SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Walmor Pereira da Silva

Uma Abordagem dos Conteúdos de Matemática Aplicados à Física na 1ª Série do Ensino Médio

PORTO VELHO
2020

Walmor Pereira da Silva

Uma Abordagem dos Conteúdos de Matemática Aplicados à Física na 1ª Série do Ensino Médio

Trabalho de Conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Jackson Itikawa

PORTO VELHO
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Fundação Universidade Federal de Rondônia

Gerada automaticamente mediante informações fornecidas pelo(a) autor(a)

S586a Silva, Walmor Pereira.

Uma abordagem dos conteúdos de matemática aplicados à física na 1ª série do ensino médio / Walmor Pereira Silva. -- Porto Velho, RO, 2020.

92 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Jackson Itikawa

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia

1.Interdisciplinaridade. 2.Função afim . 3.Função quadrática. 4.Vetores. I. Itikawa, Jackson. II. Título.

CDU 512.64:53

Bibliotecário(a) Luã Silva Mendonça

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE DISSERTAÇÃO

ATA Nº 055

ATA DA QUINQUAGÉSSIMA QUINTA SESSÃO DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DO MESTRADO. POLO UNIR/RO.

MESTRANDO: **Walmor Pereira da Silva**

INÍCIO DO CURSO: **março/2018**

Aos onze dias do mês de novembro de 2020, às quatorze horas, por videoconferência no Google Meet, foi realizada a sessão de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do mestrando **WALMOR PEREIRA DA SILVA**, como requisito obrigatório estabelecido nos termos dos artigos 37, 41, 42 do Regimento Interno do PROFMAT/UNIR. A Comissão Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa, foi composta pelos membros: Prof. Dr. Jackson Itikawa (Orientador), Prof. Dr. Tomás Daniel Menendez Rodriguez (membro interno) e Profª. Drª. Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias (membro externo ao Programa), sob a presidência do primeiro, julgou o trabalho intitulado " **Uma Abordagem dos Conteúdos de Matemática Aplicados à Física na 1ª Série do Ensino Médio** ". Após a defesa apresentada pelo mestrando e arguições pela Comissão, o trabalho foi considerado "APROVADO" e, em razão das recomendações dos membros da Comissão, o Senhor Presidente se comprometeu a orientar a sequência do processo da elaboração da versão final com a inclusão das recomendações realizadas. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e, para constar, foi lavrada a presente ATA, que vai assinada digitalmente pelos membros da Comissão Examinadora e o Mestrando.

Documento assinado eletronicamente por **JACKSON ITIKAWA**, **Presidente de Comissão**, em 16/11/2020, às 10:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **TOMAS DANIEL MENENDEZ RODRIGUEZ**, **Membro de Comissão**, em 16/11/2020, às 10:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **LUCIA DE FATIMA DE MEDEIROS BRANDAO**, **Membro de Comissão**, em 16/11/2020, às 12:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Walmor Pereira da Silva**, **Usuário Externo**, em 19/11/2020, às 10:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.unir.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0535101** e o código CRC **4B2F109A**.

Referência: Processo nº 23118.001092/2020-85 SEI nº 0535101

Dedicatória

A Deus que tudo sabe e tudo vê. A minha família que sempre foi meu pilar de apoio, aos meus mestres que em todos os momentos foram meus referenciais e exemplo a seguir. Aos meus queridos amigos de turma que foram os companheiros de jornada.

Agradecimentos

A Deus que me concedeu essa imensa oportunidade de poder me formar e transformar em tudo o que sou.

A minha mãe Carmem que nunca me negou uma doce palavra de apoio e firmeza, ao meu Pai Salomão (in memoriam), que mesmo ausente materialmente, sempre presente espiritualmente soube me apoiar.

A minha esposa Jô que em todo esse período soube com muita firmeza e dedicação compreender minhas ausências em momento de difícil fase de nossas vidas.

Aos meus filhos Bruno Salomão, Roberta Eveline, Paulo Davi, João Ricardo e Pedro Henrique, que souberam compreender sempre que minha ausência foi com a melhor das intenções a fim de melhorar essa minha pessoa humana.

Aos meus amigos de turma Adão, Ana Beatriz, Ângela, Aprígio, Carlos José, Edleuza, Erisvaldo, Gleice, Ivan, Josirene que comigo passaram momentos importantes e crucias de nossas vidas, muitos saindo dos municípios de origem assim como eu, deixando o conforto de nossos lares para conseguirmos essa maravilhosa transformação acadêmica. Passando muitos perrengues, mas enfim conseguimos. Momentos felizes vivi com vocês.

Aos nossos queridos Mestres que não mediram esforços e dedicação para nossa formação acadêmica. Foram incansáveis em nossa aprendizagem.

Quero agradecer em especial ao professor Jackson Itikawa meu orientador, sem a ajuda do qual muita coisa não teria acontecido.

Aos meus alunos que souberam compreender minhas aflições durante o período do mestrado, muitas vezes minhas ausências por motivo dos deslocamentos.

Ao meu diretor de Campus de Guajará-Mirim professor George Queiroga e ao meu chefe de Departamento Professor Otávio Valiante que sempre me motivaram e me deram apoio na conclusão do mestrado.

Por fim, quero agradecer a todos que colaboram para o engrandecimento e conclusão deste trabalho.

RESUMO

Em meus trinta e nove anos de magistério, tive a oportunidade de lecionar em todos os níveis de ensino, desde as séries iniciais do fundamental ao ensino médio, até o ensino superior. Nessa experiência tive o prazer de lecionar física no ensino médio, e com isso percebi a necessidade de estabelecer a interdisciplinaridade com a matemática, algo que se torna espontâneo devido a relação intrínseca entre as duas disciplinas. Iniciaremos no primeiro capítulo com interdisciplinaridade. A cinemática tem suas equações formuladas através das funções afim e quadrática. No estudo da Dinâmica, serão discutidas operações com vetores, funções afim e quadrática, dentre outros. Os vetores serão abordados em diversos tópicos, como no estudo da força, aceleração, velocidade vetorial.

Palavras-Chave: Interdisciplinaridade. Função afim. Função quadrática. Vetores.

ABSTRACT

In my thirty-nine years of teaching, I have had the opportunity to teach at all levels of education, from the initial grades of elementary and high school, to higher education. During all this time, I had the joy of teaching physics in high school, and from this experience I realized the need to establish interdisciplinarity between physics and mathematics, something that becomes spontaneous due to the intrinsic relationship between the two disciplines. We will start in the first chapter reviewing interdisciplinarity. Kinematics has its equations formulated through the affine and quadratic functions. In the study of Dynamics, vectors' operations, affine and quadratic functions, among others, will be discussed. Vectors will be covered in several topics, such as the study of force, acceleration, vector velocity.

Keywords: Interdisciplinarity. Affine function. Quadratic function. Vectors.

LISTAS DE TABELAS

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE ABREVEATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
LDB	Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional
MEC	Ministério da Educação
MRU	Movimento Retilíneo Uniforme
MRUV	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

SUMÀRIO

Sumário

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem a finalidade de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática. Nele serão abordadas as questões de interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física na primeira série do ensino médio. Apesar de minha formação ser em Matemática, devido as dificuldades de professores especializados na área de Física ministro as duas disciplinas.

No cotidiano da sala de aula nos deparamos com toda sorte de dificuldades apresentadas por alunos desmotivados. Em parte, pelas circunstâncias da idade, outra parte pela visão da não necessidade dos conteúdos apresentados de maneira desconexa com sua realidade social.

O trabalho tem o objetivo de, apresentadas essas questões observadas ao logo de minha vivência pedagógica, mostrar caminhos que nos levem a instigar nossos docentes a buscar outras formas de ensino-aprendizagem, uma vez que vivemos novos tempos e novos desafios.

A Base Nacional Comum Curricular tem buscado em seus objetivos sanar o fosso entre as modalidades diversas de ensino no nosso país. Nesse trabalho procuramos ao máximo nos ater a esses objetivos, buscando contextualizar a Matemática aplicada à Física, e consequentemente, mostrando que a Matemática pode estar presente em diversas atividades do nosso dia a dia.

No primeiro capítulo discutimos sobre interdisciplinaridade, procurando mostrar que a Matemática está presente em todas as outras áreas do conhecimento, muito embora poucos procurem realizar essa visão.

No segundo capítulo faremos um breve histórico do estudo de funções, suas características, e posteriormente uma definição formal, bem como algumas das principais propriedades. O capítulo é encerrado com uma seção a respeito do estudo de funções na escola básica.

Como terceiro capítulo veremos o estudo da função afim. Foi tomada como principal fonte bibliográfica o livro “Matemática do Ensino Médio” de Elon Lages Lima. Dentre os principais tópicos discutidos a respeito da função afim temos: o conceito de proporcionalidade que aprendemos desde muito cedo sem formalidades;

a definição formal de função afim; gráfico; crescimento/decrescimento; raiz da função e caracterização. Ao final, abordaremos as aplicações na Física como maneira de contextualização.

O quarto capítulo constitui o estudo da função quadrática onde procuramos aprofundar conceitos, parâmetros, gráfico da função, forma canônica, raízes da função, concavidade e vértice, caracterização da função quadrática, encerrando o capítulo com aplicações na Física.

O estudo de vetores é importante no ensino fundamental e médio, dada sua utilização no estudo de geometria analítica, dentre outros, muito embora só seja estudado na disciplina de Física. No quinto capítulo veremos um breve histórico de vetores, uma definição formal e as operações de adição e multiplicação por escalar. Ao final serão apresentadas algumas aplicações de vetores na Física.

1. INTERDISCIPLINARIDADE

1.1 Interdisciplinaridade na Escola

No cotidiano da sala de aula, é comum o professor se deparar com o aluno que sabe compreender um conceito da Física, mas tem dificuldades nos cálculos, na forma de representar ou mesmo de interpretar e dessa maneira encontrar uma alternativa de solucionar um problema proposto. Embora a Matemática e a Física sejam disciplinas estudadas separadamente, e na maioria das vezes sejam ministradas por professores com formação acadêmica distinta, elas apresentam aplicações conjuntas. Tais situações não se restringem à Matemática e à Física, mas ocorrem frequentemente entre praticamente todas as disciplinas da grade curricular dos ensinos fundamental e médio. A prática pedagógica da interdisciplinaridade surge então, como resposta a esta compartimentalização das ciências, buscando relacionar os conteúdos de diferentes disciplinas para capacitar os alunos a fazerem uso dos conhecimentos específicos de cada disciplina em seu processo de aprendizagem.

O significado da palavra interdisciplinaridade nos remete à relação entre duas ou mais disciplinas, ou seja, uma interação entre disciplinas. Nesse sentido existem inúmeros conteúdos correlacionados entre as duas disciplinas. Podemos aqui exemplificar alguns:

i. A representação, construção e interpretação de função em conjunto com seus respectivos gráficos, constitui um dos métodos mais eficientes no estudo dos fenômenos físicos. A determinação dos máximos e mínimos de uma função é importante no estudo da trajetória de um lançamento obliquo rendimento de uma máquina, assim como velocidade escalar.
ii. A noção de vetores e suas operações e uma ferramenta essencial no estudo da força, aceleração vetorial, aceleração centrípeta e quantidade de movimento.

A Lei de Diretrizes e Bases (LDB) Nº 5.692/71, nos trouxe as primeiras abordagens sobre interdisciplinaridade no Brasil, e isso vem aos poucos sendo aplicado no cenário educacional do país. Embora cada disciplina tenha suas especificidades, elas possuem algo em comum e isso as complementa. O professor que tenha uma compreensão a respeito dessa ferramenta deve na medida do possível atuar como mediador, dessa forma contextualizando a aprendizagem.

Com os PCNEM temos uma apresentação de curriculum bastante inovadora, através das áreas do conhecimento ao invés das disciplinas, dessa forma, indicando como norteadores da organização curricular competências e habilidades. Como princípios de organização curricular estão à interdisciplinaridade e a contextualização.

Sabemos que a execução de um trabalho interdisciplinar no ambiente escolar, é de certa maneira uma difícil tarefa, pois é necessária a participação de todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Fortunato, Confortin e Silva (SILVA 2013, p.8):

> *A interdisciplinaridade, para acontecer efetivamente na escola, requer conhecimentos sem distinção de dominância, um espaço onde se possam manter as diferenças dos componentes curriculares, bem como as especificações de cada disciplina, buscando-se assegurar a complementaridade, o enriquecimento da troca e a igualdade entre as matérias, as quais possuem um lugar e uma função específica no seio do currículo. Quanto aos professores, espera-se que estes alcancem a socialização das práticas e saberes trabalhados em suas disciplinas, permitindo e apreciando que as matérias ampliem o leque de possibilidades interativas e significativas do saber, tendo seu componente curricular como um livro aberto, onde muitos terão a oportunidade de ler e registrar diferentes interpretações e concepções.*

Será necessário que durante a formação profissional dos professores eles tenham conhecimento de atividades interdisciplinares, para que dessa forma estejam habilitados a realizarem trabalhos interdisciplinares como seus alunos.

Com base nessa concepção, a formação profissional de novos professores deveria considerar a interdisciplinaridade como importante elemento em sua prática docente, com isso teremos profissionais com uma visão pedagógica mais ampla, relacionada a essa prática.

É importante salientar que fora da escola, é cada vez mais difícil encontrar a utilização de informações de uma única disciplina, nos noticiários diariamente vemos gráficos matemáticos explicando acontecimentos econômicos, fatos biológicos, meteorológicos, fenômenos sociais, assim as disciplinas se entrelaçam nos jornais.

A escola nesse contexto tem a importante missão de levar o real significado na formação do cidadão, uma vez que para sua inserção no meio social, é necessária sua passagem por determinadas etapas do conhecimento em variadas áreas, assim para que seja capaz de realizar a leitura e interpretação do mundo que o cerca, de tal maneira que não seja uma educação excludente. No ensino Médio a BNCC trata dessa formação (Brasil, 2019):

> *O Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica, direito público subjetivo de todo cidadão brasileiro. Todavia, a realidade educacional do País tem mostrado que essa etapa representa um gargalo na garantia do direito à educação. Para além da necessidade de universalizar o atendimento, tem-se mostrado crucial garantir a permanência e as aprendizagens dos estudantes, respondendo às suas demandas e aspirações presentes e futuras.*

Sendo assim, devemos ter uma educação voltada à formação do cidadão que o prepare ao trabalho e a cidadania. Se fazendo necessária uma nova abordagem por parte dos professores.

1.2 Diálogo da Matemática e da Física

A interdisciplinaridade surge como mais uma ferramenta no sentido de facilitar a aprendizagem na medida em que proporciona aos atores envolvidos componentes curriculares interligadas entre si, dessa maneira proporcionando uma aprendizagem mais motivadora aos alunos. A Matemática e a Física devem se utilizar da interdisciplinaridade, uma vez que a Física se utiliza de recursos matemáticos para quantificar e qualificar fenômenos naturais. Segundo BONATTO et al. (2012, p.2):

> *A interdisciplinaridade é um elo entre o entendimento das disciplinas nas suas mais variadas áreas. Sendo importante, pois, abrangem temáticas e conteúdos permitindo dessa forma recursos inovadores e dinâmicos, onde as aprendizagens são ampliadas.*

Neste sentido o objetivo de nossa pesquisa é mostrar a interdisciplinaridade entre os conteúdos de Matemática e Física em alguns temas relacionados à primeira série do ensino médio, construindo um conhecimento integrado, aplicado à realidade dos alunos e dessa maneira, contextualizado, ajudando na aprendizagem. De acordo com os PCNEM:

> *O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação,*

> *de complementação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos (BRASIL, 2000, p.75).*

Sendo assim a proposta de interdisciplinaridade entre Matemática e Física deve ser evidenciada para que dessa maneira os alunos superem as dificuldades encontradas nessas disciplinas congêneres. A Física se utiliza da linguagem simbólica da Matemática que dispõe de inúmeras ferramentas e permite a aquisição de competências como, por exemplo, o raciocínio lógico, as técnicas de resolução de problemas, e a abstração.

Nesse sentido a Matemática exerce um papel importante por sua singularidade para explicar os fenômenos que surgem em outras áreas do conhecimento, como na Biologia, Química, Física, Sociologia, Geografia, e outras mais. De acordo como os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> *A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem, portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 2000, p. 9).*

De acordo com os PCNs a Matemática no ensino médio tem um caráter formativo que é indispensável para estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além do que, tem papel instrumental, pois a Matemática é utilizada em praticamente todas as atividades cotidianas do indivíduo.

Importante salientar a necessidade do estabelecimento do diálogo entre essas disciplinas no ambiente escolar, a fim de que a prática escolar não seja exclusivamente fechada, onde exista pouco espaço para a criatividade, para o estabelecimento entre as relações dos diversos campos da matemática.

As competências específicas em Matemática segundo a BNCC:

> *Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou*

> *tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (Brasil, 2019)*

Nesse sentido de interdisciplinaridade é necessário que professores tenham uma formação que estabeleça essa interação, já que atualmente isso não ocorre. Então professores que tenham essa visão terão mais oportunidade e aproveitamento com seus alunos, visto que acontecerá contextualização das disciplinas. Igualmente, podemos observar que seria quase que impossível aprender Física sem ter conhecimento em Matemática.

Conforme aponta Concheti (CONCHETI, 2014), muitos professores creditam à Matemática as dificuldades que os estudantes têm no aprendizado de Física. A questão é considerada por Locatelli (LOCATELLI, 2004)

> *Mas como, no ensino das ciências, uma linguagem matemática precária e a dificuldade em quantificar os conceitos físicos e relacionar variáveis são, muitas vezes, atores considerados responsáveis pelo fracasso escolar, frequentemente os professores alegam que seus alunos não entendem a física devido à fragilidade de seus conhecimentos em matemática.*

Concheti (CONCHETI, 2014) conclui que “a responsabilização da matemática nas dificuldades em física é limitante, pois não aborda outros aspectos essenciais no ensino desta ciência, como por exemplo, o desenvolvimento histórico dos conceitos e fenômenos da Física.”

Na primeira série do ensino médio existem conteúdos que podem ser ministrados interdisciplinarmente entre a Matemática e a Física, como exemplo temos: a cinemática e a função afim, onde podemos explorar os diferentes tipos de Movimento Retilíneo, também podemos trabalhar parte da dinâmica, como a força elástica, trabalho.

No estudo da função quadrática podemos inter-relacionar o Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, juntamente com seus gráficos, bem como o trabalho da força elástica, energia cinética, energia potencial etc.

Quando do estudo de vetores, em se tratando da primeira série do ensino médio, só é visto na disciplina de Física, vale aqui salientar a necessidade de que também seja incluso nos conteúdos de Matemática, dada sua aplicação na

Geometria Analítica, essa ferramenta muito utilizada na Física para resolvermos alguns problemas de Mecânica e Eletromagnetismo. Nesse caso, o estudo de vetores fica sem conexão com a Matemática, e vemos assim a necessidade desse conteúdo ser abordado do ponto de vista matemático, com seus enfoques geométricos e algébricos, relacionando suas operações de adição e multiplicação por um escalar. Atualmente nos livros didáticos do ensino médio de Matemática, não vemos nenhuma menção ao estudo de vetores, aqui vai uma crítica para que seja revisado esse importante assunto da Matemática para o ensino médio. Em síntese, o estudo de vetores sintetiza muitas ideias importantes da geometria analítica, geometria euclidiana e da Física.

Diante das dificuldades de aprendizagem encontradas por alunos do ensino básico quando o assunto é vetor, vários pesquisadores vêm desenvolvendo pesquisas para mostrar a necessidade de se incluir o estudo de vetores no ensino fundamental e médio. Visto isso, a nova legislação a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) contempla o ensino de vetor na Educação Básica.

Na BNCC destacamos duas de suas competências para o ensino médio que dialogam com o estudo de vetores que são:

> *Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.*
>
> *Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.*

Cabe ainda salientar que, conforme levantamento realizado por Concheti (CONCHETI, 2014), entre os anos de 2003 e 2013, a temática “relação da física com a matemática” foi mais estudada em propostas de ensino voltados ao Ensino Médio, com 38,9% do total, à frente não apenas dos estudos desta temática no Ensino Superior (36,1%), mas também de trabalhos que não trazem propostos de ensino específicas (11,1%) e de estudos no Ensino Fundamental (13,9%), em que foram analisados trabalhos que envolvem a disciplina Ciências, já que não há uma disciplina formal de Física no Ensino Fundamental. O destaque do Ensino Médio nas discussões e estudos de caso com a temática “relação da física com a matemática” reforça a relevância do tema e a necessidade de se aprofundar nas questões que o envolvem, justificando ainda mais o trabalho realizado nesta dissertação.

Pelo exposto acima, podemos observar que a Matemática e a Física interagem entre si, porquanto esse entendimento nos leva a uma reflexão de maneira a tornar a contextualização uma prática recorrente na sala de aula, a fim de que tenhamos um melhor aproveitamento por parte dos alunos e com isso uma contribuição para uma Educação menos excludente, melhorando sobremaneira nossos índices educacionais.

2 FUNÇÕES

Neste capítulo é feita uma breve introdução acerca das funções, com a apresentação de um breve histórico e posteriormente de uma definição formal, bem como algumas das principais propriedades. O capítulo é encerrado com uma seção a respeito do estudo de funções na escola básica.

2.1 Breve Histórico de Função

Na matemática, como em outras áreas do conhecimento, os conceitos sofrem evolução e grandes são as mentes colaboradoras. O estudo sobre função teve papel preponderante no desenvolvimento da Matemática, também em outras áreas do conhecimento, principalmente nas ciências naturais.

Desde a Grécia Antiga até a Idade Moderna, a matemática foi dominada pela Geometria Euclidiana. Assim, o conceito de função não é tão antigo quanto usualmente se pensa. Entretanto, noções rudimentares deste conceito podem ser encontradas em épocas remotas, como por exemplo, na operação de contagem mais elementar.

O conceito de "fluxões", criado por Isaac Newton no desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, tem similaridade com o sentido atual de função, uma vez que relaciona quantidades obtidas a partir de outras, por meio das quatro operações aritméticas elementares. Eves (2004) comenta que Newton, em seu "Method of Fluxions" estabelecia o seguinte:

> *[...] uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. À quantidade variável ele dava o nome de fluente (quantidade que flui) e à sua taxa de variação o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, como ordenada do ponto gerador, era indicado por y, então o fluxo desse fluente era denotado por. Em notação moderna esse fluxo equivale a dy / dt, onde t representa o tempo (p. 439).*

Assim, Newton desenvolveu as noções básicas de função através da Cinemática. Cabe destacar aqui, o inter-relacionamento da Matemática e da Física desde os primórdios da formalização do conceito e estudo de funções, evidenciando sob um viés histórico, a relevância da interdisciplinaridade no estudo deste tema, como é o objetivo do presente trabalho.

No entanto, quem primeiro fez uso do termo função foi Leibniz em 1673, no manuscrito latino “Methodus tangentium inversa, seu de fuctionibus”. Leibniz também introduziu terminologias acerca do assunto em uso até hoje, como “constante”, “variável” e “parâmetro”. Em 1718, Johann Bernoulli publicou um artigo com uma definição do termo, onde uma função de certa variável se apresentava como uma quantidade composta de qualquer valor dessa variável. Seu discípulo Euler retocou essa definição e apresentou a notação f(x).

Na prática a noção de função era reconhecida como uma expressão analítica, esta situação perdurou entre os séculos XVIII e XIX, muito em breve ficou evidenciado que acarretaria inúmeras incoerências e limitações, por exemplo, uma mesma função poder ser representada por uma infinidade de expressões analíticas distintas.

Este discernimento em conjunto com os de continuidade e de desenvolvimento em série, receberam continuados desenvolvimentos e elucidações que foram alterando o seu significado e sua natureza.

Em consequência a evolução no estudo das funções, tivemos inúmeras aplicações da Matemática em outras ciências. Em virtude das observações realizadas pelos cientistas que procuravam criar modelos matemáticos que explicassem os resultados obtidos regularmente. Esse modelo era a função, pois esclarecia a relação entre as grandezas envolvidas.

Sendo assim o conceito de função que atualmente nos parece simples, é uma consequência da evolução histórica acarretando cada vez mais a abstração, sendo finalizado no século XIX.

Atualmente o que estudamos sobre funções na Análise Infinitesimal e nas suas aplicações, guarda como fundamental a ideia de dependência entre as variáveis.

Contudo a noção de função é de fundamental importância na geração e no estudo de modelos matemáticos, não importando sua natureza, sendo portando peça-chave na Matemática atual.

Definição:

Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma função de **A** em **B** é uma regra que indica como associar cada elemento **x** $\in$ **A,** a um único elemento **y** $\in$ **B**. Podemos representar uma função por $f: A \rightarrow B$ que se lê: função f de A em B. O conjunto **A** é chamando de domínio da função ou campo de existência, definindo em qual conjunto estamos trabalhando, ou seja, quais serão os possíveis valores que o **x** pode assumir. O **x** é chamado de variável independente da função.

O conjunto **B** é chamado de *contradomínio* da função, e corresponde a todos os elementos que podem se relacionar com os elementos do domínio.

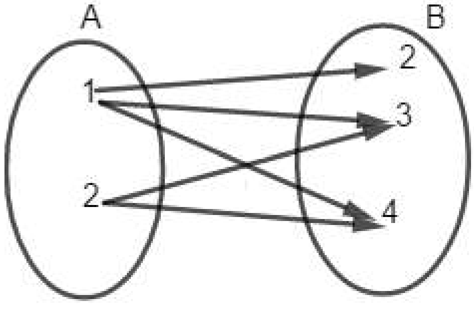
Cada elemento **x** do domínio deve corresponder-se com um único elemento **y** do contradomínio. A esse valor **y** chamamos de imagem de **x** pela função f. O conjunto formado por todos os valores de **y** é chamado de imagem da função. Assim, o conjunto imagem da função f é um subconjunto do contradomínio.

2.1.1 Exemplos

Nos exemplos a seguir, representaremos cada relação por meio de um diagrama de flechas, que é bastante intuitivo e cuja definição formal será dada na próxima seção.

1) Dados A= {1, 2} e B={4, 5, 6}, e a relação de A em B, onde cada elemento do conjunto A é menor do que um elemento de B.

Figura 1 - Relação de A em B

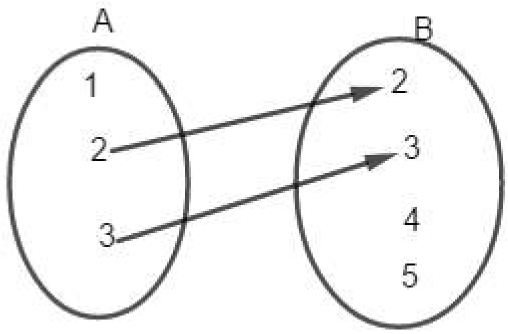


Fonte: o autor.

Neste exemplo, a relação de A em B não é uma função, visto que pelo menos um elemento de A está associado a mais de um elemento em B. De fato, neste exemplo, cada um dos elementos de A está associado a mais de um elemento do conjunto B.

2) Sejam A= {1, 2, 3} e B={2, 3, 4, 5}, e uma relação de A em B, onde cada elemento de A é de igual valor em B.

Figura 2 - Relação de A em B

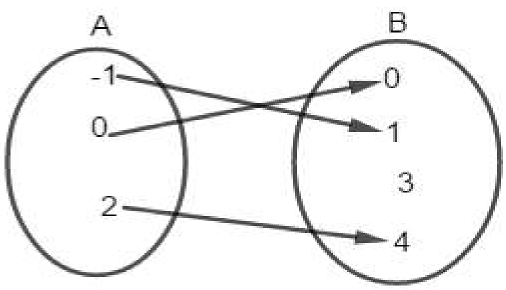


Fonte: o autor.

Essa relação, não é uma função, pois existe um elemento em A que não possui imagem em B.

3) Dados A= {-1, 0, 2} e B={0, 1, 3, 4} e a relação de correspondência de A em B dada pela seguinte expressão $y = x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Figura 3 - Relação de A em B



Fonte: o autor.

Aqui temos uma relação que é uma função, pois todo elemento do conjunto A tem correspondente em B; e a cada elemento de A, corresponde um único elemento de B.

2.2 Representação de Uma Função

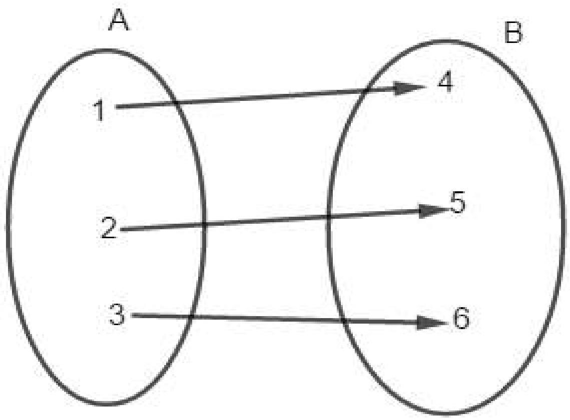
Diagrama de Flechas

Conforme visto na seção anterior, as relações, e em particular as funções, podem ser representadas por diagramas de flechas. Tais diagramas consistem na representação dos conjuntos da relação por meio de curvas fechadas simples, contendo em seu interior os respectivos elementos, e por flechas que relacionam os elementos de um conjunto com os elementos do outro conjunto, de acordo com a regra da função.

O exemplo 3 na seção anterior ilustra um diagrama de flechas de uma função $f(x) = x^2$. A seguir, fornecemos outro exemplo simples.

Dados A= {1, 2, 3} e B={4, 5, 6} e a função $f: A \to B$, tal que $x \in A$ e $y \in B$ e a lei de formação y= x+3.

Figura 4 - Diagrama de uma função



Fonte: o autor.

Cabe salientar que a representação de uma função por diagrama de flechas em geral é limitada a funções $f: A \to B$ em que A e B são conjuntos com poucos elementos, visto que, à medida que o número de elementos aumenta, o diagrama se torna gradativamente mais complexo, dificultando o entendimento.

Gráfico da função

DEFINIÇÃO

O gráfico de uma função $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{B}, \mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ é o conjunto dos pares ordenados em A x B da forma $(x, f(x))$, isto e, $\mathrm{Graf(f)} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}: x \in A \text{ e } \mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})\}$. Os termos do par ordenado são denominados abcissa para o x e ordenada para o y.

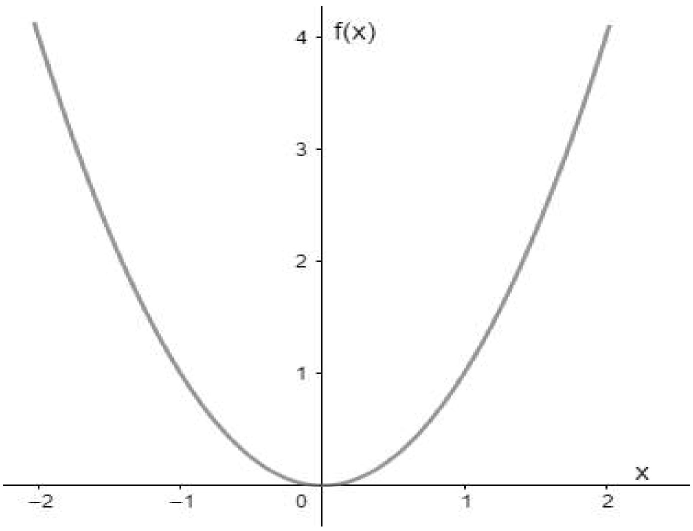
O plano cartesiano é uma ferramenta utilizada no estudo de funções onde podemos associar os pares ordenados a um ponto situado nesse plano ortogonal, cada ponto representa uma coordenada (x, y) de uma função. O plano recebe esse nome em homenagem a René Descartes.

Deste modo, o gráfico de uma função muitas vezes é representado por um esboço no plano cartesiano. Embora comumente nos refiramos ao esboço como sendo o gráfico da função, em geral isto não é verdade e não se deve confundir o gráfico da função com seu esboço.

EXEMPLO: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Então o gráfico da função é o conjunto $Graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: x \in \mathbb{R}\ e\ y = x^2\}$

Um esboço do gráfico da função f é dado abaixo

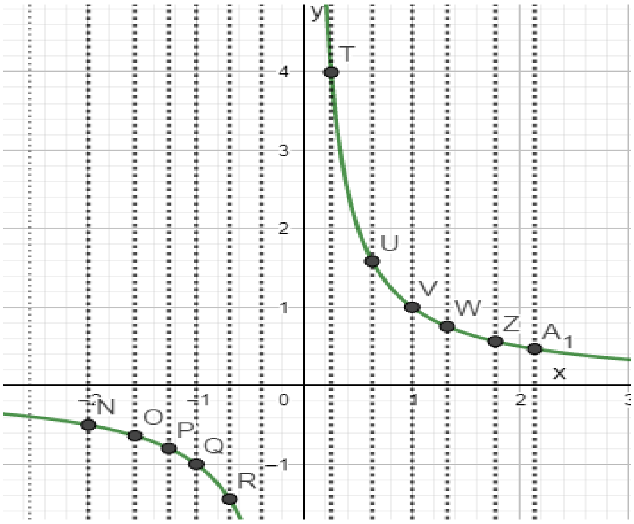
Figura 5 - Gráfico de f(x)=x²



Fonte: o autor.

Podemos analisar através da representação cartesiana da relação *f* de A em B se a referida relação é ou não uma função. Para isto, basta fazermos a seguinte verificação: se qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas OY encontrar o gráfico de *f* em apenas um ponto terá uma função. Esta verificação decorre diretamente da definição de função, em que cada elemento x do domínio desta função deve estar associado a um único elemento do contradomínio.

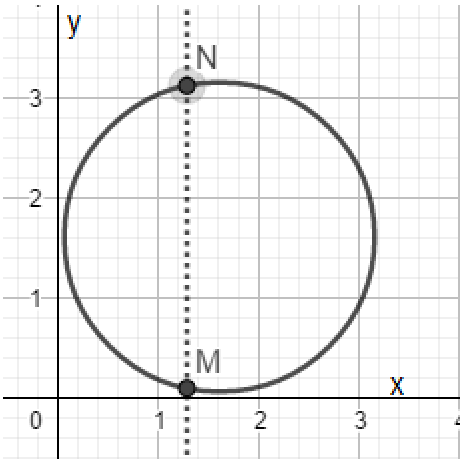
Figura 6 - Gráfico de uma função.



Fonte: o autor.

A relação representada na figura 6 é uma função, pois toda reta paralela ao eixo OY intersecta o gráfico em um único ponto.

Figura 7 - Gráfico de não função



Fonte: o autor.

A curva representada na figura 7 mostra-nos uma relação que não é função, pois temos pelo menos uma reta paralela ao eixo OY que encontra o gráfico em dois pontos distintos.

De acordo com a relação entre o domínio e o contradomínio, podemos obter inúmeras leis de formação e consequentemente inúmeros tipos de funções. Dentre as quais exemplificamos: função afim, função polinomial de grau n $\in \mathbb{N}$, função exponencial, funções trigonométricas, dentre outras. Neste trabalho, nos restringiremos ao estudo detalhado das funções afim e polinomial de grau 2, também chamada de função quadrática.

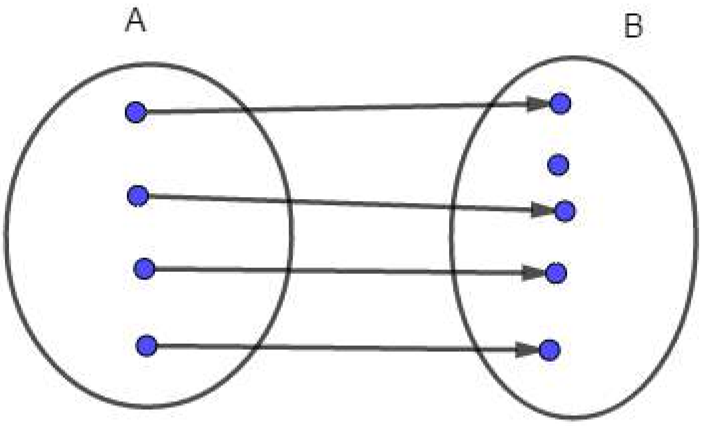
A seguir, são apresentadas algumas classificações usuais de funções.

2.3 Classificação e Propriedades de Funções

2.3.1 Classificação quanto à imagem

Dada a função $f: A \to B$, quando elementos distintos de A sofrerem uma transformação por *f* em elementos diferentes de B, ou seja, não haverá elementos em B que seja imagem de mais de um elemento de A, teremos uma função injetiva, também chamada função injetora. Ou ainda se $x_1 \neq x_2$ em A implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vejamos essa representação no diagrama abaixo.

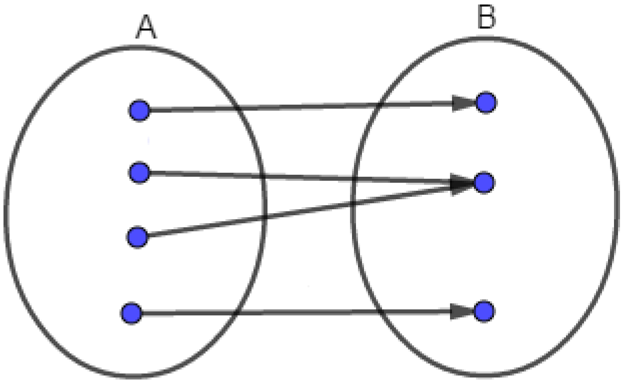
Figura 8 - Função Injetora.



Fonte: o autor.

Seja a função $f: A \to B$, chamaremos f de sobrejetiva(ou sobrejetora), *se* e somente se, para qualquer elemento y $\in B$, associarmos um elemento $x \in A$, ou seja, o contradomínio é igual à imagem de *f*. Representaremos abaixo um exemplo usando o diagrama de flechas.

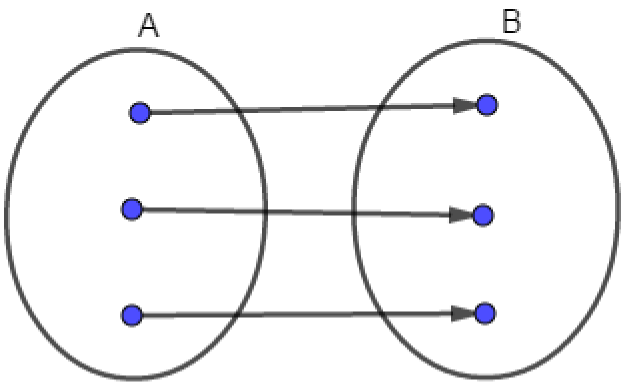
Figura 9 - Função sobrejetora.



Fonte: o autor.

Uma função é dita bijetiva (ou bijetora) quando possui o contradomínio igual à imagem e simultaneamente, elementos distintos do domínio possuir imagens também diferentes, isto é, se ela for coincidentemente, injetiva e sobrejetiva, também chamada de correspondência biunívoca. Como no diagrama a seguir exemplificamos esse caso.

Figura 10 - Função bijetora



Fonte: o autor.

2.3.2 Classificação quanto à paridade

Uma função é dita par se, e somente se, $f(x) = f(-x)$, para qualquer $x \in D$, onde D é o domínio da função. Assim sendo o gráfico de *f* é simétrico em relação ao eixo y.

Exemplos de funções pares são

a) A função polinomial de segundo grau f(x)=$ax^2 + c$, com $a \neq 0$, c real. De fato, qualquer função polinomial de grau par da forma g(x)=ax^{2n}, com $a \neq 0$ e n um número inteiro positivo, é uma função par, pois g(-x) = a$(-x)^{2n}$ =ax^{2n} = g(x).
b) Função modular, denotada por f(x)= **|** x **|**;
c) Função trigonométrica f(x)=cos(x).
Não mostraremos formalmente que as funções dos exemplos b) e c) são pares, mas sua prova é simples.

A função f é ímpar se, e somente se, *f(-x) = -f(x),* qualquer que seja x ∈ D**,** então - x ∈ D. Termos então que o gráfico de *f* é simétrico em relação à origem.

Alguns exemplos de funções ímpares são:

a) f(x)=ax, com $a \neq 0$, chamada de função linear, como será apresentado posteriormente.
b) Qualquer função polinomial da forma g(x)=ax^{2n-1} com $a \neq 0$ e n um número inteiro positivo é ímpar. De fato, g(-x) = a$(-x)^{2n-1}$= -ax^{2n-1}= -g(x)
c) h(x)=sen(x);
d) m(x)=1/x.

A demonstração de que as funções dos exemplos c) e d) são ímpares e simples e não a faremos.

Cabe salientar que existem funções que não são pares e nem ímpares. Por exemplo, a função $\mathrm{f(x) = ax + b}$, com $a, b \neq 0$ não é par e nem ímpar. De fato...

De fato $f(-x) = -ax + b \neq f(x)$, então a função não é par. Por outro lado, como $f(-x) = -ax + b \neq -(ax + b) = -ax - b = -f(x)$, a função não é ímpar. Vale ressaltar que, das relações acima, se $a = 0$, temos uma função par, enquanto se $b = 0$, temos uma função ímpar.

2.3.3 Classificação quanto ao crescimento

Sendo x_1 e $x_2 \in D_f$, se $x_1 < x_2$ sem perda de generalidades, a função *f* será estritamente crescente se $f(x_1) < f(x_2)$.

Dados x_1, $x_2 \in D_f$, com $x_1 < x_2$ a função *f* será crescente se $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Sejam x_1 e $x_2 \in D_f$, se $x_1 < x_2$, a função *f* será estritamente decrescente se $f(x_1) > f(x_2)$.

A função *f* definida por y=f(x) é decrescente para todo $x_1, x_2 \in D_f$, quando $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

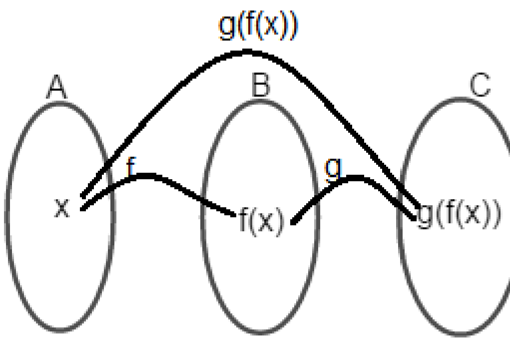
2.3.4 Composição de funções

Definição

Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$. Chama-se função composta de **g** com **f** a função $h: A \rightarrow C$, que é definida por $g(f(x))$, $x \in A$, podendo ainda ser representada por $g \circ f$. A imagem de cada x é obtida aplicando-se o seguinte procedimento:

a) Efetuamos x na função *f*, obtemos *f(x)*;
b) Aplica-se a *f(x)* a função g, obtemos então $g(f(x))$.

Figura 11 - Função Composta



Fonte: o autor.

Note que nas funções compostas as operações entre as funções não são comutativas. Ou seja, $g \circ f \neq f \circ g$.

2.3.5 Função inversa

" Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$, diremos que g é uma inversa à esquerda para f quando $gof = id_A: A \rightarrow A$, ou seja, quando g(f(x)) = x para todo $x \in A$." (LIMA, Elon Lages. 2004. Pag.23). Por exemplo, a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$f(x) = 3x$, que é injetiva, tem como inversa a função $g(x) = \frac{x}{3}$, porque a função composta $gof = g(f(x)) = \frac{3x}{3} = x$ para todo $x \epsilon \mathbb{N}$, que é uma função identidade.

Proposição 1: "Uma função $f: A \to B$ possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva". (LIMA, Elon Lages. 2004. pag.22)

Demonstração: Se f é injetiva, temos para cada $y \epsilon f(A)$ existe um único $x \epsilon A$ tal que $y = f(x)$. Fazendo $x = g(y)$, isto define uma função $g: f(A) \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \epsilon A$. Concluindo a definição $g: B \to A$ fazendo por exemplo, g(y) = x_0 (elemento fixado em A) para $y \epsilon \ B - f(A)$. Encontramos $g: B \to A$ tal que $gof = id_A$. Respectivamente, se existe $g: B \to A$ tal que $gof = id_A$ então, dados x_1, x_2 em A, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$ e assim sendo f é injetiva.

"Uma função $g: B \to A$ chama-se inversa à direita de uma função $f: A \to B$ quando $fog = Id_B : \ B \to B$, ou seja, quando $f(g(y)) = y$ para todo $y \epsilon B$". (LIMA, Elon Lages. 2004. pag.22).

Proposição 2: "Uma função $f: A \to B$ possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva". (LIMA, Elon Lages. 2004. pag.22)

Demonstração: Dado $f: A \to B$ sobrejetiva. Então, para cada $y \epsilon B$, assim sendo o conjunto $f^{-1}(y)$ não é vazio. Vamos escolher agora para cada $y \epsilon B$, um $x \epsilon A$ tal que $f(x) = y$ e colocando $g(y) = x$. O que define uma função $g: B \to A$ tal que $f(g(y)) = y$. Assim sendo g é uma inversa à direita de f. Respectivamente, se existe $g: B \to A$ com $fog = Id_B$ então, para cada $y \epsilon B$, colocando $x = g(y)$, então, $f(x) = f(g(y)) = y$. Assim sendo f é sobrejetiva.

Definição

Segundo Lima (2004. pag. 23) "Uma função $g: B \to A$ chama-se inversa da função $f: A \to B$ quando $gof = id_A$ e $fog = id_B$, isto é, quando g é inversa à esquerda e à direita de f.

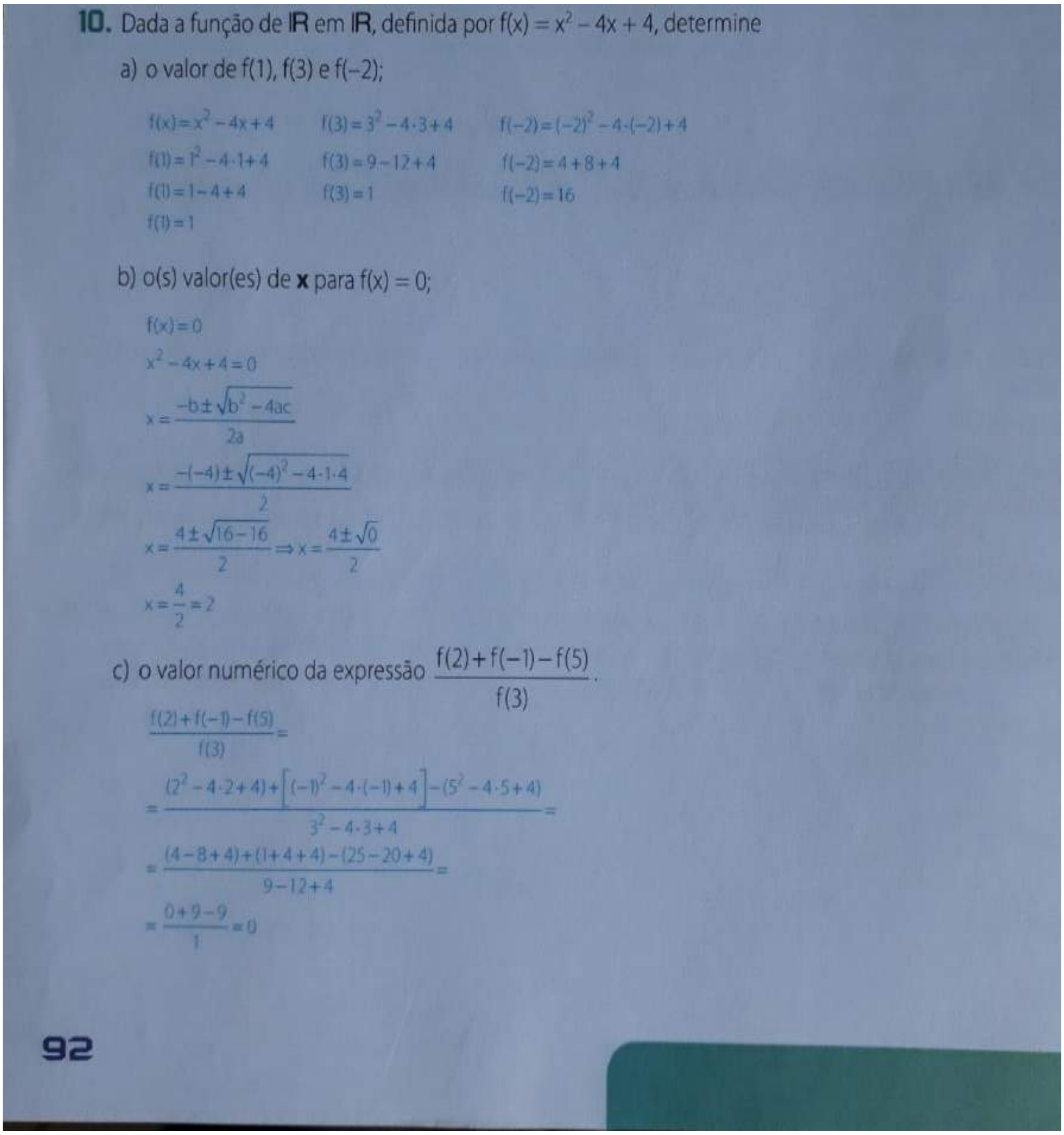
Como resultado das duas proposições acima, temos que uma função $f: A \to B$ possui inversa se, e somente se, for uma função bijetora. Ainda mais, essa inversa será única.

2.4 Estudo de Funções na Escola Básica

No decorrer do ensino fundamental e principalmente no ensino médio, os estudantes se deparam com diversos tipos de funções. De maneira geral, o ensino de funções é realizado com o auxílio de representações gráficas e/ou tabulares. As tabelas possibilitam que o professor apresente aos estudantes as relações entre os valores numéricos da função, organizando os elementos do domínio com suas respectivas imagens. Desta maneira, os pares de números organizados na tabela podem ser associados, no sistema de eixos cartesianos, ao gráfico da função, podendo ser uma reta, uma parábola etc.

O primeiro contato formal dos estudantes com funções ocorre ainda no 9° ano do ensino fundamental, onde aprendem os conceitos de relação, função, propriedades, gráficos etc. Entretanto, desde o 8° ano os alunos já têm contato com funções, pois estudam polinômios, ainda que não tenham a noção formal de que estes são um tipo particular de função. Em geral os estudantes do 9° ano trabalham com funções através de exercícios do tipo:

Figura 13 – Exemplos de exercícios sobre função.



10. Dada a função de IR em IR, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$, determine

a) o valor de f(1), f(3) e f(–2);

$f(x) = x^2 - 4x + 4$
$f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 4$
$f(1) = 1 - 4 + 4$
$f(1) = 1$

$f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4$
$f(3) = 9 - 12 + 4$
$f(3) = 1$

$f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 4$
$f(-2) = 4 + 8 + 4$
$f(-2) = 16$

b) o(s) valor(es) de **x** para f(x) = 0;

$f(x) = 0$
$x^2 - 4x + 4 = 0$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x = \frac{4}{2} = 2$$

c) o valor numérico da expressão $\frac{f(2) + f(-1) - f(5)}{f(3)}$.

$$\frac{f(2) + f(-1) - f(5)}{f(3)} =$$
$$= \frac{(2^2 - 4 \cdot 2 + 4) + \left[(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 4\right] - (5^2 - 4 \cdot 5 + 4)}{3^2 - 4 \cdot 3 + 4} =$$
$$= \frac{(4 - 8 + 4) + (1 + 4 + 4) - (25 - 20 + 4)}{9 - 12 + 4} =$$
$$= \frac{0 + 9 - 9}{1} = 0$$

92

Fonte: Apostila do 9° ano, Ed. Positivo 2013. Pag.92.

Figura 14 – Exemplo de atividades sobre função.

12. Sendo $f(x) = -\frac{2}{3}x + 18$, calcule:

a) $f(27)$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 18$$

$$f(27) = \frac{-2 \cdot 27}{3} + 18$$

$$f(27) = 0$$

b) $f(0)$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 18$$

$$f(0) = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 18$$

$$f(0) = 18$$

c) $f(-3)$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 18$$

$$f(-3) = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + 18$$

$$f(-3) = 2 + 18$$

$$f(-3) = 20$$

d) $f(-6)$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 18$$

$$f(-6) = -\frac{2}{3} \cdot (-6) + 18$$

$$f(-6) = 4 + 18$$

$$f(-6) = 22$$

Fonte: Apostila do 9° ano, Ed. Positivo 2013. Pag. 93

A partir dos exemplos acima, podemos perceber que as funções são em geral ensinadas de maneira totalmente desconexa com outras disciplinas, como por exemplo, a Física. A aprendizagem de funções a partir de um contexto interdisciplinar, por exemplo, aplicando os conceitos e propriedades matemática de funções em conteúdo de Física poderiam melhorar a aprendizagem do aluno, contribuindo dessa forma para a uma tentativa de excelência na Educação.

Mas as funções não se restringem aos estudos escolares. De fato, em nosso cotidiano nos deparamos com a ideia de função quando relacionamos duas grandezas variáveis. Como por exemplo, o valor do litro de gasolina comum na cidade de Guajará-Mirim é RS 4,15. Se quisermos saber quanto iremos pagar ao abastecer um veículo, temos uma função f(x) = 4,15x, onde **x** é a quantidade de litros a ser abastecido.

Desde muito cedo aprendemos a ideia de proporcionalidade, seja em nossas compras na padaria quando aumentamos ou diminuímos a quantidade de pão e consequentemente aumentamos ou diminuímos as cifras correspondentes em reais, ou nas compras de chocolates e bombons, sempre nos surge a noção de quanto mais uma grandeza aumenta ou diminui, a outra também aumenta ou diminui. Essas grandezas diretamente proporcionais são expressas por notação matemática que representam uma função linear, que é uma particularidade da função afim.

3 FUNÇÃO AFIM

Definição

"Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem constantes a, b $\in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.".

Exemplos:

1) Um taxista cobra a bandeirada de R$ 4,50, a parte fixa, e mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Ficando assim o preço de uma corrida por **x** quilômetros rodados em reais: $f(x)= 4{,}50 + 2x$.

De um modo geral se o preço da bandeirada fosse **b** reais e o valor do quilômetro rodado **a** reais teria o preço da corrida expresso pela expressão $f(x)= ax + b$. O termo **b** é a parte fixa e o temo **a** é a parte constante.

2) Um correntista tem no banco um saldo positivo de R$ 210,00. Após um saque no caixa eletrônico que fornece apenas notas de R$ 50,00, o novo saldo é dado em função do número **x** de notas retiradas. Logo teremos a lei de formação $f(x) = 210 - 50x$.

Observamos aqui que se o saldo positivo for **b** reais, o valor de cada saque for **a** reais, teremos o valor de cada saque expresso pela expressão $f(x)= -ax+b$, onde **b** é a parte fixa relativa ao saldo positivo na conta corrente e –**a** é nossa constante e corresponde as cédulas retiradas no caixa eletrônico.

Observe que, no primeiro exemplo a constante **a** é positiva, enquanto no segundo exemplo a constante **a** é negativa. Veremos mais adiante que o sinal de **a** determina o comportamento de crescimento/ decrescimento da função afim.

3.1 Casos Particulares Importantes da Função Afim

1°) Função Identidade

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)= x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Com $a=1$ e $b=0$

2°) Função Linear

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Temos aqui nesse caso $b = 0$.

3°) Translação

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e com $b \neq 0$ e $a = 1$.

4°) Função Constante

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)= b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Temos aqui $a = 0$.

De acordo com Elon. (LIMA et al, 2016, p.95) “a função linear, dada pela fórmula f(x) = ax, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

3.2 Gráfico de Uma Função Afim

A função f(x)= ax +b, tem como gráfico uma reta. Para provar isto, basta mostrar que três pontos quaisquer pertencentes a esse gráfico são colineares. Sejam: P_1= (x_1, ax_1 +b), P_2= (x_2, ax_2 + b) e P_3= (x_3, ax_3 + b), sendo $x_1 < x_2 < x_3$, será necessário e suficiente que o maior dos três valores d(P_1, P_2), d(P_2, P_3) e d(P_1, P_3) seja igual à soma dos outros dois. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

d(P_1, P_2)= $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a^2x_2 - a^2x_1)^2}$ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}$ = $\sqrt{(1 + a^2)(x_2 - x_1)^2}$ = $(x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$

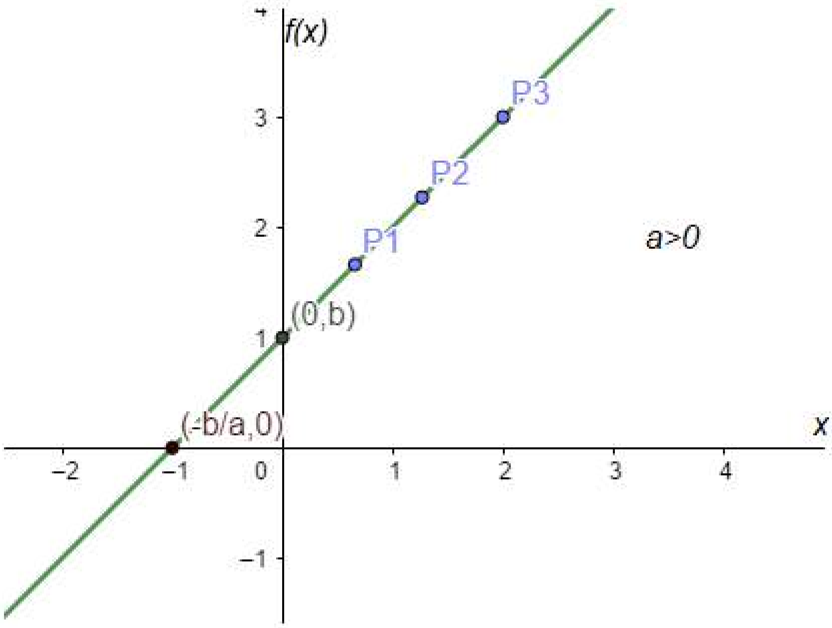
De maneira análoga, obteremos d(P_2, P_3)= $(x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$ e d(P_1, P_3)= $(x_3 - x_1)$ ·.

Temos então que d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (($x_2 - x_1 + x_3 - x_2$) $\sqrt{1 + a^2}$ = $(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$ = d(P_1, P_3) ou seja, d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3). Logo, três pontos quaisquer do gráfico da função afim são colineares, isto significa que temos uma reta como gráfico.

Do ponto de vista geométrico, **b** é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função f(x)= ax + b, intersecta o eixo das ordenadas OY, pois para x=0 temos f(0)=a.0 + b, f(0)= b. O número **a** chama-se inclinação ou coeficiente angular dessa reta e, relação ao eixo horizontal ou das abcissas OX. Para maior valor de **a** mais a reta se afasta do da posição horizontal. Quando **a** > 0, temos o gráfico de uma função crescente, e se **a** < 0, teremos o gráfico de f decrescente. O número **b** também é chamado valor inicial da função ou coeficiente linear dessa reta.

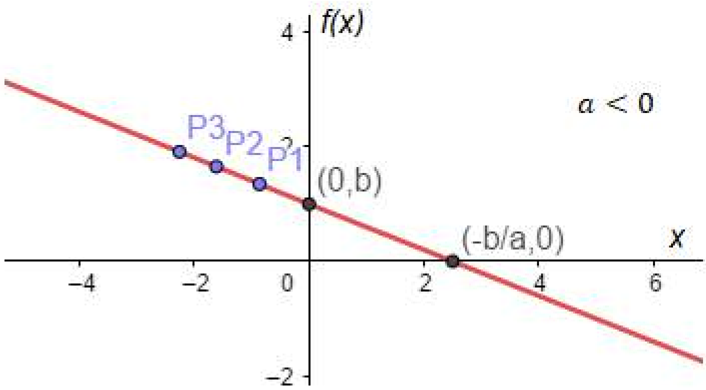
O ponto onde o gráfico da função afim intersecta o eixo das abcissas OX tem as coordenadas ($-\frac{b}{a}$·, 0) que é a raiz da função ou zero da função.

Figura 15 – Gráfico da função afim crescente.



Fonte: O autor.

Figura 16 – Gráfico da função afim decrescente.



Fonte O autor:

3.3 Determinando uma função afim conhecendo-se seus valores em dois pontos distintos

Podemos determinar se uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim f(x) = ax + b, conhecendo-se dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para quaisquer x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$. Como seu gráfico é uma reta e uma reta fica inteiramente determinada quando são conhecidos dois de seus pontos. Com esses dados encontraremos os valores de **a** e **b**. Fazendo: $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, então $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b$

– ax_1 – b, logo ax_2 – ax_1 = a(x_2 –x_1), portanto a = $\frac{f(x2) - f(x1)}{x2\ -x1}$ (1), substituindo esse valor em f(x_1) = ax_1 + b.

Temos: f(x_1) = $\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)x_1$ + b, então temos $b = \frac{f(x_1)x_2-f(x_2)x_1}{x_2-x_1}$ $para\ x_1 \neq x_2$

O parâmetro **a** de uma função afim f(x) = ax + b, também é chamado de taxa de variação ou taxa de crescimento. Para encontrá-lo, bastam dois pontos quaisquer e distintos.

Através do valor do parâmetro **a** podemos determinar se a função afim é crescente ou decrescente ou ainda constante. A seguir, fazemos a demonstração deste resultado.

Suponha que a >0. Sejam $x_1, x_2 \in D(f)$ tal que $x_1 < x_2$. Da expressão (1) segue que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) > 0$, isto é $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, a função é estritamente crescente. Resumindo, se a >0, f é estritamente crescente.

Suponha agora que **a** < 0. Sejam $x_1, x_2 \in D(f)$ tal que $x_1 < x_2$. Da expressão (1) segue que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) < 0$, isto é $f(x_1) > f(x_2)$. Logo, a função é estritamente decrescente. Resumindo, se a < 0, f é estritamente decrescente.

Assumindo agora **a** = 0. Sejam $x_1, x_2 \in D(f)$ tal que $x_1 < x_2$. Da expressão (1) segue que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) = 0$, isto é $f(x_1) = f(x_2)$. Logo a função é constante. Resumindo, se a = 0, f é constante.

A taxa de variação é sempre constante em cada função afim.

3.4 Caracterização de uma Função Afim

Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Seja *f*: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo a=f(1), tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, y $\in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações (1) ⇒ (2), (2) ⇒(3) e (3) ⇒(1).

(1) ⇒(2), seja f(n) = f(n.1) = n.f(1) ⇒ a.n $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Sendo $r = \frac{p}{q} \epsilon\, \mathbb{Q} \Rightarrow q.f(r) = f(q.r) = f(p) = f(p.1) = p.a \Rightarrow f(r) = a.r$

Se $f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0 \Rightarrow f(1) > f(0) = 0, então\ a > 0$

Dado $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Suponha que $f(x) \neq ax, fazendo\ f(x) < ax \Rightarrow \frac{f(x)}{a} < x \Rightarrow$ $\exists\, r \in \mathbb{Q}$;

$\frac{f(x)}{a} < r < ax \Rightarrow f(x) < a.r < a.x \Rightarrow f(x) < f(r)$, porém isso é absurdo, visto que a função é crescente.

Fazendo agora com $f(x) > a.x \Rightarrow \frac{f(x)}{a} > x \Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q}$; $\frac{f(x)}{a} > r > x \Rightarrow$

$f(x) > a.r > a.x \Rightarrow f(x) > f(r)$, mas isso é absurdo, pois $r > x$, logo teríamos $f(r) > f(x)$, então $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) ⇒(3) Por hipótese temos que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nossa tese é que: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ e como $f(x) = ax \Rightarrow f(x+y) = a(x+y) = ax + ay,$ mas $ax = f(x) e\ ay = f(y)$, assim sendo $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

(3) ⇒(1) Como $f(nx) = f(x + x + x + \cdots + x) = f(x) + f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = f(nx) = nf(x), \forall\ n \geq 0$. Sendo $0 = f(0) = f(0.0) = f\big(x + (-x)\big) =$

$$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x) então\ f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-nx) = -f(nx) = -nf(x),$$

Um dos problemas encontrados numa determinada situação é estabelecer o modelo matemático para solucionar uma situação-problema. O resultado a seguir nos mostra como uma função afim pode modelar fenômenos em que há proporcionalidade.

Teorema: (LIMA et al, 2016, p.103) “Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo f(x+h) – f(x) = φ (h) depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.”.

Utilizando o teorema Fundamental da Proporcionalidade, faremos a demonstração, assumindo que f é crescente, pois o outro caso é semelhante.

Então φ: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ também é crescente, como φ (h)= f (x+h) – f(x) está bem definida. Além disso, para quaisquer h, w ϵ $\mathbb{R}$ temos: φ (h + w) = f(x+h+w) – f(x)

= f((x+w) +h) – f(x+w) + f(x+w) – f(x)

= $[f((x + w) + h) - f(x + w)]$+ $[f(x + w) - f(x)]$

= φ (h) + φ (w)

“Logo aplicando o teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se a= φ (1), tem-se φ (h)= a.h para todo h ϵ $\mathbb{R}$.”. Como ah = f(x+h) – f(x). Colocando f(0)= b, teremos f(h) = ah + b ou se preferirmos f(x) = ax + b $\forall$ $x \in \mathbb{R}$.

3.5 A Função Afim Aplicada à Física

Como o objetivo do trabalho é estabelecer um diálogo entre conteúdos de Matemática e Física do 1º ano do ensino médio, vamos elencar alguns assuntos de Física que podemos trabalhar juntamente com a função afim, no intuito de estabelecer a interdisciplinaridade e melhorar a contextualização, fazendo com que o aluno desperte o interesse para essas disciplinas tão importantes na vida escolar.

3.5.1 Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Podemos relacionar estudo da Função Afim ao Movimento Retilíneo Uniforme (MRU).

A velocidade escalar média de um móvel é a razão entre o deslocamento e o tempo correspondente a esse deslocamento. A expressão da velocidade escalar média é dada por $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$., Δs sendo a variação dos espaços e Δt corresponde à variação dos tempos. Temos aqui que a velocidade corresponde à taxa de variação da função horário dos espaços, pois como Δs= s – s_0 e Δt = t – t_0, assumindo que t_0= 0, temos então v = $\frac{s-s_0}{t}$., assim temos s(t) = s_0 + vt, que é uma função afim. A seguir, apresentamos exemplos de como podemos usar as propriedades e resultados matemáticos da função afim, para desenvolver o conteúdo de MRU.

Exemplo 1: Um móvel parte de Guajará-Mirim às 7:00 h, com destino a Porto Velho distante 320 Km, chegando ao seu destino às 10:30 h. Calcule sua velocidade escalar média considerando ser um MRU.

Fazendo um gráfico que representa o tipo de movimento, temos uma reta como sua representação, sabendo que no plano, dois pontos determinam uma reta.

Utilizando nossos conhecimentos matemáticos de função afim, em lugar de aplicar o método tradicional de ensino, que obriga o aluno a simplesmente aplicar de maneira mecânica a fórmula da velocidade média para resolução do exercício, que induz o estudante a memorizar fórmulas, sem contextualização ou aprendizado efetivo, sugerimos o seguinte roteiro:

a) O aluno preenche uma tabela onde relaciona o horário de cada evento com a respectiva posição do móvel. Teremos então dois pontos do plano **t** x **s(t)**, que corresponde à partida e a chegada.

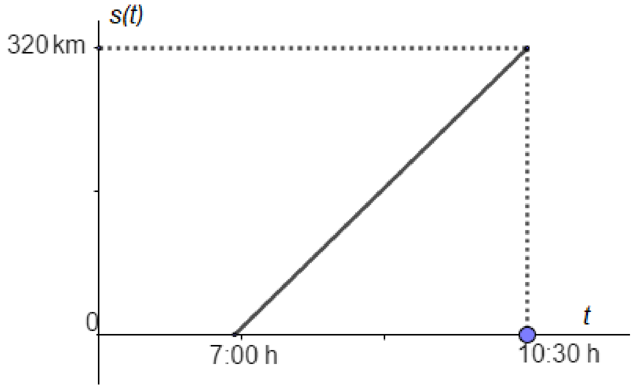
Tabela 1 – Espaço e tempo

T		s(t)
7		0
10:30		320

Fonte: O autor.

b) A partir dos dois pontos obtidos na tabela e sabendo que se trata de MRU, o aluno então traça o gráfico, usando o conhecimento de que no plano uma reta é completamente definida por dois pontos distintos.

Figura 17 – Gráfico de s x t



Fonte: O autor

c) De posse do gráfico, o aluno então calcula a velocidade média, e a partir desta informação que é a resposta do exercício.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad v_m = \frac{320}{10{:}30-7} = \frac{320}{10{,}5-7} = \frac{320}{3{,}5} = \frac{3200}{35} = 91{,}43 \text{ km/h, aproximadamente.}$$

d) Apesar da resposta do problema ter sido obtida no item c o aluno interessado pode avançar na análise do problema, enriquecendo seu conhecimento e desenvolvendo seu repertório tanto matemático quanto físico. Como exemplos, citamos.

1) a verificação de que a velocidade obtida corresponde ao coeficiente angular da respectiva equação horária que descreve o movimento;

2) uma vez que esse coeficiente angular é positivo, concluir que a reta é crescente, confirmando o gráfico obtido no item b), ao mesmo tempo em que também se pode concluir que o movimento é progressivo;

3) como a divisão de 320 por 3,5 não é exata, poder-se-ia relacionar a questão com problemas de arredondamento, números racionais e números reais; 4) a conversão de grandezas, como por exemplo, no caso de subtrair 10:30 por 7, antes precisamos converter 30 minutos em horas.

Exemplo 2: Um móvel passa pela origem dos espaços quando o cronometro está zerado. Após 3 segundos passa pela posição -15 metros encontre sua velocidade escalar média.

a) Seguindo o mesmo roteiro do exemplo anterior faremos a tabela **t**x**s(t)**

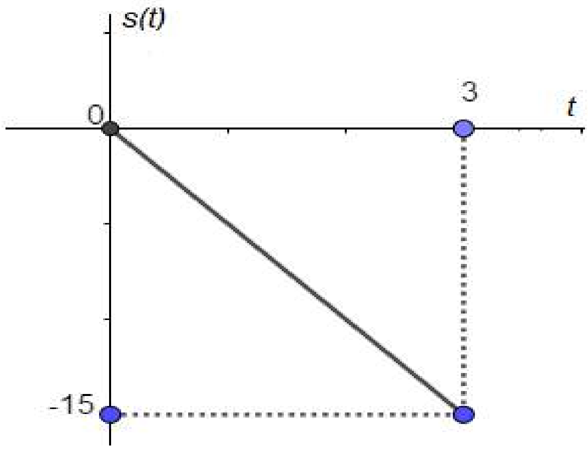
Tabela 2 – Espaço e tempo.

T	s(t)
0	0
3	-15

Fonte: O autor.

b) A partir dos pontos obtidos na tabela e sabendo que o movimento é MRU, traçaremos o gráfico, usando o conhecimento matemático de que no plano uma reta é completamente definida por dois pontos distintos.

Figura 18 – Representação gráfica do M.R.U.



Fonte: O autor.

c) De posse do gráfico o aluno então calcula a velocidade média, e a partir desta informação, que é a resposta do exercício.

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v_m = \frac{-15-0}{3-0} = \frac{-15}{3} = -5 \text{ m/s}$$

d) Apesar da resposta do problema ter sido obtida no item c), o aluno interessado pode avançar na análise do problema, enriquecendo seu conhecimento e desenvolvendo seu repertório tanto matemático quanto físico. Como exemplo:

1) a verificação de que a velocidade obtida corresponde ao coeficiente angular da respectiva equação horária que descreve o movimento;

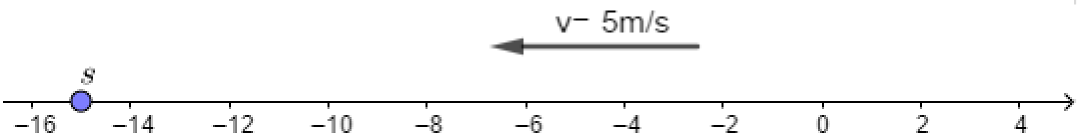
2) uma vez que esse coeficiente angular é negativo, concluir que a reta é decrescente, confirmando o gráfico obtido no item b), ao mesmo tempo em que também se pode concluir que o movimento é retrógrado;

3) a justificativa de que a posição final do móvel é -15m (uma posição negativa!) pode ser discutida com os alunos não apenas do ponto de vista física, mas problematizando a questão dos números inteiros negativos;

4) ainda sobre posição negativa de um móvel, seria possível iniciar uma discussão a respeito de vetores, inter-relacionando o estudo de funções e a teoria de vetores.

5) Em minha experiência docente nas aulas de Física, é comum os alunos me questionarem sobre o espaço negativo (neste exemplo, -15m), bem como a velocidade negativa (-5m/s) achando que estamos em movimento à marcha ré. Procuro esclarecer o tema apresentando a reta dos números reais contendo alguns números inteiros negativos e positivos, bem como o zero e explicando que a posição -15 m significa simplesmente que o móvel está a 15 metros à esquerda do referencial (zero), isto é, o conceito de posição positiva ou negativa está associada ao referencial usado. Com relação à velocidade, o sinal depende do sentido adotado como positivo, e não o móvel está em marcha à ré ou em movimento direto. Abaixo, ilustro a ideia na Figura 19

Figura 19 – Reta numerada do M.R.U.



Fonte: O autor.

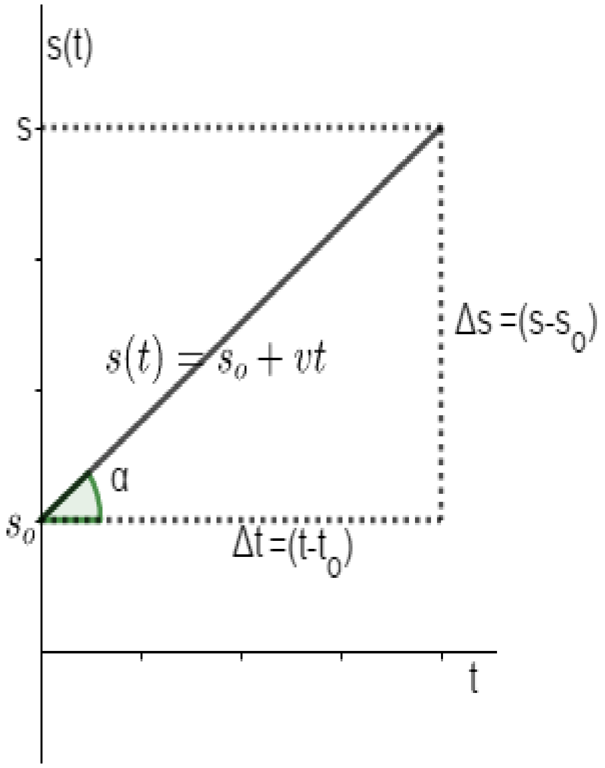
Nossos dois exemplos servem para ilustrar que a velocidade escalar média pode assumir valores negativos e positivos, isso nos mostra que o movimento pode ser retrógrado se $v < 0$ ou progressivo se $v > 0$, vale lembrar que esse sentido é relativo, depende da trajetória adotada.

Percebemos que as unidades da velocidade escalar dependem das unidades adotadas na variação dos espaços e na do tempo. Importante salientar que no Movimento Uniforme a velocidade é constante ao longo do tempo. Decorre daí que o móvel percorre distâncias iguais em tempos iguais. Como o movimento é retilíneo, sua trajetória é uma reta.

A função horária dos espaços fornece a posição do móvel em função do tempo: $s(t)= s_0 + vt$ é uma função afim, logo seu gráfico é uma reta.

Podemos observar que a velocidade escalar é numericamente igual a tangente do ângulo formado entre o gráfico da função horária dos espaços e o eixo **t** do tempo, veja no gráfico abaixo.

Figura 20 – Gráfico s x t



$$v \overset{n}{=} tg\alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

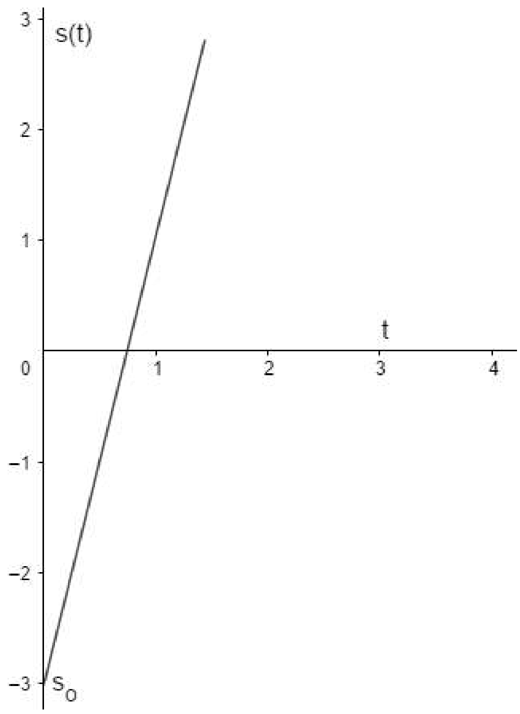
Fonte: O autor.

Exemplo 3: Uma partícula obedece à seguinte função horária: s(t) = -3 + 4t, sendo o espaço em metros e o tempo em segundos. Determine:

a) O espaço inicial e a velocidade escalar;

Solução: Comparando a equação horária dos espaços $s(t) = s_o + vt$, observamos que o espaço inicial do móvel é $s_o = -3\ m$, corresponde ao parâmetro **b** da função afim, ponto que corta o eixo das ordenadas. Que a velocidade do móvel é v= 4 m/s equivalente ao parâmetro **a** da função afim. Notamos que o espaço inicial é negativo, isso nos leva a observar que o móvel parte antes da origem da trajetória adotada para o movimento, logo, em algum instante ele passará pela origem dos espaços, pois a velocidade é positiva (movimento progressivo). Fazendo uma representação gráfica do movimento, obtemos o seguinte gráfico.

Figura 21 - Equação horária do MRU



Fonte: O autor.

A posição no instante t = 8 s.

Solução: Como o tempo é de 8 s, iremos calcular o valor numérico da equação horária, substituindo **t** por 8, então: s(8) = -3 + 4 (8), logo s(8) = 29 m.

O instante em que o móvel passa pela origem dos espaços.

Solução: O móvel passa pela origem dos espaços s=0, assim: -3 + 4 t = 0, 4 t = 3, t= $\frac{3}{4}$ s ou 0,75 s. Vale aqui lembrar que todas às vezes em que o gráfico da função intersecta um dos eixos, temos que nesse ponto o valor do eixo cortado é nulo.

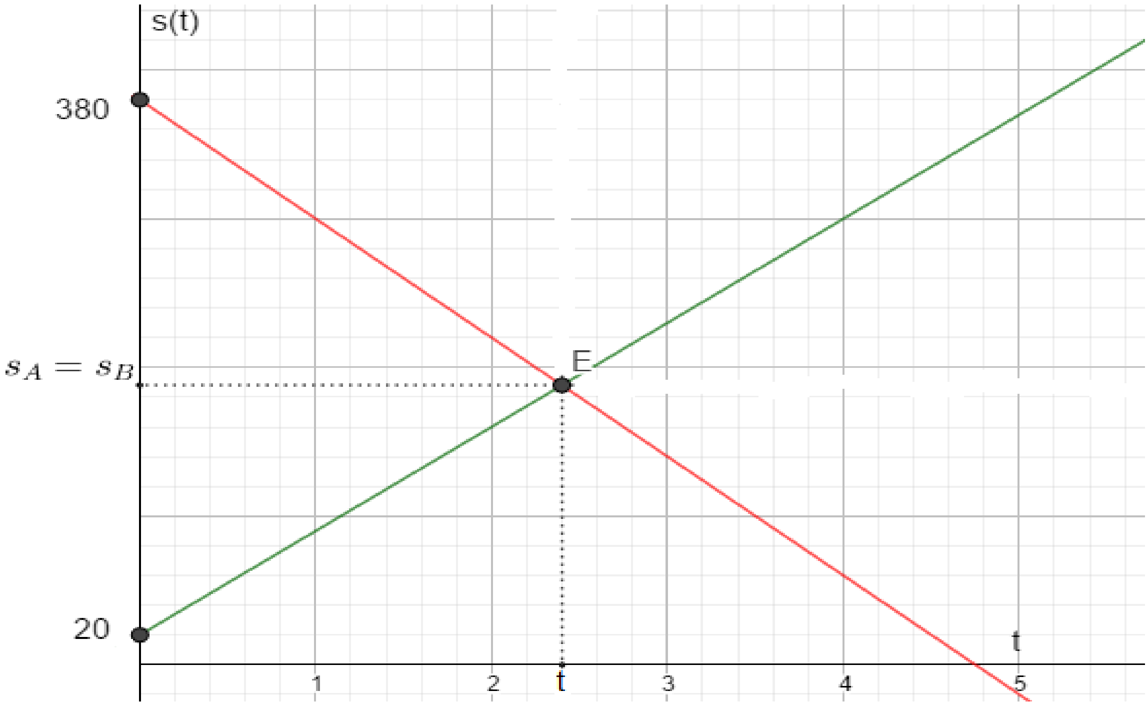
Exemplo 4: Dois móveis A e B partem ao mesmo tempo das posições S_{0A}= 20 km e S_{0B}= 380 km, indo um de encontro ao outro, com velocidades de 70 km/h e 80 km/h, respectivamente. Determine o tempo decorrido e a posição do encontro.

Solução: Vale ressaltar que os móveis vão um de encontro ao outro. Nesse caso temos um dos móveis com orientação contrária à trajetória. Vamos apresentar duas possíveis resoluções, uma geométrica e outra algébrica.

Abordagem geométrica

Inicialmente os estudantes devem esboçar os gráficos dos movimentos do móvel A e do móvel B, preferencialmente usando papel quadriculado. Ressaltamos que, como as respectivas equações horárias são da forma sa=20+70t e sb=380−80t, ambos os gráficos são retas. Os estudantes dever perceber que, no caso de A, a reta é crescente, pois seu coeficiente angular é positivo, enquanto a reta do movimento de B é decrescente pois seu coeficiente angular é negativo. Como resultado, temos um esboço como o apresentado na Figura 22, em que as retas se intersectam em um único ponto. A propriedade geométrica de que duas retas distintas e não paralelas se intersectam em um único ponto deve ser recordada aos estudantes.

Figura 22 - Encontro de dois corpos.



Fonte: o autor.

A interseção das duas retas que representam os movimentos dos móveis A e B indica onde estes móveis se encontram (ponto E na figura 22). As coordenadas do ponto E podem ser obtidas usando o papel quadriculado, sendo posteriormente confrontadas com os valores encontrados na solução algébrica do problema.

<u>Abordagem algébrica</u>

Obter o ponto de encontro dos dois móveis, do ponto de vista algébrico, é equivalente a encontrar a solução comum das equações horárias de movimento destes móveis. Isto é: sa=20 + 70 t = 380 – 80 t=sb ⇒ 150 t = 360 ⇒ t= 2,4 h;

substituindo esse tempo em qualquer uma das equações horárias, teremos a posição do encontro dos móveis, s(2,4) = 20 + 70(2,4) ⇒s(2,4) = 188 km. Os valores encontrados nesta abordagem devem ser comparados pelos estudantes com a resposta obtida na estratégia geométrica anterior.

1) Podemos observar a transformação do tempo de 2,4 h para 2 h e 24 min, lembrando aos alunos que muitas vezes são levados a pensar que 0,4 horas serão transformadas para 40 minutos.

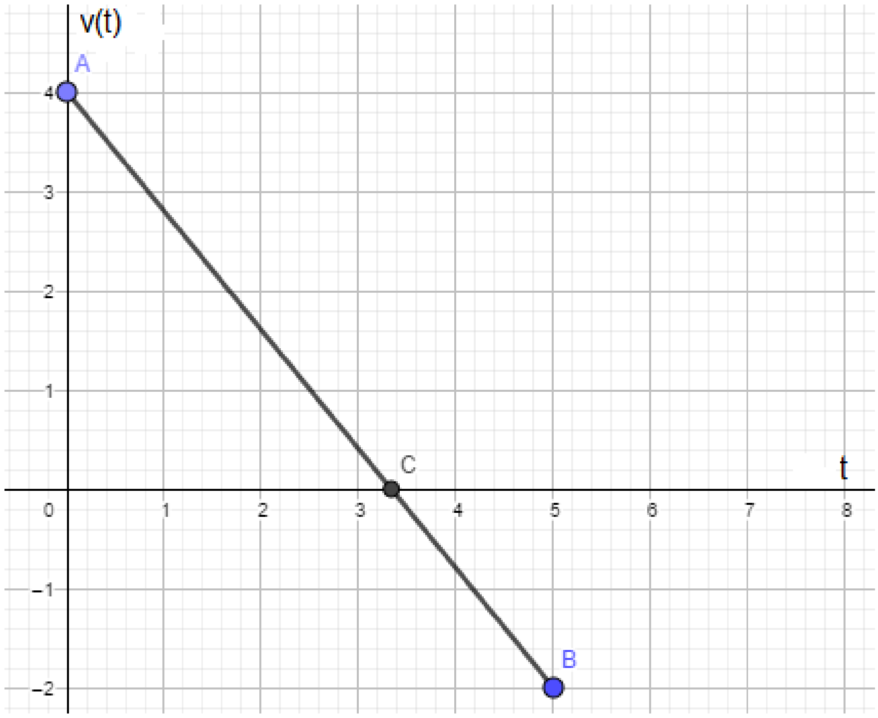
2) Em nossa experiência de sala de aula, quando nos deparamos com esse tipo de problema, muitos alunos nos questionam como dois corpos podem ocupar o mesmo lugar no espaço. Em situações como esta, precisamos deixar claro que o “ponto de encontro” dos dois móveis não significa que se trata de um ponto e que um móvel está sobre o outro ou que ocupam o mesmo lugar no espaço, mas que simplesmente estão na mesma posição em uma estrada, por exemplo.

3.5.2 **Movimento Retilíneo Uniformemente variado (MRUV)**

Podemos observar outra aplicação da função afim quando estudamos o Movimento Uniformemente Variado em sua equação horária da velocidade $v(t) = v_0 + at$ nesse caso a aceleração escalar assume a taxa de variação $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$

Exemplo 5: Encontre a função horária da velocidade escalar a partir do diagrama v x t, dado.

Figura 23 – Gráfico v x t



. Fonte: o autor.

Solução: Como t= 0s V_0= 4 m/s t_f= 5s V_f= -2 m/s, sendo a=$\frac{\Delta v}{\Delta t}$·, isolando a aceleração na equação horaria da velocidade, temos: a =$\frac{-2-4}{5-0}$ a= -1,2 m/s², como v(t) = v_0+ at, temos v(t) = 4 – 1,2t.

Analisando o movimento, percebemos que o valor algébrico da velocidade escalar diminui então o M.U.V. é progressivo e retardado do ponto **A** até o ponto **C**, visto que nesse intervalo a velocidade é positiva e a aceleração negativa; do ponto **C** ao ponto **B** o MUV é retrogrado e acelerado, a velocidade é negativa e tem o mesmo sinal da aceleração. No ponto **C** a velocidade do corpo é nula, local onde ocorre mudança de sentido.

Note que a equação horária da velocidade do M.R.U.V. é uma função afim, isto é, tem a forma $f(x) = ax + b$, onde o parâmetro **a**, corresponde à aceleração do móvel que é constante e o parâmetro **b** equivale à velocidade inicial do móvel.

Esse exercício nos oferece a oportunidade de discutir diversos outros tópicos, como por exemplo: 1) crescimento/ decrescimento da função e a relação desta característica com o coeficiente angular desta função;

2) a determinação da raiz da função, isto é, o ponto onde o gráfico intersecta o eixo Ox. Neste ponto, a velocidade é nula, e então o móvel muda de direção, já que a velocidade deixa de assumir valores positivos para assumir valores negativos a partir deste ponto.

3) a propriedade geométrica de que dois pontos distintos determinam uma única reta. Assim, tomando os pontos A e B como feito anteriormente, temos uma única reta, que é aquela que descreve a equação horária do movimento do móvel. Os alunos poderiam discutir e verificar o que acontece se fossem tomados outros dois pontos do gráfico. Será que a equação resultante seria a mesma?

4) como no M.R.U.V. (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado) a aceleração é constante, temos um exemplo de função constante quanto tratamos da função horária da aceleração a(t) = a.

3.5.3 Dinâmica

No estudo de Dinâmica encontramos uma aplicação da função afim, quando tomamos conhecimento da Lei de Hooke, para mais detalhes, ver (KAZUHITO et al. Pag.220). A Lei de Hooke é dada pela equação é F_{el}= kΔx, em que F_{el} é a força elástica, **k** é a constante elástica e Δ**x** é a deformação elástica.

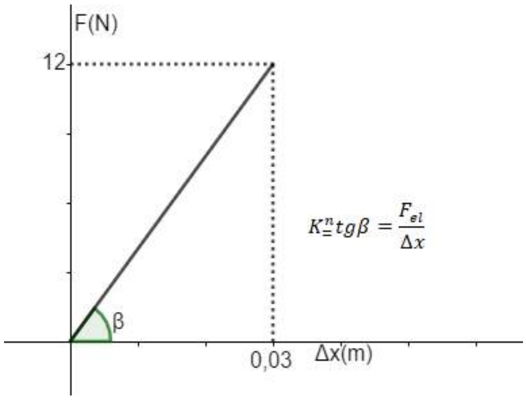
Neste caso, temos uma aplicação da função linear $f(x) = ax$, cuja constante k é a constante de proporcionalidade a. Observe que o gráfico da força elástica sempre intercepta a origem do sistema de coordenadas, já que esta é uma propriedade das funções lineares.

Exemplo 6: Uma mola que obedece à Lei de Hooke sofre a aplicação de uma força de 12 N, sofrendo com isso uma deformação de 3 cm. Determine o valor de sua constante elástica em N/m.

Solução: Como a força resultante aplicada sobre a mola é igual a sua força elástica, então temos F_{el}= kΔx $\Rightarrow$ K= $\frac{F_{el}}{\Delta x}$ $\Rightarrow$ K=$\frac{12}{0{,}03}$ = 400 N/m. Temos uma aplicação da função linear, cuja constante K é a constante de proporcionalidade. A deformação da mola irá indicar o correspondente valor da força elástica aplicada. Devemos observar a transformação das grandezas envolvidas, visto que a deformação é dada em centímetros e a unidade no S.I. é o metro.

Graficamente

Figura 24 – Gráfico F_{el} x Δx



Fonte: O autor.

Note que o gráfico é uma reta crescente.

Para encontrar a reta que descreve a constante elástica precisamos localizar dois pontos distintos. O primeiro é a origem dos eixos ortogonais (0, 0), visto que temos uma função linear e o gráfico intersecta a origem.

O outro ponto tem as coordenadas como dados do problema (0,03; 12). Ligamos os dois pontos, temos nossa reta cujo ângulo β tem a tangente numericamente igual a constante elástica $k = \frac{F_{el}}{\Delta x}$.

Como a força é uma grandeza vetorial, temos o gráfico de uma função crescente.

Novamente nos deparamos com função afim no estudo da Dinâmica, quando observamos a Quantidade de Movimento, cuja equação Q= m.v, onde **Q** é a quantidade de movimento, **m** representa a massa do corpo (constante) e **v** a velocidade do móvel, representando nossa variável independente.

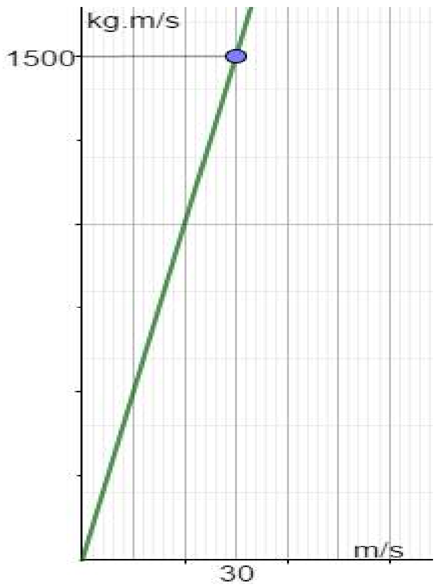
Notamos que a equação da quantidade de movimento é uma função linear da forma $f(x) = mx$, onde a massa m é a constante de proporcionalidade. Além disso, notemos que a massa do corpo é constante. A quantidade de movimento é proporcional à massa deslocada. Corpo com maior massa apresenta maior inércia.

A seguir, ilustramos a aplicação deste conceito.

Exemplo 7: Determine a quantidade de movimento de um corpo de 50 kg e velocidade constante de 30 m/s em uma pista retilínea.

Solução: Como Q= m.v, então Q = 50x30 = 1500 kg.m/s.

Figura 25.- Gráfico da quantidade do movimento Q=50v



Fonte: O autor.

Observe que através do gráfico podemos analisar o crescimento da função e verificar que se trata de uma função crescente. De fato, a massa é o coeficiente angular da função que descreve a quantidade de movimento. Como a massa é sempre um valor positivo, segue que a função é crescente.

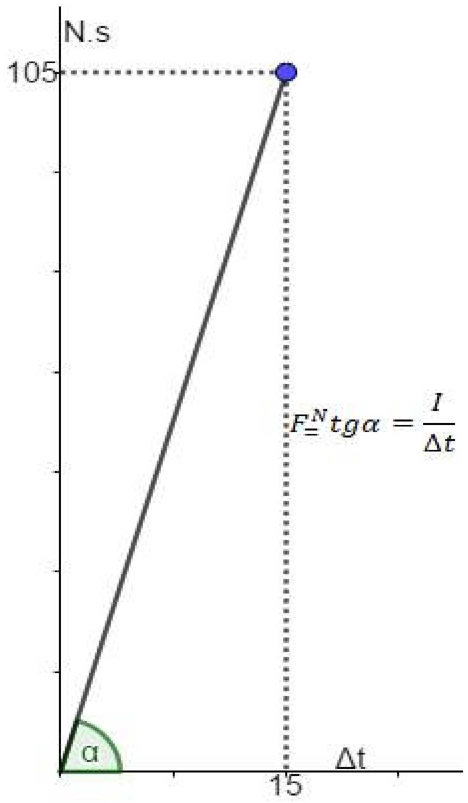
Ainda na Dinâmica podemos associar outra aplicação de função afim ao Impulso, cuja equação I_f = F.Δt, onde $\mathbf{I_f}$ é o impulso, **F** é a força aplicada ao corpo, sendo constante e $\Delta \boldsymbol{t}$ é o intervalo de tempo de aplicação da força.

A função Impulso é uma função linear da forma $f(x) = ax$, onde o coeficiente de proporcionalidade é a força F constante.

Exemplo 8: Encontre a força que atua durante 15 segundos e tem um impulso de 105 N.s. Solução: Como I_f = F. Δt, temos F = $\frac{I}{\Delta t}$, F= $\frac{105}{15}$ = 7N

Podemos encontrar a solução por meio do gráfico:

Figura 26 – Gráfico do Impulso



Fonte: O autor

Para encontrar a reta que descreve o impulso, precisamos de dois pontos. Um ponto já temos, suas coordenadas foram dadas no problema (15, 105).

Para encontrar o outro ponto, usamos a propriedade de que o gráfico da função linear intersecta a origem do sistema de coordenadas. Logo o outro ponto é O= (0, 0). Com esses dois pontos temos determinada a reta que descreve o impulso.

Conforme já visto, o coeficiente angular de uma função afim, em particular de uma função linear é a tangente do ângulo α conforme a figura 26.

$F\overset{N}{=} tg\alpha = \frac{I}{\Delta t} \Rightarrow \frac{105}{15} \Rightarrow F = 7N.$

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

4.1 Definição

Uma função f: ℝ → ℝ denomina-se função quadrática ou função polinomial do 2°grau quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x)= ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos identificar a função quadrática com o trinômio do 2° grau a ela associado e a escreveremos apenas como $f(x) = ax^2+ bx + c$.

Exemplos 1) $f(x) = -x^2 + 100\,x$, em que a = -1, b= 100 e c=0.

2) $f(x) = 3x^2 -2x + 1$, em que a= 3, b= -2 e c=1.

Quando é dado um determinado valor a variável x, podemos calcular o valor correspondente a esse ponto. Por exemplo, se $f(x) = x^2 -5x + 6$, iremos determinar o ponto correspondente à imagem da função quando x=1, $f(1)= 1^2-5.1+ 6 = 2$, logo temos o ponto de coordenadas (1,2).

Fato importante é que os coeficientes **a**, **b** e **c** da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que a função assume. Podemos assim, identificar uma função quadrática com um trinômio do segundo grau.

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau.

Existem problemas que datam de 4 000 anos em textos cuneiformes, em que encontramos problemas que recaem numa equação do segundo grau, “Determinar dois números conhecendo sua soma **s** e seu produto **p**.” Em termos geométricos esse mesmo problema pode pedir que encontrassem os lados de um retângulo onde conhecemos seu sem-perímetro **s** e a sua área **p**. Chamando de **x** um dos números, o outro será **s-x**. Assim, **p= x(s-x)** ou ainda **p=** $\boldsymbol{sx - x^2}$, ou ainda $x^2 - sx + p$=0. Para mais detalhes ver Lima et al, pag. 122.

Encontrar as raízes da equação $x^2 - sx + p$=0 também é um conhecimento milenar. Existia uma receita que ensinava como proceder para encontrar dois números cuja soma e cujo produto são dados: “Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.”.

Em notação atual temos a regra assim: $x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$ e $s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$

De fato, sejam m e n os números procurados, suponha m ≥ n. Esses números estão a uma mesma distância de suas médias aritméticas, ou seja, $\frac{s}{2} = \frac{m+n}{2}$. Se tivermos **d** como a diferença d = m - $\frac{s}{2}$ = $\frac{s}{2}$ – n teremos os dois números n = $\frac{s}{2}$ – d e m= $\frac{s}{2}$ + d. Porém d é fácil de encontrar, já que p= mn = ($\frac{s}{2}$ +d) ($\frac{s}{2}$ – d) = ($\frac{s}{2}$)² - d², então.

p = $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ – d² e d = $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$·, então temos que n = $\frac{s}{2}$ - $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$ e.

m = $\frac{s}{2}$ + $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$

4.2 A Forma Canônica da Função Quadrática

Consideremos a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos escrever $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$··, se observarmos as duas primeiras parcelas dos colchetes, veremos que são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\,x\frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

Agora completando o quadrado temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Ou seja: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$ (forma canônica)

Ainda podemos ter: $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$, chamando agora de m $= -\frac{b}{2a}$ e k = $\frac{4ac-b^2}{4a}$, encontramos que f(m)=K.

Assim, para todo **x** real e **a**≠ $\mathbf{0}$ temos que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita da seguinte maneira: $f(x) = a(x-m)^2 + k$, onde m $= -\frac{b}{2a}$ e k=f(m).

Em decorrência da forma canônica a função quadrática pode assumir um valor mínimo e um valor máximo de acordo com o sinal de a., como mostrado a seguir.

a) Se a > 0, f(x) assume valor mínimo e é k = f(m);
b) Se a < 0, f(x) assume valor máximo e é k = f(m).

De fato, da forma canônica$f(x) = a(x-m)^2 + k,$ como $(x-m)^2 \geq 0$ para qualquer *x* real, temos.

Se a>0, então $a(x-m)^2 \geq 0$ e, portanto $f(x) = a(x-m)^2 + k \geq k$. Logo, k é o valor mínimo de f(x). Esse ponto mínimo é atingido para x=m, isto é, f(m)=k.

O ponto V=(m,k) é chamado de vértice da parábola e suas coordenadas são **m** $=-\frac{b}{2a}$ e **k**= f(m) =$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

A determinação do vértice da parábola nos auxilia no esboço do gráfico, sendo seu valor máximo ou mínimo.

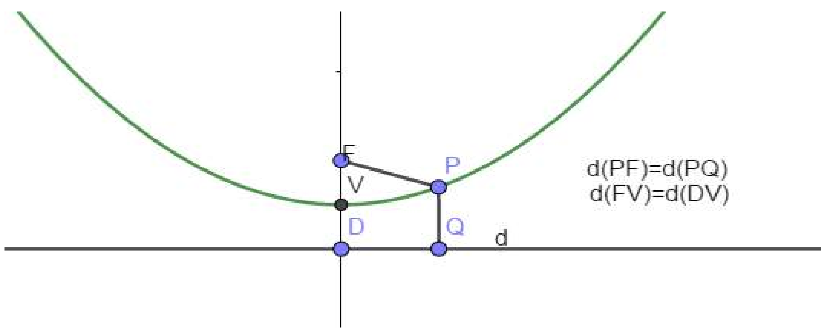
4.3 Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Conforme LIMA et al, (2016, pag.128), “dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.”

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o eixo da parábola. O vértice da parábola é seu ponto mais próximo da diretriz. O vértice é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a intersecção do eixo com a reta diretriz.

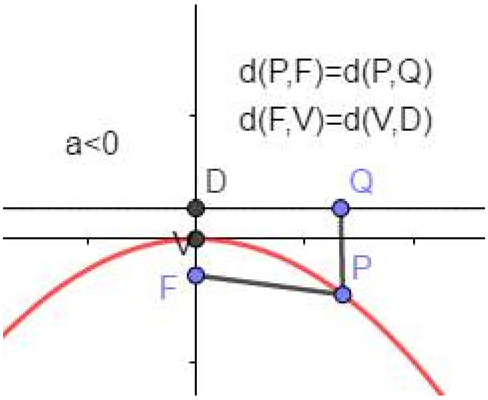
Figura 27 – Gráfico da função quadrática.



a>0

Fonte: autor.

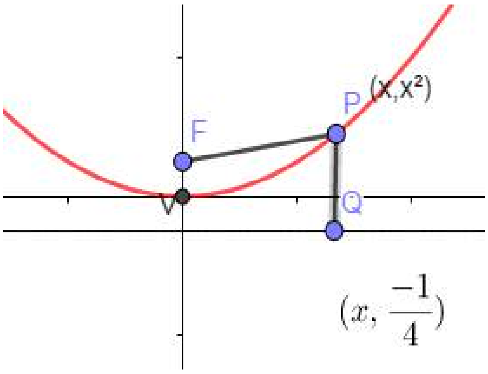
Figura 28– Gráfico da função quadrática.



Fonte: o autor.

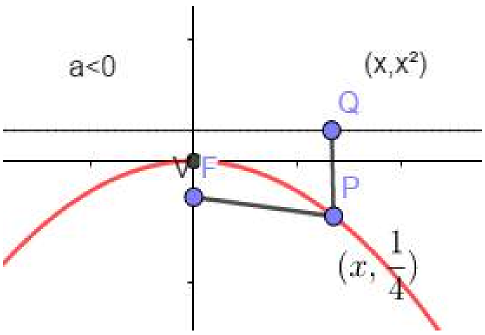
Por exemplo: O gráfico da função quadrática f(x) = x^2 é a parábola cujo foco é F(0,$\frac{1}{4}$) e cuja reta diretriz é y= $\frac{-1}{4}$. Vamos provar isso.

Figura 29 – Gráfico da função quadrática com foco e vértice.



Fonte: o autor.

Figura 30 – Gráfico da função quadrática com vértice e foco.



Fonte: o autor.

- P(x, x^2) são as coordenadas de um ponto qualquer do gráfico de f(x)= x^2.

- A distância de P ao ponto F(0,$\frac{1}{4}$) é calculada por:

d(P, F) = $\sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$ = $\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$ = $x^2 + \frac{1}{4}$

A distância do ponto P(x, x^2) à reta y = $-\frac{1}{4}$ é dada por:

d(P, y) = $\sqrt{(x-x)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2}$ = $x^2 + \frac{1}{4}$. , logo d(P, F) = d(P, y), dessa maneira provamos que o gráfico é uma parábola de foco F(0,$\frac{1}{4}$) e diretriz y= $\frac{-1}{4}$.

Notamos que a parábola tem sua concavidade voltada para cima quando a>0 e voltada para baixo quando a<0. De fato,

Da forma canônica temos: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$. No interior dos colchetes temos uma soma de duas parcelas, onde a primeira parcela é sempre $\geq$ 0 e a segunda é um termo constante. Em outras palavras, $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \geq \frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Temos então:

i. Se a>0, o menor valor de $f(x)$ é encontrado quando $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

   Esse é o valor mínimo assumido pelo gráfico de $f(x)$ e, portanto, a concavidade da parábola do gráfico de f é para cima.

ii. Se a<0, o maior valor de $f(x)$ é encontrado quando $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

   Esse é o valor máximo assumido pelo gráfico de $f(x)$. Assim, a concavidade da parábola é para baixo.

A parábola tem suas intersecções com os dois eixos ortogonais nos seguintes pontos:

- Com o eixo **y**, quando x = 0, ou seja, sendo f(x) = $ax^2 + bx + c$, logo f(0)= a(0)^2+b.0+c, logo f(0)= c, então a parábola intersecta o eixo **y** no ponto (0,c).

- Com o eixo **x**, quando y = 0, nesse caso ela pode intersectar o eixo x em um ponto, dois pontos ou em nenhum ponto. Cada ponto destes é uma raiz real da função f(x) = $ax^2 + bx + c$. Uma maneira de verificar o número de raízes reais é através do **discriminante**

$\Delta = b^2 - 4ac$

Veja que f(x) =0 ⇒ $ax^2 + bx + c = 0$.

Já vimos que a função f pode ser escrita como $f(x) = a(x-m)^2 + k$, com m $= -\frac{b}{2a}$ e k $= \frac{4ac-b^2}{4a}$. Logo, $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x-m)^2 + k = 0 \Leftrightarrow a(x-m)^2 = -k$ $\Leftrightarrow (x-m)^2 = -\frac{k}{a} \Leftrightarrow (x-m)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x - m = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = m \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow$ $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Observe que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (LIMA, 2004 v.2 pag. 232) a função f tem de fato, duas raízes em $\mathbb{C}$, pois é um polinômio de grau 2. Além disso, as raízes de f são reais se, e somente se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Se $\Delta = 0$ ⇒ uma raiz real dupla, e a parábola intersecta o eixo **x** em um ponto apenas.

Se $\Delta > 0$ ⇒ duas raízes reais distintas, e a parábola intersecta o eixo **x** em dois pontos distintos.

Se $\Delta < 0$ ⇒ nenhuma raiz real, a parábola não intersecta o eixo **x**.

Com a definição do discriminante Δ, podemos rescrever as coordenadas do vértice V=(m,k) como **m** $= -\frac{b}{2a}$ e **k**= f(m) $= \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$.

Existe uma relação entre os coeficientes da função f(x)= $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e suas raízes.

De fato, já mostramos que as raízes da função são $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Chamando estas raízes de $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Então obtemos:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b+\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x'.x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

4.4 Taxa de Variação da função Quadrática

A taxa de variação da função quadrática não é constante. Ela tem sua variação dependente do ponto **P** da parábola, e é dada por $2ax_0 + b$, em que x_0 é a abcissa de **P**. Taxa de variação no ponto **P**.

$\tan\alpha = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)}{\Delta x} = \frac{a(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x} = \frac{ax^2+2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x}$ fazendo-se as devidas simplificações temos: $\tan\alpha = \frac{2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x + b$, quando Δx =0, temos: $2ax + b$ sendo a taxa de variação para espaços bem pequenos.

4.5 Caracterização da Função Quadrática

Teorema: (LIMA et al, 2016, pag.151)” A fim de que a função contínua f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante x_1, x_2,..., x_n,... seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada y_1=f(x_1), y_2=f(x_2),... y_n=f(x_n),...”.

Para procedermos à demonstração do teorema, enunciamos a seguir algumas definições e um lema

4.5.1 Definição

Uma progressão aritmética de primeira ordem é uma sequência em que a diferença entre cada termo e o termo antecessor é constante. A constante é denominada razão da progressão aritmética. Por exemplo: a sequência (1, 5, 9, 13, 17, ...) é uma progressão aritmética de primeira ordem onde a diferença entre cada termo e o termo antecessor é 4, isto é, a razão da progressão aritmética é igual a 4.

4.5.2 Definição

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência $(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots)$ na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de primeira ordem.

4.5.3 Definição

Uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada é uma sequência $(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots)$ na qual as diferenças entre termos consecutivos formam uma progressão aritmética de primeira ordem não constante, ou seja, com razão diferente de zero. Como exemplo a sequência (1, 4, 9, 16, ...) a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, pois vejamos: $d_1 = 4 - 1 = 3$, $d_2 = 9 - 4 = 5$, $d_3 = 16 - 9 = 7$. Porém se observarmos essas diferenças entre os termos consecutivos, encontraremos uma progressão aritmética de primeira ordem (3, 5, 7, ...) de razão 2.

4.5.4 Lema

(y_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem se e somente se y_n é um polinômio de segundo grau em n.

Demonstração do Lema

Seja (y_n) uma progressão aritmética de segunda ordem. Portanto $(x_n) = (y_{n+1} - y_n)$ é uma progressão aritmética de razão diferente de zero. Desse modo, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_{n-1} - y_{n-2}) +$ $(y_n - y_{n-1}) + (y_{n+1} - y_n) = y_{n+1} - y_1$. Porém $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (x_n), isto é,$s_n = \frac{rn^2+(2x_1-r)n}{2}$. Então segue que $y_{n+1} - y_1$ é um polinômio de grau 2 em n. Consequentemente, y_n é um polinômio de grau 2 em n também.

Suponhamos agora que $y_n = an^2 + bn + c$, com a, b e c $\in \mathbb{R}$ e a$\neq 0$. Logo, $y_{n+1} - y_n$=$a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c = an^2 2an + a + bn + b + c -$ $an^2 - bn - c = 2an + (a + b)$. Esta expressão de primeiro grau em n, portanto $(y_{n+1} - y_n)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem e, como resultado (y_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

4.5.5 Teorema da Caracterização da Função Quadrática

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, f é quadrática se e somente se, toda progressão aritmética não constante ($(x_1, x_{2,} x_{3,} \dots, x_n, \dots)$ é transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots)$.

Demonstração do Teorema de Caracterização da Função Quadrática

Seja (x_n) uma progressão aritmética de primeira ordem, com $x_n = x_{n-1} + r = x_1 + (n-1)r$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Devemos mostrar que $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, então, as diferenças sucessivas : $d_1 = f(x_2) - f(x_1)$

$$d_2 = f(x_3) - f(x_2)$$
$$\vdots$$
$$d_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$$

$$d_{n+1} = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1})$$

formam uma progressão aritmética

Agora calculemos $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$, $f(x_{n+2})$ para em seguida encontrarmos d_n e d_{n+1}.

$f(x_n)$= $f(x_1 + (n-1)r)$ = a$(x_1 + (n-1)r)^2$+b$(x_1 + (n-1)r) + c$=$a{x_1}^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c$.

$f(x_{n+1}) =$ $f(x_1 + nr)$= a$(x_1 + nr)^2 + b(x_1 + nr) + c =$ $a{x_1}^2 + 2ax_1rn$+ an^2r^2+ $bx_1 + bnr + c$

$$f(x_{n+2}) = f(x_1 + (n+1)r) = a(x_1 + (n+1)r)^2 + b(x_1 + (n+1)r) + c$$
$$= a{x_1}^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c$$

$d_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) =$ $a{x_1}^2 + 2ax_1rn$+ an^2r^2+ $bx_1 + bnr + c$ -$(a{x_1}^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c)$= $2arx_1 + 2anr^2 - ar^2 + br$

$d_{n+1} = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1}) =$ $a{x_1}^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c - (a{x_1}^2 + 2ax_1rn + an^2r^2 + bx_1 + bnr + c)$ = $2arx_1 + 2anr^2 + ar^2 + br$

Temos: $d_{n+1} - d_n =$ $2arx_1 + 2anr^2 + ar^2 + br - (2arx_1 + 2anr^2 - ar^2 + br) = 2ar^2$, logo $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem de razão r=$2ar^2$.

"Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continua que tem a propriedade de transformar toda progressão aritmética não constante numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Substituindo $f(x)$ por $g(x) = f(x) - f(0)$, vemos que g tem as mesmas propriedades de f e mais a propriedade adicional de que $g(0) = 0$". (LIMA et al, 2016, pag. 151).

Considerando a progressão aritmética de primeira ordem (1, 2, 3, ...) temos que $\big(g(n)\big)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Portanto existem constantes $a \neq 0$ e b tais que $g(n) = an^2 + bn \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. (Lembre-se que poderia ser $g(n) = an^2 + bn + c$, como $g(0) = 0$).

A seguir fixemos um número arbitrário $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a seguinte P.A. $\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots \frac{n}{p}, \dots\right)$

De maneira semelhante, concluímos que existem reais $a' \neq 0$ e b' tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Assim temos: $an^2 + bn = g(n) = g\left(\frac{np}{p}\right) = a'(np)^2 + b'(np)$, assim $an^2 + bn = (a'\,p^2)n^2 + (b'p)n$.

Assim as funções quadráticas $ax^2 + bx$ e $(a'\,p^2)x^2 + (b'p)x$ são idênticas $\forall\, n = x \in \mathbb{N}$. Isso nos obriga a $a = a'\,p^2 \Leftrightarrow a' = \frac{a}{p^2}$ e $b = b'\,p \Leftrightarrow b' = \frac{b}{p}\cdot$, então para quaisquer naturais n e p temos: $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n$$

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right)$$

Dessa maneira as funções contínuas $g(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$ para todo racional positivo $r = \frac{n}{p}\cdot$. Se $p \notin \mathbb{Q}$, então $p = lim\, r_n$, onde $r_n \in \mathbb{Q}$. Logo $g(p) = g(lim\, r_n)$, sabendo que g é contínua, temos então que:

$$g(p) = lim\, g(r_n)$$
$$g(p) = lim(a{r_n}^2 + br_n)$$

Mas como a função quadrática é contínua, logo:

$$g(p) = a.\, lim{r_n}^2 + b.\, limr_n$$

$$g(p) = ap^2 + bp$$

Logo $g(x) = ax^2 + bx$ para todo *x* real positivo.

Por maneira semelhante vamos considerar a progressão aritmética de primeira ordem (-1, -2, -3, ...), concluímos que $g(x) = ax^2 + bx \quad \forall x \leq 0$. Logo, fazendo $f(0) = c$, temos que $f(x) = g(x) + c$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Apesar de uma função afim transformar uma progressão aritmética de primeira ordem. em outra progressão aritmética de primeira ordem, a função quadrática por sua vez transforma uma progressão aritmética de primeira ordem não degenerada em outra, porém, de segunda ordem, ou seja, ela transforma uma progressão aritmética numa sequência cujas diferenças dos termos consecutivos formam uma progressão aritmética.

Por exemplo, sendo f(x) = x^2, temos que f(1) = 1, f(3) = 9, f(5) = 25, f(7) = 49, f(9) = 81.

9-1= 8, 25-9= 16, 49-25= 24, 81-49 = 32 essa sequência não é uma progressão aritmética, mas se fizermos a diferença dos termos consecutivos da nova sequência temos uma progressão aritmética de segunda ordem, pois: 16-8=24-16=32-24 = 8.

Outro exemplo, sendo f(x) = x^2 - 2x+1, os valores de x variando de 1 a 5, teremos: f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 9, f(5) = 16, as diferenças dos primeiros resultados são: 1 – 0=1 4-1=3, 9-4= 5, 16-9= 7, logo a progressão aritmética de segunda ordem será a diferença dos novos resultados consecutivos, assim: 3-1 = 5-3 = 7-5 = 2.

4.6 A Função Quadrática Aplicada à Física

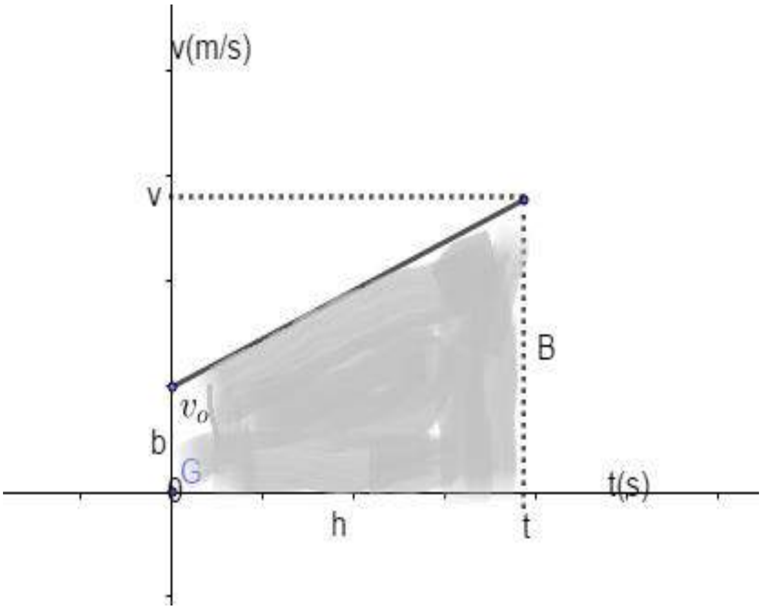
Veremos a seguir algumas aplicações da função quadrática à Física da primeira série do Ensino Médio.

4.6.1. Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)

A equação horária dos espaços do M.R.U.V. é um bom exemplo de função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, vejamos, pois s(t) =s_o + v_o.t + $\frac{a.t^2}{2}$, onde s_o é a posição inicial do móvel, v_o é a velocidade inicial do móvel, t é o tempo e a é a aceleração do móvel. Lembramos que na seção 2.6.2, vimos que a função da velocidade no MRUV é dada por $v = v_o + a.t$ e, portanto, é uma função afim.

Essa equação pode ser verificada a partir do gráfico **v**x**t**, onde **v** é a velocidade média, que pode ser dada por exemplo em m/s e **t** é o tempo, que pode ser expresso por exemplo em s, vejamos:

Figura 31 - Gráfico v x t.



Fonte: o autor.

$\Delta s \overset{n}{=} área = \frac{B+b}{2}.h$ e $B \overset{n}{=}$v, $b \overset{n}{=} v_o$ e $h \overset{n}{=} t$, então: $\Delta s = \frac{v+v_0}{2} \cdot .t,\ onde\ v = v_o + a.t$, logo $\Delta s = \frac{v_o+a.t+v_o}{2}.t = \frac{2v_o+a.t^2}{2}$, logo $\Delta s = v_o.t + \frac{a.t^2}{2}$, como $\Delta s = s - s_o = v_o.t + \frac{a.t^2}{2}$, portanto, s= f(t) do M.R.U.V. é: $s = s_o + v_o.t + \frac{a.t^2}{2}$, que é uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. O parâmetro **a** corresponde metade da aceleração, o parâmetro **b** equivale à velocidade inicial e o termo independente **c** é correspondente ao espaço inicial do móvel. Observe que se $a = 0$, isto é, o móvel não está acelerando ou freando e, portanto, está em movimento retilíneo uniforme, a equação do movimento se torna $\Delta s = s - s_o = v_o.t$, que é uma função afim, como esperado.

Observações Importantes

1) Exemplos de funções horárias do espaço s=f(t), com unidades no sistema internacional:

$s = 20 + 7.t + 4t^2$, onde $s_o = 20$ m, $v_o = 7$m/s e $a = 8$ m/s^2.

$s = -3 + t + 2.\ t^2$, onde $s_o = -3$ m, $v_o = 1$ m/s e $a = 2$ m/s^2

2) No M.R.U.V., o móvel muda de sentido quando a velocidade troca de sinal. Isto porque para que o sinal da velocidade seja invertido, em algum instante de tempo essa velocidade tem que se anular (trata-se do Teorema do Valor

Intermediário, vide LIMA,2004 v. 1 pag. 234). Aos estudantes do ensino médio, o fato da velocidade se anular pode ser ensinado usando-se por exemplo, o gráfico da velocidade e argumentando-se que, para que haja inversão do sentido do movimento, o móvel precisa se mover em um determinado sentido com o módulo da velocidade reduzindo gradativamente, até que ele para e em seguida começa o movimento em sentido contrário, com o módulo da velocidade aumentando. Matematicamente, podemos verificar se o móvel muda de sentido analisando os sinais da aceleração (a) e da velocidade inicial ($\mathbf{v}_o$): quando essas grandezas tiverem sinais opostos, o móvel pode mudar de sentido. Caso contrário, o móvel permanece sempre se movendo no mesmo sentido. De fato:

A equação da velocidade é dada por $v=v_o+at$. Como vimos, para que o móvel mude de sentido, em algum instante, a velocidade deve se anular. Então

$0 = v_o+at \Longrightarrow v_o = -at$. Como $t \geq 0$, segue que v_o e a devem ter sinais opostos para que a velocidade se anule em algum instante de tempo $t > 0$.

Por exemplo, na equação $s= 5t - t^2$, temos $v_o=5$ m/s e $a= -2$ m/s². Portanto, os sinais de v_o e a são opostos e o móvel muda de sentido em algum instante de tempo. Podemos calcular este instante de tempo por meio da equação da velocidade dada por $v= 5 - 2t$; logo: $-2t + 5=0 \Longrightarrow t= \frac{5}{2} = 2{,}5$s.

Na equação $s= 0{,}1 - t - 0{,}5.\ t^2$, temos $v_o=-1$ m/s e $a= -1$ m/s². Portanto, os sinais de v_o e a coincidem; assim, o móvel não muda de sentido. Este fato também pode ser verificado por meio da equação da velocidade, dada por $v= -1- t$. Fazendo $v=0$, segue que $-1-t=0 \Longrightarrow t=-1$s. Como o tempo não pode ser negativo, o móvel não muda de sentido.

3) Equação de Torricelli: $\mathrm{v}^2 = v_o^2 - 2\mathrm{a}.\Delta s$. A equação de Torricelli foi elaborada pelo físico e matemático italiano Evangelista Torricelli. Ela nos permite encontrar algumas grandezas do M.R.U.V., como aceleração, velocidade inicial, velocidade final e o deslocamento de um móvel que apresente movimento com aceleração constante, em situações que não se conheça o intervalo de tempo no qual aconteceu o movimento.

A equação de Torricelli pode ser deduzida da seguinte forma:

Sejam a equação horária $\Delta s = s - s_o = v_o.t + \frac{a.t^2}{2}$ e a equação da velocidade $v = v_o + a.t$. Multiplicando ambos os membros da primeira equação por $(2.a)$ temos $2a\Delta s = 2av_o.t + a^2.t^2$. Na segunda equação, fazemos $v^2 = (v_o + a.t)^2 = {v_o}^2 +$

$2av_ot + a^2.t^2 \Longrightarrow v^2 - {v_o}^2 = 2av_ot + a^2.t^2$. Substituindo na expressão anterior, resulta em $2a\Delta s = v^2 - {v_o}^2 \Longrightarrow v^2 = {v_o}^2 + 2a\Delta s$.

Nas seções seguintes, ilustramos o uso interdisciplinar que a Matemática pode ter em relação a alguns tópicos de Física, no que se refere às funções quadráticas.

4.6.2 Lançamento Vertical

Quando um corpo é arremessado com velocidade inicial na direção vertical, temos um lançamento vertical. A trajetória é retilínea vertical e movimento é tido como uniformemente variado.

A queda livre é um exemplo de lançamento vertical, pois é um movimento de descendente, livre dos efeitos do ar.

Temos duas possibilidades para a orientação da trajetória conforme a conveniência. Nesse caso, o espaço (s) é trocado pela altura (h) e a aceleração escalar (a) pela aceleração gravitacional (g):

4.6.3 Orientação para cima

$a = -g$ $\quad$ $h = h_o + v_o.\,t - \frac{g.t^2}{2}$ $\quad$ $v = v_o - g.t$ $\quad$ $v^2 = v_o^2 - 2g.\Delta h$

2.8.3.1 Orientação para baixo

$a = g$ $\quad$ $h = h_o + v_o.\,t + \frac{g.t^2}{2}$ $\quad$ $v = v_o + g.t$ $\quad$ $v^2 = v_o^2 + 2g.\,.\Delta h$

Exemplo 11: Um corpo é arremessado verticalmente para cima, do solo, com a velocidade escalar de 20 m/s. Desprezando-se os efeitos do ar e adotando g = 10 m/s^2, determine:

a) As funções horárias h= f(t) e v= f(t);

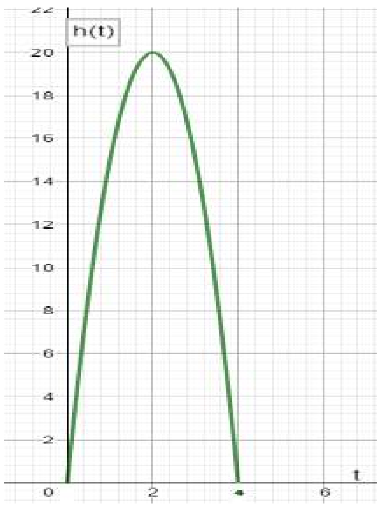
A equação horária da altura $h = h_o + v_o.\,t - \frac{g.t^2}{2}$ é uma função quadrática como vimos anteriormente. Temos h_o= 0 m (corpo parte do solo), v_o= 20 m/s e g = 10 m/s^2 que são dados do problema. Assim $h(t) = 0 + 20t - \frac{10t^2}{2}$; logo $h(t) = 20t - 5t^2$.

Entendemos ser interessante efetuar a representação gráfica do problema. A seguir, detalhamos os passos para sua elaboração.

1) Tendo em vista que a equação do movimento é uma função quadrática, sabemos que seu gráfico é uma parábola.
2) Como na equação horária da altura o parâmetro **a** é negativo, a concavidade da parábola é voltada para baixo.
3) Cálculo das raízes da equação: quando a altura é nula (isto é, quando o corpo atinge o solo), encontramos dois valores para o tempo, $t_o = 0s$ e $t_1 = 4s$, que são as raízes da equação horária. Como o corpo é arremessado a partir do solo, sua altura inicial é nula e, portanto, a parábola intersecta a origem do sistema de coordenadas O=(0,0). Observe que o cálculo das raízes pode ser feito usando o método apresentado anteriormente para determinação das raízes de uma equação quadrática.
4) O eixo de simetria do gráfico que representa a função passa pelo vértice da parábola. As coordenadas do vértice, conforme mostrado anteriormente é dado por $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. Em nosso problema, temos que as coordenadas do vértice são t = 2s e h=20 m.
5) O vértice $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ nos fornece a altura máxima atingida pelo corpo e o instante de tempo em que isto ocorre. No exemplo dado, o corpo atinge a altura máxima de 20 m no instante de tempo t= 2s.

A partir destes dados, podemos esboçar o gráfico, conforme ilustrado na Figura 30.

Figura 32 - Função horária da altura



Fonte: o autor.

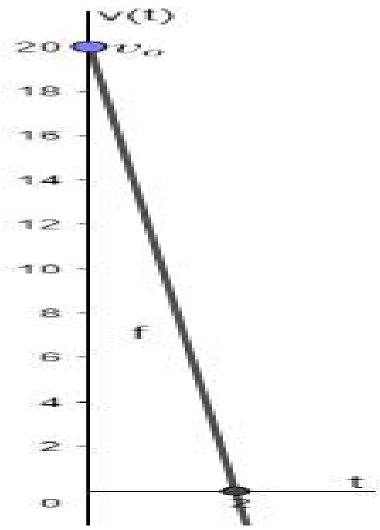
Analisando a equação horária do movimento, constatamos que a aceleração do móvel é negativa e que a velocidade inicial é positiva, confirmando assim que o corpo muda de sentido em sua trajetória. Isto condiz com a experiência cotidiana de se arremessar um corpo para o alto: ele sobe, atinge uma altura máxima, e em seguida, desce, invertendo assim, o movimento.

Podemos observar também que o tempo de subida é igual ao tempo de descida. De maneira detalhada, temos

1) de $0 \leq t < 2$s, a altura (espaço) aumenta e a velocidade é positiva; portanto o M.U.V. é progressivo e retardado.
2) para t= 2s, o móvel muda de sentido, momento em que v= 0m/s.
3) para $t \geq 2s$, a altura (espaço) diminui e a velocidade é negativa, consequentemente o M.U.V. é retrógrado e acelerado.

Observamos que a função horária da velocidade do M.U.V. é uma função afim com parâmetro $a < 0$ (função estritamente decrescente). Para v=0 encontramos t= 2s. Na figura 33, apresentamos o respectivo gráfico. Não detalhamos este gráfico pois as funções afim já foram discutidas exaustivamente neste trabalho.

Figura 33 - Função horária da velocidade.



Fonte: o autor.

Um exemplo recente em que o estudo não tradicional de matemática foi fundamental para incentivar o aprofundamento do estudo de matemática, em particular, estudo de funções quadráticas é o Teorema de Etiene, apresentado a seguir

4.7 Teorema de Etiene

A aluna Camille Etiene do primeiro ano do ensino médio do curso técnico em Química, do Instituto Federal Fluminense em Bom Jesus do Itabapoana, no Noroeste Fluminense, desenvolveu um resultado interessante em 2018, enunciado a seguir.

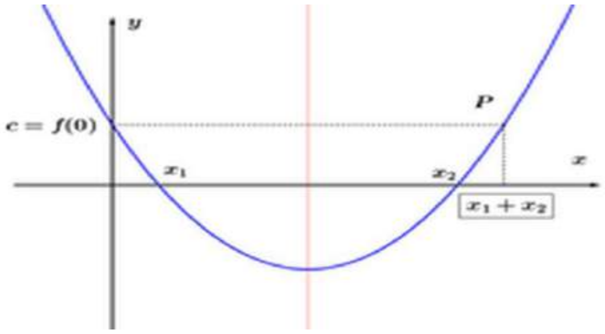
Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, e suponha que $f(x)$ tenha raízes reais x_1 e x_2. Seja P o ponto da parábola simétrico ao ponto Q=(0, c), ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo y em relação ao eixo de simetria da parábola. Então P=$(x_1 + x_2, c)$, isto é, a abcissa de P é dada pela soma das raízes de f.

Queremos encontrar o ponto P=(p, c) simétrico ao ponto (0, c) em relação ao eixo de simetria da parábola de f. Logo, P=(p, c), como P ϵ $Graf(f)$, temos: $c = ap^2 + bp + c \Rightarrow ap^2 + bp + c - c = 0 \Rightarrow ap^2 + bp = 0 \Rightarrow p(ap + b) = 0 \Rightarrow p = 0$ ou $p = -\frac{b}{a}$. Note que se $p = 0$ temos P=(0, c)=Q, que é o ponto de interseção da parábola com o eixo das ordenadas. Por outro lado, sabemos que se x_1 e x_2 são raízes de $f(x)$, então: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ soma das raízes. Logo $p = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$. ■

Observamos que, em princípio, Etiene enunciou seu resultado apenas para o caso em que as raízes de f são reais. Entretanto, o resultado vale também no caso em que as raízes são complexas conjugadas, como mostrado a seguir.

De fato, se $\Delta < 0$ temos raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ pertencentes ao conjunto dos números complexos, logo $x' + x" = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2b+\sqrt{-\Delta}-\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$, concluindo que o teorema de Etiene também se aplica para raízes complexas.

Figura 34 – Gráfico da função quadrática.



Fonte: https://impa.br/wp-content/uploads/2019/08/CamilleEtienne2700.jpg.

5 VETORES

Neste capítulo é feita uma introdução acerca dos vetores, com a apresentação de um breve histórico e posteriormente de uma definição formal, bem como suas operações de adição, subtração e multiplicação por um escalar. O capítulo é encerrado com uma seção a respeito das aplicações das noções matemáticas de vetores à Física na 1ª série do Ensino Médio.

Tendo em vista que o objetivo é tratar do tema vetores no Ensino Médio, de maneira geral consideraremos apenas vetores do espaço $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, em particular, n=2.

Existem algumas grandezas matemáticas que são denominadas grandezas escalares, têm como características serem representadas por um número e uma unidade de medida que já ficam bem entendidos. Por exemplo, a massa, a temperatura, a altura, o comprimento de um segmento. Porém, existem grandezas que necessitam mais do que isso, são as grandezas vetoriais. Para ficarem bem entendidas, estas grandezas necessitam além do número e da unidade, da direção e sentido. Nesse caso a expressão “para onde?” faz todo o sentido. São sempre representadas por um segmento orientado.

De acordo com (DELGADO, J; FRENSEL,K; CRISAF, L. 2014) “Os vetores são entes matemáticos determinados por segmentos orientados, caracterizando a direção, o sentido e o módulo.”

Diante das dificuldades de aprendizagem encontradas por alunos do ensino básico quando o assunto é vetor, vários pesquisadores vêm desenvolvendo pesquisas para mostrar a necessidade de se incluir o estudo de vetores no ensino fundamental e médio. O estudo de vetores irá sintetizar muitas ideias importantes da geometria analítica, geometria euclidiana e da Física.

Inicialmente quando trabalhamos vetores com alunos do primeiro ano do ensino médio, devemos levá-los a compreender o conceito de vetores, seja do ponto de vista geométrico (classe de equipolência de segmentos orientados que possuem todos a mesma intensidade, mesma direção e mesmo sentido) bem como do ponto de vista algébrico (definido por suas coordenadas).

5.1 Origem e Evolução do conceito de vetor

Os vetores surgiram no século XIX como representação geométrica dos números complexos. Nomes importantes como Caspar Wessel, Carl Friedrich Gauss e Jean Robert Argand, enunciaram os números complexos como pontos do plano bidimensional, isto é, como vetores bidimensionais. Os números complexos foram denominados assim por serem diferentes dos demais, não são simples como o 4 e 361, mas são formados por duas partes que compõem um todo; uma parte real (bem familiar) e outra parte que combina um número real com a raiz quadrada de menos um ($\sqrt{-1}$). De maneira que este novo número estranho tem a forma $a + b\sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}$, onde a é a parte real e $b\sqrt{-1}$, é denominado parte imaginária. Posteriormente $\sqrt{-1}$ passou a ser i, a unidade imaginária.

Vários matemáticos trabalharam com esses novos números, Gauss em 1799, por exemplo, utilizou largamente os números complexos para provar o Teorema Fundamental da Álgebra. No ano de 1837, Hamilton provou que os números complexos poderiam ser representados abstratamente como pares ordenados (a, b) de números reais. Hamilton é apontado como um dos principais divulgadores da ideia atual do sistema de análise vetorial. Ele foi quem primeiro usou os termos escalar e vetor para constituir a parte real e a parte imaginária respectivamente de um quatérnion (constitui um dos principais sistemas de análise vetorial).

A descoberta dessa estrutura teve uma importância histórica para o desenvolvimento da análise vetorial, pois, a partir desses conhecimentos estruturou-se a análise vetorial como a conhecemos hoje.

Cabe salientar que a ideia de grandezas vetoriais já era usada em Física antes da formalização matemática, em representações de velocidade, aceleração e força. De fato, a regra do paralelogramo (resultado geométrico para a soma e para a diferença de vetores) já havia sido desenvolvida. Hamilton com seu monumental trabalho, uniu as noções dos matemáticos e dos físicos, dando aos números complexos uma importante interpretação (vetorial) nas ciências da Natureza.

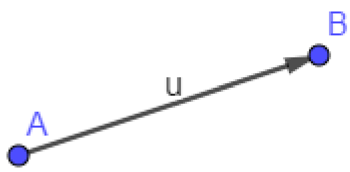
No trabalho “Sur les clefs algébriques”, Cauchy contribuiu com o desenvolvimento do conceito de vetor, mostrando métodos para encontrar as raízes de uma equação qualquer. Adotou os princípios de rayon vector e suas projeções sobre os eixos, também de nindo rayon vector como a adição de suas projeções, difundindo dessa forma o uso dos números complexos e sua representação geométrica.

5.2 Segmento orientado

Dizemos que um segmento $\overrightarrow{AB}$ é orientado quando fazemos uma distinção entre os pontos A e B que o determinam, sendo um deles a origem e o outro a extremidade do segmento. Caso o ponto A seja a origem e o ponto B a extremidade, teremos então o segmento $\overrightarrow{AB}$ e a orientação será de A para B. Porém se caso B seja a origem, A então será a extremidade e denotaremos o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$. Assim o sentido da orientação é de B para A. Ainda podemos escrever que $\overrightarrow{BA}$= - $\overrightarrow{AB}$ para indicarmos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm sentidos opostos. O segmento orientado $\overrightarrow{AA}$ é chamado de segmento nulo.

A representação geométrica de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é uma reta que aponta do ponto A que é a origem para um ponto B extremidade, acrescido de uma seta que caracteriza visualmente o sentido do percurso.

Figura 35 – Segmento orientado $\overrightarrow{AB}$



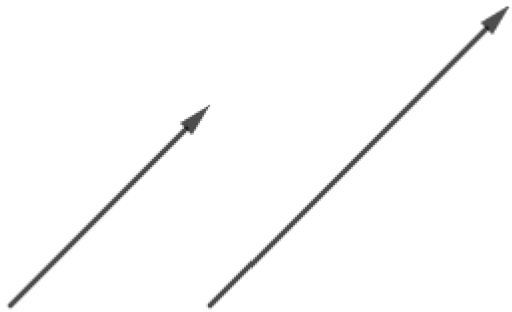
Fonte: O autor.

O comprimento de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é definido quando adotamos uma unidade de medida e equivale à distância que vai do ponto A até o ponto B.

Sejam dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, eles terão a mesma direção se as retas r_{AB} e r_{CD} forem paralelas ou coincidentes.

Se dados dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, distintos e com mesma direção, se as retas r_{AB} e r_{CD}forem distintas, diremos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tem o mesmo sentido quando a interseção entre os segmentos de retas AC e BD for vazio. Caso contrário, diremos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possuem sentidos opostos.

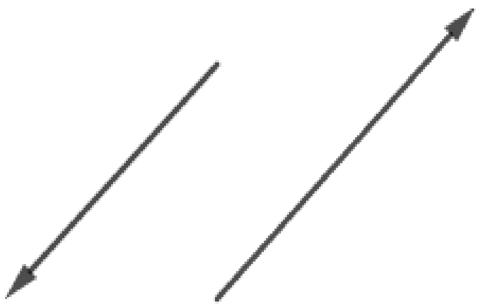
Figura 36 – Segmentos orientados com mesmo sentido



Fonte: O autor

Sejam dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, distintos e com mesma direção se as retas r_{AB} e r_{CD}forem coincidentes, tome um ponto A' $\notin r_{AB}$e sendo s a única reta paralela à reta r_{AB}e que passa em A'. Feito isso, tome um ponto B' ∈ s de forma que os segmentos orientados $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{AB}$ tenham o mesmo sentido. Diremos que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido se os segmentos orientados $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{CD}$ tiverem o mesmo sentido, caso contrário, teremos então que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ apresentam sentidos opostos.

Figura 37 – Segmentos orientados com sentidos opostos



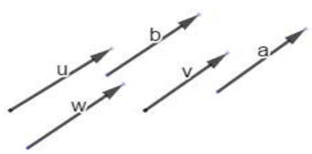
Fonte: O autor

Dois ou mais segmentos orientados são equipolentes se possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

5.3 Definição:

Vetor é uma coleção de segmentos orientados que possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido, isto é, classe de equipolência de segmentos orientados de um espaço vetorial $\mathcal{V}^n$.

Figura 38 - Vetores representantes de **a.**



Fonte: o autor.

Vale destacar que segundo a definição, um vetor fica determinado por uma infinidade de segmentos de mesmo módulo, direção e sentido. Isoladamente cada um deles pode ser chamado de representante do vetor ou apenas vetor.

Geralmente representamos um vetor por uma letra minúscula com uma flecha sobre ela, por exemplo, $\vec{v}$ ou ainda a partir das extremidades de um segmento orientado que o represente, como exemplo, $\overrightarrow{AB}$.

Dois vetores são iguais se seus representantes possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido, casos contrários serão distintos.

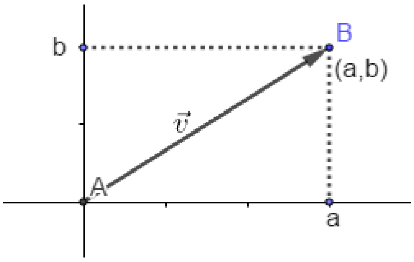
Podemos manipular os vetores através de suas representações em relação a um sistema de eixos ortogonais dados. Dados A=(a_1, a_2) e B=(b_1, b_2), os número b_1-a_1 e b_2-a_2 são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ e escrevemos $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Exemplo: Sejam A=(2, 3) e B=(1, 4). As coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ são dadas por (1-2, 4-3)= (-1, 1).

Seja um sistema de eixos ortogonais OXY no plano. Para todo vetor $\vec{v}$ existe um único ponto **P** tal que $\vec{v}$ = $\overrightarrow{OP}$, onde as coordenadas de $\vec{v}$ coincidem com as coordenadas do ponto **P**. Para demonstrar esse resultado, considere a reta r_v e tome s a reta paralela a r_v e que passa pela origem O. Em s, tome o ponto P de maneira que o segmento orientado $\overrightarrow{OP}$ tenha mesma direção, sentido e comprimento do vetor $\vec{v}$.

O módulo ou norma de um vetor $\vec{v}$ é representado por $\|\vec{v}\|$ e indica o seu comprimento, $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que é determinado através da distância entre dois pontos.

Figura 39 - Representação gráfica de um vetor no plano



Fonte: o autor.

De uma maneira geral, conceitos envolvendo vetores são definidos utilizando-se seus representantes. Assim sendo temos as seguintes definições:

Definição (vetores paralelos):

Diremos que dois vetores são paralelos quando seus representantes tiverem a mesma direção ou ainda quando um desses vetores for o vetor nulo $\vec{0}$. Esse termo inclui os vetores que estão na mesma reta e o caso em que são coincidentes. Como consequência dessa definição o vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer vetor e, todo vetor é paralelo a si mesmo.

Definição (vetores coplanares):

Dois vetores são coplanares, se seus representantes estão contidos no mesmo plano.

5.4 Operações com Vetores

Iremos definir duas operações com os vetores no plano, a adição de vetores e a multiplicação de um escalar por um vetor.

5.4.1 Definição

Sejam um vetor $\vec{v}$ e um escalar λ. Podemos realizar a multiplicação de λ por $\vec{v}$, obtendo assim um novo vetor $\lambda\vec{v}$ definido do seguinte modo:

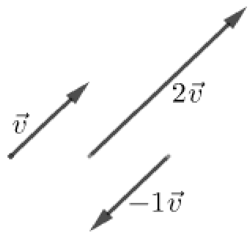
i. Se o vetor $\vec{v}$ é nulo ou o escalar λ é zero então $\lambda\vec{v}$ = 0

ii. Se λ > 0, o vetor $\lambda\vec{v}$ é o vetor com o mesmo sentido, e mesma direção e com comprimento $|\lambda|\|\vec{v}\|$.

iii. Se $\lambda < 0$, então o vetor $\lambda\vec{v}$ é o vetor com a mesma direção, e sentido oposto ao vetor $\vec{v}$ e comprimento $|\lambda|\|\vec{v}\|$.

Em particular, dado um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, com $v_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ e daí o produto do escalar λ pelo vetor $\vec{v}$ é dado por $\lambda\vec{v} = \lambda\,(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3, \dots, \lambda v_n)$.

Figura 40 - Multiplicação de um vetor por um escalar.



Fonte: o autor.

Propriedades da multiplicação de um vetor por um escalar

Sejam $\vec{v}$ e $\vec{u}$ vetores quaisquer e **a** e **b** números reais quaisquer, temos:

1. Comutativa: a. $\vec{v}$ = $\vec{v}$. a
2. Associativa: a.(b. $\vec{v}$) = (a.b). $\vec{v}$
3. Distributiva em relação à adição de escalares: (a+b). $\vec{v}$ = a. $\vec{v}$ +b. $\vec{v}$
4. Distributiva em relação à adição de vetores: a.($\vec{v}$ +$\vec{u}$) = a. $\vec{v}$ + a. $\vec{u}$
5. Identidade: 1. $\vec{v}$ = $\vec{v}\cdot$. 1 = $\vec{v}$

Faremos a demonstração da propriedade comutativa. Sejam a ϵ $\mathbb{R}$ e $\vec{v}$=(v_1, v_2) um vetor. Temos que a. $\vec{v}$ = a(v_1, v_2)= (av_1, av_2)= $(v_1, v_2)a$=$\vec{v}a$

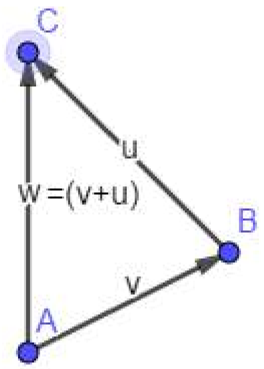
As demonstrações das demais propriedades são similares e por isso, não faremos.

5.4.2 Soma de Vetores:

Definição:

Dois ou mais vetores no plano podem ser somados do seguinte modo: a soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, denotada por $\overrightarrow{v+u}$ ou simplesmente $\vec{v}$ + $\vec{u}$ é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, representante arbitrário de $\vec{v}$, tome um segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ que representa $\vec{u}$, isto é, tome um representante de $\vec{u}$ com origem na extremidade final do representante de $\vec{v}$, dessa maneira o vetor $\vec{v}$+ $\vec{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AC}$, ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de $\vec{v}$ até a extremidade final do representante de $\vec{u}$**.**

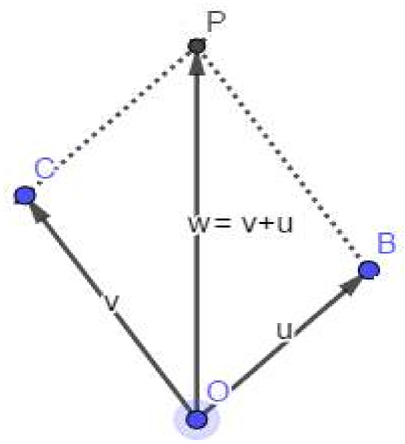
Figura 41 - Soma de vetores



Fonte: O autor.

Também podemos somar os vetores através da regra do paralelogramo. Para realizarmos a soma $\vec{v}$ + $\vec{u}$ através dessa regra, tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum **O**. A partir do ponto final de cada vetor, traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptarão num ponto **P**. Então um paralelogramo será formado. O vetor diagonal **OP** será a soma dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$. O vetor $\vec{v}$+$\vec{u}$ obtido por esse método é o mesmo do método anterior, pois o segmento **OP** divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes.

Figura 42 - Regra do paralelogramo



Fonte: O autor.

Se os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são ortogonais, isto é, o ângulo α entre eles é igual a 90 ° e $\cos\alpha$ = 0, temos então que o módulo do vetor soma $\vec{v}+\vec{u}= \vec{w}$ é obtido através da expressão: $\| \vec{w}\|^2 = \| \vec{v}\|^2 + \| \vec{u}\|^2$, uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras.

Outra forma de fazermos a adição de vetores no plano é utilizando um sistema de coordenadas cartesianas, vejamos a seguir a proposição.

Proposição: Seja um sistema de coordenadas OXY cuja origem é o ponto O = (0, 0) e sejam que $\vec{v} = (x_1, y_1)$ e $\vec{u} == (x_2, y_2)$. Então $\vec{v}+\vec{u} = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$.

Demonstração: Sejam A=(x_1, y_1), B=(x_2, y_2) pontos distintos desse sistema, então $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$. Tomando P=$(x_3, y_3)$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$, temos que:

$\overrightarrow{OB} \equiv \overrightarrow{AP} \Rightarrow (x_2 - 0, y_2 - 0)$=$(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, com isso temos que:

$$x_2 = x_3 - x_1 \Rightarrow x_3 = x_2 + x_1$$

$$y_2 = y_3 - y_1 \Rightarrow y_3 = y_2 + y_1$$

Logo P=(x_3, y_3) = $(x_2 + x_1, y_2 + y_1)$, portanto $\vec{v}+\vec{u} = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$. ■

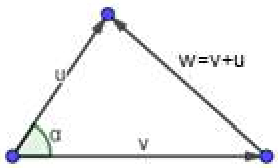
Pela definição da soma de vetores, em geral temos que a soma $\vec{v}+\vec{u} = \vec{w}$ é diferente da soma dos comprimentos dos vetores envolvidos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Assim, de maneira geral $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}+\vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. De fato, temos a seguinte relação

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,$$

em que a igualdade ocorre se, e somente se $\vec{v} = \alpha\vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, satisfazendo $|1+\alpha|=1+|\alpha|$. Esta desigualdade é conhecida como **Desigualdade Triangular** (para mais informações, ver por exemplo LIMA, 2004 v.2 pag. 7).

Podemos utilizar também a lei dos cossenos para encontrar o comprimento de $\vec{v} + \vec{u} = \vec{w}$ para o triângulo da figura a seguir.

Figura 43 - Soma de vetores



Fonte: O autor.

Considerando α o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ indicado na figura, pela lei dos cossenos (ver por exemplo, LIMA, 2016) temos:

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos\alpha}$$

Propriedades da adição de vetores:

1. **Comutativa**: Para todos os vetores $\vec{u}$=(x_1, y_1) e $\vec{v}$=(x_2, y_2) ∈ $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Demonstração: Dados $\vec{u}$=(x_1, y_1) e $\vec{v}$=(x_2, y_2) ∈ $\mathbb{R}^2$, então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2\, , y_1 + y_2)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_2, y_2) + (\, x_1, y_1)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \qquad \blacksquare$$

2. **Associativa:** Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$ ∈ $\mathbb{R}^2$, então:

$$\vec{u} + \overrightarrow{(v + \vec{w})} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

Demonstração: $\vec{u} + \overrightarrow{(v + \vec{w})} = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$

$$\vec{u} + \overrightarrow{(v + \vec{w})} = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$$
$$\vec{u} + \overrightarrow{(v + \vec{w})} = (\,(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$$
$$\vec{u} + \overrightarrow{(v + \vec{w})} = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3))$$
$$\vec{u} + \overrightarrow{(v + \vec{w})} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \qquad \blacksquare$$

3. **Elemento neutro**: O vetor nulo é $\vec{0}$ =(0, 0) ∈ $\mathbb{R}^2$, tal que para todo vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ de $\mathbb{R}^2$, temos: $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Demonstração: Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{0}$ =(0, 0) vetores de $\mathbb{R}^2$

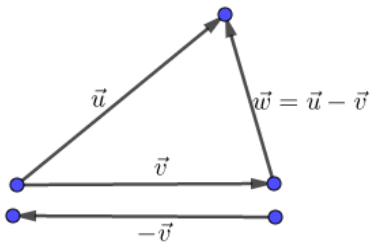
$$\vec{0} + \vec{u} = \big((0{,}0) + (x_1, y_1)\big)$$
$$\vec{0} + \vec{u} = (0 + x_1, 0 + y_1)$$
$$\vec{0} + \vec{u} = (x_1, y_1)$$
$$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \qquad \blacksquare$$

4. **Elemento oposto ou simétrico**: Seja $\vec{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, para cada $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$ em $\mathbb{R}^2$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
   Demonstração: Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$, temos que: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1, y_1)$ $+(-x_1, -y_1)$
   $\vec{u} + (-\vec{u}) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1)$
   $\vec{u} + (-\vec{u}) = (0, 0) = \vec{0}$ $\blacksquare$

5.4.3 Subtração de vetores: A subtração de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definida como a soma do vetor $\vec{u}$ com o oposto do vetor $\vec{v}$, então $\vec{u}$- $\vec{v}$ = $\vec{u} + (-\vec{v}\,)$.

Graficamente temos:

Figura 44 - Subtração de vetores



Fonte: O autor

5.5 Aplicação de vetores à Física

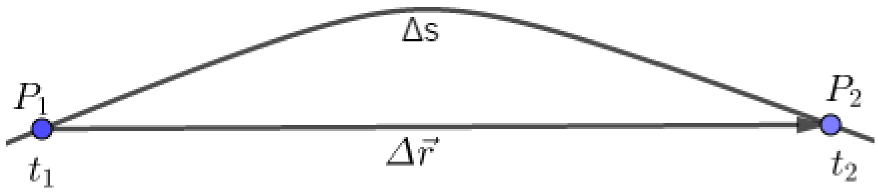
Veremos a seguir aplicações de vetores à Física na 1ª série do Ensino Médio.

5.5.1 Mecânica

No estudo da cinemática vetorial iremos aplicar nossos conhecimentos de vetores para encontrar o deslocamento, velocidade vetorial, aceleração vetorial etc.

Deslocamento: Vamos exemplificar a utilidade de vetores para calcularmos o deslocamento de um corpo. Sejam P_1 a posição de um móvel no instante t_1, e P_2 sua posição no instante t_2. O vetor deslocamento entre os instantes t_1 e t_2 é definido como $\Delta\vec{r}$ = $P_2 - P_1$. Temos um gráfico desse exemplo.

Figura 45 - Vetor deslocamento



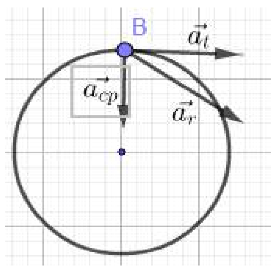
Fonte: O autor

Observamos que o caminho descrito pelo móvel Δs é diferente do vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$, com isso temos $|\Delta\vec{r}| \leq |\Delta s|$.

Movimento circular

No movimento circular a aceleração resultante é calculada pela soma vetorial das acelerações tangencial e centrípeta.

Figura 46 Aceleração resultante



Fonte: O autor

Vetorialmente temos $\overrightarrow{a_r}$ = $\overrightarrow{a_t}$ + $\overrightarrow{a_{cp}}$, onde a_r = aceleração resultante, a_t= aceleração tangencial e a_{cp}= aceleração centrípeta.

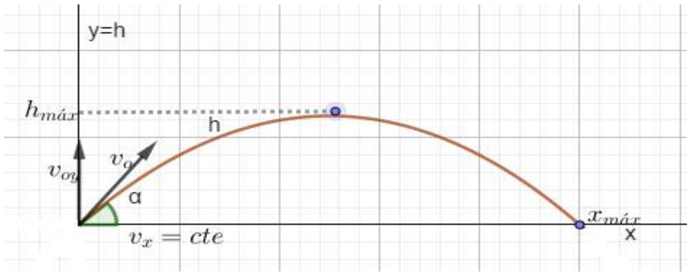
O cálculo algébrico é feito utilizando-se do teorema de Pitágoras: $\|\overrightarrow{a_r}\|=\sqrt{\|\overrightarrow{a_t}\|^2 + \left\|\overrightarrow{a_{cp}}\right\|^2}$

Lançamento Oblíquo

Um corpo é lançado obliquamente quando for arremessado com uma velocidade inicial numa determinada direção, o ângulo formado com a direção horizontal deve ser $0 < \alpha < 90°$. Aqui iremos desprezar a resistência do ar, o movimento resultante tem uma trajetória parabólica e é uma composição de movimentos em dois eixos. No eixo horizontal OX, o movimento é uniforme, visto que não há aceleração nesse caso.

No eixo vertical OY, temos um M.U.V., pois temos a ação da aceleração da gravidade.

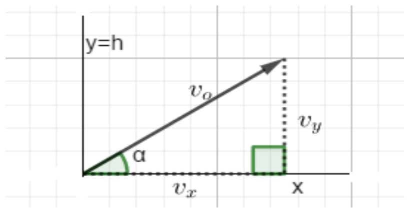
Figura 47 - Lançamento oblíquo



Fonte: O autor.

No eixo das abcissas (**x**) temos as seguintes expressões do M.U. v_x é constante e vale $v_x = v_o \cos\alpha$, a função horária x=f(t)= $v_x \cdot$. t . Essa expressão é calculada usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Figura 48 - Componentes da velocidade no lançamento oblíquo



$v_x = v_o \cos\alpha$ $\quad v_y = v_o \sin\alpha$

Fonte: O autor.

No eixo OY o movimento é do tipo uniformemente variado (MUV), com velocidade vertical inicial $v_{oy} = v_o . \sin\alpha$. Função horária da velocidade vertical $v_y = f(t) = v_{oy} - gt$. Para função horária da altura temos a expressão $h = f(t) = h_o + v_{oy}t - \frac{gt^2}{2}$ com h_o= a altura inicial, v_{oy}= velocidade vertical inicial, t o tempo e g= a aceleração da gravidade.

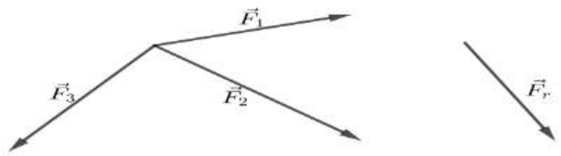
Temos em cada ponto da trajetória parabólica, a velocidade resultante que é encontrada pela soma vetorial $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$. Como as componentes $\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$ são ortogonais podemos aplicar o Teorema de Pitágoras $\|\overrightarrow{v_r}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{v_x}\|^2 + \left\|\overrightarrow{v_y}\right\|^2}$.

5.5.2 Dinâmica

Força resultante é uma aplicação da soma vetorial. Seja um corpo no qual estão aplicadas várias forças. A força resultante é uma força única que produz o mesmo efeito causado por um sistema de forças aplicadas sobre o corpo.

$$\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n}$$

Figura 49 - Sistema de forças e força resultante

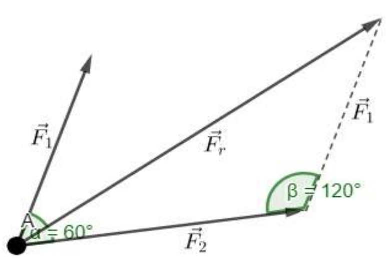


Fonte: O autor.

Exemplo: Duas forças $F_1 e\ F_2$ de mesma intensidade igual a 50 N agem sobre um corpo formando um ângulo de 60°. Determine a intensidade da força resultante.

Solução: Iremos primeiramente representar a ação das forças em um gráfico, para em seguida realizarmos a análise algébrica do problema.

Figura 50 - Força resultante



Fonte: O autor.

Observando a figura iremos calcular a força resultante aplicando a lei dos cossenos no triângulo formado por essas forças, perceba que o ângulo β, é o suplemento do ângulo formado por $F_1 e\ F_2$. Aplicando a lei dos cossenos:

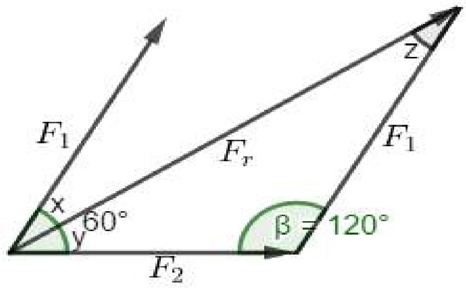
$\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 - 2\|\overrightarrow{F_1}\|\|\overrightarrow{F_2}\| \cos\beta}$

$\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{50^2 + 50^2 - 2.50.50 \cos 120°}$ $\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{2500 + 2500 - 5000\left(\frac{-1}{2}\right)}$ $\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{2500 + 2500 + 2500}$ $\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{7500}$ $\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{2500.3}$ $\|\overrightarrow{F_r}\| = 50\sqrt{3}$ N

Vale ressaltar que podemos explorar conceitos geométricos que não necessariamente estão associados diretamente aos vetores:

1) Ângulos alternos internos: da figura 48, podemos obter a figura 49 abaixo. Desta figura, temos x+y=60. Além disso, segue que x = z pois são ângulos alternos internos. Para maiores informações, ver BARBOSA, 2006 págs. 86-88.

Figura 51 - Força resultante



Fonte: O autor.

2) Ângulos internos de um triângulo: utilizamos também a soma dos ângulos internos de um triângulo para determinar o ângulo suplementar ao ângulo entre as forças, e assim para poder aplicar a lei dos cossenos.

Como os tópicos de geometria plana tratados nos itens 1) e 2) acima, são vistos no 9º ano do ensino fundamental, a discussão de tais tópicos podem funcionar como uma recapitulação apropriada, bem como servir de ilustração para aplicação destes tópicos em Física.

Uma outra observação relevante é que em muitos livros de Física por exemplo (Paraná,1998 6ª ed. pag. 137) a expressão para o cálculo da força resultante entre duas forças que formam um ângulo α entre elas é $\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 + 2\|\overrightarrow{F_1}\|\|\overrightarrow{F_2}\| \cos\alpha}$. Observamos que esta expressão é equivalente à expressão obtida anteriormente, pois do ponto de vista matemático, na aplicação da lei dos cossenos, o ângulo que usamos é $(180^o - \alpha)$ e como $cos(180^o - \alpha)$=cos$(180^o)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(180^o)\operatorname{sen}(\alpha) = -\cos(\alpha)$ segue que $\|\overrightarrow{F_r}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 - 2\|\overrightarrow{F_1}\|\|\overrightarrow{F_2}\| \cos(180^o - \alpha)} = \sqrt{\|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 - 2\|\overrightarrow{F_1}\|\|\overrightarrow{F_2}\|(-\cos\alpha)} = \sqrt{\|\overrightarrow{F_1}\|^2 + \|\overrightarrow{F_2}\|^2 + 2\|\overrightarrow{F_1}\|\|\overrightarrow{F_2}\| \cos\alpha}$

quando aplicamos a lei dos cossenos para somar dois vetores, na Física é utilizado o ângulo suplementar.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca por diferentes formas de transmitir conhecimento tem levado a constantes pesquisas pedagógicas no sentido de sempre melhorar a qualidade do ensino e dar condições equânimes na qualidade de vida das pessoas. No meu entender, essa é a forma mais justa de fazermos justiça social.

Esse trabalho pretende de alguma maneira auxiliar os professores de Matemática e de Física em sua constante busca por mediar o ensino dessas disciplinas de forma contextualizada. Na elaboração do Projeto Político Pedagógico das escolas esses elementos devem estar presentes, pois a Base Nacional Comum Curricular tem em seus objetivos essas aplicações.

O intercâmbio entre professores de diferentes áreas é salutar para que haja a interdisciplinaridade tão buscada por nós profissionais da Educação, nos levando a uma reflexão sobre nossa prática pedagógica.

O estudo de funções observado desde muito cedo, deve aos poucos ser introduzido de maneira formal, assim como as respectivas aplicações no cotidiano dos alunos. Ao longo desse trabalho percebemos quão profundo precisamos chegar para alcançarmos bons índices educacionais em nosso país.

Quando abordamos função afim com sua definição, parâmetros e caracterização podemos perceber sua aplicação no movimento retilíneo uniforme, e em outros conteúdos de Física que envolvam proporcionalidade.

O estudo da função quadrática envolvendo suas raízes e gráfico, bem como a determinação de seu vértice e caracterização, nos leva a observar que podemos realizar a interdisciplinaridade com alguns conteúdos de Física, como exemplo o movimento retilíneo uniformemente variado.

Ao ensinar vetores somente em Física, percebo sua carência como ente matemático no ensino médio, muito embora sabendo que é apenas uma de suas aplicações.

Enfim após o encerramento da proposta, percebo o quanto útil é o Profmat na formação continuada de professores no que concerne a melhoria do ensino básico no País.

Um próximo passo desse trabalho seria a de implementar essa interdisciplinaridade proposta em uma turma do 1º ano do ensino médio e verificar os resultados. Isso ainda não foi possível devido à pandemia do corona vírus, mas pretende-se no futuro realizar tal pesquisa.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. 11.ed. Rio de Janeiro:SBM, 2012.

BARRETO, Nathanael de Sousa. Resolução de problemas: a conexão entre matemática e Física por meio da função afim e quadrática /. 2019. Dissertação (Mestrado) -Mestrado Profissional em matemática (PROFMAT), Universidade Estadual do Maranhão, 2019. Disponível em:http:// sca.profmat-sbm.org.br

BERTOLIN, Carla Augusta. A Aprendizagem Contextualizada Através da Interdisciplinaridade entre Matemática e Física. 2014. Dissertação(Mestrado) – Mestrado profissional em Matemática (Profmat), Universidade Federal de São João Del Rey, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=57169

BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. 3ª ed. São Paulo : Harper & Row do Brasil, 1980.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em .http://basenacionalcomum.mec.gov.br . acesso em 8 de junho de 2020.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Bases Legais. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf. Acesso em: 15 de junho de 2020.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+): Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 15 mar. 2020.

COSTA, André Gustavo Cruz da. A importância da função afim e da geometria plana no aprendizado de física do ensino médio e o GeoGebra como ferramenta fundamental. 2018. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160430032

CONCHETI, Andreza Fernanda. A pluralidade da relação entre a Física e a Matemática em um curso inicial da licenciatura em Física. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) – Instituto de Física – Instituto de Química – Instituto de Biociências – Faculdade de Educação – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e aplicações. 1ª ed.; São Paulo: Ática, 2010

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica, 1a. ed., Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, (2013)

FERONI**,** Rita de Cássia**;** ANDREÃO**,** Willian Lemker**;** GALVÃO**,** Elson Silva**.** "Proposta de interdisciplinaridade entre matemática e física resultando na aprendizagem contextualizada", p. 21-24 . In: Anais do VII Encontro Científico de Física Aplicada [=Blucher Physics Proceedings, v.3 n.1]**.** São Paulo: Blucher, 2016.

KAZUHITO, Yamamoto; FUKE, Luis Felipe; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi. Os Alicerces da Física; v.1 12 ed. São Paulo: Editora Saraiva, 1998.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise; v.1 e v. 2. 11. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do Ensino Médio. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LOCATELLI, Rogério Jose; CARVALHO, Ana Maria Pessoa de. Os raciocínios hipotético-dedutivos e proporcionais nas aulas de ciência. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM ENSINO DE FÍSICA (EPEF), 09, 2004, Jaboticatubas. Atas do IX Encontro de Pesquisa em Ensino de Física. Jaboticatubas: MG: Sociedade Brasileira de Física, 2004. 1CD-ROM.

MARTINS, Rosilva Lacerda. O Ensino de Vetores e a Interdisciplinaridade. 2015. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015. https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=90729

PACHECO, Tânia Sofia Beijoca. Caracterizações e Dinâmicas das Funções Quadráticas. Planificação da subunidade Funções Quadráticas. 2012. Dissertação (Mestrado), Universidade da Beira Interior, 2012. Covilhã. Disponível em https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/10400.6/1863/1/Relat%C3%B3rio%20de%20est%C3%A1gio%20-%20T%C3%A2nia%20Pacheco.pdf

PARANÁ, Djalma Nunes da Silva. Física; v.1. 6 ed. São Paulo: Editora Ática, 1998.

SERPA, Pedro Oliveira. A Matemática como motivação no ensino de Física. 2018. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150500062

SILVA, Gentil Lopes da. Álgebra linear: Comentado . Manaus; Boa Vista-RR: Editora Uirapuru, 2016

SOUSA, Rogério Lima. Representações semióticas como instrumento didático no ensino e aprendizagem de vetores. 2019. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Universidade Estadual do Maranhão, 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=17104029