobrejetiva é necessário e suficiente[1] que $f(A) = B$.

2.3 Conjuntos finitos e infinitos

[1] "é necessário e suficiente" ou "se e somente se" expressam a mesma relação de equivalência e aparecem com frequência no texto. O que a oração declarativa acima quer dizer é: se $f : A \to B$ é sobrejetiva então $f(A) = B$ e se $f(A) = B$ então $f : A \to B$ é sobrejetiva. Se o leitor-aluno não tiver acesso a noções básicas de lógica em sua escola, recomendamos que o mesmo consulte a referência [5].

O estudo sistemático dos conjuntos, que acabou levando a uma teoria axiomática desse campo de estudos, começou com Georg Cantor (1845-1918), por volta de 1872. Nessa época, Cantor estava iniciando sua carreira profissional e se ocupava do estudo da representação de funções por meio de séries trigonométricas. Isto fez com que ele investigasse os conjuntos de pontos de descontinuidade de tais funções, os mais simples dos quais são conjuntos com apenas um número finito de pontos. Mas o aparecimento de conjuntos cada vez mais complicados acabou levando Cantor a investigar conjuntos infinitos em sua generalidade. Nesse estudo ele introduziu um conceito simples, que logo se revelaria da maior importância - o conceito de equivalência de conjuntos.

Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade, ou a mesma potência, quando é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objeto dessa correspondência. Em termos precisos, a correspondência de que estamos falando chama-se bijeção. (Veja a definição de bijeção na p. 18.) Escreveremos $A \leftrightarrow B$ para indicar que existe uma bijeção entre A e B.

Observe que é essa noção de equivalência que dá origem ao conceito abstrato de número natural. De fato, o que faz uma criança de quatro ou cinco anos ele idade constatar que numa cesta há três laranjas, noutra três maçãs, e noutra ainda três ovos? Ela chega a essas conclusões - mesmo sem perceber – por constatar que é possível "casar" os elementos de qualquer uma dessas cestas com os elementos de qualquer outra de maneira biunívoca. É essa abstração dos elementos concretos dos conjuntos equivalentes de diferentes objetos que nos leva a formar a noção de número natural, um fenômeno que ocorre muito cedo em nossas vidas.

Assim, denotando com C_n o conjunto dos primeiros números naturais, $C_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, é precisamente o fato de um conjunto A ser equipotente a C_n que nos faz dizer que A tem n elementos, ou tem o mesmo número de elementos que C_n. Daí definirmos: um conjunto A se diz finito quando existe um número natural n tal que A seja equipotente ao conjunto C_n.

Um conjunto se diz infinito quando não for finito.

No caso de conjuntos finitos, serem equivalentes corresponde a terem o mesmo número de elementos, de sorte que o conceito de cardinalidade é o recurso natural para estender, a conjuntos infinitos, o conceito de "número de elementos de um conjunto".

Diz-se que dois conjuntos quaisquer A e B têm a mesma cardinalidade, ou o mesmo número de elementos, se eles forem equipotentes. Como se vê, essa definição, no caso de conjuntos finitos, não traz nada de novo; mas estende, para conjuntos infinitos, a noção de "número de elementos de um conjunto". Tais números são os chamados números transfinitos.

Nesta seção, apresentaremos as noções de conjunto finito, conjunto infinito enumerável e conjunto infinito não-enumerável. Seremos concisos e não nos ateremos à algumas demonstrações de fatos relevantes. Agindo assim, temos a pretensão de que um aluno do Ensino Médio consiga entender esta seção, bem como todo o trabalho presente. Contudo, quando não demonstrarmos um fato importante, indicaremos uma referência para os leitores interessados. A noção de conjunto enumerável está estritamente ligada ao conjunto N dos números naturais.

2.3.1 Números naturais

São dados, como objetos não definidos, um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados números naturais, e uma função $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, o número s(n), valor que a função assume no ponto n, é chamado sucessor de n.

A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

(P1) $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ é uma função injetiva, ou seja, $m, n\in\mathbb{N}$, s(m) = s(n) $\Rightarrow$ m = n. Em palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.

(P2) Existe um único número natural, representado pelo símbolo 1, denominado um, que não é sucessor de nenhum outro número natural. Em outros termos:

$$\mathbb{N}-s(\mathbb{N})=\{1\}$$

(P3) Princípio da Indução: Se $X\subset\mathbb{N}$ é um subconjunto tal que 1 $\in$ X e, para todo n $\in$ X tem-se também s(n) $\in$ X, então $X=\mathbb{N}$.

O Princípio da Indução pode também ser enunciado da seguinte maneira:

Seja P uma propriedade relativa a números naturais. Se 1 gozar da propriedade P e se, do fato de um número natural n gozar de P poder-se concluir que n + 1 goza da propriedade P então todos os números naturais gozam dessa propriedade. Uma demonstração na qual o axioma (P3) é utilizado, chama-se demonstração por indução.

Para ilustrar uma demonstração por indução, mostraremos que s(n) $\neq$ n para todo $n\in\mathbb{N}$. De fato, seja $X=\{n\in\mathbb{N}\,|\,s(n)\neq n\}$. Como 1 não é sucessor de número algum, em particular 1 $\neq$ s(1) – tem-se 1 $\notin$ X. Além disso, se n $\in$ X então s(n) $\neq$ n. Pela injetividade de s (axioma (P1)), tem-se $s(s(n)) \neq s(n)$. Isto nos mostra que $s(n) \in X$. Assim, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$. Como $1 \in X$, segue do axioma (P3) que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $n \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Admitamos que, dada $f : X \to X$ uma função cujo domínio e contradomínio são os mesmos conjunto X, podemos associar, de modo único, a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função $f^n : X \to X$, chama-se a n-ésima iterada de f, de tal maneira que $f^1 = f$ e $f^{s(n)} = f \circ f^n$.

Usando as iteradas da função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiremos a adição de números naturais. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n \in \mathbb{N}$ é definida por:

$$m + n = s^n(m)$$

Ou seja, somar m com 1 é tomar o sucessor de m, enquanto que somar m com n é partir de m e iterar n vezes a operação de tomar o sucessor. Em outras palavras, temos, por definição:

$$m + 1 = s(m),$$
$$m + s(n) = s(m + n).$$

Deste modo, se quisermos, poderemos dispensar a notação s(n) para indicar o sucessor de n e usar a notação definitiva n + 1 para representar esse sucessor. Isto será feito gradativamente.

Podemos dispensar a notação s(n) para representar o sucessor de n e usar a notação definitiva n + 1 para indicar este sucessor.

As propriedades formais da adição estão listadas abaixo:

- Associatividade: $(m + n) + p = m + (m + p)$, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- Comutatividade: $m + n = n + m$, $m, n \in \mathbb{N}$;
- Lei do corte: $m + n = m + p \Rightarrow n = p$, $m, n, p \in \mathbb{N}$;
- Tricotomia: dados $m, n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas pode ocorrer:

ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$, ou existe $q \in \mathbb{N}$ com $n = m + q$.

As demonstrações das propriedades acima são feitas por indução.

A relação de ordem entre os números naturais é definida em termos da adição. Dados os números naturais m; n, dizemos que m é menor do que n e escrevemos

$$m < n,$$

para significar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Nas mesmas condições, dizemos que n é maior do que m. A notação $m \leq n$ expressa que m é menor do que ou igual a n.

A relação de ordem < goza de três propriedades, são elas:

• Transitividade: se m < n e n < p então m < p, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$;

• Tricotomia: dados $m, n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas pode ocorrer: ou m = n ou m < n ou n < m.

• Monotonicidade da adição: se $m, n \in \mathbb{N}$, são tais que m < n então, para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se m + p < n + p.

Introduziremos agora a multiplicação de números naturais. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função definida por $f_m(p) = p + m$, ou seja, f_m é a função "somar p". Utilizaremos esta função para definir a multiplicação de números naturais. O produto de dois números naturais é definido da seguinte forma: $m \cdot 1 = m$ e $m \cdot (n+1) = \left(f_m\right)^n (m)$. Vamos entender melhor esta definição. Pois bem, multiplicar um número m por 1 não o altera. Multiplicar m por um número maior do que 1, ou seja, por um número da forma n + 1, é iterar n-vezes a operação de somar m, começando com m. Desse modo, por exemplo, $m \cdot 2 = \left(f_m\right)(m) = m + m,\ m \cdot 3 = \left(f_m\right)^2 (m) = m + m + m$.

Recordando a definição de $(f_m)^n$, vemos que o produto $m \cdot (n+1)$ está definido indutivamente pelas propriedades a seguir:

$$m \cdot 1 = m$$
$$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$$

As principais propriedades da multiplicação estão listadas abaixo:

• Associatividade: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$;

• Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$;

• Lei do corte: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$;

• Distributividade: $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$;

• Monotonicidade: $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$.

As demonstrações das propriedades acima são feitas, também, por indução.

2.3.2 Conjuntos limitados de números reais

Uma característica que diferencia o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é o fato de que $\mathbb{R}$ é completo, propriedade que $\mathbb{Q}$ não tem. Os conteúdos desta seção foram retirados de [5].

Definição 1: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \le b$ para todo $x \in X$.

Neste caso, diz-se que b é uma cota superior de X. Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \le x$ para todo $x \in X$. O número *a* chama-se então uma cota inferior de X. Se X é limitado superiormente e inferiormente, diz-se que X é um conjunto limitado. Isto significa que o conjunto X está contido em algum intervalo limitado [a, b] ou, equivalentemente, que existe k > 0 tal que $x \in X \Rightarrow |x| \le k$.

Definição 2: Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

S_1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \le b$;

S_2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \le c$ para todo $x \in X$ então $b \le c$.

A condição S_2 admite a seguinte reformulação:

S_2'. Se c < b então existe $x \in X$ com c < x.

Com efeito, S_2' diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X. Às vezes se exprime S_2' assim: para todo $\lambda > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \lambda < x$.

Escrevemos b = sup X para indicar que b é o supremo do conjunto X.

Definição 3: Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio, limitado inferiormente, um número real *a* chama-se o ínfimo do conjunto X, e escreve-se a = inf X, quando é a maior das cotas inferiores de X. Isto equivale às duas afirmações:

I_1. Para todo $x \in X$ tem-se $a \le x$;

I_2. Se $c \le x$ para todo $x \in X$ então $c \le a$.

A condição I_2 pode também ser formulada assim:

I_2'. Se a < c então existe $x \in X$ tal que x < c.

De fato, I_2' diz que nenhum número maior do que *a* é cota inferior de X. Equivalentemente: para todo $\lambda > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \lambda$.

Definição 4: Diz-se que um número $b \in X$ é o maior elemento (ou elemento máximo) do conjunto X quando $b \ge x$ para todo $x \in X$. Isto quer dizer que b é uma cota superior de X, pertencente a X.

Observação 1: Por exemplo, b é o elemento máximo do intervalo fechado [a, b] mas o intervalo [a, b) não possui maior elemento. Evidentemente, se um conjunto X possui elemento máximo este será seu supremo. A noção de supremo serve precisamente para substituir a ideia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe. O supremo do conjunto [a, b) é b.

Sendo assim, afirmar que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é completo significa dizer que todo conjunto não vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo, isto é, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que sup X = b. Desse modo, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo, pois dado o intervalo $\left[0, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$ não vazio e limitado superiormente, tal que $\sup\left[0, \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$, tem-se que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Note que todo conjunto não vazio, limitado inferiormente, $Y \subset \mathbb{R}$ possui ínfimo. De fato, considere o conjunto $Y' = \{-y,\ y \in Y\}$, isto é, Y’ = –Y. Veja que $Y' \neq \emptyset$, pois $Y \neq \emptyset$. Como Y é limitado inferiormente, temos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y \in Y$, tem-se $b \leq y$. Daí, tem-se $-b \geq -y$, o que acarreta Y’ limitado superiormente. Sendo assim, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que Y’ = a (resulta da definição 2.3.2). Afirmação inf Y = –a. Com efeito, dado $y \in Y$ tal que $-y > -c$, o que resulta y < c.

Proposição 1: (i) O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

(ii) O ínfimo do conjunto $X = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ é igual a 0.

Demonstração 2: (i) Suponhamos que $\mathbb{N}$ é limitado. Então existe c = sup $\mathbb{N}$, como c – 1 não é cota superior, existe $n \in \mathbb{N}$ com c – 1 < n. Daí $c < n+1 \in \mathbb{N}$. Contradição, pois c é o supremo de $\mathbb{N}$. Logo $\mathbb{N}$ não é limitado.

(ii) Com efeito, como 0 < 1, temos que $0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo 0 é uma cota inferior do conjunto X. Com isso, é suficiente mostrar que nenhum c > 0 é cota inferior de X. Desse modo, como $\mathbb{N}$ não limitado superiormente, dado $\frac{1}{c}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{c} < n$. Daí, $\frac{1}{n} < c$ e, portanto, c não é cota inferior de X, consequentemente 0 = inf X. □

2.3.3 Conjuntos finitos

Chamaremos de J_n o conjunto dos números naturais $\leq n$. Em símbolos $J_n = \{p \in \mathbb{N} \mid p \leq n\}$.

Definição 5: Um conjunto X chama-se finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$,uma bijeção $f : J_n \to X$.

Escrevendo x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3) = ... = x_n = f(n) temos então X = {x_1, x_2, x_3, ..., x_n}. A bijeção f chama-se contagem dos elementos de X e o número n chama-se número de elementos, ou número cardinal do conjunto finito X.

Desse modo, se X for vazio diremos que o conjunto X tem zero elementos.

Exemplo 1: O conjunto $\mathbb{Z} = \{3, 4, 5, ..., k+2\}$, com $k \in \mathbb{N}$ fixo, é finito. Basta notar que a função $\varphi : J_n \to \mathbb{Z}$ definida por $\varphi(n) = n+2$, com n = 1, 2, 3, ..., k é injetora, pois dados $n_1, n_2 \in J_n$, se $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, então $n_1 + 2 = n_2 + 2 \Rightarrow n_1 = n_2$. E sobrejetiva, pois para todo $m \in \mathbb{Z}$, existe um número natural $n = m - 2 \in J_k$ tal que $\varphi(n) = m$. Assim, concluímos que φ é bijetiva.

Lema 1: Se existe uma bijeção $f : X \to Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g : X \to Y$ tal que g(a) = b.

Demonstração 3: Inicialmente, note que se f(a) = b, o resultado é imediato. Basta tomar g igual a f, isto é, f e g possuem os mesmos domínios, os mesmos contradomínios e as mesmas regras. Caso $f(a) \neq b$, então pela sobrejetividade de f, existem $a' \in X$ e $b' \in Y$ tais que f(a) = b'. Veja que $f(a) = b' \neq b = f(a')$, pois f é injetiva. Sendo assim, definamos $g : X \to Y$ pondo g(a) = b, g(a') = b' e g(x) = f(x) se $x \in X$ e $x \neq a, a'$.

Teorema 1: Se A é um subconjunto próprio de J_n, não pode existir uma bijeção $f : A \to J_n$.

Caso o estudante desejar ver a demonstração do Teorema 1, consulte o livro de referência [5].

Lema 2: Se X é um conjunto finito e $a \in X$ então $X - \{a\}$ é finito.

Demonstração: Como o conjunto X é finito existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f : J_n \to X$, pelo Lema 1, podemos considerar que f(n) = a. Se n = 1, isto é, f(1) = a, então X = {a} e X – {a} = ∅ finito. Caso n > 1, a restrição de f ao conjunto J_{n-1} é uma bijeção sobre X – {a}. Portanto, X – {a} é finito e possui n – 1 elementos.

Teorema 2: Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Caso o estudante desejar ver a demonstração do Teorema 2, consulte o livro de referência [5].

Exemplo 2: Seja f(X, Y) o conjunto das funções $f: X \to Y$. Se card X = m e o card Y = n, então o card f(X, Y) = n^m. De fato, considere $X = X' \cup \{a\}$, $a \notin X'$, então para cada função $f': X' \to Y$ há n maneiras de estendê-la a uma função $f: X \to Y$, já que o card Y = n. Assim, note que o card f(X, Y) = card f(X', Y)·n. Sendo assim, provaremos o resultado por indução sobre m. Se m = 1, temos que o card X = 1 e como $X = X' \cup \{a\}$, $a \notin X'$, então X' = ∅, isto é, card X' = 0. Logo, o card f(X, Y) = n. Agora se m = 2 tem-se que o card X' = 1, ou seja, X' = {b}. Desse modo, obtemos o card f(X, Y) = card f(X', Y)·n = n · n = n^2. Suponhamos por indução que para algum $m \in \mathbb{N}$, vale que o card f(X, Y) = n^m, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, seja card X = m + 1 o que acarreta card X' = m e card {a} = 1. Pela hipótese de indução sabemos que card f(X, Y) = card f(X', Y)·n, segue-se que o card f(X, Y) = card f(X', Y)·n = $n^m \cdot n = n^{m+1}$. Portanto, pelo princípio de indução se o card X = m e o card Y = n, então o card f(X, Y) = n^m.

No primeiro ano do Ensino Médio, os alunos reveem que conjuntos finitos são conjuntos que contêm um número finito de elementos. No entanto, há de se convir que a definição apresentada acima não oferece risco algum de não entendimento por parte dos mesmos, uma vez que eles têm acesso às noções básicas de funções - e isso inclui o conceito de bijeção - no nono ano do Ensino Fundamental. Para que não reste dúvidas, podemos ilustrar a definição acima com o conjunto V das vogais. Vejamos que existe uma bijeção φ de J_5 sobre V. Com efeito, basta definir $\varphi: J_5 \to V$ pondo $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = e$, $\varphi(3) = i$, $\varphi(4) = o$, $\varphi(5) = u$. Logo V é finito e tem 5 elementos.

2.3.4 Conjuntos infinitos

"A noção de infinito, de que é preciso se fazer um mistério em Matemática, resume-se no seguinte princípio: depois de cada número inteiro existe sempre um outro."

J. Tannery

Definição 6: Um conjunto é dito infinito quando não é finito. Portanto, X é infinito quando não é vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f: J_n \to X$.

Teorema 3: Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f: \mathbb{N} \to X$.

Demonstração: Para cada subconjunto $A \subset X$ e $A \neq \varnothing$, escolhemos $x_A \in A$. Agora, definamos $f: \mathbb{N} \to X$ indutivamente, ponto $f(1) = x_X$, supondo já definidos f(2), f(3), ..., f(n). Escreva $A_n = X - \{f(1), f(2), ..., f(n)\}$, note que $A_n \neq \varnothing$, pois X é infinito. Escolha $x_{A_n} \in A_n$ e ponha $f(n+1) = x_{A_n}$. Vamos mostrar que f é injetiva. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que m ≠ n, digamos que m < n. Então $f(m) \in \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$ enquanto que $f(n) \in X - \{f(1), f(2), ..., f(n-1)\}$. Logo, $f(m) \neq f(n)$ e, consequentemente f é injetiva.

Corolário 1: Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $g: X \to Y$ sobre um subconjunto próprio $Y \subsetneq X$.

Demonstração: Com efeito, se o conjunto X é infinito. Então o Teorema 3, garante que existe uma função $f: \mathbb{N} \to X$ injetiva. Escreva, para cada $n \in \mathbb{N}$, f(n) = x_n. Considere o subconjunto $Y = X - \{x_1\}$ (próprio) de X e defina $g: X \to Y$, pondo g(x) = x, se x não for um dos x_n e $g(x_n) = x_{n+1}$, com $n \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, se existir uma bijeção de X em uma parte própria sua, então X não é finito. Logo o conjunto X é infinito.

Exemplo 3: O conjunto dos números primos é infinito. Suponhamos por absurdo que o conjunto P dos números primos é finito, isto é, P = $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_k\} \subset \mathbb{N}$. Tome $p = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n) + 1 \in \mathbb{N}$, assim $p_i < p$ para todo i = 1, 2, 3, ..., k, ou seja, $p \notin P$. Note que se p_i divide p para algum i = 1, ..., k, então p_i divide 1 e então $p_i = 1$. Uma contradição, pois $p_i \neq 1$ para todo i = 1, ..., k. Portanto, P é infinito.

2.3.5 Conjuntos enumeráveis

O primeiro conjunto infinito com que nos familiarizamos é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a $\mathbb{N}$.

Um dos primeiros fatos surpreendentes que surge na consideração de conjuntos infinitos diz respeito à possibilidade de haver equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto próprio. Por exemplo, a correspondência $n \to 2n$, que ao 1 faz corresponder 2, ao 2 faz corresponder 4, ao 3 faz corresponder 6, etc., estabelece equivalência entre o conjunto elos números naturais e o conjunto dos números pares positivos. Veja: o conjunto dos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto $\mathbb{N}$; no entanto, tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$, ou seja, o mesmo número de elementos. Este fenômeno é uma peculiaridade dos conjuntos infinitos e em nada contradiz o que já sabemos sobre conjuntos finitos.

Definição 7: Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f:\mathbb{N}\to X.$ Neste caso, f chama-se uma enumeração dos elementos de X. Escrevendo f(1) = x_1, f(2) = x_2, ..., f(n) = x_n, ... tem-se então X = {x_1, x_2, ..., x_n, ...}.

Teorema 4: Todo subconjunto $X\subset\mathbb{N}$ é enumerável.

Demonstração: Se X for finito o teorema está provado. Se X for infinito definamos intuitivamente $f:\mathbb{N}\to X$, pondo f(1) = menor elemento de X e suponha definimos f(1), f(2), ..., f(n), de modo que f(1) < f(2) < ... < f(n). Escrevendo $A_n = X-\{f(1), f(2),..., f(n)\}$, tem-se f(n) < x, para todo $x\in A_n.$ Tomemos f(n + 1) = menor elemento de A_n ($A_n \neq \varnothing,$ pois X é infinito). Note que f é injetiva. Com efeito, dados $n_1, n_2 \in\mathbb{N}$ tais que $n_1 \neq n_2$. Se $n_1 < n_2$, então pela definição de f tem-se $f(n_1) < f(n_2)$, o que implica $f(n_1) \neq f(n_2)$. O resultado é análogo para $n_2 < n_1$. Veja também que f é sobrejetiva, caso contrário existiria algum $x\in X-f(\mathbb{N}),$ sendo assim $x\in A_n,$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Então o conjunto infinito $f(\mathbb{N})\subset\mathbb{N}$ seria limitado. O que é absurdo, pois ser limitado implica ser finito. □

Corolário 2: Seja $f:X\to Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é.

Corolário 3: $f:X\to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é.

Caso o aluno desejar verificar as demonstrações dos corolários 2 e 3, consulte o livro de referência [5].

Exemplo 4: Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Com efeito, sejam X um conjunto enumerável e $Y\subset X.$ Se Y = X então Y é enumerável. Analisemos agora para Y ≠ X. Se X for finito, tem-se Y finito e consequentemente enumerável. Caso contrário (X infinito), então Y é finito ou infinito. No primeiro caso temos que Y é enumerável. No segundo caso, como Y é subconjunto próprio de X existe uma aplicação $g:X\to Y$ bijetiva e como X é enumerável existe uma função bijetiva $f:\mathbb{N}\to X$, logo a aplicação $h=g\circ f:\mathbb{N}\to Y$ é bijetiva. Portanto, o subconjunto Y é enumerável.

2.3.6 Conjuntos não enumeráveis

Como já vimos um pouco atrás, que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável. Isto poderia até sugerir que todos os conjuntos infinitos fossem enumeráveis, como de fato se acreditava fosse verdade. Em 1874 Cantor surpreendeu o mundo matemático com uma de suas primeiras descobertas importantes sobre conjuntos, a de que o conjunto dos números reais não é enumerável, ou seja, tem cardinalidade diferente da do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

De início, veremos através de um argumento simples devido a Cantor, que existem conjuntos não enumeráveis. Mais geralmente, mostraremos que, dado qualquer conjunto X, existe sempre um conjunto cujo número cardinal é maior do que o de X.

Aqui não colocaremos a definição do que seja um número cardinal de um número. Mas, diremos que dois conjuntos X e Y têm o mesmo cardinal , e escrevemos da seguinte forma

$$\text{card}(X) = \text{card}(Y)$$

para significar que existe uma bijeção $f: X \to Y$.

Assim, dois conjuntos finitos têm o mesmo número cardinal se, e somente se, possuem o mesmo número de elementos. Se X for infinito enumerável, tem-se card(X) = card(Y) se, e somente se, Y for infinito enumerável.

Dados os conjuntos X e Y diremos que card(X) < card(Y) quando existir uma função injetiva $f: X \to Y$ mas não existir uma função sobrejetiva $f: X \to Y$.

Lembramos que, dados dois conjunto X, Y, o símbolo F(X; Y) representa o conjunto de todas as funções $f: X \to Y$.

Teorema 5: (Cantor) Sejam X um conjunto arbitrário e Y um conjunto função contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $\varphi: X \to F(X; Y)$ é sobrejetiva.

Demonstração: Dada $\varphi: X \to F(X; Y)$, indicaremos com φ_x o valor de φ no ponto $x \in X$. Assim, φ_x é uma função de X em Y. Construiremos agora uma $f \in F(X; Y)$ tal que $\varphi_x \neq f$ para todo $x \in X$. Isto é feito escolhendo, para cada $x \in X$, um elemento $f(x) \in Y$, diferente de $\varphi_x(x)$.Como Y contém pelo menos dois elementos, isto é possível. A função $f: X \to Y$ assim obtida é tal que $f(x) = \varphi_x(x)$ e, portanto, $f \neq \varphi_x$, para todo $x \in X$. Logo $f \notin \varphi(X)$ e, por conseguinte, φ não é sobrejetiva.

Corolário 4: Sejam $X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...$conjuntos infinitos enumeráveis. O produto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ não é enumerável.

Basta considerar o caso em que todos os X_n são iguais a $\mathbb{N}$. Neste caso, $\prod X_n = F(\mathbb{N}; \mathbb{N})$, que não é enumerável, pelo Teorema 5.

O argumento usado na demonstração do Teorema 5 chama-se “método da diagonal, de Cantor”. Este nome deve-se ao caso particular em que $X = \mathbb{N}$. Os elementos de $F(\mathbb{N}; Y)$ são sequências de elementos de Y. Para provar que nenhuma função $\varphi: \mathbb{N} \to F(\mathbb{N}; Y)$ é sobrejetiva, escrevemos $\varphi(1) = s_1$, $\varphi(2) = s_2, ...,$ etc., onde s_1, s_2, ... são sequências de elementos de Y. Logo

$$s_1 = (y_{11}, y_{12}, y_{13}, ...)$$
$$s_2 = (y_{21}, y_{22}, y_{23}, ...)$$
$$s_3 = (y_{31}, y_{32}, y_{33}, ...)$$
$$..............................$$

Em seguida, formamos uma nova sequência s = (y_1, y_2, y_3, ...) de elementos de Y simplesmente escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $y_n \in Y$ diferente do n-ésimo termo da diagonal: $y_n \neq y_{nn}$. A sequência s não pertence à lista das sequências s_n (pois o n-ésimo termo de s é diferente do n-ésimo termo de s_n). Assim, nenhuma lista enumerável pode esgotar todas as funções em $F(\mathbb{N}; Y)$.

Como caso particular desse teorema, consideremos o conjunto de todas as listas infinitas (enumeráveis), que se podem formar utilizando apenas os algarismos 0 e 1, como por exemplo,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & ... \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & ... \end{array}$$

O conjunto de todas essas listas de zeros e uns não é enumerável.

Seja P(A) o conjunto das partes de um conjunto dado A. Considerando o conjunto de dois elementos {0, 1}, veremos agora que existe uma bijeção:

$$\phi: P(A) \to F(A; \{0, 1\}).$$

A cada X $\in$ P(A), isto é, a cada subconjunto X $\subset$ A, associamos a função $\phi_x: A \to \{0, 1\}$ chamada a função característica do conjunto X: tem-se $\phi_x(x) = 1$ se x $\in$ X e $\phi_x(x) = 0$ se $x \notin X$.

A correspondência $X \to \phi_x$ é uma bijeção de P(A) sobre F(A; {0, 1}). Sua inversa associa a cada função f: A $\to$ {0 ,1} o conjunto X dos pontos x $\in$X tais que f(x) = 1.

Como {0, 1} tem dois elementos, segue-se do teorema 5 que nenhuma função $\varphi: A \to F(A; \{0, 1\})$ é sobrejetiva. Consequentemente, nenhuma função $\omega: A \to P(A)$ é sobrejetiva. (Se fosse, $\varphi = \phi \circ \omega: A \to F(A; \{0, 1\})$ também seria sobrejetiva).

Mas existe uma função injetiva evidente f: A $\to$ P(A), definida por f(x) = {x}. Concluímos então que card(A) < card[P(A)], para todo conjunto A.

Outra maneira de provar isso trabalharemos com os números do intervalo [0, 1), que tem a mesma cardinalidade da reta toda (Vamos aprofundar no capítulo 3). Usaremos a representação decimal. Observamos que alguns números têm mais de uma representação, como 0,4 e 0,3999 ... Para que isto não aconteça, adotaremos, para cada número, sua representação decimal infinita. Assim,

$$0{,}437 = 0{,}436999...; \qquad 0{,}052 = 0{,}051999...; \quad \text{etc.}$$

E com esse procedimento cada número terá uma única representação decimal infinita. Suponhamos que fosse possível estabelecer uma correspondência biunívoca dos números do intervalo [0, 1) com os números naturais. Isto é o mesmo que supor que os números desse intervalo sejam os elementos de uma sequência x_1, x_2, x_3, ... Escritos em suas representações decimais, esses números seriam, digamos,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n} \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n} \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n} \\ &\vdots \\ x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn} \\ &\vdots \end{aligned}$$

onde os a_{ij} são algarismos de zero a $9\left(0 \leq a_{ij} \leq 9\right)$.

O último passo, que nos levará a uma contradição, consiste em produzir um número do intervalo [0, 1) que não esteja nessa lista. Isto é feito pelo chamado processo diagonal de Cantor, usado em minutas outras situações. Construímos um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa, diferente de x_3 na terceira casa, e assim por diante, de sorte que esse número não coincidirá com nenhum dos números da lista acima. Para termos uma regra específica, seja $x = 0{,}a_1a_2a_3...$ o número desejado, onde $a_i = 6$ se $a_{ii} = 5$ e $a_i = 5$ se $a_{ii} \neq 5$. Como esse número x não está na lista acima, chegamos a um absurdo, o que nos leva a concluir que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Outra maneira que permite demonstrar de que o conjunto dos números reais não é enumerável, é usando raciocínio por absurdo, suponhamos que todos os números reais estivessem contidos numa sequência (x_n). Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo que não contenha x_1. Em seguida tomamos um intervalo $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$, que não contenha x_2; depois um intervalo $I_3 = [a_3, b_3] \subset I_2$, que não contém x_3; e assim por diante. Dessa maneira obtemos uma sequência (I_n) de intervalos fechados e encaixados, tal que $\bigcap I_n$ conterá ao menos um número real c. Isso contradiz a hipótese inicial de que todos os números reais estão na sequência (x_n), visto que

$x_n \notin \bigcap I_n$. Somos, pois, forçados a abandonar a hipótese inicial e concluir que o conjunto dos números reais não é enumerável.

3 CONJUNTOS DE CANTOR

Neste capítulo, apresentaremos o conjunto de Cantor, também denominado conjunto de Cantor dos terços médios, com a clássica construção de retiradas de terços médios abertos, iniciada no intervalo fechado [0; 1].

Em virtude dos pré-requisitos necessários para o entendimento da construção do conjunto de Cantor e das suas propriedades, dedicamos este capítulo aos alunos do Ensino Médio.

As principais referências para este capítulo são [2], [4] e [5].

3.1 Preliminares

Nesta seção, exporemos, de forma sucinta, conceitos e fatos de Análise Real, utilizando uma linguagem acessível aos alunos do Ensino Médio.

Com o intuito de exibir, superficialmente, o conjunto dos números reais, apresentaremos a definição de corpo ao aluno do Ensino Médio, no que segue.

Um corpo é um conjunto $\mathbb{k}$ munido de duas operações:

$$\textbf{Adição}: + : \mathbb{k}\times\mathbb{k} \to \mathbb{k}$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$\textbf{Multiplicação}: \cdot : \mathbb{k}\times\mathbb{k} \to \mathbb{k}$$
$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

Os axiomas de corpo são os seguintes:

A. Axiomas da adição:

A1: Associatividade: (x + y) + z = x + (y + z), para $x, y, z \in \mathbb{k}$;

A2: Comutatividade: x + y = y + x, para $x, y \in \mathbb{k}$;

A3: Elemento neutro: existe $0 \in \mathbb{k}$ tal que x + 0 = x, seja qual for $x \in \mathbb{k}$. O elemento

0 chama-se zero.

A4: Simétrico: todo elemento $x \in \Bbbk$ possui um simétrico $(-x) \in \Bbbk$, tal que $x + (-x) = 0$.

A soma $x + (-y)$ será indicada com a notação $x - y$ e chamada a diferença entre x e y. A operação $(x, y) \mapsto x - y$ chama-se subtração.

M. Axiomas da multiplicação:

M1: Associatividade: $x \cdot y = y \cdot x$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, para $x, y, z \in \Bbbk$;

M2: Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$, para $x, y \in \Bbbk$;

M3: Elemento neutro: existe $1 \in \Bbbk$ tal que $x \cdot 1 = x$, seja qual for $x \in \Bbbk$. O elemento 1 chama-se um.

M4: Inverso multiplicativo: todo elemento $x \in \Bbbk$ tal que $x \neq 0$ possui um inverso x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Dados $x, y \in \Bbbk$, com $y \neq 0$, escreve-se também $\frac{x}{y}$ em vez de $x \cdot y^{-1}$. A operação $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ definida para x qualquer e $y \neq 0$ em $\Bbbk$ chama-se divisão.

Por fim, as operações de adição e multiplicação num corpo $\Bbbk$ acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de corpo.

D1: Axioma da distributividade: dados x, y, z quaisquer em $\Bbbk$, tem-se $x \cdot (y + z) = xy + xz$.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo com as operações $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{p \cdot q' + p' \cdot q}{q \cdot q'}$ e $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{p \cdot p'}{q \cdot q'}$.

Um corpo ordenado é um corpo $\Bbbk$ no qual existe um subconjunto $P \subset \mathbb{Z}$, chamado o conjunto dos elementos positivos de $\Bbbk$, com as seguintes propriedades:

P1. A soma e o produto de elementos positivos são elementos positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$;

P2. Dado $x \in \Bbbk$, ocorre somente uma das alternativas seguintes:

ou $x = 0$, $x \in P$, ou $-x \in P$.

Assim sendo, $-P = \{x \in \Bbbk \mid -x \in P\}$, onde P, $-$ P e $\{0\}$ são subconjuntos de $\Bbbk$ disjuntos dois a dois. Os elementos de $-$ P são chamados (denominados) de negativos.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado no qual $P = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \right\}$.

Num corpo ordenado $\mathbb{k}$, escreve-se x < y e diz-se que x é menor do que y quando y – x ∈ P. Neste caso, escreve-se também y > x e diz-se que y é maior do que x. A notação x $\leq$ y é usada para indicar que uma das alternativas ocorre: ou y – x ∈ P, ou y – x = 0. Neste caso, diz-se que x é menor do que ou igual a y ou que y é maior do que ou igual a x.

Num corpo ordenado, existe a importante noção de intervalo.

• **Intervalo limitado**: Dados $a, b \in \mathbb{k}$, a < b, definimos os intervalos limitados de extremos a e b como sendo os conjuntos.

▹ Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{k} \mid a \leq x \leq b\}$;

▹ Intervalo fechado à direita: $(a, b] = \{x \in \mathbb{k} \mid a < x \leq b\}$;

▹ Intervalo fechado à esquerda: $[a, b) = \{x \in \mathbb{k} \mid a \leq x < b\}$;

▹ Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{k} \mid a < x < b\}$.

Dizemos que o comprimento de todos os intervalos acima é b – a.

• **Intervalos ilimitados:** Dado $a \in \mathbb{k}$, definimos os intervalos ilimitados de origem b como sendo os conjuntos.

▹ Semirreta esquerda fechada de origem b: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{k} \mid x \leq b\}$;

▹ Semirreta direita fechada de origem b: $[b, +\infty) = \{x \in \mathbb{k} \mid x \geq b\}$;

▹ Semirreta direita aberta de origem b: $(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{k} \mid x > b\}$;

▹ Semirreta esquerda aberta de origem a: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{k} \mid x < b\}$.

Num corpo ordenado $\mathbb{k}$, definimos o valor absoluto de um elemento x, como sendo x, se $x \geq 0$ e –x se x < 0. Usamos o símbolo |x| para indicar o valor absoluto de x. Portanto, dado $x \in \mathbb{k}$, tem-se

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Vejamos, pois, que |x| é o maior dos elementos x e –x. Poderíamos então definir

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Para o aluno do Ensino Médio deixamos o exercício de verificar o resultado abaixo: “Dados $a, x, b \in \mathbb{k}$, tem-se $|x - a| \leq b$ se, e somente se, $a - b \leq x \leq a + b$.”

Um subconjunto X de um corpo ordenado $\mathbb{k}$ é dito limitado superiormente quando existe $b \in \mathbb{k}$ tal que $b \geq x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, tem-se $X \subset (-\infty, b]$. Cada $b \in \mathbb{k}$ com esta propriedade chama-se uma cota superior de X.

Um subconjunto X de um corpo ordenado K é dito limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{k}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Em outras palavras, tem-se $X \subset [a, +\infty)$. Cada $a \in \mathbb{k}$ com esta propriedade chama-se uma cota inferior de X.

Um subconjunto X de um corpo ordenado K é dito limitado quando é limitado inferior e superiormente, isto é, quando existem $a, b \in \mathbb{k}$ tais que $X \subset [a, b]$.

Um elemento $b \in \mathbb{k}$ é dito supremo do subconjunto X quando b é a **menor** das cotas superiores de X em $\mathbb{k}$.

Um elemento $a \in \mathbb{k}$ é dito ínfimo do subconjunto X quando a é a **maior** das cotas inferiores de X em $\mathbb{k}$.

Um corpo ordenado $\mathbb{k}$ é dito completo quando todo subconjunto $x \in \mathbb{k}$ não-vazio e limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{k}$.

Adotaremos, neste momento, um axioma fundamental.

Axioma. Existe um corpo ordenado completo chamado o corpo dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$.

No que segue, listaremos, literalmente, algumas definições e resultados que serão imprescindíveis para a exibição das surpreendentes propriedades do conjunto de Cantor. Cabe ressaltar que não pretendemos ser rigorosos no tratamento de tais preliminares, visto que o texto está direcionado aos alunos do Ensino Médio. O leitor-professor pode consultar [5] para um estudo mais aprofundado.

Definição 8: Uma sequência é uma lista ordenada de números reais; os elementos de uma sequência são indexados por números naturais. Mais precisamente, uma sequência de números reais é uma função $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real a(n). O valor a(n), para todo $n \in \mathbb{N}$, é representado por a_n e denominado n-ésimo termo da sequência.

Escreveremos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (a_n), para indicar a sequência a.

Definição 9: Se dado um número real positivo qualquer ε, existir um índice da sequência (a_n) a partir do qual, a distância entre quaisquer dois termos de (a_n) é menor do que ε, a sequência (a_n) será dita sequência de Cauchy.

O que queremos dizer com a distância entre quaisquer dois termos da sequência na definição acima? A distância entre dois pontos reais é dada pela função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $d(x, y) = |x - y|$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Para entender melhor a definição anterior, pense que uma sequência é de Cauchy quando, a partir de um índice n, todos os termos da sequência ficam bem próximos.

Dado um número real L, entende-se por vizinhança de L qualquer intervalo aberto $(a, b) \in \mathbb{R}$ tal que $L \in (a, b)$.

Definição 10: Sejam L um número real e (a_n) uma sequência de números reais. Se para cada vizinhança de L existir um índice da sequência (a_n) a partir do qual, todos os termos de (a_n) estão contidos na vizinhança dada, o número L será dito limite da sequência (a_n). Neste caso, dizemos que (a_n) converge para L e usamos as possíveis notações: $a_n \to L$ ou $\lim a_n = L$. Quando uma sequência de números reais converge para algum número real L, dizemos que ela é convergente.

Teorema 5: Para que uma sequência de números reais (a_n) seja convergente é necessário e suficiente que (a_n) seja uma sequência de Cauchy.

Informamos que o teorema acima é uma forma equivalente de dizer que R é um corpo ordenado completo.

Se tentarmos somar os termos de uma sequência de números reais (a_n), obteremos uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2.1)$$

Definição 11: A expressão (2.1) é denominada série infinita ou simplesmente série de termo geral a_n.

Representamos uma série também por $\sum a_n$.

Qual é o significado da soma infinita (2.1)? Não faz sentido somar convencionalmente infinitos termos; a fundamentação teórica para tornar aceitável uma soma infinita é o conceito de limite de uma sequência, apresentado acima.

Vamos considerar a sequência formada pelas somas parciais ou reduzidas, que é definida da seguinte forma:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = S_2 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Estas somas parciais formam uma nova sequência, denotada por (s_n), que pode ou não convergir.

Se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n,$$

a série $\sum a_n$ será convergente e o limite s será denominado soma da série, ou seja, $s = \sum a_n$.

Teorema 6: Se $\sum a_n$ for uma série convergente, então lim $a_n = 0$.

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ a n-ésima soma parcial da série $\sum a_n$. Por hipótese, existe $\lim s_n$. Digamos que $\lim s_n = s$. É claro que também devemos ter $\lim s_{n-1} = s$ uma vez que a convergência de uma sequência não é afetada quando retiramos um número finito de termos dela. Portanto,

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

Exemplo 5: Uma série particularmente importante é a série geométrica, também conhecida como soma infinita de uma progressão geométrica[2], definida por

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},\ a \neq 0$$

Observe que cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por um número real r, chamado de razão. Se $|r| \geq 1$, o termo geral s_n não convergirá para 0 e, assim, a série geométrica divergirá (veja Teorema 2.2). Agora, note que:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1}$$

Multiplicando ambos os lados por r, temos que:

[2] Uma sequência de números (an) é chamada de progressão geométrica (ou simplesmente PG) quando cada termo, a partir do segundo, é obtido pelo produto do anterior com uma constante $r \in \mathbb{R}$. Simbolicamente, uma PG é caracterizada pela relação

$$a_{n+1} = a_n \cdot r,\ n \geq 1 \qquad (*)$$

A nomenclatura "progressão geométrica" para sequências que satisfazem (*) se justifica, pois, em todas estas sequências, cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre seu antecessor e seu sucessor.

$$r \cdot s_n = r \cdot (a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1})$$
$$r \cdot s_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, encontramos $s_n - r \cdot s_n = a - a \cdot r^n$, de onde obtemos a igualdade

$$s_n(1-r) = a(1-r^n) \Rightarrow s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Se $-1 < r < 1$ então $\lim r^n = 0$; assim $\lim S_n = \lim\left(\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}$. Então, $|r| < 1$, a série geométrica convergirá e sua soma será $\frac{a}{1-r}$.

Para futuras referências, vamos considerar o que foi constatado no exemplo acima como um teorema:

Teorema 7: A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, $a \neq 0$, será divergente se $|r| < 1$ e sua soma será

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}.$$

Se $|r| \geq 1$, a série geométrica será divergente.

Exemplo 6: Encontre a soma da série geométrica $S = 5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ...$.

Observe que o primeiro termo $a_1 = 5$ e a razão comum é $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente e sua soma é

$$S = 5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + ... = \frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3.$$

3.2 Definição do Conjunto de Cantor

Começamos com o segmento que representa o intervalo fechado [0,1]. Dividimos este segmento em três partes e jogamos fora o pedaço do meio, ficando com os outros dois terços extremos. Repetimos depois o mesmo procedimento com cada um dos segmentos restantes, sempre jogando fora o terço médio de cada divisão. Os quatro segmentos restantes sofrerão o mesmo processo de divisão e retirada do terço médio, dando origem a oito segmentos cada vez menores.

Este processo deve ser repetido eternamente ("ad infinitum"), sempre dividindo cada segmento restante por três e dispensando o terço médio de cada divisão. O que sobra no limite é o Conjunto Ternário de Cantor. Se examinarmos quais os pontos que restam após o processo infinito de construção do conjunto, observamos que os pontos extremos dos diversos segmentos, obtidos em qualquer etapa da construção do Conjunto de Cantor, estarão sempre presentes até o fim.

Para construímos o conjunto de Cantor, consideremos o intervalo I = [0, 1] da reta real. No primeiro passo, trisseccionamos o intervalo I nos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ e, em seguida, removemos seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Denotemos por J_1 o conjunto dos pontos restantes de I, isto é

$$J_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

No segundo passo, trisseccionamos cada um dos dois intervalos fechados de J_1, nos pontos $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$ e removemos os terços médios abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ desses intervalos fechados. Denotamos então por J_2 o conjunto formado pelos pontos restantes de J_1, isto é,

$$J_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Repetindo este processo, no terceiro passo, obtemos o conjunto

$$J_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

A figura a seguir representa os três primeiros passos da construção.

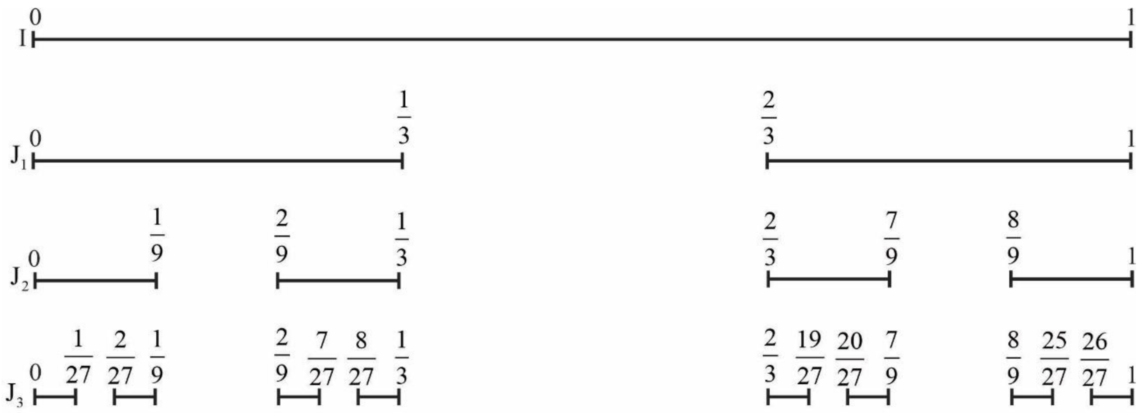


Figura 2: A construção do conjunto J

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma sequência de conjuntos:

$$J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n, \ldots$$

tais que

$$I \supset J_1 \supset J_2 \supset J_3 \ldots \supset J_{n-1} \supset J_n \ldots$$

em que J_n é construído de pontos do conjunto J_{n-1} excluídos os terços abertos.

Observemos que cada J_n consiste em 2^n intervalos fechados e disjuntos dois a dois. O Conjunto de Cantor é o que resta após aplicarmos esse procedimento para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é

Definição 3.3 O conjunto de Cantor J é a interação dos conjuntos J_n, obtemos através da remoção sucessiva dos terços médios abertos do intervalo I = [0 , 1], ou seja, $J = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$

.

À primeira vista, pode parecer que J é o conjunto vazio, mas isto não acontece, pois os pontos 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e 1 permanecem em todos os conjuntos J_n, estando assim no conjunto de Cantor.

Uma caracterização útil e interessante para os elementos de J segue do teorema abaixo:

Teorema 3.3 Os elementos do conjunto de Cantor possuem expansão ternária (base 3) usando os dígitos 0 e 2, isto é,

$$J = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \text{ para } i_n = 0 \text{ ou } i_n = 2 \right\}.$$

Antes de demonstrarmos esse teorema, vamos nos familiarizar com a representação de números reais em base ternária. Para tanto, dado $x \in [0, 1]$, representar x na base 3 significa escrever $x = (0, x_1x_2x_3, ..., x_n...)_3$, em que cada um dos dígitos x_n é igual a 0, 1 ou 2, de tal modo que

$$x = \frac{x_1}{3^1} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + ... + \frac{x_n}{3^n} + ...$$

Façamos então alguns exemplos:

Exemplo 7: O ponto $\frac{1}{3}$ tem expansão ternária igual a 0, 1, ou seja, $\frac{1}{3} = (0{,}1)_3$.

De fato, podemos escrever:

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + ...$, donde inferimos que $\frac{1}{3} = (0{,}1)_3$.

Exemplo 8: O ponto $\frac{17}{27}$ tem expansão ternária igual a 0, 1, 2, 2, ou seja, $\frac{17}{27} = (0{,}122)_3$.

A fim de mostrarmos essa igualdade, basta percebemos que:

$\frac{17}{27} = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{0}{3^5} + ...$, donde inferimos que $\frac{17}{27} = (0{,}122)_3$.

Os exemplos 7 e 8 ilustram a Proposição 3.3 a seguir:

Proposição 3.3 A representação de uma fração irredutível na base 3 é finita se, e somente se, o denominador é uma potência de 3.

Demonstração: Sejam $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ tais que a fração $\frac{p}{q}$ esteja na forma irredutível.

Suponhamos que $\frac{p}{q}$ possui representação ternária finita. Consequentemente, ela pode ser escrita como:

$$\frac{a_n}{3^n} + \frac{a_{n-1}}{3^{n-1}} + ... + \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_0}{3^0},$$

em que os $a_{i's}$ são 0, 1 ou 2.

Colocando $\frac{1}{3^n}$ em evidência, ficamos com:

$$\frac{1}{3^n}\left(a_n + a_{n-1} \cdot 3 + a_{n-2} \cdot 3^2 + ... + a_1 \cdot 3^{n-1} + a_0 \cdot 3^n\right).$$

Como a fração acima está em sua forma irredutível, o fator entre parênteses é a representação de p na base 3.

Portanto, o denominador q é uma potência de 3.

Por outro lado, suponhamos que $q = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$. A representação de p na base 3 é da seguinte forma:

$$p = a_m 3^m + a_{m-1} 3^{m-1} + \dots + a_1 3^1 + a_0,$$

com m < n, pois $\frac{p}{q} < 1$.

Então:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{a_m \cdot 3^m + a_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 3^1 + a_0}{3^n} \\ &= a_m \cdot 3^{m-n} + a_{m-1} \cdot 3^{m-n-1} + \dots + a_1 \cdot 3^{1-n} + a_0 \cdot 3^{-n}. \end{aligned}$$

Como m < n, temos m – n < 0. Logo, $\frac{p}{q}$ possui representação ternária finita se q for uma potência de 3.

Abaixo, apresentamos a Proposição 3.4, que segue como consequência da 3.3.

Proposição 3.4 Um número racional possui representação infinita e periódica na base 3 se, e somente se, é da forma $\frac{p}{q}$, sendo q não é uma potência de 3.

Verificaremos o uso da Proposição 3.4 nos exemplos a seguir.

Exemplo 9: $\frac{1}{4} = (0{,}0202020202\dots)_3$

Atentemos para o fato de que $\frac{1}{4}$ é uma fração irredutível, cujo denominador não pode ser escrito como uma potência de 3. Com base na Proposição 3.4 inferimos que $\frac{1}{4}$ possui representação ternária infinita e periódica. Vamos constatar essa afirmação.

Na reta, iremos nos aproximar pela esquerda da fração $\frac{1}{4}$. De imediato, notemos que $\frac{2}{3^2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3^1}$. Consequentemente, $\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + k_1$, onde $k_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$.

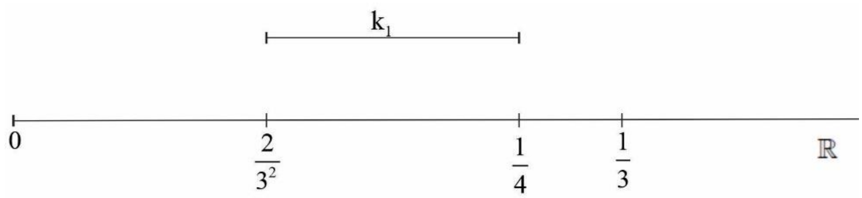


Figura 2.1: Primeira tentativa de aproximação para $\frac{1}{4}$.

Observemos agora que $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} < \frac{1}{36} < \frac{2}{81} = \frac{2}{3^4}$, o que nos dá:

$\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + k_2$, em que $k_2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3^4} = \frac{73}{324}$.

Esta segunda tentativa de aproximação para $\frac{1}{4}$ é apresentada na figura 2.2:

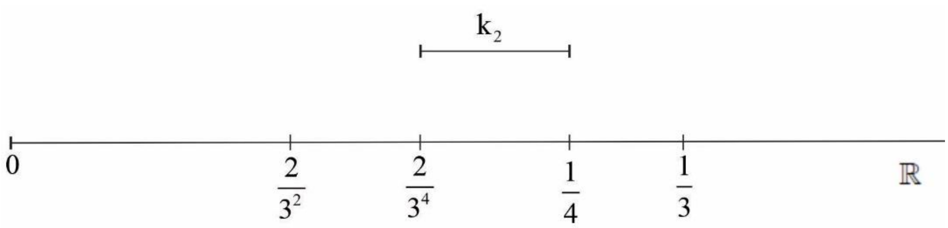


Figura 2.2: Segunda tentativa de aproximação para $\frac{1}{4}$.

Com base na nossa constatação (por aproximações sucessivas para $\frac{1}{4}$), formulamos a seguinte afirmação:

Afirmação: $\frac{1}{4} = \frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots$, isto é, $\frac{1}{4} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \ldots + \frac{2}{3^{2n}} + \ldots$.

Observemos que o membro da direita representa uma série geométrica infinita de primeiro termo $a = \frac{2}{3^2}$ e razão $r = \dfrac{\frac{2}{3^{2(n+1)}}}{\frac{2}{3^{2n}}} = \frac{1}{9}$.

Sabemos que esta série geométrica corresponde a soma infinita da P.G., ou seja:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{3^2}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3^2}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, $\frac{1}{4} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \ldots + \frac{2}{3^{2n}} + \ldots$, ou seja, $\frac{1}{4} = (0,0202022\ldots)_3$.

Proposição 3.5 Um número é irracional se, e somente se, possui representação infinita e não periódica na base 3.

Demonstração: Os números irracionais não podem ter representação ternária finita, pois teriam se, e somente se, fossem da forma $\frac{p}{q}$ com o denominador uma potência de 3, o que acarretaria na racionalidade destes números. E isto não acontece, uma vez que um número irracional não pode ser escrito na forma: $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Estes números também não podem ter uma representação infinita e periódica, pois teriam se, e somente se, fossem da forma $\frac{p}{q}$, cujo denominador não é uma potência de 3.

Logo, os números irracionais possuem uma representação infinita e não periódica. Reciprocamente, seja x um número com representação infinita e não periódica na base 3. Suponhamos, por absurdo, que x seja um número racional, digamos $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Podemos, então, considerar dois casos:

(i) q é uma potência de 3.

Neste caso, x teria representação finita. Mas, por hipótese, x possui representação infinita e não periódica. Segue que x não pode ser da forma $\frac{p}{q}$ com denominador uma potência de 3.

(ii) q não é uma potência de 3.

Aqui, x teria uma representação ternária infinita e periódica. Entretanto, por hipótese, essa afirmação leva-nos a uma contradição. Decorre daí que x não pode ser da forma $\frac{p}{q}$ com denominador um número diferente de uma potência de 3.

Assim, fica garantido que x não pode ser da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Portanto, x é um número irracional.

Passemos agora a demonstração do teorema 3.3:

Demonstração: (Teorema 3.3) No primeiro passo da construção do conjunto de Cantor, ao retirarmos o intervalo aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, excluímos os números $x \in [0, 1]$ cuja representação ternária, $x = (0, x_1x_2x_3...)_3$, tem $x_1 = 1$, com a única exceção de $\frac{1}{3} = (0, 1)_3$ que permanece. Observemos essa inferência na figura a seguir:

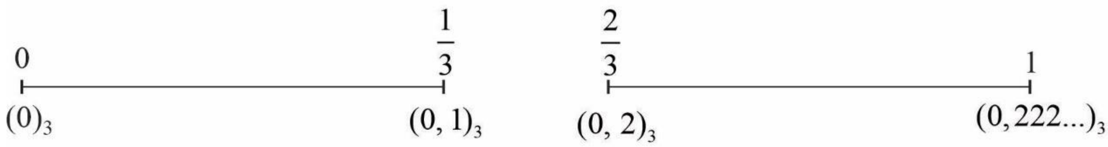


Figura 3: Remoção do intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

No segundo passo, excluímos os números reais dos intervalos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, ou seja, aqueles da forma $(0,01x_3x_4x_5...)_3$ ou da forma $(0,21x_3x_4x_5...)_3$ com exceção de $\frac{1}{9} = (0,01)_3$ e de $\frac{7}{9} = (0,21)_3$ que permanecem.

No terceiro passo, removemos os intervalos $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ e $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ que contém os números da seguinte forma: $(0,001x_4x_5...)_3$, $(0,021x_4x_5...)$, $(0,201x_4x_5...)_3$ e $(0,221x_4x_5...)_3$, com exceção de $\frac{1}{27} = (0,001)_3$, $\frac{7}{27} = (0,021)_3$, $\frac{19}{27} = (0,201)_3$ e $\frac{25}{27} = (0,221)_3$ que permanecem.

Esse processo continua indutivamente. De modo geral, fica garantido que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo I = [0, 1] cuja representação ternária $x = (0,x_1x_2x_3...)_3$ só contém os algarismos 0 e 2, com exceção daqueles que possuem um único algarismo igual a 1 como algarismo significativo final, como $\frac{25}{27} = (0,221)_3$, por exemplo. Mas, se observamos que $(0,221)_3 = (0,22022222...)_3$, poderemos sempre substituir o algarismo final 1 pela sequência 0,22222... . Com esta convenção (também usada em outras bases, como por exemplo, na base decimal), podemos afirmar, sem exceções, que os elementos do conjunto de Cantor são os números do intervalo I = [0, 1] cuja representação na base 3 só contém os algarismos 0 e 2.

4 O TEOREMA DE CANTOR-BERNSTEIN-SCHRÖEDER

Um dos fundadores da Teoria dos Conjuntos foi o alemão Georg Cantor (1845-1918). Neste texto, veremos que, segundo Cantor, dois conjuntos têm o mesmo número de elementos se existe uma bijeção entre eles. Caso isto ocorra, dizemos que os conjuntos são chamados equipotentes ou equivalentes ou, ainda, que têm a mesma cardinalidade. Cantor provou que a menor cardinalidade (ou menor número cardinal - denominado $\aleph_0$) possível para um conjunto infinito é a dos naturais. Neste caso, dizemos que o conjunto é enumerável (abordado na página 28; definição 7). Cantor demonstrou ainda que, dado um conjunto qualquer, é sempre possível construir outro conjunto 'maior' ainda, ou seja, cuja cardinalidade é maior que a do conjunto dado.

Veremos alguns exemplos de conjuntos enumeráveis e exemplos de conjuntos com a cardinalidade *c*, que é denominada cardinalidade potência do contínuo. Alguns textos na literatura, utilizam $c = \aleph_1$, seguindo a Hipótese do Contínuo enunciada por Cantor: Não existe conjunto A que tenha cardinalidade maior que $\aleph_0$ e menor que *c*. Na verdade, tal fato não pode ser "desprovado" e nem "provado", segundo os axiomas da Teoria dos Conjuntos tradicional (Zermelo-Fraenkel), com resultados obtidos por Kurt Gödel (1938) e Paul Cohen(1963), respectivamente.

Utilizaremos aqui fortemente, para obtenção dos resultados, o Teorema de Cantor Bernstein-Schröeder, assim chamado em homenagem a Georg Cantor, Felix Bernstein e Ernst Schröeder, que estabelece, para dois conjuntos A e B, o seguinte: se existem funções injetoras $f : A \to B$ e $g : B \to A$, então existe uma função bijetora $h: A \to B$. Em termos da cardinalidade dos dois conjuntos, isso significa que se a cardinalidade de A é menor que a de B e vice-versa, então os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. Essa é, obviamente, uma propriedade muito útil para a ordenação de números cardinais.

Demonstração do Teorema: para o que segue, vamos precisar das seguintes notações para um dado conjunto X:

1. Se $A \subset X$, então A' representa X – A, ou seja, o complementar de A em relação a X.
2. $\mathcal{P}(X)$ representa o conjunto das partes de X.
3. |X| indica a cardinalidade do conjunto X (card X). Dizemos ainda que |X| é o número cardinal de X.

Vejamos o enunciado do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder.

Teorema 4.1: (Cantor-Bernstein-Schröeder) Sejam conjuntos X e Y tais que existam funções injetivas $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$. Então $|X| = |Y|$, ou seja, X e Y são equipotentes.

Para a demonstração, precisaremos, antes, do seguinte lema:

Lema: Sejam os conjuntos X e Y tais que existam funções $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$. Então, existe um conjunto $D \subset X$ tal que $g(f(D)') = D'$.

Demonstração: consideremos a função $\mu: P(X) \to P(X)$ dada por $\mu(E) = g(f(E)')'$, $\forall E \subset X$. Esta função é claramente bem definida e também é uma função crescente em termos de inclusão de conjuntos, isto é:

$$E \subseteq F \text{ implica em } \mu(E) \subseteq \mu(F).$$

De fato: $E \subseteq F$ resulta em $f(E) \subseteq f(F)$, pois f é uma função. Tomando o complementar, temos $f(F)' \subseteq f(E)'$. Como g é função, $g(f(F)') \subseteq g(f(E)')$. Mais uma vez, tomando o complementar, resulta que $g(f(E)')' \subseteq g(f(F)')'$. Daí, obtemos que $\mu(E) \subseteq \mu(F)$. Vamos considerar uma família dada por $D = \{E \in P(X): E \subseteq \mu(E)\}$. Claro que $\emptyset \in D$. Seja $D = \cup \{E \subseteq X: E \in D\}$. Podemos observar que: $E \in D$ implica em $E \subseteq D$, por definição. Disto, segue diretamente que $E \subseteq \mu(E) \subseteq \mu(D)$ implica em $\cup \{E \subseteq X: E \in D\} \subset \mu(D)$, resultando ao final que $D \subset \mu(D)$. Portanto, $\mu(D) \subseteq \mu(\mu(D))$ e $\mu(D) \in D$. Disto, $\mu(D) \subset D$ e, obtemos $\mu(D) = D$. Assim, $\mu(D) = g(f(D)')'$ implica em $D = g(f(D)')'$. Tomando o complementar, resulta em $D' = (g(f(D)')')'$, ou ainda $D' = g(f(D)')$, concluindo o desejado.

Finalmente, a demonstração do Teorema:

Demonstração: (Teorema) Para provar o teorema basta mostrar que existe uma função $h: X \to Y$ sobrejetiva. Seja D o conjunto que existe pelo Lema. Vimos que $g(f(D)') = D'$. Logo, podemos considerar a inversa de g, g^{-1}, da seguinte maneira: $g^{-1}: D' \to f(D)'$. Note que não estamos afirmando que g é inversível como um todo, mas g^{-1} existe quando restrita a D' com contradomínio $f(D)'$. E é isto que utilizaremos a seguir. Considere o conjunto D do mesmo lema e a função $h: X \to Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in D' \end{cases}$$

Quando restrita a D ou a D', é claro que h é injetora, pois f e g^{-1} o são. Notemos ainda que, pelo Lema, h está bem definida, pois $D' \subset g(Y)$. Verifiquemos agora que h é, de fato, injetora. Suponhamos que existam $x \in D$ e $y \in D'$ tais que $h(x) = h(y)$, ou seja, $f(x) = g^{-1}(y)$. Pelo Lema, $D' = g(f(D)')$ implica em $y = g(z)$, para algum $z \in f(D)'$. Disto, $f(x) = g^{-1}(g(z)) = z \in f(D)$, pois $x \in D$, o que é um absurdo, fazendo com que h seja injetora. Provemos agora que h é sobrejetiva. Seja $y \in Y$. Assim, teremos duas possibilidades:

(i) Se $g(y) \in D$, pelo lema anterior, $g(y) \in g(f(D'))'$ implica em $g(y) \notin g(f(D)')$, obtendo $y \notin f(D)'$ e, ainda, $y \in f(D)$, ou seja, $y = f(x)$, para algum $x \in D$. Portanto, $y = h(x)$.

(ii) Se $g(y) \notin D$, então $g(y) = x \in D'$. Como $x \notin D$, $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(y)) = y$. Portanto, $y = h(x)$.

Logo, h é sobrejetiva.

Proporção: Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $P(\mathbb{N})$ são equipotentes (mesma cardinalidade).

Demonstração: Vamos mostrar que existem duas funções injetivas $\varphi: \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ e $f: P(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, temos que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, isto é, eles são equipotentes e, assim, os conjuntos $P(\mathbb{Q})$ e $P(\mathbb{N})$ também são, isto é, existe uma bijeção $\vartheta: P(\mathbb{Q}) \to P(\mathbb{N})$. A função $g = \vartheta \circ \varphi: \mathbb{R} \to P(\mathbb{N})$ será, portanto, injetiva. Das injetividades de f e g, concluímos, pelo Teorema Cantor-Bernstein-Schröder, que $\mathbb{R}$ e $P(\mathbb{N})$ são equipotentes. Precisamos, então, apenas definir φ e f e mostrar que são injetivas.

Para definirmos $f: P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$, seja $A \in P(\mathbb{N})$ e consideremos a função $\chi_A: \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, dada por

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in A, \\ 0, & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Com auxílio dessa função, definimos f(A) como sendo o número real cuja representação decimal será $0, \chi_A(0)\chi_A(1)\chi_A(2)\chi_A(3)\ldots$. Para mostrar que f é injetiva, seja $A \neq B$, isto é, existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \notin B$ (ou $n_0 \in B$ tal que $n_0 \notin A$). Dessa forma $\chi_A(n_0) = 1$ e $\chi_B(n_0) = 0$, daí, podemos ver que

$$f(A) = 0, \chi_A(0)\chi_A(1)\ldots\chi_A(n_0)\ldots = 0, \chi_A(0)\chi_A(1)\ldots 1\ldots$$

$$f(B) = 0, \chi_B(0)\chi_B(1)\ldots\chi_B(n_0)\ldots = 0, \chi_B(0)\chi_B(1)\ldots 1\ldots$$

O significa que $f(A) \neq f(B)$. Logo, é injetiva.

O problema do contínuo de Cantor (Hipótese do Contínuo (HC))

Os números naturais, também conhecidos por números de contagem, constituem o conjunto

$\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. O "tamanho" deste conjunto, o seu cardinal, é infinito: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. E quanto a outros conjuntos infinitos, como o conjunto dos números pares, P? Quão grande é ele? Existe uma bijecção entre P e $\mathbb{N}$. Por exemplo: $0 \leftrightarrow 0$, $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4$, $3 \leftrightarrow 6$, $4 \leftrightarrow 8$, ...,

$n \leftrightarrow 2n$,.... Assim, $|P| = |\mathbb{N}|$. Acontece que o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, e o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, também têm o mesmo cardinal. Então, temos:

$$|P| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Podemos ser tentados a pensar que todos os conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho, mas este não é o caso, por um famoso resultado. O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, também conhecido por contínuo real, o conjunto dos pontos de uma linha reta, são maiores. Isto foi demonstrado por Cantor e constitui seguramente um dos maiores resultados matemáticos de todos os tempos.

Para provar que $|\mathbb{R}| > \aleph_0$, necessitamos mostrar duas coisas. Primeiro, necessitamos mostrar que $|\mathbb{R}|$ é pelo menos tão grande quanto $|\mathbb{N}|$. Isto é fácil, visto que $\mathbb{N}$ é (pode-se identificar com) um subconjunto próprio de . Então deve haver pelo menos tantos membros de $\mathbb{R}$ como de $\mathbb{N}$. A segunda coisa a mostrar é que não há nenhuma aplicação injetiva de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}$. A prova de Cantor utiliza o apropriadamente chamado argumento de diagonalização (conjuntos não enumeráveis; pag.: 30). Assim, não pode haver nenhuma bijecção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$, de modo que $|\mathbb{R}|$ deve ser maior do que $|\mathbb{N}|$. Apresentamos a versão mais geral deste resultado:

Teorema de Cantor: Para qualquer conjunto S, o cardinal do conjunto potência [ou conjunto das partes] de S, P(S) (o conjunto de todos os subconjuntos de S), é maior do que o cardinal de S. Em símbolos, $|S| < |P(S)|$.

Demonstração: há uma aplicação natural injetiva de S em P(S), a saber, aquela que a cada x faz corresponder o conjunto singular, $\{x\}$. Isto mostra que o conjunto potência de S é pelo menos tão grande, e possivelmente maior do que S. O próximo passo é mostrar que eles não podem ter ser equipotentes, para o que basta provar que não existe nenhuma aplicação de S sobre P(S), o que faremos por redução ao absurdo.

Suponhamos que existe uma função F de S sobre P(S) e escrevamos F_x em vez de F(x), para cada $x \in S$. Seja $A = \{x \in S: x \notin F_x\}$. Por exemplo, se $F_a = \{a\}$, então $a \in F_a$, logo $a \notin A$. Por outro lado, se $F_b = \{c\}$, então $b \notin F_b$, logo $b \in A$.

Agora consideremos o próprio conjunto A. É claro que $A \subseteq S$, logo $A \in P(S)$. Visto que F é injetiva e aplica S sobre P(S), deve haver algum elemento x_0 de S tal que $F_{x_0} = A$. Pergunta: x_0 é elemento de A? Se é, então, pela definição de A, não é. Mas se não é, então pela definição de A, é. Simbolicamente, $x_0 \in A \Leftrightarrow x_0 \notin A$. Isto é uma contradição. Portanto, a suposição de que F aplicava S sobre P(S) é falsa. ■

Os conjuntos potência são maiores, mas quanto maiores? No caso finito sabemos a resposta exata: se $|X| = n$, então $|P(X)| = 2^n$. No caso geral é útil ter o teorema de Cantor em mente, mas podemos reverter ao caso especial dos números reais quando consideramos a pergunta. $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito de cardinal maior do que o de $\mathbb{N}$. Mas quão grande é ele? Visto que cada número real é [possui] uma expansão decimal infinita, o conjunto dos números reais é um conjunto infinito de objetos infinitos[3], donde resulta que o seu cardinal é $2^{\aleph_0}$. Em geral, o cardinal do conjunto potência de S é $2^{|S|}$.

O problema do contínuo de Cantor pode ser assim formulado: saber se existe algum cardinal entre o cardinal de $\mathbb{N}$ (designado por $\aleph_0$) e o cardinal do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (designado por *c*, ou $2^{\aleph_0}$). Cantor conjecturou que não, e esta conjectura ficou conhecida por Hipótese do Contínuo (HC). De uma maneira um pouco prosaica, o problema do contínuo é o problema de saber:

Quantos pontos tem uma reta (euclidiana)?

De uma maneira um pouco mais técnica, sabe-se que $\aleph_0 < c = 2^{\aleph_0}$, de modo que terá de ser $\aleph_1 \leq c$. A Hipótese do Contínuo implica que *c* seja o mais pequeno possível, ou seja, que $c = \aleph_1$. A Hipótese Generalizada do Contínuo (HGC) é a conjectura de que, para todo α,

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_0}.$$

O teorema de Cantor estabelece uma hierarquia de conjuntos com cardinalidades infinitas: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots$, que podem, todavia, não esgotar todas as cardinalidades infinitas.

A questão interessante com que ele se confrontou diz respeito à posição de $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, a potência do contínuo, na hierarquia dos cardinais infinitos:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \ldots$$

Tem-se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? Ou é igual a $\aleph_2$? Ou talvez $\aleph_3$? A Hipótese do Contínuo (HC) de Cantor é a afirmação de que $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, ou equivalentemente, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Se HC é falsa, então $|\mathbb{R}|$ pode ser igual a $\aleph_2$ ou $\aleph_{37}$, ou talvez possa ser maior do que $\aleph_n$, para qualquer n finito. HC é demonstrável para os subconjuntos não numeráveis e fechados (para a topologia usual) de $\mathbb{R}$, mas saber isto é saber muito pouco sobre tão enigmática conjectura. Embora a Hipótese do Contínuo seja normalmente expressa em termos de números cardinais transfinitos, estes conceitos não são essenciais ao problema. Ela surge de maneira muito simples na

[3] Obviamente os números não são infinitos, apenas as suas representações decimais. Cada dízima infinita podese identificar como uma sucessão dos algarismos 0, 1, ..., 9, na base decimal, ou simplesmente de 0's e 1's, no sistema binário, e daqui até concluir que o cardinal de $\mathbb{R}$ é $2^{\aleph_0}$ vai um passo, pois este é precisamente o cardinal do conjunto das sucessões de 0's e 1's. (Para a referida identificação ser possível há que ter em consideração que os números racionais possuem sempre duas representações (por exemplo, 1/2 = 0, 5000... = 0, 4999...) e escolher sistematicamente uma delas).

análise clássica, pois é equivalente à afirmação de que todo o conjunto de números reais é equipotente a um conjunto contável[4] de números naturais ou ao conjunto de todos os números reais.

A Hipótese do Contínuo de Cantor (HC) é um dos grandes problemas em aberto das matemáticas modernas. Apesar de Gödel e Cohen terem mostrado que ela é independente dos outros axiomas da teoria dos conjuntos, a questão da sua "veracidade" permanece em aberto para muita gente. Ela pode ter sido estabelecida pela negativa por Chris Freiling (1986), mas a sua 'refutação' passou em larga medida despercebida, talvez porque tivesse dependido de uma notável experiência conceptual, um método que dista bastante das abordagens comuns, mas que poderia ser encarado com simpatia por todos aqueles que gostam de provas visuais.

Teorema: O conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável

Como já vimos a definição do conjunto não enumerável (página 29). Aqui iremos usar a diagonal de Cantor de uma forma mais concreta para demonstrar um pouco mais a definição dos conjuntos não enumeráveis.

Como já mencionado, todos os números reais no intervalo [0, 1) é não enumerável.

Demonstração: Por contradição. Suponha que [0, 1) seja enumerável. Então, por definição de enumerabilidade, existe uma lista $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_i, \ldots$ em que constam todos os elementos de [0, 1). Esta lista pode ser representada por uma matriz, em que cada linha representa um número real em [0, 1), ordenada de acordo com a enumeração acima, e cada coluna representa os dígitos decimais deste número. Mais precisamente, já que cada r_i nesta lista pertence ao intervalo [0, 1), podemos escrever $r_i = 0{,}r_{i1}\, r_{i2}\, r_{i3} \ldots r_{in} \ldots$, onde r_{in} é o n-ésimo d´dígito decimal do número r_i.

Representando esses r_{in}'s na tabela abaixo.

Enumeração	**1º dec.**	**1º dec.**	**1º dec.**	**...**	***n*-ésimo dec.**	**...**
r_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	...	r_{1n}	...
r_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	...	r_{2n}	...
r_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	...	r_{3n}	...
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
r_i	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	...	r_{in}	...
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.

Figura 4: tabela dos r_{in}'s dos conjuntos não enumerados

Se encontrarmos um número r_α no intervalo (0, 1) que não esteja listado na tabela acima, chegamos a uma contradição (pois assumimos por hipótese que a lista está completa). Vamos construir r_α definindo cada uma de suas casas decimais da seguinte forma:

$$r_{\alpha k} = (r_{kk} + 1) \bmod 10.$$

Assim, o número α é tal que:

Enumeração	**1º dec.**	**1º dec.**	**1º dec.**	**...**	***k*-ésimo dec.**	**...**
r_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	...	r_{1k}	...
r_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	...	r_{2k}	...
r_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	...	r_{3k}	...
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
r_k	r_{k1}	r_{k2}	r_{k3}	...	r_{kk}	...
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
r_α	$(r_{11} + 1)$ mod 10	$(r_{22} + 1)$ mod 10	$(r_{33} + 1)$ mod 10	...	$(r_{kk} + 1)$ mod 10	...

Figura 5: tabela dos r_{in}'s dos conjuntos não enumerados na base decimal

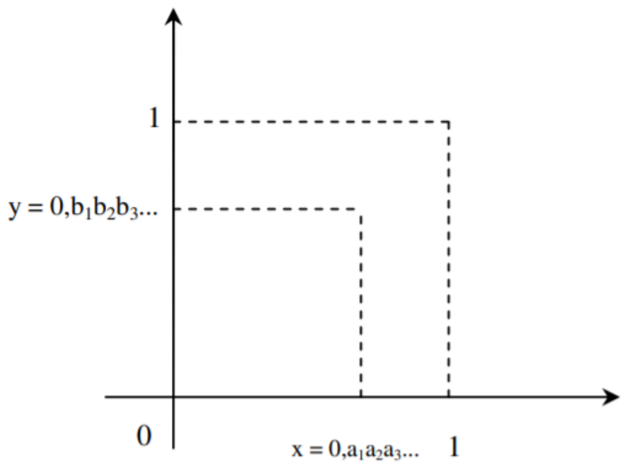
Mas note que o número r_α não pode estar na lista, pois ele é diferente de todos os demais números da lista (para qualquer ri na lista, o i-ésimo dígito de r_α é diferente do i-ésimo dígito de r_i, logo temos que $r_\alpha \neq r_i$).

Logo, a lista não pode estar completa, pois r_α não se encontra nela, e chegamos a uma contradição.

Teorema 4.2: O quadrado $S = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ possui a mesma quantidade de pontos que o segmento $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Demonstração: Para denotarmos tal afirmação, basta exibir uma bijeção entre esses dois conjuntos. Dado $(x, y) \in S = [0, 1] \times [0, 1]$, $x = 0{,}a_1a_2a_3...$ e $y = 0{,}b_1b_2b_3...$, definimos $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ tal que

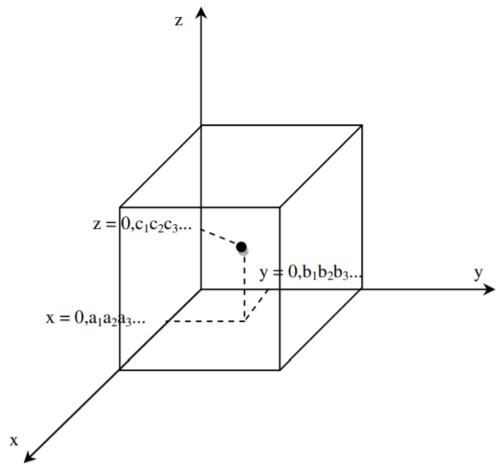
$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ 0{,}a_1b_1a_2b_2a_3b_3... & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$



Assim, temos $f(x, y) = 0,a_1b_1a_2b_2...a_nb_n... = f(x', y') = 0,a_1b_1a_2b_2...a_nb_n...$ $0,a_1'b_1'a_2'b_2'...a_n'b_n'... \Leftrightarrow a_n = a'_n$ e $b_n = b'_n\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = x'$ e $y = y' \Rightarrow$ f é injetiva. Além disso, dado $t \in [0,1]$, $t = 0,c_1c_2c_3...c_n = f(0,c_1c_3c_5...c_{2n-1}... , 0,c_2c_4c_6...c_{2n}...)$ com $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $t = f(x, y)$ para algum $(x, y) \in [0,1] \times [0,1] \Rightarrow$ f é sobrejetiva.

Portanto, f é bijetiva, e isto prova que os conjuntos têm a mesma cardinalidade.

Note que, no teorema, ao invés do quadrado $S = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$, tivéssemos o cubo sólido $S_3 = [0,1]\times[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^3$, então, para cada ponto $(x, y, z) = (0,a_1a_2a_3... , 0,b_1b_2b_3... , 0,c_1c_2c_3...)$ poderíamos definir uma função $f : S_3 \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x, y, z) = 0,a_1b_1c_1a_2b_2c_2...a_nb_nc_n...$



É fácil verificar que f é bijetora.

Portanto, f é bijetiva, e isto prova que os conjuntos têm a mesma cardinalidade.

Proposição 4.3: Qualquer intervalo de números reais (por menor que seja sua amplitude) é equipotente a $\mathbb{R}^n$, para todo $n \geq 1$.

Da mesma forma (do teorema 4.2), para $S_n = [0, 1] \times [0, 1] \times ... \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$, constrói-se de maneira análoga, uma bijeção entre S_n e [0, 1], provando que a cardinalidade de S_n é igual a cardinalidade de [0, 1] para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esse resultado surpreendeu até mesmo Cantor, que demonstrou que a dimensão não decide a potência de um conjunto. A potência de um conjunto de pontos num segmento de reta é a mesma numa superfície qualquer de um plano ou mesmo o conjunto de pontos do espaço tridimensional. Ou seja, há tantos pontos num segmento de reta qualquer por menor que ele seja, quanto em todo universo.

Cardinaliadade

Como já foi abordado, a cardinalidade do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é igual a cardinalidade do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ou seja, há uma bijeção entre eles. **Demonstração:** Precisamos mostrar que é bijetora a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida como:

$f(a) = \begin{cases} 2a - 1, \text{ se } x > 0 \\ -2a, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$. Ou seja, que é injetiva e sobrejetiva.

Considere a ≠ b > 0, implica que 2a – 1 ≠ 2b – 1 ou seja f(a) ≠ f(b) e de forma análoga para $a \neq b \leq 0$, portanto f é injetiva. Para cada $p \in \mathbb{N}$, p é par ou ímpar, se for par pode ser escrito como –2a com $n \leq 0 \in \mathbb{Z}$ e se for ímpar pode ser escrito como 2a – 1 com $n > 0 \in \mathbb{Z}$, assim p = f(a) para todo $p \in \mathbb{N}$, portanto f é sobrejetiva. Podemos concluir então $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$ (álefe zero).

Vimos também que P($\mathbb{N}$) (conjunto das partes de $\mathbb{N}$) possui cardinalidade maior que a dos naturais.

Demonstração: Considerando o conjunto {0, 1} a função $\zeta : P(\mathbb{N}) \to F(\mathbb{N}; \{0, 1\})$ é bijetora, pois para cada $X \in P(\mathbb{N})$, associamos a função $\zeta_x : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definida por $\zeta_x(x) = 1$ se $x \in X$ e $\zeta_x(x) = 0$ se $x \notin X$. A relação $X \to \zeta_x$ é uma função de P($\mathbb{N}$) sobre $F(\mathbb{N}; 0, 1\})$. Como {0 ,1} tem dois elementos nenhuma função $\varsigma : \mathbb{N} \to F(\mathbb{N}; \{0, 1\})$ é sobrejetiva, mas existe uma função injetiva evidente $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ definida por f(x) = {x}, sendo $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$. ■

Outra colocação é a de que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Pela função identidade f(n) = n temos que existe uma função injetiva dos números dos números naturais nos racionais. Mas precisamos saber se existe uma bijeção entre eles, como os racionais são todos números na forma $\frac{p}{q}$ onde p e q são inteiros e q ≠ 0, considerando $\mathbb{Q}_+$ os racionais não negativos e $\mathbb{Q}_-$ os racionais não positivos, temos para uma função $f:\mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_-$ tal que f(q) = –q é bijetora, se listarmos os números de $\mathbb{Q}_+$ da forma:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\cdots \\ \frac{2}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{4}\cdots \\ \frac{3}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{3}\ \frac{3}{4}\cdots \end{array}$$

Conseguimos contar todos os $\mathbb{Q}_+$, e assim temos que $g(1)=\frac{1}{1}$, $g(2)=\frac{2}{1}$, $g(3)=\frac{1}{2}$. Temos g é uma função bijetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$, e por isso $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Q}|$. ■

Já foi abordado também que Cantor abordou que há infinitos maiores que outros, de forma que, dados dois conjuntos infinitos, podemos ter cardinalidades diferentes, bastando para isso que sejam equipotentes. Por meio de um mecanismo simples Cantor provou que existem mais números reais no intervalo [0, 1[do que naturais, esse mecanismo chamada de Diagonal de Cantor.

Desta forma, já mostramos que o intervalo real [0, 1[é não enumerável, donde segue que o conjunto dos números reais também não é enumerável. O que nos permite afirmar que a cardinalidade $|\mathbb{R}|$ dos números reais não é igual a $\aleph_0$. Que recebeu o nome de contínuo.

Neste caso, os intervalos fechados [a, b] e [c, d], onde a < b e c < d são equipotentes.

Demonstração: Tomando a função $h:[a, b] \to [c, d]$, definida por $h(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$, com a < b, segue que a ≠ b e, desta forma, pode-se provar que a função definida acima é uma bijeção entre [a, b] e [c, d] provando que tais intervalos tem a mesma cardinalidade.

Por meio de argumento análogo, pode ser provada a equipolência dos seguintes intervalos: (a, b] e (c, d], (a, b) e (c, d) e [a, b) e [c, d).

Como já sabemos que os estudos de Cantor, além de quebrado com o paradigma de que “o todo é sempre maior do que qualquer uma das suas partes próprias”, ainda generalizaram para conjuntos infinitos o fato conhecido para conjuntos finitos de que o número de elementos de um conjunto é sempre menor do que o número de elementos das partes desse conjunto. Vamos denotar o número de elementos de um conjunto finito X por n(X).

Demonstração: Partindo da proposição, se $\eta(X) = n$, então $\eta(P(X)) = 2^n$, temos que:

Seja $A = \left\{\eta \in \mathbb{N} \mid \eta(X) = n \Rightarrow \eta(P(X)) = 2^n\right\}$.

1. $0 \in A$, pois, se $\eta(X) = 0$, temos que $X = \varnothing$, sendo assim, $P(X) = \{\varnothing\}$, isto é, $\eta(P(X)) = 2^0 = 1$.

2. Suponhamos agora que $n \in A$ e provemos que $n + 1 \in A$, isto é, temos $\eta(X) = n \Rightarrow \eta(P(X)) = 2^n$. Se temos $\eta(X) = n + 1$, por hipótese, $\eta(P(X)) = 2^{n+1}$. ■

Desta forma, por indução $A = \mathbb{N}$. Portanto, se

$\eta(X) = n$, então $\eta(P(X)) = 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cantor generalizou para conjuntos infinitos a ideia contida na proposição anterior, como demonstraremos no último teorema deste capítulo. Intuitivamente, o tipo de infinito de P(X) é estritamente maior do que o tipo de infinito de X. Expressamos este fato dizendo que a cardinalidade de P(X) é maior do que a cardinalidade de X. Continuando com esse raciocínio, obtemos $\eta(P(X)) < \eta(P(P(X)))$.

Tomando partes de conjuntos das partes sucessivamente, chegamos aos conjuntos infinitos de Cantor. Ele tornou estas questões rigorosas matematicamente através da sua aritmética transfinita. Consideremos agora a cadeia crescente de cardinalidades

$$\eta(\mathbb{N}) < \eta(P(\mathbb{N})) < \eta(P(P(\mathbb{N}))) < \ldots$$

Esta cadeia começa com a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Um conjunto X é infinito quando existe uma função injetora que vai de $\mathbb{N}$ em X. Claramente, o conjunto X, com menor cardinalidade, que permite esta injeção é o próprio $\mathbb{N}$, sendo assim, a cardinalidade de $\mathbb{N}$ pode ser considerada a menor infinita.

Dessa forma, assumindo a Hipótese do Contínuo, concluímos que entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ não são obtidas cardinalidades distintas das desses dois conjuntos, ou seja, qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$, ou é equipotente a $\mathbb{N}$, ou é equipotente a $\mathbb{R}$.

Demonstraremos agora a generalização feita por Cantor.

Teorema: Seja X um conjunto não vazio qualquer. Nenhuma função $f: X \to P(X)$ pode ser sobrejetiva.

Demonstração: Para cada $x \in X$, f(x) é um subconjunto de X. Seja $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Vamos mostrar que $A \notin \mathrm{Im}(f)$. Suponhamos que $A \in \mathrm{Im}(f)$, isto é, que existe $a \in X$ tal que f(a) = A. Dessa forma, ou $a \in A$ ou $a \in X \setminus A$. Se $a \in A$, pela definição de A, devemos ter $a \notin f(a)$. Mas f(a) = A, logo, contradição. Se $a \in X \setminus A$, devemos ter $a \in f(a)$, o que também é contradição, pois f(a) = A. Portanto, $A \notin \mathrm{Im}(f)$, isto é, a Im(f) é diferente do seu contradomínio, ou seja, f não pode ser sobrejetiva.

A partir disso, a Hipótese do Contínuo se resume a não existência de conjunto X tal que card($\mathbb{N}$) < card(X) < card($\mathbb{R}$).

Em resumo, chamamos de J o conjunto de Cantor.

Como já foi abordado, J é um conjunto fechado, não vazio e não enumerável e, consequentemente a cardinalidade do conjunto de Cantor é igual a cardinalidade do conjunto dos reais (a "cardinalidade do contínuo"). O que nos leva a concluir que a cardinalidade do conjunto de Cantor é equipotente as cardinalidades do tapete de Sierpinski e da esponja de Menger.

4.1 Propriedades do conjunto de Cantor

Nesta seção, estudaremos as principais propriedades do conjunto de Cantor. Estas estarão apresentadas na forma de proposições:

Proposição 3.6 O conjunto de Cantor é não vazio.

Demonstração: Pelo Teorema 3.3, segue que todo número no intervalo I = [0, 1] expansão ternária contém somente os dígitos: 0 ou 2 pertencem ao conjunto de Cantor. Como já foi citado, anteriormente, (página 39), pois os pontos 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e 1 permanecem em todos os conjuntos J_n, estando assim no conjunto de Cantor.

Logo, $J \notin \varnothing$.

Proposição 4.1 J é um conjunto fechado.

Demonstração: Sejam $(T_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ os intervalos retirados durante a construção do conjunto de Cantor, ou seja, uma união qualquer de abertos é um conjunto aberto, ou seja, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos, então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto. Então, $\left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda\right)^J = \mathbb{R} - \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} T_\lambda$ é um conjunto fechado. Mas, como $J=\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}} T_\lambda\right)^J \bigcap[0,1]$ e [0, 1] é fechado, inferimos que J é um conjunto fechado. ■

Proposição 3.8 J é um conjunto compacto.

Demonstração: Para mostrarmos que J é compacto, basta constatarmos que J é limitado,

visto que já provamos que J é fechado. Para tanto, reparemos que I = [0, 1] é limitado e como $J \subset I$, segue que J também é limitado.

Portanto J é compacto. ■

Proposição 3.7 J é um conjunto não enumerável.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que J é enumerável. Então, podemos listar os elementos de J como segue:

$$J=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\}.$$

Escolhemos o intervalo $\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$ ou $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ que não contém a_1 e denotemos por $[c_1,\ d_1]$. No segundo passo da construção do conjunto de Cantor, retiraremos o terço médio aberto do intervalo: $[c_1,\ d_1]$ e ficamos com: $[b_1,\ b_2]\cup[b_3,\ b_4]$. Escolhemos agora o intervalo: $[b_1,\ b_2]$ ou $[b_3,\ b_4]$ que não contém a_2 e o denotemos por $[c_2,\ d_2]$.

Continuamos dessa forma (processo indutivo). Então, os intervalos $[c_i,\ d_i]$ são fechados, não vazios, limitados e encaixados (decrescentes). Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, existe $J\in\mathbb{R}$ tal que $J\in\bigcap_{i=1}^{\infty}[c_i,\ d_i]$. Além disso, notemos que $J\in\mathbb{R}$ é único, pois se tivermos $J'\in\bigcap_{i=1}^{\infty}[c_i,\ d_i]$, então $\forall_\varepsilon>0$.

$$|c-c'|\leq|d_i-c_i|=\frac{1}{3^i},$$

que é menor do que ε se tomarmos $i\in\mathbb{N}$ suficientemente grande.

É claro que $\forall k\in\mathbb{N},\ c\in J_k$, pois $[c_k,\ d_k]\subset J_k$. Segue-se dessa afirmação que $c\in J$, visto que $J=\bigcap_{k=1}^{\infty}J_k$. Observemos também que $c\neq a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, pois se c = a_j para algum $j\in\mathbb{N}$, então $c\notin[c_j,\ d_j]$ devido a forma como selecionamos os intervalos $[c_i,\ d_i]$.

Ora, então chegamos a uma contradição, visto que $c\neq a_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$ e $c\in J$.

Portanto, o conjunto de Cantor não é enumerável.

Proposição 4.2 O conjunto de Cantor possui interior vazio, isto é, $\text{int}(J) = \varnothing$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\text{int}(J) \neq \varnothing$ e seja $x \in \text{int}(J)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x-\delta,\ x+\delta) \subset J.$$

Segue que $(x-\delta,\ x+\delta) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} J_n$, $(x-\delta,\ x+\delta) \subset J_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Haja visto que J_n é a união de 2^n intervalos disjuntos de comprimento $\frac{1}{3^n}$, o intervalo $(x-\delta,\ x+\delta)$ deverá está contido em um dos subintervalos de J_n. Como $\frac{1}{3^n} \to 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_1}} < \delta$. O intervalo $(x-\delta,\ x+\delta)$ tem comprimento $2\delta > \delta > \frac{1}{3^{n_1}}$. Desta forma, não está contido em nenhum dos subintervalos de J_{n_1}. Desta forma, não está contido em nenhum dos subintervalos de J_{n_1}. Logo, o que contradiz a informação acima.

Portanto, $\text{int}(J) = \varnothing$.

A proposição 3.8 garante que J não contém intervalos, visto que dado $K \subset [0, 1]$ de comprimento c > 0, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < c$, em que $\frac{1}{3^n}$ é o comprimento dos intervalos fechados que restam após o n-ésimo passo da construção do conjunto de Cantor, o intervalo K será mutilado depois desse n-ésimo passo, ou seja, $K \subsetneq J$.

Proposição 4.3 O complementar do conjunto J em relação ao intervalo [0, 1] é denso nesse intervalo.

Demonstração: Inicialmente consideremos $C^J_{[0,1]}$ o complementar de J em relação a [0, 1]. Devemos mostrar que $\overline{C^J_{[0,1]}} = [0, 1]$, ou seja, o fecho de $C^J_{[0,1]}$ é igual a [0, 1]. Com efeito, note que $\overline{C^J_{[0,1]}} \subset [0, 1]$. Assim, basta verificar que $[0, 1] \subset \overline{C^J_{[0,1]}}$. De fato, seja x $\in$ [0, 1]. Se $x \in C^J_{[0,1]}$, então basta tomar x_n = x para todo natural. Daí, tem-se $\lim x_n = x$. Agora, se $x \notin C^J_{[0,1]}$, então x $\in$ J. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(x - \frac{1}{n_0},\ x + \frac{1}{n_0}\right) \cap C^J_{[0,1]} \neq \varnothing$.

Assim, para cada $n \geq n_0$ tome $x_n - n_0 \in \left(x - \frac{1}{n_0}, x + \frac{1}{n_0} \right) \cap C^J_{[0,1]}$. Teremos então uma sequência (x_n) em $C^J_{[0,1]}$ com $\lim x_n = x$. Logo $x \in \overline{C^J_{[0,1]}}$ e, portanto, o conjunto $C^J_{[0,1]}$ é denso em [0, 1]. ■

Proposição 4.4 O conjunto de Cantor possui medida nula.

Demonstração: Ao pararmos no n-ésimo passo da construção do conjunto de Cantor, garantiremos que J está contido na reunião de 2^n intervalos, cada um tendo comprimento $\frac{1}{3^n}$.

Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$.

Portanto, segue que J possui medida nula. ■

Intervalos do Conjunto de Cantor

George Cantor (1845-1918) que se evidenciou com as suas ideias altamente inovadoras sobre o infinito, colocou o problema de uma linha à qual se removeria o seu terço médio, seguidamente o terço médio de cada um dos segmentos restantes e assim sucessivamente, gerando uma "poeira" que sendo infinita, possuiria um comprimento total igual a zero.

Como já vimos a definição a demonstração dos intervalos do conjunto de Cantor (página 39). Agora vamos relacionar os intervalos do conjunto de Cantor com a construção de alguns fractais, tais como: o tapete de Sierpinski e a esponja de Manger.

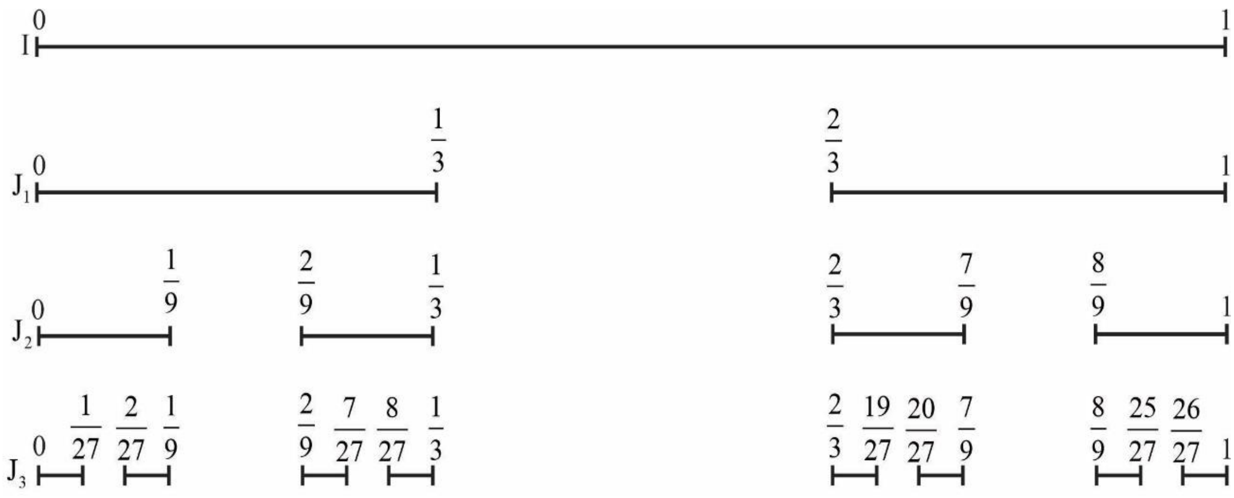


Figura 6: Intervalos de Cantor

A construção do Conjunto se faz por indução matemática.

Demonstração: Indução Matemática é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições. Efeito dominó.

Todos os passos para a construção dos intervalos de Cantor estão representados na figura 6.

Parte do intervalo I = [0, 1]

No passo 1, retira-se o terço do meio:

$$J_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

No passo 2, retira-se o terço do meio de cada um dos dois intervalos criados pelo passo 1.

$$J_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

No passo 3, retira-se o terço do meio de cada um dos intervalos criados pelo passo 2. Portanto,

Interações	**Nº de segmentos retirados**	**Comprimento do segmento retirado**
0	1	$\frac{1}{3}$
1	2	$\frac{1}{9}$
2	4	$\frac{1}{27}$
3	8	$\frac{1}{81}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

Percebemos que os dados da tabela acima geram uma série geométrica, definida a seguir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$$

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \Rightarrow 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{r}^{n}$$

Para calcular a soma de uma série geométrica (Teorema 6, pag. 38) usamos:

$$S = \frac{a}{1-r};\ a = \frac{1}{3} \quad e \quad r = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

Logo, 1 – 1 = 0.

Podemos concluir que a soma dos intervalos gerados pelas n interações do Conjunto de Cantor, resultam no mesmo tamanho do intervalo inicial. Isso quer dizer que, se tivéssemos um segmento de reta e fossemos retirando novos intervalos gerados pelas interações deste fractal, o intervalo resultante seria zero.

O que observamos com o Conjunto de Cantor é algo interessante e contraditório, pois enquanto o número de segmentos aumenta indefinidamente o comprimento de cada segmento vai ficando mais próximo de zero, até que, em certo instante, é praticamente igual a zero. O Conjunto de Cantor tem infinitos pontos, pois se lembre que toda vez que faço os cortes com intervalos abertos, os pontos extremos dos intervalos fechados permanecem no Conjunto de Cantor. Portanto, mesmo considerando as infinitas etapas do processo, todos os pontos extremos dos intervalos de construção pertencem ao Conjunto de Cantor e são em uma quantidade infinita, tanto quanto a quantidade dos números naturais.

5 CONSTRUINDO OUTROS FRACTAIS

De modo geral, fractal é uma construção na qual um padrão é repetido desde larga escala até pequena escala, de maneira que, quando observado mais de perto a estrutura revela as mesmas figuras ou similares. Existem muitas formas de fractais na natureza como, flocos de neve, árvores, etc. Os fractais por serem irregulares não podem ser descritos através da geometria euclidiana, eles geralmente têm uma dimensão Hausdorff que difere de sua dimensão topológica normal. Uma maneira de produzir fractais é por algoritmos de preenchimento de espaço.

Abordaremos a seguir os denominados “monstros” da teoria dos fractais, no caso o conjunto de Cantor já foi abordado e, segue como um dos monstros da teria dos fractais (Intervalos de Cantor).

5.1 O Tapete de Sierpinski

Antes de trabalharmos com o tapete sierpinski, vamos tratar do triângulo de Sierpinski.

O Triângulo de Sierpinski foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinski (1882-1969). É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes, visto que um destes triângulos está invertido, em relação ao original e é retirado do triângulo original sobrando apenas os outros três. Assim, repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento em cada um dos três novos triângulos com a orientação original, e assim sucessivamente.

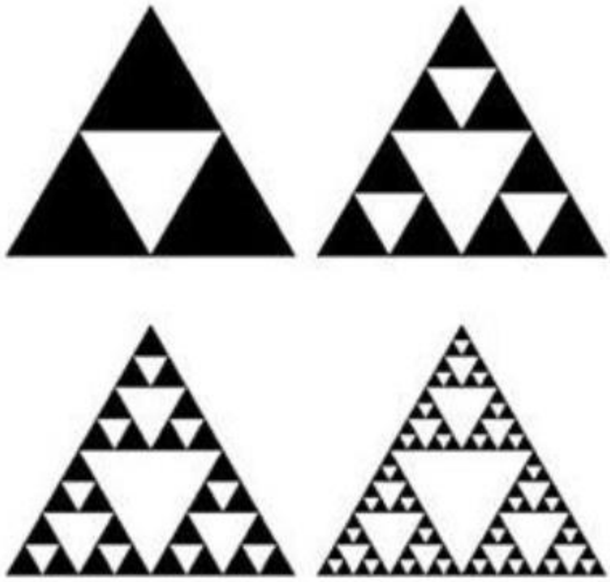


Figura 7: Triângulo de Sierpinski e suas interações.

O triângulo de Sierpinski e as séries geométricas

Os fractais podem ser explorados no desenvolvimento de diversos conteúdos; como na álgebra, geometria, cálculo, modelagem matemática e números complexos, com o propósito de despertar o interesse dos educandos, pelas formas, cores e luminosidade que os mesmos apresentam ao serem criados tanto no computador como manualmente.

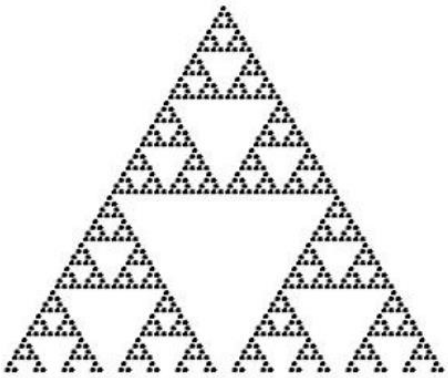


Figura 8: Triângulo de Sierpinski após várias interações.

Área do triangulo de Sierpinski

O cálculo da área vazada do Triângulo de Sierpinski se dará pelo somatório das áreas dos triângulos para *n* interações, obtidas através de uma série geométrica convergente.

Área do triângulo original: $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4^1} = A_0$

Área do triângulo da 1ª interação: $\frac{3\sqrt{3}}{16} l^2 = \frac{3^1\sqrt{3}}{4^2} l^2 = A_1$

Área do triângulo da 2ª interação: $\frac{9\sqrt{3}}{64} l^2 = \frac{3^2\sqrt{3}}{4^3} l^2 = A_2$

$\vdots \qquad \vdots$

Área do triângulo da nª interação: $\frac{3^n\sqrt{3}}{4^{n+1}} l^2 = A_n$

Logo, para descobrirmos a área que resta do triângulo original realizamos o seguinte cálculo: faremos a área do triângulo original pela fórmula da área do triângulo equilátero menos o somatório das áreas vazadas obtidas através da série geométrica. Que análogo a série geométrica do conjunto de Cantor (página 51), que nos leva a concluir que:

Como verificamos ao montar a série geométrica que ela convergia, pois sua razão era menor que um, ao fazermos o cálculo da área restante no Triângulo de Sierpinski provamos essa convergência para zero. Portanto, quando tivermos n interações no Triângulo de Sierpinski a área restante converge para zero.

Portanto a soma das áreas das n interações do Triângulo de Sierpinski resultam na mesma área do triângulo inicial. Isso quer dizer que, se tivéssemos um triângulo e fossemos retirando os novos triângulos gerados pelas interações deste fractal a área resultante seria zero.

Volume da pirâmide de Sierpinski

O cálculo do volume restante da Pirâmide de Sierpinski se dará pelo somatório dos volumes dos octaedros para *n* interações, obtidas através de uma série geo métrica convergente.

Volume do tetraedro inicial: $\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8^o}$

Volume do octaedro da 1ª interação: $\frac{a^3\sqrt{2}}{24} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8^1}$

Volume do octaedro da 2ª interação: $\frac{a^3\sqrt{2}}{24} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8^2}$

Interações	**N° de tetraedros gerados**	**N° de octaedros retirados**	**Volume de um novo octaedro**
0	4	1	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8}$
1	16	4	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8^2}$
2	64	16	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8^3}$
3	256	64	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8^4}$
. . .	. . .	. . .	. . .
N	4^{n+1}	4^n	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3\cdot 8^{n+1}}$

Tabela 1: Cálculo do volume do triângulo de Sierpinski após as interações.

Segue que a série geométrica, cuja soma é análoga a soma das áreas. Temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot r^{n} \Rightarrow \frac{a^{3}\sqrt{2}}{12} - a^{3}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{24}}_{a}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}_{r}$$

$$a=\frac{\sqrt{2}}{24} \quad \text{e} \quad r=\frac{1}{2}$$

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{24}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{24}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{24}\cdot\frac{2}{1}=\frac{\sqrt{2}}{12}$$

Logo, $\frac{a^{3}\sqrt{2}}{12}-\frac{a^{3}\sqrt{2}}{12}=0$.

Como verificamos ao montar a série geométrica que ela convergia, pois sua razão era menor que um, ao fazermos o cálculo do volume restante da Pirâmide de Sierpinski provamos essa convergência para zero. Portanto, quando tivermos n interações na Pirâmide de Sierpinski o volume restante converge para zero.

Portanto a soma dos volumes das n interações da Pirâmide de Sierpinski resultam no mesmo volume da pirâmide inicial. Isso quer dizer que, se tivéssemos uma pirâmide e fossemos retirando as novas pirâmides geradas pelas interações deste fractal o volume resultante seria zero.

Fazendo uso dos conceitos oriundos do cálculo mais especificamente, as séries geométricas, buscamos construir fórmulas para encontrar as áreas do Triângulo e do Tapete de Sierpinski para *n* interações.

Partindo primeiramente da análise do triângulo e sua primeira interação, vimos que a cada interação cada triângulo que compunha o Triângulo de Sierpinski dava origem a quatro novos triângulos, sendo que destes quatro o do centro é removido.

O fractal obtido é estritamente auto semelhante, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura. Pode-se generalizar o triângulo de Sierpinski para uma terceira dimensão, obtendo assim a Pirâmide de Sierpinski.

O Tapete de Sierpinski

Construção

Pode-se aplicar a mesma técnica de eliminação (remoção) usada no triângulo de Sierpinski.

1. Tome um quadrado qualquer [figura 9(a)].

2. Dividindo-o em 9 pequenos quadrados congruentes.

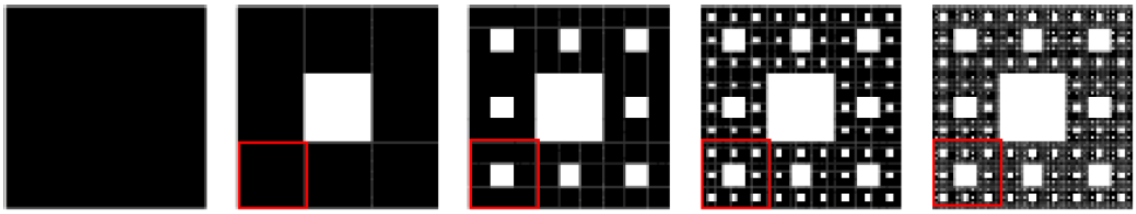
3. Remova o quadrado central, deixando 8 quadrados restantes. [figura (9b)]. Este é o primeiro nível do tapete de Sierpinski.

4. Repita os passos 2 e 3 para cada um dos 8 pequenos quadrados restantes do nível anterior. Assim, obtemos o segundo nível do tapete de Sierpinski [Figura 9(c)].

5. Repita os passos 2, 3 e 4 para cada um dos 8 pequenos quadrados restantes do nível anterior. Assim, obtemos o terceiro nível do tapete de Sierpinski [Figura 9(d)].

6. Repita os passos 2, 3, 4 e 5 para cada um dos 8 pequenos quadrados restantes do nível anterior. Assim, obtemos o quarto nível do tapete de Sierpinski [Figura 9(e)]. E assim, sucessivamente e iterativamente.

O resultado que se obtém após algumas interações já é supreendentemente bonito e conhecido como Tapete de Sierpinski (ou Carpete de Sierpinski). O resultado da construção é mostrado na figura seguinte.



(a) (b) (c) (d) (e)

Figura 9: Tapete de Sierpinski.

Vamos analisar também o que acontece com a área e o perímetro do Tapete de Sierpinski. Seja a área inicial do quadrado de lado L igual a A. No nível 1 retiramos uma área de um quadrado de lado $\frac{L}{3}$, resta área $A_1 = L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{8L^2}{9}$. Na segunda iteração, em que se retiram 8 (oito) quadradinhos de lado $\frac{L}{9}$, a nova área $A_2 = \frac{8L^2}{9} - \left(\frac{L}{9}\right)^2 = \frac{64L^2}{81}$. Na terceira retirada, o número de quadradinhos retirados aumenta consideravelmente e são retirados, desta vez, 64 quadradinhos de lado $\frac{L}{27}$ e a área $A_3 = \frac{64L^2}{81} - \left(\frac{L}{27}\right)^2 = \frac{512L^2}{729}$. Percebemos que as áreas A_1, A_2, A_3, formam uma Progressão Geométrica de termo inicial igual $\frac{8L^2}{9}$ e a razão igual a $\frac{8}{9}=\frac{2^3}{3^2}$, calculando através da fórmula do termo geral de uma P.G, encontramos a expressão para o termo geral igual a $A_n=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)\cdot L^2$. Fácil perceber que esta área vai diminuindo à medida que vamos fazendo mais interações e retirando os quadradinhos. Até que chegará um momento em que teremos somente pontos e a área estará reduzida a zero. O perímetro tem um comportamento totalmente contrário ao da área, pois enquanto ela diminui tendendo a zero, ele aumenta indefinidamente tendendo ao infinito. Consideremos o lado inicial do quadrado igual a L, o perímetro inicial é 4L. Na primeira iteração, o lado do quadrado fica reduzido a $\frac{L}{3}$ e o perímetro do novo quadrado é igual $\frac{4L}{3}$. Na segunda iteração o lado quadrado é $\frac{L}{9}$ e o perímetro é igual a $\frac{4L}{9}$. Na terceira iteração, são acrescidos novos quadradinhos cujos perímetros são iguais a $4\cdot\left(\frac{L}{27}\right)$. Prosseguindo assim, verificamos que na iteração no perímetro de cada triangulo gerado é igual a $4\cdot\left(\frac{L}{3^n}\right)$.

Podemos perceber que o conjunto (tapete Sierpinski) tem algumas propriedades bastante interessantes:

- Tem área zero, pois a cada passo a área reduz-se para $\frac{8}{9}$ da área do passo anterior.

Por exemplo se a área inicial for 1, ao fim do primeiro passo é $\frac{8}{9}$, ao do segundo passo é $\frac{8^2}{9^2}$, ao fim do terceiro é $\frac{8^3}{9^3}$, pelo que a área limite é $\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots=0$. Perceba que o tapete de Sierpinski mantém a mesma propriedade do conjunto de Cantor.

- É infinito, pois os lados do quadrado nunca são removidos.
- É auto semelhante, isto é, cada parte é uma cópia de si própria.

Dimensão topológica

Vamos falar antes sobre homeomorfismos.

Definição: $f:(X, T_X)\rightarrow(Y, T_Y)$ é um homeomorfismo se for uma função bijetiva, contínua, e com inversa contínua.

Ou seja, uma bijeção $f: X \to Y$ é um homeomorfismo se a pré-imagem de qualquer aberto de Y for aberta em X, e a imagem de qualquer aberto de X for aberta em Y. Assim, um homeomorfismo estabelece uma correspondência biunívoca entre os abertos de X e Y. Isso torna esses espaços equivalentes do ponto de vista topológico, isto é, eles terão as mesmas propriedades topológicas.

A dimensão topológica foi discutida por Poincaré em 1911 e por Brouwer, em 1913 e basicamente pode ser entendida como: dado um conjunto contínuo, ele terá n dimensões quando pudermos dividi-lo por meio de cortes que sejam eles próprios contínuos de (n-1) dimensões. Considera-se que o ponto possui dimensão zero. Por essa definição, a reta terá dimensão 1 (porque pode ser separada por um ponto), o plano terá dimensão 2 (porque pode ser separado por uma reta), o espaço usual terá três dimensões (porque pode ser separado por um plano), e assim, sucessivamente, podemos imaginar conjuntos contínuos com um número crescente de dimensões. Um objeto com dimensão topológica tem propriedades que o fazem manter-se invariável sobre transformações contínuas por homeomorfismos. Como, por exemplo, a curva de Koch e uma linha reta que topologicamente são as mesmas.

Dimensão topológica é aplicável a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que não necessariamente são subespaços. Em especial temos o tapete de Sierpinski.

Pode ser provado que a dimensão topológica de um conjunto em $\mathbb{R}^n$ é um número inteiro entre 0 e n, inclusive. Vamos denotar a dimensão topológica de um conjunto S por $d_T(S)$.

A tabela a seguir dá a dimensão topológica do triângulo de Sierpinski e do tapete de Sierpinski. Enunciado informalmente, ambos o tapete e o triângulo de Sierpinski têm tantos “buracos” que mais parecem estruturas de redes de segmentos de retas do que regiões do plano e assim tem dimensão topológica um.

TABELA

Conjunto S	$d_T(S)$
Tapete de Sierpinski	1
Triângulo de Sierpinski	1

Como já foi abordado, o chamado tapete de Sierpinski é uma figura plana que ocorre em sua interação a “retirada” de partes como mostramos em sua construção, é um fractal de remoção (figura 9).

Analisando este fractal, observamos que chamando o comprimento inicial do lado do quadrado de x, temos a interação $C_0 = x$. Fazendo a primeira interação, o tamanho do segmento inicial passa a ser a terça parte do comprimento do quadrado inicial. Portanto, o comprimento do lado de cada novo quadrado passa a ser de $C_1 = \frac{x}{3}$. Continuando para a próxima interação temos que o comprimento de cada novo quadrado é $C_2 = \frac{x}{9} = \frac{x}{3^2}$. Verificamos que então para n interações, obtemos que o comprimento de cada segmento dos quadrados é dado por $C_n = \frac{x}{3^n}$. Agora, a quantidade de quadrados gerados por cada interação é de $I_0 = 1$, na segunda interação obtemos em cada quadrado anterior oito novos quadrados, ou seja, temos $I_1 = 8$, continuando as iterações, na segunda temos $I_2 = 64 = 8^2$, assim continuando até n iterações, obtemos $I_n = 8^n$. Veja a Tabela a seguir: Quadrado de Sierpinski.

Comprimento do Lado de Cada Quadrado	Quantidade de Quadrados
$C_0 = x$	$I_0 = 1$
$C_1 = \frac{x}{3}$	$I_1 = 8$
$C_2 = \frac{x}{9}$	$I_2 = 64$
$C_3 = \frac{x}{27}$	$I_3 = 512$
...	...
$C_n = \frac{x}{3^n}$	$I_n = 8^n$

Agora, calculando a dimensão do fractal do quadrado de Sierpinski; sabemos que em cada iteração temos em cada quadrado teremos oito novos quadrados, o que mostra que o número de peças é n = 8. Cada um desses quadrados possuem lados como sendo a terça parte do anterior, logo o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{3}$, o que significa que nosso fator de ampliação é m = 3. Assim, calculando sua dimensão, obtemos

$$D = \frac{\log\ n}{\log\ m} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1{,}89279.$$

6 ESPONJA DE MENGER

Cada face da esponja Menger é um tapete Sierpinski. Além disso, a intersecção da esponja Menger com uma diagonal ou médio inicial do cubo é um conjunto de Cantor.

6.1 Construção

A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo através do seguinte processo recursivo:

1. Tome um cubo qualquer [Figura 10(x)].

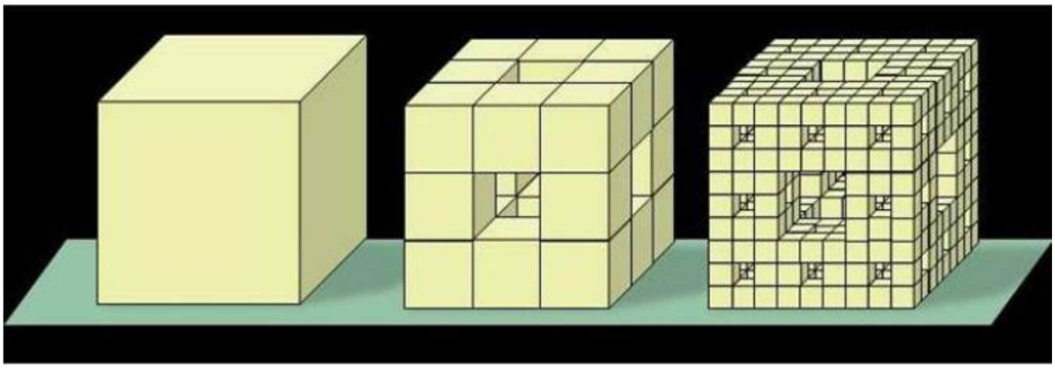
2. Divida cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo o cubo inicial fica subdividido em 27 cubos menores.

3. Remova o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, deixando apenas 20 cubos restantes [Figura 10(y)]. Este é o primeiro nível da Esponja de Menger.

4. Repita os passos 2 e 3 para cada um dos 20 pequenos cubos restantes do nível anterior. Assim, obtemos o segundo nível da Esponja [Figura 10(z)].

Note que, neste nível, estamos dividindo cada um dos 20 cubos do nível anterior em outros 20 cubos menores, obtendo no final 202 cubos.

5. A Esponja de Menger é o limite deste processo depois de um número infinito de interações.



(x) **(y)** **(z)**

Figura 10: Esponja de Menger nível 0 ao nível 2.

Observe que se n é o número de interações realizadas no cubo inicial, o número de cubos aumenta 20^n. Assim, podemos contar, em cada nível, quantos são os cubos removidos e restantes, como mostra a Tabela 2 a seguir.

Nível	0	1	2	3	...	n
Cubos removidos	0	7	7×20	7×20^2	...	$7 \times 20^{n-1}$
Cubos restantes	$1 = 20^0$	20^1	20^2	20^3	...	20^n

Tabela 2: Contagem por nível dos cubos da Esponja de Menger.

6.2 Dimensão topológica

Sem perda de generalidade, já definimos homeomorfismo e dimensão topológica nas páginas 70 e 71.

Observe o que acontece com o número de cubos e o tamanho de cada aresta na construção da Esponja de Menger após um número n de iterações. Na primeira iteração, a partir de cubo de aresta *a* foram removidos 7 cubos de aresta $\frac{a}{3}$ e obtemos uma figura que contém 20 cubos de aresta $\frac{a}{3}$. Este processo foi repetido na segunda iteração, então para cada um dos 20 cubos serão removidos 7 cubos de aresta $\frac{a}{3^2}$ e teremos 20 novos cubos com arestas medindo $\frac{a}{3^2}$. Assim obtemos a seguinte tabela:

Número de Iterações	Cubos Removidos	Cubos que sobraram	Tamanho da aresta dos cubos restantes
0	0	27	a
1	7	20	$\frac{a}{3}$
2	$7 \cdot 20$	20^2	$\frac{a}{3^2}$
3	$7 \cdot 20^2$	20^3	$\frac{a}{3^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$7 \cdot 20^{n-1}$	20^n	$\frac{a}{3^n}$

Tabela 3: As interações no processo da construção da Esponja de Menger

Note que a Esponja de Menger possui autossimilaridade, ou seja, em cada iteração obteremos uma parte da figura que é semelhante a figura da iteração anterior. Por exemplo, com o auxílio da tabela acima, observe que teremos 20 cubos de aresta $\frac{a}{3^2}$ semelhantes a figura obtida na primeira iteração.

Contudo, a dimensão de um fractal, que representa o grau de ocupação de sua estrutura no espaço que a contém, ainda é algo intrigante, pois não se trata necessariamente de um número inteiro, como ocorre com os objetos da geometria euclidiana. Mas como calcular a dimensão de um fractal?

Para entendermos este cálculo, vamos, primeiramente, estudar a dimensão de figuras já conhecidas. Por exemplo, sabemos que a dimensão de uma reta é 1, a dimensão de um quadrado é 2 e a dimensão de um cubo, 3. Além disso, essas três figuras da geometria euclidiana possuem a propriedade de autossemelhança, isto é, cada uma pode ser dividida em figuras menores, porém, similares à inicial, como exemplificado na Figura 7.

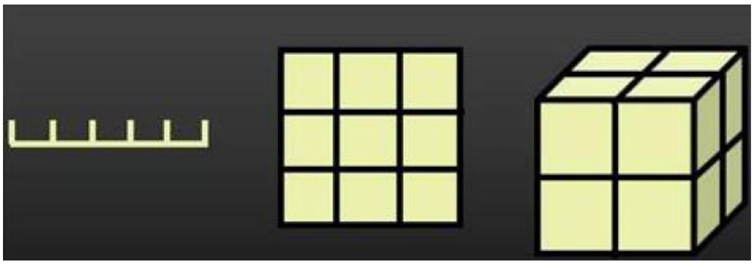


Figura 11: Segmento de reta, quadrado e cubo divididos em figuras menores, similares a inicial.

Observe que o segmento de reta foi dividido em 5 partes iguais, o quadrado em 9 e o cubo em 8, sendo cada uma dessas partes similar à figura inicial. Mais ainda, ao multiplicarmos cada parte do segmento por 5, obtemos o segmento inicial. Assim, dizemos que o fator de aumento para o segmento é 5. O mesmo acontece com o quadrado, onde o fator de aumento é 3, e com o cubo, com fator de aumento 2. Dessa forma, obtemos a seguinte relação:

(i) No segmento, o número de partes é 5, que podemos escrever como $5 = 5^1$, onde 5 é o fator de aumento e 1 é a dimensão do segmento.

(ii) No quadrado, o número de partes é 9, que escrevemos na forma $9 = 3^2$, onde 3 é o fator de aumento e 2 é a dimensão do quadrado.

(iii) No cubo, o número de partes é 8, que é descrito por $8 = 2^3$, onde 2 é o fator de aumento e 3 é a dimensão do cubo.

Em geral, o número n de partes de uma figura que possui a propriedade de autossemelhança é dado por

$$n = m^D,$$

onde m é o fator de aumento e D é a dimensão da figura inicial. Logo, para obtermos a dimensão de uma figura qualquer, basta encontrarmos o valor de D que aparece na expressão acima.

A dimensão topológica é dada por um número natural e envolve alguns conceitos complexos que fogem ao escopo deste trabalho. Tudo que precisamos saber é que pontos possuem dimensão nula, as curvas são unidimensionais e as superfícies são bidimensionais.

A teoria dos conjuntos formuladas por Cantor, na segunda metade do século 19, foi o fator iniciador de uma subárea da topologia, a Teoria da Dimensão, cujo objetivo é o estudo da dimensão de algumas classes de subconjuntos de um espaço métrico ou topológico. Há, pelo menos, três definições diferentes para a dimensão topológica de um conjunto. Formulada por Hryshon (1922) e por Menger (1923), uma destas definições tornou-se familiar por coincidir com a dimensão euclidiana de comprimento, área e volume. Sendo assim, foi estabelecido que um intervalo I da reta poderia conter tantos pontos quanto o quadrado $I^2 = I \times I$ e consequentemente I e I^2 seriam topologicamente equivalentes. A prova negativa desta última afirmação, ou que I, I^2, ..., I^n são topologicamente diferentes foi dada por Brouwer (1911). Mas os estudos desenvolvidos com o propósito de dar prova para a questão introduziram axiomas, conceitos e relevantes resultados deu origem à Teorema da Dimensão. Informalmente, a dimensão topológica pode ser refraseada como:

- Se tomarmos um conjunto A com quantidade enumerável de pontos, a dimensão topológica de A é zero.
- Se A contém pontos para os quais as fronteiras de suas vizinhanças arbitrariedade pequenas têm dimensão topológica n, então A tem dimensão topológica n + 1.

Calculando a área

Nesta seção vamos calcular a área da Esponja de Menger. Note que, por ser um fractal obtido por um processo infinito, sua área será o limite, quando n tender ao infinito, da área obtida em sua n-ésima etapa de construção. Assim, para obtermos a área da Esponja, precisamos calcular a área na n-ésima etapa de sua construção e então tomarmos o limite com n tendendo ao infinito.

Pela maneira como a Esponja de Menger é construída podemos observar que a área em cada nível de seu processo de construção depende da área do nível anterior, o que nos fornece um processo recursivo. Além disso, a figura obtida em cada nível é composta por vários quadrados de mesma área, sendo que a área de cada quadrado é $\frac{1}{9}$ da área do quadrado obtido no nível anterior. Dessa forma, para calcularmos a área no nível n, precisamos encontrar a quantidade de quadrados que são obtidos neste nível, o que faremos com o auxílio da Tabela 11.

Na etapa inicial, quando n = 0, temos um cubo formado por 6 quadrados, que são suas faces. Logo, $q_0 = 6$.

Supondo que a área de cada um desses quadrados seja igual a A, segue que a área no nível 0 é dada por

$$A_0 = q_0 A = 6A$$

Se *a* é a aresta do cubo inicial, então $A = a^2$. Da construção da Esponja segue que na primeira iteração o tamanho da aresta é reduzido para $\frac{a}{3}$. Com isso, segue que as áreas dos quadrados da primeira iteração são

$$A_1 = q_1 \left(\frac{a}{3}\right)^2 = q_1 \frac{a^2}{9} = q_1 \frac{A}{9}.$$

Observe que na primeira iteração de construção da Esponja são retirados 7 cubos, sendo estes localizados no centro de cada face do cubo inicial e o cubo central. Assim, para cada face do cubo inicial onde tínhamos apenas um único quadrado de lado a, temos agora 8 quadrados de lado $\frac{a}{3}$. Além dos quadrados das faces, agora possuímos os quadrados do lado de dentro do cubo. Cada um desses buracos possui 4 quadrados e, como são 6 buracos, segue que o número de quadrados no interior da Esponja quando n = 1 é 6 × 4 = 24. Logo o número de quadrados na primeira iteração

$$q_1 = q_0 \cdot 8 + 1 \cdot 24 = 6 \cdot 8 + 20^0 \cdot 24.$$

Portanto segue que a área da Esponja na primeira iteração é

$$A_1 = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^0 A.$$

Para a segunda iteração, temos para cada quadrado 8 novos quadrados e, para cada um dos 20 cubos restantes da etapa anterior, aparecem 24 novos outros quadrados referentes aos buracos feitos nos centros dos cubos para construção da esponja. Assim, segue que

$$q_2 = q_1 \cdot 8 + 20 \cdot 24 = (6 \cdot 8 + 20^0 \cdot 24) \cdot 8 + 20 \cdot 24 = 6 \cdot 8^2 + 20^0 \cdot 24 + 20^1 \cdot 24.$$

Como as arestas na segunda iteração medem $\frac{a}{3^2}$, cada quadrado possui área igual a $\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 = \frac{a^2}{9^2} = \frac{1}{9^2}A$. Portanto a área na segunda interação é:

$$A_2 = q_2\frac{1}{9^2}A = (6\cdot 8^2 + 20^0\cdot 24\cdot 8 + 20^1\cdot 24)\frac{1}{9^2}A \Rightarrow A_2 = 6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 A + \frac{20^0\cdot 24}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9}\left(\frac{20}{9}\right)^1 A$$

Suponhamos que para k-ésima interação onde k = n, o número de quadrados é dado por

$$\begin{aligned} q_n &= q_{n-1}\cdot 8 + 20^{n-1}\cdot 24 \\ &= (6\cdot 8^{n-1} + 20^0\cdot 24\cdot 8^{n-2} + 20^1\cdot 24\cdot 8^{n-3} + \ldots + 20^{n-1}\cdot 24)\cdot 8 + 20^n\cdot 24 \\ &= 6\cdot 8^n + 20^0\cdot 24\cdot 8^{n-1} + 20^1\cdot 24\cdot 8^{n-2} + \ldots + 20^{n-2}\cdot 24\cdot 8 + 20^{n-1}\cdot 24\cdot 8 + 20^n\cdot 24. \end{aligned}$$

Logo, a área da esponja será dada por

$$\begin{aligned} A_n &= q_n\frac{1}{9^n}A \\ &= 6\left(\frac{8}{9}\right)^n A + \frac{20^0\cdot 24}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} A + \frac{20^1\cdot 24}{9^2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} A + \ldots + \frac{20^{n-2}\cdot 24}{9^{n-1}}\left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9}\left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A \end{aligned}$$

Para k = n + 1 temos da construção da esponja que para cada quadrado obtemos 8 novos quadrados, além disso teremos os outros 20 cubos os quais possuirão 24 outros quadrados.

Logo teremos que

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n\cdot 8 + 20^{n+1}\cdot 24 \\ &= (6\cdot 8^n + 20^0\cdot 24\cdot 8^{n-1} + \ldots + 20^{n-1}\cdot 24\cdot 8 + 20^n\cdot 24)\cdot 8 + 20^{n+1}\cdot 24 \\ &= 6\cdot 8^{n+1} + 20^0\cdot 24\cdot 8^n + \ldots + 20^{n-1}\cdot 24\cdot 8^2 + 20^n\cdot 24\cdot 8 + 20^{n+1}\cdot 24 \end{aligned}$$

Segue então que a área é dada por

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= q_{n+1}\frac{1}{9^{n+1}}A \\ &= 6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} A + \frac{20^0\cdot 24}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^n A + \frac{20^1\cdot 24}{9^2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} A + \ldots + \frac{20^{n-1}\cdot 24}{9^n}\left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9}\left(\frac{20}{9}\right)^n A. \end{aligned}$$

Encontramos então, pelo método de indução, a expressão para o cálculo da área da Esponja de Menger da n-ésima interação. Ao aplicar o limite de quando $n \to \infty$ na expressão de A_n obtemos

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} q_n\frac{1}{9^n}A.$$

Observe que $\frac{24}{9}\left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A < A_n$, porém temos que $\frac{20}{9} > 1$ e disso segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{24}{9}\left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \infty.$$

Portanto a área da Esponja de Menger é infinita.

Calculando o volume

Nesta seção iremos calcular o volume da Esponja de Menger. Neste caso, assim como no cálculo da área, o volume será o limite, quando n tender ao infinito, do volume da figura obtida na n-ésima etapa de sua construção. Denotemos por V e V_n o volume do cubo inicial e o volume no n-ésimo nível de construção, respectivamente. No nível 1, dividimos nosso cubo inicial em 27 cubos menores, com volume igual a $\frac{1}{24}V$, e percebemos 7 desses cubos. Desse modo, o volume obtido é

$$V_1 = V - 7 \cdot \frac{1}{27} V = \frac{20}{27} V.$$

No nível 2, são removidos 7×20 cubos, sendo que cada um deles tem volume igual a $\frac{1}{27}\left(\frac{1}{27}V\right)$. Então, o volume total é

$$V_2 = V_1 - 7 \cdot 20\left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \frac{20}{27} V - 7 \cdot 20\left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V.$$

Repetindo este raciocínio, no nível n, retiramos $7 \times 20^{n-1}$ cubos, cada um deles tendo volume igual a $\left(\frac{1}{27}\right)^n V$. Logo, o volume total no nível n é

$$V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^{n-1} V - 7 \cdot 20^{n-1}\left(\frac{1}{27}\right)^n V = \left(\frac{20}{27}\right)^n V.$$

Portanto, o volume da Esponja de Menger é igual a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{20}{27}\right)^n V\right] = V \lim_{n\to\infty}\left(\frac{20}{27}\right)^n = 0,$$

pois $\frac{20}{27} < 1$. Isto é, a Esponja tem volume nulo.

Conjunto de Cantor de dimensão 4

O conjunto de Cantor K de dimensão 4 é representado pela notação K^4. A primeira etapa é $\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right)^4$ que consiste de $2^4 = 16$ cubinhos de lado $\frac{1}{3}$. Assim, podemos pensar que dividimos o cubo unitário em $3^4 = 81$ cubinhos de lado $\frac{1}{3}$, e removemos 65 deles, ficando com 16. Na etapa seguinte, sobram os cubinhos $\left(\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]\right)^4$, o que dá $4^4 = 256$ cubinhos de lado $\frac{1}{9}$. Como ao dividir 16 cubinhos de lado $\frac{1}{3}$ em cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ obtemos $16 \cdot 3^4 = 1296$ cubinhos de lado $\frac{1}{9}$. Como sobraram 256, removemos no total 1296 – 256 = 1040 (65·16) cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ nessa etapa. Na próxima etapa sobram os cubinhos $\left(\left[0,\frac{1}{27}\right]\cup\left[\frac{2}{27},\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{7}{27}\right]\cup\left[\frac{8}{27},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{19}{27}\right]\cup\left[\frac{20}{27},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\frac{25}{27}\right]\cup\left[\frac{26}{27},1\right]\right)^4$, o que dá $8^4 = 4096$ cubinhos de lado $\frac{1}{27}$. Ao dividir 256 cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ em cubinhos de lado $\frac{1}{27}$ obtemos $256 \cdot 3^4 = 20736$ cubinhos de lado $\frac{1}{27}$. Como sobraram 4096, removeremos no total 20736 – 4096 = 16640 cubinhos de lado $\frac{1}{27}$ nessa etapa e, assim, sucessivamente.

Simbolicamente, podemos escrever a etapas de cubinhos retirados do conjunto de Cantor K de dimensão 4 da seguinte maneira:

Etapa 1: $65 \cdot 16^0 = 81 \cdot 16^0 - 16^1 = 65 = (65 \cdot 16^0)$; lado de cada cubinho $\frac{1}{3}$.

Etapa 2: $65 \cdot 16^1 = 81 \cdot 16^1 - 16^2 = 1296 - 256 = 1040 = (65 \cdot 16^1)$; lado de cada cubinho $\frac{1}{9}$.

Etapa 3: $65 \cdot 16^2 = 81 \cdot 16^2 - 16^3 = 20\ 736 - 4\ 096 = 16\ 640 = (65 \cdot 16^2)$; lado de cada cubinho $\frac{1}{27}$.

... ...

Etapa k: $65\cdot16^{(k-1)} = 81\cdot16^{(k-1)} - 16^k = (65\cdot16^{k-1})$; de lado $\frac{1}{3^k}$.

Portanto, o volume de cada cubinho é de $\left(\frac{1}{3^k}\right)^4 = \frac{1}{81^k}$, logo o volume total dos cubinhos retirados na k-ésima etapa é de $65\cdot16^{k-1}\cdot\frac{1}{81^k} = \frac{65}{16}\cdot\left(\frac{16}{81}\right)^k = \frac{65}{81}\cdot\left(\frac{16}{81}\right)^{k-1}$ e, podemos perceber que montamos uma lei de formação para k pertencente aos naturais.

Para k = 1: $\frac{65}{81}\cdot\left(\frac{16}{81}\right)^0 = \frac{65}{81}$

Para k = 2: $\frac{65}{81}\cdot\left(\frac{16}{81}\right)^1 = \frac{65}{81}\cdot\left(\frac{16}{81}\right)$

Para k = 3: $\frac{65}{81}\cdot\left(\frac{16}{81}\right)^2$

... ...

continuando até o infinito.

Verificamos que a sequência construída forma uma progressão geométrica infinita cuja razão é $\frac{16}{81}$. Aplicando na soma da P.G. infinita, temos

$$S_{\infty} = \frac{\frac{65}{81}}{1-\frac{16}{81}} = \frac{\frac{65}{81}}{\frac{65}{81}} = 1.$$

Conjunto de Cantor de dimensão 5

Seguindo o mesmo critério adotado anteriormente, definimos como conjunto de Cantor de dimensão 5 pela notação K^5, sendo K o conjunto de Cantor.

A primeira etapa é $\left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right)^5$ que consiste de $2^5 = 32$ cubinhos de lado $\frac{1}{3}$. Assim, podemos pensar que dividimos o cubo unitário em $3^5 = 243$ cubinhos de lado $\frac{1}{3}$, e removemos 211 (243 – 32 = 211) deles, ficando com 32. Na etapa seguinte, sobram os cubinhos

$\left(\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]\right)^5$, o que dá 4^5 = 1 024 cubinhos de lado $\frac{1}{9}$. Como ao dividir 32 cubinhos de lado $\frac{1}{3}$ em cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ obtemos $32\cdot3^5$ = 7 776 cubinhos de lado $\frac{1}{9}$. Como sobraram 1 024, removemos no total 7 776 – 1024 = 6 752 ($211\cdot32$) cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ nessa etapa. Na próxima etapa sobram os cubinhos $\left(\left[0,\frac{1}{27}\right]\cup\left[\frac{2}{27},\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{7}{27}\right]\cup\left[\frac{8}{27},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{19}{27}\right]\cup\left[\frac{20}{27},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\frac{25}{27}\right]\cup\left[\frac{26}{27},1\right]\right)^5$, o que dá 8^5 = 32 768 cubinhos de lado $\frac{1}{27}$. Ao dividir 1 024 cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ em cubinhos de lado $\frac{1}{27}$ obtemos $1\,024\cdot3^5$ = 248 832 cubinhos de lado $\frac{1}{27}$. Como sobraram 32 768, removeremos no total 248 832 – 32 768 = 216 064 ($211\cdot32^2$) cubinhos de lado $\frac{1}{27}$ nessa etapa e, assim, sucessivamente. Simbolicamente, podemos escrever a etapas de cubinhos retirados do conjunto de Cantor K de dimensão 5 da seguinte maneira:

Etapa 1: $211\cdot32^0 = 243\cdot32^0 - 32^1 = 211 = (211\cdot32^0)$; lado de cada cubinho $\frac{1}{3}$.

Etapa 2: $211\cdot32^1 = 243\cdot32^1 - 32^2 = 7776 - 1024 = 6752 = (211\cdot32^1)$; lado de cada cubinho $\frac{1}{9}$.

Etapa 3: $211\cdot32^2 = 243\cdot32^2 - 32^3 = 248832 - 32\,768 = 216064 = (211\cdot32^2)$; lado de cada cubinho $\frac{1}{27}$.

... ...

Etapa k: $211\cdot32^{(k-1)} = 243\cdot32^{(k-1)} - 32^k = (211\cdot32^{k-1})$; de lado $1/3^k$.

Portanto, o volume de cada cubinho é de $\left(\frac{1}{3^k}\right)^5 = \frac{1}{243^k}$, logo o volume total dos cubinhos retirados na k-ésima etapa é de $211\cdot32^{k-1}\cdot\frac{1}{243^k} = \frac{211}{32}\cdot\frac{32^k}{243^k} = \frac{211}{243}\cdot\left(\frac{32}{243}\right)^{k-1}$ e, podemos perceber que montamos uma lei de formação para k pertencente aos naturais.

Para k = 1: $\frac{211}{243}\cdot\left(\frac{32}{243}\right)^{0}=\frac{211}{243}$

Para k = 2: $\frac{211}{243}\cdot\left(\frac{32}{243}\right)^{1}=\frac{211}{243}\cdot\frac{32}{243}$

Para k = 3: $\frac{211}{243}\cdot\left(\frac{32}{243}\right)^{2}$

... ...

continuando até o infinito.

Verificamos que a sequência construída forma uma progressão geométrica infinita cuja razão é $\frac{32}{243}$. Aplicando na soma da P.G. infinita, temos

$$S_{\infty}=\frac{\frac{211}{243}}{1-\frac{32}{243}}=\frac{\frac{211}{243}}{\frac{211}{243}}=1.$$

Conjunto de Cantor de dimensão n

Seguimos este processo até chegarmos ao conjunto de Cantor K de dimensão n, denotado por K^n. Usando o método análogo aos dois casos anteriores, temos que:

A primeira etapa é $\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\right)^{n}$ que consiste de 2^n cubinhos de lado $\frac{1}{3}$. Assim, podemos pensar que dividimos o cubo unitário em 3^n cubinhos de lado $\frac{1}{3}$, e removemos $\left(3^n-2^n\right)$ deles, ficando com 2^n. Na etapa seguinte, sobram os cubinhos $\left(\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]\right)^{n}$, o que dá 4^n cubinhos de lado $\frac{1}{9}$. Como ao dividir 2^n cubinhos de lado $\frac{1}{3}$ em cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ obtemos $2^n\cdot3^n$ cubinhos de lado $\frac{1}{9}$. Como sobraram 4^n, removemos no total $2^n\cdot3^n-4^n=2^n\cdot3^n-2^n\cdot2^n=2^n(3^n-2^n)$ cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ nessa etapa. Na próxima etapa sobram os cubinhos $\left(\left[0,\frac{1}{27}\right]\cup\left[\frac{2}{27},\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{7}{27}\right]\cup\left[\frac{8}{27},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{19}{27}\right]\cup\left[\frac{20}{27},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\frac{25}{27}\right]\cup\left[\frac{26}{27},1\right]\right)^{n}$, o que dá

8^n cubinhos de lado $\frac{1}{27}$. Ao dividir 4^n cubinhos de lado $\frac{1}{9}$ em cubinhos de lado $\frac{1}{27}$ obtemos $4^n \cdot 3^n$ cubinhos de lado $\frac{1}{27}$. Como sobraram 8^n, removeremos no total $4^n \cdot 3^n - 8^n = 4^n \cdot 3^n - 4^n \cdot 2^n = 4^n(3^n - 2^n) = \left(2^n\right)^2 (3^n - 2^n)$ cubinhos de lado $\frac{1}{27}$ nessa etapa e, assim, sucessivamente. Simbolicamente, podemos escrever a etapas de cubinhos retirados do conjunto de Cantor K de dimensão 5 da seguinte maneira:

Etapa 1: $(3^n - 2^n)\cdot\left(2^n\right)^0 = 3^n \cdot\left(2^n\right)^0 - \left(2^n\right)^1 = 3^n - 2^n$; lado de cada cubinho $\frac{1}{3}$.

Etapa 2: $(3^n - 2^n)\cdot\left(2^n\right)^1 = 3^n \cdot\left(2^n\right)^1 - \left(2^n\right)^2 = 2^n \cdot(3^n - 2^n)$; lado de cada cubinho $\frac{1}{9}$

.

Etapa 3: $(3^n - 2^n)\cdot\left(2^n\right)^2 = 3^n \cdot\left(2^n\right)^2 - \left(2^n\right)^3 = \left(2^n\right)^2 \cdot(3^n - 2^n)$; lado de cada cubinho

$\frac{1}{27}$.

... ...

Etapa k: $(3^n - 2^n)\cdot\left(2^n\right)^{k-1} = 3^n \cdot\left(2^n\right)^{k-1} - \left(2^n\right)^k$ $(3^n - 2^n)\cdot(2^n)^{(k-1)} = 3^n\cdot(2^n)^{(k-1)} - (2^n)^k$; de lado $1/3^k$.

Portanto, o volume de cada cubinho é de $\left(\frac{1}{3^k}\right)^n = \frac{1}{3^{nk}}$, logo o volume total dos cubinhos retirados na k-ésima etapa é de $\left(2^n\right)^{k-1}\cdot(3^n - 2^n)\cdot\frac{1}{3^{nk}} = \frac{2^{nk}}{2^n}\cdot(3^n - 2^n)\cdot\frac{1}{3^{nk}} = \left(\frac{3^n - 2^n}{2^n}\right)\cdot\left(\frac{2^n}{3^n}\right)^k = \left(\frac{3^n - 2^n}{3^n}\right)\cdot\left(\frac{2^n}{3^n}\right)^{k-1}$ o que concluímos de fato que lei de formação para k pertencente aos naturais forma uma progressão geométrica tendendo ao infinito cujo primeiro termo é $\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n}\right)$ e a razão $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n < 1$.

Aplicando na soma infinita da P.G., temos que:

$$\frac{\left(\dfrac{3^n - 2^n}{3^n}\right)}{\left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{3^n - 2^n}{3^n} \cdot \frac{3^n}{3^n - 2^n} = 1.$$

7 CONCLUSÃO

O ensino das ciências vem passando por profundas transformações. E no contexto das transformações, o professor de matemática se sente no dever de acompanhar os avanços tecnológicos, de mudar sua metodologia de ensino e de criar estratégias que seduzam a atenção dos alunos, principalmente no momento que estamos vivenciando (pandemia Covid – 19), que muitos professores tiveram que aprender uma nova forma de ensinar.

Propondo uma alternativa de ensino, lançamos mãos na estrutura geométrica dos fractais. Abordando fatos históricos, seus criadores e as relações matemáticas presentes em cada figura, descobrindo dimensão, comprimento, área, volume e relações de recorrência tão importantes...

É claro que o estudo detalhado dos fractais precisa de outros conhecimentos matemáticos e o professor deve inseri-los em suas aulas à medida que os conteúdos do ensino médio avançam. Encorajamos que haja uma investigação por parte dos alunos, que eles sejam os reais descobridores dos padrões presentes em cada figura e que possam criar, a partir de fractais existentes, novas figuras por autossemelhança.

Destacamos que nesse trabalho oferecemos maneiras de se construir, passo a passo, todos os fractais clássicos. Seja através de uma reta, de um triangulo, de um quadrado, etc., que fazem parte da geometria euclidiana estudada no ensino médio. E quando a figura já apresenta um padrão de construção, fizemos uma análise matemáticas de todas as relações conhecidas nos fractais.

Ao professor, que fizer uso desse trabalho, reforçamos que se construam fractais com auxílio de programas computacionais, que se faça uso do laboratório de informática, que se investiguem através da internet aplicações dos fractais nas diversas áreas do conhecimento.

Reforçamos que toda estrutura com auto semelhança presente na natureza ou em experimentos químicos, por exemplo, deva ser tratado com olhar interdisciplinar. A nosso ver, quando o conteúdo de matemáticas fica além dos limites da sala de aula e se relaciona com as outras componentes, o aluno não fica apenas no "decoreba" das fórmulas, ele aprende de fato.

Por fim, esperamos que esse trabalho possa influenciar de alguma maneira na didática do professor de matemática. Acreditamos que a beleza presente em cada construção possa prender a atenção dos alunos e que, com a participação ativa do professor, eles possam encontrar todas as relações matemáticas presentes em cada figura.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALENCAR FILHO, E. **Teoria Elementar dos Números**. 20 ed. São Paulo: Nobel, 1985.

[2] ARITA, A. C. P.; SILVA, F. S. M.; GAMBERA, L. R. A geometria da Esponja de Menger. **C.Q.D - Revista Virtual Paulista de Matemática**, v. 2, n. 2, p. 1-8, 2013. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v02n02a07-a-geometria-da-esponja.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2020.

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blücher, 1994.

[4] KARAS, E. W. **Tópicos de Matemática 2: Fractais**. Apostila. Curitiba: UFPR, 2019. Disponível em: <https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ensino/fractais/esponja_Menger.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2020.

[5] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Vol. 1. Projeto Euclides. 7 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

[6] MURAKAMI, C; IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Vol. 1: conjuntos e funções. 8 ed. São Paulo: Atual, 2004.