Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APLICAÇÕES

GABRIEL BARBOSA DE ARGÔLO

Salvador - Bahia
FEVEREIRO de 2020

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APLICAÇÕES

Gabriel Barbosa de Argôlo

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

Salvador - Bahia

Fevereiro de 2020

FRAÇÕES CONTÍNUAS E APLICAÇÕES

Gabriel Barbosa de Argôlo

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 10 de fevereiro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vinicius Moreira Mello
UFBA

Profª. Drª. Cláudia Ribeiro Santana
UESC

"A Matemática é o alfabeto que Deus
usou para escrever o Universo".
Galileu Galilei

Resumo

O presente trabalho demonstra, a partir de definições e exemplos, uma forma alternativa de representar os números reais através das frações contínuas. Uma fração contínua finita (simples) representa um número racional e a principal ferramenta para obtenção de um número racional, representado como fração contínua, é o algoritmo de Euclides. Uma fração contínua infinta (simples) representa um número irracional e a principal ferramenta para obtenção de um número irracional é a racionalização. Com isso, podemos utilizar as frações contínuas para alunos do ensino médio. Os números racionais conseguimos representar de forma exata e os números irracionais conseguimos excelentes aproximações por meio dos números racionais. As principais aplicações das frações continuas são: equações diofantinas lineares e equação de Pell.

Palavras-chave: Números reais; números racionais; algoritmo de Euclides; equação diofantina; congruência linear; números irracionais; racionalização; aproximações; equação de Pell.

Abstract

This present work shows, from definition and examples, an alternative form of representing of real numbers by continued fractions. A finite continued fraction represents a rational number and the principal tool for representing a racional number as a continued faction is the Euclid‘s algorithm. With this tool for representing continued fractions, we can introduce the study of continued fractions in college school.

We can represent rational numbers in an exact form while for irrational numbers we obtain excellent approximations. The main applications of continued fractions are: Diophantine linear equation and equation of Pell.

Keywords: Real numbers; rational numbers; Euclid's algorithm; Diophantine equation; linear congruence; irrational numbers; rationalization; approximations; Pell's equation.

Sumário

Capítulo 1

Definição e notação

A expressão da forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}$$

É chamada de *fração contínua*. Em geral, os números $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ e $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ são números **reais ou complexos** e o número de termos pode ser finito ou infinito. Aqui trabalharemos somente com as frações contínuas onde todos os $b_j = 1$. São chamadas de *frações contínuas simples*:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [a_1; a_2, a_3, \cdots]$$

Onde o primeiro termo a_1 é um inteiro que pode ser positivo, zero,ou negativo e os termos $a_2, a_3, a_4, \cdots$ são inteiros positivos.
Quando a fração contínua tem a forma:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1; a_2, \cdots, a_n]$$

É chamada de *fração contínua finita simples*, pois possui um número finito de termos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Os termos $a_1, a_2, a_3, \cdots$ são chamados de *quocientes parciais* ou simplesmente *termos da fração contínua*.

Parte inteira e parte fracionária de um número real

Definição 1.1. *Chamamos de* ***parte inteira*** *de um número real o maior inteiro menor ou igual ao número.*

Definição 1.2. *Chamamos de* ***parte fracionária*** *de um número real a diferença entre o número e sua parte inteira.*

Exemplo 1.1. *Alguns exemplos da parte inteira e a parte fracionária de um número real:*

(a) *A parte inteira e a parte fracionária de* $\frac{5}{2}$.

A parte inteira de $\frac{5}{2}$ é 2, pois 2 é o maior inteiro menor que ou igual a $\frac{5}{2}$.

Temos:

$$2 \leq \frac{5}{2} < 3$$

A parte fracionária de $\frac{5}{2}$ é $\frac{1}{2}$, pois a diferença entre $\frac{5}{2}$ e sua parte inteira é $\frac{1}{2}$.

Temos:

$$\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

(b) *A parte inteira e a parte fracionária de* $4,25$.

A parte inteira de $4,25$ é 4, pois 4 é o maior inteiro menor que ou igual a $4,25$.

Temos:

$$4 \leq 4,25 < 5$$

A parte fracionária de $4,25$ é $0,25$, pois a diferença entre $4,25$ e sua parte inteira é $0,25$.

Temos:

$$4,25 - 4 = 0,25$$

(c) *A parte inteira e a parte fracionária de* $-\frac{5}{2}$.

A parte inteira de $-\frac{5}{2}$ é -3, pois -3 é o maior inteiro menor que ou igual a $-\frac{5}{2}$.

Temos:

$$-3 \leq -\frac{5}{2} < -2$$

A parte fracionária de $-\frac{5}{2}$ é $\frac{1}{2}$, pois a diferença entre $-\frac{5}{2}$ e sua parte inteira é $\frac{1}{2}$.

Temos:

$$-\frac{5}{2} - (-3) = \frac{1}{2}$$

.

(d) *A parte inteira e a parte fracionária de* $\sqrt{6}$.

A parte inteira de $\sqrt{6}$ é 2, pois 2 é o maior inteiro menor que ou igual a $\sqrt{6}$.

Temos:

$$2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$$

A parte fracionária de $\sqrt{6}$ é $\sqrt{6} - 2$, pois $\sqrt{6} - 2$ é a diferença entre $\sqrt{6}$ e sua parte inteira.

(e) *A parte inteira e a parte fracionária de* $\sqrt{13} - 1$.

A parte inteira de $\sqrt{13} - 1$ é 2, pois 2 é o maior inteiro menor que ou igual a $\sqrt{13} - 1$.

Temos:

$$3 = \sqrt{9} \leq \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$$

Então:

$$3 - 1 \leq \sqrt{13} - 1 < 4 - 1$$

$$2 \leq \sqrt{13} - 1 < 3$$

A parte fracionária de $\sqrt{13} - 1$ é $(\sqrt{13} - 1) - 2 = \sqrt{13} - 3$.

(f) *A parte inteira e a parte fracionária de* $\frac{7+\sqrt{15}}{2}$.

A parte inteira de $\frac{7+\sqrt{15}}{2}$ é 5, pois 5 é o maior inteiro menor que ou igual a $\frac{7+\sqrt{15}}{2}$.

$$3 \leq \sqrt{15} < 4$$

$$7 + 3 \leq 7 + \sqrt{15} < 7 + 4$$

$$10 \leq 7 + \sqrt{15} < 11$$

Portanto:

$$5 \leq \frac{7 + \sqrt{15}}{2}$$

A parte fracionária de $\frac{7+\sqrt{15}}{2}$ é a diferença entre $\frac{7+\sqrt{15}}{2}$ e sua parte inteira, então

$$\left(\frac{7 + \sqrt{15}}{2}\right) - 5 = \frac{-3 + \sqrt{15}}{2}$$

.

(g) *A parte inteira e a parte fracionária de* π

A parte inteira de π é 3, pois 3 é maior inteiro menor que ou igual a π. Como $\pi = 3,1415...$, temos que:

$$3 \leq 3,1415... < 4$$

A parte fracionária de π é a diferença entre π e sua parte inteira,

$$(\pi - 3) = 0,1415...$$

.

Expandir um número real é escrever na forma de fração contínua. De um modo geral, para expandir um número real, separamos sua parte inteira da sua parte fracionária, onde a parte inteira é o primeiro termo da sequência de termos da fração contínua (podendo ser um inteiro positivo, negativo ou zero). Invertemos a parte fracionária, novamente separamos a parte inteira da parte fracionária, obtendo o segundo termo da sequência (a partir daqui todos os termos são inteiros positivos), vamos repetindo o processo. Se a parte fracionária em alguma etapa é zero, o processo é finito e representa um número racional. O algoritmo de Euclides é a principal ferramenta para expandir números racionais. Quando a parte fracionária em nenhuma etapa é igual zero, o processo é infinito e representa um número irracional. A principal ferramenta para expandir números irracionais é a racionalização.

Capítulo 2

Frações Contínuas Finitas

Neste capítulo veremos como expandir um número racional. Todo número racional (decimal exato ou dizima periódica) pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q > 0$. Um número racional é representado por uma fração contínua **finita** (simples). O algoritmo de Euclides é a principal ferramenta para expandir números racionais.

2.1 Expansão Racional

Vamos começar expandir números racionais. O algoritmo de Euclides nos diz que todo número inteiro p pode ser escrito da forma

$$p = nq + r$$

Os números n, q e r são inteiros, com $q > 0$ e $0 \leq r < q$.

Exemplo 2.1. *Qual é a fração contínua que representa o número racional $\frac{10}{7}$?*

A parte inteira de $\frac{10}{7}$ é 1, então pelo algoritmo de Euclides:

$$10 = 7 \cdot 1 + 3$$

Dividindo por 7:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

Ou seja, separamos a parte inteira da parte fracionária.
A parte fracionária de $\frac{10}{7}$ é $\frac{3}{7}$.

Fazendo $\frac{3}{7} = \frac{1}{\frac{7}{3}}$, então:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}$$

O inverso da parte fracionária $\frac{3}{7}$ é $\frac{7}{3}$. A parte inteira de $\frac{7}{3}$ é 2, usando novamente o algoritmo de Euclides:

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

Dividindo por 3;

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$$

Então:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

A parte fracionária de $\frac{7}{3}$ é $\frac{1}{3}$.

Fazendo $\frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{3}{1}}$ e usando novamente o algoritmo de Euclides:

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

Como $r = 0$, não podemos inverter a parte fracionária, então termina o processo.

Portanto:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

Temos a sequência de termos $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ e $a_3 = 3$.

A sequência da coluna dos quocientes coincide com a sequência de termos da fração contínua;

$$10 = 7 \cdot \underline{1} + 3$$
$$7 = 3 \cdot \underline{2} + 1$$
$$3 = 1 \cdot \underline{3} + 0$$

Ou, de forma mais prática;

	q	1	2	3	←
	10	7	3	1	
r	3	1	0		

Podemos representar o número $\frac{10}{7}$ das seguintes formas:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = [1; 2, 3]$$

Exemplo 2.2. *Representar* $\frac{15}{11}$ *como fração contínua.*

A parte inteira de $\frac{15}{11}$ é 1, pelo algoritmo de Euclides:

$$15 = 11 \cdot 1 + 4$$

Dividindo por 11;

$$\tfrac{15}{11} = 1 + \tfrac{4}{11}$$

A parte fracionária de $\frac{15}{11}$ é $\frac{4}{11}$.
Fazendo $\frac{4}{11} = \frac{1}{\frac{11}{4}}$, então:

$$\tfrac{15}{11} = 1 + \tfrac{1}{\frac{11}{4}}$$

O inverso da parte fracionária $\frac{4}{11}$ é $\frac{11}{4}$. A parte inteira de $\frac{11}{4}$ é 2, usando novamente o algoritmo de Euclides:

$$11 = 4 \cdot 2 + 3$$

Dividindo por 4;

$$\tfrac{11}{4} = 2 + \tfrac{3}{4}$$

A parte fracionária de $\frac{11}{4}$ é $\frac{3}{4}$.
Fazendo $\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{4}{3}}$, então:

$$\tfrac{11}{4} = 2 + \tfrac{1}{\frac{4}{3}}$$

O inverso da parte fracionária $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$. A parte inteira de $\frac{4}{3}$ é 1, usando novamente o algoritmo de Euclides;

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

Dividindo por 3;

$$\tfrac{4}{3} = 1 + \tfrac{1}{3}$$

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

A fração inicial fica:

$$\frac{15}{11} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

A sequência de termos da fração contínua é: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ e $a_4 = 3$.

Usando o algoritmo (prático) de Euclides também conseguimos encontrar a sequência de termos da fração contínua:

	q	1	2	1	3	←
	15	11	4	3	1	
r	4	3	1	0		

Podemos representar $\frac{15}{11}$ das seguintes formas:

$$\frac{15}{11} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} = [1; 2, 1, 3]$$

Teorema 2.1. *Um número é RACIONAL se, e somente se sua expansão é uma fração contínua (simples) FINITA.*

Demonstração. Basta mostrar que $r = 0$ em alguma etapa.

Seja $\frac{p}{q}$ um número racional, com $q > 0$. Onde a_1 é um número inteiro único de forma a deixar o resto $0 \leq r < q$. O termo a_1 pode ser inteiro positivo, inteiro negativo ou zero;

Pelo algoritmo de Euclides temos:

$$p = a_1 \cdot q + r_1$$

Onde a_1 é a parte inteira de $\frac{p}{q}$. Dividindo por q;

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}, \text{ com } 0 \leq r_1 < q$$

A parte fracionária de $\frac{p}{q}$ é $\frac{r_1}{q}$.

Se $r_1 = 0$, termina o processo e $\frac{p}{q}$ é um número inteiro. Então $\frac{p}{q} = a_1 = [a_1]$.

Se $r_1 \neq 0$, fazemos $\frac{r_1}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r_1}}$:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \text{ com } 0 < r_1 < q$$

O inverso da parte fracionária $\frac{r_1}{q}$ é $\frac{q}{r_1}$.

A parte inteira de $\frac{q}{r_1}$ é a_2, usando novamente o algoritmo de Euclides para $\frac{q}{r_1}$:

$$q = a_2 \cdot r_1 + r_2$$

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1$$

A parte fracionária de $\frac{q}{r_1}$ é $\frac{r_2}{r_1}$.
Se $r_2 = 0$, termina o processo. Então $\frac{q}{r_1} = a_2$. A fração $\frac{p}{q}$ fica:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a_1; a_2]$$

Se $r_2 \neq 0$, fazemos $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}, \text{ com } 0 < r_2 < r_1$$

O inverso da parte fracionária $\frac{r_2}{r_1}$ é $\frac{r_1}{r_2}$.
A parte inteira de $\frac{r_1}{r_2}$ é a_3. Usamos novamente o algoritmo de Euclides e continuamos o processo até encontrar em alguma etapa um resto igual a zero. Surge a seguinte pergunta, será que para todo número racional o processo é finito? Seria possível nunca achar em alguma etapa um $r_j = 0$?
Vamos supor que a sequência $q, r_1, r_2, \cdots$ seja uma sequência infinta. Todo subconjunto de inteiros positivos possui um menor elemento. Como $q > r_1 > r_2 > \cdots$ é uma sequência decrescente de inteiros positivos, a sequência não pode ser infinita, pois seria uma sequência decrescente infinita de inteiros positivos menores que q, o que é um absurdo. Por esse motivo, alguma etapa encontramos um $r_j = 0$.
Continuando as etapas:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}, \text{ com } 0 < r_1 < q$$

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \text{ com } 0 < r_2 < r_1$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}, \text{ com } 0 < r_3 < r_2$$

$$\cdots$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \text{ com } 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \text{ para } n \geq 4$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{r_n}{r_{n-1}} = a_n + \frac{0}{r_{n-1}}, \text{ com } r_n = 0, \; n \geq 3$$

Ou,

$$r_{n-2} = (a_n) \cdot r_{n-1} + r_n, \text{ para } n \geq 3$$

Observação. A expressão acima é uma recorrência de segunda ordem.

Reciprocamente, a sequência finita $[a_1; a_2, ..., a_n]$ representa o número $\frac{p}{q}$. A sequência representa a fração contínua:

$$[a_1; a_2, .., a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Sabemos que:

$$a_n = \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}, \text{ com } n \geq 3.$$

Substituímos na fração contínua expandida:

$$[a_1; a_2, .., a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}}}}$$

$$[a_1; a_2, .., a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}}}}$$

Mas;

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \text{ com } n \geq 4.$$

Substituindo;

$$[a_1; a_2, .., a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}}}}$$

Continuando o processo, voltamos ao número $\frac{p}{q}$. □

Exemplo 2.3. *Escrever a expansão da fração* $\frac{9}{7}$.

$$9 = 7 \cdot 1 + 2$$

Dividindo por 7;

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7}$$

Temos que $\frac{2}{7} = \frac{1}{\frac{7}{2}}$, então:

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}$$

Usando novamente o algoritmo de Euclides;

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Dividindo por 2;

$$\tfrac{7}{2} = 3 + \tfrac{1}{2}$$

Então:

$$\tfrac{9}{7} = 1 + \tfrac{1}{3+\frac{1}{2}} = [1; 3, 2]$$

Exemplo 2.4. *Representar $\frac{18}{14}$ como fração contínua.*

Vamos usar o algoritmo de Euclides:

$$18 = 1 \cdot 14 + 4$$

Dividindo por 14;

$$\tfrac{18}{14} = 1 + \tfrac{4}{14} = 1 + \tfrac{1}{\frac{14}{4}} = 1 + \tfrac{1}{\frac{7}{2}}$$

Usando novamente o algoritmo de Euclides;

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Dividindo por 2;

$$\tfrac{7}{2} = 3 + \tfrac{1}{2}$$

Então:

$$\tfrac{18}{14} = 1 + \tfrac{1}{3+\frac{1}{2}} = [1; 3, 2]$$

Observação. Observando que $\frac{18}{14} = \frac{9}{7}$. Frações equivalentes geram a mesma sequência, por isso é mais interessante trabalhar com as *frações irredutíveis.*

Teorema 2.2. *Seja $\frac{p}{q}$ irredutível. A expansão $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, ..., a_n]$ é única.*

Demonstração. Vamos supor que as sequências $[a_1; a_2, ..., a_n]$ e $[b_1; b_2, ..., b_n]$ representem o número $\frac{p}{q}$. A parte inteira de $\frac{p}{q}$ é a_1, por outro lado, a parte inteira de $\frac{p}{q}$ também é b_1. Mas pela definição da parte inteira de uma fração contínua, a parte inteira é o maior inteiro menor que a fração, portanto é único. Concluímos que $a_1 = b_1$.

Então:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} = b_1 + \frac{r_1}{q}, \text{ com } 0 < r_1 < q$$

Temos $\frac{r_1}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r_1}}$. Para a fração $\frac{q}{r_1}$, a parte inteira de $\frac{q}{r_1}$ é a_2, por outro lado, $\frac{q}{r_1}$ é b_2. Concluímos que $a_2 = b_2$.

Então:

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} = b_2 + \frac{r_2}{r_1}, \text{ com } 0 < r_2 < r_1$$

Continuando o raciocínio, temos $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,..., $a_n = b_n$; concluímos que as sequências são iguais. **Portanto, da maneira que são obtidos os a_i, através do algorítimo de Euclides (a parte inteira de um um número é única), a sequência é única.** □

A sequência $[a_1; a_2, .., a_n]$ da expansão de $\frac{p}{q}$, da forma que foi obtida é única, mas podemos alterar o último termo. Veremos no teorema abaixo:

Teorema 2.3. *Uma fração contínua tem no máximo duas representações. Podemos modificar o último termo da fração contínua de forma a deixar o número de termos PAR ou IMPAR.*

Demonstração. A fração não pode ter mais de duas representações, pois para $i > 1$ os a_i são inteiros positivos então só temos duas possibilidades para o último termo:

$$a_n = 1 \text{ ou } a_n > 1.$$

Seja $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, ...a_n]$, vamos modificar o último termo;

- Se $a_n > 1$, temos:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n + (1-1)} = \frac{1}{(a_n - 1) + 1} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

$$\frac{p}{q} = [a_1; a_2, ..a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

  A sequência passa a ter $n + 1$ termos.

- Se $a_n = 1$, temos:

$$\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1}$$

$$\frac{p}{q} = [a_1; a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$$

A sequência passa a ter $n - 1$ termos.

$\square$

Observação. Nos exemplos 2.3 e 2.4, podíamos representar como

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = [1; 3, 2] = [1; 3, 1, 1]$$

Teorema 2.4. *Se* $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, ..., a_n]$ *e* $0 < q < p$ *então* $\frac{q}{p} = [0; a_1, a_2, ..., a_n]$.

Demonstração. $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, ..., a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$

Temos:

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Então;

$$\frac{q}{p} = 0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Portanto:

$$\frac{q}{p} = [0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

$\square$

Observação. A recíproca do teorema é verdadeira.

Exemplo 2.5. *Representar* $\frac{7}{9}$ *como fração contínua.*

Pelo exemplo 2.3, sabemos que $\frac{9}{7} = [1; 3, 2]$, então $\frac{7}{9} = [0; 1, 3, 2]$.

Exemplo 2.6. *Escrever* $\frac{-37}{44}$ *como fração contínua.*

A parte inteira de $\frac{-37}{44}$ é -1, pois $-1 < \frac{-37}{44} < 0$, pelo algoritmo de Euclides:

$$-37 = -44 + 7$$

Dividindo por 44;

$$\frac{-37}{44} = -1 + \frac{7}{44};$$

A parte fracionária de $\frac{-37}{44}$ é $\frac{7}{44}$.

Fazendo $\frac{7}{44} = \frac{1}{\frac{44}{7}}$;

$$\frac{-37}{44} = -1 + \frac{1}{\frac{44}{7}}$$

A parte inteira de $\frac{44}{7}$ é 6.

Usando novamente o algoritmo de Euclides:

$$44 = 7 \cdot 6 + 2$$

Dividindo por 7;

$$\frac{44}{7} = 6 + \frac{2}{7}$$

A parte fracionária de $\frac{44}{7}$ é $\frac{2}{7}$.

Fazendo $\frac{2}{7} = \frac{1}{\frac{7}{2}}$;

$$\frac{44}{7} = 6 + \frac{1}{\frac{7}{2}}$$

A parte inteira de $\frac{7}{2}$ é 3.

Usando o algoritmo de Euclides;

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

A fração inicial fica:

$$\frac{-37}{44} = -1 + \frac{1}{6+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

Ou

$$\frac{-37}{44} = [-1; 6, 3, 2] = [-1; 6, 3, 1, 1]$$

Exemplo 2.7. *Representar* $\frac{-44}{37}$ *como fração contínua.*

A parte inteira de $\frac{-44}{37}$ é -2, pois $-2 < \frac{-44}{37} < -1$.
Pelo algoritmo de Euclides, nós temos:

$$-44 = 37 \cdot (-2) + 30$$

Dividindo por 37;

$$\frac{-44}{37} = -2 + \frac{30}{37}$$

A parte fracionária de $\frac{-44}{37}$ é $\frac{30}{37}$.

Fazendo $\frac{30}{37} = \frac{1}{\frac{37}{30}}$;

$$\frac{-44}{37} = -2 + \frac{1}{\frac{37}{30}}$$

O inverso da parte fracionária $\frac{30}{37}$ é $\frac{37}{30}$. A parte inteira de $\frac{37}{30}$ é 1.

Usando o algoritmo de Euclides novamente:

$$37 = 30 \cdot 1 + 7$$

Dividindo por 30;

$$\frac{37}{30} = 1 + \frac{7}{30}$$

A parte fracionária de $\frac{37}{30}$ é $\frac{7}{30}$.

Fazendo $\frac{7}{30} = \frac{1}{\frac{30}{7}}$;

$$\frac{37}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{7}}$$

O inverso da parte fracionária $\frac{7}{30}$ é $\frac{30}{7}$. A parte inteira de $\frac{30}{7}$ é 4.

Usando o algoritmo de Euclides:

$$30 = 7 \cdot 4 + 2$$

Dividindo por 7;

$$\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$$

A parte fracionária de $\frac{30}{7}$ é $\frac{2}{7}$.

Fazendo $\frac{2}{7} = \frac{1}{\frac{7}{2}}$;

$$\frac{30}{7} = 4 + \frac{1}{\frac{7}{2}}$$

A parte inteira de $\frac{7}{2}$ é 3.

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

Dividindo por 2;

$$\tfrac{7}{2} = 3 + \tfrac{1}{2}$$

A parte fracionária de $\frac{7}{2}$ é $\frac{1}{2}$.

A parte inteira de 2 é 2 e a parte fracionária é 0.

Então:

$$\frac{-44}{37} = -2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3+\frac{1}{2}}} = [-2; 4, 3, 2] = [-2; 4, 3, 1, 1]$$

Exemplo 2.8. *Encontrar a fração $\frac{p}{q}$ sabendo que* $[1; 1, 1, 2]$.

$$[1; 1, 1, 2] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

Exemplo 2.9. *Encontrar a fração $\frac{p}{q}$ sabendo que* $[3; 7, 15, 1]$

$$[3; 7, 15, 1] = 3 + \tfrac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}$$

$$3 + \tfrac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}} = 3 + \tfrac{1}{7+\frac{1}{16}} = 3 + \tfrac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \tfrac{16}{113} = \tfrac{355}{113}$$

Teorema 2.5. *O maior divisor comum entre p e q é termo r_{n-1}, com $n \geq 2$*

Demonstração. $p = a_1 \cdot q + r_1$, com $0 < r_1 < q$

$$q = a_2 \cdot r_1 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = a_3 \cdot r_2 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2$$

$$\cdots$$

$$r_{n-3} = a_{n-1} \cdot r_{n-2} + r_{n-1}, \text{ com } 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \text{ com } n \geq 4$$

$$r_{n-2} = (a_n) \cdot r_{n-1} + r_n = a_n \cdot r_{n-1} + 0, \text{ com } r_n = 0 \text{ e } n \geq 3$$

Temos que

$$r_{n-2} = a_n \cdot r_{n-1} + 0, \text{ com } n \geq 3$$

Ou seja, r_{n-2} é múltiplo de r_{n-1}.

Olhando para:

$$r_{n-3} = a_{n-1} \cdot r_{n-2} + r_{n-1}, \text{ com } n \geq 4$$

como r_{n-2} é múltiplo de r_{n-1}, substituímos:

$$r_{n-3} = a_{n-1} \cdot a_n \cdot r_{n-1} + r_{n-1}$$
$$r_{n-3} = (a_{n-1} \cdot a_n + 1) \cdot r_{n-1}, \text{ com } n \geq 4$$

Portanto, r_{n-3} também é múltiplo de r_{n-1}, r_{n-4} também é múltiplo de r_{n-1}.
Continuando o processo, p e q são múltiplos de r_{n-1}. Logo, r_{n-1} é o maior divisor comum entre p e q. □

2.2 Convergentes da fração contínua

Definição 2.1. *Chamamos de convergentes da fração contínua os termos da sequência* $c_1, c_2, ...c_n$ *tal que:*

$$c_1 = \tfrac{p_1}{q_1} = \tfrac{a_1}{1}$$

$$c_2 = \tfrac{p_2}{q_2} = a_1 + \tfrac{1}{a_2}$$

$$c_3 = \tfrac{p_3}{q_3} = a_1 + \tfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

$$\cdots$$

$$c_n = \tfrac{p_n}{q_n} = a_1 + \tfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

O termo c_1 é chamado de *primeira convergente*, o termo c_2 é chamado de *segunda convergente*, assim sucessivamente.
Temos que:

$$c_1 = \tfrac{p_1}{q_1} = \tfrac{a_1}{1}$$

Onde $p_1 = a_1$ e $q_1 = 1$.
Para o segundo termo ou segunda convergente;

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

Onde $p_2 = a_1 \cdot a_2 + 1$ e $q_2 = a_2$.

Para o terceiro termo ou terceira convergente;

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 \cdot a_3 + 1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_2 \cdot a_3 + 1}$$

$$c_3 = \frac{a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3 + 1) + a_3}{a_2 \cdot a_3 + 1} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 + a_3}{a_2 \cdot a_3 + 1}$$

$$c_3 = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_3 + a_1}{a_2 \cdot a_3 + 1} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + 1) \cdot a_3 + a_1}{(a_2) \cdot a_3 + 1}$$

$$c_3 = \frac{(a_1 \cdot a_2 + 1) \cdot a_3 + a_1}{(a_2) \cdot a_3 + 1} = \frac{p_2 \cdot a_3 + p_1}{q_2 \cdot a_3 + q_1} = \frac{p_3}{q_3}$$

Onde $p_3 = p_2 \cdot a_3 + p_1$ e $q_3 = q_2 \cdot a_3 + q_1$.

O quarto termo ou quarta convergente depois de algumas manipulações;

$$c_4 = \frac{p_3 \cdot a_4 + p_2}{q_3 \cdot a_4 + q_2} = \frac{p_4}{q_4}$$

Onde $p_4 = p_3 \cdot a_4 + p_2$ e $q_4 = q_3 \cdot a_4 + q_2$.

Nos sugere um termo geral da forma (ou n-ésima convergente):

$$c_n = \frac{p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}}{q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

Vamos provar no teorema abaixo.

Teorema 2.6. *O numerador p_n e o denominador q_n do n-ésimo termo c_n da fração contínua $[a_1; a_2, a_3, ..., a_n]$, satisfaz as recorrências:*

$$p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}$$
$$q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2}$$

Com $p_1 = a_1$, $p_2 = a_2 \cdot a_1 + 1$ e $q_1 = 1$, $q_2 = a_2$. Para $n \geq 3$.

Demonstração. A prova é feita por indução;

Sejam a_1, a_2, .., a_n reais, então:

Para o caso $n = 3$

$$c_3 = \frac{(a_1 \cdot a_2 + 1) \cdot a_3 + a_1}{(a_2) \cdot a_3 + 1} = \frac{p_2 \cdot a_3 + p_1}{q_2 \cdot a_3 + q_1} = \frac{p_3}{q_3} = [a_1; a_2, a_3]$$

Vamos supor que seja verdadeiro para $n = k$:

$$c_k = \frac{p_{k-1} \cdot a_k + p_{k-2}}{q_{k-1} \cdot a_k + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k} = [a_1; a_2, ..., a_k]$$

Vamos provar para $n = k + 1$:

Temos;

$$c_{k+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}}$$

Vamos fazer um pequeno artifício:

$$c_{k+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})}}}} = [a_1; a_2, .., a_{k-1}, (a_k + \frac{1}{a_{k+1}})]$$

Com isso, transformamos em uma sequência com k elementos (nossa hipótese de indução é verdade para $n = k$). Podemos usar a fórmula de recorrência para k elementos. O k-ésimo termo é $(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})$. Temos:

$$c_{k+1} = \frac{p_{k-1} \cdot (a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) + p_{k-2}}{q_{k-1} \cdot (a_k + \frac{1}{a_{k+1}}) + q_{k-2}} = [a_1; a_2, .., a_{k-1}, (a_k + \frac{1}{a_{k+1}})]$$

Multiplicando o numerador e o denominador por a_{k+1}:

$$c_{k+1} = \frac{p_{k-1} \cdot (a_k \cdot a_{k+1} + 1) + p_{k-2} \cdot a_{k+1}}{q_{k-1} \cdot (a_k \cdot a_{k+1} + 1) + q_{k-2} \cdot a_{k+1}}$$

Reagrupando os termos:

$$c_{k+1} = \frac{a_{k+1}(p_{k-1} \cdot a_k + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(q_{k-1} \cdot a_k + q_{k-2}) + q_{k-1}}$$

Então:

$$c_{k+1} = \frac{a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = [a_1; a_2, .., , a_k, a_{k+1}]$$

Logo, as recorrências são válidas para todo $n \geq 3$.

No começo da prova usamos como hipótese $a_1, a_2, ..., a_n$ reais, pois no artifício, o número $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ pode não ser inteiro, por isso, nossa hipótese é o que torna as fórmulas válidas. Se são válidas para reais, também são válidas para inteiros. $\square$

Observação. Temos $q_{n+1} > q_n$, pois $a_n > 0$ para $n \geq 2$.
Podemos definir para que as convergentes valham para todo $n \geq 1$. Para isso, teríamos que definir os termos p_0, p_{-1}, q_0 e q_{-1}.

Vamos definir os termos iniciais:

$$p_0 = 1 \text{ e } p_{-1} = 0$$

$$q_0 = 0 \text{ e } q_{-1} = 1$$

Para $n = 1$, temos:

$$c_1 = \frac{a_1 \cdot p_0 + p_{-1}}{a_1 \cdot q_0 + q_{-1}} = \frac{a_1 \cdot 1 + 0}{a_1 \cdot 0 + 1} = \frac{a_1}{1}$$

Para $n = 2$, temos:

$$c_2 = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{a_1 \cdot a_2 + 1}{a_2 \cdot a_1 + 0} = \frac{a_1 \cdot a_2 + 1}{a_2}$$

Com os valores iniciais p_0, p_{-1}, q_0 e q_{-1}, a fórmula da convergente vale para todo n natural. Observando que $\frac{p_0}{q_0}$ e $\frac{p_{-1}}{q_{-1}}$ não são convergentes.

Exemplo 2.10. *Encontrar as convergentes da fração* $[5; 1, 3, 5]$

Vamos considerar os valores iniciais:

$$p_0 = 1 \text{ e } p_{-1} = 0$$

$$q_0 = 0 \text{ e } q_{-1} = 1$$

O primeiro termo ou primeira convergente:

$$p_1 = a_1 \cdot p_0 + p_{-1} = 5 \cdot 1 + 0$$
$$q_1 = a_1 \cdot q_0 + q_{-1} = 5 \cdot 0 + 1$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{5}{1}$$

Para o segundo termo ou segunda convergente:

$$p_2 = a_2 \cdot p_1 + p_0 = 1 \cdot 5 + 1 = 6$$
$$q_2 = a_2 \cdot q_1 + q_0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1$$

$$c_2 = \tfrac{p_2}{q_2} = \tfrac{6}{1}$$

Para o terceiro termo ou terceira convergente:

$$p_3 = a_3 \cdot p_2 + p_1 = 3 \cdot 6 + 5 = 23$$
$$q_3 = a_3 \cdot q_2 + q_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$c_3 = \tfrac{p_3}{q_3} = \tfrac{23}{4}$$

Para o quarto termo ou quarta convergente:

$$p_4 = a_4 \cdot p_3 + p_2 = 5 \cdot 23 + 6 = 121$$
$$q_4 = a_4 \cdot q_3 + q_2 = 5 \cdot 4 + 1 = 21$$

$$c_4 = \tfrac{p_4}{q_4} = \tfrac{121}{21}$$

2.3 Tabela de convergentes

Podemos encontrar as convergentes através de uma tabela. A primeira coluna é formada por n, a_n, p_n, $\frac{p_n}{q_n}$ respectivamente. A primeira linha é formada pelos valores de n, como na tabela abaixo:
A primeira etapa é preencher a linha dos a_n (ou até o n da convergente desejada).

n	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
a_n			a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$
p_n	0	1					
q_n	1	0					
$\frac{p_n}{q_n}$							

Para encontrar o p_1, vamos usar a fórmula para entender de forma prática de como preencher a tabela de convergentes:

$$p_1 = a_1 \cdot p_0 + p_{-1}$$

n	-1	0	1
a_n			$(\cdot) \swarrow a_1$
p_n	0	$(+)\leftarrow 1$	

$$p_2 = a_2 \cdot p_1 + p_0$$

n	-1	0	1	2
a_n			a_1	$(\cdot) \swarrow a_2$
p_n	0	1	$(+)\leftarrow p_1$	

Multiplicamos o a_i em diagonal pela coluna anterior e linha abaixo, e somamos na mesma linha o termo da coluna anterior (como indicado nas setas). Em seguida, marcamos o resultado na mesma coluna, na linha abaixo.

Para encontrar o q_1, "esquecemos"a linha dos p_n e procedemos da mesma forma:

n	-1	0	1
a_n			$(\cdot) \swarrow a_1$
q_n	1	$(+)\leftarrow 0$	

Assim, completamos a tabela toda.

Exemplo 2.11. *Encontrar as convergentes da fração* $[5; 1, 3, 5]$*, usando a tabela.*

A primeira etapa é preencher todos a_n (ou até a convergente desejada):

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			5	1	3	5
p_n	0	1				
q_n	1	0				
$\frac{p_n}{q_n}$						

Procedendo como foi exposto, preenchemos toda tabela:

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			5	1	3	5
p_n	0	1	5	6	23	121
q_n	1	0	1	1	4	21
$\frac{p_n}{q_n}$			$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{23}{4}$	$\frac{121}{21}$

Olhando para a última linha, temos todas as convergentes.

Portanto as convergentes são:

$$c_1 = 5,\ \ c_2 = 6,\ \ c_3 = \frac{23}{4} \text{ e } c_4 = \frac{121}{21}$$

Uma desvantagem do processo, é que para encontrar uma convergente dependemos dos termos (convergentes) anteriores. Veremos adiante que existe outro processo para encontrar as convergentes de uma fração contínua sem precisar das convergentes anteriores.

Lema 2.1. $\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_2, a_1]$ *e* $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_2]$

Demonstração. Sabemos que $p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}$, então:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$$

Sabemos que $p_{n-1} = p_{n-2} \cdot a_{n-1} + p_{n-3}$, então:

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{p_{n-3}}{p_{n-2}} = \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}$$

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}$$

Substituindo na primeira;

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}}$$

Se continuarmos o processo, chegaremos $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\ddots a_2 + \frac{1}{a_1}}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_2, a_1]$.

Para provar $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_2]$ é feito de forma análoga. Usaremos o resultado em algumas demostrações. □

Exemplo 2.12. *Calcular a quarta convergente da fração contínua* $[6, 3, 2, 3]$

Vamos considerar $p_0 = 1$ e $p_{-1} = 0$; $q_0 = 0$ e $q_{-1} = 1$

$$p_1 = a_1 \cdot p_0 + p_-1 = 6 \cdot 1 + 0$$
$$q_1 = a_1 \cdot q_0 + q_-1 = 6 \cdot 0 + 1$$

$$c_1 = \tfrac{p_1}{q_1} = \tfrac{6}{1}$$

Para o segundo termo ou segunda convergente;

$$p_2 = a_2 \cdot p_1 + p_0 = 3 \cdot 6 + 1 = 19$$
$$q_2 = a_2 \cdot q_1 + q_0 = 3 \cdot 1 + 0 = 3$$

$$c_2 = \tfrac{p_2}{q_2} = \tfrac{19}{3}$$

Para o terceiro termo ou terceira convergente;

$$p_3 = a_3 \cdot p_2 + p_1 = 2 \cdot 19 + 6 = 44$$
$$q_3 = a_3 \cdot q_2 + q_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$c_3 = \tfrac{p_3}{q_3} = \tfrac{44}{7}$$

Para o quarto termo ou quarta convergente;

$$p_4 = a_4 \cdot p_3 + p_2 = 3 \cdot 44 + 19 = 151$$
$$q_4 = a_4 \cdot q_3 + q_2 = 3 \cdot 7 + 3 = 24$$

$$c_4 = \tfrac{p_4}{q_4} = \tfrac{151}{24}$$

Usando a tabela:

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			6	3	2	3
p_n	0	1	6	19	44	151
q_n	1	0	1	3	7	24
$\frac{p_n}{q_n}$			$\frac{6}{1}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{44}{7}$	$\frac{151}{24}$

Observando a tabela, temos algumas propriedades interessantes.

Fazendo a diferença dos produtos "cruzados", começando pela coluna da direita:

$$p_0 \cdot q_{-1} - p_{-1} \cdot q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

n	-1	0
p_n	$(\cdot) \searrow 0$	$(\cdot) \swarrow 1$
q_n	(-)$\uparrow$ 1	0

$$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = 6 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

n	0	1
p_n	$(\cdot) \searrow 1$	$(\cdot) \swarrow 6$
q_n	(-)$\uparrow$ 0	1

$$p_2 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_2 = 19 \cdot 1 - 6 \cdot 3 = 1$$

n	1	2
p_n	$(\cdot) \searrow 6$	$(\cdot) \swarrow 19$
q_n	(-)$\uparrow$ 1	3

$$p_3 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_3 = 44 \cdot 3 - 19 \cdot 7 = -1$$

n	2	3
p_n	$(\cdot) \searrow 19$	$(\cdot) \swarrow 44$
q_n	(-)$\uparrow$ 3	7

$$p_4 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_4 = 151 \cdot 7 - 44 \cdot 24 = 1$$

n	-1	0
p_n	$(\cdot) \searrow 0$	$(\cdot) \swarrow 1$
q_n	(-)$\uparrow$ 1	0

Fazendo a diferença dos produtos "cruzados", encontramos 1 ou -1 no exemplo. Mas será que é sempre válido encontrar 1 ou -1?

A resposta está no teorema abaixo:

Teorema 2.7. *Se*

$$p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}$$
$$q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2}$$

Com $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$ *e* $q_{-1} = 1$, $q_0 = 0$, *então:*

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n, \ \textit{Para } n \geq 0$$

Demonstração. • Por indução:

Para $n = 0$:

$$p_0 \cdot q_{-1} - p_{-1} \cdot q_0 = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = (-1)^0$$

Para $n = 1$:

$$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = a_1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = (-1)^1$$

Para $n = 2$:

$$p_2 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_1 = (a_1 \cdot a_2 + 1) \cdot 1 - a_1 \cdot a_2 = 1 = (-1)^2$$

Vamos supor que seja válida para $n = k$;

$$p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^k$$

Vamos provar que é valido para $n = k + 1$;

$$p_{k+1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k+1} = (p_k \cdot a_{k+1} + p_{k-1}) \cdot q_k - p_k \cdot (q_k \cdot a_{k+1} + q_{k-1})$$

$$p_k \cdot a_{k+1} \cdot q_k + p_{k-1} \cdot q_k - p_k \cdot q_k \cdot a_{k+1} - p_k \cdot q_{k-1} =$$

$$p_k \cdot a_{k+1} \cdot q_k - p_k \cdot a_{k+1} \cdot q_k + p_{k-1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k-1} =$$

$$p_{k-1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k-1} = (-1)(p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k)$$

Por Hipótese de indução, $p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^k$, então:

$$(-1)(p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k) = (-1)(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

- Uma segunda prova:

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n =$$

$$(p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}) \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot (q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2}) =$$

$$(-1)(p_{n-1} \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_{n-1})$$

Mas;

$$p_{n-1} \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_{n-1} = (-1)(p_{n-2} \cdot q_{n-3} - p_{n-3} \cdot q_{n-2})$$

Temos:

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^2(p_{n-2} \cdot q_{n-3} - p_{n-3} \cdot q_{n-2})$$

Continuando o processo;

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$$

□

2.4 Convergentes e determinantes

Como vimos, usando a fórmula de convergentes (ver teorema 2.6) ou a tabela, precisamos de todos os termos anteriores para determinar uma convergente. Por exemplo, se quisermos achar a n-ésima convergente c_n, precisamos de todos os p_n e q_n anteriores (com $-1 \leq n$). Para encontrar as convergentes sem auxílio dos termos anteriores temos a seguinte forma:

$$p_1 = p_0 \cdot a_1 + p_{-1}$$
$$p_2 = p_1 \cdot a_2 + p_0$$
$$p_3 = p_2 \cdot a_3 + p_1$$
$$p_4 = p_3 \cdot a_4 + p_2$$
$$p_5 = p_4 \cdot a_5 + p_3$$

Reescrevendo;

$$0 = -p_1 + p_0 \cdot a_1 + p_{-1}$$
$$0 = -p_2 + p_1 \cdot a_2 + p_0$$
$$0 = -p_3 + p_2 \cdot a_3 + p_1$$
$$0 = -p_4 + p_3 \cdot a_4 + p_2$$
$$0 = -p_5 + p_4 \cdot a_5 + p_3$$

Substituindo os valores iniciais, $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, $q_{-1} = 1$ e $q_0 = 0$, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} -a_1 = -p_1 \\ -1 = -p_2 + p_1 \cdot a_2 \\ 0 = -p_3 + p_2 \cdot a_3 + p_1 \\ 0 = -p_4 + p_3 \cdot a_4 + p_2 \\ 0 = -p_5 + p_4 \cdot a_5 + p_3 \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema;

$$\begin{cases} -p_1 = -a_1 \\ p_1 \cdot a_2 - p_2 = -1 \\ p_1 + p_2 \cdot a_3 - p_3 = 0 \\ p_2 + p_3 \cdot a_4 - p_4 = 0 \\ p_3 + p_4 \cdot a_5 - p_5 = 0 \end{cases}$$

Temos um sistema com cinco equações e cinco incógnitas, de um modo geral temos um sistema com n equações e n incógnitas. Para encontrar o valor de p_5, basta resolver o sistema.

Temos:

$$p_5 = \frac{det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & 0 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & -1 \end{bmatrix}}$$

O denominador da expressão resulta em $(-1)^5$, pois o determinante é o produto dos termos da diagonal principal. De um modo geral, o denominador de p_n resulta em $(-1)^n$. No determinante, cada troca de coluna mudamos o sinal. Queremos colocar a coluna 5 na primeira coluna. Fazemos então a troca da coluna 5 pela coluna 4, coluna 4 pela coluna 3, coluna 3 pela coluna 2 e a coluna 2 pela coluna 1. Fizemos 4 trocas ou $n-1$ trocas de sinal. Também mudando os sinais dos elementos em uma coluna, muda o sinal do determinante. Nós fizemos $(n-1)+1$ mudanças do sinal do determinante, que é o mesmo que fazer as alterações do determinante mencionado acima e, em seguida, multiplicando o determinante por $(-1)^n$. Mas lembre-se que o determinante do denominador é igual a $(-1)^n$ também, então esses valores se cancelam independentemente do n ser par ou ímpar. Então para p_5 (o numerador da quinta convergente), temos o seguinte:

$$p_5 = det \begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{bmatrix}$$

A forma do determinante é fácil de lembrar; os termos a_i são os termos da diagonal principal. Os termos imediatamente acima da diagonal principal são todos -1 e os termos imediatamente abaixo dos elementos da diagonal principal são todos 1, completamos o determinante com todos os outros termos com 0. Determinantes desse tipo são chamados de continuantes ou cumulativos. Para encontrar o determinante para q_n (o denominador da quinta convergente), procedemos da mesma forma que fizemos para p_n. Fazendo isso, nós obtemos o seguinte:

$$q_5 = det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{bmatrix}$$

Simplificando;

$$q_5 = det \begin{bmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 \end{bmatrix}$$

Então o quinto termo da sequência de convergentes é:

$$c_5 = \frac{det \begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 \end{bmatrix}}$$

Generalizando, o termo geral c_n da sequência das convergentes;

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{det\begin{bmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix}}$$

O determinante pode ser resolvido pelo método de sua preferência. Nós usaremos o determinante de **Laplace**. Escolhemos os termos da primeira linha e j-ésima coluna e construímos uma matriz suprimindo a linha e a coluna do termo escolhido. A primeira parcela do determinante é o termo da primeira linha e primeira coluna multiplicado pelo determinante da matriz com a primeira linha e a primeira coluna suprimida. Para a segunda parcela, escolhemos o termo da primeira linha e segunda coluna e construímos uma matriz suprimindo a linha do termo e a coluna do termo. Mas **o sinal de cada parcela depende da posição**. Se soma da posição da linha e da coluna for um número par, mantemos o sinal e se for um número ímpar, multiplicamos por (-1). Portanto na segunda parcela o sinal é negativo e a segunda parcela do determinante é o segundo termo multiplicado pelo determinante matriz com a linha e a coluna suprimidas. Para o numerador, fazemos:

$$p_n = a_1 \left(det \begin{bmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix} \right) - (-1) \left(det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \end{bmatrix} \right)$$

Com isso, vamos reduzindo até encontrar o valor do determinante. Para o denominador o processo é análogo.

Exemplo 2.13. *Calcular a quinta convergente de* $[2; 2, 4, 8, 2]$

Vamos resolver:

$$c_5 = \frac{det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}} =$$

Fazendo pelo determinante de Laplace;

$$\frac{2\left(det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) - (-1)\left(det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)}{2\left(det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) - (-1)\left(det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)} =$$

Repetindo o processo para o numerador;

$$\frac{4\left(det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) + 2\left(det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) + \left(det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) + \left(det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)}{2\left(det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) + \left(det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)} =$$

Agrupando os determinantes;

$$\frac{5\left(det\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\1 & 8 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)+2\left(det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 8 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)}{2\left(det\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\1 & 8 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)+\left(det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 8 & -1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)}=$$

Resolvendo os determinantes;

$$c_5 = \frac{5\cdot 70+2\cdot 17}{2\cdot 70+17} = \frac{384}{157}$$

Podemos conferir na tabela:

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	2	4	8	2
p_n	0	1	2	5	22	181	384
q_n	1	0	1	2	9	74	157
c_n			$\frac{2}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{181}{74}$	$\frac{384}{157}$

Capítulo 3

Aplicações das Frações Contínuas Finitas

3.1 Equações diofantinas lineares

Vamos pensar no seguinte problema:

Queremos comprar um objeto que custa 100 reais, mas temos apenas notas de 2 ou 5 reais. Se tivermos 50 notas de 2 reais, conseguimos pagar o objeto. É uma solução do problema. Se tivermos 18 notas de 5 reais e 5 notas de 2 reais, também conseguimos pagar o objeto, são algumas das soluções do problema.

Temos:

$$2 \cdot (50) + 5 \cdot (0) = 100$$

$$2 \cdot (5) + 5 \cdot (18) = 100$$

Assim, modelamos a seguinte equação:

$$2X + 5Y = 100$$

Caímos no problema clássico das equações diofantinas lineares. A equação chama-se diofantina em homenagem a Diofanto de Alexandria.

Definição 3.1. *Toda equação da forma $aX + bY = c$, com a, b, c, X e Y inteiros é chamada de equação diofantina.*

Algumas equações diofantinas não tem solução, por exemplo:

$$4X + 6Y = 3$$

Não tem solução. Porque a primeira e a segunda parcelas são pares e a soma de pares é um número par. A soma nunca vai ser igual a 3.
Seja:

$$aX + bY = c$$

Para que uma equação diofantina tenha solução (inteira),

$$\text{mdc}(a, b) \text{ divide } c, \text{ ou } c \text{ é múltiplo do } \text{mdc}(a, b).$$

Teorema 3.1. *A equação $aX + bY = c$ tem solução se, e somente , se o mdc(a, b) dividir c.*

Demonstração.

- Se $aX + bY = c$ tem solução :

  Dizer que $aX + bY = c$ tem solução é o mesmo que dizer que existem x e y inteiros tais que $ax + by = c$. Pelas regras de divisibilidade:

  $$\text{Como mdc}(a, b) \text{ divide } a \text{ então, mdc}(a, b) \text{ divide } ax$$

  $$\text{Como mdc}(a, b) \text{ divide } b \text{ então, mdc}(a, b) \text{ divide } by$$

  $$\text{Como mdc}(a, b) \text{ divide } ax \text{ e } by \text{ então mdc}(a, b) \text{ divide a soma } ax + by = c$$

- Se mdc(a, b) divide c:

  O teorema de Bezout nos diz que existem m e n inteiros tais que:

  $$am + bn = \text{mdc}(a, b)$$

  Como mdc(a, b) divide c, existe um k inteiro tal que $c = k\cdot$ mdc(a, b), então:

  $$am + bn = \text{mdc}(a, b)$$

  Multiplicando por k;

$$a(km) + b(kn) = ax + by = k \cdot \mathrm{mdc}(a, b) = c$$

Portanto, a equação tem solução.

Fazendo:

$$x = km \text{ e } y = kn$$

x e y são chamadas de soluções particulares.

□

Com um par de soluções particulares encontramos as soluções gerais;
Se x e y são soluções particulares da equação, queremos encontrar todos X e Y inteiros que são solução da equação:

$$aX + bY = c = ax + by$$

$$aX + bY = ax + by$$

$$aX - ax = by - bY$$

$$a(X - x) = b(y - Y)$$

Para que a igualdade seja verdadeira, fazemos;

$$X - x = bt \text{ e } y - Y = at$$

$$a\underbrace{(X - x)}_{\text{bt}} = b\underbrace{(y - Y)}_{\text{at}}$$

Temos:

$$X = x + bt \text{ e } Y = y - at$$

Portanto;
As soluções gerais são:

$$X = x + bt$$
$$Y = y - at$$

O sistema fornece todas as soluções da equação para t inteiro.

Exemplo 3.1. *Encontrar as soluções* ***não negativas*** *da equação* $2X + 5Y = 100$.

Por Bezout, existem m e n inteiros tais que:

$$am + bn = 1$$

$$2m + 5n = 2(-2) + 5(1) = 1$$

Multiplicando por 100;

$$2(-200) + 5(100) = 100$$

Tem como solução geral:

$$X = x + bt = -200 + 5t$$

$$Y = y - at = 100 - 2t$$

Para que as soluções sejam não negativas;

$$-200 + 5t \geq 0 \text{ e } 100 - 2t \geq 0$$

Temos:

$$40 \leq t \leq 50$$

A relação entre equações diofantinas e frações contínuas surge como consequência do teorema 2.7:

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$$

Fazemos:

$$\tfrac{a}{b} = \tfrac{p_n}{q_n}$$

Então:

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot p_{n-1} = (-1)^n$$

$$a \cdot q_{n-1} + b \cdot (-p_{n-1}) = (-1)^n$$

Se n é par, então:

$$a \cdot q_{n-1} + b \cdot (-p_{n-1}) = 1$$

Multiplicando por c;

$$a(c \cdot q_{n-1}) + b(c \cdot (-p_{n-1})) = c$$

Portanto:

$$X = c \cdot q_{n-1} \text{ e } Y = c \cdot (-p_n) \text{ são soluções da equação.}$$

Se n é ímpar, multiplicamos a equação por -1.

Exemplo 3.2. *Encontrar as soluções da equação* $83X + 118Y = 5$

$$\tfrac{118}{83} = 1 + \tfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}}} = [1; 2, 2, 1, 2, 4]$$

Olhando pra tabela:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			1	2	2	1	2	4
p_n	0	1	1	3	7	10	27	118
q_n	1	0	1	2	5	7	19	83

Utilizando a diferença dos produtos cruzados;

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$$

Para $n = 6$;

n	5	6
p_n	$(\cdot) \searrow 27$	$(\cdot) \swarrow 118$
q_n	(-)$\uparrow$ 19	83

$$118(19) - 83(27) = 1$$

Multiplicando por 5;

$$118(5 \cdot 19) - 83(5 \cdot 27) = 5$$

Ordenando;

$$83(-135) + 118(95) = 5$$

O par $(x, y) = (-135, 95)$ é solução particular da equação.

A solução geral é:

$$X = x + bt = -135 + 118t$$

$$Y = y - at = 95 - 83t$$

3.2 Congruências e frações contínuas

Definição 3.2. *O número a, quando dividido por n deixa resto b. Dizemos que a é congruente a b módulo n, quando a e b deixam o mesmo resto na divisão por n. Escrevemos:*

$$a \equiv b(\bmod n)$$

De forma equivalente, dizemos que $a \equiv b(\bmod n)$, quando $a - b$ é múltiplo de n.
Quando dividimos a por n, encontramos o resto igual a b, então podemos escrever:

$$a = nq + b$$

Somando $-b$;

$$a - b = nq + b - b$$

Então:

$$a - b = nq$$

Ou seja, $a - b$ é múltiplo de n, escrevemos:

$$a - b \equiv 0 \ (\bmod n)$$

Existem infintos múltiplos de n, ou seja, existem infinitos números que quando divididos por n deixam resto zero. O resto de a na divisão por n é b, mas existem outros números que também deixam resto b quando divididos por n. Quando $n = 1$, a divisão dá o próprio número, ou seja, o resto é sempre zero. Por isso a congruência $a \equiv b \pmod 1$ não é interessante, pois a e b podem assumir qualquer valor inteiro, por isso vamos considerar $n > 1$.

Quando dividimos a por b com $a > n$, os restos são sempre menores que n. Os restos possíveis são $0, 1, 2, ..., n - 1$.

Exemplo 3.3.

(a) $10 \equiv 3(\text{mod } 7)$, pois $10 = 7 \cdot 1 + 3$

(b) $17 \equiv 10 \equiv 3(\text{mod } 7)$, pois $17 = 7 \cdot 2 + 3$ e $10 = 7 \cdot 1 + 3$, deixam o mesmo resto quando divididos por 7

(c) $4 \equiv -3(\text{mod } 7)$, pois $4 + 3 \equiv 0(\text{mod } 7)$.

Temos:

$$a \equiv b(\text{ mod } n)$$

É equivalente a;

$$a = nq + b$$

Somando o inteiro k;

$$a + k = nq + (b + k)$$

Então:

$$a + k \equiv b + k(\text{mod } n)$$

Ou seja, podemos somar nas congruências. Também podemos multiplicar:

$$a = nq + b$$

Multiplicando por k;

$$ka = k(nq + b) = knq + kb$$

É equivalente a;

$$ak \equiv bk(\bmod n)$$

Portanto podemos somar e multiplicar nas congruências.

Outro problema interessante é resolver a equação:

$$aX \equiv b(\bmod m)$$

É equivalente a;

$$aX = mY + b$$

Então:

$$aX - mY = b$$

A forma acima é uma equação diofantina. Portanto, a equação só tem solução, se mdc(a, m) dividir b, ou se b for múltiplo do mdc(a, m) (Ver teorema 3.1).
Lembrando (teorema 2.6) que:

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$$

Considerando;

$$\tfrac{a}{m} = \tfrac{p_n}{q_n}$$

Substituindo;

$$a \cdot q_{n-1} - m \cdot p_{n-1} = (-1)^n$$

Então:

$$a \cdot q_{n-1} = (-1)^n + m \cdot (p_{n-1})$$

Comparando com a equação;

$$aX = a \cdot (q_{n-1}) = (-1)^n + m \cdot (p_{n-1})$$

Vamos dividir por m e olhar para os restos; o resto de $m \cdot (p_{n-1})$ é zero, mas o resto de $(-1)^n$ depende de n. Se n é par, $(-1)^n = 1$, portanto (q_{n-1}) é solução da equação:

$$aX \equiv 1(\bmod m)$$

Se n é ímpar, $(-q_{n-1})$ é solução:

$$aX = a \cdot (-q_{n-1}) = -((-1)^n + m \cdot (p_{n-1})) = (-1)^{n+1} - m \cdot (p_{n-1})$$

Quando dividimos por m, o resto de $-m \cdot (p_{n-1})$ é zero, e o resto de $(-1)^{n+1}$ é 1.

Temos que $aX \equiv 1(\bmod m)$, mas queremos $aX \equiv b(\bmod m)$, basta multiplicar a primeira equação por b:

$$aX = a(q_{n-1}) \equiv 1(\bmod m)$$

Multiplicando por b;

$$aX = a(b \cdot q_{n-1}) \equiv b(\bmod m)$$

Concluímos que:

- Se o número de termos da sequência é par;

$$(b \cdot q_{n-1}) \text{ é solução de } aX \equiv b(\bmod m)$$

- Se o número de termos da sequência é ímpar;

$$(-b \cdot q_{n-1}) \text{ é solução de } aX \equiv b(\bmod m)$$

Assim como nas equações diofantinas, temos as soluções geral:

$$X = mt + (b \cdot q_{n-1}), \text{ com } t \text{ inteiro.}$$

Exemplo 3.4. *Resolver a equação* $7X \equiv 9(\bmod 5)$*:*

Vamos comparar $aX \equiv b(\bmod m)$ e $7X \equiv 9(\bmod m)$, então:

$$\tfrac{a}{m} = \tfrac{7}{5} = 1 + \tfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

Temos que n é ímpar, pois $n = 3$. Olhando para a tabela:

n	-1	0	1	2	3
a_n			1	2	2
p_n	0	1	1	3	7
q_n	1	0	1	2	5

Temos $q_{n-1} = q_2 = 2$, mas o número de termos da sequência é impar, então a solução da equação $aX \equiv 1(\bmod m)$ é $-q_{n-1} = -q_2 = -2$:

$$7X \equiv 1(\bmod 5)$$

Substituindo $-q_2 = -2$;

$$7 \cdot (-2) \equiv 1(\bmod 5)$$

Multiplicando por 9;

$$7 \cdot (-2 \cdot 9) = 7 \cdot (-18) \equiv 9(\bmod 5)$$

Temos como solução geral:

$$X = 5t - 18$$

Capítulo 4

Frações contínuas infinitas

Neste capítulo veremos as frações contínuas infinitas. Quando o processo de expansão não termina, o número é irracional, ou seja, uma fração continua infinita representa um número irracional. Alguns números a sequência a_i dos termos da fração contínua são facilmente encontradas, pois a sequência é periódica a partir de algum termo e a maior ferramenta é a racionalização. Esses números chamados de irracionais quadráticos. Já os outros números irracionais, por exemplo π, a sequência a_i dos termos da fração contínua são mais difíceis de ser encontrados, pois a sequência não é periódica. O maior objetivo deste capitulo é obter boas aproximações de um número irracional por meio dos números racionais.

4.1 Expansão de números irracionais

Veremos como expandir números irracionais, como vimos, para expandir um número real, separamos sua parte inteira da sua parte fracionária, onde a parte inteira é o primeiro termo da sequência de termos da fração contínua (podendo ser um inteiro positivo, negativo ou zero). Invertemos a parte fracionária, novamente separamos a parte inteira da parte fracionária, obtendo o segundo termo da sequência (a partir daqui todos os termos são inteiros positivos), vamos repetindo o processo. Como a parte fracionária em nenhuma etapa é zero, o processo é infinito e representa um número irracional. O processo é infinito como mostra o teorema abaixo:

Teorema 4.1. *Um número é irracional se, e somente se sua expansão é uma fração contínua infinta*

Demonstração. • Se x é irracional então sua expansão é uma fração contínua infinita.

Seja um x irracional, temos:

$$x = x_1 = a_1 + \tfrac{1}{x_2}, \text{ com } 0 < \tfrac{1}{x_2} < 1$$

O termo a_1 é inteiro, pois é a parte inteira de $x = x_1$, então:

$$x_2 = \tfrac{1}{x_1 - a_1} > 1$$

Na igualdade acima, o denominador é irracional, pois x_1 é irracional e a subtração de um irracional por um racional é irracional, portanto x_2 é irracional.

Da mesma forma:

$$x_2 = a_2 + \tfrac{1}{x_3}, \text{ com } 0 < \tfrac{1}{x_3} < 1 \text{ e } a_2 \geq 1$$

O termo a_2 é inteiro, pois é a parte inteira de x_2, então:

$$x_3 = \tfrac{1}{x_2 - a_2} > 1$$

Também é irracional.

Repetindo o raciocínio, temos:

$$x = x_1 = a_1 + \tfrac{1}{x_2}, \ \text{ com } 0 < \tfrac{1}{x_2} < 1$$

$$x_2 = a_2 + \tfrac{1}{x_3}, \ \text{ com } 0 < \tfrac{1}{x_3} < 1 \text{ e } a_2 \geq 1$$

$$x_3 = a_3 + \tfrac{1}{x_4}, \ \text{ com } 0 < \tfrac{1}{x_4} < 1 \text{ e } a_3 \geq 1$$

$$\cdots \ \cdots$$

$$x_n = a_n + \tfrac{1}{x_{n+1}}, \ \text{ com } 0 < \tfrac{1}{x_{n+1}} < 1 \text{ e } a_n \geq 1$$

$$\cdots \ \cdots$$

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_4}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Todos os x_i são irracionas, por isso, nunca encontraremos um resto igual a zero. Portanto, a expansão é infinta.

- Se a expansão de um número x é uma fração contínua infinita, então x é um número irracional.

  Vamos supor por absurdo que a expansão de x seja infinita e x represente um número racional, então chegamos em uma contradição, pois foi provado que um número racional tem expansão finita. Logo x é irracional.

$\square$

Exemplo 4.1. *Encontre a expansão de* $\sqrt{2}$

Temos que $1 < \sqrt{2} < 2$, então $a_1 = 1$.

$$\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{x - a_1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$$

Então, como $x_2 = \sqrt{2} + 1$:

$$\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Como $1 < \sqrt{2} < 2$, temos que $2 < \sqrt{2} + 1 < 3$, então $a_2 = 2$.

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1) - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$$

Então:

$$\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{x_3}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

Observando que $x_2 = x_3 = ... = x_n = ...\sqrt{2}+1$:

$$\sqrt{2} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{\ddots}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}$$

Exemplo 4.2. *Encontre a expansão de* $\sqrt{7}$

Temos que $2 < \sqrt{7} < 3$, então $a_1 = 2$. Fazemos:

$$\sqrt{7} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{x-a_1} = \frac{1}{\sqrt{7}-2}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$$

Então, como $x_2 = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$:

$$\sqrt{7} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3}}$$

Temos $1 < \frac{\sqrt{7}+2}{3} < 2$, então $a_2 = 1$.

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 1 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2-a_2} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}+2}{3})-1} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}-1}{3})}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_3 = \frac{3}{\sqrt{7}-1} \cdot \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1} = \frac{3(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{(\sqrt{7}+1)}{2}$$

Então:

$$\sqrt{7} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{x_3}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{(\sqrt{7}+1)}{2}}}$$

Então, como $x_3 = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$:

$$\sqrt{7} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{x_3}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2}}}$$

Temos $1 < \frac{\sqrt{7}+1}{2} < 2$, então $a_3 = 1$.

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} = 1 + \frac{1}{x_4}$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}+1}{2}) - 1} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}-1}{2})}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_4 = \frac{2}{\sqrt{7}-1} \cdot \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{(\sqrt{7}+1)}{3}$$

Então:

$$\sqrt{7} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_4}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{(\sqrt{7}+1)}{3}}}}$$

Então, como $x_4 = \frac{\sqrt{7}+1}{3}$:

$$\frac{\sqrt{7}+1}{3} = a_4 + \frac{1}{x_5} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3}}$$

Temos $1 < \frac{\sqrt{7}+1}{3} < 2$, então $a_4 = 1$.

$$x_4 = a_4 + \frac{1}{x_5} = 1 + \frac{1}{x_5}$$

$$x_5 = \frac{1}{x_4 - a_4} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}+1}{3}) - 1} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}-2}{3})}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_5 = \frac{3}{\sqrt{7}-2} \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3} = \sqrt{7} + 2$$

Então:

$$\sqrt{7} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{x_5}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{7}+2}}}}$$

Como $x_5 = \sqrt{7} + 2$;

Temos $4 < \sqrt{7} + 2 < 5$, então $a_5 = 4$.

$$x_5 = a_5 + \frac{1}{x_6} = 4 + \frac{1}{x_6}$$

$$x_6 = \frac{1}{x_5 - a_5} = \frac{1}{(\sqrt{7}+2) - 4} = \frac{1}{\sqrt{7}-2}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_6 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{(\sqrt{7}+2)}{3}$$

Então:

$$\sqrt{7} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{x_6}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{(\sqrt{7}+2)}{3}}}}}}$$

Temos $x_6 = x_2 = \frac{(\sqrt{7}+2)}{3}$.

A partir daqui os termos começam a repetir, concluímos que:

$$x_6 = x_2,\ x_7 = x_3,\ ...,\ x_{n+4} = x_n \text{ para } n \geq 2.$$

ou;

$$x_{n+4k} = x_n \text{ para } n \geq 2 \text{ e } k \geq 1.$$

Portanto:

$$\sqrt{7} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Exemplo 4.3. *Encontre a expansão do número* $\frac{24-\sqrt{15}}{17}$

Temos que $1 < \frac{24-\sqrt{15}}{17} < 2$, então $a_1 = 1$.

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{x-a_1} = \frac{1}{\frac{24-\sqrt{15}}{17}-1} = \frac{17}{7-\sqrt{15}}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_2 = \frac{17}{7-\sqrt{15}} \cdot \frac{7+\sqrt{15}}{7+\sqrt{15}} = \frac{17(7+\sqrt{15})}{34}$$

Então, como $x_2 = \frac{119+17\sqrt{15}}{34}$:

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\frac{119+17\sqrt{15}}{34}}$$

Como $5 < \frac{119+17\sqrt{15}}{34} < 6$, então $a_2 = 5$.

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 5 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2-a_2} = \frac{1}{(\frac{119+17\sqrt{15}}{34})-5} = \frac{1}{\frac{-51+17\sqrt{15}}{34}} = \frac{1}{\frac{-3+\sqrt{15}}{2}}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_3 = \frac{2}{-3+\sqrt{15}} \cdot \frac{-3-\sqrt{15}}{-3-\sqrt{15}} = \frac{6+2\sqrt{15}}{6} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

Então:

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{x_3}} = 1 + \frac{1}{5+\frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{3}}}$$

Como $2 < \frac{3+\sqrt{15}}{3} < 3$,então $a_3 = 2$.

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} = 2 + \frac{1}{x_4}$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3-a_3} = \frac{1}{(\frac{3+\sqrt{15}}{3})-2} = \frac{1}{\frac{-3+\sqrt{15}}{3}} = \frac{3}{-3+\sqrt{15}}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_4 = \frac{3}{-3+\sqrt{15}} \cdot \frac{-3-\sqrt{15}}{-3-\sqrt{15}} = \frac{9+3\sqrt{15}}{6} = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$$

Então:

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{x_4}}} = 1 + \frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{2}}}}$$

Como $2 < \frac{3+\sqrt{15}}{2} < 3$,então $a_4 = 3$.

$$x_4 = a_4 + \frac{1}{x_5} = 3 + \frac{1}{x_5}$$

$$x_5 = \frac{1}{x_4-a_4} = \frac{1}{(\frac{3+\sqrt{15}}{2})-3} = \frac{1}{\frac{-3+\sqrt{15}}{2}} = \frac{2}{-3+\sqrt{15}}$$

Racionalizando o denominador;

$$x_5 = \frac{2}{-3+\sqrt{15}} \cdot \frac{-3-\sqrt{15}}{-3-\sqrt{15}} = \frac{6+2\sqrt{15}}{6} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

Então:

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\frac{1}{x_5}}}} = 1 + \frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{3}}}}}$$

Observando que $x_3 = x_5$, encontraremos $x_6 = x_4$, de um modo geral $x_n = x_{n+2}$, para n ímpar e $n \geq 3$, e $x_n = x_{n+2}$, para n par e $n \geq 4$. Portanto, a partir daqui a fração contínua começa repetir.

$$\frac{24-\sqrt{15}}{17} = 1 + \frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

A seguir vamos mostrar uma outra forma de expandir um número irracional. Seguimos três passos em cada etapa; primeiro separamos a parte inteira da parte fracionária; o segundo passo é inverter a parte fracionária e o terceiro é racionalizar o denominador do inverso da parte fracionária.

Exemplo 4.4. *Encontrar a expansão de* $\sqrt{6}$.

Em cada etapa faremos os três passos:

- 1ºpasso

  A parte inteira de $\sqrt{6}$ é 2. Escrevemos:

$$\sqrt{6} = \sqrt{6} + 0 = \sqrt{6} + 2 - 2 = 2 + (-2 + \sqrt{6})$$

- 2ºpasso

  Escrevemos:

$$(-2 + \sqrt{6}) = \frac{1}{\frac{1}{(-2+\sqrt{6})}}$$

- 3º passo

  Racionalizar o denominador:

$$\frac{1}{(-2+\sqrt{6})} = \frac{1}{(-2+\sqrt{6})}\frac{(2+\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})} = \frac{(2+\sqrt{6})}{2}$$

A expansão fica:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{\frac{(2+\sqrt{6})}{2}}$$

Vamos aplicar os três passos para $\frac{(2+\sqrt{6})}{2}$:

- 1ºpasso

  A parte inteira de $\frac{(2+\sqrt{6})}{2}$ é 2. Escrevemos:

$$\frac{(2+\sqrt{6})}{2} = \frac{(2+\sqrt{6})}{2} + 0 = \frac{(2+\sqrt{6})}{2} + 2 - 2 = 2 + (-2 + \frac{(2+\sqrt{6})}{2}) = 2 + \frac{(-2+\sqrt{6})}{2}$$

- 2ºpasso

  Escrevemos:

$$\frac{(-2+\sqrt{6})}{2} = \frac{1}{\frac{2}{(-2+\sqrt{6})}}$$

- 3^o passo

  Racionalizar o denominador:

$$\frac{2}{(-2+\sqrt{6})} = \frac{2}{(-2+\sqrt{6})}\frac{(2+\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})} = (2+\sqrt{6})$$

A expansão fica:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\sqrt{6}}}$$

Vamos aplicar os três passos para $2+\sqrt{6}$:

- 1^opasso

  A parte inteira de $2+\sqrt{6}$ é 4. Escrevemos:

$$2+\sqrt{6} = 2+\sqrt{6}+0 = 2+\sqrt{6}+4-4 = 4+(-4+2+\sqrt{6}) = 4+(-2+\sqrt{6})$$

- 2^opasso

  Escrevemos:

$$\frac{(-2+\sqrt{6})}{1} = \frac{1}{\frac{1}{(-2+\sqrt{6})}}$$

- 3^o passo

  Racionalizar o denominador:

$$\frac{1}{(-2+\sqrt{6})} = \frac{1}{(-2+\sqrt{6})}\frac{(2+\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})} = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

A expansão fica:

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{2+\sqrt{6}}{2}}}}$$

Já fizemos para o número $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$, ou seja, a partir daqui começa a repetir.

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Vamos observar a tabela das convergentes:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n			2	2	4	2	4	2	4	$\cdots$
p_n	0	1	2	5	22	49	218	485	2158	$\cdots$
q_n	1	0	1	2	9	20	89	198	881	$\cdots$

O número $\sqrt{6}$ aproximado para dez casas decimais é $2,4494897428$.

A quinta convergente $\frac{218}{89} = 2,4494382022$ (para dez casa decimais).

A sexta convergente $\frac{485}{198} = 2,4494949495$ (para dez casa decimais).

A sétima convergente $\frac{2158}{881} = 2,4494892168$ (para dez casa decimais).

Pelos resultados acima, cada convergente fica mais próximo de $\sqrt{6}$, vamos mostrar que é verdade nos teoremas de aproximação.

4.2 Teoremas de aproximação

Teorema 4.2 (Diferença de convergentes)**.** *Seja c_n a sequência das convergentes de uma fração contínua $[a_1; a_2, a_3, ..]$, então*

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n-1}} \text{ para todo } n \geq 2.$$

Demonstração. Sabemos que:

$$c_n - c_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n}{q_n \cdot q_{n-1}}$$

Mas pelo teorema 2.7:

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$$

Então:

$$c_n - c_{n-1} = \frac{p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n}{q_n \cdot q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n-1}}$$

Ou

$$c_{n+1} - c_n = \frac{p_{n+1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n+1}}{q_{n+1} \cdot q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1} \cdot q_n}$$

Portanto:

(a) Se n é par, $(-1)^n = 1$ e $(-1)^{n+1} = -1$.

(b) Se n é ímpar, $(-1)^n = -1$ e $(-1)^{n+1} = 1$.

$\square$

Observação. Em qualquer caso, $c_{n+1} - c_n$ e $c_n - c_{n-1}$ tem sinais contrários.

Teorema 4.3 (Diferença de convergentes de índices com a mesma paridade)**.** *Seja c_n a sequência das convergentes de uma fração contínua $[a_1; a_2, a_3, ..]$, então:*

$$c_n - c_{n-2} = \tfrac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n \cdot q_{n-2}} \text{ para todo } n \geq 3.$$

Demonstração. Seja a diferença;

$$c_n - c_{n-2} = \tfrac{p_n}{q_n} - \tfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$$

$$\tfrac{p_n}{q_n} - \tfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \tfrac{p_n \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_n}{q_n \cdot q_{n-2}}$$

Usando o teorema 2.6:

$$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}$$

Substituindo no numerador (teorema 2.7);

$$p_n \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_n = (a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}) \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot (a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}) =$$

$$= a_n \cdot (p_{n-1} \cdot q_{n-2} - p_{n-2} \cdot q_{n-1}) = a_n(-1)^{n-1}$$

Então:

$$c_n - c_{n-2} = \tfrac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n \cdot q_{n-2}}$$

Assim, provando o teorema.

$\square$

Teorema 4.4. *As convergentes de índice ímpar formam uma sequência crescente e as convergentes de índice par formam uma sequência decrescente.*

Demonstração. Vamos usar o teorema anterior, e considerar dois casos:

(a) Quando n é par:

O teorema é válido para $n \geq 3$, vamos considerar $n = 4$;

$$c_4 - c_2 = \tfrac{a_4(-1)^3}{q_4 \cdot q_2} < 0, \text{ implica que } c_4 < c_2$$

Vamos supor que seja verdade para $n = 2k$;

$$c_{2k} - c_{2k-2} = \tfrac{a_n(-1)^{2k-1}}{q_{2k} \cdot q_{2k-2}} < 0, \text{ implica que } c_{2k} < c_{2k-2}$$

Provar para $n = 2(k+1)$;

$$c_{2k+2} - c_{2k} = \tfrac{a_n(-1)^{2k+1}}{q_{2k} \cdot q_{2k-2}} < 0, \text{ implica que } c_{2k+2} < c_{2k}$$

Portanto a sequência de índices pares ($n = 2k$, com k inteiro positivo) é decrescente.

(b) Quando n é ímpar:

Vamos considerar $n = 3$;

$$c_3 - c_1 = \tfrac{a_3(-1)^2}{q_4 \cdot q_2} > 0, \text{ implica que } c_3 > c_1$$

Vamos supor que seja verdade para $n = 2k + 1$:

$$c_{2k+1} - c_{2k-1} = \tfrac{a_n(-1)^{2k}}{q_{2k+1} \cdot q_{2k-1}} > 0, \text{ implica que } c_{2k+1} > c_{2k-1}$$

Provar para $n = 2(k+1) + 1$;

$$c_{2k+3} - c_{2k+1} = \tfrac{a_n(-1)^{2k-2}}{q_{2k} \cdot q_{2k-2}} > 0, \text{ implica que } c_{2k+3} > c_{2k+1}$$

Portanto a sequência de índices ímpares ($n = 2k + 1$, com k inteiro positivo), é crescente.

□

Teorema 4.5. *Uma convergente está entre as duas convergentes precedentes.*

Demonstração. Para provar precisamos dos teoremas 4.2 e 4.3.

Vamos usar o teorema da diferença de convergentes (teorema 4.2):

$$c_2 - c_1 = \tfrac{1}{q_2 \cdot q_1} > 0, \text{ implica que } c_2 > c_1$$

e

$$c_3 - c_2 = \tfrac{1}{q_3 \cdot q_2} < 0, \text{ implica que } c_3 < c_2$$

Usando a diferença de convergentes de índices com mesma paridade (teorema 4.3):

$$c_3 - c_1 = \frac{a_n(-1)^2}{q_3 \cdot q_1} > 0, \text{ implica que } c_3 > c_1$$

Temos uma sequência de desigualdades:

$$c_1 < c_3 < c_2$$

Procedendo da mesma forma; (usando teorema 4.2)

$$c_3 - c_2 = \frac{1}{q_3 \cdot q_1} < 0, \text{ implica que } c_3 < c_2$$

e

$$c_4 - c_3 = \frac{1}{q_4 \cdot q_3} > 0, \text{ implica que } c_4 > c_3$$

Usando a diferença de convergentes de índices com mesma paridade (teorema 4.3):

$$c_4 - c_2 = \frac{a_n(-1)^3}{q_4 \cdot q_2} < 0, \text{ implica que } c_4 < c_2$$

Temos uma sequência de desigualdades:

$$c_3 < c_4 < c_2$$

Continuando o processo, temos a sequência de desigualdades:

$$c_3 < c_5 < c_4$$

$$c_5 < c_6 < c_4$$

$$c_5 < c_7 < c_6$$

Combinando as desigualdades, concluímos que:

$$c_1 < c_3 < ... < c_{2n-1} < ... < ... < c_{2n} < ... < c_4 < c_2$$

□

Corolário 4.1. *O conjunto de todas as convergentes de um número x é limitado (estão no intervalo $[c_1, c_2]$)*

Demonstração. Pois existe um número real k_1 tal que $k_1 \leq c_1$, também existe um número real k_2 tal que $c_2 \leq k_2$. Temos:

$$k_1 \leq c_1 < c_2 \leq k_2$$

Temos pelo teorema 4.5,

$$c_1 < c_k < c_2$$

Para $k \geq 3$.

Portanto, o conjunto das convergentes é limitado.

$\square$

Corolário 4.2. *Os termos pares da sequência das convergentes são sempre maiores que os termos ímpares da sequência das convergentes.*

Demonstração. (a) Se n é par, $(-1)^n = 1$.

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n-1}} > 0$$

$$c_n > c_{n-1},$$

Ou seja, a convergente de índice par é maior que a convergente de índice ímpar.

(b) Se n é ímpar, $(-1)^n = -1$.

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n \cdot q_{n-1}} < 0$$

$$c_n < c_{n-1},$$

Ou seja, a convergente de índice impar é menor que a convergente de índice par.

Concluímos que qualquer termo de índice par é maior que qualquer termo de índice ímpar. $\square$

Queremos provar que a sequência das convergentes de uma fração contínua converge (possui limite). Com o resultado acima, mostramos que a sequência das convergentes é limitada. Se a sequência das convergentes fosse toda crescente (ou toda decrescente, ou toda constante), o teorema estaria provado (toda sequência monótona e limitada, converge). Vamos mostrar que sequência de índices ímpares converge, a sequência de índices pares também converge, e as duas convergem para o mesmo número.

Lema 4.1. *A sequência c_{2n-1} das convergentes de índices impares, converge para um número real L*

Demonstração. A sequência de índices impares $c_1, c_3, .., c_{2n-1}, ...$ é limitada (teorema 4.5), pois todos os termos são menores que c_2 para todo n. Como a sequência é crescente, vamos mostrar que ela converge para um valor L. Vamos considerar um L tal que $L = $Sup c_{2n-1}. Dado um $\epsilon > 0$, o número $L - \epsilon$ não é cota superior de c_{2n-1}. Logo existe um n_0 natural tal que $L - \epsilon < c_{2n_0-1} < L$.
Então, se $n > n_0$ implica $L - \epsilon < c_{2n_0-1} < L < L + \epsilon$, o que implica que a sequência c_{2n-1} converge para L. □

Lema 4.2. *A sequência de c_{2n} das convergentes de índices pares, converge para um número real K.*

Demonstração. A sequência de índices pares $c_2, c_4, ..., c_{2n}, ...$ é limitada por c_1 para todo n. Como a sequência é decrescente, vamos mostrar que ela converge para um valor K. Vamos considerar um K tal que $K = $Inf c_{2n} para todo n. Dado um $\epsilon > 0$, o número $k + \epsilon$ não cota inferior de c_{2n}. Logo existe um n_0 natural tal que $K < c_{2n_0} < K + \epsilon$.
Então, se $n > n_0$ implica $K + \epsilon < K < c_{2n_0} < K + \epsilon$, o que implica que a sequência c_{2n} converge para K. □

Teorema 4.6. *Toda fração contínua infinita simples a sequência c_n converge.*

Demonstração. Usando o teorema da diferença de convergentes:

$$c_{2n} - c_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{q_{2n} \cdot q_{2n-1}} \text{ para todo } n \geq 2$$

Quando aumentamos o n, o denominador também aumenta ($q_n > q_{n-1}$ pelo teorema 2.6) e as diferenças ficam cada vez mais próximas de zero. Temos os intervalos encaixados $[c_1, c_2] \supset [c_3, c_4] \supset [c_5, c_6] \supset ... \supset [c_{2n-1}, c_{2n}] \supset ...$, como é uma sequência decrescente de intervalos limitados, existe um l real tal que l pertence a todos intervalos $[c_{2n-1}, c_{2n}]$, para todo n.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [c_{2n-1}, c_{2n}] = \{l\}$$

Foi provado no lema 2.1 que a sequência c_{2n-1} dos termos de índice ímpar converge para L. Portanto $c_{2n-1} < L \leq l$, para todo n. Todos os termos da sequência c_{2n-1} são menores que os termos da sequência c_{2n}, todos os termos da sequência c_{2n} são cotas superiores da sequência c_{2n-1}, para todo n. Por outro lado, todos os termos da sequência c_{2n-1} são cotas inferiores da sequência c_{2n}, para todo n. Temos $l \leq K < c_{2n}$. Como l está em todo intervalo $[c_{2n-1}, c_{2n}]$, concluímos que $L = l = K$. □

Teorema 4.7. *O número x sempre está entre duas convergentes consecutivas.*

Demonstração. Seja

$$x_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+2}+\frac{1}{\ddots}}} = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

Temos que x_{n+1} é o resto da fração, onde:

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}+\frac{1}{a_{n+3}+\frac{1}{\ddots}}}$$

como $x_n > 0$, implica que:

$$x_n > a_n$$

De forma análoga;

$$x_{n+1} > a_{n+1} \text{ ou } \frac{1}{a_{n+1}} > \frac{1}{x_{n+1}}$$

Como:

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

Então:

$$x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Temos as desigualdades;

$$a_n < x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Temos:

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}}}$$

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{a_n+\frac{1}{x_{n+1}}}}}}$$

$$c_{n+1} = a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{\ddots+\frac{1}{a_n+\frac{1}{a_{n+1}}}}}}$$

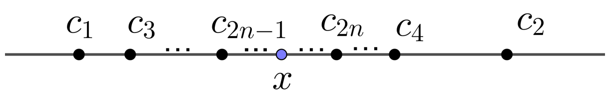
só precisamos comparar a_n , x e a_{n+1}, invertendo as desigualdades:

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{x_n} > \frac{1}{a_n+\frac{1}{a_{n+1}}}$$

Então:

$$c_n < x < c_{n+1} \text{ ou } c_{n+1} < x < c_n$$

portanto, x está entre duas convergentes consecutivas. $\square$



Corolário 4.3.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [c_{2n-1}, c_{2n}] = \{l\} = \{x\}$$

Demonstração. Resultado direto dos teoremas 4.6 e 4.7. $\square$

Seja a expansão do número irracional x,

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}}}$$

Onde

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3} + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Vamos escrever o número na forma:

$$x = [a_1; a_2, ..., a_n, x_{n+1}]$$

Onde os a_i são *inteiros* e x_{n+1} é um **número real**.

Usamos o mesmo resultado das frações contínuas finitas para as frações contínuas infintas:

$$\boxed{x = [a_1; a_2, ...a_n, x_{n+1}] = \frac{p_n \cdot x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \cdot x_{n+1} + q_{n-1}}}$$

Teorema 4.8. *Quanto maior o n, a fração contínua fica mais próxima do número x (as n-ésimas convergentes se tornam boas aproximações de x, a medida que n aumenta).*

Demonstração. Sejam

$$p_n = p_{n-1} \cdot a_n + p_{n-2}$$
$$q_n = q_{n-1} \cdot a_n + q_{n-2}$$

Sabemos que:

$$x = \frac{p_n \cdot x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \cdot x_{n+1} + q_{n-1}}$$

$$x(q_n \cdot x_{n+1} + q_{n-1}) = p_n \cdot x_{n+1} + p_{n-1}$$

$$x_{n+1}(x \cdot q_n - p_n) = -(x \cdot q_{n-1} - p_{n-1})$$

$$x_{n+1} \cdot q_n(x - \frac{p_n}{q_n}) = -q_{n-1}(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})$$

Dividindo por $x_{n+1} \cdot q_n$;

$$x - \frac{p_n}{q_n} = (-\frac{q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n})(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})$$

Tomando os módulos;

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n}\right| \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

Como para $n \geq 2$, x_{n+1} é positivo e $0 < q_{n-1} < q_n$, temos:

$$0 < \frac{q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n} < 1$$

$$0 < \left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n}\right| < 1$$

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n}\right| \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

e

$$0 < \left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n}\right| < 1$$

Concluímos que:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|, \text{ para } n \geq 2$$

ou

$$|x - c_n| < |x - c_{n-1}|, \text{ para } n \geq 2$$

A diferença (ou erro da aproximação) entre x e c_n é menor que a diferença (erro) entre x e c_{n-1}. $\square$

Teorema 4.9. *É válida a desigualdade:*

$$\tfrac{1}{2q_{n+1}\cdot q_n} < \left|x - \tfrac{p_n}{q_n}\right| < \tfrac{1}{q_{n+1}\cdot q_n} < \tfrac{1}{q_n^2},\ para\ n \geq 1$$

Demonstração. Sabemos que:

$$c_{n+1} - c_n = \tfrac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}\cdot q_n}$$

Tomando os módulos;

$$|c_{n+1} - c_n| = \tfrac{1}{q_{n+1}\cdot q_n}$$

Como foi provado que x sempre está entre duas convergentes (sem perda de generalidade, para n ímpar):

$$c_n < x < c_{n+1}$$

Subtraindo c_n:

$$0 < x - c_n < c_{n+1} - c_n$$

Tomando os módulos, então:

$$|x - c_n| < |c_{n+1} - c_n|$$

Como c_{n+1} está mais próximo de x que c_n, então:

$$\frac{|c_{n+1} - c_n|}{2} < |x - c_n|$$

Temos a seguinte desigualdade:

$$\tfrac{|c_{n+1}-c_n|}{2} < |x - c_n| < |c_{n+1} - c_n|$$

Como:

$$|c_{n+1} - c_n| = \frac{1}{q_{n+1}\cdot q_n}$$

Então:

$$\tfrac{1}{2q_{n+1}\cdot q_n} < \left|x - \tfrac{p_n}{q_n}\right| < \tfrac{1}{q_{n+1}\cdot q_n}$$

Sabemos que:

$$q_{n+1} > q_n$$

Multiplicando a desigualdade por q_n;

$$q_n \cdot q_{n+1} > q_n^2$$

Invertendo;

$$\frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Temos portanto a desigualdade:

$$\frac{1}{2q_{n+1} \cdot q_n} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} \cdot q_n} < \frac{1}{q_n^2}, \text{ para } n \geq 1$$

□

Teorema 4.10 (Dirichilet). *se x é irracional, a desigualdade $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$*

Demonstração. Usando a desigualdade do teorema acima:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}, \text{ para } n \geq 1$$

Para todo n, a fração $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. Como x é irracional, tem infintas convergentes. Portanto existem infinitos valores para $\frac{p}{q}$. □

O teorema acima nos diz que escolhendo uma convergente, a diferença entre o número e a convergente é menor que o quadrado do inverso do denominador da convergente escolhida.

Exemplo 4.5. *Encontrar aproximações racionais do número $e = 2,718281...$*

O número e não é um irracional quadrático, portanto a sequência de termos não é periódica.

A parte inteira de $x = x_1$ é $a_1 = 2$

$$x = x_1 = 2 + 0,71828...$$

Fazendo $0,71828... = \frac{1}{\left(\frac{1}{0,71828...}\right)}$, temos que $x_2 = \frac{1}{0,71828...}$, então:

$$x = 2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{0,71828...}\right)}$$

A parte inteira de $x_2 = \frac{1}{0,71828...} = 1,3922...$ é $a_2 = 1$, então:

$$x = 2 + \frac{1}{1+0,3922...}$$

Fazendo $0,3922... = \frac{1}{\left(\frac{1}{0,3922...}\right)}$, temos que $x_3 = \frac{1}{0,3922...}$, então:

$$x = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{0,3922...}\right)}}$$

A parte inteira de $x_3 = \frac{1}{0,3922...} = 2,5496...$ é $a_3 = 2$, então:

$$x = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\left(\frac{1}{0,5496...}\right)}}}$$

A parte inteira de $\frac{1}{0,5496...} = 1,8194...$ é $a_4 = 1$

A parte inteira de $\frac{1}{0,8194...} = 1,2205...$ é $a_5 = 1$

A parte inteira de $\frac{1}{0,2205...} = 4,5356...$ é $a_6 = 4$

A parte inteira de $\frac{1}{0,5356...} = 1,8672...$ é $a_7 = 1$

A parte inteira de $\frac{1}{0,8672...} = 1,1532...$ é $a_8 = 1$

A parte inteira de $\frac{1}{0,1532...} = 6,5277...$ é $a_9 = 6$

Apareceu uma sequência não periódica muito interessante; se continuarmos o processo, temos:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ..., a_{3(n-1)}, 1, 1, a_{3n}, ...]$$

Temos $a_1 = 2$, $a_{3n} = 2n$ e $a_k = 1$ com $k \neq 3n$, para todo n.

Vamos observar a tabela de convergentes:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n			2	1	2	1	1	4	1	1	6	$\cdots$
p_n	0	1	2	3	8	11	19	87	106	193	1264	$\cdots$
q_n	1	0	1	1	3	4	7	32	39	71	465	$\cdots$

Vamos verificar o erro entre x e c_7;

$$|x - c_7| = \left| e - \frac{106}{39} \right| < \frac{1}{39^2}$$

O erro entre x e c_8;

$$|x - c_8| = \left| e - \frac{1264}{465} \right| < \frac{1}{465^2}$$

O erro entre x e c_n;

$$|x - c_n| \text{ cada vez fica mais próximo de zero.}$$

Exemplo 4.6. *Encontrar aproximações racionais para o número* π

Olhando para o número $\pi = 3,14159265358979323846...$, existem frações que dão uma boa aproximação do número π.
Arquimedes usava a fração $\frac{22}{7}$ para aproximar o número π;

$$\tfrac{22}{7} = 3,14285714..$$

Se consideramos a fração $\frac{355}{113}$;

$$\tfrac{355}{113} = 3,141592...$$

A fração $\frac{355}{113}$ é uma melhor aproximação do π que a fração $\frac{22}{7}$. Tanto $\frac{355}{113}$ como $\frac{22}{7}$ são convergentes do número π. O primeiro passo é encontrar a sequência $[a_1; a_2, ..., a_n, ...]$. A sequência não é periódica, pois π não é um número irracional quadrático. Mas com auxílio de uma calculadora conseguimos encontrar alguns termos a_n da fração contínua.
A parte inteira de $\pi = x_1$ é $a_1 = 3$:

$$\pi = 3 + 0,14159..$$

Fazendo $0,14159.. = \frac{1}{\frac{1}{0,14159..}}$, temos que $x_2 = \frac{1}{0,14159..}$,então:

$$\pi = 3 + \frac{1}{\frac{1}{0,14159..}}$$

Como $x_2 = \frac{1}{0,14159..} = 7,0625...$, a parte inteira de $x_2 = \frac{1}{0,14159..}$ é $a_2 = 7$:

$$\pi = 3 + \tfrac{1}{7+0,0625..}$$

Fazendo $0,0625.. = \frac{1}{\left(\frac{1}{0,0625...}\right)}$, temos que $x_3 = \frac{1}{0,0625...}$, então:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\left(\frac{1}{0,0625...}\right)}}$$

Como $x_3 = \frac{1}{0,0625...} = 15,9965..$, a parte inteira de $x_3 = \frac{1}{0,0625...}$ é $a_3 = 15$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+0,9965...}}$$

Fazendo $0,9965... = \frac{1}{\left(\frac{1}{0,9965...}\right)}$, temos que $x_4 = \frac{1}{0,9965...}$, então:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{\left(\frac{1}{0,9965...}\right)}}}$$

Como $x_4 = \frac{1}{0,9965...} = 1,0034...$, a parte inteira de $x_4 = \frac{1}{0,9965...}$ é $a_4 = 1$, então:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+0,0034..}}}$$

Fazendo $0,0034.. = \frac{1}{\left(\frac{1}{0,0034..}\right)}$, temos que $x_5 = \frac{1}{0,0034..}$, então:

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{0,0034..}\right)}}}}$$

Como $x_5 = \frac{1}{0,0034..} = 292,6463..$, a parte inteira de $\frac{1}{0,0034..}$ é $a_5 = 292$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Vejamos as convergentes:

n	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n			3	7	15	1	292	$\cdots$
p_n	0	1	3	22	333	355	103993	$\cdots$
q_n	1	0	1	7	106	113	33102	$\cdots$

Usando o teorema 4.9:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} \cdot q_n}$$

Escolhendo a fração $\frac{p_2}{q_2} = \frac{22}{7}$

$$\left| \pi - \frac{p_2}{q_2} \right| = \left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \frac{1}{106 \cdot 7} = 0,001347709$$

O erro é menor que $0,001347709$.

Escolhendo a fração $\frac{p_3}{q_3} = \frac{333}{106}$

$$\left|\pi - \frac{p_3}{q_3}\right| = \left|\pi - \frac{333}{106}\right| < \frac{1}{113 \cdot 106} = 0,0000834864$$

O erro é menor que $0,0000834864$.

Do teorema 4.9;

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1} \cdot q_n}$$

Temos um resultado mais interessante para o erro.

Teorema 4.11. *Seja x um número irracional; Escolhendo um $n \geq 1$, pelo menos para um dos números $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, a desigualdade:*

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2 \cdot q_n^2}$$

É válida.

Demonstração. Vamos supor por absurdo que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{2 \cdot q_n^2} \text{ e } q_{n+1} > q_n.$$

Temos:

$$\frac{1}{q_{n+1} \cdot q_n} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} + x - x\right| \leq \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|$$

Por outro lado, por hipótese:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

Temos que $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|$ é o comprimento do intervalo entre as convergentes c_n e c_{n+1}, então:

$$\frac{1}{q_{n+1} \cdot q_n} = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}$$

$$q_{n+1}^2 - 2q_n \cdot q_{n+1} + q_n^2 = (q_{n+1} - q_n)^2 \leq 0$$

Implica que:

$$q_n = q_{n+1}$$

O que é um absurdo, pois $q_{n+1} > q_n$. $\square$

Se tentarmos melhorar a aproximação e considerarmos a desigualdade:

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{k \cdot q_n^2}$$

para todo $n \geq 1$, a constante k tem um limite para deixar a desigualdade válida. O mais interessante que o número $\sqrt{5}$ é o maior número que deixa o teorema é válido. O teorema de Hurwitz refina o resultado acima.

Teorema 4.12 (Hurwitz-Markov.)**.** *Seja x um número irracional. Escolhendo um $n \geq 1$, pelo menos para um dos números $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, a desigualdade:*

$$\left|x - \tfrac{p_n}{q_n}\right| < \tfrac{1}{\sqrt{5}\cdot q_n^2}, \textit{ para todo } n \geq 1$$

É válida.

Para provar o teorema precisamos de três convergentes consecutivas.

Demonstração. Sabemos que:

$$\left|x - \tfrac{p_n}{q_n}\right| < \tfrac{1}{q_{n+1}\cdot q_n}$$

Mas

$$q_{n+1} = x_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

Então:

$$\left|x - \tfrac{p_n}{q_n}\right| < \tfrac{1}{(x_{n+1}q_n + q_{n-1})\cdot q_n}$$

$$\left|x - \tfrac{p_n}{q_n}\right| < \tfrac{1}{(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n})\cdot q_n^2}$$

Vamos olhar para $\frac{q_{n-1}}{q_n}$;

$$0 < \tfrac{q_{n-1}}{q_n} < 1, \text{ pois } q_n > q_{n-1} > 0$$

A fração $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_2]$, então $\frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, ..., a_2]$ (ver Lema 2.1).
Também sabemos que:

$$x_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, ...]$$

Vamos provar que pelo menos uma das desigualdades é verdadeira;

(a) $x_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-2}} > \sqrt{5}$

(b) $x_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} > \sqrt{5}$

(c) $x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} > \sqrt{5}$

Vamos supor por absurdo que:

(a) $x_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-2}} \leq \sqrt{5}$

(b) $x_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \leq \sqrt{5}$

(c) $x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \leq \sqrt{5}$

Como $\sqrt{5} < 3$, devemos ter $a_n \leq x_n < 3$, como a_n é a parte inteira da fração contínua então, $a_n \leq 2$. Da mesma forma, $a_{n-1} \leq 2$ e $a_{n+1} \leq 2$.

$$\sqrt{5} \geq x_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} > x_n$$

Vamos mostrar que $a_n = 1$;

Se $a_n = 2$;

$$\sqrt{5} \geq x_n = 2 + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\ddots}}$$

Mas

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{\ddots}} < 3$$

Portanto:

$$\sqrt{5} \geq x_n = 2 + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{\ddots}} > 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}$$

Absurdo, portanto $a_n = 1$. Analogamente $a_{n-1} = 1$ e $a_{n+1} = 1$.

Sejam $\alpha = \frac{1}{x_{n+1}}$ e $\beta = \frac{q_{n-1}}{q_n}$. Temos:

(a) $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{\beta} \leq \sqrt{5}$

(b) $1 + \alpha + \beta \leq \sqrt{5}$

(c) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1+\beta} \leq \sqrt{5}$

Olhando para segunda expressão:

$$1 + \alpha + \beta \leq \sqrt{5}$$

$$1 + \alpha \leq \sqrt{5} - \beta$$

Vamos comparar com a primeira:

$$\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{1}{\sqrt{5}-\beta}+\frac{1}{\beta}=\frac{\sqrt{5}}{\beta(\sqrt{5-\beta})}$$

Como $\beta(\sqrt{5}-\beta)\geq 1$, então $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leq\beta\leq\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Por outro lado;

$$1+\alpha+\beta\leq\sqrt{5}$$

$$\alpha\leq\sqrt{5}-\beta-1$$

Vamos comparar com a terceira:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1+\beta}\geq\frac{1}{\sqrt{5}-\beta-1}+\frac{1}{1+\beta}=\frac{\sqrt{5}}{(1+\beta)(\sqrt{5}-\beta-1)}$$

Como $(1+\beta)(\sqrt{5}-\beta-1)\geq 1$, então $\frac{\sqrt{5}-3}{2}\leq\beta\leq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Com os dois resultados, concluímos que $\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, absurdo pois $\beta=\frac{q_{n-1}}{q_n}$ é racional. Com isso, provamos que o teorema é verdadeiro. Falta provar que $\sqrt{5}$ é o maior número que satisfaz a desigualdade, antes vamos a um exemplo que usaremos para provar que $\sqrt{5}$ é o maior número com essa propriedade. □

Exemplo 4.7. *Encontrar a expansão do número de ouro.* $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

A parte inteira de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número $a_1=1$.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{\frac{2}{-1+\sqrt{5}}}$$

Racionalizando;

$$\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\frac{(1+\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Então:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Um resultado muito interessante, pois o número se repete no denominador da segunda parcela. Temos:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=[1;1,1,...]$$

Essa fração continua é interessante, não só por repetir o mesmo número no denominador da segunda parcela;y a sequência de termos é toda igual a 1, ou seja, $a_1=a_2=...=1$. Passando a parte inteira para o outro lado da desigualdade, temos no numerador, o número $-1+\sqrt{5}$ que é menor que 2, então:

$$\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = [0; 1, 1, ...]$$

Com isso, as duas frações contínuas são as "menores", pois 1 é o menor inteiro positivo. Vamos usar o resultado para provar que $\sqrt{5}$ é o maior número que deixa válido o teorema de Hurwitz.

Teorema 4.13. *Seja a desigualdade:*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{k \cdot q_n^2}$$

para todo $n \geq 1$, o número $k = \sqrt{5}$ é o maior número que deixa a desigualdade válida .

Demonstração. Vamos supor que exista um número $k > \sqrt{5} > 2$, que deixe o teorema válido. Seja $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Então:

$$\left| \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{p}{q} \right| < \tfrac{1}{k \cdot q^2} < \tfrac{1}{2 \cdot q^2}.$$

Como $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$:

$$\left| \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{p_n}{q_n} \right| = \tfrac{1}{(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}) \cdot q_n^2} < \tfrac{1}{k \cdot q_n^2}$$

Para que a desigualdade acima seja verdadeira;

$$(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}) > k > \sqrt{5}$$

Mas

$$x_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, ...] = [1; 1, 1, ..] = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$\beta = \tfrac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, ...a_2] = [0; 1, 1, ..., 1]$$

Temos que a cada n, a fração β se aproxima de $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ então, para um n grande, $(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$. Temos:

$$(x_{n+1} + \tfrac{q_{n-1}}{q_n}) = \sqrt{5} > k > \sqrt{5} \text{ , absurdo!}$$

Portanto, $\sqrt{5}$ é o maior número que deixa a desigualdade válida, sendo o teorema de Hurwitz-Markov o melhor resultado. □

4.2.1 Frações contínuas e logaritmos

Sejam a, b e c números reais, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Sabemos que:

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$$

Vamos calcular o logaritmo

$$\log_{b_0} b_1, \text{ onde } 1 < b_1 < b_0$$

Vamos considerar a sequência;

$$b_0, b_1, b_2, ...$$

E uma outra sequência;

$$n_1, n_2, n_3, ..$$

Os números $n_1, b_2, n_2, b_3, ...$ são determinados pela seguinte relação:

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}, \quad b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}$$

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}, \quad b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

$$\cdots$$

$$b_k^{n_k} < b_{k-1} < b_k^{n_k+1}, \quad b_{k+1} = \frac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}}$$

Assim, primeiro encontramos um número inteiro n_1 tal que:

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}, \quad b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}$$

Isto mostra que:

$$b_0 = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}}$$

Onde $\frac{1}{x_1} < 1$, então:

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}$$

E determinamos um número inteiro n_2 tal que:

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$$

Se n_2 é um número inteiro, então:

$$b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}} \text{ com } x_2 > 1$$

Continuamos calculando, procuramos um número inteiro n_3 tal que:

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$$

Se n_3 é um número inteiro, então:

$$b_2 = b_3^{n_3+\frac{1}{x_3}} \text{ com } x_3 > 1$$

Temos:

$$b_2 = b_0 \cdot b_1^{-n_1} = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}} \cdot b_1^{-n_1} = b_1^{\frac{1}{x_1}}$$

ou

$$b_1 = b_2^{x_1}$$

Por outro lado;

$$b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}}$$

E, portanto, podemos escrever:

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}$$

Analogamente;

$$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3}$$

Temos:

$$b_1 = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{x_1}}} = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{x_2}}}} = \cdots = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{\ddots}}}}$$

Então:

$$b_1 = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Pela definição de logaritmos;

$$\log_{b_0}^{b_1} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Exemplo 4.8. *Calcular o* $\log_{10}^{5}$*:*

Temos $b_0 = 10$ e $b_1 = 15$

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1} \text{ e } b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}$$

$$5^1 < 10 < 5^2 \text{ e } b_2 = \frac{10}{5} = 2$$

Então $n_1 = 1$.

Temos $b_1 = 5$ e $b_2 = 2$

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1} \text{ e } b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

$$2^2 < 5 < 2^3 \text{ e } b_3 = \frac{5}{2^2} = 1,25$$

Então $n_2 = 2$.

Temos $b_2 = 2$ e $b_3 = 1,25$

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1} \text{ e } b_4 = \frac{b_2}{b_3^{n_3}}$$

$$1,25^3 < 2 < 1,25^4 \text{ e } b_4 = \frac{2}{1,25^3} = 1,024$$

Então $n_2 = 3$.

Temos $b_3 = 1,25$ e $b_4 = 1,024$

$$b_4^{n_4} < b_3 < b_4^{n_4+1} \text{ e } b_5 = \frac{b_3}{b_4^{n_4}}$$

$$1,024^9 < 1,25 < 1,024^{10} \text{ e } b_5 = \frac{1,25}{1,024^{10}} = 1,009741958$$

Então $n_4 = 9$.

Em resumo:

$$b_1 = 5 \quad n_1 = 1$$

$$b_2 = 2 \quad n_2 = 2$$

$$b_3 = 1,25 \quad n_3 = 3$$

$$b_4 = 1,024 \quad n_4 = 9$$

$\cdots$

Temos:

$$\log_{10}^{5} = 0 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{9+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Olhando para tabela de convergentes:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n			0	1	2	3	9	2	2
p_n	0	1	0	1	2	7	65	137	339
q_n	1	0	1	1	3	10	93	196	485

A convergente $\frac{137}{196} \cong 0,698979$ e $\log_{10}^{5} \cong 0,698970$.

$$\left|\log_{10}^{5} - \frac{137}{196}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\cdot 196^2}$$

O erro menor que $0,00001$.

4.3 Frações contínuas infinitas periódicas

Vimos que a expansão de alguns números se repetem. Os números irracionais dos exemplos 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4; a sequência de termos a_n a partir de um certo ponto começam a repetir, esses números são chamados irracionais quadráticos. Vamos estudar os números irracionais quadráticos e veremos como expandir e converter fração contínua periódica em um irracional quadrático.

Definição 4.1. *Um número irracional quadrático é da forma:*

$$\frac{A+\sqrt{B}}{C} \qquad \textit{com } A, B \textit{ e } C \textit{ inteiros, com } B > 0 \textit{ e } C \neq 0.$$

Começamos a expandir o número $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$, para isso vamos usar os três passos. Seja a_1 é a parte inteira de $x = x_1 = \frac{A+\sqrt{B}}{C} = \frac{A_1+\sqrt{B}}{C_1}$, temos:

$$x_1 = \frac{A+\sqrt{B}}{C} = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

1ºpasso (parte inteira):

$$x_1 = a_1 + (\frac{A_1+\sqrt{B}}{C_1} - a_1)$$

$$x_1 = a_1 + (\frac{A_1-C_1\cdot a_1+\sqrt{B}}{C_1})$$

2ºpasso:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{\frac{C_1}{A_1-C_1\cdot a_1+\sqrt{B}}}$$

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{\frac{C_1}{A_1-C_1\cdot a_1+\sqrt{B}}}$$

3ºpasso (racionalizando o denominador):

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{\frac{C_1[(A_1-C_1\cdot a_1)-\sqrt{B}]}{(A_1-C_1\cdot a_1)^2-B}} = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

Podemos escrever:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{\frac{(A_1-C_1\cdot a_1)-\sqrt{B}}{\frac{(A_1-C_1\cdot a_1)^2-B}{C_1}}} = a_1 + \frac{1}{\frac{(a_1\cdot C_1-A_1)+\sqrt{B}}{\frac{B-(a_1\cdot C_1-A_1)^2}{C_1}}}$$

Temos que $x_2 = \frac{(a_1\cdot C_1-A_1)+\sqrt{B}}{\frac{B-(a_1\cdot C_1-A_1)^2}{C_1}}$, portanto x_2 é um irracional do tipo $\frac{A_2+\sqrt{B}}{C_2}$.

Seja a_2 é a parte inteira de x_2.

1ºpasso (parte inteira):

$$x_2 = a_2 + (\frac{A_2+\sqrt{B}}{C_2} - a_2)$$

$$x_2 = a_2 + (\frac{A_2-C_2\cdot a_2+\sqrt{B}}{C_2})$$

2ºpasso (invertendo a parte fracionária):

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{\frac{C_2}{A_2-C_2\cdot a_2+\sqrt{B}}}$$

3ºpasso (racionalizando o denominador):

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{\frac{C_2[(A_2-C_2\cdot a_2)-\sqrt{B}]}{(A_2-C_2\cdot a_2)^2-B}}$$

Podemos escrever;

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{\frac{(A_2-C_2\cdot a_2)-\sqrt{B}}{\frac{(A_2-C_2\cdot a_2)^2-B}{C_2}}} = a_2 + \frac{1}{\frac{(a_2\cdot C_2-A_2)+\sqrt{B}}{\frac{B-(a_2\cdot C_2-A_2)^2}{C_2}}}$$

Então;

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = a_2 + \frac{1}{\frac{A_3+\sqrt{B}}{C_3}} = a_2 + \frac{1}{\frac{(a_2 \cdot C_2 - A_2)+\sqrt{B}}{\frac{B-(a_2 \cdot C_2 - A_2)^2}{C_2}}}$$

Comparando as expressões:

(a) $A_3 = a_2 \cdot C_2 - A_2$

(b) $C_3 = \frac{B-A_3^2}{C_2}$

(c) $x_3 = \frac{A_3+\sqrt{B}}{C_3}$

(d) $a_3 =$ parte inteira de x_3

Continuando o processo, podemos generalizar as expressões:

Definição 4.2. *Seja* $x = x_1 = \frac{A+\sqrt{B}}{C} = \frac{A_1+\sqrt{B}}{C_1}$,

(a) $A_n = a_{n-1} \cdot C_{n-1} - A_{n-1}$, *para* $n \geq 2$.

(b) $C_n = \frac{B-A_n^2}{C_{n-1}}$, *para* $n \geq 2$.

(c) $x_n = \frac{A_n+\sqrt{B}}{C_n}$, *para todo* n.

(d) $a_n =$ *parte inteira de* x_n

Definição 4.3. *O número da forma* $\sqrt{B}$, *com* B *inteiro positivo, é chamado de irracional quadrático puro.*

Exemplo 4.9. *Encontre os termos da fração continua para* $\sqrt{31}$

A parte inteira de $\sqrt{31}$ é 5, escrevemos:

$$\sqrt{31} = a_1 + \left(\frac{A_1+\sqrt{B}}{C_1} - a_1\right)$$

ou

$$\sqrt{31} = 5 + \left(\frac{0+\sqrt{31}}{1} - 5\right)$$

Os termos $A_1 = 0$ e $C_1 = 1$ sempre que for irracional quadrático puro.

Vamos colocar os valores em uma tabela, como a tabela abaixo:

n	1	2	3
A_n	0	$\cdots$	
C_n	1	$\cdots$	
a_n	5	$\cdots$	

Temos:

(a) $A_2 = a_1 \cdot C_1 - A_1 = 5 \cdot 1 - 0$

(b) $C_2 = \frac{B - A_2^2}{C_1} = \frac{31-5^2}{1} = 6$

(c) $x_2 = \frac{A_2 + \sqrt{B}}{C_2} = \frac{5+\sqrt{31}}{6}$

(d) $a_2 =$ parte inteira de $x_2 = 1$

Não é necessário memorizar as fórmulas, marque os primeiros termos e com observação de como os termos estão dispostos, e um pouco de prática, conseguimos preencher a tabela até o n desejado.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A_n	0	5	1	4	5	5	4	1	5	5	1
C_n	1	6	5	3	2	3	5	6	1	6	5
a_n	5	1	1	3	5	3	1	1	10	1	1

Os termos $A_2 = A_{10}$ e $C_2 = C_{10}$, ou seja, os termos da décima coluna são iguais aos termos da segunda coluna. Os termos $A_3 = A_{11}$ e $C_3 = C_{11}$, os termos da décima primeira coluna são iguais aos termos da terceira coluna. A partir do $n = 10$ começa a repetição. As fórmulas valem também para A_1 e C_1 negativos.

Exemplo 4.10. *Encontre os termos da fração contínua* $\frac{-1+\sqrt{7}}{-2}$

A parte inteira de $\frac{-1+\sqrt{7}}{-2}$ é -1, temos $A_1 = -1$ e $C_1 = -2$.
Colocando na tabela:

n	1	2	3	4	5	6	7
A_n	-1	3	2	1	1	2	2
C_n	-2	1	3	2	3	1	3
a_n	-1	5	1	1	1	4	1

Os termos começam a repetir a partir da sétima coluna.

Pode acontecer em alguma etapa encontrarmos algum A_n ou C_n que não seja inteiro? Se tentarmos com $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$,

$$a_1 = 1$$

$$A_1 = 1$$

$$C_1 = 2$$

Colocando na tabela:

n	1	2	3
A_n	1	1	
C_n	2	?	
a_n	1		

$$A_2 = a_1 \cdot C_1 - A_1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1$$

$$C_2 = \frac{B-A_1^2}{C_1} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$$

Temos que $\frac{5}{2}$ não é inteiro!

Temos como saber se em alguma etapa o A_n ou C_n não é um inteiro. O teorema abaixo nos fornece um critério:

Teorema 4.14. *Na expansão de um número da forma $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ na forma de fração quadrática, se $B - A^2$ for divisível por C então $B - A_n^2$ será divisível por C_{n-1}.*

Demonstração. Por indução:
Supondo que $B - A^2$ seja divisível por C.
para $n = 1$

$$C_2 = \frac{B-A^2}{C} = \frac{B-A_1^2}{C_1}$$

Temos que C_2 é inteiro, pois $A_1 = A$ e $C_1 = C$.
Portanto é verdade para $n = 1$.
Vamos supor que seja verdade para, $1, 2, ..., n$. Para $n = k$;

$$C_k = \frac{B-A_k^2}{C_{k-1}}$$

Vamos provar que é verdade para $n = k + 1$;

$$C_{k+1} = \frac{B-A_{k+1}^2}{C_k} = \frac{B-(a_k \cdot C_k - A_k)^2}{C_k} =$$

$$= \frac{B-(a_k^2 \cdot C_k^2 - 2 \cdot A_k \cdot a_k \cdot C_K + A_k^2)}{C_k} = \frac{B-A_k^2+2 \cdot A_k \cdot a_k \cdot C_K - a_k^2 \cdot C_k^2}{C_k} =$$

$$= \frac{B-A_k^2}{C_k} + \frac{2 \cdot A_k \cdot a_k \cdot C_K - a_k^2 \cdot C_k^2}{C_k}$$

A primeira parcela é verdadeira por hipótese de indução. Como $B - A_k^2$ e C_{k-1} são inteiros, e verdade para $C_k = \frac{B-A_k^2}{C_{k-1}}$ (C_k é inteiro), então $B - A_k^2 = C_{k-1} \cdot C_k$. Portanto, $C_{k-1} = \frac{B-A_k^2}{C_k}$($C_{k-1}$ é inteiro). A segunda parcela claramente é divisível por C_k. $\square$

Então para construir a tabela, verificamos antes se $B - A^2$ divide C. Se não for divisível, multiplicamos o numerador e o denominador por C:

$$\frac{A+\sqrt{B}}{C} \cdot 1 = \frac{A+\sqrt{B}}{C} \cdot \frac{C}{C} = \frac{AC+\sqrt{BC^2}}{C^2}$$

Agora, o numerador é divisível pelo denominador C, pois $BC^2 - AC$ é divisível por C. No caso de $\frac{1+\sqrt{6}}{2} = \frac{2+\sqrt{6 \cdot 2^2}}{2^2}$, temos $B - A^2 = 20$ é divisível por $C^2 = 4$.

4.3.1 Equação quadrática de uma uma fração contínua

Vamos observar uma fração contínua periódica que se repete a partir do primeiro termo e o período com n termos:
Seja

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}$$

Observe que a_1 não pode ser negativo, como $[a_1; a_2, ...a_n, a_1, a_2, ..]$, temos que $a_1 = a_{n+1} = a_{2n+2} = ...$, se a_1 fosse negativo o a_{n+1} também seria negativo, mas todo a_j com $j \geq 2$ tem que ser positivo por definição. Portanto, a_1 não pode ser negativo na fração contínua que repete a partir do primeiro termo com n termos no período.
Temos:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}}$$

Vamos utilizar a fórmula da $(n + 1)$-ésima convergente;

$$c_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{x_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}$$

Mas $x = c_{n+1} = x_{n+1}$, então:

$$x = c_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{x \cdot p_n + p_{n-1}}{x \cdot q_n + q_{n-1}}$$

Temos:

$$q_n \cdot x^2 + q_{n-1} \cdot x = x \cdot p_n + p_{n-1}$$

Então:

$$\boxed{q_n \cdot x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0}$$

Definição 4.4. *Chamamos a equação $q_n \cdot x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0$, equação quadrática da fração contínua de repetição inicial.*

É uma equação de segundo grau, vamos observar as raízes da equação e provar o seguinte teorema:

Teorema 4.15. *A equação quadrática para uma fração contínua de repetição inicial sempre tem uma raiz positiva e uma raiz negativa.*

Demonstração. Na equação,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Temos como raízes:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Comparando os termos da equação de segundo grau com equação quadrática da fração contínua de repetição inicial:

$$a = q_n$$

$$b = (q_{n-1} - p_n)$$

$$c = -p_{n-1}$$

Temos como delta da equação:

$$b^2 - 4ac = (q_{n-1} - p_n)^2 - 4(q_n)(-p_{n-1}) = (q_{n-1} - p_n)^2 + 4(q_n)(p_{n-1})$$

É sempre maior que zero, pois $(q_{n-1} - p_n)^2$ é maior que zero (todo quadrado de um número diferente de zero é positivo) e $4(q_n)(p_{n-1})$ também é maior que zero, pois q_n, q_{n-1}, p_n e p_{n-1} são todos inteiros positivos. Portanto, a equação da fração contínua de repetição inicial sempre tem duas raízes. $\square$

Exemplo 4.11. *Encontre o número x que gerou a expansão da fração contínua:*

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Como:

$$x = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Temos:

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{x+1}{x}$$

Então:

$$x^2 = x + 1$$

Portanto:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

É a equação procurada, tem como soluções:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Concluímos que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pois é maior que zero.

Observação. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um número especial, o *número de ouro*. A equação coincide com a equação característica da recorrência que gera a sequência de Fibonacci, como consequência:

Os números da forma

$$F_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

são exatamente os termos da sequência de Fibonacci.

Podemos também utilizar a tabela para encontrar a equação, como a partir de x_2 começa a repetição, fazemos $a_2 = x$:

n	-1	0	1	2
a_n			1	x
p_n	0	1	1	x+1
q_n	1	0	1	x

Olhando para a segunda convergente:

$$x = c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{x+1}{x}$$

Também encontramos a equação:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Exemplo 4.12. *Encontre a equação quadrática da fração contínua e o número que gerou a expansão:*

$$x = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Como:

$$x = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Então:

$$x = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$x = 2 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}}$$

$$x = 2 + \frac{x}{x+1}$$

$$x = \frac{2(x+1)+x}{x+1} = \frac{3x+2}{x+1}$$

$$x = \frac{3x+2}{x+1}$$

Então:

$$x(x+1) = 3x+2$$

$$x^2 + x = 3x + 2$$

Portanto:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

É a equação procurada, tem como soluções:

$$x = \frac{2+\sqrt{12}}{2}$$

e

$$x = \frac{2-\sqrt{12}}{2}$$

Concluímos que $x = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1+\sqrt{3}$, pois é maior que zero. Podemos também utilizar a tabela para encontrar a equação. Como a partir de x_3 começa a repetição, fazemos $a_3 = x$:

n	-1	0	1	2	3
a_n			2	1	x
p_n	0	1	2	3	3x+2
q_n	1	0	1	1	x+1

Olhando para a terceira convergente;

$$x = c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{3x+2}{x+1}$$

Também encontramos a equação:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

Exemplo 4.13. *Encontre o número x que gerou a expansão da fração contínua:*

$$x = 2 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Observando que a fração contínua não repete do início, fazemos:

$$y = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{\ddots}}}}}$$

Temos duas equações:

$$\text{(a)}\ \ x = 2 + \frac{1}{y}$$

$$\text{(b)}\ \ y = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{y}}$$

De (b), temos;

$$y = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{y}}$$

$$y = 3 + \frac{1}{\frac{y+1}{y}}$$

$$y = 3 + \frac{y}{y+1}$$

$$y = \frac{3(y+1)+y}{y+1} = \frac{4y+3}{y+1}$$

$$y = \frac{4y+3}{y+1}$$

Então:

$$y(y+1) = 4y+3$$

$$y^2 + y = 4y + 3$$

Portanto:

$$y^2 - 3y - 3 = 0$$

Tem com solução;

$$y = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$$

e

$$y = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

Vamos usar apenas $y = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$, pois é maior que zero. Vamos substituir na equação (a):

$$x = 2 + \frac{1}{y}$$

Substituindo;

$$x = 2 + \frac{1}{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}$$

$$x = 2 + \frac{2}{3+\sqrt{21}}$$

$$x = 2 + \left(\frac{2}{3+\sqrt{21}}\right) \cdot \left(\frac{3-\sqrt{21}}{3-\sqrt{21}}\right) = 2 + \frac{-6+2\sqrt{21}}{12}$$

$$x = \frac{18+2\sqrt{21}}{12} = \frac{9+\sqrt{21}}{6}$$

Podemos também utilizar a tabela para encontrar a equação, mas como a fração continua não repete do inicio, usamos a tabela para encontrar y. Como a partir de y_3 começa a repetição, fazemos $a_3 = y$:

n	-1	0	1	2	3
a_n			3	1	y
p_n	0	1	3	4	4y+3
q_n	1	0	1	1	y+1

Olhando para a terceira convergente;

$$y = c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{4y+3}{y+1}$$

Também encontramos a equação:

$$y^2 - 3y - 3 = 0$$

Encontramos as raízes e substituímos na equação (a).

4.4 Reduzido quadrático

Nesta seção estudaremos os reduzidos quadráticos. Reduzidos quadráticos são tipos especiais de irracionais quadráticos. Identificamos os reduzidos quadráticos pelas propriedades que resultam de uma relação direta com seu conjugado.

Definição 4.5. *Um Irracional quadrático que a sequência de sua fração contínua repete do inicio é chamado de* ***reduzido quadrático****.*

Vamos investigar porque em alguns irracionais quadráticos a sequência repete do começo e outros não. Mas todos irracionais quadráticos repetem a partir de um certo ponto (Lagrange).

Definição 4.6. *Sejam* $x = \frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, .., a_n, a_1, a_2, ...]$ *e* $y = \frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_n, a_{n-1}...]$ *frações contínuas. Elas são chamadas de frações contínuas de período reverso.*

Teorema 4.16. *Seja* $x > 1$ *uma fração contínua de repetição inicial, e seja* y *fração contínua de período reverso de* x*, e* x' *conjugado de* x*, então* $-\frac{1}{y} = x'$ *e* $-1 < x' < 0$*.*

Demonstração. Seja :

$$x = \frac{p_n}{q_n} = [a_1; a_2, ..., a_n]$$

Com a equação quadrática da fração contínua de repetição inicial

$$\boxed{q_n \cdot x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0}$$

associada a x .

E seja y a fração contínua de período reverso. Vamos usar o resultado do lema 2.1.

$$y = \frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_2, a_1] = \frac{p_n{}'}{q_n{}'} \text{ e } \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, ..., a_2] = \frac{p_{n-1}{}'}{q_{n-1}{}'}$$

Da primeira concluímos que:

$$p_n = p_n{}' \text{ e } p_{n-1} = q_n{}'$$

Da segunda;

$$q_n = p_{n-1}{}' \text{ e } q_{n-1} = q_{n-1}{}'$$

Então:

$$y = c_{n+1} = \frac{p_{n+1}{}'}{q_{n+1}{}'} = \frac{y \cdot p_n{}' + p_{n-1}{}'}{y \cdot q_n{}' + q_{n-1}{}'}$$

$$q_n{}' \cdot y^2 + (q_{n-1}{}' - p_n{}')y - p_{n-1}{}' = 0$$

Substituindo:;

$$\boxed{p_{n-1} \cdot y^2 + (q_{n-1} - p_n)y - q_n = 0}$$

A relação entre as equações é que elas tem os coeficientes dos extremos com a ordem trocada.

(a) $q_n \cdot x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0$

$$\text{(b)}\ \ p_{n-1} \cdot y^2 + (q_{n-1} - p_n)y - q_n = 0$$

Vamos olhar para os números que geraram as expansões (soluções das equações) e procurar alguma relação entre eles. Fazendo $q_n = a$, $(q_{n-1} - p_n) = b$ e $p_{n-1} = c$. As equações ficam:

$$\text{(a)}\ \ a \cdot x^2 + bx - c = 0$$

$$\text{(b)}\ \ c \cdot y^2 + by - a = 0$$

A primeira equação tem como raízes:

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

e

$$x' = \frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

A segunda equação tem como raízes:

$$y = \frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}$$

e

$$y' = \frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2c}$$

Observando que x' é conjugado de x e y' é conjugado de y.

Vamos considerar $x = \frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$, pois é maior que zero ($x > 1$ por hipótese).

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}} = -\frac{2a}{-b+\sqrt{b^2+4ac}} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{-b-\sqrt{b^2+4ac}}$$

$$= \frac{-2a\cdot(-b-\sqrt{b^2+4ac})}{b^2-b^2-4ac} = \frac{-2a\cdot(-b-\sqrt{b^2+4ac})}{-4ac} = \frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2c} = y'$$

Concluímos que:

$$\boxed{-\frac{1}{x} = y'.}$$

O número $-\frac{1}{x}$ é conjugado de y.

Olhando para y;

$$y = \frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}$$

Da mesma forma:

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2c}} = -\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2+4ac}} \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{-b-\sqrt{b^2+4ac}}\right) = \frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a} = x'$$

Concluímos que:

$$\boxed{-\frac{1}{y} = x'.}$$

O número $-\frac{1}{y}$ é conjugado de x. Ou seja, $-\frac{1}{y}$ é solução da primeira equação e $-\frac{1}{x}$ é solução da segunda equação.

Temos os seguintes resultados:

- x e y são positivos, pois $a_1 > 0$
- Se $y > 1$, então $\frac{1}{y} < 1$. Multiplicando por -1 temos, $-\frac{1}{y} > -1$.
- Como $x' = -\frac{1}{y}$, então $-1 < x' < 0$.

Com os resultados acima concluímos que quando x é um irracional quadrático de repetição inicial, com $x > 1$, seu conjugado x' é maior que -1 e menor que 0. □

Exemplo 4.14. *Encontrar as equações quadráticas da frações contínuas, os números que geraram a expansão e encontre alguma relação entre eles:*

$$x = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\ddots}}}}}}$$

e

$$y = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}}}}$$

São frações contínuas de período reverso.

Para resolver, vamos utilizar a tabela:

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			1	2	3	x
p_n	0	1	1	3	10	10x+3
q_n	1	0	1	2	7	7x+2

Olhando para a quarta convergente;

$$x = c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{10x+3}{7x+2}$$

$$x = \frac{10x+3}{7x+2}$$

$$x(7x+2) = 10x+3$$

$$7x^2 - 8x - 3 = 0$$

Temos como solução:

$$x = \frac{8+\sqrt{148}}{14} = \frac{4+\sqrt{37}}{7}$$

Utilizando a tabela para o outro número;

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			3	2	1	y
p_n	0	1	3	7	10	10y+7
q_n	1	0	1	2	3	3y+2

Olhando para a quarta convergente;

$$y = c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{10y+7}{3y+2}$$

$$y = \frac{10y+7}{3y+2}$$

$$y(3y+2) = 10y+7$$

$$3y^2 - 8y - 7 = 0$$

Temos como solução:

$$y = \frac{8+\sqrt{148}}{6} = \frac{4+\sqrt{37}}{3}$$

Observando as equações;

(a) $7x^2 - 8x - 3 = 0$

(b) $3y^2 - 8y - 7 = 0$

Vamos olhar para os números que geraram as expansões (soluções das equações) e verificar a relação entre eles.

Escolhendo x:

$$x = \frac{8+\sqrt{148}}{14} = \frac{4+\sqrt{37}}{7}$$

Vamos considerar;

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{\frac{4+\sqrt{37}}{7}} = -\frac{7}{4+\sqrt{37}} \cdot \frac{4-\sqrt{37}}{4-\sqrt{37}}$$

$$= \frac{-7\cdot 4-(-7)\cdot\sqrt{37}}{16-37} = \frac{-7\cdot(4-\sqrt{37})}{-21} = \frac{4-\sqrt{37}}{3}$$

Olhando para y:

$$y = \frac{8+\sqrt{148}}{6} = \frac{4+\sqrt{37}}{3}$$

O conjugado de y, o número y':

$$y' = \frac{4-\sqrt{37}}{3}$$

Concluímos que:

$$y' = -\frac{1}{x}$$

Da mesma forma;

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{\frac{4+\sqrt{37}}{3}} = -\frac{3}{4+\sqrt{37}} \cdot \left(\frac{4-\sqrt{37}}{4-\sqrt{37}}\right) = \frac{4-\sqrt{37}}{7} = x'$$

Concluímos que:

$$x' = -\frac{1}{y}$$

Ou seja,$-\frac{1}{y}$ é solução da primeira equação e $-\frac{1}{x}$ é solução da segunda equação.

Chegamos aos seguintes resultados:

- $x = \frac{4+\sqrt{37}}{7}$ e $y = \frac{4+\sqrt{37}}{3}$ são positivos e maiores que 1.
- Como $y = \frac{4+\sqrt{37}}{3} > 1$, então $\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{4+\sqrt{37}}{3}} < 1$. Multiplicando por -1 temos, $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{\frac{4+\sqrt{37}}{3}} > -1$.
- Como $x' = \frac{-4+\sqrt{37}}{7} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\frac{4+\sqrt{37}}{3}}$, temos $-1 < x' = -4+\sqrt{37} < 0$.

Temos a seguinte consequência do teorema 4.16. Uma forma alternativa de definir o reduzido quadrático:

Corolário 4.4. *Seja x um irracional quadrático, x é um **REDUZIDO QUADRÁTICO** quando:*

- $x > 1$
- $-1 < x' < 0$

Toda fração contínua de repetição inicial é um reduzido quadrático. Vamos tentar encontrar alguns resultados sobre os números A, B e C do irracional quadrático quando é reduzido quadrático. Seja $x = \frac{A+\sqrt{B}}{C}$ um irracional quadrático e x' o conjugado de x, e considere a equação quadrática de repetição inicial:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b \text{ e } c \text{ inteiros.}$$

tem como raízes:

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e

$$x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Os números $-b$, $b^2 - 4ac$ e $2a$ são todos inteiros e x tem a mesma forma do número:

$$\frac{A\pm\sqrt{B}}{C}$$

onde;

$$A = -b$$

$$B = b^2 - 4ac$$

$$C = 2a$$

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{Se } x' < 0 \text{ então } x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{A-\sqrt{B}}{C} < 0$$

o que implica

$$A < \sqrt{B}$$

$$\text{Se } x > 1 \text{ então } x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{A+\sqrt{B}}{C} > 1$$

O que implica:

$$A + \sqrt{B} > C.$$

Mas,

$$A < \sqrt{B}$$

Somando $\sqrt{B}$ na desigualdade;

$$A + \sqrt{B} < 2\sqrt{B}$$

Portanto:

$$C < A + \sqrt{B} < 2\sqrt{B}$$

Lembrando que para construir a tabela, precisamos da fórmula:

$$\frac{B-A_n^2}{C_n}$$

O termo c_n tem que dividir $B - A_n^2$, vamos tentar encontrar outras relações entre A, B e C. Se x é um irracional quadrático e $x > 1$ então, $-1 < x' < 0$ e portanto $x + x' > 0$ e $x - x' > 0$.

olhando para $x - x' > 0$:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > 0$$

Como $2 > 0$, então:

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} > 0$$

Comparando com os termos A, B e C, temos:

$$\frac{\sqrt{B}}{C} > 0$$

Concluímos que $\sqrt{B}$ e C são positivos.

olhando para $x + x' > 0$:

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} > 0$$

como $2 > 0$, temos:

$$\frac{-b}{2a} > 0$$

Comparando com os termos A, B e C, temos:

$$\frac{A}{C} > 0$$

Chegamos a conclusão que A, B e C são positivos. Para saber um irracional quadrático é um reduzido quadrático o primeiro critério é observar os sinais de A, B e C.
Vamos observar a expressão :

$$\frac{B-A^2}{C} = \frac{b^2-4ac-(-b)^2}{2a} = \frac{-4ac}{2a} = -2c$$

O resultado $-2c$ é inteiro, pois c é inteiro. Concluímos que $B - A^2$ sempre é divisível por C (quando não é apenas multiplicamos o numerador e o denominador por C).
Chegamos aos seguintes resultados sobre A, B e C do reduzido quadrático $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$:

- A, B e C são inteiros positivos.
- $A < \sqrt{B}$
- $C < 2\sqrt{B}$
- $B - A^2$ é divisível por C

Por exemplo, se $B = 6$:

- A e C são inteiros positivos.
- $A \leq 2 < \sqrt{6}$. Então $A = 1$ ou $A = 2$.
- $C \leq 4 < 2\sqrt{B}$.
  C pode ser $1, 2, 3$ ou 4.
- $6 - A^2$ tem que ser divisível por C.
  Se $A = 1$, C só pode ser 1.
  Se $A = 2$, C pode ser 1 ou 2.

Se um número é um reduzido quadrático, para qualquer valor de B temos um número finito de valores A e C. Vamos olhar para cada $x_n = \frac{A_n+\sqrt{B}}{C_n}$ e investigar se os x_n de um reduzido quadrático também são reduzidos quadráticos. Olhando para:

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

Temos o seguinte resultado:

Lema 4.3. *Sejam x e y, e seus conjugados x' e y',respectivamente. Se $x = a_k + \frac{1}{y}$ então $x' = a_k + \frac{1}{y'}$.*

Demonstração. Sejam

$$x = \frac{A+\sqrt{B}}{C}$$

e

$$x' = \frac{A-\sqrt{B}}{C}$$

$$x = \frac{A+\sqrt{B}}{C} = a_k + \left(\frac{A+\sqrt{B}}{C} - a_k\right) = a_k + \frac{A-a_k \cdot C+\sqrt{B}}{C}$$

$$x = a_k + \frac{1}{\frac{C}{A-a_k \cdot C+\sqrt{B}}} = a_k + \frac{1}{\frac{C}{A-a_k \cdot C+\sqrt{B}}}$$

Racionalizando o denominador;

$$\frac{C}{(A-a_k \cdot C)+\sqrt{B}} \cdot \frac{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}} = \frac{C\big((A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}\big)}{(A-a_k \cdot C)^2-B}$$

Então:

$$x = a_k + \frac{1}{\frac{C\big((A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}\big)}{(A-a_k \cdot C)^2-B}} = a_k + \frac{1}{\frac{\frac{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)^2-B}}{C}}$$

Fazendo $y = \frac{\frac{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)^2-B}}{C}$, temos que $x = a_k + \frac{1}{y}$.
Vamos olhar agora para o conjugado de x:

$$x' = \frac{A-\sqrt{B}}{C} = a_k + \left(\frac{A-\sqrt{B}}{C} - a_k\right) = a_k + \frac{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}{C}$$

$$x' = a_k + \frac{1}{\frac{C}{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}} = a_k + \frac{1}{\frac{C}{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}}$$

Racionalizando o denominador;

$$\frac{C}{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}} \cdot \frac{(A-a_k \cdot C)+\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)+\sqrt{B}} = \frac{C(A-a_k \cdot C)+\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)^2-B}$$

Então:

$$x' = a_k + \frac{1}{\frac{C(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)^2-B}} = a_k + \frac{1}{\frac{\frac{(A-a_k \cdot C)-\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)^2-B}}{C}}$$

O número $\frac{\frac{(A-a_k \cdot C)+\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)^2-B}}{C}$ é o conjugado de y. Temos que $x' = a_k + \frac{1}{y'}$ e $y' = \frac{\frac{(A-a_k \cdot C)+\sqrt{B}}{(A-a_k \cdot C)^2-B}}{C}$.

□

Teorema 4.17. *Seja $x = \frac{A+\sqrt{B}}{C}$ um reduzido quadrático, todos $x_n = \frac{A_n+\sqrt{B}}{C_n}$ também são reduzidos quadráticos, a fração contínua para um reduzido quadrático será uma fração contínua repetida.*

Demonstração. Seja;

$$x = a_1 + \tfrac{1}{x_2}$$

Como x é reduzido, então $x > 1$, x_2 também é maior que 1. Pelo lema 4.3, para x':

$$x' = a_1 + \tfrac{1}{x_2{}'}$$

Então:

$$x_2{}' \cdot x' = a_1 \cdot x_2{}' + 1$$

$$x_2{}' \cdot x' - a_1 \cdot x_2{}' = 1$$

$$x_2{}'(x' - a_1) = 1$$

$$x_2{}' = -\tfrac{1}{a_1 - x'}$$

O lema 4.3 garante que x' sendo conjugado de um reduzido quadrático satisfaz $-1 < x' < 0$, a_1 é inteiro positivo, portanto, $a_1 - x' > 0$. Concluímos que $x_2{}' = -\frac{1}{a_1 - x'}$ é negativo, pois $\frac{1}{a_1 - x'}$ é positivo. Basta mostrar que e $x_2{}' > -1$.
Queremos provar que:

$$x_2{}' = -\tfrac{1}{a_1 - x'} > -1$$

Multiplicando por -1, invertemos a desigualdade:

$$\tfrac{1}{a_1 - x'} < 1$$

Então:

$$a_1 - x' > 1$$

Como $x' > -1$ e a_1 é um inteiro positivo, concluímos que $a_1 - x' > 1$. Com isso mostramos que x_2 também é reduzido quadrático. O mesmo argumento poderia agora ser aplicado a x_2, para mostrar que x_3 também é reduzido, assim fazemos em todos os x_n. Mostramos que cada $x_n = \frac{A_n + \sqrt{B}}{C_n}$ é um reduzido quadrático. Lembrando que o B é o mesmo em cada expressão e, dado um B, existe apenas um número limitado de valores inteiros possíveis para A e para C. Quando expandimos $\frac{A + \sqrt{B}}{C}$, é obrigatório aparecer um par de números A e C que já apareceram, e a partir desse ponto os termos vão repetir.

Agora vamos mostrar que está se repetindo do início. A estratégia é olhar para dois termos que sejam iguais, se é verdade que $a_n = a_m$, será verdade que $a_{n-1} = a_{m-1}$, $a_{n-2} = a_{m-2}$; até chegar no a_1 que será igual a algum termo. se

$$a_n = a_m$$

e

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

Pelo lema, temos:

$$x'_n = a_n + \frac{1}{x'_{n+1}}$$

Queremos mostrar que $x_{n-1} = x_{m-1}$. Sabemos que:

$$x_{m-1} = a_{m-1} + \frac{1}{x_m}$$

e

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$$

Se $x_n = x_m$ então $\frac{1}{x_m} = \frac{1}{x_n}$

$$x'_n = a_n + \frac{1}{x'_{n+1}}$$

$$-\frac{1}{x'_{n+1}} = a_n - x'_n$$

$$-\frac{1}{x'_{n+1}} = a_n + \frac{1}{-\frac{1}{x'_n}}$$

Se todos os x_n são reduzidos, então x'_{n+1} e x'_n estão entre -1 e 0; portanto, $-\frac{1}{x'_{n+1}}$ e $-\frac{1}{x'_n}$ são maiores que 0, e $\frac{1}{-\frac{1}{x'_n}}$ é positivo mas é menor que 1. Segue que a_n é parte inteira de $-\frac{1}{x_{n+1}}$. Nossa hipótese $x_m = x_n$ e $-\frac{1}{x'_m} = -\frac{1}{x'_n}$ e em geral a_n é parte inteira de $-\frac{1}{x'_{n+1}}$, então também a_{n-1} é parte inteira de $-\frac{1}{x'_n}$, também a_{m-1} é parte inteira de $-\frac{1}{x'_n}$, portanto $a_{n-1} = a_{m-1}$. □

Definição 4.7. *Seja a sequência*

$$a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$$

É chamada de simétrica quando

$$a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, a_3 = a_{n-2}, ...$$

Exemplo 4.15. *A sequência*

$$1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1$$

é uma sequência simétrica,pois $a_1 = 1 = a_n,\ a_2 = 2 = a_{n-1},\ a_3 = 3 = a_{n-2},\ a_4 = 4 = a_{n-2}, ...$

Olhando para os termos da tabela de um número da forma $\sqrt{B}$:

Exemplo 4.16.

(a) $\sqrt{43} = [6; 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12, ...]$

(b) $\sqrt{31} = [5; 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, ...]$

Observamos o seguinte padrão:

$$[a_1, a_2, ..., a_n, a_{n-1}, .., a_2, 2a_1, a_2, ..]$$

Nenhum número na forma $\sqrt{B}$ é reduzido quadrático, pois se $\sqrt{B} > 1$, o conjugado $-\sqrt{B} < -1$, portanto não pode ser um reduzido. Por exemplo, $\sqrt{8}$ não é um reduzido quadrático, pois seu conjugado $-\sqrt{8}$ é menor que -1. A parte inteira de $\sqrt{8}$ é 2, e o número $2 + \sqrt{8}$ é um reduzido quadrático, pois $2 + \sqrt{8}$ é maior que 1 e seu conjugado $2 - \sqrt{8}$ está entre -1 e 0. Então, como $2 + \sqrt{8}$ é um reduzido quadrático, a sequência se repete do inicio.

Seja $\sqrt{B}$, tal que seu conjugado é menor que -1:

$$\sqrt{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Como a_1 é a parte inteira de $\sqrt{B}$, o número $a_1 + \sqrt{B}$ é um reduzido quadrático:

$$a_1 + \sqrt{B} = a_1 + a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Portanto, temos a primeira equação:

$$a_1 + \sqrt{B} = 2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

O conjugado $a_1 + \sqrt{B}$ é $a_1 - \sqrt{B}$. Temos $-\frac{1}{a_1 - \sqrt{B}} = \frac{1}{\sqrt{B} - a_1}$ (do lema 4.3). Agora os termos reversos de $\sqrt{B} + a_1$:

$$\frac{1}{\sqrt{B} - a_1} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{2a_1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

$$a_1 + \sqrt{B} = 2a_1 + (\sqrt{B} - a_1)$$

Temos uma segunda equação:

$$a_1 + \sqrt{B} = 2a_1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{B}-a_1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{B}-a_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Da primeira equação:

$$\frac{1}{\sqrt{B}-a_1} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{2a_1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Igualando:

$$\frac{1}{\sqrt{B}-a_1} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{2a_1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Agora, como essas duas últimas frações contínuas representam o mesmo número, significa que seus termos correspondentes são iguais. A sequência repetitiva de termos é a mesma quando invertida; portanto, é uma sequência simétrica e temos:

$$a_n = a_2, \quad a_{n+1} = a_3, ...$$

A sequência repetida de termos da fração contínua de qualquer número da forma $\sqrt{B}$ é simétrica, mas em vez de o primeiro termo ser duas vezes a parte inteira de $\sqrt{B}$, é exatamente a parte inteira de $\sqrt{B}$.

Teorema 4.18 (Lagrange)**.** *Qualquer número irracional quadrático tem expansão da fração contínua periódica a partir de algum ponto*

Demonstração. A estratégia é mostrar que em alguma etapa aparece um reduzido quadrático. Seja a expansão:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}}$$

Sabemos que:

$$x = \frac{x_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}$$

Onde x e x_{n+1} são irracionais quadráticos, lembrando que $x_{n+1} > 1$. Basta mostrar que o conjugado x'_{n+1} está entre -1 e 0.

$$x' = \frac{x'_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{x'_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}$$

ou

$$x'_{n+1} = \frac{x' q_{n-1} - p_{n-1}}{x' q_n - p_n}$$

Fatorando:

$$x'_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} \left(\frac{x' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{x' - \frac{p_n}{q_n}} \right)$$

Portanto:

$$x'_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} \left(\frac{x' - c_{n-1}}{x' - c_n} \right)$$

Quando o n cresce, c_{n-1} e c_n se aproximam de x, então:

$$\frac{x' - c_{n-1}}{x' - c_n} \text{ se aproxima de } \frac{x' - x}{x' - x} = 1$$

Os números q_n e q_{n-1} são positivos, mas $q_{n-1} < q_n$ então, $\frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$. Portanto $-1 < x'_{n+1} < 0$, o que prova que x_{n+1} é um reduzido. Como x'_{n+1} é um reduzido, o número x será uma fração contínua periódica a partir deste ponto conforme o teorema 4.17. $\square$

Capítulo 5

Aplicações da fração contínua infinita

5.1 Equação de Pell

Definição 5.1. *Seja B inteiro e positivo,a equação da forma $x^2 - By^2 = 1$ é chamada de equação de pell.*

Observação. Quando B é um quadrado perfeito, não é muito interessante, pois de um modo geral a diferença de dois quadrados perfeitos não é igual a 1, somente em casos especiais, por exemplo $(\pm 1)^2 - (0)^2$.
Resolver a equação de Pell é encontrar valores inteiros para x e y. A equação de Pell tem relação direta com a fração contínua do irracional $\sqrt{B}$.

$$\sqrt{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{2a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

$$\sqrt{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Temos;

$$\sqrt{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \sqrt{B}}}}}$$

$$\sqrt{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

Vamos considerar $x_{n+1} = a_1 + \sqrt{B}$, usando a fórmula da $(n+1)$-ésima convergente:

$$c_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \sqrt{B} = \frac{x_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}$$

Mas $x_{n+1} = a_1 + \sqrt{B}$;

$$\sqrt{B} = \frac{(a_1+\sqrt{B}) \cdot p_n + p_{n-1}}{(a_1+\sqrt{B}) \cdot q_n + q_{n-1}}$$

$$(\sqrt{B})[(a_1 + \sqrt{B}) \cdot q_n + q_{n-1}] = (a_1 + \sqrt{B}) \cdot p_n + p_{n-1}$$

Então:

$$\boxed{q_n B + (a_1 q_n + q_{n-1})\sqrt{B} = a_1 p_n + p_{n-1} + p_n\sqrt{B}}$$

Igualando:

$$q_n B = a_1 p_n + p_{n-1} \text{ ou } p_{n-1} = q_n B - a_1 p_n$$

$$(a_1 q_n + q_{n-1}) = p_n \text{ ou } q_{n-1} = p_n - a_1 q_n$$

A relação entre a equação de Pell e frações contínuas surge como consequência do teorema 2.6:

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$$

Substituindo:

$$p_n \cdot (p_n - a_1 q_n) - (q_n B - a_1 p_n) \cdot q_n = (-1)^n$$

Portanto:

$${p_n}^2 - B{q_n}^2 = (-1)^n$$

Vemos que p_n e q_n são soluções para a equação $x^2 - By^2 = (-1)^n$. Então, se queremos números inteiros que satisfaçam uma equação do tipo $x^2 - By^2 = (-1)^n$, encontramos os termos para a fração contínua de $\sqrt{B}$. Se n é o número de termos(a_i) antes que o termo $2a_1$ apareça, então $x = p_n$ e $y = q_n$, que são o numerador e o denominador respectivamente da n-ésima convergente, são soluções para a equação.Se n é par, $x = p_n$ e $y = q_n$ são soluções para $x^2 - By^2 = (-1)^n$. Se n for ímpar, as soluções para $x^2 - By^2 = (-1)^n$ são $x = p_{2n}$ e $y = q_{2n}$, onde $2n$ é um número par.

Exemplo 5.1. *Encontrar as soluções de* $x^2 - 7y^2 = 1$

Temos que $B = 7$, vamos olhar para os termos de $\sqrt{7}$, lembrando que $\sqrt{7}$ é um irracional quadrático puro, vamos observar a tabela de termos:

n	1	2	3	4	5	6
A_n	0	2	1	1	2	2
C_n	1	3	2	3	1	3
a_n	2	1	1	1	4	1

Usaremos $n = 4$, pois o termo quando $n = 5$ é $2a_1 = 4$. Temos que achar a quarta convergente, para isso, Vamos usar agora tabela de convergentes:

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			2	1	1	1
p_n	0	1	2	3	5	8
q_n	1	0	1	1	2	3

Temos que:

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{8}{3}$$

Então $x = 8$ e $y = 3$, vamos conferir:

$$x^2 - 7y^2 = 8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$$

Exemplo 5.2. *Encontrar as soluções de* $x^2 - 29y^2 = 1$

Temos que $B = 29$, vamos olhar para os termos de $\sqrt{29}$, lembrando que $\sqrt{29}$ é um irracional quadrático puro, vamos observar a tabela de termos:

n	1	2	3	4	5	6
A_n	0	5	3	2	3	5
C_n	1	4	5	5	4	1
a_n	5	2	1	1	2	10

Usaremos $n = 5$, pois o termo quando $n = 6$ é $2a_1 = 10$. Temos que achar a quinta convergente, para isso, Vamos usar agora tabela de convergentes:

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			5	2	1	1	2
p_n	0	1	5	11	16	27	70
q_n	1	0	1	2	3	5	13

Temos que:

$$c_5 = \tfrac{p_5}{q_5} = \tfrac{70}{13}$$

Então $x = 70$ e $y = 13$, vamos conferir:

$$x^2 - 29y^2 = 70^2 - 29 \cdot 13^2 = -1$$

Encontramos $x = 70$ e $y = 13$. Não são soluções da equação de Pell, pois n é impar. Vamos fazer as duas tabelas juntas a tabela de termos e a tabela de convergentes:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n			0	5	3	2	3	5	5	3	2	3
C_n			1	4	5	5	4	1	4	5	5	4
a_n			5	2	1	1	2	10	2	1	1	2
p_n	0	1	5	11	16	27	70	727	1524	2251	3775	9801
q_n	1	0	1	2	3	5	13	135	283	418	701	1820

Como $n = 5$, então $2n = 10$. As soluções são $x = 9801$ e $y = 1820$. Lembrando que quando n é impar as soluções são $x = p_{2n}$ e $y = q_{2n}$. Vamos conferir:

$$x^2 - 29y^2 = 9801^2 - 29 \cdot 1820^2 = 1$$

Se n é par, ou ímpar, sabemos que $2n$ é par. Agora que $x = p_{2n}$ e $y = q_{2n}$ são soluções para a equação $x^2 + By^2 = 1$, temos aqui um método para obter mais soluções para qualquer equação do tipo $x^2 + By^2 = 1$. Se n for par, então $x = p_n$ e $y = q_n$ satisfazem a equação. Outro par de números inteiros que satisfazem a mesma equação é p_{2n} e q_{2n}. Em geral, as soluções são $x = p_{kn}$ e $y = q_{kn}$ para qualquer número inteiro positivo k. Se n for ímpar, será necessário usar $x = p_{2n}$ e $y = q_{2n}$ para o primeiro par de soluções e $x = p_{4n}$ e

$y = q_{4n}$ para o segundo par de soluções. Em geral, se n é ímpar, temos o par de soluções $x = p_{kn}$ e $y = q_{kn}$, com k um número *par* positivo.

Mostramos que p_n e q_n são soluções inteiras da equação $x^2 - By^2 = 1$ quando n é o número do termo que precede o termo $2a_1$ na fração contínua de B. Também mostramos que p_{2n} e q_{2n} não são soluções. Agora, se n é muito grande, por exemplo 6, o processo de obter as convergentes $c_7, c_{12}, ..$ envolve muitos cálculos aritméticos com números provavelmente muito grandes. Seria conveniente descobrir fórmulas que nos permitam encontrar p_{2n} e q_{2n} em termos de p_n e q_n diretamente.

Vamos começar a procurar essas fórmulas examinando o caso em que $n = 2$. Suponha que $p_2 = x$ e $q_2 = y$ formam o primeiro par de soluções para a equação de Pell. Vamos usar $p_2 = x$ e $q_2 = y$ para calcular p_4 e q_4 por meio de uma tabela convergente. Se p_2 e q_2 são soluções, p_4 e q_4 também são. Depois de encontrar uma expressão para p_4 e q_4, tentaremos expressar p_4 e q_4 em termos de x, y e B.

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			a_1	a_2	$2a_1$	a_2
p_n	0	1	a_1	$a_2{\cdot}a_1 + 1 = x$	$2a_1{\cdot}x + a_1$	$2a_1{\cdot}a_2 \cdot x + a_1 \cdot a_2 + x$
q_n	1	0	1	$a_2 = y$	$2a_1{\cdot}y + 1$	$2a_1{\cdot}a_2 \cdot y + a_2 + y$

Vamos olhar para q_4:

$$q_4 = 2a_1 \cdot a_2 \cdot y + a_2 + y =$$

$$= a_1 \cdot a_2 \cdot y + a_1 \cdot a_2 \cdot y + a_2 + y$$

Mas $a_2 = y$, portanto:

$$q_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot y + y(a_1 \cdot a_2 + 1)$$

$$q_4 = y(a_1 \cdot a_2 + 1) + y(a_1 \cdot a_2 + 1)$$

Mas $a_1 \cdot a_2 + 1 = x$, então:

$$q_4 = y \cdot x + y \cdot x$$

$$q_4 = 2y \cdot x$$

Vamos olhar para p_4;

$$p_4 = 2a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \cdot a_2 + x =$$

$$p_4 = a_1 \cdot a_2 \cdot x + x + a_1 \cdot a_2 + a_1 =$$

$$p_4 = x(a_1 \cdot a_2 + 1) + a_2(a_1 \cdot x + a_1)$$

Mas $a_1 \cdot a_2 + 1 = x$ e $a_2 = y$, então:

$$p_4 = x \cdot x + y \cdot (a_1 \cdot x + a_1)$$

Vamos multiplicar por $\frac{y}{y}$;

$$p_4 = x \cdot x \cdot (\tfrac{y}{y}) + y \cdot (a_1 \cdot x + a_1) \cdot (\tfrac{y}{y})$$

$$p_4 = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot x + a_1)}{y})$$

Observe agora que qualquer solução para $x^2 - By^2 = 1$ é determinada por B; portanto, B deve aparecer em algum lugar de suas expressões para p_4 e q_4. É possível que $\frac{(a_1 \cdot x + a_1)}{y}$ seja igual a B? Resolvendo $x^2 - By^2 = 1$:

$$x^2 - By^2 = 1$$

$$By^2 = x^2 - 1$$

$$B = \tfrac{x^2 - 1}{y^2}$$

Voltando para p_4

$$p_4 = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot x + a_1)}{y})$$

Vamos multiplicar por $\frac{y}{y}$;

$$p_4 \cdot \tfrac{y}{y} = x^2 \cdot \tfrac{y}{y} + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot x + a_1)}{y}) \cdot (\tfrac{y}{y})$$

$$p_4 \cdot 1 = x^2 \cdot 1 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot x + a_1)}{y}) \cdot (\tfrac{y}{y})$$

$$p_4 = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot y \cdot x + a_1 \cdot y)}{y^2})$$

Mas $y = a_2$, então:

$$p_4 = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \cdot a_2)}{y^2})$$

Vamos fazer um artifício na última parcela do numerador:

$$p_4 = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \cdot a_2 + 0)}{y^2}) = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot a_2 \cdot x + a_1 \cdot a_2 + 1 - 1)}{y^2})$$

Mas $x = a_1 \cdot a_2 + 1$, então:

$$p_4 = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{(a_1 \cdot a_2 \cdot x + x - 1)}{y^2}) =$$

$$= x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{x(a_1 \cdot a_2 + 1) - 1)}{y^2})$$

Substituindo $x = a_1 \cdot a_2 + 1$, então:

$$p_4 = x^2 + y^2 \cdot (\tfrac{x^2 - 1}{y^2})$$

Chamando $B = \frac{x^2-1}{y^2}$, temos:

$$p_4 = x^2 + By^2$$

Concluímos que se $x = p_2$ e $y = q_2$ são soluções para $x^2 - By^2 = 1$, as soluções $x = p_4$ e $y = q_4$ são dadas pelas fórmulas:

$$p_4 = x^2 + By^2 \text{ e } q_4 = 2p_2 \cdot q_2$$

Temos o teorema abaixo:

Teorema 5.1. *se x_1 e y_1 são soluções da equação $x^2 - By^2 = 1$, então*

$$x_2 = x_1^2 + By_1^2 \text{ e } y_2 = 2x_1 \cdot y_1$$

Também são soluções.

Demonstração. Sejam x_1 e y_2 soluções da equação, então $x_1^2 - By_1^2 = 1$. Queremos mostrar que o par $x_2 = x_1^2 + By_1^2$ e $y_2 = 2x_1 \cdot y_1$ também é solução da equação, então:

$${x_2}^2 - B{y_2}^2 = (x_1^2 + By_1^2)^2 - B(2x_1 \cdot y_1) =$$

$$= {x_1}^4 + 2x_1^2 y_1^2 + y_1^4 B^2 - 4Bx_1^2 y_1^2 =$$

$$= {x_1}^4 - 2x_1^2 y_1^2 + y_1^4 B^2 = (x_1^2 - y_1^2 B)^2 = 1$$

Portanto, $x_2^2 - By_2^2 = 1$ mostrando que o par (x_2, y_2) Também é solução. $\square$

Do resultado, temos:

$${x_2}^2 - B{y_2}^2 = (x_1^2 - By_1^2)^2 = (x_1 + \sqrt{B}y_1)^2(x_1 - \sqrt{B}y_1)^2$$

Exemplo 5.3. *Encontre um segundo par de soluções para equação* $x^2 - 6y^2 = 1$*,com* $x_1 = 5$ *e* $y_1 = 2$

Temos:

$$x_2 = 5^2 + 6 \cdot 2^2 = 49 \text{ e } y_2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$$

Verificando:

$$(49)^2 - 6(20)^2 = 1$$

Vamos mostrar um teorema mais geral;

Teorema 5.2. *se o par* (x_1, y_1) *é a menor solução positiva de* $x^2 - by^2 = 1$*, então todas as outras soluções positivas* (x_n, y_n)*, podem ser obtidas da equação:*

$$x_n + \sqrt{B}y_n = (x_1 + \sqrt{B}y_1)^n$$

Demonstração. $x_n + \sqrt{B}y_n = \underbrace{(x_1 + \sqrt{B}y_1) \cdot (x_1 + \sqrt{B}y_1) ... \cdot (x_1 + \sqrt{B}y_1)}_{nfatores}$

O conjugado do produto é o produto dos conjugados. Temos:

$$x_n - \sqrt{B}y_n = \underbrace{(x_1 - \sqrt{B}y_1) \cdot (x_1 - \sqrt{B}y_1) ... \cdot (x_1 - \sqrt{B}y_1)}_{nfatores}$$

Se x_1 e y_1 são as menores soluções inteiras positivas, então:

$$x_n^2 - By_n^2 = (x_n + \sqrt{B}y_n)(x_n - \sqrt{B}y_n) =$$

$$(\underbrace{(x_1 - \sqrt{B}y_1) \cdot ... \cdot (x_1 - \sqrt{B}y_1)}_{nfatores})(\underbrace{(x_1 - \sqrt{B}y_1) \cdot ... \cdot (x_1 - \sqrt{B}y_1)}_{nfatores}) =$$

$$= (x_1 + \sqrt{B}y_1)^n \cdot (x_1 + \sqrt{B}y_1)^n =$$

$$= (x_1^2 - By_1^2)^n = 1$$

Ou seja, provamos que se (x_1, y_1) é solução, para encontrar as outras, a partir dos termos x_1 e y_1, basta usar $x_n + \sqrt{B}y_n = (x_1 + \sqrt{B}y_1)^n$. □

5.2 Proporção (ou razão) áurea e retângulo de ouro

A partir de um problema de reprodução de coelhos, Fibonacci descobriu uma sequência muito interessante e com muitas aplicações na natureza. A sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

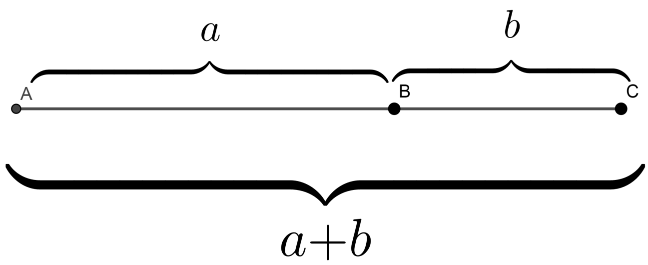
A sequência é interessante, pois um termo é a soma dos dois anteriores:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

E cada termo tem a forma:

$$F_n = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Quando fazemos $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ com n grande, fica mais próximo do número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ para $n > 2$ são proporções áureas.
Dois números estão em razão áurea se sua razão é igual à razão da sua soma pela maior das quantidades. Dados $a > 0$ e $b > 0$, então:



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Olhando para tabela de convergentes do número de ouro:

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
a_n			1	1	1	1	1	1	$\cdots$
p_n	0	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$
q_n	1	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$

A linha dos p_n é a sequência de Fibonacci, para $n \geq 0$.

A linha dos q_n também é a sequência de Fibonacci, para $n \geq 1$.

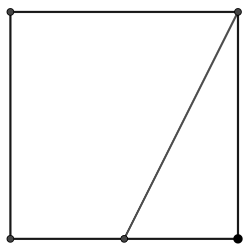
A partir de $n > 2$, temos como convergentes as seguintes frações:

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$$

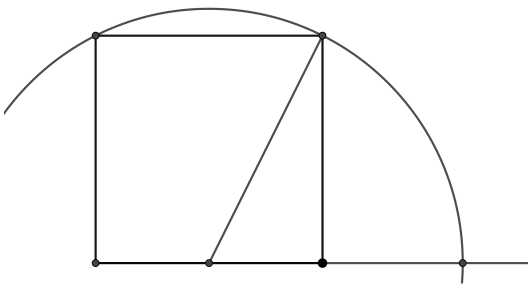
Ou seja, a partir de $n > 2$ todas as frações $\frac{p_n}{q_n}$ são proporções áureas.

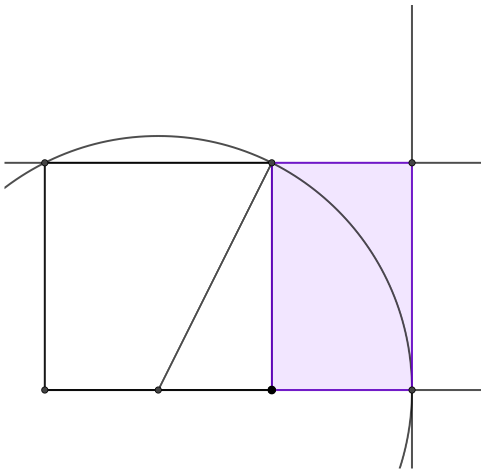
O retângulo de ouro obedece a proporção áurea. Escolhendo uma convergente, o lado menor de um retângulo de ouro é o denominador da convergente escolhida e o lado maior o numerador da convergente. A partir de um quadrado vamos construir o retângulo de ouro e depois o esboço da espiral de Fibonacci

Dado um quadrado de lado q_n (um denominador de uma uma convergente do número de ouro), consideramos um segmento que liga o ponto da metade de um dos lados a um vértice, como na figura abaixo:

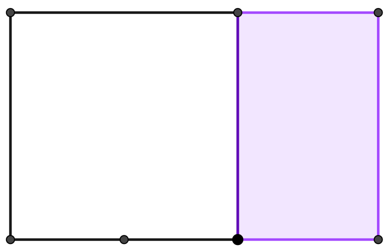


Utilizamos o compasso para construir o retângulo. Com centro no ponto da metade do lado e abertura até um vértice do lado oposto (comprimento do segmento) marcamos um vértice do retângulo. Como na figura abaixo:

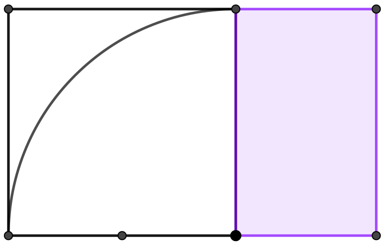




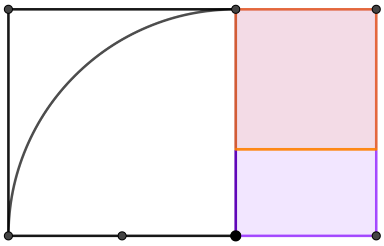
Temos o retângulo de ouro;



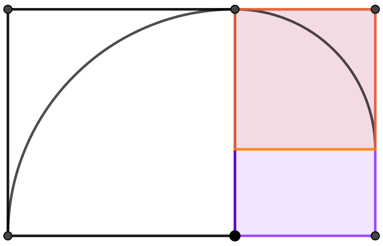
Vamos construir a espiral de Fibonacci. Com o centro no vértice do mesmo lado que marcamos o ponto médio (ver figura abaixo), e raio do tamanho do lado do quadrado fazemos um arco que é $\frac{1}{4}$ da volta:



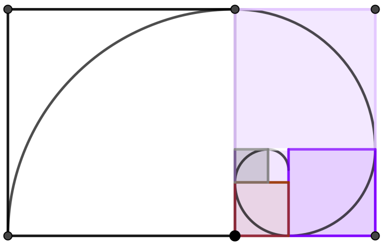
O retângulo roxo também é um retângulo de ouro. Vamos construir um quadrado com o lado menor do retângulo roxo como na figura:



Vamos fazer outro arco circular, conforme a figura abaixo:



Continuando com o mesmo procedimento, concluímos o esboço da espiral de Fibonacci:



5.3 Sequências com um padrão

Vimos que os números da forma $\frac{A\pm\sqrt{B}}{C}$ (chamados irracionais quadráticos), sua sequência de termos é sempre periódica. Os números que não são irracionais quadráticos, a sequência não é periódica; o número e não é um irracional quadrático, portanto sua sequência não é periódica mas sua sequência possui um padrão:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ...]$$

Temos $a_1 = 2$, $a_{3n} = 2n$ e $a_k = 1$ com $k \neq 3n$, para todo n.

Já o número π parece não ter uma sequência padrão;

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, ...]$$

Na fração contínua *simples* a sequência do número π não tem um padrão, mas se a fração continua não for simples, temos outras formas de escrever o número π com uma sequência com um padrão:

São casos especiais da função arco tangente com $\pi = 4\text{arctg}(1)$:

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{\ddots}}}}}} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{\ddots}}}}}$$

Outras formas de escrever o π:

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{9^2}{\ddots}}}}} = 2 + \cfrac{2}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{2}+\cfrac{1}{\frac{1}{3}+\cfrac{1}{\ddots}}}} = 2 + \cfrac{2}{1+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{\ddots}}}}$$

$$\pi = 2 + \cfrac{4}{3+\cfrac{1\cdot 3}{4+\cfrac{3\cdot 5}{4+\cfrac{5\cdot 7}{\ddots}}}} = 3 + \cfrac{1^3}{6+\cfrac{1^3+2^3}{6+\cfrac{1^3+2^3+3^3+4^3}{6+\cfrac{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3}{6+\cfrac{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3}{\ddots}}}}}$$

5.3.1 Distribuição de Gauss-Kuzmim

Na expansão do número π em fração contínua simples a sequência é infinita e não aparenta ter um padrão. O matemático Gauss conseguiu uma maneira de calcular a probabilidade de um número aparecer na sequência de termos do número π. Uma sequência infinita de números define um único número, para quase todo número real, a probabilidade de um número inteiro a_n aparecer na lista é:

$$P(a_n) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{a_n(a_n+2)}\right)$$

A distribuição acima é chamada de distribuição de Gauss-Kuzmin. Temos as seguintes probabilidades:

$$P(1) \cong 0,41,\ P(2) \cong 0,17,\ P(3) \cong 0,09,\ P(4) \cong 0,06 \text{ e } P(5) \cong 0,04$$

Quando a_n cresce, as probabilidades vão diminuindo, e a sequência $P(a_n)$ se aproxima de $\frac{1}{(a_n)^2}$, portanto se escolhermos $a_j = 292$, que aparece na sequência do π, o inverso do quadrado de 292:

$$P(292) \cong 0,00001$$

5.4 Constante de Khinchin

Outro resultado interessante envolve média geométrica. A média geométrica (simples) dos n números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ é o número real G tal que

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = G \cdot G \cdot G \cdot \ldots \cdot G = G^n.$$

Então

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

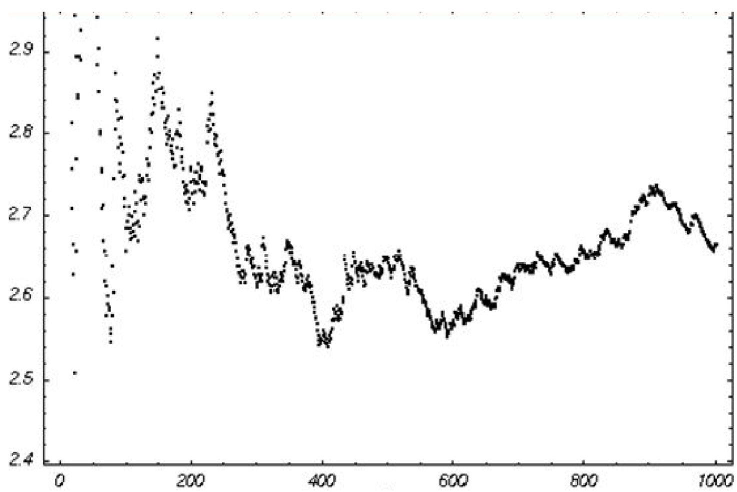
ou

$$G = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Quando n cresce, a média geométrica finita dos termos (para quase todo real) se aproxima de um número (não se sabe se é irracional) chamado constante de Khinchin (ou Khintchine):

$$G = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} \to 2,68545..$$

Média geométrica dos termos da fração contínua de π:



Observação. A constante de Khinchin pode ser obtida pelo produto infinito que converge lentamente:

$$K = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{a_k(a_k + 2)}\right)^{\frac{\ln a_k}{\ln 2}}$$

Quando n cresce, a média geométrica do número e cresce indefinidamente. O número e é uma exceção da teoria (os racionais e irracionais algébricos também são exceção), por isso a expressão "para quase todo real". Podemos usar uma boa aproximação para e, como a de Stirling, para mostrar isso com n cresce indefinidamente.

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ...]$$

$$(2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot ... \cdot ...a_n)^{\frac{1}{n}} \to \left(\frac{2n}{3e}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,62595n^{\frac{1}{3}}$$

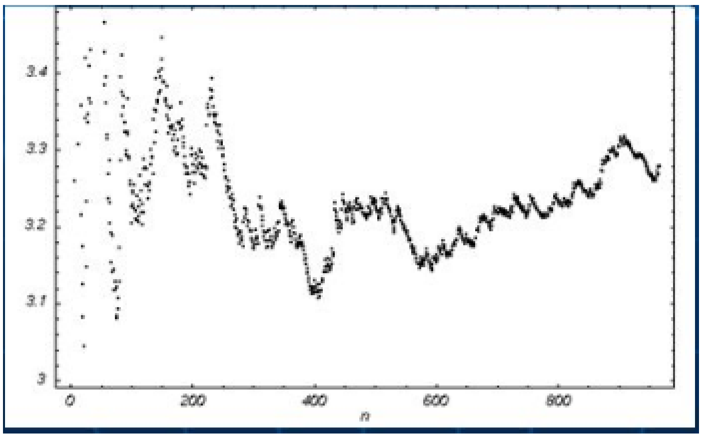
.

5.5 Constante de Lévy

Outra constante interessante relacionada a fração contínua é a constante de Lévy. A constante de Lévy tem relação direta com os denominadores das convergentes. Para quase todo real, quando n cresce a raiz n-ésima do n-ésimo denominador se aproxima da constante de Lévy:

$$q_n{}^{\frac{1}{n}} \to L = 3,275...$$

Constante de Lévy para os denominadores das convergentes de π:



Observação. A constante de Lévy pode ser obtida pela fórmula:

$$L = e^{\frac{\pi^2}{12 \ln 2}} = 3,2758229...$$

5.6 Alguns fatos históricos

1. Bombelli,1572.

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{\ddots}}}$$

2. Cataldi,1613.

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{\ddots}}}$$

3. Lord Brouncker,1658.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{\ddots}}}$$

A fração contínua acima tem uma conexão com o produto infinito de Wallis,1655.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9} \cdots$$

4. Euler,1737.Descobriu alguns resultados para e:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 11, 6, 1, 1, 8, ...]$$

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ddots}}}}$$

5. D'Lambert,1766.

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{\frac{2}{x} + \cfrac{1}{\frac{6}{x} + \cfrac{1}{\frac{10}{x} + \cfrac{1}{\frac{14}{x} + \ddots}}}}$$

$$tgx = \cfrac{1}{\frac{1}{x} - \cfrac{1}{\frac{3}{x} - \cfrac{1}{\frac{5}{x} - \cfrac{1}{\frac{7}{x} - \ddots}}}}$$

6. D'Lambert em 1766, também conseguiu representar o π em frações contínuas:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

7. Stern,1883.

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2\cdot 3}{1 - \cfrac{1\cdot 2}{3 - \cfrac{4\cdot 5}{1 - \cfrac{3\cdot 4}{\ddots}}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2\cdot 3}{1 - \cfrac{1\cdot 2}{3 - \cfrac{4\cdot 5}{1 - \cfrac{3\cdot 4}{\ddots}}}}}$$

8.

$$sen(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2\cdot 3 - x^2) + \cfrac{2\cdot 3x^2}{(4\cdot 5 - x^2) + \cfrac{4\cdot 5x^2}{\ddots}}}}$$

9. D'Lambert,1770

$$tgx = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}$$

10. Gauss,1812.

$$tghx = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{\ddots}}}}$$

11. D'Lambert,1770; Lagrange,1776.

$$arctgx = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1\cdot x^2}{3 + \cfrac{2^2\cdot x^2}{5 + \cfrac{3^2\cdot x^2}{\ddots}}}}$$

12. Lagrange,1813.

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \cfrac{2x}{1 - \cfrac{1\cdot x^2}{3 - \cfrac{2^2\cdot x^2}{5 - \cfrac{3^2\cdot x^2}{\ddots}}}}$$

Com $|x| < 1$.

13. Lagrange,1776.

$$(1+x)^k = \cfrac{1}{1 - \cfrac{kx}{1 + \cfrac{\frac{1(1+k)x}{1\cdot 2}}{1 + \cfrac{\frac{2(2+k)x}{3\cdot 4}}{\ddots}}}}$$

Com $|x| < 1$.

14. Laplace,1805;Legendre,1826.

$$\int_0^x e^{-t2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{\frac{e^{-x^2}}{2}}{x + \cfrac{1}{2x + \cfrac{2}{x + \cfrac{3}{\ddots}}}}$$

$x > 0$

Referências Bibliográficas

[1] **Continued Fractions.** In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia 2020. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction. Acesso em: 01 jan. 2020

[2] LIMA, E. L.; **Curso de Análise - Volume 1.** 11 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2004.

[3] LIMA, E. L.; **Matemática do ensino médio- Volume 1.** 11 ed. Rio de Janeiro: SBM - IMPA, 2004.

[4] LIMA, E. L.; **Matemática do ensino médio- Volume 2.** 11 ed. Rio de Janeiro: SBM - IMPA, 2004.

[5] MOORE, C. G.; **An Introduction to Continued Fractions.** Washington, D.C.: National Council Teachers of Mathematics, 1964.

[6] MOREIRA, C. G. T. A. **Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas.** Disponível em: https://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.06.pdf. Acesso em: 02 fev 2020

[7] MOREIRA, C. G. T. A. **Teoria dos Números (Frações Contínuas) - Nível 3.** Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0utc8PgixFo&t=1486s. Acesso em: 11 dez. 2019

[8] MOREIRA, C. G. T. A. **Teoria dos Números (Frações Contínuas - Parte 2) - Nível 3.** Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=96PMF7bThSo&t=2739s. Acesso em: 11 dez. 2019

[9] OLDS, C. D.; **Continued Fractions.** California: Random House and The L. W. Singer Company, 1963.