Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

# A lógica matemática e os diagramas de Venn subsidiando uma abordagem para a resolução de problemas envolvendo operações com conjuntos no ensino médio

Luiz Eduardo de Sousa Almendra

Teresina

2020

**Luiz Eduardo de Sousa Almendra**

# A lógica matemática e os diagramas de Venn subsidiando uma abordagem para a resolução de problemas envolvendo operações com conjuntos no ensino médio

Dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Educação matemática.

Orientador: Prof. Dr Pedro Antônio Soares Junior.

Teresina

2020

A448l Almendra, Luiz Eduardo de Sousa.
A lógica matemática e os diagramas de Venn subsidiando uma abordagem para a resolução de problemas envolvendo operações com conjuntos no ensino médio / Luiz Eduardo de Sousa Almendra. – 2020.
90 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.
"Orientador: Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Junior."

1. Educação matemática. 2. Lógica matemática. 3. Operações com conjuntos. 4. Diagramas de Venn. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha Catalográfica elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB 3ª Região/1188

LUIZ EDUARDO DE SOUSA ALMENDRA

# A LÓGICA MATEMÁTICA E OS DIAGRAMAS DE VENN SUBSIDIANDO UMA ABORDAGEM PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO OPERAÇÕES COM CONJUNTOS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Aprovado por:

Pedro Antônio Soares Júnior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Presidente e examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí - UFPI

TERESINA
Novembro/2020

**Luiz Eduardo de Sousa Almendra graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual do Piauí (UESPI). No curso de Mestrado PROFMAT/UESPI. Atualmente é professor da Privada em Teresina, e professor da Prefeitura Municipal de Teresina.**

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus, a minha família e meus alunos.

# AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter guiado o meu caminho e me abençoado com esta conquista.

À minha mãe, Maria de Fátima de Sousa, que me incentivou a não desistir e proporcionou a educação que tenho.

À meu pai, Luiz Antônio Almeida e Almendra, que sempre me mostrou o valor de ter paciência e perseverança no que faço.

À minha avó, Rosalvi Cardoso de Castro Almeida e Almendra, que sempre proporcionou as condições ao meu desenvolvimento acadêmico.

Ao meu irmão, Francisco Estevo de Sousa Almendra, por todo o apoio e companheirismo.

À minha companheira, Ana Carolina Gomes de Sousa, que me incentivou em cada etapa e, quando necessário, me trazia a tranquilidade.

À minha família, que sempre acreditou e acredita o meu potencial.

Ao meu professor e orientador Dr. Pedro Antônio Soares Júnior, pela atenção dedicada a mim e a meu trabalho.

Ao meu professor Antônio Luis da Silva, pela inspiração a seguir o caminho da Matemática.

Aos meus amigos da turma de graduação e também da turma de mestrado, pela união que sempre tivemos e a fraternidade que construímos.

Aos meus amigos que levo da minha vida, em especial Marco Talles Ribeiro de Pádua, por todo o apoio e momentos que contribuem para minha formação pessoal.

Aos professores: Dr. Afonso Norberto da Silva e Me. José Arimatéa Rodrigues Melo Junior, que sempre tive como espelho de atuação profissional.

Aos professores do PROFMAT-UESPI, a minha gratidão.

À UESPI, pela oportunidade concedida.

# RESUMO

Neste trabalho, estudamos algumas técnicas de resolução de problemas que envolvem operações com conjuntos, uma abordagem subsidiada pelos princípios da Lógica Matemática. Apresentamos um método que pode contribuir para apropriação dessa temática, com foco na resolução de problemas que envolvem operações com conjuntos no contexto do ensino médio. Realizamos uma pesquisa bibliográfica do tipo qualitativa, com revisão da literatura, em que associamos algumas técnicas de resolução de problemas a um algoritmo baseado nas ferramentas de Lógica Matemática e diagramas de Venn, com explorações de problemas adequados para as turmas do ensino médio.



**Palavras-chave:** Educação matemática; lógica matemática; operações com conjuntos; diagramas de Venn.

# ABSTRACT

In this work, we studied some problem-solving techniques that involve set operations, an approach supported by the principles of Mathematical Logic. We presented a method that can contribute to the adequation of this theme, with a focus on solving problems that involve set operations in the high school context. We conducted a qualitative bibliographic search, with a literature review, in which we associated some problem-solving techniques to an algorithm based on the tools of Mathematical Logic and Venn diagrams, making use of problems adequate for high school classes.


**Keywords:** Mathematics education; mathematical logic; set operations; Venn diagrams.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Sumário

# 1 Introdução

A Matemática está presente em todos campos da atividade humana e por isso se torna imprescindível compreender tal área do conhecimento. O processo de ensino-aprendizado da Matemática como ciência ou como disciplina curricular está sempre rodeado por diversos aspectos: aplicabilidade, contextualização dos conteúdos, algoritmos e entre outros. É conveniente que tais aspectos estejam sempre caminhando juntos a cada habilidade a ser desenvolvida pelos alunos, em cada conteúdo trabalhado.

Além disso, ao focar qualquer um desses aspectos, é inevitável que apareçam ligações com os demais, ou seja, o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizado é construído gradativamente levando em conta todos os ângulos desse processo.

Destacando a aplicabilidade de um determinado conteúdo matemático é preciso levar em consideração os contextos que o conteúdo pode está imerso e também como podemos utilizar as ferramentas matemáticas que o conteúdo propicia para resolver problemas dentro desse contexto. Corroborado por (PCN, Brasil, 1998):

> "Mostram que é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos, indicando a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática a ser desenvolvida em sala de aula."

Assim, é sempre interessante que o aluno esteja ciente do tipo de problemas que cada conteúdo vai fornecer ferramentas para resolver, bem como a maneira que tais ferramentas podem e devem ser usadas para alcançar o objetivo de resolver o problema.

Acompanhando essa linha de pensamento, a Matemática do ensino médio ganhou um nos últimos anos uma abordagem bem contextualizada com o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, que mede as habilidades que os estudantes devem ter adquirido por meio de questões que acima de tudo requer que o aluno saiba identificar as ferramentas matemáticas necessárias em cada problema e saiba utilizar tais ferramentas para chegar a solução do problema. Esse sistema de avaliação também influenciou o comportamento dos vestibulares tradicionais, levando-os a modificar seu modo de abordar os conteúdos. Ou seja, os alunos que serão avaliados por essas provas devem saber enxergar a Matemática como uma coleção de ferramentas de que possibilita a eles enfrentar e vencer desafios provindos de problemas cotidianos nas mais diversas áreas profissionais e acadêmicas.

Para Polya apud Onuchic (1999[17], p.210), “resolver problemas era o mais importante para se fazer matemática, e ensinar o aluno a pensar era sua importância primeira. Apesar de ser importante e compor os currículos das civilizações antigas, a importância dada pelos educadores matemáticos a resolução de problemas é recente, como afirma Onuchic (1999[17], p.2003): A importância dada a resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção.

Neste trabalho propomos um estudo de algumas ferramentas matemáticas que associadas de maneira adequada podem facilitar a resolução de problemas que envolvem operações com conjuntos, em particular problemas que envolvam quantidade de elementos de conjuntos, no ensino médio. Essas ferramentas dão o alicerce para um algoritmo que pode auxiliar o estudante na resolução de um problema desse conteúdo, desde a sua interpretação até a determinação da solução do problema.

Utilizamos elementos da Lógica Matemática, que estão ligados as etapas de interpretação dos problemas; elementos das próprias operações com conjuntos que são associados à interpretação lógica; e os diagramas de Venn, que representam visualmente os problemas, facilitando o desenvolvimento do problema e a utilização das demais ferramentas.

# 2 Elementos teóricos básicos

Nesse capítulo, empregamo-nos em situar o leitor no universo que esse trabalho está imerso, através dos elementos básicos que serviram de alicerce para o desenvolvimento do trabalho. Visto que, objetivamos desenvolver e propor um algoritmo para resoluções de problemas com operações com conjuntos, baseado em uma interpretação lógica dos problemas e em uma representação gráfica dessa interpretação, este capítulo foi dividido em três seções, uma para cada aspecto do problema e sua resolução. Uma seção tratamos dos elementos básicos para a interpretação através da lógica matemática; em uma seção tratamos dos elementos que propiciam o entendimento do objeto de conhecimento que o problema está contido; e em uma seção descrevemos como é feita a representação gráfica da interpretação.

## 2.1 Elementos da lógica matemática

Nessa seção tratamos superficialmente da contextualização histórica da Lógica Matemática. Descrevemos aqui os conceitos de argumentos e proposições, os princípios lógicos básicos e como tais princípios e conceitos culminam nas operações lógicas.

### 2.1.1 Um breve histórico

O ato de pensar é inerente ao ser humano e cada vez que se analisamos aspectos de um determinado objeto de estudo com o intuito de chegar a uma conclusão sobre o mesmo,utilizamos essa característica de nossa espécie. É comum, na linguagem informal, utilizarmos o termo “lógica”para expressar a ideia de pensamento com análise e conclusão, bem como, muitas vezes diz-se que um pensamento é “logico”quando deseja-se expressar uma obviedade da conclusão do pensamento. Nota-se que, a Lógica (ou Lógica Matemática) não se distancia tanto dessa visão comum do termo.

> Embora existam muitas definições para o campo de estudo da lógica, essas definições não diferem essencialmente umas das outras; há um certo consenso entre os autores de que a Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade. (PINHO, 1999, p.2)

Na literatura existem registros de que em tempos remotos na Índia já tenham sido escritos textos sobre o assunto, porém é aceito pela maioria dos estudiosos que a lógica tenha começado na Grécia Antiga, por volta do século IV antes de cristo.

> Os primeiros trabalhos sobre Lógica são devidos a Parmênides, Zenão, e ao grupo conhecido como "sofistas", mas o verdadeiro criador da Lógica é, sem dúvida, Aristóteles, pois foi ele quem sistematizou e organizou esse conhecimento, elevando-o à categoria de ciência. (PINHO, 1999, p.2)

Nesse contexto apresentado nasce esse campo de estudo que utilizamos como ferramenta de organização do pensamento e formulação de sequências didáticas para resolução de problemas das mais diversas áreas.

### 2.1.2 Conceitos básicos

Dentro do campo da Lógica, as sequências e organizações do pensamento, são chamados de "argumentos", enquanto que as afirmações a serem organizadas e sequenciadas são chamadas de "proposições". Assim "um argumento é, pois, um conjunto de proposições tal que se afirme que uma delas é derivada das demais" (PINHO, 1999, p. 2), onde é chamada de conclusão a proposição que deriva das outras, e essas outras, chamadas de premissas. Por exemplo, no argumento:

Se chover, a temperatura vai baixar.
Choveu.
Logo a temperatura baixou.

A conclusão é “a temperatura baixou”, pois é a proposição que depende das demais (premissas).

É importante entender que se caracteriza um argumento “válido” quando existe uma real dependência da conclusão em relação às premissas, ou seja, “quando for impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa” (PINHO, 1999, p. 3), caso contrário, o argumento não é válido. Ainda fazendo uma relação com último exemplo, não constitui um argumento válido:

Se chover, a temperatura vai baixar.
Não choveu.
Logo a temperatura não baixou.

Pois, adentrando ao exemplo, a premissa “se chover, a temperatura vai baixar” não exclui outra maneira da temperatura baixar. Logo, a conclusão “a temperatura não baixou” pode não ser verdadeira mesmo com a veracidade das premissas.

Já apresentamos aqui que a Lógica organiza o pensamento e assim se torna possível a dedução de proposições com base nas premissas. Entre outras funcionalidades desse processo está a interpretação de problemas matemáticos incluindo seus questionamentos para assim, serem respondidos com o máximo de objetividade possível. Em outras palavras, a dedução lógica utiliza-se do universo que as premissas proporcionam para chegar, dentre algumas possíveis proposições, a uma conclusão e assim, formar um argumento válido.

Com o tempo, a Lógica se utiliza cada vez mais de símbolos matemáticos que possuem significados mais fixos do que os sentidos das afirmações ditas em linguagem natural (português, inglês, etc), esse novo viés é chamado de Lógica Simbólica, enquanto que a lógica que ainda se baseia na linguagem natural é denominada Lógica Clássica.

Para os nossos propósitos a Lógica Clássica se adequa melhor, pois a principal função da Lógica aqui será a interpretação matemática de problemas, com as relações dadas pelas operações com conjuntos, nesse contexto, tais problemas interpretados pela lógica trazem consigo ideias que devemos compreender para resolvê-los.

> Muitas das ideias envolvidas nos argumentos podem ser apresentadas através de proposições (também chamados enunciados ou sentenças) que se referem a um objeto; por exemplo, "eu ganhei na Loteria", "José atirou uma pedra no lago", "Sócrates é um homem". Tais proposições são chamadas singulares. Existem outras proposições, no entanto, que fazem referência a conjuntos de objetos; por exemplo, "todos os homens são mortais", "alguns astronautas foram à Lua", "nem todos os gatos caçam ratos". Os termos "homens", "astronautas" e "gatos" são conceitos; não se referem a nenhum homem, astronauta ou gato em particular, mas sim ao conjunto de propriedades que faz com que um objeto esteja em uma categoria ou em outra. Tais propriedades são chamadas predicados. (PINHO, 1999, p.4)

Como nosso objetivo é utilizar a Lógica em problemas que envolvem operações com conjuntos e a definição de conjuntos é voltada para classificação de objetos de acordo com suas características, o viés que será seguindo é da Lógica dos Predicados ou Cálculo dos Predicados.

Por esse caminho, ainda destaca-se que:

> O Cálculo de Predicados apresenta dois conceitos matemáticos, a variável, para se referir a um objeto genérico de uma categoria, e os quantificadores, expressões como “para todo” e “existe algum” para se referirem à quantidade de objetos que partilham o mesmo predicado; assim a proposição “todos os homens são mortais” assume a forma “para todo $x$, se $x$ é um homem, então $x$ é mortal” e as proposições “alguns astronautas foram à Lua” e “nem todos os gatos caçam ratos” assumem respectivamente as formas “existe um $x$ tal que $x$ é um astronauta e $x$ foi à Lua” e “existe um $x$ tal que $x$ é um gato e $x$ não caça ratos”. (PINHO, 1999, p.4)

Tendo em vista que o campo e as especificações da Lógica que serão utilizados nesse trabalho estão claras e objetivas, faz-se, daqui em diante, o detalhamento do que se toma como base e de como funciona tal ferramenta. A Lógica tem como alicerce três princípios fundamentais, formalmente apresentados.

> Principio de Identidade: o que é, é; ou seja, todo objeto é idêntico a si próprio. Isso não é um simples jogo de palavras; na verdade, é possível defender a noção oposta, de que a realidade é fluida, de que nada permanece igual a si próprio, e que qualquer raciocínio sobre objetos é uma ficção. Princípio da Não Contradição: um objeto não pode, simultaneamente, ser e não ser. Ou seja, não é possível afirmar e negar o mesmo predicado para o mesmo objeto ao mesmo tempo; ou ainda, de duas afirmações contraditórias, uma é necessariamente falsa. Princípio do Terceiro Excluído: todo objeto é ou não é. Ou seja, uma dada afirmação é necessariamente verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção. (PINHO, 1999, p.5)

Para adentrar à linguagem simbólica da Lógica, Pinho (1999) apresenta primeiramente a definição de proposição simples (sentença ou enunciado), que vem a ser uma declaração que exprime um pensamento com sentido completo; geralmente constituídas de um sujeito, o verbo e seus complementos. Como por exemplo: "A terra é um planeta"; "Todas os animais são seres vivos".

Por outro lado, proposições como "Se eu estudar, passarei de ano", ou "Vou ao restaurante e comerei lagosta" são composições de proposições simples e por isso, chamadas de proposições compostas. E são entendidas como "resultados de operações sobre proposições simples" (PINHO, 1999, p.8).

> Além das proposições, a Lógica dispõe de uma função, chamada "valor lógico" (representada por VL), que associa a cada proposição simples um de dois valores lógicos, chamados "verdadeiro" (representado por V) ou falso (representado por F). Geralmente, o valor lógico V ou F é associado à proposição, em consonância com o significado da proposição no mundo real, embora isso não seja essencial. (PINHO, 1999, p. 8)

Pois o encadeamento lógico de cada situação pode ou não está associado à realidade, ou à contemporaneidade do sentido da proposição. Por exemplo, "Portugal é uma monarquia" é um proposição que possui valor lógico falso atualmente, entretanto se o encadeamento lógico que estiver sendo analisado esteja numa situação acontecida antes do dia 5 de outubro de 1910, a proposição terá valor lógico verdadeiro.

Porém, já mencionamos que o interesse da lógica não é exatamente o fim do argumento, mas sim o próprio argumento como um todo e a maneira com que suas proposições se comunicam.

> O objetivo da Lógica, no entanto, não é verificar se as proposições são verdadeiras ou falsas; ao invés disso, o objeto de estudo da Lógica é examinar o relacionamento entre as proposições, em decorrência dos seus valores lógicos. Dito de outra forma, a Lógica não se interessa pelo significado das proposições, mas apenas por sua forma; no que concerne à Lógica, uma proposição como "A Lua é o satélite da Terra" pode ser tratada como "a proposição p", não sendo necessária nenhuma referência a conhecimentos de astronomia. (PINHO, 1999, p8).

Com base no principio do terceiro excluído e principio da não contradição, respectivamente, dado uma proposição imersa em um encadeamento lógico, ela tem VL exclusivamente ou verdadeiro ou falso, não podendo assumir os dois valores simultaneamente. E de acordo com o princípio da identidade, em um mesmo encadeamento, essa proposição possui o VL bem definido, não podendo ser ora verdadeiro e ora falso.

Segundo (PINHO, 1999, p.9), "em linguagem simbólica, costumamos representar as proposições simples pelas letras $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, etc." para facilitar a identificação de tais proposições em meio às analises lógicas, bem como seus valores lógicos. Por exemplo, representando:

**Exemplo 1.** $p$ - "Elvis foi um cantor" e $q$ - "Marte não é um planeta"

Escreve-se:

$$\text{VL [ p ]} = \text{V e VL [ q ]} = \text{F}$$

Como as proposições compostas são resultados de operações sobre posições simples, faz-se necessário entender como tais operações se dão. Para isso, apresenta-se os conectivos. "A Lógica dispõe de cinco conectivos: "e", "ou", "não", "se – então", e "se e somente se"." (PINHO, 1999, p. 9). E com um ou mais desses conectivos, é possível construir as proposições compostas, por exemplo:

**Exemplo 2.** "Fátima é professora e tem dois filhos."

"Carlos é caminhoneiro e transporta laranjas ou maçãs."

"O violão não é um instrumento musical."

"Nessas férias, se eu viajar, então levarei a minha mãe."

"José será aprovado se e somente se estudar."

"Em Lógica Simbólica, a ação de combinar proposições é chamada "operação", e os conectivos são chamados "operadores", e são representados por símbolos específicos" (PINHO, 1999, p.9). A tabela abaixo associa cada operação com seu operador e seu símbolo:

Tabela 1: Operações lógicas, conectivos e símbolos

| **Operação** | **conectivo** | **Símbolo** |
|---|---|---|
| Conjunção | e | $\wedge$ |
| Disjunção | ou | $\vee$ |
| Negação | não | $\sim$ ou $\neg$ |
| Condicional | se ... então | $\rightarrow$ |
| Bicondicional | se, e somente se | $\leftrightarrow$ |

Fonte: Antônio de Almeida Pinho

Assim, o valor lógico de uma proposição composta dependerá do valor lógico das proposições simples que a compõe e da operação que existe sobre elas. Tais operações serão identificadas por meio de seus respectivos conectivos. Fazendo agora a descrição de cada operação, é relevante explicar que as operações são feitas levando em consideração os valores lógicos de cada proposição simples, para determinar o valor lógico da operação. Segundo Pinho (1999), tem-se:

**Conjunção:**

O valor lógico de uma conjunção de duas proposições simples $p$ e $q$ é verdadeiro apenas quando os valores lógicos de $p$ e $q$ são, simultaneamente, verdadeiros. Em outras palavras, o conectivo "e", em uma proposição composta, indica que para que essa proposição seja verdadeira é necessário que as proposições ligadas pelo conectivo sejam todas verdadeiras. Se qualquer uma das duas proposições (ou ambas) $p$ e $q$ tiverem valor lógico falso, a conjunção será falsa, mesmo que a outra tenha valor lógico verdadeiro. Resumindo em uma tabela de valores lógicos:

Tabela 2: Tabela verdade - Conjunção

| **p** | **q** | **$p \wedge q$** |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Fonte: Antônio de Almeida Pinho

Por exemplo, tomando as proposições:

**Exemplo 3.** $p$ - "Luiz é jogador de futebol", $q$ - "Mariana é uma estilista" , a proposição "Luiz é jogador de futebol e Mariana é uma estilista" é resultado da conjunção de $p$ e $q$, e possui valor lógico verdadeiro somente se ambas as proposições ($p$ e $q$) forem verdadeiras.

**Disjunção:**
No caso de uma disjunção de duas proposições $p$ e $q$, é perceptível que a linguagem comum pode algumas vezes tornar ambígua uma oração com o conectivo "ou". Como exemplo, na proposição "Rafael foi a Teresina ou a Picos", perceba que o pode haver o entendimento que Rafael foi apenas a uma das duas cidades e que não se sabe qual, porém, o entendimento que Rafael pode ter ido a Teresina e depois ter ido a Picos também é valido. Como em Lógica não existe espaço para ambiguidades, divide-se o conectivo "ou" em: "ou" inclusivo, quando acontece que para o valor lógico da disjunção ser verdadeiro depende apenas que uma das proposições que estão sendo operadas tenha valor lógico verdadeiro e a única maneira que a disjunção de $p$ e $q$ ter valor lógico falso é se ambas as proposições ($p$ e $q$) tenham valor lógico falso. E o "ou" exclusivo que indica que para a disjunção tenha valor lógico verdadeiro é necessário que uma, e apenas uma, das proposições que a compõe seja verdadeiro.

No estudo em que a Lógica será imersa nesse trabalho, a disjunção mais adequada é a inclusiva, ou seja, sempre que houver uma proposição composta com o conectivo "ou" ligando duas ou mais proposições, é considerado que para a disjunção ser verdadeira basta que uma das duas proposições simples tenha valor lógico verdadeiro. Por exemplo, a proposição "Renato é professor de inglês ou cantor" tem valor lógico verdadeiro se

Renato tiver pelo menos uma das duas profissões. Resumindo a disjunção inclusiva em uma tabela de valores lógicos:

Tabela 3: Tabela verdade - Disjunção

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Fonte: Antônio de Almeida Pinho

**Negação:**
A linguagem comum expressa muito bem o mecanismo dessa operação. A negação de uma proposição $p$ (representada por $\neg p$ ou $\sim p$) inverte o valor lógico da proposição $p$.

Por exemplo, representado a proposição "Marlene tem um jogo de pratos" por $p$, então $\neg p$ representará expressões como "Marlene não tem um jogo de pratos" ou "É falso que Marlene tem um jogo de pratos". É importante destacar que a negação é uma operação referente a uma única proposição, porém essa proposição pode ser simples ou composta. Resumindo a negação em uma tabela de valores lógicos:

Tabela 4: Tabela verdade - Negação

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Fonte: Antônio de Almeida Pinho

**Condicional:**
Como o próprio nome da operação já sugere, ela expressa uma ligação de duas proposições $p$ e $q$, de maneira que a veracidade de uma proposição é uma condição para que a outra seja também verdade. No exemplo "Se eu ganhar na loteria, então ficarei rico", utilizando os conectivos "se... então", é feita a ligação das proposições $p$ - "eu ganhar

na loteria” e $q$ – “ficarei rico”. E a proposição resultada da condicional indica que o acontecimento de $p$ tem como consequência o acontecimento de $q$, onde, em Lógica, $p$ é chamada de antecedente e $q$ é chamada de consequente.

Quanto ao valor lógico da operação condicional, ele está associado ao fato do antecedente ter ou não a influencia no acontecimento do consequente. Assim, pode ocorrer algumas organizações para os valores lógicos de uma condicional e a proposições que estão sendo operadas por ela. Tomando o exemplo tratado acima, pode-se fazer a distribuição dessas organizações:

Caso 1 – Se “eu ganhar na loteria” tiver valor lógico verdadeiro e “ficarei rico” também, então a condicional tem valor lógico verdadeiro, visto que a proposição $p$ ser verdadeira garantiu o valor lógico da proposição $q$, como a proposição completa (resultado da condicional) já expressava no seu sentido completo.

Caso 2 – Se “eu ganhar na loteria” tiver valor lógico verdadeiro e “ficarei rico” tiver valor lógico falso, então é fácil perceber que a veracidade da proposição $p$ não garantiu a veracidade da proposição $q$. Logo, o sentido completo da proposição não é verdadeiro, a condicional é falsa.

Caso 3 – Se “eu ganhar na loteria” tiver valor lógico falso, tem-se o entendimento de que não é possível garantir se o valor lógico de “ficarei rico”, seja ele verdadeiro ou falso, é ou não decorrente da proposição do antecedente, visto que ela não se mostrou verdadeira. Nesse caso, tem-se que o valor lógico da condicional é verdadeiro, independente do valor lógico do consequente.

> Existem vários motivos para isso, e vamos aqui apresentar o mais simples. Quando o antecedente for falso, temos quatro possibilidades para o valor lógico da condicional: Se a Lógica adotasse a segunda possibilidade, a condicional assumiria os mesmos valores lógicos do consequente, independentemente do antecedente, o que não parece razoável; se assumisse a terceira, o antecedente e o consequente poderiam ser permutados, sem modificar o valor lógico da condicional, o que também não parece ser razoável (se o rio transbordar, a chuva vai continuar caindo).

Tabela 5: Condicional com antecedente falso

| | | Possibilidades da condicional | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
| Antecedente F | Consequente V | V | V | F | F |
| Antecedente F | Consequente F | V | F | V | F |

Fonte: Antônio de Almeida Pinho

> Finalmente, se a quarta possibilidade fosse adotada, a condicional não se distinguiria da conjunção; resta então a primeira possibilidade, que é a adotada pela Lógica. (PINHO, 1999, p. 12)

Portanto, resumindo a operação condicional em uma tabela de valores lógicos:

Tabela 6: Tabela verdade - Condicional

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Fonte: Antônio de Almeida Pinho

**Bicondicional:**
A operação bicondicional pode ser percebida como uma condicional onde cada proposição operada assume simultaneamente o papel de antecedente e consequente, ou seja, dadas as proposições $p$ e $q$ operadas por uma bicondicional, tanto $p$ é condição para que $q$, quanto q é condição para $p$. Além disso, o acontecimento de $p$ é suficiente e também necessário para o acontecimento de $q$, e vise versa.

Tomando como exemplo a proposição "Marcos ganhará uma promoção se e somente se ele tiver destaque entre seus colegas de trabalho", tem-se as proposições "Marcos ganhará uma promoção" ($p$) e "ele tiver destaque entre seus colegas de trabalho" ($q$). Pode-se perceber que essa proposição composta expressa duas informações: para que

Marcos consiga sua promoção é necessário que ele se destaque entre seus colegas de trabalho; ele se destacar entre seus colegas de trabalho é a única maneira que ele tem para conseguir sua promoção.

Para tanto, é conclusivo que o valor lógico da bicondicional é verdadeiro somente quando os valores lógicos das proposições que a compõe forem o mesmo (ambos verdadeiros ou ambos falsos), visto que se um for verdadeiro e o outro falso, significa que uma proposição não é necessária ou suficiente para a outra. No exemplo acima, se Marcos se destacar entre os colegas e mesmo assim não conseguir sua promoção significa que se destacar não era suficiente e se ele ganhar sua promoção mesmo sem ter destaque, ter destaque não era necessário. Assim, resumindo a bicondicional em uma tabela de valores lógicos:

Tabela 7: Tabela verdade - Bicondicional

| **p** | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Fonte: Antônio de Almeida Pinho

## 2.2 Conjuntos: conceitos, propriedades e operações

Nessa seção descrevemos os elementos básicos da teoria dos conjuntos, detalhando os conceitos que a compõe, as relações que existem entre tais conceitos e as operações que se definem dentro do estudo dessas relações e do próprio estudo de conjuntos.

### 2.2.1 Conceitos

A classificação de pessoas, objetos, entes, etc é próprio do ser humano, sempre com intuito de simplificar os estudos referentes ao que foi classificado. Assim, agrupando os objetos de estudo, existe a possibilidade de generalizar as analises para determinado grupo de objetos que possuem uma característica em comum. Para esse tipo de estratégia, se faz necessário uma formalização do estudo e das analise referentes a essa ideia de grupo, essa formalização se dar com o estudo dos "conjuntos" e das "operações com conjuntos".

> Toda matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjunto é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas. (LIMA, 2013, p. 02)

Define-se conjunto como uma coleção, (grupo) de objetos (sendo esses quaisquer entes que serão estudados, como: números, animais, pessoas, etc) que possuem uma característica em comum. Em compensação, utiliza-se a denominação "elementos do conjunto" para esses objetos que possuem determinada característica. "Usa-se a notação $X = \{a, b, c, \dots\}$ para representar o conjunto $X$ cujo os elementos são os objetos $a, b, c$, etc." (LIMA, 2016, p. 2). Por exemplo, o conjunto dos múltiplos positivos de dois: $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

Além disso, de acordo com Lima (2013), se um objeto "$a$" é elemento de um conjunto "$A$", diz-se que "$a$" pertence ao conjunto "$A$", em notação "$a \in A$". A essa relação que existe entre um elemento e seu conjunto, dar-se o nome de "relação de pertinência". Como por exemplo: Ana, Carlos e André compõem uma comissão administrativa de uma empresa. Se for conveniente a um determinado estudo ou analise, pode-se dizer que a comissão administrativa é um conjunto que possuem como elementos: Ana, Carlos e André. E ainda, Ana, Carlos e André são elementos desse conjunto. Em notação:

$$C = \{\text{Ana}, \text{Carlos}, \text{André}\}$$

Ana $\in C$, Carlos $\in C$ e André $\in C$.

Em contrapartida, ainda em comum acordo com Lima (2013), dado o conjunto $A$, se não existe elementos pertencentes ao conjunto $A$, esse conjunto é denominado conjunto vazio, em notação $A = \emptyset$ ou $A = \{\ \}$. Por exemplo, em uma escola que não oferta aulas de francês, o conjunto $F$ dos horários destinados aos estudos de francês na escola não possui elementos, e assim $F = \{\ \}$.

Destacamos a existência de outro conjunto.

> "(...)fixa um conjunto $U$, chamado o universo do discurso, ou conjunto universo. $U$ poderia ser chamado o assunto da discussão, ou o tema em pauta: estaremos falando somente dos elementos de $U$. Uma vez fixado $U$, todos os elementos a serem considerados pertencerão a $U$ e todos os conjuntos serão subconjuntos de $U$, ou derivados destes." (LIMA, 2013, p. 07)

Em um conjunto universo de um determinado estudo, um objeto pode possuir mais de uma característica, que podem classifica-lo em mais de um grupo, ou seja, matematicamente falando, um elemento pode pertencer a mais de um conjunto e um conjunto inteiro pode ser composto por elementos que também pertencem a outro, assim chega-se a outra relação no estudo de conjuntos: "a relação de inclusão".

"Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Se todo elemento de $A$ for também elemento de $B$, diz-se que $A$ é um subconjunto de $B$, que $A$ está contido em $B$ (...). Para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$." (LIMA, 2013, p. 03). Em outras palavras, a relação de inclusão é uma relação que existe entre conjuntos, mas que depende de seus elementos. Se todos os elementos que compõem um determinado conjunto $A$ também são elementos que pertencem a outro conjunto $B$, diz-se que o conjunto $A$ está contido no conjunto $B$ (em notação $A \subset B$). Uma definição que temos em consequência disso é que se $A$ está contido em $B$, diz-se que $A$ é um subconjunto de $B$.

Por exemplo, ainda tratando da comissão administrativa do exemplo anterior, antes que Ana, Carlos e André fossem dessa comissão, eles também precisam fazer parte de do conjunto formado pelos funcionários da empresa. Assim, todos os elementos da comissão também são elementos do conjunto de funcionários, matematicamente falando, a comissão administrativa está contida no conjunto dos funcionários e por isso, a comissão é um subconjunto do conjunto de funcionários.

> Quando $A$ não é subconjunto de $B$, escreve-se que $A \not\subset B$. Isto significa que nem todo elemento de $A$ pertence a $B$, ou seja, que existe pelo menos um objeto $a$ tal que $a \in A$ e $a \notin B$. Por exemplo, sejam $A$ o conjunto de números pares e $B$ o conjunto dos múltiplos de 3. Tem-se que $A \not\subset B$ porque $2 \in A$ mas $2 \notin B$. Tem-se também que $B \not\subset A$ pois $3 \in B$ mas $3 \notin A$. (LIMA, 2013, p.$03-04$)

Além disso, segundo Lima (2013), é interessante perceber duas inclusões particulares. Como todo elemento de $A$ pertence ao conjunto $A$, conclui-se que $A$ é um subconjunto dele mesmo, ou seja, $A \subset A$. E nas palavras de (LIMA, 2013, p. 04), "(...) a outra é, no mínimo curiosa: tem-se $\emptyset \subset A$, seja qual for o conjunto $A$". Isto decorre da ideia de que se o vazio não estivesse contido em qualquer conjunto, deveria existir pelo menos um elemento que pertencesse ao vazio e não pertença ao tal conjunto, visto que o vazio não possui elementos, a afirmativa $\emptyset \subset A$ para qualquer que seja o conjunto $A$ é verdadeira, logo $\emptyset \subset A$. "Diz-se que $A$ é um subconjunto próprio de $B$ quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \emptyset$ e $A \neq B$." (LIMA, 2013, p. 04).

Observando o texto de Lima (2013), é possível listar três propriedades válidas para a relação de inclusão:

1. Reflexividade: $A \subset A$, como já foi exposto, todo elemento de $A$ pertence a $A$.

2. Anti-simetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$, tem-se que todos os elementos de $A$. pertencem a $B$ e todos os elementos de $B$ pertencem a $A$, logo conclui-se que $A = B$.

3. Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$, temos que todos os elemento de $A$ pertencem a $B$ e todos os elementos de $B$ pertencem a $C$, por sua vez, os elementos de $A$ são elemento de $B$, então também são todos elementos de $C$, portanto $A \subset C$.

**Igualdade de Conjuntos:**
Decorrente da propriedade Anti-simétrica, é importante afirmar que dois conjuntos são iguais quando um é subconjunto do outro, ou seja, todos os elementos de um conjunto também é elemento do outro.

**Exemplo 4.** Se o conjunto $P$ é composto pelos números primos maiores que 2 e menores que 8 e o conjunto $J$ é composto pelos números impares maiores que 2 e menores que 8, temos que $P = \{3, 5, 7\}$ e $J = \{3, 5, 7\}$, e como é perceptível, todo elemento de $P$ também é elemento de $J$ e todo elemento de $J$ também é elemento de $P$. Logo, os conjuntos $P$ e $J$ são iguais, em notação: $P = J$.

Finalizando as colocações decorrentes das relações de inclusão, deve-se observar o fragmento de (LIMA, 2013, p. 04): "Diz-se que $A$ é um subconjunto próprio de $B$ quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \emptyset$ e $A \neq B$.".

**Número cardinal (número de elementos de um conjunto):**
Em algumas situações, como as objetivadas por esse trabalho, a descrição dos elementos se coloca em segundo plano em relação a quantidade de elementos do conjunto. "Seja

$X$ um conjunto com $n$ elementos (...) O número natural $n$ chama-se então o número cardinal do conjunto $X$ ou, simplesmente, o número de elementos de $X$." (LIMA, 2013, p. 41)

**Exemplo 5.** Dado o conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$ que possui 4 elementos, temos em notação, $n(A) = 4$. Uma denominação extra que é importante conhecer é que um conjunto que possui número cardinal igual a 1, é dito conjunto unitário, ou seja, dado o conjunto $A$, onde $n(A) = 1$, $A$ é um conjunto unitário.

Ressaltamos que um conjunto unitário ainda é um conjunto e quando ocupa a posição de subconjunto de outro conjunto, ele está sob uma relação de inclusão e não uma relação de pertinência. Em resumo, o conjunto unitário composto por um determinado elemento é diferente do próprio elemento. Como exemplo:

**Exemplo 6.** Na escola "Flor e Vida" o conjunto dos professores $(P)$ possui apenas Marcelo como professor de matemática. Assim, em relação ao conjunto de professores Marcelo é um elemento, entretanto o conjunto unitário dos professores de matemática $(M)$ é um subconjunto de $P$. Em notação:

$$\text{Marcelo} \in P \text{ e } M = \{\text{Marcelo}\} \subset P$$

**Conjunto das Partes:**

Este trabalho é mais voltado para a aritmética existente entre as quantidades de elementos dos conjuntos, por isso é interessante tratar de conjuntos das partes visando seu número cardinal.

> "Dado um conjunto $X$, indica-se com $P(X)$ o conjunto cujos elementos são as partes de $X$. Em outras palavras, afirma que $A \in P(X)$ é o mesmo que dizer $A \subset X$. $P(X)$ chama-se o conjunto das partes de $X$. Ele nunca é vazio: tem-se ao menos $\emptyset \in P(X)$ e $X \in P(X)$." (LIMA, 2016, p. 2)

Ou seja, em símbolos temos: $P(X) = \{A \ ; \ A \subset X\}$, note que $A$ indica um conjunto genérico, ou seja, $P(X)$ é conjunto que possui como elementos os subconjuntos de $X$. Assim, $A$ possui uma relação de inclusão em relação a $X$, mas pode possui uma relação de pertinência em relação a $P(X)$.

Além disso, $n(P(X)) = 2^n$, onde $n$ é o número de elementos de $X$. Em outras palavras, o conjunto $P(X)$ possui $2^n$ elementos.
**Demonstração**

Tomando $X$ um conjunto com $n$ elemento e $A$ um subconjunto qualquer de $X$. Tem-se que $A$ é um subconjunto de $X$ se e somente se, para todo $z \in A$ tem-se que $z \in X$. Além disso, é fácil perceber que para cada elemento $x \in X$ existem duas possibilidades em relação à pertinência a $A$: $x$ pode pertencer ou não a $A$. Assim, ordenando os elemento de $X$, tem-se que $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, são duas possibilidades para cada elemento de $X$. De acordo com (Morgado, 2015, p. 108), "se há $x$ modos de tomar a decisão $D_1$ e, tomada a decisão $D_1$, há $y$ modos de tomar a decisão $D_2$, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões $D_1$ e $D_2$ é $x \cdot y$". Logo, se na composição de $A$, para se tomar cada decisão sobre a pertinência de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ há duas possibilidades (pertencer ou não), então para se tomar todas essas decisões sucessivamente (compor $A$) existem $2^n$ modos. Portanto, existem $n$ conjuntos $A$ ; $A \subset X$.

### 2.2.2 Operações com conjuntos

Compartilhamento de elemento entre os conjuntos que justificou o detalhamento da relação de inclusão tem mais alguns desdobramentos. Dados dois conjuntos $A$ e $B$, podem existir elementos que pertencem aos dois conjuntos, elementos que pertencem somente ao conjunto $A$, elementos que pertencem somente ao conjunto $B$ e também elementos que não pertencem a nenhum dos dois conjuntos. Para analisarmos matematicamente esses tipos de situações, utiliza-se as operações com conjuntos. De acordo com Lima (2016), pode-se descrevê-las:
**Reunião:**
Dados conjuntos $A$ e $B$, define-se reunião de $A$ e $B$ o conjunto $A \cup B$ composto pelos elementos do conjunto $A$ mais os elementos do conjunto $B$. É relevante destacar que os elementos que compõem a reunião de $A$ e $B$ podem pertencer apenas ao $A$, apenas ao $B$ ou pertencer ao $A$ e também ao $B$.

**Exemplo 7.** Seja $F$ o conjunto de alunos de francês de uma escola, composto por Manoel, Rubens e Francisca, e o conjunto $E$ dos alunos de espanhol da mesma escola, composto por Rubens, Renata e Ronaldo. Se tomarmos o conjunto reunião de $F$ e $E$, teremos o conjunto composto por Manoel, Rubens, Francisca, Renata e Ronaldo.

Ainda segundo Lima (2016), tem-se:

**Proposição 2.1.** *Sendo $A, B$ e $C$ conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:*

1. $A \cup A = A$

2. $A \cup \emptyset = A$

3. $A \cup B = B \cup A$

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

***Demonstração***

1. Deve-se provar $A \cup A \subset A$ e $A \subset A \cup A$. Dado $x \in A \cup A$, tem-se que $x \in A$ ou então $x \in A$, ou seja, em ambos os casos, se $x \in A \cup A$ então $x \in A$, logo $A \cup A \subset A$. Agora dado $x \in A$ evidentemente $x \in A \cup A$, logo $A \subset A \cup A$. Portanto $A \cup A = A$.

2. Deve-se provar $A \cup \emptyset \subset A$ e $A \subset A \cup \emptyset$. Dado $x \in A \cup \emptyset$, tem-se que $x \in A$ ou $x \in \emptyset$, então (como não existe $x$ tal que $x \in \emptyset$) obrigatoriamente $x \in A$, logo $A \cup \emptyset \subset A$. Agora dado $x \in A$ evidentemente $x \in A \cup \emptyset$, logo $A \subset A \cup \emptyset$. Portanto $A \cup \emptyset = A$.

3. Deve-se provar $A \cup B \subset B \cup A$ e $B \cup A \subset A \cup B$. Dado $x \in A \cup B$, tem-se que $x \in A$ ou $x \in B$, então (como $x \in B$ não depende de $x \in A$ e vise versa) tem-se $x \in B$ ou $x \in A$, logo $x \in B \cup A$ e assim tem-se $A \cup B \subset B \cup A$. Agora dado $x \in B \cup A$, a mesma argumentação é válida para garantir $x \in A \cup B$, logo $B \cup A \subset A \cup B$. Portanto $A \cup B = B \cup A$.

4. Deve-se provar $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ e $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$. Dado $x \in (A \cup B) \cup C$, tem-se que $x \in A \cup B$ ou $x \in C$. No primeiro caso, se $x \in A$ então $x \in A \cup (B \cup C)$ e se $x \in B$ então $x \in B \cup C$ e assim $x \in A \cup (B \cup C)$. No segundo caso, se $x \in C$ evidentemente $x \in B \cup C$ e então $x \in A \cup (B \cup C)$. Logo $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Agora dado $x \in A \cup (B \cup C)$, tem-se $x \in A$ ou $x \in B \cup C$. No primeiro caso, se $x \in A$ evidentemente $x \in A \cup B$ e então $x \in (A \cup B) \cup C$. No segundo caso, se $x \in B$ então $x \in A \cup B$ e assim $x \in (A \cup B) \cup C$ e se $x \in C$ então $x \in (A \cup B) \cup C$. Logo $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$. Portanto $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

   Logo existe a igualdade $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

**Interseção:**
Dados os conjuntos $A$ e $B$, define-se interseção de $A$ e $B$ o conjunto $A \cap B$, composto pelos elementos comuns aos conjuntos $A$ e $B$. Percebe-se agora que os elementos que compõem a interseção de $A$ e $B$ precisam obrigatoriamente, pertencerem ao conjunto $A$ e também obrigatoriamente pertencerem ao conjunto $B$.

**Exemplo 8.** Tomando os conjuntos $K = \{2, 3, 5, 7\}$ e $L = \{2, 4, 6, 8\}$, tem-se o conjunto $K \cap L = \{2\}$.

Bem como propriedades válidas para reunião, Lima (2016), destaca propriedades para interseção:

**Proposição 2.2.** *Sendo $A, B$ e $C$ conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:*

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

***Demonstração***

1. Deve-se provar $A \cap A \subset A$ e $A \subset A \cap A$. Dado $x \in A \cap A$, tem-se que $x \in A$ e então $x \in A$, ou seja, obrigatoriamente $x \in A$, assim se $x \in A \cap A$ então $x \in A$, logo $A \cap A \subset A$. Agora dado $x \in A$ evidentemente $x \in A \cap A$, logo $A \subset A \cap A$. Portanto $A \cap A = A$.

2. Deve-se provar $A \cap \emptyset \subset \emptyset$ e $\emptyset \subset A \cap \emptyset$. Dado $x \in A \cap \emptyset$, tem-se que $x \in A$ e $x \in \emptyset$, então como não existe $x$ tal que $x \in \emptyset$, tem-se $A \cap \emptyset \subset \emptyset$. Além disso, por definição, tem-se que $\emptyset \subset A$ , logo $\emptyset \subset A \cap \emptyset$. Portanto $A \cap \emptyset = \emptyset$.

3. Deve-se provar $A \cap B \subset B \cap A$ e $B \cap A \subset A \cap B$. Dado $x \in A \cap B$, tem-se que $x \in A$ e $x \in B$, então (como $x \in B$ não depende de $x \in A$ e vise versa) tem-se $x \in B$ e $x \in A$, logo $x \in B \cap A$ e assim tem-se $A \cap B \subset B \cap A$. Agora dado $x \in B \cap A$, a mesma argumentação é válida para garantir $x \in A \cap B$, logo $B \cap A \subset A \cap B$. Portanto $A \cap B = B \cap A$.

4. Deve-se provar $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ e $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$. Dado $x \in (A \cap B) \cap C$, tem-se que $x \in A \cap B$ e $x \in C$, e se $x \in A \cap B$ então $x \in A$ e $x \in B$. Além disso, como $x \in C$, tem-se que $x \in B$ e $x \in C$, ou seja, $x \in B \cap C$. Visto que $x \in A$ e $x \in B \cap C$, tem-se $x \in A \cap (B \cap C)$, logo $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$. Dado $x \in A(B \cap C)$, tem-se que $x \in A$ e $x \in (B \cap C)$, e se $x \in B \cap C$ então $x \in B$ e $x \in C$. Além disso, como $x \in A$, tem-se que $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$. Visto que $x \in C$ e $x \in A \cap B$, tem-se $x \in (A \cap B) \cap C)$, logo $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C)$. Portanto $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Da operação interseção e suas propriedades decorre uma definição chave para o viés que este trabalho vai seguir: "Pode ocorrer que não exista elemento algum $x$ tal que $x \in A$ e $x \in B$. Neste caso, $A \cap B = \emptyset$ e os conjunto $A$ e $B$ dizem-se **disjuntos**." (LIMA, 2016, p.07)

> "Além de possuírem as propriedades já listadas acima, as operações de reunião e interseção são distributivas uma em relação à outra: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Estas igualdades, que podem ser verificadas mediante a consideração dos casos possíveis, constituem, na realidade, regras que regem o uso combinado dos conectivos lógicos 'ou' e 'e'." (LIMA, 2013, p.11)

**Diferença:**
Ainda tomando dois conjuntos $A$ e $B$, determina-se uma operação não comutativa entre os mesmos: a diferença. Assim define-se a diferença entre $A$ e $B$ (em notação $A - B$) como o conjunto composto por todos os elementos que pertencem ao conjunto $A$ e não pertence ao conjunto $B$, da mesma forma, o conjunto $B - A$ é composto por todos os elementos que pertencem a conjunto $B$ e não pertencem ao conjunto $A$.

**Exemplo 9.** Se tomarmos os conjuntos $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $Y = \{0, 2, 4, 6\}$ como exemplo, teremos os conjuntos $X - Y = \{-1, 1\}$ (pois os elementos -1 e 1 atendem as condições: pertencer ao conjunto $X$ e não pertencer ao conjunto $Y$) e $Y - X = \{4, 6\}$ (pois 4 e 6 são os elementos pertencem ao $Y$ e também não pertencem conjunto $Y$).

**Conjunto complementar:**

O conjunto complementar é, antes de um conjunto, uma operação que depende de um conjunto e o conjunto universo em que está contido. Assim,

> "A noção de complementar de um conjunto só faz pleno sentido quando se fixa um (...) conjunto-universo. Então, dado um conjunto $A$ (isto é, um subconjunto de $U$), chama-se complementar de $A$ ao conjunto $A^c$ formado pelos objetos de $U$ que não pertencem a $A$." (LIMA, 2013, p.07)

**Exemplo 10.** Considerando o conjunto universo $U$ composto por todos os números primos e o conjunto $I$ de todos os números primos ímpares, tem-se que $I$ é um subconjunto de $U$ e o complementar de $I$ seria $I^C = \{2\}$.

A partir do princípio do terceiro excluído e do princípio da não-contradição já citados na primeira seção desse capítulo, tem-se que "(...)para todo $x \in U$, não existe uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ (...) e $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo." (LIMA, 2013, p.07)

Decorrente disso e segundo (LIMA, 2013), tem-se as seguintes regras operatórias referentes ao complementar:

1. Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^C)^C = A$.

2. Se $A \subset B$ então $B^C \subset A^C$, ou seja, $A \subset B \Rightarrow B^C \subset A^C$.

3. Unindo as regras (1) e (2), tem-se $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.

Uma observação pertinente e de primordial importância para este trabalho e seus objetivos é a visível correspondência que existe entre algumas operações com conjuntos, definidas nesse capítulo, e algumas operações entre proposições, definidas no capítulo 1 do trabalho.

Considerando os conjuntos $A$ e $B$ contidos em um determinado conjunto universo $U$ de maneira que para que um elemento de $U$ pertença ao conjunto $A$ ele satisfaça uma proposição $p$ e para que um elemento de $U$ pertença ao conjunto $B$ ele satisfaça a proposição $q$. Ou seja,

$$A \subset U, \ B \subset U \text{ onde}$$

$$A = \{x \in U;\ x \text{ satisfaz a proposição } p\}$$

$$B = \{x \in U;\ x \text{ satisfaz a proposição } q\}$$

Visualiza-se uma correspondência entre os conjuntos $A$ e $B$ e as proposições $p$ e $q$, respectivamente.

A seguir listamos e detalhamos 3 correspondências entre operações que existem entre $A$ e $B$ dentro do conjunto universo e operações que existem entre $p$ e $q$.

**Reunião e Disjunção:**

Já foi descrito nesse capítulo que para um elemento de U pertencer ao conjunto $A \cup B$ é preciso que ele pertença ao conjunto $A$ ou ao conjunto $B$, ou seja, pertença a pelo menos um dos conjuntos, não excluindo a possibilidade de pertencer aos dois conjuntos simultaneamente. E como foi descrito em 2.1, o conectivo "ou" indica a operação Disjunção entre proposições; e como foi dito também, nesse trabalho o "ou" sempre será considerado inclusivo. Indicando nesse caso, a disjunção inclusiva entre as proposições $p$ e $q$ que são satisfeitas pelos elementos de $A$ e $B$, respectivamente.

Observando a interpretação lógica feita nesse trabalho para um problema que descreva uma disjunção, será a de um conjunto reunião de dois ou mais conjuntos determinados por elementos que satisfazem as proposições que estão sendo operadas pela disjunção.

**Exemplo 11.** Considerando o conjunto universo composto por todos os homens do Brasil e as proposições:

$$p : \text{homem é alto}$$

$$q : \text{O homem nasceu em Minas gerais}$$

A disjunção entre as duas proposições possui valor lógico verdadeiro se o homem for apenas alto (sem nascer em Minas Gerais), se o homem for apenas mineiro (sem que seja alto) e se o homem for mineiro e alto. Ou seja, a disjunção é verdadeira exatamente para os homens que pertencem ao conjunto $A \cup B$ contido no conjunto universo dos homens Brasileiros.

**Interseção e Conjunção:**

Nesse capítulo também foi descrito que para que um elemento de $U$ pertença ao conjunto $A \cap B$ é preciso que esse elemento pertença, obrigatoriamente, ao conjunto $A$ e ao conjunto $B$, simultaneamente. E como foi descrito em 2.1, o conectivo "e" indica uma conjunção entre proposições, nesse caso, uma conjunção entre as proposições $p$ e $q$ que são satisfeitas pelos elementos de $A$ e $B$, respectivamente.

Observamos a interpretação lógica feita nesse trabalho para um problema que descreva uma conjunção, será a de um conjunto interseção de dois ou mais conjuntos determinados por elementos que satisfazem as proposições que estão sendo operadas pela conjunção.

Ainda no exemplo que considera o conjunto universo composto por todos os homens do Brasil e as proposições:

$$p : \text{homem é alto}$$

$$q : \text{O homem nasceu em Minas gerais}$$

A conjunção entre as duas proposições possui valor lógico verdadeiro somente se o homem for apenas alto e nascer em Minas Gerais. Ou seja, a conjunção é verdadeira exatamente para os homens que pertencem ao conjunto $A \cap B$ contido no conjunto universo dos homens Brasileiros.

**Negação e Complementar:**

Por último, baseando-se que esse capítulo descreve também que para um elemento de $U$ pertença ao conjunto $A^C$ é preciso apenas que esse elemento não pertença ao conjunto $A$. Bem como para um elemento de $U$ pertencer ao conjunto $B^C$ é preciso apenas que esse elemento não pertença ao conjunto $B$. E como foi descrito em 2.1, o conectivo "não" indica negação de uma proposição, nesse caso, as negações das proposições $p$ e $q$ que são satisfeitas pelos elementos de $A$ e $B$, respectivamente.

Observamos a interpretação lógica feita nesse trabalho para um problema que descreva uma negação, será a de um conjunto complementar do conjunto determinado pelos elementos que satisfazem a proposição que está sendo negada.

Continuando com o exemplo de considerar o conjunto universo composto por todos os homens do Brasil e as proposições:

$$p : \text{homem é alto}$$

$$q : \text{O homem nasceu em Minas gerais}$$

A negação da proposição $p$ possui valor lógico verdadeiro somente se o homem não for alto, independentemente se nasceu em Minas Gerais ou não e a negação da proposição $q$ possui valor lógico verdadeiro somente se o homem não nascer em Minas gerais, independentemente de ser alto ou não. Ou seja, a negação da proposição $p$ é verdadeira exatamente para os homens que pertencem ao conjunto $A^C$ contido no conjunto universo dos homens Brasileiros e a negação da proposição q é verdadeira exatamente para os homens que pertencem ao conjunto $B^C$ contido no conjunto universo dos homens Brasileiros.

Definidas as operações com conjuntos e as suas correspondências com as operações entre proposições lógicas, é relevante destacar que o estudo de tais operações nesse trabalho é voltado para a interpretação de problemas que generalizam elementos por meio do agrupamento em conjuntos, com um intuito de uma aplicação em verificações estatísticas do número de elementos de tais conjuntos.

É importante que se saiba que não existem tantas propriedades que envolvam número de elementos de um conjunto, mas (GIOVANNI, et al, 2015, p. 20) traz uma relação primordial para o desenvolvimento de todo o trabalho: "Sendo $A$ e $B$ dois conjuntos finitos, o número de elementos do conjunto $A \cup B$ (...) é dado pela expressão $n\,(A \cup B) = n\,(A) + n\,(B) - n(A \cap B)$". E completa explicando que quando adicionamos aritmeticamente, o número de elementos de $A$ ao número de elementos de $B$, o número de elementos de $A \cap B$ é incluído nessa adição duas vezes, já que tais elementos pertencem a ambos os conjuntos $A$ e $B$. Logo, como não pode existir contagem duplicada de um elemento no conjunto reunião, é necessário que essa quantidade de elementos inclusos duas vezes na adição seja retirada uma das vezes, justificando assim, a subtração de $n(A \cap B)$ que pode-se observar na expressão em questão.

**Exemplo 12.** Tomando os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, d, e, f, g, h\}$ é possível determinar que $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e $A \cap B = \{c, d, e\}$. Além disso, tem-se que $n\,(A) = 5$, $n\,(B) = 6$, $n\,(A \cup B) = 8$ e $n\,(A \cap B) = 3$, quantidades que satisfazem a expressão tratada, já que $5 + 6 - 3 = 8$.

Uma ampliação da expressão é que dado os conjuntos $A, B$ e $C$, é possível encontrar $n\,(A \cup B \cup C)$, note que adicionando aritmeticamente $n\,(A) + n\,(B) + n(C)$ o número de elementos de alguns subconjuntos são contados mais de uma vez, $n\,(A \cap B)$, $n(B \cap C)$ e $n(A \cap C)$ são contados duas vezes cada (por exemplo, $n(A \cap B)$ está sendo incluído em $n(A)$ e em $n(B)$ e $n(A \cap B \cap C)$ está sendo contado três vezes (em $n\,(A)$, $n\,(B)$ e $n(C)$). Fazendo o processo similar ao descrito para a expressão original, é necessário subtrair $n\,(A \cap B)$, $n(B \cap C)$ e $n\,(A \cap C)$ uma vez cada e assim, por ora tem-se a expressão $n\,(A) + n\,(B) + n\,(C) - n\,(A \cap B) - n\,(B \cap C) - n(A \cap C)$, porém tal expressão ainda não define $n(A \cup B \cup C)$. Perceba que ao subtrair $n\,(A \cap B)$, $n\,(B \cap C)$ e $n(A \cap C)$, consequentemente foi subtraído $n(A \cap B \cap C)$ três vezes, já que tal conjunto está contido em cada um dos conjuntos subtraídos. Assim, mesmo que $n(A \cap B \cap C)$ inicialmente estivesse sendo contado três vezes, agora essas três vezes foram subtraídas, e o número de elementos de tal conjunto não está mais sendo contabilizado, logo é necessário adicionar essa quantidade na expressão. Portando, concluindo a expressão, tem-se que:

$$n\left(A \cup B \cup C\right) = n\left(A\right) + n\left(B\right) + n\left(C\right) - n\left(A \cap B\right) - n\left(B \cap C\right) - n\left(A \cap C\right) + n(A \cap B \cap C)$$

**Exemplo 13.** Tomando os conjuntos $A = \{a, b, c, e, f, g, k\}$, $B = \{d, e, f, g, i\}$ e $C = \{c, d, e, f, h, j, k, l\}$, é possível determinar que $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$, $A \cap B = \{e, f, g, \}$, $B \cap C = \{d, e, f\}$, $A \cap C = \{c, e, f, k\}$ e $A \cap B \cap C = \{e, f\}$. Logo tem-se o número de elementos de cada conjunto: $n(A \cup B \cup C) = 12$, $n(A) = 7$, $n(B) = 5$, $n(C) = 8$, $n(A \cap B) = 3$, $n(B \cap C) = 3$, $n(A \cap C) = 4$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$, e tais números satisfazem a expressão em questão, pois $12 = 7 + 5 + 8 - 3 - 3 - 4 + 2$.

## 2.3 Diagramas de Venn

Nessa seção realizamos associações de representações gráficas, através de diagramas de Venn, com as operações com conjuntos e subconjuntos, com o intuito de completar as ferramentas necessárias a resolução de problemas pelo algoritmo que é proposto no próximo capítulo deste trabalho.

A representação das situações problemas dentro do ensino de matemática bem comum nas áreas de geometria. Porém não se limita a tais áreas.

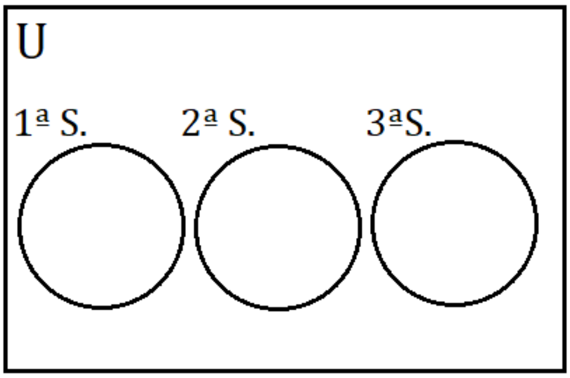
> Ao longo da história da humanidade o homem sempre produziu imagens como forma de expressar os diversos aspectos do seu cotidiano e da sociedade na qual esteve inserido. Essa produção de imagens esteve associada à arte através do desenho, da pintura, da escultura e da arquitetura, mas atualmente com a criação de outras tecnologias de produção de imagens como a fotografia, o cinema, a televisão e mais recentemente o computador, observa-se que a imagem praticamente substituiu a palavra e a escrita como meio de comunicação. (...) Analisando estes fatos, constata-se que tais aspectos são praticamente desprezados pelos professores em sala de aula, que muitas vezes acabam utilizando as imagens apenas como mera ilustração de seu "imponente e importante" conteúdo programático. (LIMA, 2008, p.02)

Assim, um caminho interessante para o entendimento da maneira como as operações com conjuntos acontecem é associando-as a uma representação gráfica, explorando a interpretação visual do problema como uma ferramenta de aproximação do leitor à situação que tal problema representa.

> As proposições categóricas podem ser representadas graficamente, através de um esquema conhecido por Diagramas de Venn, utilizado pela primeira vez pelo matemático inglês John Venn, que viveu no século XIX. Nos diagramas de Venn, cada classe é representada por um círculo, rotulada com o nome da classe; (...) para indicar que a classe possui pelo menos um elemento, incluímos um $X$ no círculo. (PINHO, 1999, p.53)

Além da representação de cada conjunto (classe) com os círculos, é usual representar tais círculos dentro de um retângulo que representará o conjunto universo no qual a situação está inserida.

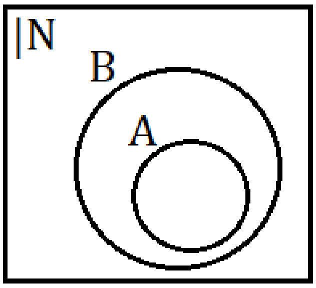
**Exemplo 14.** Em uma escola de ensino médio funcionam uma turma de $1^{\underline{a}}$ série, uma $2^{\underline{a}}$ série e uma $3^{\underline{a}}$ série, pode-se representar graficamente:




Indicando que os círculos representam os conjuntos de alunos de cada série, dentro do retângulo ($U$) que permite visualizar que esses alunos ainda estão incluídos no conjunto universo que representa a escola. Ainda com a representação o exemplo é possível perceber que os círculos não se tocam e assim não existe área comum a mais de um circulo. Essa representação não se apresenta assim por acaso, pelo contrário, existe um significado muito relevante para a interpretação do problema: indica que não há elementos (alunos) que estejam inclusos em mais de uma série simultaneamente. Ou seja, o espaço delimitado por cada círculo representa a abrangência de cada conjunto dentro dos elementos do conjunto universo. Se a representação contasse também com os nomes dos alunos, cada nome deveria ser escrito dentro do circulo representa sua série.

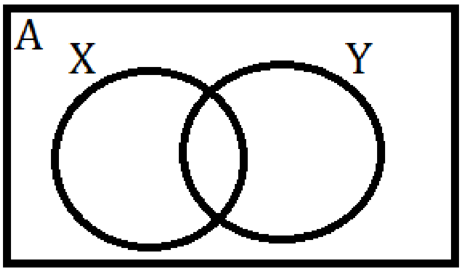
Essa interpretação visual é utilizada para a compreensão de toda representação de diagramas de Venn. Assim, se existir elementos que pertencem a mais de um conjunto simultaneamente, tais conjuntos devem ser representados por círculos que delimitam espaços que possuam no mínimo uma parte em comum. Caso todos os elementos de um conjunto pertencerem a outro conjunto, ou seja, um conjunto ser subconjunto do outro, deve-se representar um círculo dentro do outro no diagrama.

**Exemplo 15.** Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ contidos no conjunto dos números naturais, em diagrama de Venn:



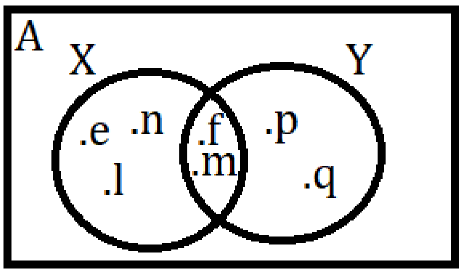

caso dois conjuntos possuírem uma interseção não vazia, porém um conjunto não contenha o outro, a representação deve ser feita por dois círculos secantes.

**Exemplo 16.** Dados os conjuntos $X = \{e, f, l, m, n\}$ e $Y = \{f, m, p, q\}$ contidos no conjunto das letras do alfabeto ($A$), em diagrama de Venn, tem-se a representação:

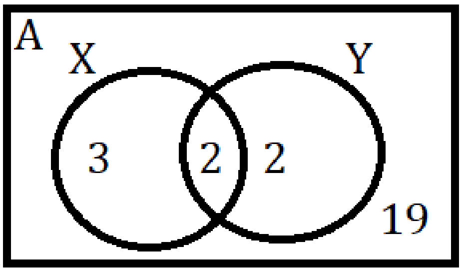



Permitindo a interpretação de que existem elementos que pertencem somente a $X$, elementos que pertencem somente a $Y$, elementos que pertencem aos dois e elementos de $A$ que não pertencem a nenhum dos conjuntos em questão.

Utilizando-se do diagrama, quando conveniente, ainda é possível a representação dos elementos de cada conjunto:



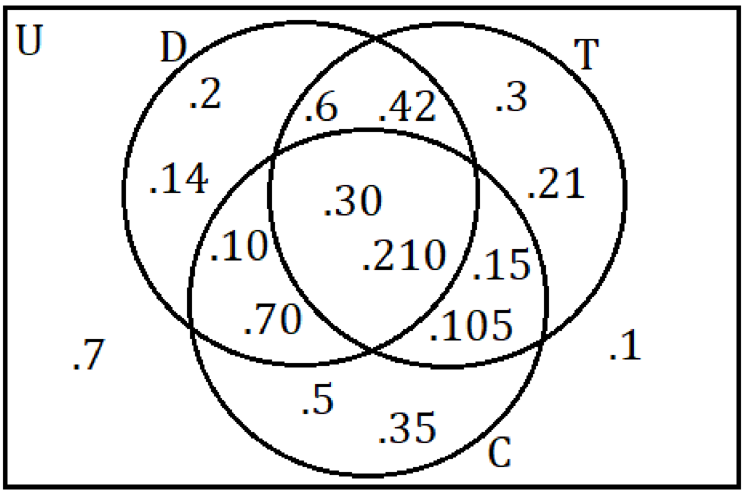
ou também, se conveniente, pode-se representar a quantidade de elementos de cada conjunto e subconjunto:



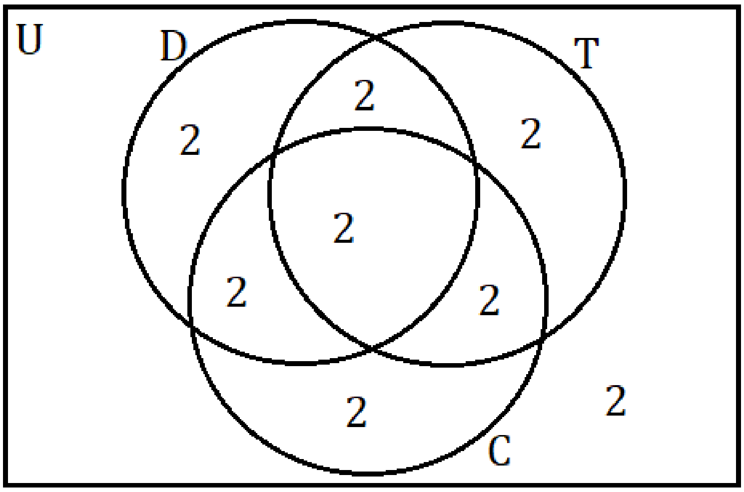

Esses tipos de representações também podem contemplar os casos que tenham conjuntos e subconjuntos e também conjuntos disjuntos.

Com os diagramas de Venn é possível visualizar também situação com três conjuntos contidos em um conjunto universo que podem ou não possuírem elementos em comum.

Considerando uma situação em que o conjunto universo é formado pelos divisores naturais de 210, o conjunto $D$ é formado os divisores de 210 que são pares, o conjunto $T$ é formado pelos divisores de 210 que são múltiplos de 3 e o conjunto $C$ é formado pelos divisores de 210 que são múltiplos de 5, tem-se: $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$, $D = \{2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210\}$ e $T = \{3, 6, 15, 21, 30, 42, 105, 210\}$. Em diagrama, representando os elementos:



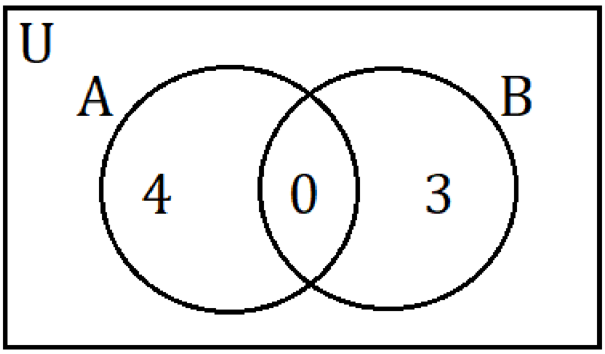

Assim sendo possível identificar visualmente a qual ou quais conjuntos cada elemento pertence. E em diagrama, representando o número de elementos:




Sendo possível identificar a quantidade de elementos de cada conjunto, inclusive das interseções entre os conjuntos em questão.

Essa representação no diagrama de Venn que contém o número cardinal dos conjuntos é muito útil, pois possibilita a uniformização dos diagramas das representações de diferentes situações que possam existe com uma determinada quantidade de conjuntos, visto que pode-se representar da mesma forma as situações, indicando suas diferenças ou ausência de elementos com a quantidade de elementos do conjunto.

**Exemplo 17.** Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g\}$, percebe-se que o conjunto $A$ possui 4 elementos, o conjunto $B$ possui 3 elementos e o conjunto interseção $A \cap B$ não possui elementos. Mesmo assim, em diagrama de Venn, utilizando a informação do número de elementos, pode-se representar:

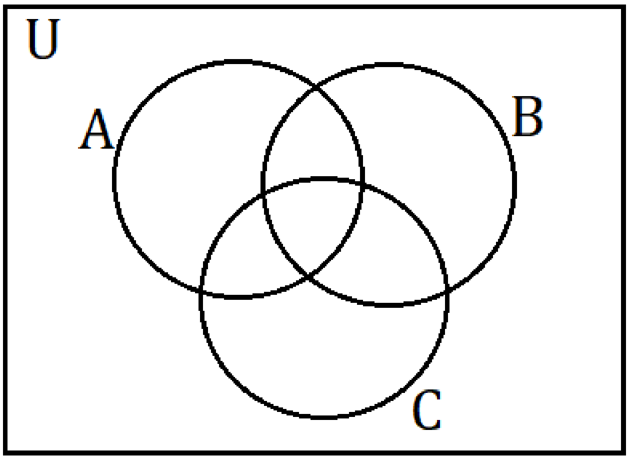


Mesmo com os círculos secantes entre si, dando espaço a uma interseção, a informação da quantidade de elementos indica que essa interseção é vazia.

Essa representação é útil quando não se sabe ao certo número de elementos de todos os conjuntos e subconjuntos. Assim, representa-se inicialmente no diagrama de Venn a existência de todos os conjuntos e subconjuntos e no decorrer do processo, a quantidade de elementos vai definindo se cada conjunto e subconjunto possuem ou não elementos.

Essas distinções feitas pelo número cardinal na representação de diagrama de Venn são válidas para qualquer conjunto, subconjunto ou conjunto resultado de operações entre outros conjuntos. Bem como são válidas para as representações com três conjuntos contidos em um um conjunto universo.

Na representação em diagrama de Venn de três conjuntos é possível visualizar qualquer conjunto resultado de uma operação entre os conjuntos envolvidos. Dados os conjuntos $A, B$ e $C$ contidos em um conjunto universo $U$, como já foi visto, representa-se por diagrama de Venn:




E nessa representação, destacando com a hachura, pode-se visualizar:

Figura 1: Conjunto A

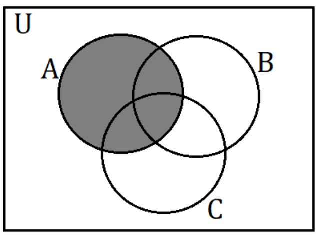



Figura 2: Conjunto B

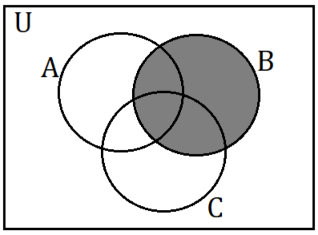
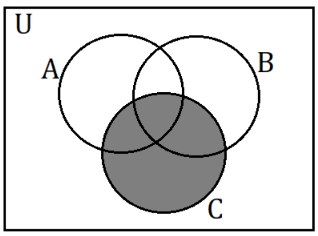



Figura 3: Conjunto C



Bem como, pode-se destacar as interseções dois a dois:

Figura 4: $A \cap B$

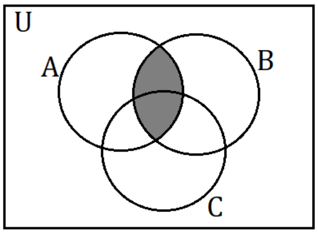



Figura 5: $A \cap C$

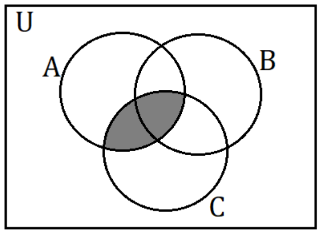
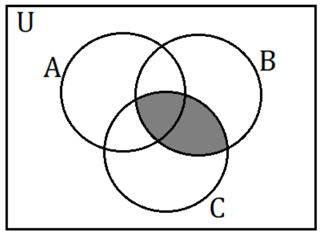
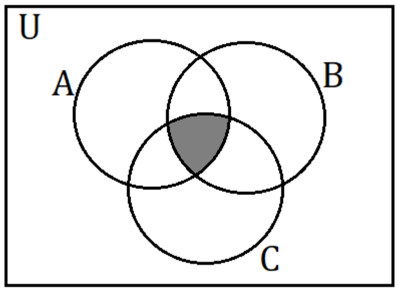



Figura 6: $B \cap C$




Além da interseção entre os três conjuntos:

Figura 7: $A \cap B \cap C$




As uniões dos conjuntos dois a dois:

Figura 8: $A \cup B$

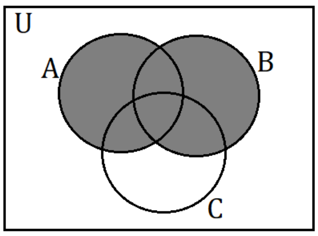



Figura 9: $A \cup C$

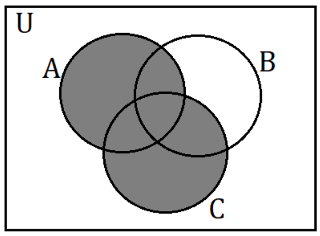
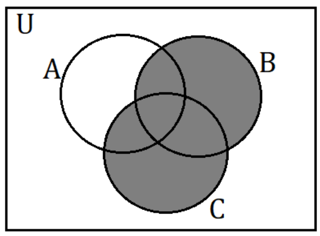
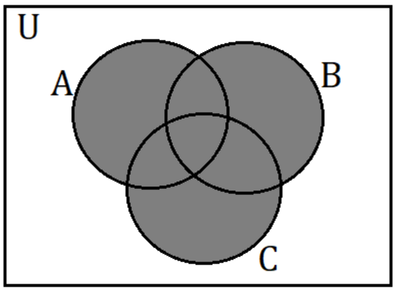



Figura 10: $B \cup C$




Além da união de todos os três conjuntos:

Figura 11: $A \cup B \cup C$




Representa-se também os complementares de cada conjunto em relação ao conjunto universo:

Figura 12: $A^C$

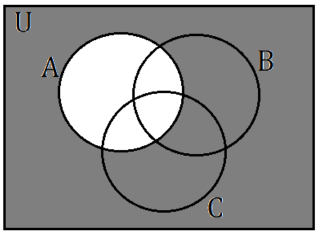



Figura 13: $B^C$

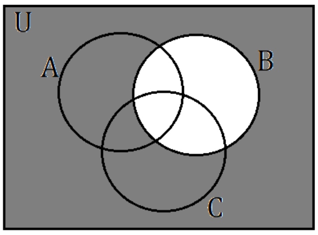
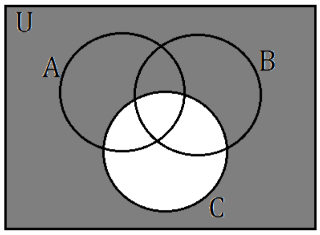
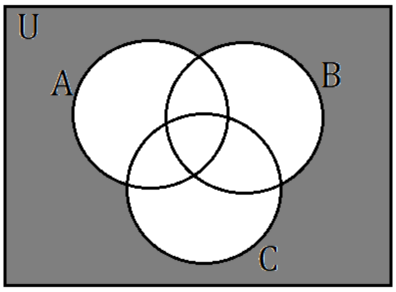



Figura 14: $C^C$




Bem como o complementar da união dos três conjuntos, que coincide com a interseção dos complementares:

Figura 15: $(A \cup B \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C$




Objetivando os problemas que o trabalho é focado, pode-se representar cada um dos subconjuntos disjuntos:

Figura 16: $A-(B\cup C)$

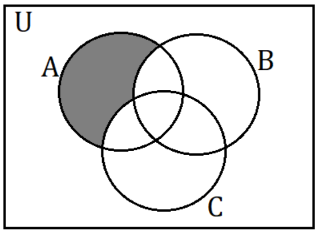



Figura 17: $B-(A\cup C)$

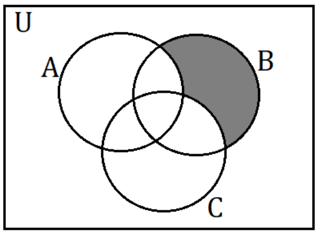



Figura 18: $C-(A\cup B)$

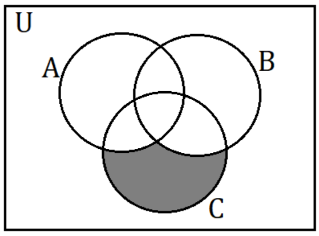



Figura 19: $(A\cap B)-C$

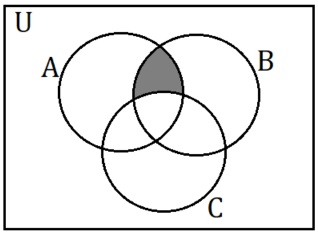



Figura 20: $(A\cap C)-B$

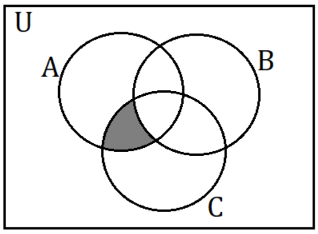
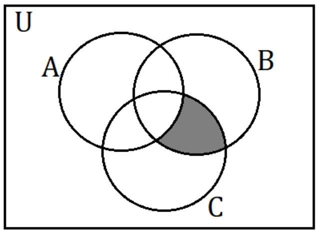



Figura 21: $(C\cap B)-A$




Assim como é possível representar qualquer conjunto, subconjunto e operação com conjuntos que se referem os três conjunto da determinada situação.

# 3 Proposta metodológica

Nossa proposta é resolver problemas que envolvem operações com conjuntos de maneira lógica, com interpretação visual dos diagramas de Venn.

Para um aluno de ensino básico (que denominaremos aqui como "leitor") que teve o seu primeiro contato com um determinado conteúdo de Matemática, é necessário que ele tenha antes de tudo os conceitos básicos deste conteúdo, o que proporcionamos nas seções do capítulo 2 do trabalho. Isso vai situar-lhe nas ferramentas que ele poderá utilizar em questões que envolvam tais conteúdos. Além disso, o leitor espera a construção, em parceria com seu professor, de uma sequência de ações que deverá realizar ao se deparar com tais questões. Como generaliza (ZABALA, 1998, p. 18) "(...)um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos."

## 3.1 Resoluções de problemas em matemática

Com o intuito de desenvolver uma maneira facilitada de resolver os problemas envolvendo operações com conjunto, seguimos a linha de pensamento do trabalho de Silva (2018), baseada em Polya (1995) que afirma, na página 86, que "o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras de descoberta e da invenção", onde Heurística tem o sentido de "Conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à invenção ou à resolução de problemas." Aurélio (2002, p.363).

Facilitar a resolução de problemas matemáticos é sempre interessante, desde que utilizando ferramentas verificadas. De acordo com Tao (2013) devemos procurar a mais simples das soluções para cada problema que vamos resolver. Ou ainda, nas palavras do próprio Tao (2013), "(...) a solução de um problema começa (e continua, e termina) com passos simples e lógicos. Mas desde que avancemos numa direção clara e firme(...)".

Na visão de Polya (1995), para facilitarmos a resolução de um problema, devemos seguir algumas etapas: compreender o problema; estabelecer um plano de ação; executar o plano e revisar a solução. Nesse trabalho cumprimos as etapas defendidas por Polya (1995), por meio de uma sequência de passos, para assim facilitar a resolução de problemas que envolvam operações com conjuntos e suas quantidades de elementos. Onde algoritmo tem o sentido de "Conjunto de regras e operações bem definidas e ordenadas, destinadas à solução de um problema ou classe de problemas em um número finito de etapas.” Aurélio (2002, p.363).

## 3.2 Algoritmo de resolução de problemas de operações com conjuntos

Nessa seção utilizamos os elementos teóricos do capítulo 2 para descrever a construção de um algoritmo de resolução de problemas. Aqui estão detalhados cada passo que um estudante deve cumprir dentro da sequência afim de resolver uma questão que envolva problemas com operações com conjuntos e seus números cardinais.

Problemas que envolvam operações com conjuntos são problemas que merecem muita atenção ao aspecto de interpretação quando resolvidos meramente observando as relações apresentadas no capítulo 2 deste trabalho. Bem como é necessária a sintetização de tais relações e do significado de cada uma das operações com conjuntos expressas no mesmo capítulo.

De acordo com Polya (1995, p. 14), “é uma tolice tentar responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida.” Logo, por mais fora da realidade do leitor que o problema em questão esteja, é importante que esse leitor tente adentrar ao máximo na situação. A visualização do problema na sua imaginação faz o leitor ter foco no problema e também facilita a percepção de detalhas que serão importantes para a interpretação. Corroborado por (MORETTO, 2014 apud ELIAS, LUCAS, 2014, p. 8), quando diz “(...) ele aprende na medida que recebe informações e delas se apropria, dando significado e construindo seu próprio conhecimento.”

Assim, o primeiro passo do algoritmo é dado por meio de uma leitura do problema na língua comum do leitor (língua que a situação está escrita), para assim ocorrer a imersão do leitor à situação problema e seus questionamentos.

Após ter compreendido bem o contexto e os detalhes na linguagem comum, o leitor deve fazer o que será denominada por “leitura lógica” nesse trabalho, essa leitura consiste na busca que o leitor deve fazer de informações a serem interpretadas e traduzidas para a linguagem matemática, em conformidade com Polya (1995) que defende que o estudante deve estar bem apropriado do conteúdo para poder identificar as partes principais do problema.

Na leitura lógica, a primeira informação que deve ser buscada é quais e quantos são os conjuntos que estão envolvidos no problema: qual o conjunto universo e quantos e quais são os conjuntos contidos nesse universo que são citados na situação problema.

Essa informação será primordial para a melhor representação possível no diagrama Venn.

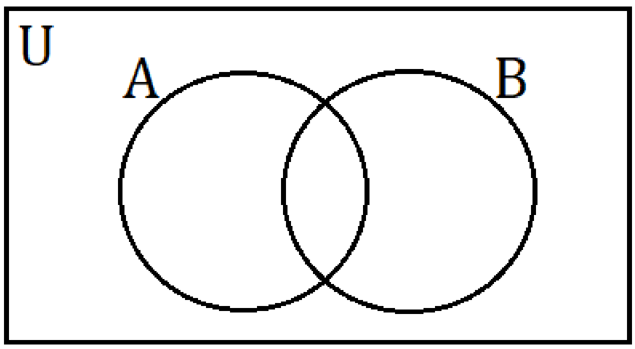
Após essa primeira informação, a leitura lógica deve buscar as informações sobre o número de elementos dos conjuntos e subconjuntos que a situação disponibilizou no texto, associando-as aos conectivos que possam está envolvidos em cada conjunto e subconjunto, para assim identificar quais operações podem ter sido feitas sobre os mesmos.

Assim, a leitura lógica constitui o segundo passo do algoritmo para a resolução do problema.

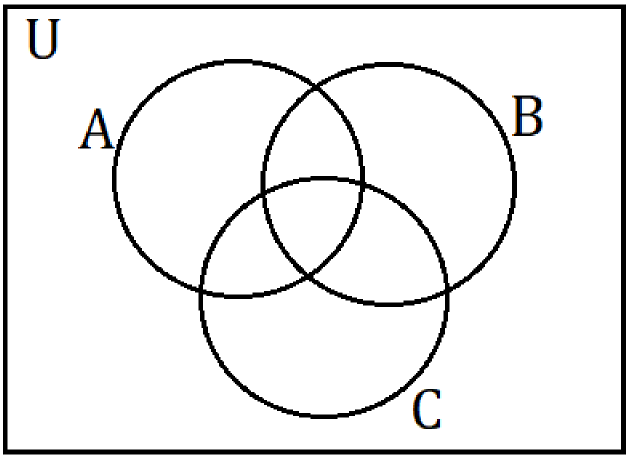
Polya (1995) defende o plano de ação que deve ser construído com base nos conhecimentos que o leitor deve está bem apropriado, ou seja, deve saber como deve proceder. A partir de agora iniciaremos a construção e descreveremos a execução do plano de ação com alicerce no capítulo 2 do trabalho.

Como já ressaltamos, a leitura lógica é marcada pela busca de informações, a partir das quais o leitor dará um rumo para sua interpretação visando encontrar as respostas para os questionamentos da situação problema. Com a informação da quantidade inicial de conjuntos envolvidos na situação e, que estão contidos no conjunto universo, o leitor deve escolher a representação em diagrama de Venn.

Esse se limita a resolução que envolvam dois ou três conjuntos contidos no universo. Levando em consideração o que foi defendido e expresso com uniformização da representação em diagrama de Venn do capítulo 3, o leitor terá duas opções inicialmente. Primeiro caso o a situação envolva dois conjuntos, a escolha de representação em diagrama deve ser a que contém dois círculos dentro do retângulo do conjunto universo. E pela uniformização dos diagramas, tais círculos devem ser secantes entre si. Ou seja, a representação como na figura abaixo:



Segundo caso a situação envolva três conjuntos, a escolha de representação em diagrama deve ser a que contém três círculos dentro do retângulo do conjunto universo. E pela uniformização dos diagramas, tais círculos devem ser secantes entre si dois a dois. Ou seja, a representação como na figura seguinte:




Quando possível, é interessante identificar cada círculo com uma letra maiúscula que se tenha relação com o conjunto que esteja sendo representado, para assim facilitar ainda mais a interpretação visual do problema. Feita a escolha da representação adequada para a situação e a identificação dos conjuntos, finaliza-se o terceiro passo do algoritmo para a resolução.

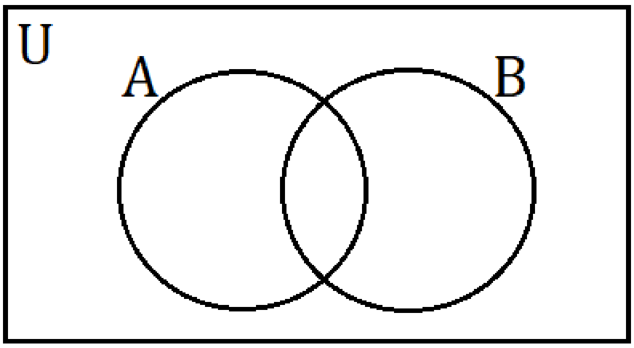
Ressaltamos que na seção 3 do capítulo 2, a uniformização do diagrama permite que qualquer distribuição de quantidade de elementos do conjuntos, subconjuntos e operações de conjuntos seja representada, inclusive distribuições que alguns desses subconjuntos sejam vazios. De forma que, essa distribuição de número cardinal particularizará o problema.

Nesse trabalho destacamos no diagrama número de elementos de cada subconjunto separados pelas linhas dos círculos secantes, que representam os conjuntos, e do retângulo do conjunto universo no diagrama de Venn. O objetivo é conseguir uma distribuição do número de elementos de todos os subconjuntos disjuntos dois a dois envolvidos na situação. Assim, conseguimos impedir que qualquer elemento seja contabilizado duas ou mais vezes, ou seja, componha mais de número cardinal simultaneamente. Com isso, para qualquer que seja o questionamento do problema, a resposta irá se resumir a identificar os subconjuntos que compõem a solução e adicionar, com uma simples soma aritmética, o número de elementos desses conjuntos. Seguimos a ideia de Tao (2013) que defende a simplicidade nas soluções.

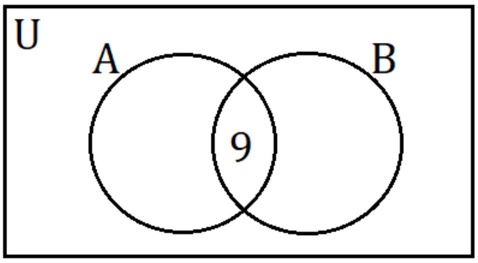
Destacamos que o objetivo é não contabilizar elementos mais de uma vez, se utiliza as informações obtidas da leitura lógica para indicar o número de elementos no diagrama de Venn e as primeiras quantidade de elementos que devem ser indicadas no diagrama são exatamente as dos subconjuntos que fazem parte de mais de um conjunto simultaneamente, ou seja, as interseções.

No caso de situações com dois conjuntos, indica-se o número de elementos da interseção dos dois conjuntos e depois o número de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entres os conjuntos iniciais. Para tanto, a quantidade de elementos de cada conjunto inicial deve ser subtraída do número de elementos da interseção. Por último, indica-se o número cardinal do complementar da união dos dois conjuntos em relação ao conjunto universo.

**Exemplo 18.** dados os conjuntos $A$ e $B$ contidos em um conjunto universo que possui 75 elementos, sendo que:
$n\,(A) = 25$
$n\,(B) = 38$
$n\,(A \cap B) = 9$
$n[(A \cup B)^C] = 21$
Sendo uma situação com dois conjuntos, inicialmente a representação em diagrama é:



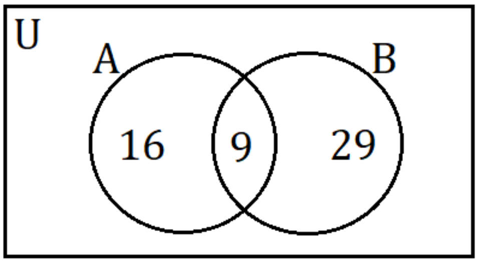

Indicando 9 como o número de elementos da interseção dos conjuntos A e B, tem-se:



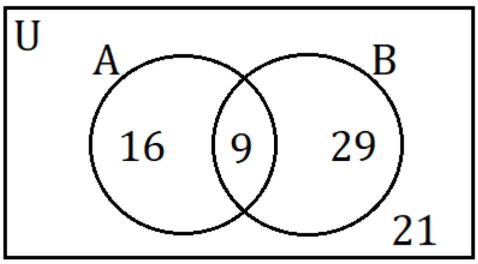

Agora fazendo as subtrações para determinar a quantidade de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças:

$$n\,(A - B) = n\,(A) - n\,(A \cap B) = 25 - 9 = 16$$
$$n\,(B - A) = n\,(B) - n\,(A \cap B) = 38 - 9 = 29$$

No diagrama:




Por ultimo indicando 21 como o número de elementos do complementar da união dos conjuntos:




Assim as indicações dos número de elementos são finalizadas. É importante destacar que ao somar todas as quantidades de elementos encontra-se exatamente a número de elementos do conjunto universo.

$$16 + 9 + 29 + 21 = 75$$

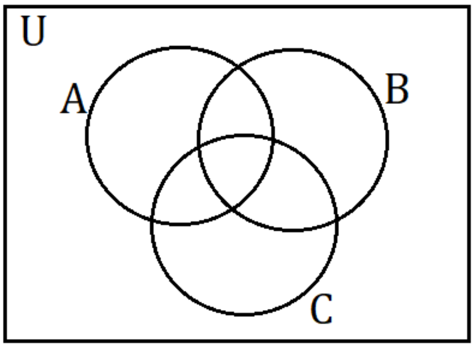
Já no caso de situações com três conjuntos, primeiramente indica-se a quantidade de elementos da interseção dos três. Depois disso, por conta do objetivo de obter o número de elementos de subconjuntos disjuntos, não devem ser indicadas exatamente as interseções dois a dois dos conjuntos, pois essas interseções não são disjuntas da interseção dos três conjuntos. Logo, de cada uma das quantidades de elementos das interseções dois a dois deve ser subtraída a quantidade de elementos da interseção dos três conjuntos. Assim, vão ser indicados os números de elementos dos conjuntos que são determinados pelas diferenças entre as interseções dois a dois e a interseção dos três, ou seja, o número cardinal dos conjuntos formados por elementos que pertencem a dois conjuntos simultaneamente, mas não pertencem aos três.

Nesse contexto, as próximas quantidade de elementos que devem ser indicadas são as dos conjuntos formados por elementos que estão em apenas um dos conjuntos, ou seja, os conjuntos que são determinados pelas diferenças entre cada conjunto inicial e a reunião dos outros dois conjuntos. Para isso, o número cardinal de cada conjunto inicial deve ser subtraído do número de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entre as interseções dois a dois que o conjunto está envolvido e da interseção dos três conjuntos e também a quantidade de elementos da interseção dos três conjuntos.

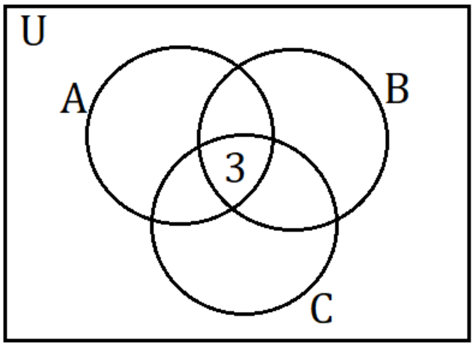
E por último, indica-se o número de elementos do conjunto complementar da união dos três conjuntos em relação ao conjunto universo, ou seja, o número de elementos que não pertencem a nenhum dos três conjuntos.

**Exemplo 19.** Dados os conjuntos $A, B$ e $C$ contidos em um conjunto universo que possui 100 elementos, sendo que:
$n\left(A\right) = 38$
$n\left(B\right) = 51$
$n\left(C\right) = 44$
$n\left(A \cap B\right) = 14$
$n\left(B \cap C\right) = 23$
$n\left(A \cap C\right) = 12$
$n\left(A \cap B \cap C\right) = 3$
$n\left(\complement_U^{A \cap B \cap C}\right) = 13$

Sendo uma situação com três conjuntos, inicialmente a representação em diagrama é:




Primeiramente, indicando 3 como número cardinal da interseção dos três conjuntos, tem-se:



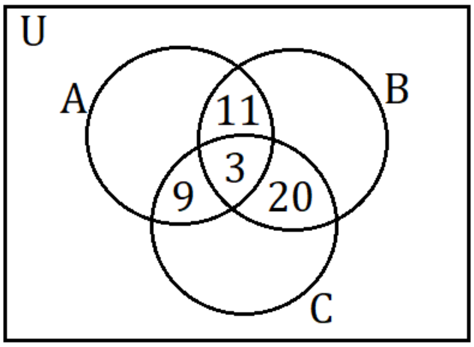

Fazendo as subtrações para determinar o número de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entre as interseções dois a dois de cada conjunto inicial e a interseção dos três conjuntos:

$$n\left[(A \cap B) - C\right] = n\left(A \cap B\right) - n\left(A \cap B \cap C\right) = 14 - 3 = 11$$

$$n\left[(B \cap C) - A\right] = n\left(B \cap C\right) - n\left(A \cap B \cap C\right) = 23 - 3 = 20$$

$$n\left[(A \cap C) - B\right] = n\left(A \cap C\right) - n\left(A \cap B \cap C\right) = 12 - 3 = 9$$

Em diagrama, tem-se:



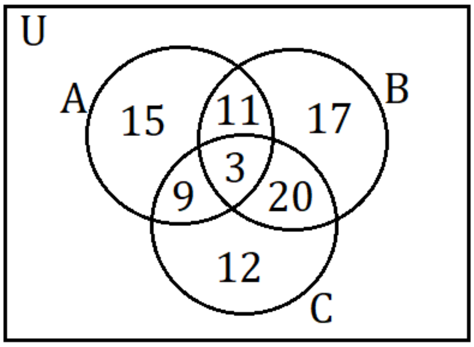

Determinando assim as quantidades de elementos que estão em apenas dois conjuntos. Agora fazendo as subtrações para determinar a quantidade de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entre cada conjunto e a união dos outros dois:

$$\begin{aligned} n[A-(B\cup C)] &= n(A)-n[(A\cap B)-C]-n[(A\cap C)-B]-n(A\cap B\cap C)\\ &= 38-11-9-3\\ &= 15 \end{aligned}$$

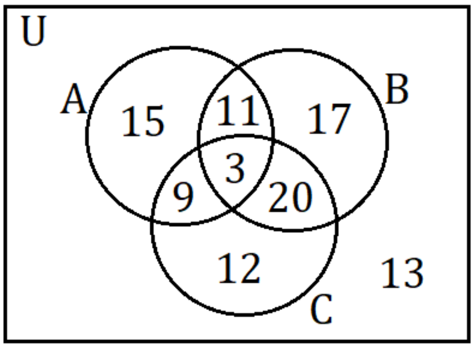
$$\begin{aligned} n[B-(A\cup C)] &= n(B)-n[(A\cap B)-C]-n[(B\cap C)-A]-n(A\cap B\cap C)\\ &= 51-11-20-3\\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n[C-(A\cup B)] &= n(C)-n[(A\cap C)-B]-n[(B\cap C)-A]-n(A\cap B\cap C)\\ &= 44-9-20-3\\ &= 12 \end{aligned}$$

Em diagrama tem-se:




Por ultimo indicando 13 como o número cardinal do complementar da união dos três conjuntos:




Finalizando as indicações da quantidade de elementos no diagrama. E novamente é possível perceber que a soma do número de elementos de todos os conjuntos disjuntos é igual ao número de elementos do conjunto universo.

$$15 + 11 + 17 + 3 + 9 + 20 + 12 + 13 = 100$$

Todavia, é importante relembrar que o algoritmo objetiva a interpretação e resolução de problemas. Logo, é de se esperar que os questionamentos dos problemas envolvam uma ou mais quantidade de elementos desconhecidas, que na representação em diagrama serão indicadas por incógnitas munidas de toda propriedade operacional que número de elementos conhecidas. O valor dessas incógnitas é determinado sempre usando o fato de que a soma dos números cardinais de todos os subconjuntos disjuntos é igual ao número cardinal do conjunto universo. Esse fato contempla a etapa de revisão da solução descrita por Polya (1995) que defende a verificação das soluções quando existe um processo conveniente e prático para que isso seja feito. Pois após conhecermos todos os números cardinais dos subconjuntos disjuntos do conjunto universo e o número cardinal do próprio conjunto universo, se a soma dos números cardinais do subconjuntos for realmente igual ao número cardinal do conjunto universo, então o processo foi um sucesso. Com o preenchimento das indicações de número de elementos de todos os subconjuntos disjuntos no diagrama de Venn, se encerra o quarto passo do algoritmo. Realizada a representação completa da situação no diagrama, o leitor deve voltar ao texto do problema em busca dos questionamentos feitos sobre a situação, fazendo a interpretação lógica desses questionamentos: associando os conectivos às suas respectivas operações entre proposições e consequentemente fazendo as correspondências (descritas no capítulo 2) com as operações com conjuntos.

Voltar ao texto do problema marca o quinto passo do algoritmo e as correspondências com as operações com conjuntos proporcionam ao leitor o associação da interpretação dos questionamentos com o diagrama de Venn que representa a situação.

Finalmente, a partir da interpretação de quais as quantidades de elementos de conjuntos ou subconjuntos se apresentam como resposta para cada um dos questionamentos do problema, deve-se analisar o diagrama de Venn, destacar tais números cardinais no diagrama e realizar simples adições aritméticas desses números de elementos (quando necessárias) com a finalidade de fechar a resposta para cada questionamento e assim finalizar a resolução do problema, com esse que se apresenta como o sexto e último passo do algoritmo.

Com a finalidade de sintetizar a proposta do algoritmo apresentada nesse trabalho, listamos os seis passos que o leitor deve cumprir para percorrer desde o primeiro contato com o problema até sua resolução:

1. Leitura do problema na língua comum do leitor (língua que a situação está escrita);

2. Leitura lógica, descrita nesse capítulo, objetivando a busca de quantos e quais são os conjuntos envolvidos na situação, bem como os conectivos lógicos que levam ás proposições e suas correspondências com as operações com conjuntos;

3. Escolher e realizar a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn;

4. Preenchimento do diagrama de Venn com as indicações das quantidades de elementos de todos os subconjuntos disjuntos, particularizando assim o problema e verificação do processo de preenchimento;

5. Volta à leitura do texto, objetivando a interpretação lógica dos questionamentos que o problema faz sobre a situação;

6. Associação da interpretação lógica dos questionamentos com o diagrama preenchido, destacando o número de elementos que se apresentam como respostas dos questionamentos (utilizando adições aritméticas quando necessárias).

Um algoritmo, pela sua natureza, busca generalizar a resolução de problemas para os quais foi proposto, em conformidade com Polya (1995, p.89) quando diz "A Heurística visa à generalidade, ao estudo de procedimentos que independem do assunto em questão e são aplicáveis a problemas de toda sorte.". Todavia, a aplicação da sequência se adapta a cada problema e cada passo se comunica com os demais, logo nas aplicações que serão feitas no capítulo seguinte, será possível perceber com tais comunicações acontecem e como cada passo é quase que intuitivo quando o objetivo do algoritmo é bem compreendido.

# 4 Sequência de problemas

Neste capítulo, apresentamos uma sequência de problemas nos quais empregamos o algoritmo proposto e descrito no capítulo anterior, que se apresentam em várias questões que tratam do tema operações com conjuntos, escolhidas de provas de vestibulares de diversas Universidades brasileiras.

**Problema 1. (UEPB – 2011)**

O controle de vacinação em uma creche indica que, dentre 98 crianças cadastradas, 60 receberam a vacina Sabin, 32 foram vacinadas contra o sarampo e 12 crianças não foram vacinadas. Dessa forma, o número de crianças que não receberam exatamente as duas vacinas é igual a:

a) 72

b) 38

c) 66

d) 92

e) 44

**Solução 1.** Pelo algoritmo:

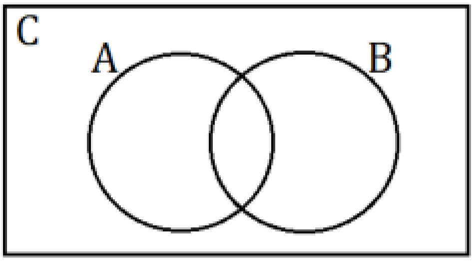
**Passo 1:** Fazendo a leitura da questão, é possível se situar no contexto de uma creche que possui um determinado número de crianças cadastradas, as quais devem receber doses de duas vacinas: a vacina Sabin e a vacina contra o sarampo. Algumas crianças já receberam doses das vacinas, podendo ser das duas ou uma só, e outras crianças não.

**Passo 2:** Fazendo a leitura lógica da questão, podemos perceber de imediato que se trata de um problema envolvendo dois conjuntos: conjunto das crianças que já foram vacinadas com a vacina Sabin ($A$) e o conjuntos das crianças ($B$) que já foram vacinadas contra o sarampo, dentro de um conjunto universo constituído por todas as crianças cadastradas na creche ($C$). Dessa interpretação, já é possível determinar que trabalharemos com o número de elementos dos dois conjuntos ($A$ e $B$), do conjunto interseção ($A \cap B$), o conjunto universo ($C$) e o conjunto complementar da reunião dos dois conjuntos ($(A \cup B)^C$).

A questão informa o número de elementos de alguns desses conjuntos e subconjuntos e a interpretação lógica nos permite identificar que:

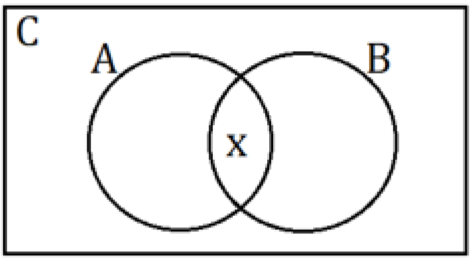
$$n(C) = 98, n(A) = 60, n(B) = 32 \text{ e } n[(A \cup B)^C] = 12$$

**Passo 3:** Visto que o problema envolve dois conjuntos, a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn é:




**Passo 4:** O preenchimento dos números cardinais de cada subconjunto é baseado nos dados colhidos no passo 2:

O primeiro dado a ser preenchido é o número de elementos de $A \cap B$, tendo em vista que esse dado não é fornecido pela questão, utilizaremos a incógnitas "$x$" para representa-lo:

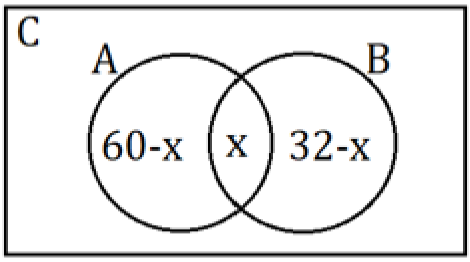



Baseado nisso e no número de elementos de $A$ e $B$, encontraremos a quantidade de elementos das diferenças $A - B$ e $B - A$:

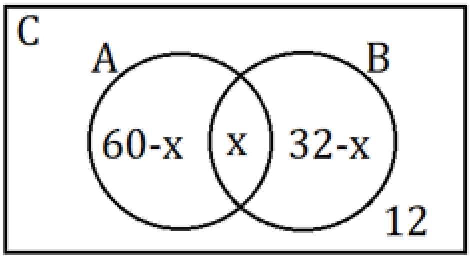
$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - x$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 32 - x$$

Preenchendo no diagrama:



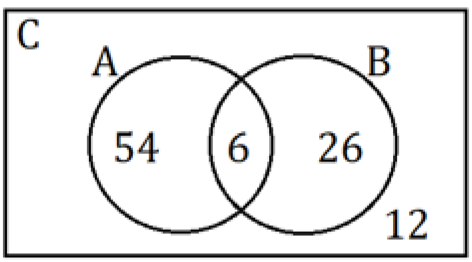

Agora preenchemos o diagrama com número de elementos de $(A \cup B)^C$, que é igual a 12, pelo **passo 2:**




Como o número de elementos do conjunto universo ($C$) é 98, a soma dos elementos de todos os seus subconjuntos disjuntos é igual a 98 também. Com isso, a equação abaixo determina o valor de "$x$" e como consequência o número de elementos de $A - B$, $B - A$ e $A \cap B$:

$$\begin{aligned} (60 - x) + x + (32 - x) + 12 &= 98 \\ -x + 104 &= 98 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Logo, $n(A \cap B) = 6$, $n(A - B) = 60 - 6 = 54$ e $n(B - A) = 32 - 6 = 26$ Assim temos o preenchimento de todo o diagrama:



**Passo 5:** Voltando ao texto da questão focando-se no questionamento do problema: "o número de crianças que não receberam exatamente as duas vacinas", percebemos que os conjuntos que possuem crianças que não receberam exatamente as duas vacinas são os conjuntos de crianças que receberam apenas uma vacina ($A - B$ e $B - A$) e o conjunto de crianças que não recebeu nenhuma vacina ($(A \cup B)^C$).
**Passo 6:** Destacando, de acordo com o diagrama, os números cardinais dos conjuntos que compõem a resposta para o questionamento da questão:

$$n(A - B) = 54, n(B - A) = 26 \text{ e } n[(A \cup B)^C] = 12$$

Logo, a resposta da o questionamento da questão é:

$$54 + 26 + 12 = 92$$

Portanto, 92 crianças não receberam exatamente as doses das duas vacinas. E assim, para a questão a resposta correta é a alternativa "d".

**Problema 2. (UEL-PR - 2016)**

Num dado momento, três canais de TV tinham, em sua programação, novelas em seus horários nobres: a novela $A$ no canal A, a novela $B$ no canal B e a novela $C$ no canal C. Numa pesquisa com 3000 pessoas, perguntou-se quais novelas agradavam. A tabela a seguir indica o número de telespectadores que designaram as novelas como agradáveis.

| Novelas | Número de telespectadores |
|---|---|
| $A$ | 1450 |
| $B$ | 1150 |
| $C$ | 900 |
| $A$ e $B$ | 350 |
| $A$ e $C$ | 400 |
| $B$ e $C$ | 300 |
| $A$, $B$ e $C$ | 100 |

Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?

a) 300 telespectadores.

b) 370 telespectadores.

c) 450 telespectadores.

d) 470 telespectadores.

e) 500 telespectadores.

**Solução 2.** Pelo algoritmo:

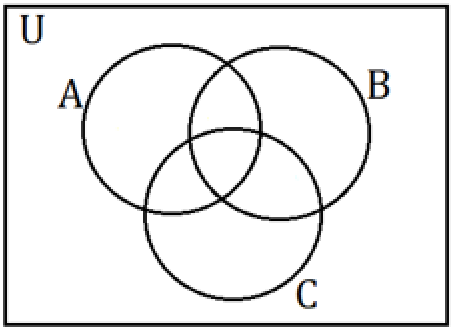
**Passo 1:** Fazendo a leitura da questão, é possível se situar no contexto de uma pesquisa feita com uma determinada quantidade de pessoas sobre qual(is) entre três novelas às agradavam. Onde os dados da pesquisa foram expressos em uma tabela.

**Passo 2:** Fazendo a leitura lógica da questão e de suas tabela, podemos perceber de imediato que se trata de um problema envolvendo três conjuntos: conjunto $A$, das pessoas que se agradam da novela $A$ do canal A; o conjunto $B$, das pessoas que se agradam da novela $B$ do canal B e o conjunto $C$, das pessoas que se agradam da novela $C$ do canal C, dentro de um conjunto universo $(U)$ constituído por todas as pessoas entrevistadas pela pesquisa. Dessa interpretação, já é possível determinar que trabalharemos com o número de elementos dos conjuntos: $A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C, (A \cup B \cup C)^c$ e $U$.

A tabela da questão informa o número de elementos de alguns desses conjuntos e subconjuntos e a interpretação lógica nos permite identificar que:

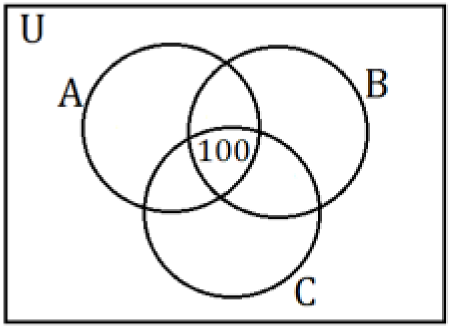
$$
\begin{array}{llll}
n(U) = 3000 & n(B) = 1150 & n(A \cap B) = 350 & n(B \cap C) = 300 \\
n(A) = 1450 & n(C) = 900 & n(A \cap C) = 400 & n(A \cap B \cap C) = 100
\end{array}
$$

**Passo 3:** Visto que o problema envolve três conjuntos, a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn é:




**Passo 4:** O preenchimento dos números cardinais de cada subconjunto é baseado nos dados colhidos no passo 2:

O primeiro dado a ser preenchido no diagrama é o número de elementos do conjunto $A \cap B \cap C$, que de acordo com o passo 2, $n(A \cap B \cap C) = 100$:



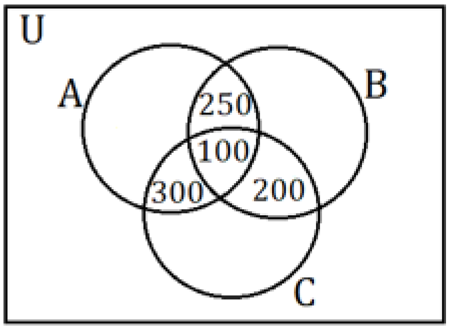

Após isso, as quantidades de elementos a serem representadas no diagrama são dos conjuntos resultantes das diferenças entre as interseções dois a dois de cada conjunto inicial e a interseção dos três conjuntos, faz-se isso subtraindo o número de elementos da interseção dos três conjuntos do número de elementos dessas interseções dois a dois:

$$n[(A \cap B) - C] = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 350 - 100 = 250$$

$$n[(B \cap C) - A] = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 300 - 100 = 200$$

$$n[(A \cap C) - B] = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C = 400 - 100 = 300$$

Preenchendo no diagrama, temos:



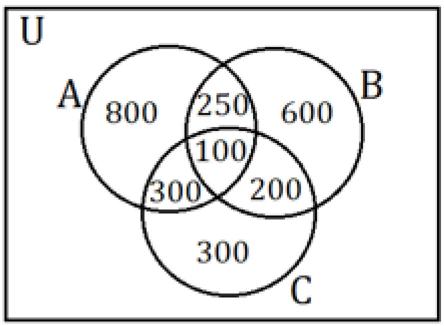

Agora fazendo as subtrações para determinar o número de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entre cada conjunto e a união dos outros dois:

$$
\begin{aligned}
n[A-(B\cup C)] &= n(A)-n[(A\cap B)-C]-n[(A\cap C)-B]-n(A\cap B\cap C)\\
&= 1450-250-300-100\\
&= 800
\end{aligned}
$$

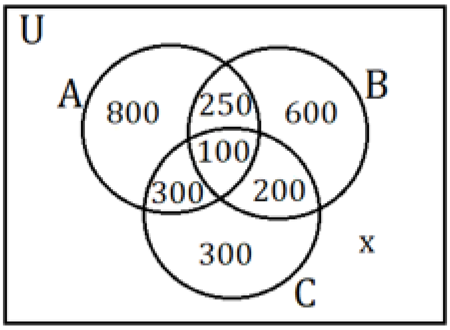
$$
\begin{aligned}
n[B-(A\cup C)] &= n(B)-n[(A\cap B)-C]-n[(B\cap C)-A]-n(A\cap B\cap C)\\
&= 1150-250-200-100\\
&= 600
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n[C-(A\cup B)] &= n(C)-n[(A\cap C)-B]-n[(B\cap C)-A]-n(A\cap B\cap C)\\
&= 900-300-200-100\\
&= 300
\end{aligned}
$$

Preenchendo no diagrama, temos:



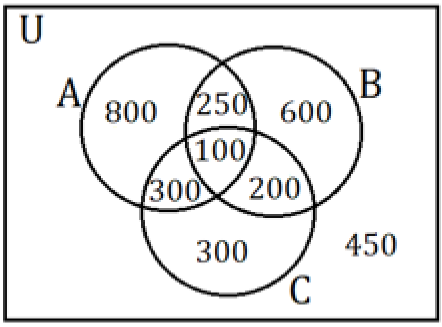
E por ultimo indicando por "$x$" o número de elementos do complementar da união dos três conjuntos, já que é uma informação que a questão não expressa. No diagrama:




Como o número de elementos do conjunto universo $(U)$ é 3000, a soma dos elementos de todos os seus subconjuntos disjuntos é igual a 3000 também. Com isso, a equação abaixo termina o valor de "$x$" e como consequência o número de elementos do complementar da união dos três conjuntos:

$$\begin{aligned} 800 + 250 + 600 + 100 + 300 + 200 + 300 + x &= 3000 \\ 2550 + x &= 3000 \\ x &= 450 \end{aligned}$$

Assim temos o preenchimento de todo o diagrama:




**Passo 5:** Voltando ao texto da questão focando-se no questionamento do problema: "Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?" e percebemos que o conjuntos que possuem pessoas que não acham agradável nenhuma

das três novelas é o conjunto complementar da reunião dos três conjuntos, ou seja, o conjunto $(A \cup B \cup C)^c$.

**Passo 6:** Destacando, de acordo com o diagrama, o número cardinal do conjunto que constitui a resposta para o questionamento da questão:

$$n[(A \cup B \cup C)^c] = 450$$

Portanto, 450 pessoas não acham agradável nenhuma das novelas. E assim, para a questão a resposta correta é a alternativa “c”.

**Problema 3.** (IFPE – 2016)
Em uma cooperativa de agricultores do município de Vitória de Santo Antão, foi realizada uma consulta em relação ao cultivo da cultura da cana-de-açúcar e do algodão. Constatou-se que 125 associados cultivam a cana-de-açúcar, 85 cultivam o algodão e 45 cultivam ambos.
Sabendo que todos os cooperativados cultivam pelo menos uma dessas duas culturas, qual é o número de agricultores da cooperativa?

a) 210

b) 255

c) 165

d) 125

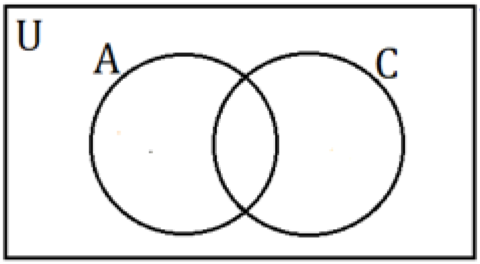
e) 45

**Solução 3.** Pelo algoritmo:
**Passo 1:** Fazendo a leitura da questão, é possível se situar no contexto de uma cooperativa de agricultores que fica no município de Vitória d e Santo Antão, onde uma consulta foi feita em relação aos cultivos de algodão e cana-de-açúcar.
**Passo 2:** Fazendo a leitura lógica da questão, podemos perceber de imediato que se trata de um problema envolvendo dois conjuntos: conjunto dos agricultores que cultivam algodão ($A$) e o conjuntos dos agricultores que cultivam cana-de-açúcar ($C$), dentro de um conjunto universo ($U$) constituído por todos os agricultores da cooperativa. Dessa interpretação, já é possível determinar que trabalharemos com o número de elementos dos dois conjuntos (A e C), do conjunto interseção ($A \cap C$), o conjunto universo ($U$)

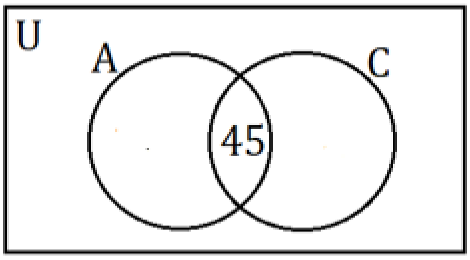
e o conjunto complementar da reunião dos dois conjuntos ($(A \cup C)^c$), apesar de ser possível interpretar que esse último conjunto é vazio, dada a afirmação "todos os cooperativados cultivam pelo menos uma dessas duas culturas". A questão informa o número de elementos de alguns desses conjuntos e subconjuntos e a interpretação lógica nos permite identificar que:

$$n(A) = 85,\ n(C) = 125,\ n(A \cap C) = 45 \text{ e } n[(A \cup C)^c] = 0$$

**Passo 3:** Visto que o problema envolve dois conjuntos, a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn é:




**Passo 4:** O preenchimento dos números cardinais de cada subconjunto é baseado nos dados colhidos no passo 2:
O primeiro dado a ser preenchido é o número de elementos de $A \cap C$, o qual interpretamos que $n(A \cap C) = 45$

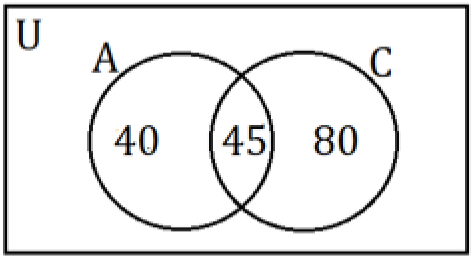



Baseado nisso e no número de elementos de $A$ e $C$, encontraremos a quantidade de elementos das diferenças $A - C$ e $C - A$:

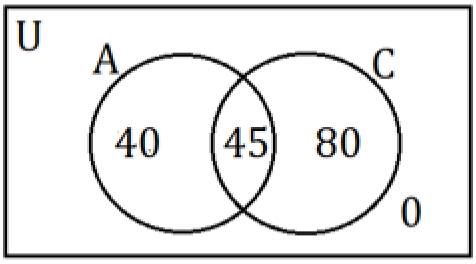
$$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 85 - 45 = 40$$

$$n(C - A) = n(C) - n(A \cap C) = 125 - 45 = 80$$

Preenchendo no diagrama:




Agora preenchemos o diagrama com número cardinal de $(A \cup C)^c$, que é vazio, pelo passo 2:




Assim temos o preenchimento de todo o diagrama.

**Passo 5:** Voltando ao texto da questão focando-se no questionamento do problema: "qual é o número de agricultores da cooperativa?", percebemos que o conjunto que possuem todos os agricultores da cooperativa é o conjunto universo $(U)$.

**Passo 6:** Como o número de elementos do conjunto universo $(U)$ é igual a soma das quantidades de elementos de todos os seus subconjuntos disjuntos $(A - C,\ C - A,\ A \cap C,\ (A \cup C)^c)$, temos:

$$\begin{aligned} n(U) &= n(A - C) + n(C - A) + n(A \cap C) + n[(A \cup C)^c] \\ &= 40 + 80 + 45 + 0 \\ &= 165 \end{aligned}$$

Portanto, a cooperativa é composta por 165 agricultores. E assim, para a questão a resposta correta é a alternativa "c".

**Problema 4.** (PUC-PR – 2015)

Em uma enquete, com 500 estudantes, sobre a preferência de cada um com três tipos diferentes de sucos (laranja, manga e acerola), chegou-se ao seguinte resultado: 300 estudantes gostam do suco de laranja; 200 gostam do suco de manga; 150 gostam do suco de acerola; 75 gostam dos sucos de laranja e acerola; 100 gostam dos sucos de laranja e manga; 10 gostam dos três sucos e 65 não gostam de nenhum dos três sucos. O número de alunos que gosta dos sucos de manga e acerola é:

a) 40

b) 60

c) 120

d) 50

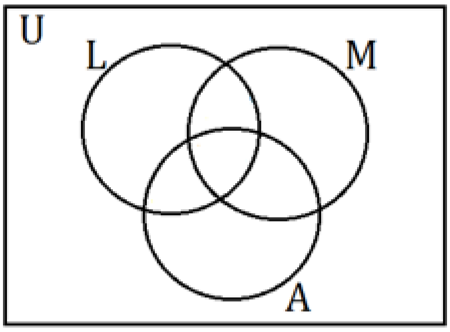
e) 100

**Solução 4.** Pelo algoritmo:
**Passo 1:** Fazendo a leitura da questão, é possível se situar no contexto de uma pesquisa feita com uma determinada quantidade de estudantes sobre a preferência de cada um com os sucos de laranja, manga e acerola
**Passo 2:** Fazendo a leitura lógica da questão podemos perceber de imediato que se trata de um problema envolvendo três conjuntos: conjunto $L$, dos estudantes que gostam do suco de Laranja; o conjunto $M$, dos estudando que gostam suco de manga e o conjunto $A$, dos estudantes que gostam do suco de acerola, dentro de um conjunto universo $(U)$ constituído por todos os estudantes entrevistadas pela pesquisa. Dessa interpretação, já é possível determinar que trabalharemos com o número de elementos dos conjuntos: $L$, $M$, $A$, $(L \cap M)$, $(L \cap A,\ A \cap M)$, $(L \cap M \cap A)$, $(L \cup M \cup A)^c$ e $U$.

A questão informa o número de elementos de alguns desses conjuntos e subconjuntos e a interpretação lógica nos permite identificar que:

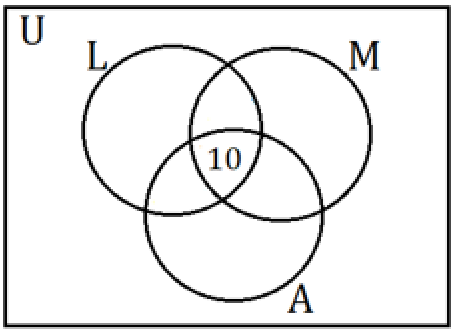
| | | | |
|---|---|---|---|
| $n(U) = 500$ | $n(M) = 200$ | $n(L \cap A) = 75$ | $n(L \cap MA) = 10$ |
| $n(L) = 300$ | $n(A) = 150$ | $n(L \cap M) = 100$ | $n[(L \cup M \cup A)^c] = 65$ |

**Passo 3:** Visto que o problema envolve três conjuntos, a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn é:




**Passo 4:** O preenchimento dos números cardinais de cada subconjunto é baseado nos dados colhidos no passo 2:

O primeiro dado a ser preenchido no diagrama é o número de elementos do conjunto $(L \cap M \cap A)$, que de acordo com o passo 2, $n(L \cap M \cap A) = 10$:




Após isso, as quantidades de elementos a serem representadas no diagrama são dos conjuntos resultantes das diferenças entre as interseções dois a dois de cada conjunto inicial e a interseção dos três conjuntos, faz-se isso subtraindo o número de elementos da interseção dos três conjuntos do número de elementos dessas interseções dois a dois.

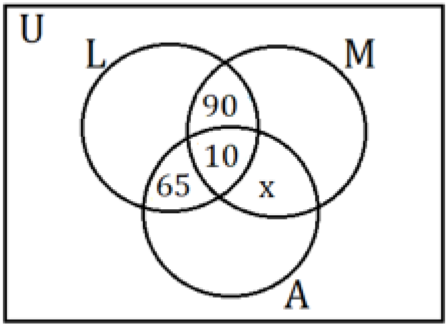
Como possuímos a informação do número de elementos das interseções $(L \cap A)$ e $(L \cap M)$, é possível definir o número de elementos das seguintes diferenças:

$$n\,[(L \cap A) - M] = n\,(L \cap A) - n\,(L \cap M \cap A) = 75 - 10 = 65$$

$$n\,[(L \cap M) - A] = n\,(L \cap M) - n\,(L \cap M \cap A) = 100 - 10 = 90$$

E no caso da interseção $M \cap A$, que não possuímos a informação de seu número de elementos, utiliza-se a incógnita "$x$" para representar o número de elementos de $(M \cap A) - L$, ou seja, $n[(M \cap A) - L] = x$.

Preenchendo no diagrama, temos:



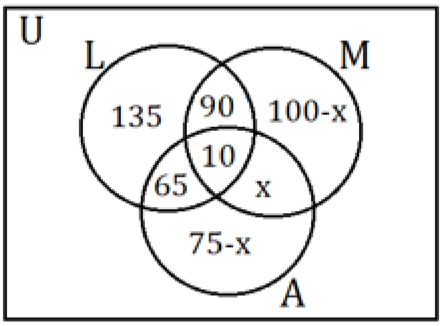

Agora fazendo as subtrações para determinar o número de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entre cada conjunto e a união dos outros dois:

$$\begin{aligned} n\,[L-(M\cup A)] &= n\,(L)-n\,[(L\cap A)-M]-n\,[(L\cap M)-A]-n\,(L\cap M\cap A) \\ &= 300-65-90-10 \\ &= 135 \end{aligned}$$

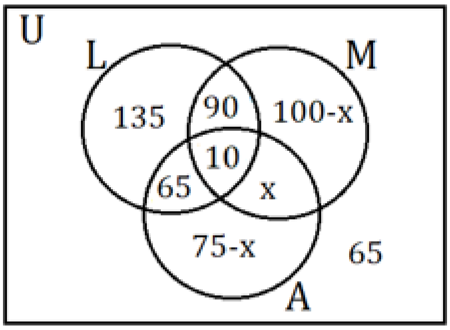
$$\begin{aligned} n\,[M-(L\cup A)] &= n\,(M)-n\,[(M\cap L)-A]-n\,[(M\cap A)-L]-n\,(L\cap M\cap A) \\ &= 200-90-x-10 \\ &= 100-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n\,[A-(L\cup M)] &= n\,(A)-n\,[(A\cap L)-M]-n\,[(A\cap M)-L]-n\,(L\cap M\cap A) \\ &= 150-65-x-10 \\ &= 75-x \end{aligned}$$

Preenchendo no diagrama, temos:




E por último, o número de elementos do complementar da união dos três conjuntos, que de acordo com o passo 2 temos que igual a 65. No diagrama:




Como o número de elementos do conjunto universo $(U)$ é 500, a soma dos elementos de todos os seus subconjuntos disjuntos é igual a 500 também. Com isso, a equação abaixo termina o valor de "$x$" e como consequência o número do conjunto $(M \cap A) - L$:

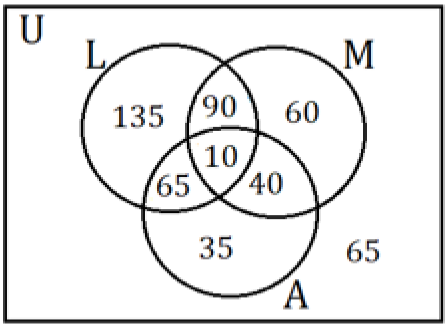
$$\begin{aligned} 135 + 90 + 10 - x + 10 + 65 + x + 75 - x + 65 &= 500 \\ 540 - x &= 500 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

E em consequência, determina-se os números cardinais de $M - (L \cup A)$ e $A - (L \cup M)$:

$$n\,[M - (L \cup A)] = 100 - x = 100 - 40 = 60$$

$$n\,[A - (L \cup M)] = 75 - x = 75 - 40 = 35$$

Assim temos o preenchimento de todo o diagrama:




**Passo 5:** Voltando ao texto da questão focando-se no questionamento do problema: "O número de alunos que gosta dos sucos de manga e acerola" e percebemos que os estudantes que gostam de sucos de manga e acerola são os que pertencem a dois subconjuntos disjuntos: $(L \cap M \cap A)$ (que são os estudantes que além de gostar de sucos de manga e acerola também gostam de suco de laranja) e $[(M \cap A) - L]$ (que são os estudantes que gostam somente desses dois sucos).
**Passo 6:** Destacando, de acordo com o diagrama, as quantidades de elementos desses conjuntos que constituem a resposta para o questionamento da questão e somando-as:

$$n\,(L \cap M \cap A) + n[(M \cap A) - L] = 10 + 40 = 50$$

Portanto, 50 estudantes gostam de sucos de manga e acerola. E assim, para a questão a resposta correta é a alternativa "d".

**Problema 5.** (PUC-PR – 2014)
Numa turma do $3^{\underline{o}}$ ano do ensino médio da escola SABER, foi realizada uma pesquisa sobre a preferência quanto à leitura de obras da literatura brasileira. O resultado obtido foi o seguinte:
- 28 alunos preferem obra de Dom Casmurro, de Machado de Assis.
- 20 alunos afirmaram que preferem a obra de Euclides da Cunha, Os Sertões.
- 8 alunos responderam que gostam das duas obras.
- 5 alunos não preferem qualquer das duas obras.

Com base nesses dados, podemos afirmar que a turma que participou da pesquisa é constituída por:

a) 56 alunos

b) 45 alunos

c) 63 alunos

d) 35 alunos

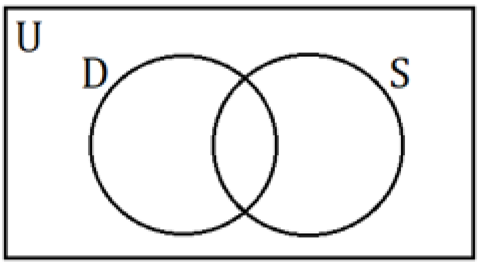
e) 40 alunos

**Solução 5.** Pelo algoritmo:
**Passo 1:** Fazendo a leitura da questão, é possível se situar no contexto de uma turma de 3º ano do ensino médio de uma escola, com a qual uma pesquisa foi feita sobre a preferência à leitura de duas obras: "Dom Casmurro" e "Os Sertões".
**Passo 2:** Fazendo a leitura lógica da questão, podemos perceber de imediato que se trata de um problema envolvendo dois conjuntos: conjunto dos alunos que preferem "Dom Casmurro" ($D$) e o conjuntos dos alunos que preferem "Os Sertões" ($S$), dentro de um conjunto universo ($U$) constituído por todos os alunos da turma. Dessa interpretação, já é possível determinar que trabalharemos com o número de elementos dos dois conjuntos ($D$ e $S$), do conjunto interseção ($D \cap S$), o conjunto universo ($U$) e o conjunto complementar da reunião dos dois conjuntos ($(D \cup S)^c$).

A questão informa o número de elementos de alguns desses conjuntos e subconjuntos e a interpretação lógica nos permite identificar que:

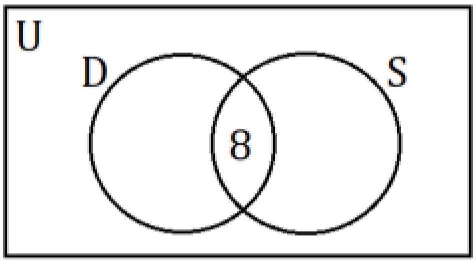
$$n(D) = 28,\ n(S) = 20,\ n(D \cap S) = 8 \text{ e } n[(D \cup S)^c] = 5$$

**Passo 3:** Visto que o problema envolve dois conjuntos, a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn é:




**Passo 4:** O preenchimento dos números cardinais de cada subconjunto é baseado nos dados colhidos no passo 2:

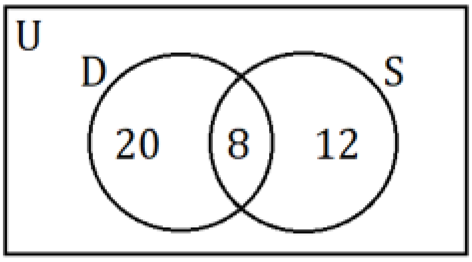
O primeiro dado a ser preenchido é o número de elementos de $D \cap S$, o qual interpretamos que $n(D \cap S) = 8$



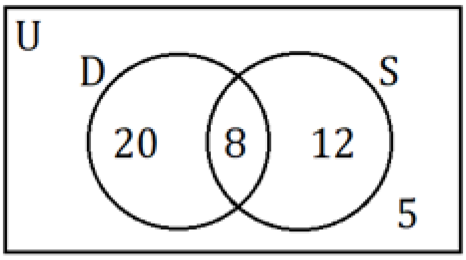

Baseado nisso e no número de elementos de $D$ e $S$, encontraremos a quantidade de elementos das diferenças $D - S$ e $S - D$:

$$n\,(D - S) = n\,(D) - n\,(D \cap S) = 28 - 8 = 20$$
$$n\,(S - D) = n\,(D) - n\,(D \cap S) = 20 - 8 = 12$$

Preenchendo no diagrama:




Agora preenchemos o diagrama com número cardinal de $(D \cup S)^c$, o qual interpretamos, pelo passo 2, que $n\,[(D \cap S)^c] = 5$:




Assim temos o preenchimento de todo o diagrama.

**Passo 5:** Voltando ao texto da questão focando-se no questionamento do problema: "a turma que participou da pesquisa é constituída", percebemos que o conjunto que possuem todos os alunos da turma é o conjunto universo ($U$).

**Passo 6:** Como o número de elementos do conjunto universo $(U)$ é igual a soma das quantidades de elementos de todos os seus subconjuntos disjuntos $(D - S,\ S - D,\ D \cap S,\ (D \cup S)^c)$, temos:

$$\begin{aligned} n\left(U\right) &= n\left(D - S\right) + n\left(S - D\right) + n\left(D \cap S\right) + n\left[\left(D \cup S\right)^c\right] \\ &= 20 + 12 + 8 + 5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Portanto, a turma é composta por 45 alunos. E assim, para a questão a resposta correta é a alternativa "b".

**Problema 6.** (PUC-PR – 2010) As pessoas atendidas em uma unidade de saúde apresentaram os seguintes sintomas: febre alta, dores no corpo e náuseas. Os dados foram tabulados conforme quadro a seguir:

| Sintomas | Número de pacientes |
|---|---|
| Febre | 22 |
| Dor no corpo | 16 |
| Náuseas | 24 |
| Febre e dor no corpo | 10 |
| Dor no corpo e náuseas | 10 |
| Náuseas e febre | 8 |
| Febre, dor no corpo e náuseas | 6 |

Determine o número de pacientes atendidos no posto de saúde.

a) 62 Pessoas

b) 68 Pessoas

c) 40 Pessoas

d) 86 Pessoas

e) 42 Pessoas

**Solução 6.** Pelo algoritmo:
**Passo 1:** Fazendo a leitura da questão, é possível se situar no contexto de uma unidade de saúde na qual foi feita um levantamento dos dados referentes aos sintomas das pessoas atendidos. E esses dados foram expressos em uma tabela.
**Passo 2:** Fazendo a leitura lógica da questão e de suas tabela, podemos perceber de imediato que se trata de um problema envolvendo três conjuntos: conjunto $F$, das pessoas que apresentaram febre; o conjunto $D$, das pessoas que apresentaram dor no corpo e o conjunto $N$, das pessoas que apresentaram náuseas, dentro de um conjunto universo $(U)$ constituído por todas as pessoas que foram atendidas na unidade de saúde. Dessa interpretação, já é possível determinar que trabalharemos com o número de elementos dos conjuntos:

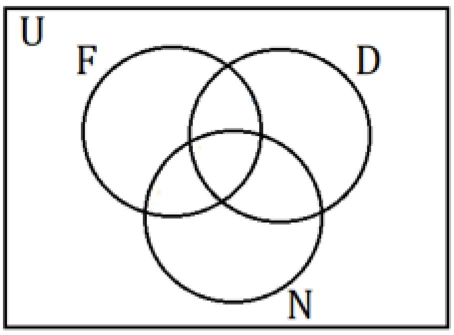
$$F,\ D,\ N,\ (F \cap D),\ (D \cap N),\ (F \cap N),\ (F \cap D \cap N),\ (F \cup D \cup N)^c \text{ e } U$$

.

A tabela da questão informa o número de elementos de alguns desses conjuntos e subconjuntos e a interpretação lógica nos permite identificar que:

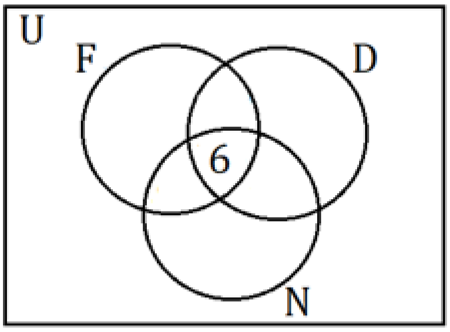
| | | | |
|---|---|---|---|
| $n(F) = 22$ | $n(N) = 24$ | $n(D \cap N) = 10$ | $n(F \cap D \cap N) = 6$ |
| $n(D) = 16$ | $n(F \cap D) = 10$ | $n(F \cap N) = 8$ | |

Além disso, interpreta-se que como o levantamento foi feito com pessoas que foram a unidade de saúde, então todos tiveram pelo menos um dos três sintomas. Logo, tem-se que $n\left[(F \cap D \cap N)^c\right] = 0$
**Passo 3:** Visto que o problema envolve três conjuntos, a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn é:



**Passo 4:** O preenchimento dos números cardinais de cada subconjunto é baseado nos dados colhidos no passo 2:

O primeiro dado a ser preenchido no diagrama é o número de elementos do conjunto $(F \cap D \cap N)$, que de acordo com o passo 2, $n(F \cap D \cap N) = 6$:



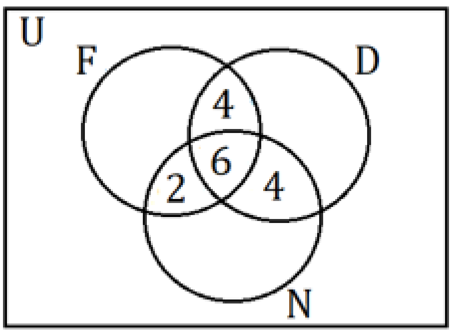

Após isso, as quantidades de elementos a serem representadas no diagrama são dos conjuntos resultantes das diferenças entre as interseções dois a dois de cada conjunto inicial e a interseção dos três conjuntos, faz-se isso subtraindo o número de elementos da interseção dos três conjuntos do número de elementos dessas interseções dois a dois:

$$n[(F \cap D) - N] = n(F \cap D) - n(F \cap D \cap N) = 10 - 6 = 4$$

$$n[(D \cap N) - F] = n(D \cap N) - n(F \cap D \cap N) = 10 - 6 = 4$$

$$n[(F \cap N) - D] = n(F \cap N) - n(F \cap D \cap N) = 8 - 6 = 2$$

Preenchendo no diagrama, temos:



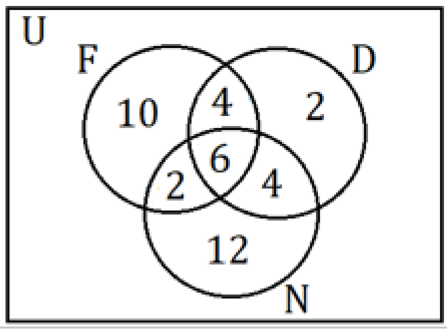

Agora fazendo as subtrações para determinar o número de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entre cada conjunto e a união dos outros dois:

$$
\begin{aligned}
n\left[F-(D\cup N)\right] &= n\left(F\right)-n\left[(F\cap D)-N\right]-n\left[(F\cap N)-D\right]-n\left(F\cap D\cap N\right)\\
&= 22-4-2-6\\
&= 10
\end{aligned}
$$

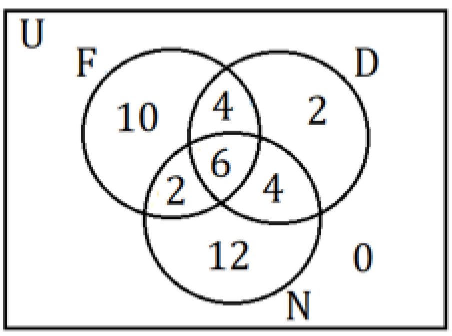
$$
\begin{aligned}
n\left[D-(F\cup N)\right] &= n\left(D\right)-n\left[(F\cap D)-N\right]-n\left[(D\cap N)-F\right]-n\left(F\cap D\cap N\right)\\
&= 16-4-4-6\\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n\left[N-(F\cup D)\right] &= n\left(N\right)-n\left[(F\cap N)-D\right]-n\left[(D\cap N)-F\right]-n\left(F\cap D\cap N\right)\\
&= 24-2-4-6\\
&= 12
\end{aligned}
$$

Preenchendo no diagrama, temos:




E por ultimo indicando o número de elementos do complementar da união dos três conjuntos, já que fizemos a interpretação de que vale 0. No diagrama:



Assim temos o preenchimento de todo o diagrama.

**Passo 5:** Voltando ao texto da questão focando-se no questionamento do problema: "o número de pacientes atendidos no posto de saúde" e percebemos que o conjunto que possui as pessoas que foram atendidas no posta de saúde é o conjunto universo $(U)$.

**Passo 6:** Como o número de elementos do conjunto universo $(U)$ é igual a soma das quantidades de elementos de todos os seus subconjuntos disjuntos $F-(D\cup N)$, $D-(F\cup N)$, $N-(F\cup D)$, $(F\cap D)-N$, $(D\cap N)-F$, $(F\cap N)-D$, $F\cap D\cap N$, $(F\cup D\cup N)^c$, temos:

$$\begin{aligned} n(U) &= n[F-(D\cup N)]+n[D-(F\cup N)]+n[N-(F\cup D)]+n[(F\cap D)-N]\\ &\quad +n[(D\cap N)-F]+n[(F\cap N)-D]+n(F\cap D\cap N)+n[(F\cup D\cup N)^c]\\ &= 10+2+12+4+4+2+6+0\\ &= 40 \end{aligned}$$

Portanto, 40 pacientes foram atendidos na unidade de saúde. E assim, para a questão a resposta correta é a alternativa "c".

**Problema 7.** (ENEM - 2016)
Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos $C_1, C_2$ e $C_3$ terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que $C_1$ e $C_2$ terão 10 páginas em comum; $C_1$ e $C_3$ terão 6 páginas em comum; $C_2$ e $C_3$ terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em $C_1$.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a) 135

b) 126

c) 118

d) 114

e) 110

**Solução 7.** Pelo algoritmo:

**Passo 1:** Fazendo a leitura da questão, é possível se situar no contexto da impressão de três catálogos de produtos de cosméticos que possuem algumas páginas em comum. Serão impressas usando originais de impressão das páginas comuns e não comuns.

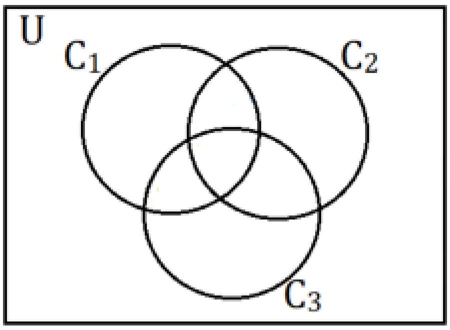
**Passo 2:** Fazendo a leitura lógica da questão podemos perceber de imediato que se trata de um problema envolvendo três conjuntos: conjunto $C_1$, das páginas que estão no catálogo $C_1$; conjunto $C_2$, das páginas que estão no catálogo $C_2$ e conjunto $C_3$, das páginas que estão no catálogo $C_3$, dentro de um conjunto universo $(U)$ constituído por todas as páginas que os compõem. Dessa interpretação, já é possível determinar que trabalharemos com o número de elementos dos conjuntos: $C_1, C_2, C_3, C_1 \cap C_2, C_1 \cap C_3, C_2 \cap C_2, C_1 \cap C_2 \cap C_3, U$ e $(C_1 \cup C_2 \cup C_3)^c$, porém esse último é um conjunto vazio, ou seja,

$$n\left[(C_1 \cup C_2 \cup C_3)^c\right] = 0$$

Além disso, a questão informa o número de elementos de alguns desses conjuntos e subconjuntos e a interpretação lógica nos permite identificar que:

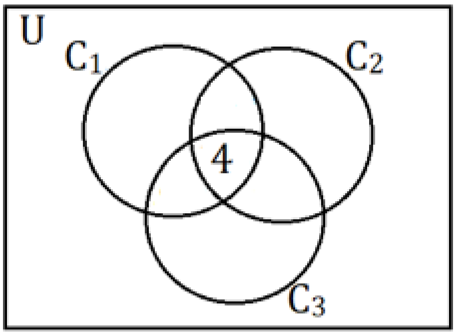
| | | | |
|---|---|---|---|
| $n(C_1) = 50$ | $n(C_3) = 45$ | $n(C_1 \cap C_3) = 6$ | $n(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 4$ |
| $n(C_2) = 45$ | $n(C_1 \cap C_2) = 10$ | $n(C_2 \cap C_3) = 5$ | |

**Passo 3:** Visto que o problema envolve três conjuntos, a representação uniformizada da situação em diagrama de Venn é:




**Passo 4:** O preenchimento dos números cardinais de cada subconjunto é baseado nos dados colhidos no passo 2:

O primeiro dado a ser preenchido no diagrama é o número de elementos do conjunto $C_1 \cap C_2 \cap C_3$, que de acordo com o passo 2, $n(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 4$:




Após isso, as quantidades de elementos a serem representadas no diagrama são dos conjuntos resultantes das diferenças entre as interseções dois a dois de cada conjunto inicial e a interseção dos três conjuntos, faz-se isso subtraindo o número de elementos da interseção dos três conjuntos do número de elementos dessas interseções dois a dois.

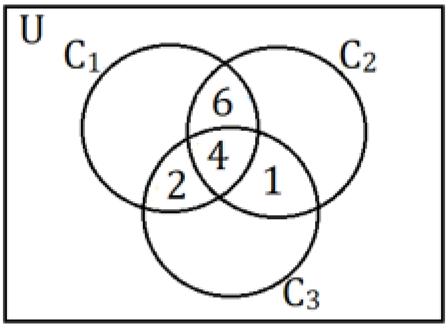
Como possuímos a informação do número de elementos das interseções, é possível definir o número de elementos dessas diferenças:

$$n\left[(C_1 \cap C_2) - C_3\right] = n\left(C_1 \cap C_2\right) - n\left(C_1 \cap C_2 \cap C_3\right) = 10 - 4 = 6$$

$$n\left[(C_1 \cap C_3) - C_2\right] = n\left(C_1 \cap C_3\right) - n\left(C_1 \cap C_2 \cap C_3\right) = 6 - 4 = 2$$

$$n\left[(C_2 \cap C_3) - C_1\right] = n\left(C_2 \cap C_3\right) - n\left(C_1 \cap C_2 \cap C_3\right) = 5 - 4 = 1$$

Preenchendo no diagrama, temos:



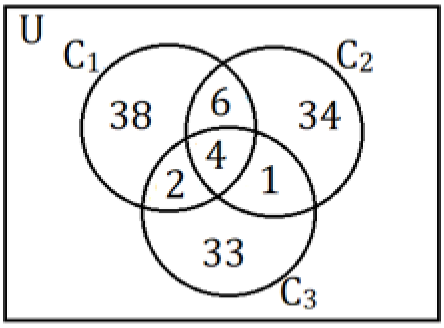

Agora fazendo as subtrações para determinar o número de elementos dos conjuntos determinados pelas diferenças entre cada conjunto e a união dos outros dois:

$$\begin{aligned} n\left[C_1 - (C_2 \cup C_3)\right] &= n\left(C_1\right) - n\left[(C_1 \cap C_2) - C_3\right] - n\left[(C_1 \cap C_3) - C_2\right] - n\left(C_1 \cap C_2 \cap C_3\right) \\ &= 50 - 6 - 2 - 4 \\ &= 38 \end{aligned}$$

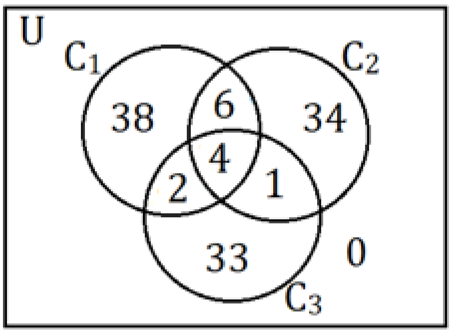
$$
\begin{aligned}
n\left[C_2-(C_1\cup C_3)\right] &= n\left(C_2\right)-n\left[(C_1\cap C_2)-C_3\right]-n\left[(C_2\cap C_3)-C_1\right]-n\left(C_1\cap C_2\cap C_3\right)\\
&= 45-6-1-4\\
&= 34
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n\left[C_3-(C_1\cup C_2)\right] &= n\left(C_3\right)-n\left[(C_1\cap C_3)-C_2\right]-n\left[(C_2\cap C_3)-C_1\right]-n\left(C_1\cap C_2\cap C_3\right)\\
&= 40-2-1-4\\
&= 33
\end{aligned}
$$

Preenchendo no diagrama, temos:




E por último, o número de elementos do complementar da união dos três conjuntos, que de acordo com o passo 2 temos que igual a 0. No diagrama:




Assim temos o preenchimento de todo o diagrama.

**Passo 5:** Voltando ao texto da questão focando-se no questionamento do problema: "um total de originais de impressão", percebemos que esse total de originais de impressão é composto por todos os elementos que estão envolvidos, ou seja, trata-se do conjunto universo $(U)$.

**Passo 6:** Como o número de elementos do conjunto universo $(U)$ é igual a soma das quantidades de elementos de todos os seus subconjuntos disjuntos $C_1 - (C_2 \cup C_3), C_2 - (C_1 \cup C_3), C_3 - (C_1 \cup C_2), (C_1 \cap C_2) - C_3, (C_1 \cap C_3) - C_2, (C_2 \cap C_3) - C_1, C_1 \cap C_2 \cap C_3, (C_1 \cup C_2 \cup C_3)^c$, temos:

$$\begin{aligned} n(U) &= n[C_1 - (C_2 \cup C_3)] + n[C_2 - (C_1 \cup C_3)] + n[C_3 - (C_1 \cup C_2)] + n[(C_1 \cap C_2) - C_3] \\ &\quad + n[(C_1 \cap C_3) - C_2] + n[(C_2 \cap C_3) - C_1] + n(C_1 \cap C_2 \cap C_3) + n[C_1 \cap C_2 \cap C_3] \\ &= 38 + 34 + 33 + 6 + 2 + 1 + 4 + 0 \\ &= 118 \end{aligned}$$

Portanto, serão necessárias 118 originais de impressão. E assim, para a questão a resposta correta é a alternativa “c”.

# 5 Considerações finais

A vivência em sala de aula como professor de matemática no Ensino Médio, nos faz perceber que a prática pedagógica nos mais diversos conteúdos deve está sempre sendo revista e quando possível, melhorada. O desenvolvimento desse trabalho foi voltado para revisão dos conteúdo de operações com conjuntos e lógica matemática. Assim, procuramos expressar a importância do estudante conhecer as ferramentas que estão ao seu alcance e vislumbrar o processo de resolução de problemas do inicio ao fim antes mesmo de começa-lo. Para isso, propomos e empregamos um algoritmo baseado na defesa que George Polya faz das técnicas de resoluções de problemas.

Na resolução dos exercícios listados no trabalho constatamos que o conhecimento prévio de como o algoritmo funciona, com sua interpretação lógica e representação gráfica dos problemas, pode contribuir significativamente para aproximar a linguagem dos problemas com a linguagem do estudante e assim facilitar a compreensão e, consequentemente, a resolução de problemas envolvendo operações com conjuntos.

Constatamos ainda que o ensino da matemática através da resolução de problemas e, a utilização das estratégias de Polya para desenvolver maneiras de resolver problemas matemáticos, é relevante e não se aplica apenas no conteúdo de Operações com Conjuntos. Esperamos então, que o trabalho contribua para a melhoria do processo de ensino aprendizado da temática no ensino médio.

# Referências


[1] AURELIO,*O mini dicionário da língua portuguesa. 4a edição revista e ampliada do mini dicionário Aurélio*, Rio de janeiro: DCL, 2002.

[2] BRASIL*Parâmetros curriculares nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*, Brasilia: MEC/SEF, 1998.

[3] ELIAS, L. C. B. LUCAS, L. B.,*Mapas Conceituais via cmaptools: uma sequência didática para o ensino do sistema digestório. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor*, CADERNOS PDE – Versão Online, Vol. 1, 2014.

[4] Giovanni, José Ruy; et. al ,*360 matemática fundamental: parte I,II,III, Volume único*, 2, ed, São Paulo: FTD, 2015.

[5] Lima, Cristiane Rodrigues, *O uso do leitura de imagens como instrumento para a alfabetização*, disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2483-8.pdf, Acesso em 23 Nov. 2020.

[6] LIMA, Elon Lages, *Curso de análise vol. 1*, Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

[7] LIMA, Elon Lages, *Números e funções reais*, Rio de Janeiro:SBM-Coleção PROFMAT, 2013.

[8] MORETTO, V.P, *A Mobilização como Estratégia em Sala de Aula.*, Palestra proferida no 13º Congresso Internacional de Educação da LBV. São Paulo, 01/08/2014.

[9] MORGADO, Augusto César; Carvalho, Paulo Cezar Pinto, *Matemática Discreta*, Rio de Janeiro:SBM-Coleção PROFMAT, 2015.

[10] ONUCHIC, Lourdes De La Rosa, *Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas*, São Paulo: Editora UNESP, 1999.

[11] PINHO, Antônio de Almeida, *Introdução a lógica matemática* , Rio de janeiro, 1999, Registro MEC 191240.

[12] POLYA, George,*A arte de resolver problemas: um novo aspecto de método matemático; tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo*, Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

[13] SILVA, Antonino da,*Resolução de situações-problema da OBMEP por alunos da 3a série do Ensino Médio da cidade de União-PI: uma investigação acerca da Análise Combinatória. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional)*, Universidade Estadual do Piauí, Teresina, 2018.

[14] TAO, Teorence,*Como Resolver Problemas Matemáticos, Tradução de Paulo Ventura*, Rio de Janeiro: SBM, 2013.