Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
mestrado profissional em matemática em rede nacional - profmat
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Milton Rodrigues dos Santos Junior

A Análise Combinatória e o jogo *Mastermind* na forma de aplicativo como recurso didático

Vitória da Conquista
Bahia
2020

Milton Rodrigues dos Santos Junior

A ANÁLISE COMBINATÓRIA E O JOGO *MASTERMIND* NA FORMA DE APLICATIVO COMO RECURSO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César dos Reis

Vitória da Conquista
Bahia
2020

S236a Santos Junior, Milton Rodrigues dos.
A análise combinatória e o jogo *Mastermind* na forma de aplicativo como recurso didático. / Milton Rodrigues dos Santos Júnior, 2020.
40f. il.
Orientador (a): Dr. Júlio Cesar dos Reis.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2020.
Inclui referências. 32.
1. Análise combinatória. 2. Jogo *Mastermind*. 3. Recurso didático - Aplicativo. I. Reis, Júlio Cesar dos. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 511.6

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Milton Rodrigues dos Santos Junior

A ANÁLISE COMBINATÓRIA E O JOGO MASTERMIND NA FORMA DE APLICATIVO COMO RECURSO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Júlio César dos Reis
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

____

Profª. Dra. Alexsandra Oliveira Andrade
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

____

Prof. Dr. Robson Aldrin Lima Mattos
Universidade do Estado da Bahia - UNEB

Vitória da Conquista – Ba, 30 de outubro de 2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me guiado e dado força para chegar até aqui e vencer mais uma etapa.

A meus pais, Milton e Elaide, por sempre me apoiarem e me darem forças nos estudos.

A meu orientador Prof. Dr. Júlio César dos Reis por ter me aceitado mais uma vez como orientando e pelos ensinamentos, incentivos e sugestões para a conclusão desse trabalho.

A todos os meus professores do PROFMAT - UESB pelos ensinamentos durante esse período de curso.

A todos os meus colegas da turma PROFMAT 2018 pelos vários momentos de estudos e descontrações.

A Felipe Moreira, que me auxiliou no desenvolvimento do aplicativo, por sempre ter paciência em me ajudar na hora das dúvidas.

A toda minha família e amigos que se fizeram presentes me apoiando nessa caminhada.

Lista de Figuras

2.1 Tela inicial do jogo 14
2.2 Exemplo de um jogo 14
2.3 Número de possibilidades para a “dica” após a tentativa do jogador. . . . 15

3.1 Resultado da pesquisa do jogo Mastermind na Play Store 21
3.2 Erro no Software Eclipse IDE 22
3.3 Arquivo do jogo no aplicativo escrito em TypeScript 23
3.4 Arquivo do jogo no aplicativo em scss 23
3.5 Arquivo do jogo no aplicativo em html 24
3.6 Imagens do aplicativo 24
3.7 Primeira tentativa 25
3.8 Segunda tentativa 25
3.9 Terceira e quarta tentativa 26
3.10 Quinta tentativa 27
3.11 Primeira tentativa 27
3.12 Segunda tentativa 28
3.13 Terceira tentativa 28
3.14 Quarta tentativa 29

Resumo

Esse trabalho tem como foco central associar os conteúdos de Análise Combinatória com o jogo *Mastermind* e o desenvolvimento de um novo aplicativo desse jogo para ser usado como recurso didático no ensino-aprendizagem da Análise Combinatória. Sendo assim, uma explanação dos conteúdos de Análise Combinatória é feita para facilitar o estudo do raciocínio que há por trás desse jogo. Faz-se então uma explicação sobre esse jogo (o que é, como jogar), e um estudo mais aprofundado sobre o raciocínio combinatório que existe nele. Daí então é apresentada todas as ferramentas que foram utilizadas para desenvolver o aplicativo desse jogo, como foi desenvolvido esse aplicativo, e também é mostrado alguns exemplos de como jogar pelo aplicativo desenvolvido usando a ideia do raciocínio combinatório.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Jogo *Mastermind*, Aplicativo, Recurso Didático.

Abstract

This study has as central focus to associate the contents of Combinatorial Analysis with the game Mastermind and the development of a new application of this game to be used as a didactic resource in the teaching-learning of Combinatorial Analysis. Therefore, an explanation of the contents of Combinatory Analysis is made to facilitate the study of the reasoning behind this game. An explanation is then made of that game (what it is, how to play it), and a more in-depth study of the combinatorial reasoning in it. Then, it presents all the tools that were used to develop the application for this game, how this application was developed, and also shows some examples of how to play through the application developed using the idea of combinatorial reasoning.

Keywords: Combinatorial Analysis, Mastermind Game, App, Didactic Resource.

Sumário

Introdução **1**

1 Análise Combinatória: uma breve apresentação **3**
1.1 Análise Combinatória 3
1.1.1 Princípio Fundamental da Contagem 4
1.1.2 Permutações Simples 4
1.1.3 Combinações Simples 6
1.1.4 Permutações Caóticas 7

2 O Jogo *Mastermind* **13**
2.1 A Análise Combinatória por trás do jogo *Mastermind* 13

3 O Aplicativo do Jogo *Matermind* **21**
3.1 O Aplicativo 21
3.2 Exemplos de jogo no aplicativo 25

Considerações Finais **30**

Referências **32**

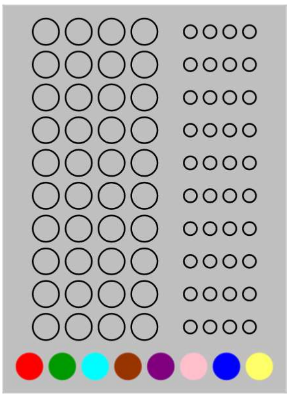
Introdução

A ideia desse trabalho é abordar uma forma de ensinar a análise combinatória por meio do jogo *Mastermind*, uma vez que representa um importante recurso didático conforme orienta os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's):

> *Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas.*

O tema desse trabalho surgiu do fato de na graduação já ter trabalhado com esse jogo no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) por meio da aplicação de minicursos e oficinas. Daí então pensamos em abordar os princípios combinatórios que estão por trás desse jogo. Para isso, precisaremos explanar sobre esses princípios, ou seja, falaremos sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), mas sem utilizar muitas fórmulas, pois pode tornar as ideias mais complicadas.

Inicialmente foi pensado em construir esse jogo para trabalhar de forma concreta em sala de aula com os alunos. Para isso, foi impresso em folha A2 7 imagens (conforme figura a seguir) referentes ao tabuleiro do jogo e colados em placas de papelão.



Os círculos coloridos foram feitos em material emborrachado EVA, assim como os círculos menores (preto e branco) das dicas.

Quando os jogos já se encontravam em fase final de acabamento para aplicação, as escolas tiveram suas aulas suspensas devido a pandemia do novo coronavírus (SARS-CoV-2). Com o surgimento dessa pandemia, que se tornava cada dia mais intensa e perigosa, as aulas ficavam cada vez mais sem previsão de retorno, e como esse trabalho tem o prazo para ser concluído não poderia então esperar o retorno das aulas para ser finalizado já que esse retorno era incerto e poderia demorar mais tempo do que prevíamos.

Daí então foi pensado em como mudar o foco do trabalho já que não seria mais possível fazer a aplicação presencial desse jogo com os alunos em formato de oficina, e, dentre as ideias que surgiram foi acatada a de fazer um aplicativo desse jogo *Mastermind* para ser jogado usando um *Smartphone* ou *Tablet* com sistema *Android*, pois assim é possível trabalhar com ele tanto de forma presencial quanto de forma virtual.

Em contrapartida, deve-se pensar se é possível ensinar Análise Combinatória por meio de recursos tecnológicos para que seja proporcionada a construção de conceitos Matemáticos. E, de acordo com o que citamos nos PCN's, isso pode ser possível, e fica como objetivo, ensinar a Análise Combinatória por meio do jogo *Mastermind*, possibilitando a construção desses conceitos dentro da proposta dos PCN's.

Sendo assim, o trabalho ficou estruturado em um capítulo voltado a enfatizar os conteúdos de análise combinatória que se faz necessário para a compreensão do raciocínio por trás do jogo *Mastermind*, outro capítulo que aborda esse jogo, suas regras e também enfatiza a análise combinatória que se faz presente nele. Por fim, abordamos no último capítulo o que foi feito até que se chegasse ao produto final, que agora passou a ser desenvolver um aplicativo com o formato desse jogo, e mostramos também alguns exemplos de como jogar explicando o raciocínio combinatório que deve ser desenvolvido ao jogar ele.

1

Análise Combinatória: uma breve apresentação

Nesse capítulo abordaremos alguns conceitos da Análise Combinatória que se fazem necessários para a compreensão da Matemática que há por trás do jogo *Mastermind* e também para facilitar na compreensão do raciocínio que deve ser utilizado ao se jogar esse jogo.

1.1 Análise Combinatória

A Análise Combinatória é um grande campo da matemática que envolve o estudo de vários tipos de combinatória: Enumerativa, Algébrica, Teoria de Grafos, entre outros. Aqui estudaremos a combinatória Enumerativa e os métodos que permitem contar o número de elementos de um conjunto, dando ênfase mais ao raciocínio combinatório do que apenas memorizar fórmulas.

Para o estudo e também para o ensino da Análise Combinatória deve-se adquirir algumas posturas e formas de pensar que facilita a compreensão desse assunto, que geralmente é considerada uma matéria difícil. Algumas delas, segundo Elon, no seu livro, são:

1. *Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias gerais e torna as coisas mais complicadas.*
2. *Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.*
3. *Você quer mostrar que é o bom ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema.*
4. *Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contado*

> *indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos.*

Em resumo, o que se deve tentar fazer ao estudar Análise Combinatória é focar em algumas técnicas e princípios básicos para desenvolver um raciocínio combinatório, ao invés de ficar decorando uma lista com fórmulas.

1.1.1 Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Exemplo 1.1: Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Formar um casal equivale a tomar as decisões:
D_1: Escolha do homem (5 modos).
D_2: Escolha da mulher (5 modos).
Há $5 \times 5 = 25$ modos de formar o casal.

Exemplo 1.2: Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há três modos de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 modos de escolher a cor da cada uma da outras 6 listras. A resposta é $3 \times 2^6 = 192$.

Exemplo 1.3: Quantos são os números de três dígitos distintos?

O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual a primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígitos. A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

1.1.2 Permutações Simples

A fim de definir o número de permutações de n objetos, vamos definir o símbolo fatorial.

Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$) definimos fatorial de m (e indicamos por $m!$) através da relação:

$m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ para $m \geq 2$
$1! = 1$
$0! = 1$

De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n-1$ modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n-2$ modos, etc...; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo. A resposta é $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = n!$

Cada ordem que se dá aos objetos é chamada de uma permutação simples dos objetos. Assim, por exemplo, as permutações simples das letras a, b e c são (abc), (acb), (bac), (bca), (cab) e (cba).

Portanto, o número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos distintos é $P_n = n!$.

Exemplo 1.4: Quantos são os anagramas da palavra PRÁTICO? Quantos começam e terminam com consoantes?

Cada anagrama de PRÁTICO nada mais é do que uma ordenação das letras P, R, A, T, I, C, O. Assim, o número de anagramas é $P_7 = 7! = 5040$.

Para formar um anagrama começando e terminando por consoantes devemos primeiramente escolher a consoante inicial (4 modos), depois escolher a consoante final (3 modos) e, por fim, as 5 letras restantes podem ser arrumadas entre essas duas consoantes de $P_5 = 5! = 120$ modos. Há $4 \times 3 \times 120 = 1440$ anagramas começando e terminando por consoantes.

Exemplo 1.5: Quantos são os anagramas da palavra BOTAFOGO?

Se as letras fossem diferentes a resposta seria 8!. Como as três letras O são iguais, quando as trocamos entre si obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto, o que aconteceria se fossem diferentes. Isso faz com que na nossa contagem de 8! tenhamos contado o mesmo anagrama várias vezes, 3! vezes mais precisamente, pois há 3! modos de trocar as letras O entre si. A resposta é $\dfrac{8!}{3!} = 6720$.

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é $P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}$.

Exemplo 1.6: De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e um grupo de 3 objetos?

Um processo de fazer a divisão é colocar os objetos em fila; os 5 primeiros formam o grupo de 5 e os três últimos formam o grupo de 3. Há 8! modos de colocar os objetos em fila.

Entretanto, note que filas como $abcde|fgh$ e $badce|ghf$ são filas diferentes e geram a mesma divisão de grupos. Cada divisão em grupos foi contada uma vez para cada ordem dos objetos dentro de cada grupo. Há $5! \times 3!$ modos de arrumar os objetos em cada grupo. Cada divisão em grupos foi contada $5! \times 3!$ vezes. Portanto, a resposta é $\dfrac{8!}{5! \times 3!} = 56$.

1.1.3 Combinações Simples

De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados? Ou, o que é o mesmo, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$?

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma *combinação simples* de classe p dos n objetos $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 são

$$\begin{array}{ccccc} \{a_1,a_2,a_3\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_1,a_2,a_5\} & \{a_1,a_3,a_4\} & \{a_1,a_3,a_5\} \\ \{a_1,a_4,a_5\} & \{a_2,a_3,a_4\} & \{a_2,a_3,a_5\} & \{a_2,a_4,a_5\} & \{a_3,a_4,a_5\} \end{array}.$$

O número de combinações simples de classe p de n objetos é representado por C_n^p. Assim, $C_5^3 = 10$.

Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são selecionados, e um grupo de $n-p$ objetos, que são os não-selecionados.

Esse é o problema do exemplo 1.6 e a resposta é

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemplo 1.7: Quantas saladas contendo exatamente 4 frutas podemos formar de dispomos de 10 frutas distintas?

Para formar uma salada basta escolher 4 das 10 frutas, o que pode ser feito de $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{4!\times 6!} = 210$ modos.

Exemplo 1.8: De quantos modos podemos escolher 6 pessoas, incluindo pelo menos duas mulheres, em um grupo de 7 homens e 4 mulheres?

Como devemos ter pelo menos duas mulheres, as alternativas de montagem são: 4 homens e 2 mulheres, 3 homens e 3 mulheres, 2 homens e 4 mulheres. Para 4 homens e 2 mulheres teremos $C_7^4 \times C_4^2$ modos. Para 3 homens e 3 mulheres teremos $C_7^3 \times C_4^3$ modos. Para 2 homens e 4 mulheres teremos $C_7^2 \times C_4^4$ modos.

Daí, chegamos assim a

$$C_7^4 \times C_4^2 + C_7^3 \times C_4^3 + C_7^2 \times C_4^4 = 35\times 6 + 35\times 4 + 21\times 1 = 371.$$

Outra alternativa de encontrar o resultado, nesse caso por raciocínio destrutivo, seria contar todas as escolhas de 6 pessoas (C_{11}^6) e abater as escolhas sem mulheres (C_7^6) e com apenas uma mulher ($4\times C_7^5$). E então chegaria a

$$C_{11}^6 - C_7^6 - 4\times C_7^5 = 462 - 7 - 84 = 371.$$

Um erro muito comum é o seguinte: como o grupo de 6 pessoas deve conter pelo menos duas mulheres, primeiramente escolhem-se duas mulheres (C_4^2), e depois escolhem-se 4 pessoas quaisquer entre as 9 que sobraram (C_9^4). Assim, obtem-se a resposta (errada) $C_4^2 \times C_9^4 = 6 \times 126 = 756$.

1.1.4 Permutações Caóticas

Antes de definirmos o que é uma permutação caótica, precisaremos do resultado do teorema 1.11 que demonstraremos adiante. Mas para a demonstração desse teorema precisaremos do resultado do seguinte exemplo.

Exemplo 1.9: Mostrar que

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Sabe-se que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k a^k b^{n-k}\right)$ (Binômio de Newton).

Fazendo $a = -1$ e $b = 1$ na igualdade anterior, temos

$0 = ((-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k (-1)^k 1^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k (-1)^k\right) = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n$

Observação 1.10: $n(A)$ representa o número de elementos de um conjunto A.

Teorema 1.11 (Princípio da inclusão e exclusão): O número de elementos na união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ é dado por:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j) + \\ & \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\ & \sum_{1 \le i < j < k < p \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots \\ & (-1)^n n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Demonstração. Precisamos mostrar que um elemento que pertença a p conjuntos dados (onde $1 \le p \le n$) é contado por 1.1 exatamente uma vez. Considere um elemento pertencente a exatamente p conjuntos. Este elemento será contado p vezes em

$$\sum_{i=1}^{n} n(A_i).$$

Em

$$\sum_{1 \le i < j \le n} n(A_i \cap A_j)$$

será contado C_p^2, em

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

C_p^3, e assim sucessivamente até o termo $n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$, que nos dará uma contribuição igual a 1. É claro que a interseção de mais do que p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição.

Somando todas essas contribuições teremos:

$$C_p^1 - C_p^2 + C_p^3 - C_p^4 + \cdots + (-1)^{p-1} C_p^p \tag{1.2}$$

Pelo Exemplo 1.9 sabemos que

$$C_p^0 - C_p^1 + C_p^2 - C_p^3 + \cdots + (-1)^p C_p^p = 0,$$

e isso implica que a soma em 1.2 é igual a 1, uma vez que $C_p^0 = 1$, o que conclui a demonstração. □

Exemplo 1.12: Quantos são os inteiros entre 1 e 42000, inclusive, que não são divisíveis por 2, por 3 e nem por 7?

Se definirmos

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3,\ldots,42000\}\,; \\ A_1 &= \{x \in A | x = 2k, k \in \mathbb{N}\}\,; \\ A_2 &= \{x \in A | x = 3k, k \in \mathbb{N}\}\,; \\ A_3 &= \{x \in A | x = 7k, k \in \mathbb{N}\}\,; \end{aligned}$$

o número procurado será dado por

$$\begin{aligned} n(A) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A) - n(A_1) - n(A_2) - n(A_3) + n(A_1 \cap A_2) + \\ n(A_1 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} n(A) &= 42000, \\ n(A_1) &= \frac{42000}{2} = 21000, \\ n(A_2) &= \frac{42000}{3} = 14000, \\ n(A_3) &= \frac{42000}{7} = 6000, \\ n(A_1 \cap A_2) &= \frac{42000}{6} = 7000, \\ n(A_1 \cap A_3) &= \frac{42000}{14} = 3000, \\ n(A_2 \cap A_3) &= \frac{42000}{21} = 2000, \\ n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{42000}{426} = 1000, \end{aligned}$$

temos

$$42000 - 21000 - 14000 - 6000 + 7000 + 3000 + 2000 - 1000 = 12000.$$

Exemplo 1.13: Quantas são as permutações das letras da palavra BRASIL em que B ocupa o primeiro lugar, ou R o segundo lugar, ou L o sexto lugar?

Definimos os seguintes conjuntos:

A_1 = conjunto das permutações das letras B, R, A, S, I, L tendo o B em primeiro lugar.

A_2 = conjunto das permutações das letras B, R, A, S, I, L tendo o R em segundo lugar.

A_3 = conjunto das permutações das letras B, R, A, S, I, L tendo o L em sexto lugar.

Desejamos calcular $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Como o número de permutações com uma letra fixa é $5! = 120$, temos

$$n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 120.$$

Como duas letras fixas é $4! = 24$, logo

$$n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_3) = n(A_2 \cap A_3) = 24.$$

Com três letras fixas temos $(6-3)! = 3! = 6$, isto é,

$$n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 6.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - \\ n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ = 120 + 120 + 120 - 24 - 24 - 24 + 6 = 294. \end{aligned}$$

Exemplo 1.14: Determine o número de permutações simples dos elementos a_1, a_2, a_3, ..., a_n, nas quais a_1 está em primeiro lugar ou a_2 está em segundo lugar.

Definimos A_1 como sendo o conjunto das permutações em que a_1 está em primeiro lugar e A_2 o conjunto das permutações em que a_2 está em segundo lugar.

É claro que $n(A_1) = n(A_2) = (n-1)!$ e que $n(A_1 \cap A_2) = (n-2)!$. Logo, o número que procuramos nada mais é do que $n(A_1 \cup A_2)$, que é igual a:

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2) &= n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2) \\ &= (n-1)! + (n-1)! - (n-2)! \\ &= 2(n-1)! - (n-2)! \\ &= 2(n-1)(n-2)! - (n-2)! \\ &= (2n-2-1)(n-2)! \\ &= (2n-3)(n-2)! \end{aligned}$$

Definição 1.15: Uma permutação de a_1, a_2, a_3, ..., a_n é chamada de caótica quando nenhum dos a_i's se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.

Desta forma, $a_2a_1a_5a_3a_4$ e $a_5a_4a_1a_2a_3$ são exemplos de permutações caóticas de a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, enquanto $a_3a_4a_1a_2a_5$ não é (a_5 não está em seu lugar original).

Se definirmos por A_i o conjunto das permutações de a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, tendo a_i no i-ésimo lugar, para calcularmos o número de permutações caóticas, denotadas por D_n (a letra D vem da palavra desarranjo, palavra sinônima de permutação caótica), devemos calcular o número de elementos que não pertencem a nenhum dos A_i's, isto é, o número de elementos no complementar da união dos A_i's. Logo

$$\begin{aligned}D_n = n! - \sum_{i=1}^{n} n(A_i) + \sum_{1\leq i<j\leq n} n(A_i \cap A_j) - \sum_{1\leq i<j<k\leq n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\ +(-1)^n n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).\end{aligned}$$

Como existem n termos na primeira soma, C_n^2 na segunda, C_n^3 na terceira, $\ldots$, $C_n^n = 1$ na última, e

$$\begin{aligned}n(A_i) &= (n-1)!;\\ n(A_i \cap A_j) &= (n-2)!;\\ n(A_i \cap A_j \cap A_k) &= (n-3)!;\\ &\vdots\\ n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= 1;\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}D_n &= n! - n(n-1)! + C_n^2(n-2)! - C_n^3(n-3)! + \cdots + (-1)^n 1\\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.\end{aligned}$$

Colocando $n!$ em evidência, obtemos:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \qquad (1.3)$$

Utilizando essa fórmula, podemos ver que o número de permutações caóticas e 3 objetos a, b e c, é

$$D_3 = 3!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 2.$$

De fato, dentre as 6 permutações *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, somente *bca* e *cab* são permutações caóticas.

Observação 1.16: Fazendo $n = 1$ na Equação 1.3 obtemos $D_1 = 1!\left(1 - \frac{1}{1!}\right) = 1 - 1 = 0$. Fazendo $n = 2$ na Equação 1.3 obtemos $D_2 = 2!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = \frac{2!}{2!} = 1$

Exemplo 1.17: Quantas permutações dos inteiros 1, 2, 3, 4, $\ldots$, 8, 9, 10 têm exatamente 4 dos números em suas posições originais?

Como não são fixados os 4 números que permanecem nas posições originais, devemos escolhê-los, o que pode ser feito de C_{10}^{4} maneiras distintas, e, em seguida, permutar os 6 restantes caoticamente. Logo, a resposta é

$$C_{10}^{4}D_6 = C_{10}^{4}6!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = C_{10}^{4}265 = 55650$$

Exemplo 1.18: Dados n objetos

$$x_1,x_2,\ldots,x_p,y_1,y_2,\ldots,y_q$$

Qual é o número de permutações dos n objetos que não fixam nenhum dos x_i $(i = 1,2,\ldots,p)$ na posição original?

Para solucionar este problema, vamos dividí-lo em vários casos:

- Caso nenhum dos objetos fique na posição original, temos $D_n = C_q^0 \cdot D_n$ permutações.
- Caso apenas um dos y_j $(j = 1,2,\ldots,q)$ fique na sua posição original, temos $C_q^1 \cdot D_{n-1}$ permutações. De fato, primeiro decidimos quem iremos fixar, o que pode ser feito de C_q^1 maneiras, depois permutamos caoticamente os $n-1$ objetos restantes, para isso temos D_{n-1} possibilidades. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de permutações é $C_q^1 \cdot D_{n-1}$.
- Caso exatamente dois dos y_j $(j = 1,2,\ldots,q)$ fiquem nas suas posições originais, temos $C_q^2 \cdot D_{n-2}$ permutações.

  $\vdots$
- Caso $y_1,y_2,\ldots,y_q$ fiquem nas suas posições originais, temos $C_q^q \cdot D_{n-q}$ permutações.

Portanto, o número de permutações que não fixam $x_1,x_2,\ldots,x_p$ é

$$C_q^0 \cdot D_n + C_q^1 \cdot D_{n-1} + C_q^2 \cdot D_{n-2} + \cdots + C_q^q \cdot D_{n-q}$$

Mas observe que, $q = n - p$. Daí, o número acima fica

$$C_{n-p}^0 \cdot D_n + C_{n-p}^1 \cdot D_{n-1} + C_{n-p}^2 \cdot D_{n-2} + \cdots + C_{n-p}^{n-p} \cdot D_{n-(n-p)} = \sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k \cdot D_{n-k} \quad (1.4)$$

Exemplo 1.19: Quantos são os anagramas da palavra AMOR que não têm A como primeira letra nem R como última?

Primeiro, faremos uma lista dos anagramas:

MORA	*OMRA*	*RMOA*	*RAMO*	*MARO*	*ORMA*	*RMAO*
RAOM	*MRAO*	*ORAM*	*ROMA*	*MROA*	*OARM*	*ROAM*

Contando os anagramas da lista, observamos que são 14 os que não tem A como primeira letra e R como última.

Aplicando a Equação 1.4, observamos que o número de anagramas é:
$n = 4$
$p = 2$
$n - p = q = 2$

$$C_2^0 D_4 + C_2^1 D_3 + C_2^2 D_2 = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9 + 4 + 1 = 14$$

No capítulo seguinte falaremos sobre o jogo *Mastermind*, apresentado suas regras, o que deve ser feito para jogá-lo e também uma explanação do raciocínio combinatório que há por trás dele.

2

O Jogo Mastermind

Nesse capítulo faremos um estudo do jogo *Mastermind*, explicando as regras e como jogar pelo aplicativo, e também abordaremos a análise combinatória por trás dele.

2.1 A Análise Combinatória por trás do jogo *Mastermind*

O jogo *Mastermind* consiste em adivinhar uma sequência de quatro círculos com cores distintas duas a duas com o uso de oito círculos com cores também distintas duas a duas. O aplicativo gera internamente uma sequência aleatória de quatro cores distintas utilizando as oito cores disponíveis, que será a senha, e o jogador deverá adivinhar essa senha. A seguir temos algumas imagens do aplicativo do jogo *Mastermind* criado para jogar por um *Smartphone* ou *Tablet* com sistema *Android*. A primeira imagem (Figura 2.1) refere-se a tela inicial do jogo no aplicativo, e a segunda imagem (Figura 2.2) refere-se a um jogo já iniciado que já foram feitas duas tentativas, que aparecem duas dicas, e está na escolha da terceira sequência.

O jogador escolhe a primeira sequência com quatro círculos de cores distintas, clicando sobre os círculos coloridos, sem ter nenhuma informação de como ela é. Após o jogador escolher essa sequência, que será montada nos círculos da posição 0, e clicar no botão ok, aparecerá ao lado dessa sequência montada uma "dica". Essa "dica" será: um círculo de cor branca para cada cor certa colocada no lugar certo, um círculo de cor preta para cada cor certa mas colocada no lugar errado.

O jogador deverá usar a dica dada para montar a sequência seguinte até adivinhar a senha com a menor quantidade de jogadas possíveis. O jogador terá no máximo dez tentativas para tentar adivinhar a senha. A cada tentativa, o aplicativo vai comparando a sequência montada com a senha gerada por ele e vai colocando os círculos brancos e pretos. Sendo assim, há apenas quatro espaços destinados a aparecer os círculos brancos e pretos. Pode acontecer desses espaços ficarem sem círculo branco ou preto, o que significa que, para cada espaço em branco, há uma cor escolhida para a sequência que não faz parte da senha. Essa informação é de suma importância, e também deve ser levada em conta pelo jogador na análise para tentar

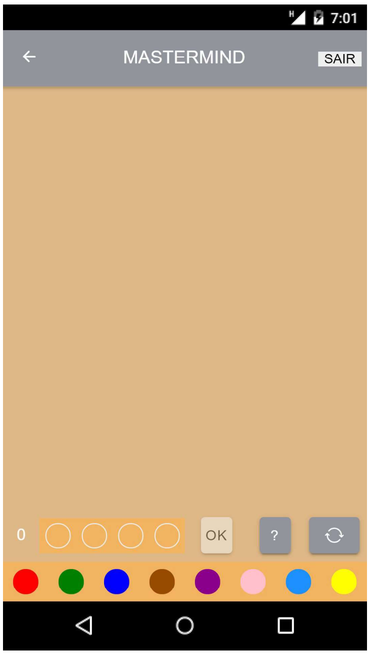


Figura 2.1: Tela inicial do jogo

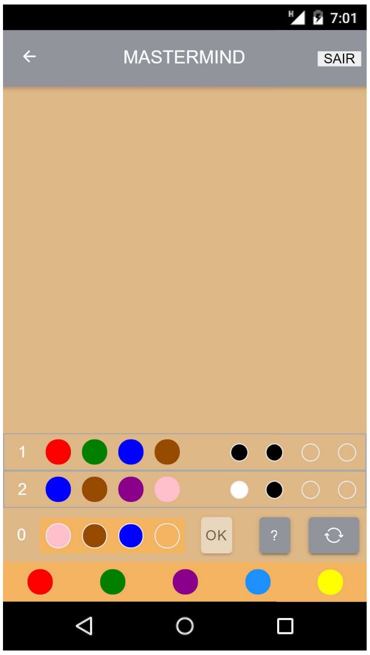


Figura 2.2: Exemplo de um jogo

adivinhar a senha.

Uma cor escolhida pelo jogador pode ser removida da sequência, bastando apenas clicar sobre essa cor, e ela retornará a sua posição de origem. O preenchimento das cores na sequência de quatro círculos obedece sempre a ordem da esquerda para a direita, ou seja, ao clicar em uma cor ela vai para a primeira posição, ao clicar em outra cor ela vai para a segunda posição, e assim por diante até preencher a quarta posição. Sendo assim, caso o jogador queira começar o preenchimento no terceiro círculo, por exemplo, ele deverá escolher duas cores quaisquer para as duas primeiras posições, colocar a cor escolhida na terceira posição, e em seguida remover as duas cores escolhidas para as primeiras posições e continuar o preenchimento na mesma ordem da esquerda para a direita.

Ao clicar no botão interrogação aparecerá na tela a informação sobre o significado das bolas brancas e pretas nas dicas. Ao clicar no outro botão que possui as setas circulares o jogo poderá ser reiniciado e uma nova senha será gerada pelo aplicativo.

Para fazer a análise matemática do jogo, vamos denotar as cores disponíveis por L, M, N, O, P, Q, R e S. Suponha que o aplicativo gerou como senha a sequência LMNO, nesta ordem. Se o jogador coloca na primeira tentativa a sequência LNOQ, nesta ordem, aparecerá um círculo branco (b=1) correspondente à cor L (cor certa na posição certa) e dois círculos pretos (p=2) correspondentes às cores N e O (cores certas na posição errada). Sendo assim, o jogador deverá tentar descobrir a qual cor da sequência pertence o círculo branco, para deixá-la em sua posição, assim como, a quais cores pertencem os dois círculos pretos para fazer a permutação delas e descobrir a posição de cada uma. Além disso, o jogador deverá saber que há uma cor escolhida por ele que não pertence a senha, nesse exemplo foi a cor Q.

Em uma tentativa de acerto da senha não existe a possibilidade de aparecer como dica três círculos brancos e um círculo preto, uma vez que, ao aparecer três círculos brancos (b=3), significa que três cores da sequência estão certas na posição certa, e a quarta cor, sendo ela pertencente a senha, deve estar na posição certa, e portanto não pode aparecer o círculo preto pois gera uma contradição.

Fazendo todas as combinações com os círculos brancos e pretos, excluindo o caso anterior (b=3 e p=1), chegamos a todos os casos possíveis para uma dica conforme mostra a Figura 2.3. Vemos assim que ocorre um total de quatorze possibilidade.

Casos	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º	14º
b (círculo branco)	4	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
p (círculo preto)	0	0	0	1	2	0	1	2	3	4	3	2	1	0
ilustração	○○ ○○	○○ ○	○○	○○ ●	○○ ●●	○	○●	○● ●	○● ●●	●● ●●	●● ●	●●	●	

Figura 2.3: Número de possibilidades para a "dica" após a tentativa do jogador.

Para uma análise mais minuciosa da análise combinatória presente no jogo, faremos um estudo para cada caso ilustrado na Figura 2.3, mostrando o número de sequências possíveis que o jogador pode ter para adivinhar a senha após a sua primeira tentativa.

Para um jogador montar a primeira sequência de quatro cores distintas duas a duas ele deve usar oito cores distintas duas a duas. Usando o PFC, teremos 8 possibilidades para escolher a primeira cor, 7 possiblilidades para escolher a segunda cor, já que as cores são distintas, 6 possibilidades para escolher a terceira cor, e 5 possibilidades para escolher a quarta e última cor, gerando assim

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 \text{ sequências possíveis.}$$

Vamos agora fazer um estudo para cada caso ilustrado na Figura 2.3.

1° caso) quatro círculos brancos (b=4 e p=0).

Neste caso, quando o jogador faz a primeira tentativa para adivinhar a senha e aparece como dica quatro círculos brancos significa que ele já adivinhou a senha de primeira e não há mais nada que precisa ser feito.

2° caso) três círculos brancos (b=3 e p=0).

Neste caso, o jogador precisa escolher três cores da sequência para ficarem fixas nas mesmas posições, e isso pode ser feito de

$$C_4^3 = 4 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve trocar a cor restante da sequência por alguma outra cor das quatro cores que ficaram de fora, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times 4 = 16$ sequências, sendo uma delas a correta.

3° caso) dois círculos brancos (b=2 e p=0).

Neste caso, o jogador precisa escolher duas cores da sequência para ficarem fixas nas mesmas posições, e isso pode ser feito de

$$C_4^2 = 6 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve trocar as duas cores restantes da sequência por outras duas cores das quatro que ficaram de fora, e isso pode ser feito de

$$C_4^2 = 6 \text{ maneiras.}$$

Por fim, o jogador deve permutar as duas cores escolhidas anteriormente, o que leva a $P_2 = 2! = 2$.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $6 \times 6 \times 2 = 72$ sequências, sendo uma delas a correta.

4° caso) dois círculos brancos e um círculo preto (b=2 e p=1).

Neste caso, o jogador precisa escolher duas cores da sequência para ficarem fixas nas mesmas posições, e isso pode ser feito de

$$C_4^2 = 6 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve escolher uma cor das duas restantes para permutar caoticamente, e isso pode ser feito de

$$C_2^1 = 2 \text{ maneiras.}$$

Após a escolha anterior, ele deve permutar caoticamente essa cor escolhida em dois espaços, pois os outros dois espaços já estão ocupados pelas duas cores escolhidas inicialmente. Para isso, deve-se usar a fórmula do Exemplo 1.18 e fazer $n = 2$, $p = 1$, e chega-se a

$$\sum_{k=0}^{2-1} C_{2-1}^k \cdot D_{2-k} = C_1^0 \cdot D_2 + C_1^1 \cdot D_1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2$$

Por fim, a última cor restante deve ser trocada por uma das quatro cores que ficaram de fora, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $6 \times 2 \times 1 \times 4 = 48$ sequências, sendo uma delas a correta.

5° caso) dois círculos brancos e dois círculos pretos (b=2 e p=2).

Neste caso, o jogador precisa escolher duas cores da sequência para ficarem fixas nas mesmas posições, e isso pode ser feito de

$$C_4^2 = 6 \text{ maneiras.}$$

Por fim, ele deve permutar caoticamente as duas cores restantes em dois espaços, e isso pode ser feito apenas 1 vez (conforme Observação 1.16 para $n = 2$).

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $6 \times 1 = 6$ sequências, sendo uma delas a correta.

6° caso) um círculo branco (b=1 e p=0).

Neste caso, o jogador precisa escolher uma cor da sequência para ficar fixa na mesma posição, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve trocar as três cores restantes da sequência por outras três cores das quatro ficaram de fora, e isso pode ser feito de

$$C_4^3 = 4 \text{ maneiras.}$$

Por fim, o jogador deve permutar as três cores escolhidas anteriormente, o que leva a $P_3 = 3! = 6$.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times 4 \times 6 = 96$ sequências, sendo uma delas a correta.

7° caso) um círculo branco e um círculo preto (b=1 e p=1).

Neste caso, o jogador precisa escolher uma cor da sequência para ficar fixa na mesma posição, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve escolher outra cor das três restantes para permutar caoticamente, e isso pode ser feito de

$$C_3^1 = 3 \text{ maneiras.}$$

Após a escolha anterior, ele deve permutar caoticamente essa cor escolhida em três espaços, e isso pode ser feito de

$$D_3 = 2 \text{ maneiras.}$$

Posteriormente, ele deve trocar as duas cores restantes da sequência por outras duas cores das quatro que ficaram de fora, e isso pode ser feito de

$$C_4^2 = 6 \text{ maneiras.}$$

Por fim, o jogador deve permutar as duas cores escolhidas anteriormente, o que leva a $P_2 = 2! = 2$.

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times 3 \times 2 \times 6 \times 2 = 384$ sequências, sendo uma delas a correta.

8° caso) um círculo branco e dois círculos pretos (b=1 e p=2).

Neste caso, o jogador precisa escolher uma cor da sequência para ficar fixa na mesma posição, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve escolher duas cores das três restantes para permutar caoticamente, e isso pode ser feito de

$$C_3^2 = 3 \text{ maneiras.}$$

Após a escolha anterior, ele deve permutar caoticamente essas duas cores escolhidas em três espaços (usar o Exemplo 1.18, fazer $n = 3$, $p = 2$), e isso pode ser feito de

$\sum_{k=0}^{3-2} \left(C_{3-2}^k \times D_{3-k}\right) = \sum_{k=0}^{1} \left(C_1^k \times D_{3-k}\right) = C_1^0 \times D_3 + C_1^1 \times D_2 = 1 \times 2 + 1 \times 1 =$ 3 maneiras.

Por fim, a última cor restante deve ser trocada por uma das quatro cores que ficaram de fora, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times 3 \times 3 \times 4 = 144$ sequências, sendo uma delas a correta.

9° caso) um círculo branco e três círculos pretos (b=1 e p=3).

Neste caso, o jogador precisa escolher uma cor da sequência para ficar fixa na mesma posição, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve permutar caoticamente as três cores restantes da sequência , e isso pode ser feito de

$$D_3 = 2 \text{ maneiras.}$$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times 2 = 8$ sequências, sendo uma delas a correta.

10° caso) quatro círculos pretos (b=0 e p=4).

Neste caso, o jogador precisa apenas permutar caoticamente as quatro cores da sequência para poder tirar cada cor da sua posição inicial, e, usando a Equação 1.3, isso pode ser feito de

$D_4 = 4! \times \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 24 \times \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9$ maneiras.

Logo, existem 9 sequências, sendo uma delas a correta.

11° caso) três círculos pretos (b=0 e p=3).

Neste caso, o jogador deve primeiro escolher três das quatro cores da sequência para permutar caoticamente, o que pode ser feito de

$$C_4^3 = 4 \text{ maneiras.}$$

Em seguida, ele deve substituir a cor restante por uma das quatro cores que ficaram de fora, e isso pode ser feito de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Por fim, ele deve permutar caoticamente essas três cores escolhidas inicialmente em quatro espaços, juntamente com a outra cor que entrou na sequência. O que leva a uma quantidade de

$$\sum_{k=0}^{4-3} \left(C_{4-3}^k \times D_{4-k}\right) = \sum_{k=0}^{1} \left(C_1^k \times D_{4-k}\right) = C_1^0 \times D_4 + C_1^1 \times D_3 = 1 \times 9 + 1 \times 2 = 11$$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times 4 \times 11 = 176$ sequências, sendo uma delas a correta.

12° caso) dois círculos pretos (b=0 e p=2).

Neste caso, o jogador deve escolher duas das quatro cores da sequência, pois precisará fazer uma permutação caótica delas. Essa escolha pode ser feita de

$$C_4^2 = 6 \text{ maneiras.}$$

Posteriormente, ele deve substituir as outras duas cores da sequência por duas das quatro cores que ficaram de fora. O que leva a

$$C_4^2 = 6 \text{ maneiras.}$$

Por fim, ele deve permutar caoticamente as duas cores escolhidas inicialmente em quatro espaços, juntamente com as outras duas cores que entraram na sequência. O que leva a uma quantidade de

$\sum_{k=0}^{4-2} \left(C_{4-2}^k \times D_{4-k}\right) = \sum_{k=0}^{2} \left(C_2^k \times D_{4-k}\right) = C_2^0 \times D_4 + C_2^1 \times D_3 + C_2^2 \times D_2 = 1 \times 9 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 14.$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $6 \times 6 \times 14 = 504$ sequências, sendo uma delas a correta.

13° caso) um círculo preto (b=0 e p=1).

Neste caso, o jogador deve escolher uma das quatro cores da sequência, pois precisará fazer uma permutação caótica dela. Essa escolha pode ser feita de

$$C_4^1 = 4 \text{ maneiras.}$$

Posteriormente, ele deve substituir as outras três cores da sequência por três das quatro cores que ficaram de fora. O que leva a

$$C_4^3 = 4 \text{ maneiras.}$$

Por fim, ele deve permutar caoticamente a cor escolhida inicialmente em quatro espaços, juntamente com as outras três cores que entraram na sequência. O que leva a uma quantidade de

$$\sum_{k=0}^{4-1} \left(C_{4-1}^k \times D_{4-k}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{3}\left(C_3^k \times D_{4-k}\right) =$$

$$C_3^0 \times D_4 + C_3^1 \times D_3 + C_3^2 \times D_2 + C_3^3 \times D_1 =$$

$$1 \times 9 + 3 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 0 = 18$$

Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $4 \times 4 \times 18 = 288$ sequências, sendo uma delas a correta.

14° caso) nenhum círculo branco ou preto (b=0 e p=0).

Neste caso, o jogador deve escolher as quatro cores que ficaram de fora, visto que nenhuma cor escolhida faz parte da senha, e assim fazer uma permutação dessas quatro cores escolhidas. Com isso, podemos ter $P_4 = 4! = 24$ sequências possíveis ao todo, sendo uma delas a sequência correta.

Segue abaixo uma tabela com os resultados de todos os casos analisados anteriormente, ou seja, o número de possibilidades que o jogador pode ter para montar a sequência seguinte.

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°
○○ ○○	○○ ○	○○	○○ ●	○○ ●●	○	○●	○● ●	○● ●●	●● ●●	●● ●	●●	●	
1	16	72	48	6	96	384	144	8	9	176	504	288	24

Com base nesses resultados, excluindo o primeiro caso (b=4 e p=0), verifica-se que a melhor tentativa inicial é a do 5° caso (b=2 e p=2), seguido do 9° caso (b=1 e p=3) e do 10° caso (b=0 e p=4), em que cada um reduz a menos de dez chances o acerto da senha na próxima tentativa. Pode-se verificar, também, que esses são os casos onde o local destinado a dica não fica nenhum espaço vazio, ou seja, todas as cores escolhidas para a sequência fazem parte da senha.

Vale ressaltar também que nem sempre ter mais círculos brancos e/ou pretos significa que maiores são as chances de adivinhar a senha. Percebemos isso ao comparar o 14° caso (b=0 e p=0) com o 8° caso (b=1 e p=2) ou com o 11° caso (b=0 e p=3), em que ambos possuem apenas um espaço não preenchido na dica. O 14° caso possui uma quantidade de possibilidade muito menor do que esses outros casos com apenas um espaço não preenchido na dica.

Por fim, vale observar também que a pior tentativa inicial é aquela correspondente a dica do 12° caso (b=0 e p=2), que apresenta muito mais possibilidades do que o 13° caso (b=0 e p=1) com apenas um círculo preto a menos.

Toda essa análise foi possível devido ao uso dos conceitos da Análise Combinatória. No entanto, a análise das possibilidades usando apenas a quantidade de casos possíveis não resolve o problema, uma vez que cada informação é relativa e precisa ser analisada em conjunto com as dicas anteriores.

3

O Aplicativo do Jogo Matermind

Neste capítulo, abordaremos todo o processo para o desenvolvimento do aplicativo apresentando as ferramentas utilizadas bem como as tentativas e erros para desenvolver esse aplicativo. Ao final trabalharemos alguns exemplos simulando algumas jogadas no aplicativo e alguns raciocínios que podem ser utilizados no jogo.

3.1 O Aplicativo

Ao definir que não seria mais possível fazer a aplicação do jogo *Matermind* na escola devido a pandemia surgiu a ideia de desenvolver um aplicativo desse jogo para *Smartphone* ou *Tablet* com sistema *Android*. Apesar de já haver inúmeros aplicativos desse jogo, poucos abrangiam a ideia do jogo abordado nesse trabalho, por isso também ficou definido que seria desenvolvido um novo aplicativo.

Ao pesquisar por esse aplicativo na *Play Store* (loja de aplicativos de *Smartphone Android*) encontramos o seguinte resultado como mostra a Figura 3.1.

Todos os resultados de aplicativos que aparecem nessa Figura 3.1 permitem a repetição de cores ao montar a sequência, o que não é o nosso caso. Eles também mostram um formato de dica que é inverso ao formato abordado nesse trabalho, ou seja, enquanto aqui falamos que bola branca na dica significa cor certa na posição certa, nesses outros aplicativos isso refere-se a bola preta, e vice-versa para cor certa na posição errada.

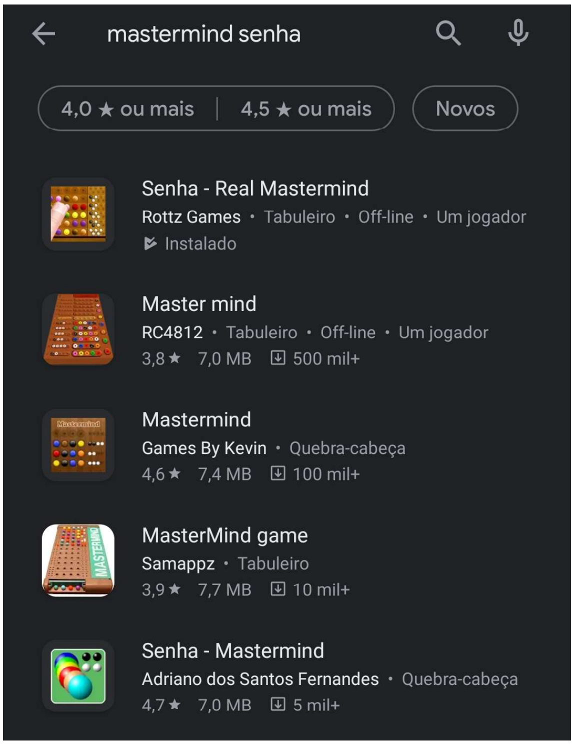


Figura 3.1: Resultado da pesquisa do jogo Mastermind na Play Store

Para desenvolver esse aplicativo houve uma pesquisa de como ele deveria ser feito, e após algumas análises ficou definido o uso do *software* Eclipse IDE juntamente com o compilador Java e o kit de desenvolvimento *Android* do Google. No entanto, a instalação e execução desse ambiente de desenvolvimento já começou com problemas na parte de instalação do kit de desenvolvimento *Android*, também conhecido como *Android SDK*. Sanados os problemas na instalação do *Android SDK* chega-se a parte de configuração do Eclipse IDE. Depois de instaladas essas ferramentas e corrigidos esses erros de instalação, o *software* Eclipse IDE ainda continuou a apresentar erros na execução, conforme mostra Figura 3.2, que não foram possíveis serem reparados, daí então ficou definido que essas ferramentas não seriam mais utilizadas.

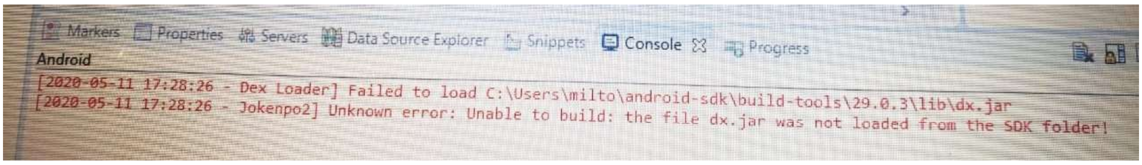


Figura 3.2: Erro no Software Eclipse IDE

Descartadas as ferramentas citadas anteriormente começou uma nova pesquisa sobre quais deveriam ser utilizadas para desenvolver o aplicativo e ficou definida agora o uso do Corona SDK que usa a linguagem de scripting Lua. No entanto, ao inserir as imagens e gráficos do jogo houve um problema para adaptar a lógica de comparação que existe por trás do jogo *Mastermind* nessa linguagem Lua, daí então essas ferramentas também não poderiam mais ser utilizadas para o desenvolvimento desse aplicativo.

Por fim, sempre pensando em uma IDE (*Integrated Development Environment* ou Ambiente de Desenvolvimento Integrado) uma vez que reúne características e ferramentas de apoio ao desenvolvimento de *software* com o objetivo de agilizar o processo, escolhemos o Visual Studio Code (VS Code), que é um *Software* livre e de código aberto, para tentar desenvolver esse aplicativo do jogo *Mastermind*. Para isso, é necessário antes ter uma arquitetura pronta para desenvolver baseada em Ionic, Angular e Cordova.

Fez-se necessário também a instalação do *Android Studio* (*Android SDK*) que serve como simulador do *Android* e também para gerar o arquivo executável para *Smartphone* ou *Tablet* com sistema *Android* (.apk). A linguagem de programação no VS Code, onde foi inserida toda a lógica por trás do *Mastermind*, foi o *TypeScript* (extensão .ts) juntamente com o *Framework Ionic*, onde esse último é uma plataforma de código aberto que é possível codificar o aplicativo com algumas funcionalidades para *Smartphone Android*. Na Figura 3.3 temos um exemplo de um código da página do jogo escrito em .ts.

Utilizamos também o scss (extensão .scss), extensão do css (*Cascading Style Sheets*), para a edição do estilo apresentado em todo o aplicativo. A Figura 3.4 mostra um exemplo de um código em .scss referente a página do jogo, onde nessa página foram adicionadas, por exemplo, classes referentes às cores dos círculos, tamanho desses círculos, tamanho da fonte, entre outros estilos.

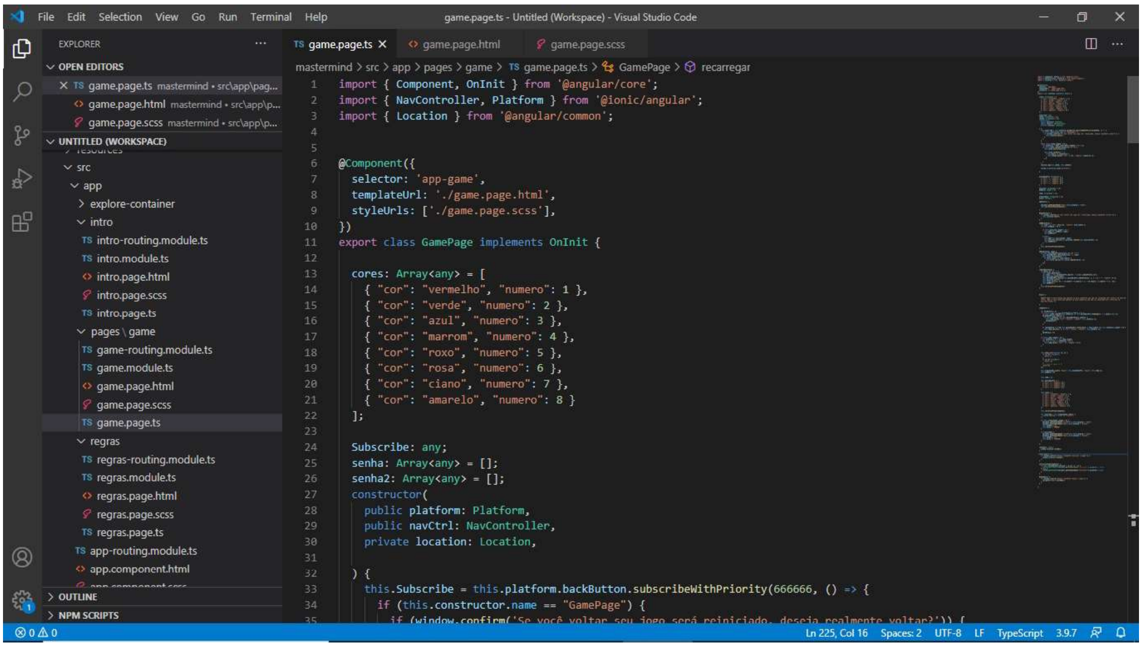


Figura 3.3: Arquivo do jogo no aplicativo escrito em TypeScript

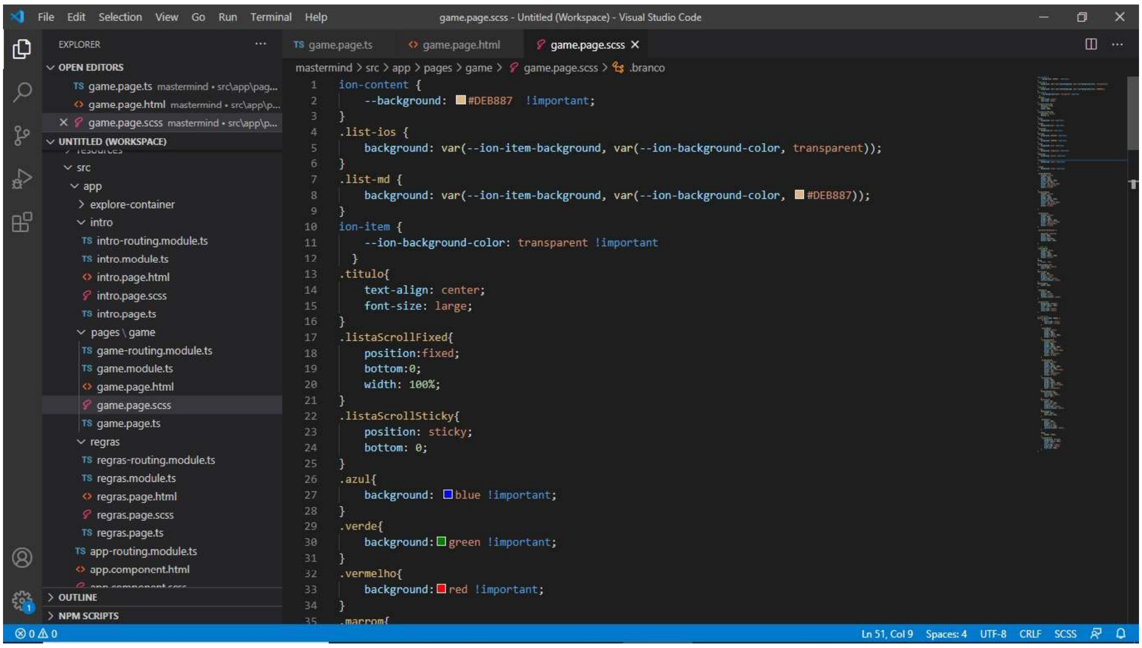


Figura 3.4: Arquivo do jogo no aplicativo em scss

Utilizamos também o HTML (*HyperText Markup Language*, extensão .html) para montar a estrutura de todo o aplicativo, sendo através desse que ordenamos o aparecimento dos elementos na página, desde o título na parte de cima até os círculos embaixo e de baixo para cima na medida que as sequência são montadas. A figura 3.5 mostra um exemplo de um código nessa linguagem .html referente a página do jogo.

Foi necessário também a instalação dos *Softwares Java* e *Android Studio* para ser possível gerar o arquivo executável (.apk) para ser instalado em um *Smartphone* ou *Tablet* com sistema *Android*.

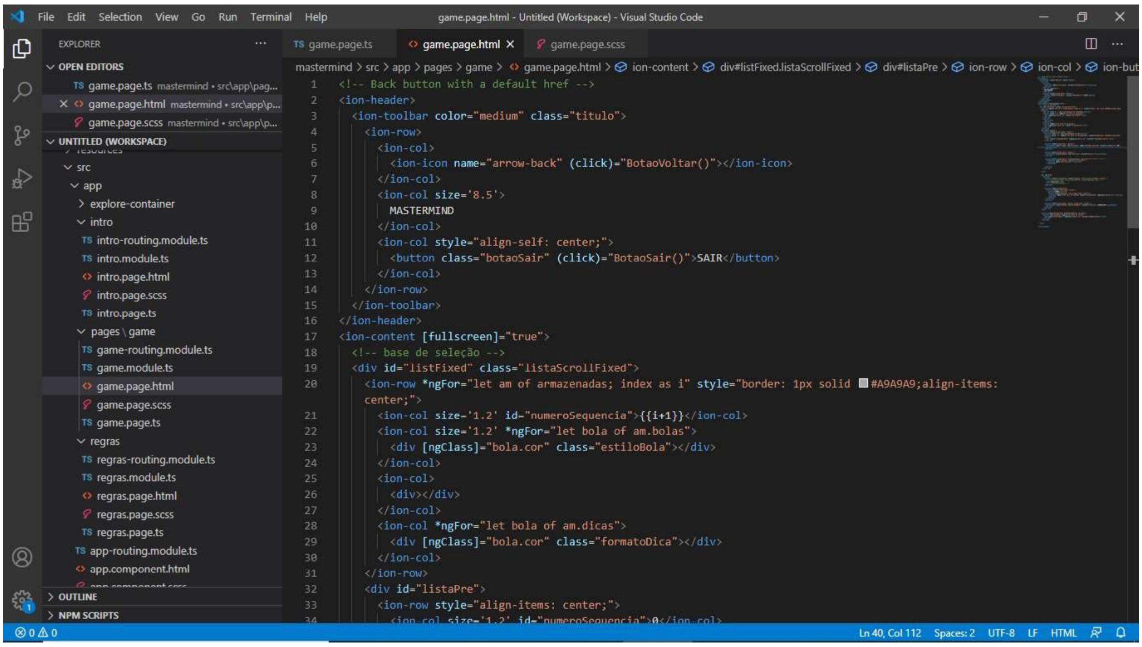


Figura 3.5: Arquivo do jogo no aplicativo em html

A seguir temos a Figura 3.6 que mostra as imagens de algumas telas do aplicativo. A primeira imagem mostra a tela de instruções presente nele, a segunda imagem mostra um jogo que a senha foi adivinhada na quinta tentativa e aparece a mensagem que acertou, e a terceira mostra a mensagem perdeu depois do jogador ter usado as dez tentativas e não ter adivinhado a senha.

Figura 3.6: Imagens do aplicativo

Com o arquivo pronto (executável .apk) podemos levar para uma sala de aula, onde cada discente tenha acesso a um *Smartphone* ou *Tablet* com sistema *Android*, para instalar o jogo e jogar. Nesse caso não há a necessidade de internet para instalação do mesmo. Mas antes da instalação e execução do jogo, deve ser realizada uma abordagem sobre o que é a Análise Combinatória, caso esses discentes ainda não estejam familiarizado com esse conteúdo. Deve ser abordado conceitos como o princípio fundamental da contagem, a permutação simples, a diferença entre arranjo e combinação simples, e a permutação caótica, usando também alguns exemplos que foram inseridos nesse trabalho.

3.2 Exemplos de jogo no aplicativo

Iremos agora fazer dois exemplos simulando o jogo *Mastermind* com a análise das possibilidades de acordo com os casos citados em 2.1 seguindo os raciocínios ali explicados.

Exemplo 3.1: Para esse primeiro exemplo vamos tentar adivinhar a senha gerada pelo aplicativo sem saber nenhuma informação sobre ela.

Para montar a primeira sequência escolheremos de forma aleatória quatro cores dentro as oito que estão disponíveis. Essa primeira sequência será montada pelas seguintes cores clicando sobre elas: verde, amarelo, vermelho e azul escuro, nessa ordem. Conforme mostra a Figura 3.7. Como dica apareceu apenas uma bola branca, o que significa que apenas uma dessas cores faz parte da senha e ela está na posição certa. Percebe-se também que na dica há três círculos vazios e isso significa que três dessas quatro cores escolhidas não fazem parte da senha de forma alguma.

De acordo com o 6° caso, devemos escolher uma cor para permanecer no mesmo lugar e trocar as outras três. Vamos escolher a cor verde para manter na mesma posição e trocar as outras cores por rosa, azul claro e marrom, nessa ordem. Conforme mostra Figura 3.8.

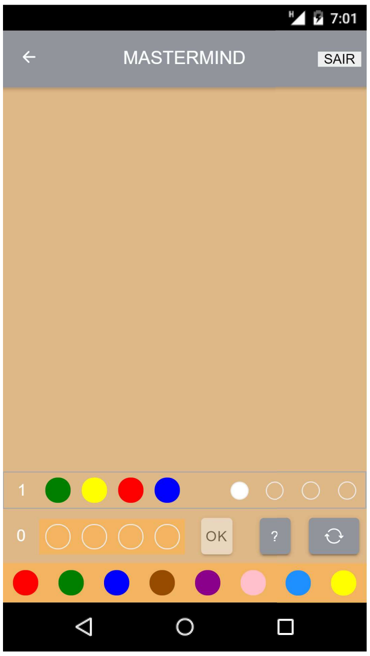


Figura 3.7: Primeira tentativa

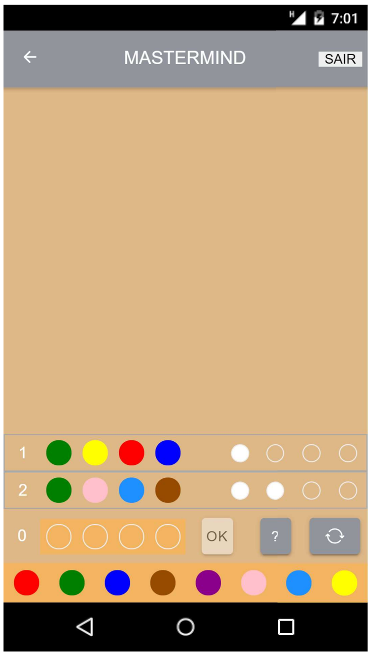


Figura 3.8: Segunda tentativa

Verificamos agora que apareceu na dica duas bolas brancas, que informa que apenas duas cores fazem parte da senha e estão na posição certa e outras duas cores não fazem parte da senha. Vamos supor que essas cores sejam verde e rosa. Resta escolher mais duas cores para a sequência. Por outro lado, as outras cinco cores (amarelo, vermelho, azul escuro, azul claro e marrom) não irão fazer parte da sequência, restando apenas a cor roxa, o que leva a uma impossibilidade, logo as cores não podem ser verde e rosa. A mesma análise vale se escolhermos as cores verde e azul claro ou verde e marrom. Portanto, a cor verde não pode fazer parte da senha de nenhuma maneira.

Como a cor verde não pode fazer parte da senha devemos escolher uma das outras três cores restante da primeira sequência (amarelo, vermelho ou azul escuro) para corresponder à bola branca da primeira dica. Vamos analisar cada uma das três possibilidades:

- Se escolhermos a cor amarela, ela deve ficar na segunda posição, consequentemente devemos escolher a cor azul claro para a terceira posição e a cor marrom para a quarta posição, já que a cor verde não faz parte da sequência. Restando assim a cor roxa para a primeira posição.

- Se escolhermos a cor vermelha, ela deve ficar na terceira posição, consequentemente devemos escolher a cor rosa para a segunda posição e a cor marrom para a quarta posição. Restando assim a cor roxa para a primeira posição.

- Se escolhermos a cor azul escuro, ela deve ficar na quarta posição, consequentemente devemos escolher a cor rosa para a segunda posição e a cor azul claro para a terceira posição. Restando assim a cor roxa para a primeira posição.

Percebe-se que em qualquer uma das três possibilidades a cor roxa fica na primeira posição, então a primeira cor da senha já foi descoberta, restando assim apenas três possibilidades ao todo para descobrir a senha.

Fazendo a escolha da cor amarela para a segunda posição a senha não é descoberta, continuando a dica com duas bolas brancas. Fazendo a escolha da cor vermelha para a terceira posição, a senha também ainda não é descoberta, continuando a dica com duas bolas brancas. Conforme mostra a Figura 3.9. Resta assim então a última possibilidade que será colocar a cor azul escuro na quarta posição.

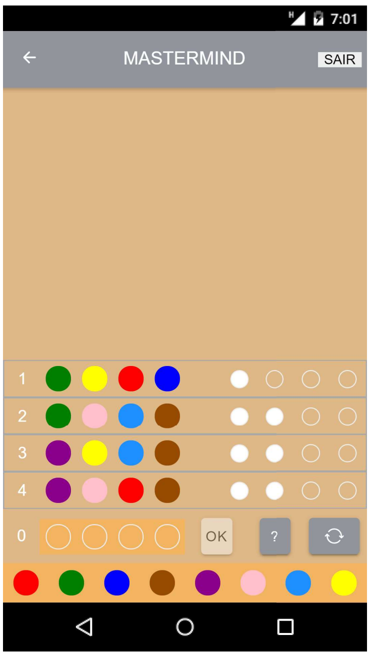


Figura 3.9: Terceira e quarta tentativa

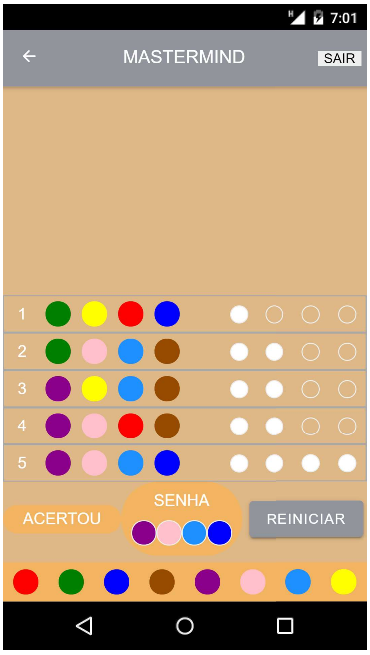


Figura 3.10: Quinta tentativa

Fazendo então a última tentativa colocando a cor azul escuro na quarta posição, roxa na primeira, rosa na segunda e azul claro na terceira posição chega-se a senha correta, conforme mostra a Figura 3.10. Verificamos assim que analisando todas as possibilidades, no final chega-se a apenas uma possibilidade que será a de encontrar a sequência correta e descobrir a senha. Na medida em que as sequências vão sendo montadas e as dicas vão aparecendo o número de possibilidade para descobrir a senha torna-se cada vez menor e sempre chegaremos a apenas uma possibilidade ao analisar todos os casos possíveis sempre levando em conta as dicas anteriores. No entanto, lembramos que essa redução a apenas uma possibilidade deve ser feita em menos de dez tentativas.

Outro ponto importante que também é sempre bom levar em consideração é o fato de, ao montar uma nova sequência, sempre verificar se ela é compatível com todas as dicas que ali já se encontram pois assim evita-se desperdiçar uma chance por usar uma sequência que não está dentro das possibilidades.

Exemplo 3.2: Para esse exemplo tentaremos adivinhar uma nova senha e iremos escolher inicialmente, também de forma aleatória, quatro cores quaisquer.

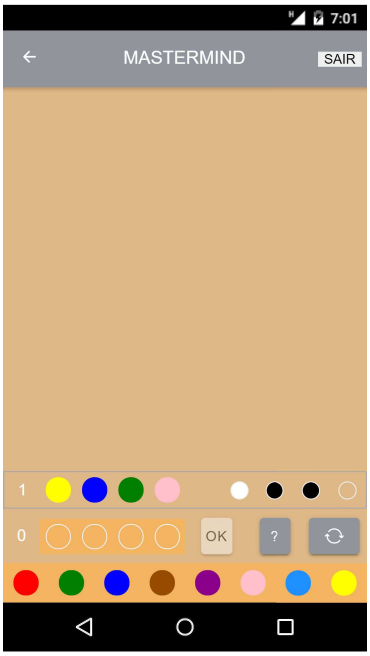


Figura 3.11: Primeira tentativa

A escolha inicial será da seguinte maneira: amarelo para a primeira posição, azul escuro para a segunda posição, verde para a terceira posição e rosa para a quarta posição. Como mostra a Figura 3.11 temos na dica uma bola branca e duas bolas pretas, o que indica que há uma cor da senha na posição certa e outras duas cores da senha na posição errada. Sabemos também que uma dessas quatro cores não faz parte da senha.

Conforme mostra o 8° caso em 2.1 reduzimos a 144 o número de possibilidades para descobrir a senha. Devemos escolher uma cor para ficar na mesma posição e outras duas para permutar caoticamente.

Vamos escolher a cor amarela para corresponder a bola branca na dica 1 e assim ela vai ficar na mesma posição. Escolheremos também as cores azul escuro e verde para corresponder às bolas pretas na dica 1, logo elas deverão mudar de posição. Fazendo essas escolhas, manteremos amarelo na primeira posição, colocaremos azul escuro na terceira posição, verde na quarta posição e acrescentaremos a cor roxa na segunda posição, conforme mostra Figura 3.12. Percebe-se que a dica passou a ter uma bola branca e uma bola preta.

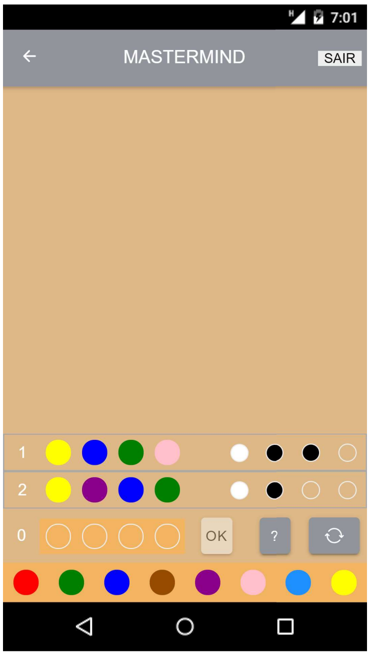


Figura 3.12: Segunda tentativa

Sendo assim, ao manter as cores amarela, azul escuro e verde a dica foi diminuída em uma bola e isso significa que uma dessas três cores não faz parte da senha, e consequentemente, a cor rosa tem que fazer parte da senha. Outra conclusão é que a cor roxa não faz parte da senha, daí, duas das três cores entre amarela, azul escuro e verde fazem parte da senha. A outra cor restante deve ser uma das que ainda não foi utilizada (marrom, vermelho ou azul claro).

Para a sequência seguinte, vamos supor que a bola branca nas duas dicas continua sendo referente a cor amarela na primeira posição. Vamos escolher as cores azul escuro e rosa para permutar caoticamente. Sendo assim, a cor azul escuro deve ir para a quarta posição, e colocaremos a cor rosa na terceira posição. E para fechar a sequência escolheremos a cor marrom para a segunda posição.

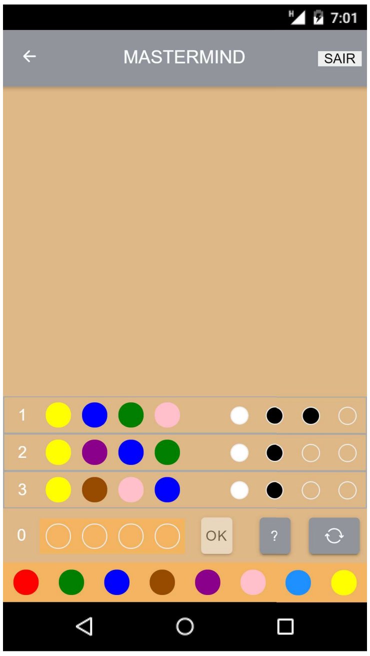


Figura 3.13: Terceira tentativa

Conforme mostra a Figura 3.13, após colocar essa sequência, a dica continua uma bola branca e uma bola preta, mas podemos estudar algumas possibilidades.

Se supusermos que a cor amarela deve permanecer na primeira posição, a cor rosa deve ir para a segunda posição, já que ela faz parte da senha, no entanto não podemos inserir nem a cor azul escuro nem a cor verde na terceira posição, o que leva a uma impossibilidade, portanto a cor amarela não pode ser na primeira posição. Daí, a bola branca nas dicas não é referente a cor amarela na primeira posição.

Vamos agora analisar a possibilidade da cor amarela fazer parte da senha. Se ela fizer parte da senha, ela deve corresponder a uma cor preta em cada dica. Sendo assim, a bola branca na terceira dica corresponde a cor rosa, uma vez que ela faz parte da senha, assim, nem a cor marrom nem a cor azul escuro fazem parte da senha. Daí teremos, a cor rosa na terceira posição e a cor amarela na segunda ou quarta posição. Como nem roxa nem azul escuro fazem parte da senha, a bola branca na segunda dica corresponde a cor verde na quarta posição. Logo, a cor amarela deve ficar na segunda posição, o que leva a uma impossibilidade, pois se tivermos amarelo na segunda posição, rosa na terceira posição e verde na quarta posição, não é possível associar a bola branca da primeira dica a nenhuma cor. Portanto, a cor amarela não pode fazer parte da senha.

Sendo assim, as cores azul escuro, verde e rosa fazem parte da senha, de acordo com a primeira dica, e precisamos descobrir a qual dessas três cores está associada a bola branca dessa dica. Há três possibilidades:

- Se a bola branca na primeira dica for referente à cor rosa na quarta posição, a bola branca na segunda dica está associada a cor azul escuro na terceira posição, uma vez que nem a cor amarela nem a roxa fazem parte da senha, o que leva a uma contradição com a terceira dica.
- Se a bola branca na primeira dica for referente à cor verde na terceira posição gera uma contradição de não poder associar a nenhuma cor a bola branca na segunda dica, já que nem amarelo nem roxo fazem parte da senha.
- Se a bola branca na primeira dica for referente à cor azul escuro na segunda posição, a bola branca na segunda dica está associada a cor verde na quarta posição, e a bola branca na terceira dica está associada a cor rosa na terceira posição.

Sendo assim, das três possibilidades, apenas a última está correta. O que leva a termos a cor azul escuro na segunda posição, a cor rosa na terceira posição e a cor verde na quarta posição. Restando apenas descobrir a cor da primeira posição dentre as que ainda não foram utilizadas (vermelho e azul claro). Portanto, sobrando apenas duas possibilidades para descobrir a senha. Fazendo a escolha da cor vermelha para essa posição descobrimos a senha, como mostra a Figura 3.14.

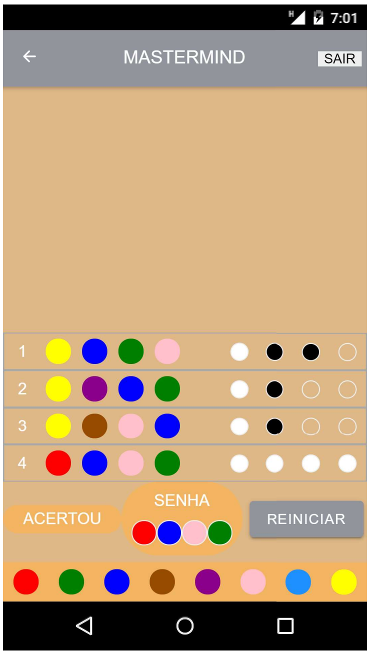


Figura 3.14: Quarta tentativa

Considerações Finais

Esse trabalho tinha como objetivo inicial construir o jogo *Mastermind* para ser trabalhado de forma manipulável através de oficinas com uma turma de alunos do Ensino Médio. Essas oficinas não foram mais possíveis serem realizadas nesse momento devido a suspensão das aulas por conta da pandemia do novo coronavírus. Todavia, elas ainda poderão futuramente serem realizadas, uma vez que esse material manipulável está praticamente construído e guardado na escola onde seriam aplicadas essas oficinas. Pois, através desse material a aprendizagem dos conteúdos de Análise Combinatória pode ser facilitada.

Por outro lado, já que não foi mais possível trabalhar esse jogo de forma lúdica presencial, mudamos o foco do trabalho para o desenvolvimento de um novo aplicativo desse jogo *Matermind* com a mesma intenção de facilitar a aprendizagem da Análise Combinatória. Nesse caso agora, para a aplicação desse jogo, faz-se necessário o acesso dos alunos a um *Smartphone* ou *Tablet* com sistema *Android*, já que será através de algum desses dispositivos que permitirá ao aluno ter acesso a esse jogo.

A aplicação através dessa forma talvez não seja tão difícil se pensarmos que, hoje em dia, em uma sala de aula, boa parte dos alunos tem acesso a um *Smartphone*. Para aqueles que não tenham esse acesso, uma sugestão seria o compartilhamento do dispositivo móvel daqueles que tenham com aqueles que não tenham, e assim poderem trabalhar de forma coletiva, evitando assim uma certa exclusão digital.

Essa aplicação pode ser feita por meio de alguns momentos, um deles seria antes da explanação dos conteúdos da Análise Combinatória, explicando aos alunos apenas as regras do jogo e deixando eles jogarem de forma livre e como quiserem. Depois que os alunos já estiverem familiarizado com esses conteúdos, pode ser solicitando a eles que façam a associação desse jogo com a Análise Combinatória, de tal forma que eles percebam esses conteúdos por trás desse jogo. Por fim, pode ser feita uma nova aplicação depois deles já terem visto esses conteúdos, para assim perceberem o quanto a compreensão desses conteúdos facilita na hora de trabalhar o raciocínio do jogo. De maneira geral, é interessante que eles percebam o quanto os jogos são importantes para apender Matemática e o quanto a Matemática ajuda na hora do raciocínio para encontrar a solução de um jogo.

Esse trabalho foi finalizado com a proposta cumprida que foi a criação de um novo aplicativo para o jogo *Mastermid*. Porém, como possibilidade futura, de forma presencial, há o desejo de trabalhar com esse aplicativo em sala de aula para verificar que sua criação foi de fundamental importância como recurso didático para o ensino-aprendizagem do Princípio Fundamental da Contagem.

Referências

[1] Android Studio. Disponível em: <https://developer.android.com/studio>. Acesso em 23 de Setembro de 2020.

[2] Ionic Framework. Disponível em: <https://ionicframework.com/docs>. Acesso em 23 de Setembro de 2020.

[3] LIMA, Elon L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. *Coleção do Professor de Matemática - Ed. SBM*, Volume 2, 2000.

[4] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. **Matemática Discreta**. *Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM*, 2013.

[5] MORGADO, Augusto C. de O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. *Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro*, 1991.

[6] PINHEIRO, Lucas F. et al. **Explorando os métodos de contagem no jogo senha**. *Trabalho apresentado como atividade do PIPE na disciplina Matemática Finita do Curso de Matemática: FAMAT em Revista*, 2009.

[7] SANTOS, José P. O. et al. **Introdução à Análise Combinatória**. *Editora UNICAMP, Campinas*, 1995.

[8] SANTOS, Rogério C. **Explorando a Análise Combinatória no Jogo Senha**. *Revista do Professor de Matemática nº64, SBM*, 2007.

[9] Software Eclipse IDE. Disponível em: <https://www.eclipse.org/>. Acesso em 23 de Setembro de 2020.

[10] Software Visual Studio Code. Disponível em: <https://code.visualstudio.com/>. Acesso em 23 de Setembro de 2020.