Universidade Federal de Goiás

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

# Modelagem Matemática no Ensino de Trigonometria

Leila Bernardes Borges

Goiânia

2020

SIBI
SISTEMA DE BIBLIOTECAS UFG

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o(a) autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

**1. Identificação do material bibliográfico**: **[ X ] Dissertação** **[ ] Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

Nome completo do(a) autor(a): Leila Bernardes Borges

Título do trabalho: Modelagem Matemática no Ensino de Trigonometria

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento [ X ] SIM [ ] NÃO[1]

Independente da concordância com a disponibilização eletrônica, é imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Leila Bernardes Borges.
Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2] Data: 18 / 03 / 2020

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante: a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a); b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] As assinaturas devem ser originais sendo assinadas no próprio documento. Imagens coladas não serão aceitas.

Versão GRT_BC_fev_2020

**Leila Bernardes Borges**

# Modelagem Matemática no Ensino de Trigonometria

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.

Goiânia

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Borges, Leila Bernardes
Modelagem Matemática no Ensino de Trigonometria [manuscrito] / Leila Bernardes Borges. - 2020.
156 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.
Bibliografia. Anexos.
Inclui fotografias, símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. Trigonometria. 2. Modelagem. 3. Seno. 4. Cosseno. 5. Matemática. I. Souza, Mário José de, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº 02/2020 da sessão de Defesa de Dissertação de Leila Bernardes Borges, que confere o título de Mestra em Matemática, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Aos dez dias do mês de março do ano de dois mil e vinte, a partir das 14 **horas**, no auditório do (IME/UFG), realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"**Modelagem Matemática no Ensino de Trigonometria**"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Mário José de Souza (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora, Professor Doutor Jhone Caldeira Silva (IME/UFG), membro titular externo, Aline Mota de Mesquita Assis (IFG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho**.** A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Mário José de Souza (IME/UFG), Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos dez dias do mês de março do ano de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Mário José De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 10/03/2020, às 16:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Jhone Caldeira Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 10/03/2020, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Aline Mota de Mesquita Assis**, **Usuário Externo**, em 12/03/2020, às 14:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.



**Referência:** Processo nº 23070.009488/2020-64 SEI nº 1185714

Aos meus pais, Jarbas e Maria José, e aos meus irmãos, Cleber e Leiry, por serem esteio, aconchego e amor.

Ao meu esposo, Edmilson, e às minhas filhas, Duda e Julinha, por serem meu incentivo a ser melhor. É sempre por vocês e para vocês!

# Agradecimentos

A Deus, por sua misericórdia infinita, que me fortalece em todos os momentos, e me agracia com muito mais do que mereço.

À Nossa Senhora, intercessora e mãe amorosa, que cuida dos detalhes, tornando a jornada mais leve e tranquila.

A todos os amigos da turma PROFMAT – 2018. Não tenho dúvidas de que cada integrante da turma, foi um presente enviado por Deus, para contribuir com meu crescimento espiritual e intelectual, em especial à amiga Rebeca.

Ao colega e amigo, Felipe Viterbo, pelas inúmeras ligações, mensagens de WhatsApp, explicações, enfim, por sua valiosa contribuição. Não existem palavras para expressar minha gratidão. Não tenho certeza se conseguiria, sem sua valiosa colaboração.

Ao colega e amigo Uendel Gonçalves, pelo seu brilhantismo, precisão e senso de humor no decorrer do curso, iniciado desde o primeiro dia. A parceria e o companheirismo estabelecidos foram fundamentais para o êxito dessa jornada.

À minha sogra, e dona Otília, por suas orações, apoio, e principalmente, pelo cuidado com minhas filhas, durante minha ausência. Ao meu cunhado, Danilo Provásio, pelo acolhimento em sua casa, e pelas inúmeras viagens, sempre animado e otimista, e, à minha cunhada, Mayara Gomides, por me receber em sua casa, sempre com alegria e muita disposição.

À amiga e irmã, Elda Evangelista, por dispor de tempo, aulas, livros e orações.

À Neusleide Rissati, gestora do CEPI Gricon e Silva, e Keila de Borba, coordenadora pedagógica da instituição, pela disponibilidade em permitir a realização desse trabalho, e sempre incentivar o meu progresso.

À Secretaria Estadual de Educação do Estado de Goiás, pela concessão da licença para aprimoramento.

À CAPES, pelo suporte financeiro, durante o curso.

Aos professores que ministraram aulas no curso PROFMAT, por contribuírem de forma responsável e efetiva em minha formação pessoal e intelectual. Em especial ao professor Dr. Mario José de Souza, por seu acolhimento, orientação e contribuição no decorrer desse trabalho.

Ao professor Dr. Jhone Caldeira Silva por sua capacidade de inspirar e à amiga professora Dra. Aline Mota de M. Assis, por motivação e incentivo. De forma especial por terem aceito participar da banca examinadora.

A todos os meus amigos, pessoas queridas, que torceram por mim, e me apoiaram nessa caminhada.

Muito obrigada!

*"Tudo é do Pai,*
*toda honra e toda glória,*
*é Dele a vitória alcançada em minha vida!!!"*
*(Frederico Cruz)*

# Resumo

A Trigonometria, sendo um dos ramos da Matemática que desenvolveu por necessidades humana, principalmente no campo da navegação e da astronomia, ainda hoje é considerada por alunos e professores, como um conteúdo abstrato, repleto de fórmulas a serem memorizadas e de difícil apreensão. A presente proposta busca desenvolver um ensino dessa área da Matemática, em particular o conceito de seno e cosseno, enfatizando a transição do triângulo retângulo à circunferência trigonométrica, de forma significativa, através da Modelagem Matemática como estratégia de ensino.

**Palavras-chave**: Trigonometria. Seno. Cosseno. Circunferência trigonométrica. Modelagem Matemática.

# Abstract

Trigonometry, being one of the branches of mathematics that it developed for needs especially in the field of navigation and astronomy, it is still today considered by students and teachers, as an abstract content, full of formulas to be memorized and difficult to apprehend. This proposal seeks to develop teaching in this area of mathematics, in particular the concept of sine and cosine, emphasizing the transition from the right triangle to the trigonometric circumference, so through Mathematical Modeling as a teaching strategy.

**Keywords:** Trigonometry. Sine. Cosine. Trigonometric circumference. Modeling Mathematics.

# Lista de ilustrações


Figura 1 – Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás para o 9º ano do Ensino Fundamental . . . 33
Figura 2 – Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás para a 2ª série do Ensino Médio . . . 34
Figura 3 – Matriz de Referência de Matemática - SAEGO - 3ª Série do EM . . . 38
Figura 4 – Esquema simplificado de modelagem matemática . . . 45
Figura 5 – O aluno e o professor nos casos de Modelagem . . . 45
Figura 6 – Jiva dos hindus . . . 53
Figura 7 – Ângulo . . . 55
Figura 8 – Ângulo $\alpha$ . . . 55
Figura 9 – Triângulo retângulo . . . 56
Figura 10 – Triângulos semelhantes . . . 57
Figura 11 – Arco $\widehat{AB}$ . . . 58
Figura 12 – Arcos de mesmo comprimento . . . 59
Figura 13 – Arco $\widehat{AB}$ . . . 59
Figura 14 – Arco Nulo e Arco de uma volta . . . 60
Figura 15 – Ângulos centrais . . . 60
Figura 16 – O Radiano . . . 61
Figura 17 – Circunferência Trigonométrica . . . 62
Figura 18 – Arcos orientados . . . 63
Figura 19 – Alguns arcos positivos e negativos no ciclo trigonométrico . . . 63
Figura 20 – Arcos côngruos . . . 64
Figura 21 – Figura 9.6 . . . 65
Figura 22 – Função $E(t)$ . . . 66
Figura 23 – Sinais das funções trigonométricas . . . 66
Figura 24 – Redução do 2º ao 1º quadrante . . . 67
Figura 25 – Redução do 3º ao 1º quadrante . . . 68
Figura 26 – Redução do 4º ao 1º quadrante . . . 68
Figura 27 – $\overline{OP_1} =$ sen $t$ . . . 70
Figura 28 – Gráfico da função seno . . . 71
Figura 29 – Senóide . . . 71
Figura 30 – $\overline{OP_2} =$ cos $t$ . . . 72
Figura 31 – Gráfico da função cosseno . . . 73
Figura 32 – Cossenóide . . . 73
Figura 33 – Ponto P móvel . . . 74
Figura 34 – Efeito da constante $a$ . . . 75

Figura 35 – Efeito da constante $b$ . . . . . 75
Figura 36 – Efeito da constante $c$ . . . . . 76
Figura 37 – Efeito da constante $d$ . . . . . 76
Figura 38 – $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$ . . . . . 77
Figura 39 – $\cos \alpha = \cos \beta$ . . . . . 78
Figura 40 – Rampas 1 . . . . . 82
Figura 41 – Rampas 2 . . . . . 82
Figura 42 – Rampa . . . . . 83
Figura 43 – Diferentes pontos da rampa . . . . . 83
Figura 44 – Tangente de $\alpha$ . . . . . 84
Figura 45 – Modelando as rampas . . . . . 85
Figura 46 – Seno de $\alpha$ . . . . . 85
Figura 47 – Cosseno de $\alpha$ . . . . . 86
Figura 48 – Triângulo retângulo ABC . . . . . 86
Figura 49 – Triângulos semelhantes . . . . . 87
Figura 50 – Triângulo ABC . . . . . 88
Figura 51 – Triângulo ABC . . . . . 89
Figura 52 – Triângulo ABC . . . . . 89
Figura 53 – Roda . . . . . 91
Figura 54 – Protótipo do Jogo Roda a Roda . . . . . 91
Figura 55 – Resposta do aluno B . . . . . 92
Figura 56 – Resposta do aluno C . . . . . 93
Figura 57 – Arcos orientados . . . . . 93
Figura 58 – Circunferência trigonométrica . . . . . 94
Figura 59 – Alguns arcos no ciclo trigonométrico . . . . . 94
Figura 60 – Arco $\widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$ . . . . . 95
Figura 61 – Arco côngruo a $\widehat{AB} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ . . . . . 95
Figura 62 – Arco côngruo a $\widehat{AB} = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$ . . . . . 95
Figura 63 – Circunferência e razões trigonométricas . . . . . 96
Figura 64 – Seno e cosseno do ângulo $\alpha$ . . . . . 97
Figura 65 – Tangente de $\alpha$ . . . . . 98
Figura 66 – Alterações hormonais durante o ciclo menstrual . . . . . 99
Figura 67 – Função Seno . . . . . 100
Figura 68 – Senoide . . . . . 101
Figura 69 – Gráfico da $f(x)$ . . . . . 102
Figura 70 – Função seno . . . . . 103
Figura 71 – Gráfico de $f(x) = sen(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ . . . . . 104
Figura 72 – Senóide . . . . . 104
Figura 73 – Sinais da função seno . . . . . 105

Figura 74 – Variação da função seno . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 105
Figura 75 – Função f(x)=sen x . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106
Figura 76 – Função cosseno . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106
Figura 77 – Gráfico de f(x) = cos x . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107
Figura 78 – Cossenóide . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
Figura 79 – Sinais da função cosseno . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
Figura 80 – Função f(x) = cos x . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109
Figura 81 – Função $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110
Figura 82 – Rampa A . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111
Figura 83 – Rampa B . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
Figura 84 – Rampa C . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112
Figura 85 – Planilha do grupo 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113
Figura 86 – Fachada interna do CEPI Gricon e Silva . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113
Figura 87 – Resposta do grupo 4 sobre a inviabilidade da construção da rampa . . 114
Figura 88 – Resposta do aluno H ao exercício 1 da lista 2 . . . . . . . . . . . . . . . 114
Figura 89 – Resposta da aluna L ao item 2 da lista 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
Figura 90 – Alunas utilizando a roda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115
Figura 91 – Aluno F representando a circunferência trigonométrica . . . . . . . . . 116
Figura 92 – Aluna G representando $\operatorname{sen} 60^o$ e $\cos 60^o$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 117
Figura 93 – Aluna G representando $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} rad$ e $\cos \frac{\pi}{4} rad$ . . . . . . . . . . . . . . 117
Figura 94 – Resposta do aluno B ao item 2 da lista 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118

# Sumário


| | | |
|---|---|---|
| | INTRODUÇÃO | 25 |
| 1 | UM OLHAR SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA | 29 |
| 1.1 | Reflexões sobre o ensino de matemática hoje: dificuldades e desafios | 29 |
| 1.2 | Dificuldades e entraves no ensino de Trigonometria | 31 |
| 1.3 | Trigonometria e a proposta curricular da Secretaria de Educação de Goiás | 32 |
| 1.4 | A Trigonometria e o ENEM | 34 |
| 1.5 | A Trigonometria e o SAEGO | 38 |
| 2 | MODELAGEM MATEMÁTICA | 41 |
| 2.1 | Modelagem Matemática: Breve Histórico | 41 |
| 2.2 | O Modelo Matemático | 43 |
| 2.3 | A Modelagem Matemática: o que é e suas etapas | 44 |
| 2.4 | Modelagem Matemática como estratégia de ensino de matemática - modelação | 47 |
| 2.5 | Vantagens e desvantagens da utilização da Modelagem Matemática em sala de aula | 48 |
| 3 | FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA E TEÓRICA DE TRIGONOMETRIA | 51 |
| 3.1 | Algumas considerações históricas | 51 |
| 3.1.1 | Contribuições de diferentes culturas no desenvolvimento da Trigonometria | 51 |
| 3.1.2 | A Trigonometria a partir do Século XIV | 53 |
| 3.2 | A Trigonometria no triângulo retângulo | 55 |
| 3.2.1 | O Ângulo | 55 |
| 3.2.2 | Razões trigonométricas em triângulos retângulos | 57 |
| 3.3 | Trigonometria na circunferência | 58 |
| 3.3.1 | Arcos e Ângulos | 58 |
| 3.3.2 | Circunferência Trigonométrica | 62 |
| 3.3.3 | Arcos côngruos | 64 |
| 3.3.4 | A função de Euler e as funções trigonométricas | 64 |
| 3.3.5 | Redução ao primeiro quadrante | 66 |
| 3.4 | Funções trigonométricas: propriedades e gráficos | 69 |
| 3.4.1 | Definições importantes | 69 |

3.4.2 Função Seno . . . 69
3.4.2.1 Propriedades da função Seno . . . 70
3.4.2.2 Gráfico da função Seno . . . 71
3.4.3 Função Cosseno . . . 72
3.4.3.1 Propriedades da função Cosseno . . . 72
3.4.3.2 Gráfico da função Cosseno . . . 73
3.4.4 Fenômenos periódicos e funções do "tipo" trigonométricas . . . 74
3.4.4.1 Papel das constantes $a$, $b$, $c$ e $d$ nas funções do tipo $f(x) = a + b \cdot \operatorname{sen}(cx + d)$ e $f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ . . . 74
3.5 Equações trigonométricas . . . 77
3.5.1 Resolução da equação $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ . . . 77
3.5.2 Resolução da equação $\cos\alpha = \cos\beta$ . . . 78

4 A PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA APLICADA NO CEPI GRICON E SILVA . . . 79
4.1 A instituição escolar e a turma: caracterização . . . 79
4.2 Acessibilidade e triângulos retângulos . . . 80
4.2.1 Analisando as rampas . . . 80
4.2.2 Relacionando rampas e triângulos retângulos . . . 81
4.3 Roda a Roda e a circunferência trigonométrica . . . 90
4.3.1 Entendendo a Roda . . . 91
4.3.2 Conhecendo a circunferência trigonométrica . . . 93
4.3.3 Seno, Cosseno e Tangente na circunferência trigonométrica . . . 96
4.4 Mulher de fases e periodicidade . . . 99
4.4.1 Conhecendo funções periódicas . . . 99
4.4.2 Formalizando o conceito de funções trigonométricas . . . 103
4.4.2.1 Função Seno . . . 103
4.4.2.2 Função Cosseno . . . 106
4.4.2.3 Funções do tipo trigonométricas . . . 109

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DO ENSINO DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DA MODELAGEM MATEMÁTICA . . . 111
5.1 Sobre a Trigonometria . . . 111
5.1.1 Trigonometria no triângulo retângulo . . . 111
5.1.2 A Trigonometria na circunferência . . . 115
5.1.3 Funções trigonométricas . . . 117
5.2 Sobre a utilização da modelagem em sala de aula . . . 119

**CONSIDERAÇÕES FINAIS** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **123**

**REFERÊNCIAS** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **125**

## ANEXOS 129

**ANEXO A – QUESTIONÁRIO I** . . . . . . . . . . . . . . . . . . **131**

**ANEXO B – ACESSIBILIDADE AOS CADEIRANTES** . . . **133**

**ANEXO C – LISTA DE EXERCÍCIOS 1** . . . . . . . . . . . . **137**

**ANEXO D – LISTA DE EXERCÍCIOS 2** . . . . . . . . . . . . **139**

**ANEXO E – A CIRCUNFERÊNCIA DE 360º** . . . . . . . . . **141**

**ANEXO F – LISTA DE EXERCÍCIOS 3** . . . . . . . . . . . . **143**

**ANEXO G – LISTA DE EXERCÍCIOS 4** . . . . . . . . . . . . **145**

**ANEXO H – MULHER DE FASES E PERIODICIDADE** . . **147**

**ANEXO I – FENÔMENOS PERIÓDICOS** . . . . . . . . . . . **149**

**ANEXO J – LISTA DE EXERCÍCIOS 5** . . . . . . . . . . . . **151**

**ANEXO K – LISTA DE EXERCÍCIOS 6** . . . . . . . . . . . . **153**

**ANEXO L – LISTA DE EXERCÍCIOS 7** . . . . . . . . . . . . **155**

# INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática tem sido a atividade da qual me ocupo há dezesseis anos. Desses, a maior parte do tempo, a Matemática do Ensino Médio. Vários fatores dificultam o bom andamento dessa fase escolar, mas, com certeza, a falta de pré-requisitos para cursar a série na qual se encontra é um dos principais. E a Matemática, por ser uma ciência onde o saber se constrói de forma cumulativa, torna essa ausência extremamente evidente.

Ao se tratar da Trigonometria, a situação não é diferente, pois a compreensão de tal tópico exige diversos conhecimentos matemáticos básicos, como Lima (1995) afirma:

> O conhecimento matemático é, por natureza, encadeado e cumulativo. Um aluno pode, por exemplo, saber praticamente tudo sobre a proclamação da república brasileira e ignorar completamente as capitanias hereditárias. Mas não será capaz de estudar Trigonometria se não conhecer os fundamentos da Álgebra, nem entenderá essa última se não souber as operações aritméticas, etc. Esse aspecto de dependência acumulada dos assuntos matemáticos leva a uma sequência necessária, que torna difícil pegar o bonde andando (...) (LIMA, 1995, RPM 28).

Nesse contexto, o presente trabalho visa propor o ensino de Trigonometria, considerando que a construção dessa "bagagem" é necessária e fundamental na construção dos conceitos matemáticos do educando. O caminho escolhido para essa busca foi a Modelagem Matemática aplicada na sala de aula como estratégia de ensino, e denominada Modelação Matemática. Nessa proposta, a fundamentação teórica da concepção de Modelagem Matemática adotada foi, principalmente, segundo os autores: Bassanezi (2004), Biembengut e Hein (2019) e Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Assumimos ainda a noção de Modelação Matemática enquanto a definição dada por Silveira, Ferreira e Silva (2013):

> No processo de Modelagem Matemática aplicada ao ensino, ou Modelação Matemática, o conceito é apresentado através de uma situação problema, ficando a formalização do mesmo como etapa final (SILVEIRA; FERREIRA; SILVA, 2013, p. 2881).

O intuito principal é desenvolver um ensino de Matemática, em particular de Trigonometria, de forma significativa e motivadora, agregando novos conceitos a partir da apresentação de situações problemas, formalizando-o mediante a percepção do aluno de que ele é aplicável e útil.

Aprendizagem significativa nesse contexto é entendida segundo Ausubel, em que novos conceitos devem ser "ancorados" em conhecimentos prévios, já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, chamados por esse autor de subsunçores. Dessa forma, para Ausubel, o conhecimento prévio serve de matriz ideal e organizacional para a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos, devendo ser motivo de interesse do professor.

> Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio diria o seguinte: de todos os fatores que influem na aprendizagem, o mais importante é o que o aluno já sabe. Averigue-se isso e ensine-se levando-o em consideração. (AUSUBEL, 1963, p.685)

O foco da proposta é a compreensão da ideia do seno, cosseno e tangente, iniciando no triângulo retângulo, e se estendendo até a circunferência trigonométrica, com a definição desses enquanto funções trigonométricas. Enfatizar a periodicidade das funções seno e cosseno também é um dos objetivos buscados, concordando com os parâmetros curriculares do Ensino Médio[1] quando dizem:

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos (p. 121-122).

Trigonometria é um conteúdo apontado no Currículo Referência do estado de Goiás, inicialmente ao nono ano do Ensino Fundamental, e logo depois, na segunda série do Ensino Médio. A proposta foi executada em uma turma de trinta e um alunos, da primeira série do Ensino Médio do CEPI – Centro de Educação em Período Integral – Gricon e Silva, visto que o assunto em questão é proposto a ser desenvolvido no segundo bimestre do ano letivo, e tendo iniciado a pesquisa em setembro, os alunos da segunda série já o haviam estudado.

No capítulo 1 é apresentado uma visão geral da proposta do ensino de Trigonometria, enfocando o Currículo Referência do estado de Goiás, as matrizes de referência do ENEM e do SAEGO, pois são os documentos norteadores do trabalho desenvolvido na escola. Também é realizada uma reflexão acerca das dificuldades envolvidas no ensino desse assunto.

No segundo capítulo versamos sobre a Modelagem Matemática e suas etapas, conforme a concepção de alguns estudiosos, apresentando uma breve contextualização histórica, bem como sua aplicação na sala de aula enquanto estratégia metodológica, evidenciando vantagens e desvantagens em sua utilização.

O terceiro capítulo aborda uma fundamentação teórica de Trigonometria, e uma breve contextualização histórica do assunto, com ênfase nos conceitos de seno e cosseno, principal foco desse trabalho.

[1] Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/programa-saude-da-escola/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>, acessado 24/01/2020.

O quarto capítulo apresenta a proposta metodológica: ensinar Trigonometria utilizando a Modelagem Matemática ou Modelação Matemática, iniciando pela Trigonometria no triângulo retângulo, com o tema acessibilidade, evoluindo para a circunferência trigonométrica e extensão dos conceitos de seno, cosseno e tangente, através do jogo roda a roda, culminando com o estudo de uma situação problema envolvendo um ciclo menstrual de vinte e oito dias e a conceituação das funções seno e cosseno.

E, por fim, o quinto e último capítulo, expondo resultados e algumas considerações sobre o trabalho realizado.

# 1 UM OLHAR SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

Pretende-se neste capítulo, promover uma reflexão sobre o ensino de Matemática nos dias atuais, enfocando, em particular, o ensino da Trigonometria. Versar sobre o Currículo Referência do Estado de Goiás, bem como o que as matrizes do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e do Sistema de Avaliação Educacional do Estado de Goiás - SAEGO enfatizam sobre esse tópico, tornando esses, os pontos de relevância para a escola.

## 1.1 Reflexões sobre o ensino de matemática hoje: dificuldades e desafios

Ser professor no Brasil, na rede pública de ensino básico, não é tarefa fácil. Uma série de fatores tem tornado tal atividade uma árdua missão. Dentre esses, é possível destacar: a falta de pré-requisitos do aluno para cursar uma determinada série, a falta de comprometimento do mesmo (e dos responsáveis) com seus estudos e a precária formação e consequentemente, deficitária atuação do professor.

Quando o assunto é Matemática, o cenário é ainda pior. Existem pessoas, professores e alunos, que consideram que é necessário ser dotado de dons e aptidões especiais para aprender tal disciplina. Com isso, o professor não se empenha com alunos, que, supostamente são desprovidos de tais dons; e os alunos preferem gabar-se de serem "péssimos em matemática". Contrariando essas ideias, Lima (1995), afirma que:

> Ao contrário das demais matérias que se estudam na escola, que se referem a objetos e situações concretas, a Matemática trata de noções e verdades de natureza abstrata. Aliás, essa é uma das razões da sua força e sua importância. A afirmação 2 x 5 = 10 tanto se aplica aos dedos de duas mãos quanto aos jogadores que disputam um jogo de basquete. A generalidade com que valem as proposições matemáticas exige precisão, proíbe ambiguidades e por isso requer mais concentração e cuidado por parte do estudante. Por outro lado, o exercício dessas virtudes durante os anos de escola ajuda a formar hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da Matemática. Note-se que não se trata de talentos e que não se nasce dotado delas (LIMA, 1995, RPM 28).

O que temos destacado acima é que, todo aluno com capacidade de aprender a ler e escrever é capaz de aprender a Matemática básica, sendo necessário dedicação por parte do educando e eficiência por parte do professor. E não é isso que os últimos indicadores, como por exemplo, SAEGO e ENEM, têm mostrado.

Importante ressaltar que a política de não valorização dos profissionais da educação, principalmente dos que atuam na educação básica, é fator determinante para a realidade atual. Alunos comprometidos com seus estudos, com gosto e dedicação aos mesmos, não querem cursar licenciatura. Não querem ser professores.

Outro fator dificultador é o tempo. O ensino de Matemática na maioria das escolas atualmente é voltado e preocupado com avaliações externas. As escolas públicas goianas preocupam-se com o SAEGO (Sistema de Avaliação Educacional do Estado de Goiás) e com a Prova Brasil, que são os indicadores da qualidade de ensino mais visados no momento. Além, é claro, do ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio. Nesse contexto, o ensino de Matemática é totalmente focado nessas prioridades: avaliações. Logo, a maneira como o aluno entende, o tempo necessário para que os novos conhecimentos façam sentido, não são considerados. Bem como, conteúdos pouco cobrados nesses eventos, são pouco ou nunca tratados. Nesse contexto, Brumano (2014) afirma:

> São muitas as dificuldades que os educadores matemáticos enfrentam em suas práticas diárias, principalmente nas salas de aula. Os conteúdos a serem trabalhados são determinados, em grande parte, por currículos que, muitas vezes, seguem o que é cobrado em vestibulares ou provas externas, não levando em consideração a necessidade do aluno em compreender a matemática como uma disciplina presente e constante em seu cotidiano (BRUMANO, 2014, p.67).

Mas, essa discussão sobre motivos que, infelizmente, não temos poder de transformação imediata, não acarreta resultados que gerem grandes impactos nas escolas. Nesse sentido, é de maior valia, refletir acerca das possibilidades metodológicas para o ensino de Matemática, buscando torná-lo mais prazeroso e significativo para o aluno. Sobre isso Lima (1995) ressalta:

> Quanto ao ensino, não há mistério nem milagre. O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura se colocar no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. Não há fórmulas mágicas para ensinar Matemática. Não há caminhos reais, como Euclides já dizia a Ptolomeu. A única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente. Não só para aprender Matemática, mas para tudo na vida (LIMA, 1995, RPM 28) .

Diante dessa realidade, voltaremos a atenção de forma especial sobre o processo ensino-aprendizagem da Trigonometria, nosso foco de estudo no momento.

## 1.2 Dificuldades e entraves no ensino de Trigonometria

A Trigonometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, tendo surgido da necessidade humana de resolver situações reais. Sobre isso, Santos et al. (2016 apud PEREIRA; RÊGO, 2011, p.05) afirmam que "ela surgiu na Antiguidade para resolver problemas das necessidades humanas e atualmente possui diversas aplicações, não só na Matemática como em diversas áreas da Ciência". No entanto, a maioria dos alunos consideram-na complexa e demasiadamente abstrata. Dionizio e Brandt (2011), justificam essa dificuldade afirmando:

> A falta de compreensão dos conteúdos da Trigonometria, apresentada pelos alunos, pode ser devido a diversos fatores, dentre eles a dificuldade que os estudantes têm de conceitualizar os objetos matemáticos, que se apresentam de forma muito abstrata (DIONIZIO; BRANDT, 2011, p.01).

Embora seja uma parte extremamente importante da Matemática, a Trigonometria (e outros ramos tão importantes quanto), não possui significado para o aluno, gerando nele uma rejeição pelo conteúdo, conforme diz Freitas et al. (2016):

> A Trigonometria consiste em um estudo muito importante da Matemática, sendo indispensável em nosso cotidiano e na vida escolar. Contudo, suas leis trigonométricas geram uma dinâmica de estudos responsáveis pelas rejeições dos alunos. Muitas das vezes essas rejeições são presenciadas por alguns professores, que não priorizam esse conteúdo, explorando apenas em sala de aula algumas situações básicas. (FREITAS et al., 2016, p.02).

A situação se agrava quando o assunto se trata de funções trigonométricas. Além de se esperar que o aluno saiba o conceito de função, ainda existe a transição que ele deverá fazer da ideia que concebeu de seno, cosseno e tangente de um ângulo, no triângulo retângulo, para tais relações enquanto funções. Sobre este fato, Roque e Moretti (2010) ressaltam que um dos entraves

> (...) é que o surgimento do estudo da Trigomentria na vida dos estudantes está atrelado à Geometria, mais especificamente aos problemas envolvendo triângulos retângulos, não tendo características funcionais. Para chegar até o estudo das funções trigonométricas é necessário primeiro estender as definições das relações trigonométricas do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico, introduzir o conceito de arco e ângulo orientado, relacionar isto com o sistema de coordenadas cartesianas e estabelecer a correspondência entre cada ponto da reta real com os respectivos seno e cosseno (ROQUE; MORETTI, 2010, p.03).

É importante ressaltar que parte dessas dificuldades estão atreladas ao professor, sejam por limitação de conhecimento, má formação, desconhecimento de propostas metodológicas ou por simples comodidade em continuar ensinando como lhe foi ensinado, afinal,

> A dificuldade apresentada tem um contexto histórico, pois os próprios docentes apresentam dificuldades, tendo em vista que esses problemas surgiram antes mesmo de sua formação, ou seja, durante a sua graduação e no ensino médio (FREITAS et al., 2016, p.02).

Estudar Trigonometria, assim como os demais assuntos da Matemática, exige atenção, esforço e dedicação por parte do aluno. E, no que tange ao professor, ensinar Trigonometria exige domínio de conceitos, clareza dos objetivos a serem alcançados e comprometimento em relação à aprendizagem de seus alunos, conforme afirma Huanca:

> É preciso que os professores estejam realmente comprometidos com o desenvolvimento contínuo do ensino. Sabemos que as ações dos professores podem encorajar ou desencorajar os estudantes quanto a pensar, questionar, discutir suas ideias, resolver problemas e buscar suas soluções (HUANCA, 2006, p.243).

De maneira geral, o que percebemos sobre o ensino-aprendizagem de Trigonometria é a percepção por parte dos alunos, de que se trata de uma área extremamente abstrata e repleta de fórmulas e identidades a serem decoradas; e por parte do professor, algo que não lhe foi agradável no passado, não é cobrado em número expressivo nas avaliações externas e, portanto, pode ser visto da forma mais breve e superficial possível.

## 1.3 Trigonometria e a proposta curricular da Secretaria de Educação de Goiás

Etimologicamente, currículo vem do latim *curriculus*, e significa "o ato de correr, percurso". No contexto educacional, o currículo é a organização do conhecimento escolar. Como afirma Apple:

> O currículo nunca é simplesmente uma montagem neutra de conhecimentos, que de alguma forma aparece nos livros e salas de aula de um país. Sempre parte de uma tradição seletiva, da seleção feita por alguém, da visão que algum grupo tem do que seja o conhecimento legítimo. (APPLE, 2001, p.53)

Nesse contexto o currículo é carregado de intencionalidades, não é conhecimento neutro imposto na sala de aula de forma leviana e imediata. Segundo Andrade

> Ele é resultado da ação coletiva ou individual de pessoas ligadas à educação que busca selecionar, organizar os componentes do Currículo escolar, tendo sempre em vista o seu caráter político enquanto documento que vem com certa concepção de mundo, e de sujeitos que se quer formar para o mundo (ANDRADE, 2011).

O ensino de Matemática, bem como das demais disciplinas curriculares, no estado de Goiás é norteado pelo Currículo de Referência da Rede Estadual de Goiás. Esse surgiu como resultado do segundo pilar do programa "Pacto pela Educação", proposto pela Secretaria Estadual de Educação em 2011: "adotar práticas de ensino de alto impacto na aprendizagem". Assim, a rede estadual de educação tem seu currículo unificado, iniciando um processo de buscas por qualificação da educação do Estado. Carneiro e Fonseca (2016) ressaltam que:

> O currículo destaca-se, nesse processo, como o principal elemento da nova política educacional baseada em resultados, hierarquicamente conduzida pela Secretaria de Educação, com o objetivo de melhorar o desempenho de sua rede de escolas no ranking das avaliações externas (...) O currículo referência é o dinamizador da política educacional em Goiás. Ele garante a unidade do planejamento e em torno dele se constituem as ações de controle e monitoramento da gestão e do trabalho docente, a formação em serviço de professores e gestores e a avaliação da aprendizagem realizada pela Secretaria de Educação. (CARNEIRO; FONSECA, 2016, p.138)

A proposta de Trigonometria surge nesse currículo inicialmente, no nono ano do ensino fundamental. Ao estudar triângulos retângulos, é proposta a iniciação dos conceitos de seno, cosseno e tangente, como mostra a Figura 1.[1]

Figura 1 – Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás para o 9º ano do Ensino Fundamental

Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás

| 9º ANO FUNDAMENTAL | | | |
|---|---|---|---|
| | EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM | EIXOS TEMÁTICOS | CONTEÚDOS |
| 2º BIMESTRE | • Identificar e aplicar os conceitos matemáticos em situações do dia a dia e em outras áreas do conhecimento.<br>• Ler, interpretar, propor e resolver situações problema que envolvem grandezas direta e inversamente proporcionais, equações e sistemas de equações do primeiro e do segundo grau e inequações.<br>• Interpretar, propor e resolver situações problema que envolvem porcentagens e juros simples ou compostos em contextos do comércio como compra, venda e empréstimo. | Números e Operações | • Conjuntos numéricos<br>• Equações e funções |
| | • Enunciar e demonstrar algébrica e geometricamente o teorema de Pitágoras, e aplicá-lo em situações problema.<br>• Enunciar o teorema de Tales e aplicá-lo em situações problema.<br>• Problematizar e resolver situações diversas estudando a necessidade de utilização ou não dos teoremas de Pitágoras e de Tales.<br>• Determinar a divisão de um segmento de reta em partes proporcionais segundo uma razão conhecida. | Espaço e Forma | • Triângulos: Teorema de Tales e de Pitágoras |
| | • Justificar o perímetro da circunferência e a área do círculo e aplicar esses conhecimentos na resolução de situações problema.<br>• Conhecer e aplicar em situações problemas as relações métricas e as razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente) nos triângulos retângulos. | Grandezas e medidas | • Triângulos: Teorema de Tales e de Pitágoras<br>• Áreas e volumes<br>• Sistema internacional de unidades |
| | • Perceber a importância da estatística no dia-a-dia para estimar ou verificar tendências de determinados eventos.<br>• Construir espaços amostrais utilizando o princípio multiplicativo.<br>• Calcular ou estimar a probabilidade de sucesso de um determinado evento. | Tratamento da informação | • Estatística e probabilidade |

Fonte: Site da Secretaria de Estado da Educação de Goiás

[1] (Disponível em <https://site.educacao.go.gov.br/wp-content/uploads/2019/04/CurriculoReferencia.pdf>).

Posteriormente, o assunto volta a ser tratado no segundo ano do ensino médio, como exibido na Figura 2 abaixo:[2]

Figura 2 – Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás para a 2ª série do Ensino Médio

Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás

| | 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO | | |
|---|---|---|---|
| | **EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM** | **EIXOS TEMÁTICOS** | **CONTEÚDOS** |
| **2º BIMESTRE** | • Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente, dos ângulos de 30°, 45° e 60°;<br>• Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas;<br>• Utilizar os teoremas do seno e do cosseno para resolver problemas significativos;<br>• Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente). | Espaço e Forma | • Razões trigonométricas no triângulo<br>• Trigonometria na circunferência |
| | • Identificar o radiano como unidade de medida de arco;<br>• Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa;<br>• Representar o seno, o cosseno e a tangente de um arco qualquer no ciclo trigonométrico;<br>• Resolver equações trigonométricas simples, com soluções na primeira volta;<br>• Identificar gráficos de funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente, reconhecendo suas propriedades;<br>• Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto;<br>• Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos;<br>• Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa. | Números e Operações | |

Fonte: Site da Secretaria de Estado da Educação de Goiás

Como podemos perceber, o segundo bimestre letivo é o tempo destinado ao desenvolvimento do tópico em questão. Podemos notar ainda que o currículo não menciona situações-problema envolvendo as funções trigonométricas.

## 1.4 A Trigonometria e o ENEM

O ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, principal porta de acesso dos jovens às universidades, é hoje o instrumento norteador de todo o trabalho desenvolvido no Ensino Médio. Santos (2017) relata tal fato dizendo:

> O ENEM se tornou no principal processo seletivo do país, sendo que a maioria, se não todas as instituições de ensino superior, públicas e privadas, utilizam seu resultado (parcial ou integral) para disponibilizar vagas nestas instituições. Além disso, tornou-se na principal porta (em muitos casos a única porta) de acesso aos programas de governo para ingresso e financiamento do ensino superior (SANTOS, 2017, p.15).

Desde 1998, ano da primeira edição do exame, o mesmo passou por reformulações e adquiriu credibilidade. Sua consolidação ocorreu em conjunto com o aumento do número

[2] (Disponível em: <https://site.educacao.go.gov.br/wp-content/uploads/2019/04/CurriculoReferencia.pdf>)

de inscritos e o surgimento de programas vinculados ao seu resultado. Sendo que o primeiro motivo fomenta o segundo e vice-versa. Dentre esses programas, Santos (2017) destaca os seguintes:

> **Ciência sem Fronteira:** o Programa Ciência sem Fronteira usa o resultado no ENEM para os candidatos da modalidade "Graduação Sanduíche".
> **Programa Universidade para Todos - ProUni:** o programa tem como finalidade a concessão de bolsas de estudo integrais e parciais em cursos de graduação e sequenciais de formação específica, em instituições de ensino superior privadas. Criado pelo Governo Federal em 2004 e institucionalizado pela Lei 11.096, em 13 de janeiro de 2005 oferece, em contrapartida, isenção de tributos àquelas instituições que aderem ao Programa.
> **Fundo de Financiamento Estudantil - Fies:** é um programa do Ministério da Educação destinado a financiar a graduação na educação superior de estudantes matriculados em cursos superiores não gratuitas na forma da Lei 10.260/2001. Podem recorrer ao financiamento os estudantes matriculados em cursos superiores que tenham avaliação positiva nos processos conduzidos pelo Ministério da Educação.
> **Sistema de Seleção Unificada da Educação Profissional Técnica - Sisutec:** é o sistema informatizado, gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC), no qual instituições públicas e privadas de ensino superior e de educação profissional e tecnológica oferecem vagas gratuitas em cursos técnicos na forma subsequente para candidatos participantes do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).
> **Sistema de Seleção Unificada - Sisu:** O Sistema de Seleção Unificada (Sisu) é o sistema informatizado gerenciado pelo Ministério da Educação (MEC) no qual instituições públicas de ensino superior oferecem vagas para candidatos participantes do Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) (SANTOS, 2017, p.22).

Dessa forma, a cada ano que passa, o ENEM se torna um exame mais competitivo, sendo motivo de preocupação para escolas (já que essas possuem sua eficiência medida através do mesmo) e para os jovens. Assim, o trabalho docente é pautado sobre a matriz de referência do exame, apresentada abaixo[3]:

> **Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.**
> **H1 -** Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
> **H2 -** Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
> **H3 -** Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
> **H4 -** Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
> **H5 -** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
>
> **Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.**
> **H6 -** Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objeto no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

[3] Disponível em (http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf)

**H7 -** Identificar características de figuras planas ou espaciais.
**H8 -** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
**H9 -** Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

**Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
**H10 -** Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
**H11 -** Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
**H12 -** Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
**H13 -** Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
**H14 -** Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

**Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.**
**H15 -** Identificar a relação de dependência entre grandezas.
**H16 -** Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
**H17 -** Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
**H18 -** Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

**Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.**
**H19 -** Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
**H20 -** Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
**H21 -** Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
**H22 -** Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
**H23 -** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

**Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.**
**H24 -** Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
**H25 -** Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
**H26 -** Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

**Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.**
**H27 -** Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

> **H28 -** Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
> **H29 -** Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
> **H30 -** Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Quanto aos conhecimentos de Trigonometria e suas aplicações no ENEM, Dante (2016a, p.317-319) destaca (vide Tabela 1):

Tabela 1 – Conteúdos e habilidades/competências exigidas no ENEM.

<table>
<tr><th>Tópicos</th><th>Objetos de conhecimento (associados às Matrizes de Referência para o ENEM 2012)</th><th>Competência</th><th>Habilidade</th></tr>
<tr><td>Resolução de triângulos retângulos</td><td>Conhecimento geométrico: Trigonometria do ângulo agudo</td><td>C2</td><td>H8/H9</td></tr>
<tr><td>Seno e cosseno de ângulos obtusos</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td></tr>
<tr><td>Arcos e ângulos</td><td>Conhecimentos geométricos: Características de figuras geométricas planas</td><td>C2</td><td>H7/H8</td></tr>
<tr><td>Unidades para medir ângulos e arcos</td><td>Conhecimentos geométricos: unidades de medida</td><td>C2</td><td>H7/H8</td></tr>
<tr><td>Circunferência orientada e circunferência trigonométrica</td><td>Conhecimento algébrico/geométrico: Plano cartesiano/Conhecimento geométrico: Unidades de medida</td><td>C2/C3</td><td>H7 / H8 / H10 / H12</td></tr>
<tr><td>A ideia de seno, cosseno e tangente de um número real</td><td rowspan="4">Conhecimento algébricos: relações no ciclo trigonométrico / Conhecimentos geométricos: Simetria de figuras planas ou espaciais, Congruência de triângulos</td><td rowspan="4">C2</td><td rowspan="4">H7/H8</td></tr>
<tr><td>Ângulos notáveis do seno e cosseno</td></tr>
<tr><td>Redução ao 1º quadrante</td></tr>
<tr><td>A ideia geométrica de tangente</td></tr>
<tr><td>Estudo da função seno</td><td rowspan="3">Conhecimentos algébricos: Funções trigonométricas</td><td rowspan="3">C5</td><td rowspan="3">H19 / H20 / H21 / H22 / H23</td></tr>
<tr><td>Estudo da função cosseno</td></tr>
<tr><td>Senoides</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptada de (DANTE, 2016a)

Percebe-se na tabela 1 que a competência da Matriz de referência do ENEM mais desenvolvida é a de número dois, ou seja, "Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela". Esse fato nos mostra que a Trigonometria citada é aplicada à Geometria. E assim, muitos tópicos da Trigonometria, como a periodicidade das funções trigonométricas, por exemplo, na maioria das vezes, não são enfatizados no decorrer do Ensino Médio.

## 1.5 A Trigonometria e o SAEGO

O SAEGO - Sistema de Avaliação Educacional do Estado de Goiás, foi implantado em 2011 como parte de um pacote de estratégias que visam implementar a educação pública do Estado, ofertando um ensino de qualidade. De acordo com a publicação, Revista do Sistema:

> O Sistema de Avaliação Educacional do Estado de Goiás – SAEGO busca, então, observar o desempenho de estudantes por meio de testes padronizados, cujo objetivo é aferir o que eles sabem e são capazes de fazer, a partir da identificação do desenvolvimento de habilidades e competências consideradas essenciais para que consigam avançar no processo de escolarização (SEE/GO, 2017, p.08).

Nesse contexto, as escolas públicas desenvolvem seu trabalho baseado nos critérios de avaliação dessa prova, visto que a eficiência de cada unidade escolar está atrelada ao bom desempenho de seus estudantes no exame. Sobre Trigonometria, a matriz de referência do SAEGO[4], apresentada na Figura 3, enfoca:

Figura 3 – Matriz de Referência de Matemática - SAEGO - 3ª Série do EM

| MATRIZ DE REFERÊNCIA DE MATEMÁTICA - SAEGO | |
|---|---|
| 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO | |
| I. ESPAÇO E FORMA | |
| D1 | Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade |
| D2 | Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais |
| D3 | Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas |
| D4 | Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema |
| D5 | Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente) |
| D6 | Identificar a localização de pontos no plano cartesiano |
| D23 | Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes |
| D24 | Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico |
| D25 | Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau |
| D26 | Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau |
| D27 | Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial |
| D28 | Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial |
| D29 | Resolver problema que envolva função exponencial |
| D30 | Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades |
| D31 | Determinar a solução de um sistema linear associando-o a uma matriz |

Fonte: Site do SAEGO

[4] Disponível em http://www.saego.caedufjf.net/wp-content/uploads/2012/04/GO-SAEGO-2016-MATRIZ-MT-3EM-C01.pdf

Podemos perceber que os descritores que abordam Trigonometria são apenas D5 e D30. As habilidades desenvolvidas neles são referentes à Trigonometria no triângulo retângulo e aos gráficos das funções trigonométricas, o que mais uma vez, colabora para que o tratamento desse importante tema fique centrado apenas nesses tópicos.

Uma frase famosa do matemático Lobachevsky, encontrada em BOYER e MERZBACH (2012, p.357) diz que "não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real". Nesse sentido, a maneira de se ensinar Matemática em nossas escolas precisa, urgentemente, ser revista. É preciso atravessar as barreiras e ir além das matrizes curriculares das avaliações externas, buscando desenvolver no aluno o gosto e o desejo pelo ato de aprender, conforme Biembengut e Hein (2019, p.20) ressaltam: "(...) só aprende quem quer. E a arte de ensinar depende da conquista para o querer aprender".

# 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresenta-se concepções acerca de Modelagem Matemática sob a óptica de diferentes autores, destacando as características desta enquanto ferramenta metodológica capaz de tornar o ensino de Matemática motivador e significativo. Ressalta-se que a abordagem a ser seguida neste trabalho é a de Biembengut e Hein (2019),Bassanezi (2004) e Almeida, Silva e Vertuan (2012).

## 2.1 Modelagem Matemática: Breve Histórico

Segundo Biembengut e Hein (2019, p.07), "a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos", o que nos faz concluir que a modelagem é um método natural de estudo, visto que em sua essência, nada mais é que buscar soluções para problemas reais.

De acordo com ARAGÃO (2016, p.02), os primeiros registros sobre modelagem Matemática enquanto metodologia datam do início do século XX, por volta de 1908 em Roma, momento em que Félix Klein analisou as metodologias existentes, e posteriormente, realizou propostas que se fundamentavam no ensino da Matemática partindo de exemplos práticos e situações reais.

Aproximadamente em 1968, as reflexões de Klein foram aprimoradas:

> As ideias de Klein permearam as reflexões matemáticas no século XIX, e por volta do ano de 1968 foram defendidas e ajustadas pelo pesquisador holandês, Hans Freudenthal, como também por Henry Pollak, sendo assim, estas ideias foram motivadoras para uma organização, e por parte de Freudenthal, motivadoras de uma conferência, com o objetivo de incluir as aplicações e a modelagem no ensino da matemática. Esse evento foi tematizado a partir do seguinte questionamento: Como ensinar matemática de modo a ser útil? (Id., 2016 Ibid., p.04).

Nunes et al. (2009) evidencia ainda que:

> Hans Freudenthal propunha que todo conceito matemático esteja ligado a alguma realidade fenomenológica, de onde podemos partir para expandir o conceito do aluno. Há sempre novas possibilidades de expansão do conceito, englobando novos instrumentos de raciocínio, novas realidades fenomenológicas, ou novas relações lógicas e matemáticas. (NUNES et al., 2009, p.58)

Nesse contexto, com as contribuições de Henry Pollak e Hans Freudenthal, a modelagem Matemática conquista espaço como um recurso metodológico para o ensino de

Matemática e surgem, em diferentes locais no mundo, grupos de pesquisadores voltados ao seu estudo, produzindo teses, artigos e dissertações.

Nessa época, ocorreram movimentos internacionais de grande repercussão a respeito da modelagem Matemática e suas aplicações, influenciando consideravelmente estudiosos brasileiros da área. O Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM) ressalta três grandes estudiosos como precursores da utilização da Modelagem Matemática em sala de aula. São eles:

**Aristides Camargos Barreto**, grande entusiasta, modelava músicas em suas aulas de graduação na PUC – Rio. Procurava ensinar as disciplinas de Fundamentos da Matemática, Prática de Ensino e Cálculo Diferencial Integral através de modelos.

**Ubiratan D'Ambrosio**, que recém chegava de Nova Iorque na época, trouxe consigo a bagagem do movimento que ocorria nos Estados Unidos, em relação ao ensino e aprendizagem de matemática. Ele retorna para UNICAMP, e implanta o Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, coordenando-o. Em certo momento, convida Barreto para dar uma palestra na UNICAMP, sobre modelos integrados à música.

**Rodney Carlos Bassanezi**, já conhecia modelagem Matemática por meio da matemática aplicada. Participou da palestra de Barreto, potencializando seu interesse pela Modelagem Matemática. Introduziu-a no curso que coordenou, para professores de Cálculo Diferencial e Integral, em diferentes instituições de ensino de nível superior. Ministrou vários cursos de pós-graduação e publicou vários livros sobre o tema.

Importante ressaltar que nenhum deles atuava na educação básica. Por mais que emitissem ideias a respeito dessa fase de ensino, não tinham nenhuma experiência. E sobre isso, Biembengut (2009), destaca:

> Ao divulgarem suas experiências e propostas em eventos, expressaram suas concepções em geral, das experiências que deram certo, dos bons resultados. Por consequência, instigaram em vários participantes novos entendimentos, concepções e tendências de modelagem. (BIEMBENGUT, 2009, p.13)

É inegável a contribuição desses precursores em relação ao desenvolvimento e a propagação da Modelagem Matemática. Porém, existe também o mérito daqueles que seguiram o caminho apontado, e também o indicou. Sobre isso, Biembengut (2009) ressalta:

> Não há como subestimar o mérito e a validade das propostas dos precursores. Importa, antes de tudo, reconhecer as contribuições positivas oriundas pelos precursores da modelagem na educação; daquele pequeno grupo de professores que teve a iniciativa em realizar propostas de ensino de matemática por outros vieses e, por consequência, se motivou a contar sobre esta realização para outro professor, e para tantos outros. E qualquer que seja o ponto teórico em questão, é fato que impulsionaram a Educação Matemática e, por recorrência, crenças matemáticas que permeiam o contexto social. (Id., 2009, Ibid., p.13)

## 2.2 O Modelo Matemático

Modelo, segundo o dicionário de língua portuguesa[1], significa dentre outras designações, "aquilo que serve de objeto de imitação". E, intuitivamente, é exatamente essa concepção que temos de modelo: algo que se deve imitar, ou seja, que se tornou referência.

Sobre isso, Bassanezi (2004, p. 20) afirma: "chamaremos de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado". Ainda buscando definições para o termo "modelo", nos deparamos com a fala de Biembengut e Hein (2019, p.12), enfatizando: "Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se "modelo matemático"".

Já Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12), ressaltam que os modelos matemáticos são utilizados "para representar, explicar e tornar presentes situações (que podem não ser matemáticas) que queremos analisar usando matemática."

É Importante ressaltar que o modelo matemático nos oferece uma linguagem sucinta, expressando as ideias de forma clara e objetiva. Porém, representa uma aproximação de idealizações sobre a realidade. Conforme afirma Biembengut e Hein (2019):

> Por outro lado, quando se propõe um modelo, ele é proveniente de aproximações nem sempre realizadas para se poder entender melhor um fenômeno, e tais aproximações nem sempre condizem com a realidade. Seja

[1] Disponível em (https://www.dicio.com.br)

> como for, um modelo matemático retrata, ainda que em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada. (BIEMBENGUT; HEIN, 2019, p.12)

Tendo em vista estas concepções referentes a modelo, passaremos a tratar do método para obtê-lo.

## 2.3 A Modelagem Matemática: o que é e suas etapas

Até então buscamos compreender a definição de modelo e a partir de agora nos dedicaremos à compreensão de como obter um modelo, ou seja, como representar situações problemas do cotidiano através da linguagem matemática, sendo possível, a partir de então, após análise e interpretação, obter informações relevantes sobre a realidade tratada. O processo de obtenção do modelo matemático é denominado Modelagem Matemática. Bassanezi (2004) a define da seguinte maneira:

> "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real." (BASSANEZI, 2004, p.16).

Já Biembengut e Hein (2019) ressaltam que esse processo é artístico, exigindo do modelador além de conhecimento matemático, doses de criatividade e intuição.

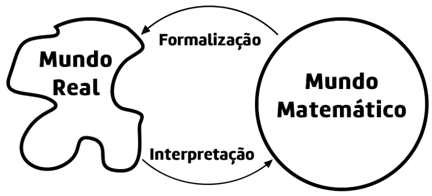
> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT; HEIN, 2019, p.12)

E Almeida, Silva e Vertuan (2012) enfatizam que o modelo matemático é o objetivo, é o que se almeja alcançar, e a Modelagem é o caminho para conseguir isso.

> Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, nesse caso, é o que "dá forma" à solução do problema e a Modelagem Matemática é a "atividade" de busca por essa solução. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15)

Embasados nessas definições, podemos nos aventurar a dizer que a Modelagem Matemática pode ser vista como uma "estratégia", capaz de traduzir situações cotidianas para a linguagem matemática, permitindo a determinação de uma solução que possa ser validada na situação inicial. O esquema dado por Bassanezi (2004 apud MCLONE, 1984), representa esse processo:

Figura 4 – Esquema simplificado de modelagem matemática




Fonte: Bassanezi (2004 apud MCLONE, 1984)

Segundo Barbosa (2001), é possível classificar a Modelagem em três casos. São eles:

> **Caso 1.** O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
> **Caso 2.** O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
> **Caso 3.** A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema. (BARBOSA, 2001, p.8-9)

Em todos os casos o professor não se posiciona como o detentor do saber, mas como alguém que media o conhecimento, dialogando com os alunos sobre o que já sabem, quais conhecimentos pensam em aplicar, como vão aplicar, e automaticamente, sobre o que não sabem, quais conceitos não possuem, e no dado momento, necessitam.

Vale ressaltar que no primeiro caso o professor exerce maior presença, visto que elabora a situação problema, deixando a cargo dos alunos apenas a resolução do mesmo. Já no terceiro caso, por exemplo, a participação do professor é menor, uma vez que os próprios alunos obtêm as informações e problematizam a situação dada. Nessa perspectiva, Barbosa (2001, p.09) destaca a participação do professor e do aluno, em cada caso:

Figura 5 – O aluno e o professor nos casos de Modelagem

| | *Caso 1* | *Caso 2* | *Caso 3* |
|---|---|---|---|
| *Elaboração da situação-problema* | professor | professor | professor/aluno |
| *Simplificação* | professor | professor/aluno | professor/aluno |
| *Dados qualitativos e quantitativos* | professor | professor/aluno | professor/aluno |
| *Resolução* | professor/aluno | professor/aluno | professor/aluno |

Fonte: (BARBOSA, 2001, p.09)

Independente de qual caso estejamos enquadrando, o trabalho com a Modelagem é composto por etapas. Biembengut e Hein (2019) destacam as seguintes:

> **1. Interação** – fase preliminar em que ocorre o envolvimento com o tema (realidade) a ser estudado/problematizado.
> **2. Matematização** – após a interação ocorre a "tradução" da situação-problema para a linguagem matemática. É a etapa mais complexa do trabalho, pois é aqui que se formula um problema e escreve-o, segundo um modelo matemático que leve à solução.
> **3. Modelo Matemático** – em seguida ocorre a validação do modelo obtido, através da análise das respostas que o modelo oferece quando aplicado à situação que o originou, no sentido de verificar o quanto as mesmas são adequadas ou não (BIEMBENGUT; HEIN, 2019, 13-15).

Bassanezi (2004) apresenta uma ampliação e um detalhamento dessas mesmas etapas, denominando-as da seguinte forma:

> **1. Experimentação** – etapa em que se processa a obtenção dos dados.
> **2. Abstração** – é o procedimento que leva a formulação dos modelos através da seleção de variáveis mais significativas do sistema que se quer estudar; da problematização ou formulação de questões sobre o sistema e da formulação de hipóteses e simplificação do sistema para restringir o número de variáveis.
> **3. Resolução** – o modelo é obtido com a tradução da linguagem do problema para a linguagem matemática.
> **4. Validação** – é o processo de aceitação ou não do modelo proposto, que deve ser testado em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos.
> **5. Modificação** – consiste em reelaborar o modelo segundo novas hipóteses, novos dados, ou novas teorias no sentido de aumentar o grau de aproximação (BASSANEZI, 2004, p.26–31).

De acordo com Burak (1992),

> A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões (BURAK, 1992, p.62).

Semelhantemente, Bassanezi (2004), afirma,

> A Modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças (BASSANEZI, 2004, p.31).

Ambas as afirmações acima evidenciam que a Modelagem Matemática é "uma" alternativa para desenvolver conteúdos Matemáticos de forma significativa, possibilitando ao aluno desenvolver autonomia e criticidade. Mas, como adotar tal estratégia em sala de aula? É o que trataremos a seguir.

## 2.4 Modelagem Matemática como estratégia de ensino de matemática - modelação

É notório o que vêm ocorrendo com a educação pública, atualmente. Ressalto aqui, em particular, o ensino de Matemática. A atuação em sala de aula, as avaliações externas e a convivência com os alunos na comunidade externam a insuficiência de apreensão de conteúdo. É claro que poderíamos listar mais de um motivo que acarreta essa triste realidade, mas não é esse nosso interesse aqui.

A maneira como usualmente temos ensinado parece não surtir efeito. Sobre isso, Biembengut e Hein (2019) destacam:

> Há um consenso no que diz respeito ao ensino de matemática precisar voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utilizá-lo. O que significa ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o aluno, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto da natureza do problema a ser modelado. (BIEMBENGUT; HEIN, 2019, p.18)

Nessa perspectiva a Modelagem Matemática surge como uma possibilidade para despertar no aluno o interesse por conteúdos que ainda não conhece, levando-o a aprender de forma significativa. Ao uso da Modelagem como método de ensino, Biembengut e Hein (2019) chamam de "modelação matemática" (BIEMBENGUT; HEIN, 2019, p.18). Vertuan (2010) ressalta ainda que:

> A Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática que coloca os alunos diante de situações problema que, embora tenham interesse em resolver, não possuem, necessariamente, de antemão, ideias e ferramentas para isso. Nesse sentido, uma atividade de Modelagem caracteriza-se pelo caráter investigativo, bem como pelas possibilidades de fazer emergir conhecimentos que os alunos já possuem, permitindo aos mesmos reelaborá-los, ou fazer surgir a necessidade de construção de novos conhecimentos (VERTUAN, 2010, p.02).

Dentro dessa concepção, os novos conceitos são expostos após serem necessários, ou seja, o aluno percebe que não possui o ferramental matemático suficiente e a partir daí o professor formaliza os novos conhecimentos. Importante ressaltar que, tal etapa (formalização) deverá ser a final, como evidencia, Silveira, Ferreira e Silva (2013):

> No processo de Modelagem Matemática aplicada ao ensino, ou Modelação Matemática, o conceito é apresentado através de uma situação problema, ficando a formalização do mesmo como etapa final. (SILVEIRA; FERREIRA; SILVA, 2013, p.2881)

Para utilizar o método em sala de aula, Biembengut e Hein (2019, p.19-28) sugerem a observação de cinco passos, dos quais destacamos três:

**1º) Diagnóstico:** conhecer a realidade com a qual vai trabalhar. Número de alunos, número de aulas, horário da disciplina, disponibilidade dos alunos para atividades extra-classe, grau de conhecimento matemático, realidade socioeconômica. De maneira geral, obter o máximo de informações possíveis sobre a turma com a qual se pretende trabalhar.

**2º) Escolha do tema:** O conteúdo programático é desenvolvido através dele, podendo ser escolhido pelo professor ou pelos alunos.

**3º) Desenvolvimento do conteúdo programático:** o professor segue as mesmas etapas da modelagem, ou seja, interação, matematização e modelo matemático, acrescentando, na etapa da matematização, o desenvolvimento do conteúdo matemático necessário para a solução da situação problema e exercícios análogos para aprimorar a apreensão dos conceitos pelos alunos.

Vale enfatizar que assim como Biembengut e Hein (2019) propõem a utilização da Modelagem enquanto estratégia de ensino será nossa forma de aplicá-la.

## 2.5 Vantagens e desvantagens da utilização da Modelagem Matemática em sala de aula

Diante de tudo que já foi tratado sobre Modelagem Matemática, não há dúvidas de que sua utilização enquanto método de ensino acarrete uma série de vantagens, principalmente para o aluno. Biembengut e Hein (2019), sobre os principais objetivos da modelação, elencam:

> - Aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;
> - Enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;
> - Despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;
> - Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
> - Desenvolver a habilidade para resolver problemas;
> - Estimular a criatividade.
>
> (BIEMBENGUT; HEIN, 2019, p.18-19).

Bassanezi (2004) também argumenta a favor da implantação da Modelagem Matemática em sala de aula, ressaltando, dentre outros motivos, que ela:

> - Enfatiza aplicações matemáticas;
> - Focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade;
> - Enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas;
> - Garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos, e valorizar a própria matemática. (BASSANEZI, 2004, p.36-37).

Já Vertuan (2010), acredita:

> Acreditamos que as atividades de Modelagem Matemática levam os alunos a verem a Matemática como uma ferramenta para analisar, investigar e interpretar a realidade. Ao desenvolverem uma atividade deste tipo, utilizam vários conceitos matemáticos em problemas reais e se obrigam, inclusive, a conhecerem melhor outras áreas do conhecimento. Logo, a Modelagem não só é uma alternativa para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos, como também é uma alternativa para a formação crítica dos alunos, os quais vivem numa sociedade em constante mudança Vertuan (2010, p.06).

De acordo com Bassanezi (2004, p.37), "apesar de todos (. . . ) os argumentos favoráveis ao uso da modelagem matemática, muitos colocam obstáculos, principalmente quando aplicada em cursos regulares", tais como:

- O currículo dos cursos regulares que devem ser desenvolvidos integralmente e, como a modelagem é um processo demorado isto pode não acontecer;
- Alguns professores de matemática duvidam se é de sua responsabilidade, ensinar a resolver problemas de outras áreas, ou estabelecer conexões com estas;
- O aluno está acomodado ao ensino tradicional e com a introdução da modelagem ele pode se perder ou tornar-se apático.
- Na modelagem o aluno passa ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, ou seja, ele é responsável pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, logo a aula poderá caminhar em ritmo mais lento;
- A formação heterogênea de uma classe pode dificultar na relação dos conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática;
- O tema escolhido pode não interessar a todos;
- Os professores não se sentem habilitados a desenvolver a modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações da Matemática em outras áreas.

De acordo com o exposto acima, observamos que Modelagem Matemática, assim como qualquer outra metodologia, possui seus prós e seus contras. Existem dificuldades em relação aos alunos, à escola e aos professores. Os alunos desmotivados e sem pré-requisitos para a série cursada, não conseguem se adequar a esse processo; a escola preocupada em cumprir o currículo e atender as exigências das avaliações externas, não aprecia a implantação da Modelação e os professores, sobrecarregados, com excessiva carga horária, preferem não arriscar por águas desconhecidas, já que precisariam mudar suas atitudes em relação ao ensino.

# 3 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA E TEÓRICA DE TRIGONOMETRIA

Nesse capítulo apresenta-se uma fundamentação histórica e teórica dos conceitos trigonométricos que permeiam esse trabalho, considerando que, ao conhecer o processo de evolução desse assunto, professor e aluno são capazes de compreender melhor os obstáculos relacionados à sua aprendizagem, percebendo que seu desenvolvimento se deu de maneira bastante diferente da ordem que hoje é ensinada. Costa (1997), Iezzi (1977), Carmo, Morgado e Wagner (1992) são os principais referenciais bibliográficos.

## 3.1 Algumas considerações históricas

### 3.1.1 Contribuições de diferentes culturas no desenvolvimento da Trigonometria

A palavra Trigonometria tem origem grega, e deriva-se das palavras trigōnon (triângulo) e metron (medida), ou seja, medida de triângulo. Nesse sentido, estudos apontam que já existiam registros há mais de dois mil anos antes da era comum.

Roque e Carvalho (2012), afirmam:

> A Trigonometria foi uma criação da Matemática grega, e recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, calcular o tempo e ser utilizada na navegação e na geografia. Assim, os estudos de Trigonometria se concentravam na Trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da Trigonometria plana (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.135).

A Trigonometria, assim como as demais áreas da Matemática, não se desenvolveu isoladamente, pelo contrário, foi acompanhada do crescimento da geometria. E nesse campo, os gregos Thales de Mileto e Pitágoras se destacaram. O primeiro, com seus estudos sobre semelhança de triângulos, nos quais se embasam os conceitos das relações trigonométricas, e o segundo, com o famoso teorema de Pitágoras, do qual deriva a relação fundamental da Trigonometria.

Hiparco de Nicéia (120 a.E.C.), considerado o pai da Trigonometria, provavelmente, construiu o que pode ser chamado "a primeira tabela trigonométrica". Atribui-se a ele também o fato de dividir o círculo trigonométrico em 360 partes, chamando cada parte de 1 grau. Possivelmente, foi Hiparco também que, dividiu cada grau em 60 partes, denominadas minutos. Como afirma Eves (2011, p.202), "foi Hiparco, ou talvez Hipsicles (c. 180 a.E.C.), quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360°".

Cláudio Ptolomeu, conhecido por ser o autor de Almagesto, que em árabe significa "a maior", ou seja, a mais notável obra de Trigonometria da sua época. Em sua obra, Ptolomeu organizou e publicou em sua maioria, resultados obtidos por Hiparco. Ainda assim, no Almagesto não consta nenhuma tabela sobre as funções seno e cosseno. Segundo Costa (1997):

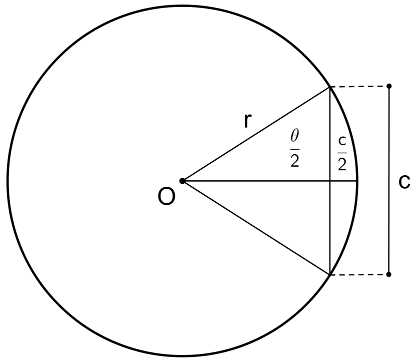
> No Almagesto temos: (a) Uma tabela mais completa que a de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180°; (b) O uso da base 60, com a circunferência dividida em 360 graus e o raio em 60 partes e frações sexagesimais, não só para expressar ângulos e sim para qualquer tipo de cálculo, com exceção dos de medida de tempo. (c) O resultado que passou a ser conhecido como Teorema de Ptolomeu: Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais. A partir desse resultado, operando com as cordas dos arcos, Ptolomeu chegou a um equivalente das fórmulas de seno da soma e da diferença de dois arcos, isto é sen $(a + b)$ e sen $(a - b)$. Especialmente a fórmula para a corda da diferença foi usada por ele para a construção da tabela trigonométrica. (d) O uso, também usando cordas, do seno do arco metade: sen $^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos\pi)$ (COSTA, 1997, p.08).

No século IV , a Trigonometria foi revolucionada por um conjunto de textos chamado Surya Siddhanta, que significa sistemas do sol.

> A importância do Surya, para nós, é que ele abriu novas perspectivas para a Trigonometria por não seguir o mesmo caminho de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da função corda, na Astronomia, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. No Surya, a relação usada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada por eles de jiva (Id., 1997, Ibid., p.09).

Essa forma de tratar o arco, considerando sua metade, permitiu que aparecesse o triângulo retângulo na circunferência trigonométrica, como na Figura 6:

Figura 6 – Jiva dos hindus




Fonte: (COSTA, 1997)

O jiva era definido como sendo a razão entre o cateto oposto à metade do ângulo central e a hipotenusa.

$$Jiva\ \frac{\theta}{2} = \frac{catetooposto}{} hipotenusa$$

Esse momento é oportuno para enfatizarmos a origem da palavra seno, visto que a relação que temos acima, hoje denominamos sen $\frac{\theta}{2}$. A palavra seno, vêm de sinus, no latim, que é a tradução de jaib, que no árabe significa dobra, bolso ou prega de uma roupa. O que ocorre é que no árabe, é comum escreverem apenas as consoantes das palavras e no caso, jiva e jaib possuem as mesmas consoantes (b e v confundem-se como labiais explosivas). Segundo Lima (1991, p.187), "trata-se de uma tradução defeituosa, que infelizmente durou até hoje". A palavra árabe correta, a qual deveria ser traduzida deveria ser jiba, que significa "a corda de um arco", e não jaib, como foi.

Nessa fase, desenvolveram-se os conceitos de seno e cosseno e a relação fundamental da Trigonometria, bem como outras identidades trigonométricas.

### 3.1.2 A Trigonometria a partir do Século XIV

A partir do século XIV, a Matemática passa a ser reconhecida como a ciência fundamental para estudar e descrever os fenômenos naturais. Com isso, evolui os conceitos de Trigonometria, tornando-se independente da Astronomia e de funções.

O matemático Regiomontanus (1436-1475) contribuiu fortemente com os estudos que trouxeram a Trigonometria como a conhecemos atualmente. Costa (1997) afirma:

> Regiomontanus escreveu um "Tratado sobre triângulos", em cinco livros, contendo uma Trigonometria completa. A invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente

> da que se faz hoje em dia. No "Tratado" ele calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando a de senos de Purbach, e introduziu na Trigonometria européia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem lançou as fundações para os futuros trabalhos na Trigonometria plana e esférica (COSTA, 1997, p.13).

Vários outros matemáticos participaram desse processo de evolução, tornando os cálculos mais precisos, desenvolvendo novas tábuas trigonométricas, incorporando um tratamento analítico à Trigonometria, desenvolvendo o simbolismo algébrico e até mesmo a representação por séries infinitas. Um longo caminho, que culmina com Euler (1707-1783) adotando um círculo de raio unitário e definindo funções aplicadas a um número e não a um ângulo, como era feito antes.

Costa (1997) afirma que em 1748, o livro "Introduction in Analysin Infinitorum", apresentando um tratamento analítico das funções trigonométricas, foi considerado precursor da Análise Matemática. Nele o seno adquiriu novas simbologias e significados, passando a ser compreendido como um número referente à ordenada de um ponto pertencente ao ciclo trigonométrico, ou o número para o qual cuja série converge:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Da mesma forma, o cosseno passou a ser representado pelo número definido pela série:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Com o conhecimento de que a função exponencial pode ser expandida na série seguinte

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

e fazendo $x = i \cdot \theta$, com $i^2 = -1$, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \\ e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots \\ e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ e^{i\theta} &= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Fazendo $\theta = \pi$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1 + 0 \text{ ou } e^{i\pi} + 1 = 0,$$

que é a famosa identidade de Euler. Dessa forma, as funções trigonométricas se inserem no contexto dos números complexos.

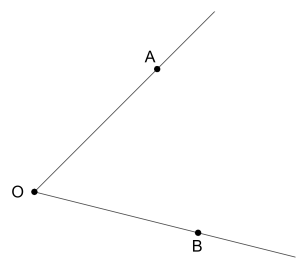
Esse foi um longo caminho realizado em muitos séculos. Propiciar ao aluno a percepção de algumas etapas desse processo permite que ele deixe de conceber a Trigonometria como uma invenção de alguém com inteligência acima da média e passe a perceber que, na verdade, essa (assim como várias outras) é uma parte da Matemática que desenvolveu por necessidades cotidianas, ou seja, nada "caiu do céu" pronto e acabado.

## 3.2 A Trigonometria no triângulo retângulo

### 3.2.1 O Ângulo

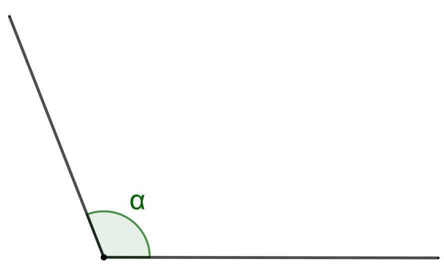
Segundo Carmo, Morgado e Wagner (1992, p. 05) "o ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem". As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é o seu vértice. Um ângulo pode ser representado de várias maneiras. Se $O$ é o vértice e se $A$ e $B$ são pontos quaisquer, um em cada lado, optaremos por representar esse ângulo por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$ (Figura 7). Também utilizaremos letras gregas para representação de ângulos, escrevendo a letra que designa o ângulo próximo do seu vértice (Figura 8).

Figura 7 – Ângulo




Fonte: (CARMO; MORGADO; WAGNER, 1992)

Figura 8 – Ângulo $\alpha$



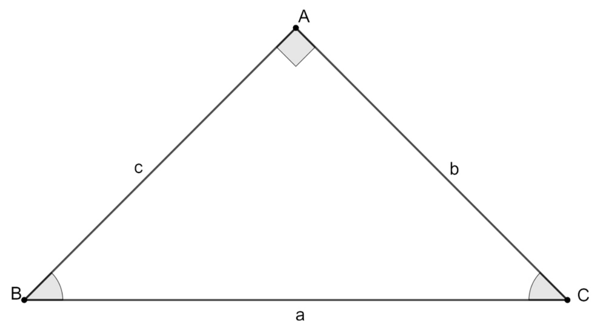

Fonte: A autora

Para medir ângulos, o grau (°) é uma das unidades utilizadas. Por hora, utilizaremos apenas ele. O grau é a fração $\frac{1}{360}$ do círculo, que detalharemos logo adiante.

Um ângulo menor que 90° é dito agudo, um ângulo de 90° é chamado reto e um maior que 90° é designado obtuso.

Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado triângulo retângulo.

Figura 9 – Triângulo retângulo




Fonte: A autora

Neste triângulo, tem-se:

- Lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$;
- Ângulos internos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$;
- Medidas dos lados: $a$ = medida do lado $\overline{BC}$;
  $b$ = medida do lado $\overline{AC}$;
  $c$ = medida do lado $\overline{AB}$;
- Medidas dos ângulos: $\hat{A}$ = medida do ângulo $B\hat{A}C$;
  $\hat{B}$ = medida do ângulo $A\hat{B}C$;
  $\hat{C}$ = medida do ângulo $A\hat{C}B$.

E por se tratar de um triângulo retângulo obtém-se:

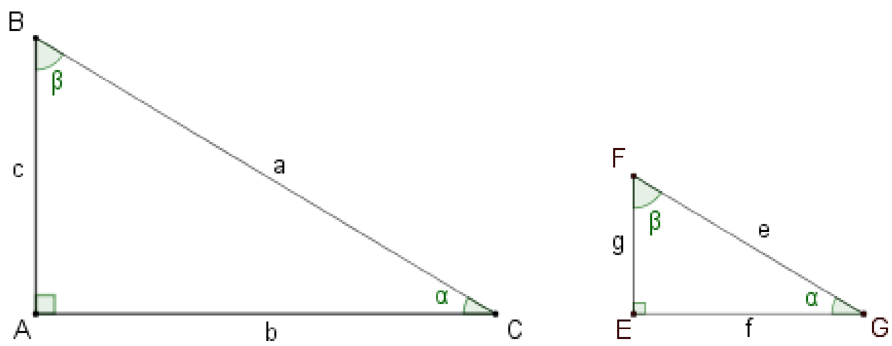
- dizemos que ele é retângulo em A quando seu ângulo reto for $B\hat{A}C$;
- o lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa;
- os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, adjacentes ao ângulo reto, são chamados de catetos do triângulo $ABC$.
- logo, $a$ é a hipotenusa, $b$ e $c$ são os catetos.

Com isso, o *Teorema de Pitágoras* se apresenta da seguinte forma: $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

### 3.2.2 Razões trigonométricas em triângulos retângulos

Considerando um ângulo agudo qualquer, de medida $\beta$, podemos construir um triângulo retângulo $ABC$, retângulo em $A$, tal que $A\hat{B}C = \beta$. Se um outro triângulo retângulo $EFG$ é tal que $E\hat{F}G = \beta$, então os triângulos $ABC$ e $EFG$ são semelhantes (caso de semelhança AAA - ângulo, ângulo, ângulo).

Figura 10 – Triângulos semelhantes




Fonte: A autora

Dessa semelhança segue:

$$\frac{b}{a} = \frac{f}{e}\ , \frac{c}{a} = \frac{g}{e} \text{ e } \frac{b}{c} = \frac{f}{g}$$

Assim, as razões $\frac{b}{a} = \frac{f}{e}$, $\frac{c}{a} = \frac{g}{e}$ e $\frac{b}{c} = \frac{f}{g}$ independem do triângulo retângulo considerado. Por tal razão, as denominamos de seno, cosseno e tangente de $\beta$, respectivamente, e denotamos:

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{c}$$

No triângulo retângulo $ABC$ da figura 49, os lados $AC$ e $AB$ são denominados **cateto oposto** e **cateto adjacente** ao ângulo $A\hat{B}C = \beta$, respectivamente. Assim, podemos dizer, equivalentemente, que

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}};$$

$$\cos\,\beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}};$$

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}.$$

Note que, pelo Teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Então:

$$\text{sen}\,^2\beta + cos^2\beta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

A identidade $\text{sen}\,^2\beta + \cos\,^2\beta = 1$ é conhecida como a **relação fundamental da Trigonometria**.

Observe, ainda, que se $\alpha$ e $\beta$ são os dois ângulos internos agudos de um triângulo retângulo, isto é, se $\alpha$ e $\beta$ são complementares, então:

$$sen\ \alpha = cos\ \beta,\ cos\ \alpha = sen\ \beta \text{ e } tg\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \beta}$$

E, ainda,

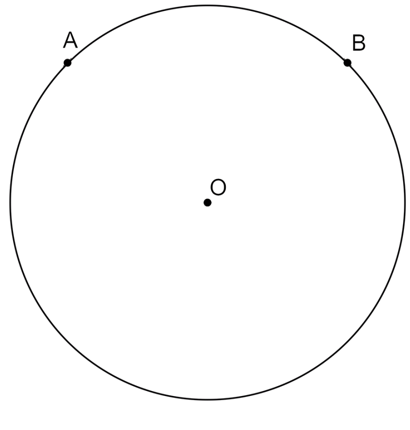
$$\frac{\text{sen}\ \beta}{\cos\ \beta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\ \beta$$

## 3.3 Trigonometria na circunferência

### 3.3.1 Arcos e Ângulos

Segundo definição dada por Iezzi (1977, p. 01), "dados dois pontos distintos $A$ e $B$ sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem $A$ e $B$, é denominada arco de circunferência $\widehat{AB}$".

Figura 11 – Arco $\widehat{AB}$

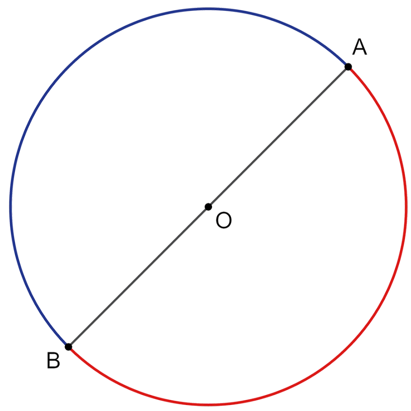



Fonte: (IEZZI, 1977)

Dois pontos sobre a circunferência determina dois arcos: considerando o sentido anti-horário, temos o arco de $A$ até $B$ e o arco de $B$ até $A$.

Caso o segmento $AB$ coincida com o diâmetro da circunferência, os dois arcos possuem o mesmo comprimento.

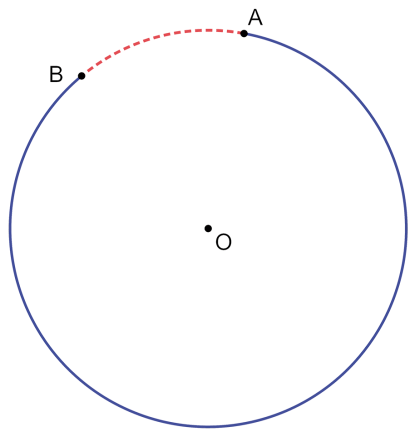
Figura 12 – Arcos de mesmo comprimento




Fonte: A autora

No entanto, quando $AB$ não é diâmetro, temos um arco menor (o de menor comprimento) e um arco maior (o de maior comprimento).

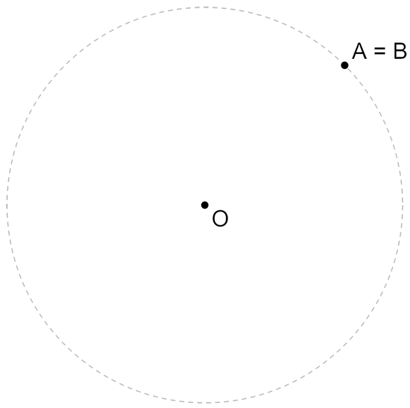
Figura 13 – Arco $\widehat{AB}$




Fonte: A autora

Se os pontos $A$ e $B$ coincidem, são determinados dois arcos: o ponto (ou arco nulo) e a circunferência (ou arco de uma volta).

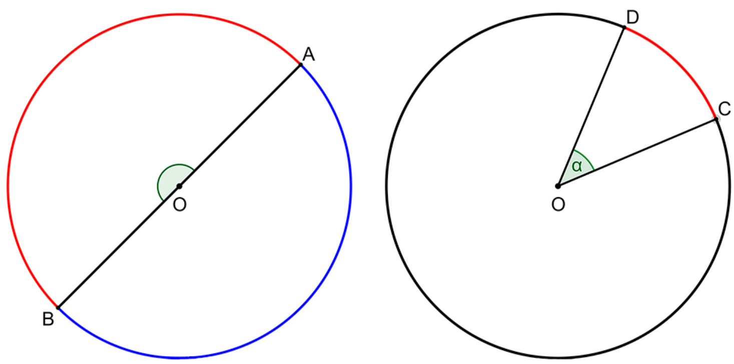
Figura 14 – Arco Nulo e Arco de uma volta




Fonte: (IEZZI, 1977)

Na figura 15, $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos centrais, determinados respectivamente pelos arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$, onde $O$ é o centro do círculo.

Figura 15 – Ângulos centrais



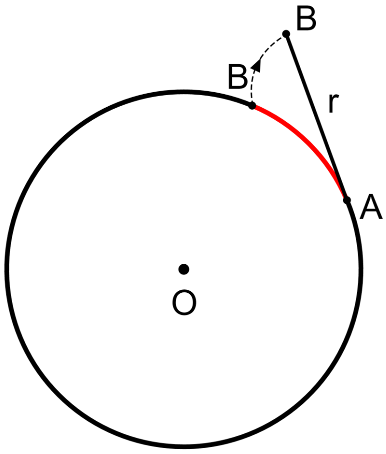

Fonte: (BENEVIDES, 2018)

Para medir arcos as unidades adotadas são o grau e o radiano.

Como já citado anteriormente, o grau (°) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência. Radiano (rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

Nesse sentido, dizer que um arco $\widehat{AB}$ mede 1 $rad$ equivale a dizer que "esticando"o arco $\widehat{AB}$ obtemos um segmento de reta $\overline{AB}$ de medida igual ao raio da circunferência.

Figura 16 – O Radiano




Fonte: (IEZZI, 1977)

Pela definição de pi ($\pi$), sabemos que o comprimento de uma circunferência de raio $r$ é igual a $2\pi r$. Por outro lado, o comprimento de um arco é proporcional à medida de seu ângulo central. Daí, ressaltando que a medida em graus, de uma volta completa no círculo é $360^o$ e designando por $\alpha$, em graus, a medida do ângulo central correspondente ao arco, obtemos que o comprimento desse arco é:

$$C_{arco} = 2\pi r \frac{\alpha}{360^o}$$

Assim, quando $\alpha = 1\ rad$, temos que $C_{arco} = r$, ou seja,

$$2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^o} = r \Rightarrow 2\pi r \frac{1}{360^o} = r \Rightarrow 1\ rad = \frac{360^o}{2\pi} \cong 57^o$$

E obtemos ainda:

$$2\pi rad = 360^o \Rightarrow \pi rad = 180^o$$

A partir das últimas igualdades torna-se fácil realizara conversão de radianos para graus e vice-versa.

Em várias ocasiões trabalhar com a medida radiano será mais conveniente. Segue um exemplo que mostra tal afirmação:

**Exemplo 3.3.1.** *Se $\widehat{AB}$ é um arco de um círculo $r$, cujo ângulo central mede $\theta$ radianos, então o comprimento deste arco é:*

$$C_{arco} = r \cdot \theta$$

*Demonstração:*
*Se o ângulo central mede $\theta$ radianos, então este ângulo mede $\theta \cdot \dfrac{360^o}{2\pi}$ graus.*
*Substituindo $\alpha$ por esse valor na equação:*

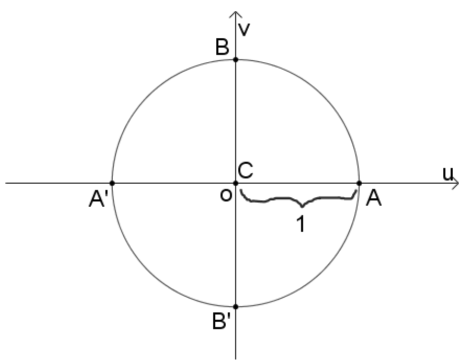
$$C_{arco} = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^o} \Rightarrow C_{arco} = 2\pi r \cdot \frac{\theta \cdot \frac{360^o}{2\pi}}{360^o} \Rightarrow C_{arco} = r \cdot \theta$$

### 3.3.2 Circunferência Trigonométrica

Segundo Iezzi (1977, p. 09), uma circunferência $\lambda$, definida como abaixo, é chamada ciclo ou circunferência trigonométrica.

> Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal $u0v$. Consideremos a circunferência $\lambda$ de centro 0 e raio $r = 1$. Notemos que o comprimento desta circunferência é $2\pi$ pois $r = 1$.
>
> Vamos agora definir uma aplicação de $\mathbb{R}$ sobre $\lambda$, isto é, vamos associar a cada número real $x$ um único ponto $P$ da circunferência $\lambda$ do seguinte modo:
>
> 1. se $x = 0$, então $P$ coincide com $A$;
> 2. se $x > 0$, então realizamos a partir de $A$ um percurso de comprimento $x$, no sentido anti-horário, e marcamos $P$ como ponto final do percurso;
> 3. se $x < 0$, então realizamos a partir de $A$ um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é $P$.

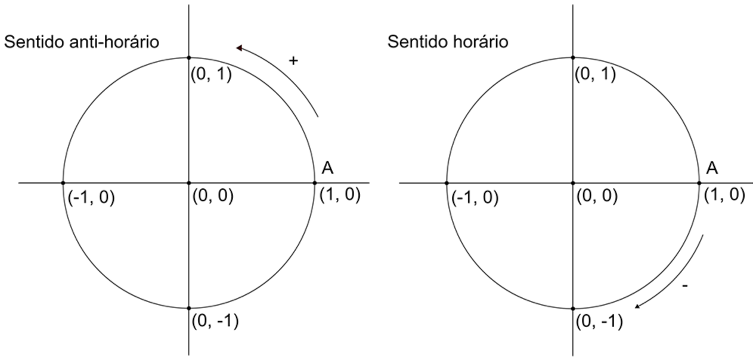
Figura 17 – Circunferência Trigonométrica




Fonte: (IEZZI, 1977)

Temos, assim que, tomando o sentido anti-horário na circunferência trigonométrica, os arcos são positivos enquanto que no sentido horário, medimos arcos negativos.

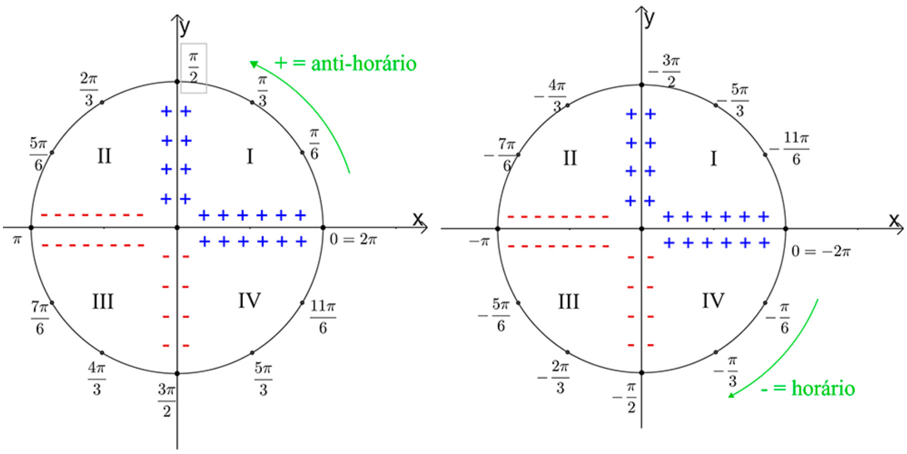
Figura 18 – Arcos orientados




Fonte: A autora

Os eixos do plano cartesiano dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes, os quadrantes. Esses são numerados de I a IV, em sentido anti-horário, como mostra a figura 19.

Figura 19 – Alguns arcos positivos e negativos no ciclo trigonométrico




Fonte: (BENEVIDES, 2018)

Vale ressaltar que, cada quadrante determina se a abscissa e/ou a ordenada de todos os seus pontos são positivas ou negativas.

No 1º quadrante temos abscissa e ordenada positivas. No 2º, abscissa negativa e ordenada positiva. No 3º quadrante, ambas negativas. E, no 4º quadrante, abscissa positiva e ordenada negativa.

E ainda um elemento $x$, tal que:

- $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, pertence ao 1º quadrante;
- $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$, pertence ao 2º quadrante;

- $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, pertence ao 3º quadrante;
- $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, pertence ao 4º quadrante;
- $x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$, está sobre o eixo das abscissas;
- $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$, está sobre o eixo das ordenadas.

### 3.3.3 Arcos côngruos

Dois arcos são chamados de côngruos ou congruentes quando possuem a mesma extremidade na circunferência trigonométrica, diferindo entre si apenas pelo número de voltas completas em torno do ciclo trigonométrico.

Temos que se $P$ está associado ao número real $x$, na circunferência trigonométrica, então $P$ é a imagem de $x$ no ciclo.

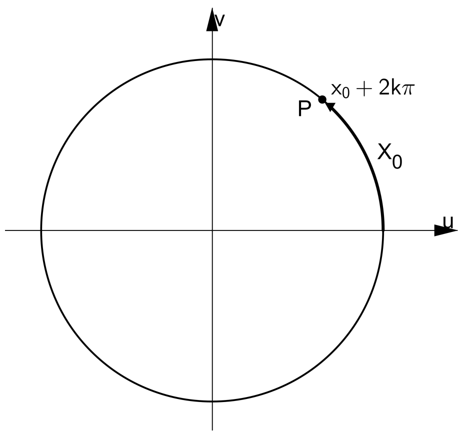
Observe que se $P$ é a imagem do número real $x_1$, então $P$ também é imagem dos números:

$x_1 + 2\pi$, $x_1 + 4\pi$, $x_1 + 6\pi$, etc., e também de

$x_1 - 2\pi$, $x_1 - 4\pi$, $x_1 - 6\pi$, etc., ou seja, $P$ é imagem dos elementos do conjunto:

$\{x \in \mathbb{R}/x = x_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Figura 20 – Arcos côngruos




Fonte: (IEZZI, 1977)

### 3.3.4 A função de Euler e as funções trigonométricas

Até o momento os conceitos de seno, cosseno e tangente estão definidos para ângulos entre 0º e 90º, o que equivale a dizer que as funções trigonométricas estão definidas para os números reais no intervalo $(0, \dfrac{\pi}{2})$, visto que os ângulos mencionados podem ser medidos em radianos. Buscaremos agora, estender tais conceitos, definindo essas funções, para todos (ou quase todos) os números reais.

É Importante ressaltar que as relações:

$$\text{sen}\ ^2x + cos^2x = 1$$

e

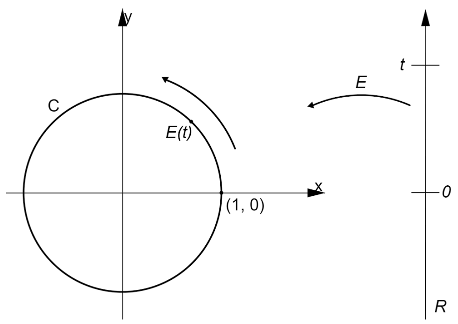
$$\text{tg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos\ x}$$

deverão ser mantidas.

Segundo Lima (2017, p. 190), considerando C como sendo a circunferência trigonométrica,

> A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, que faz corresponder a cada número real $t$ o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:
>
> - $E(0) = (1, 0)$.
> - se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência $C$, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de *comprimento* $t$, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre $C$). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
> - se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre $C$, de comprimento |t|, que parte do ponto (1,0) e percorre $C$ sempre no sentido negativo (isto é, no sentido o movimento dos ponteiros de um relógio usual).
>
> A função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência $C$ (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$. (LIMA, 2017, p.190)

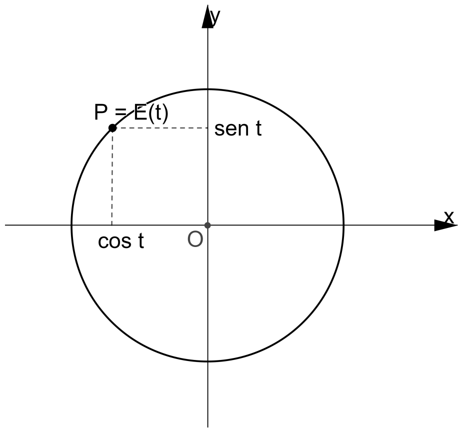
Figura 21 – Figura 9.6




Fonte: (LIMA, 2017)

Dessa forma as funções seno e cosseno são definidas como $E(t) = (\cos t, \text{sen } t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, ou seja, dado um ponto $P$, tal que $P = E(t)$, pertencente à circunferência trigonométrica, temos:

Figura 22 – Função $E(t)$



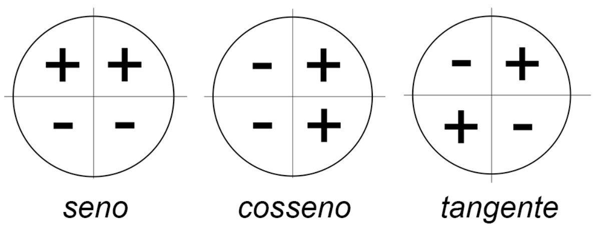

Fonte: A autora

Com isso,

$$\begin{aligned}\cos\ (t) &= \text{ abscissa de } P\\ \text{sen}\ (t) &= \text{ ordenada de } P\\ \text{tg}\ (t) &= \frac{\text{sen } t}{\cos t}, \text{ se } \cos t \neq 0\end{aligned}$$

Assim definidos, temos que os sinais do seno, cosseno e tangente de um número real depende do quadrante no qual se encontra esse número, ou seja:

Figura 23 – Sinais das funções trigonométricas



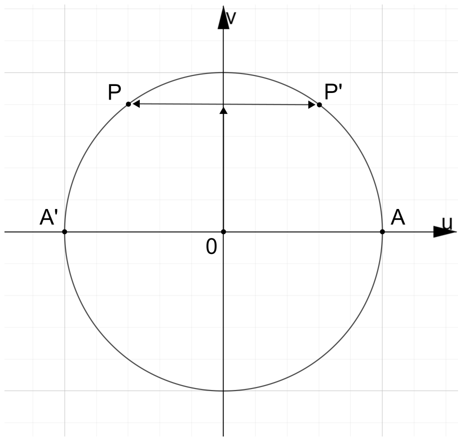

Fonte: A autora

### 3.3.5 Redução ao primeiro quadrante

Veremos agora que dado um número real pertencente ao 2º, 3º e 4º quadrantes, sempre podemos reduzi-lo a um número real correspondente a ele, que está no 1º quadrante. Analisaremos caso a caso, segundo Iezzi (1977).

1. REDUÇÃO DO 2º AO 1º QUADRANTE
   Dado o número real $x$ tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, seja $P$ a imagem de $x$ no ciclo. Seja $P'$ o ponto do ciclo, simétrico de $P$ em relação ao eixo dos senos.
   Temos:
   $\widehat{AP} + \widehat{PA'} = \pi$ (no sentido anti-horário)
   e, como $\widehat{AP'} = \widehat{PA'}$, vem:
   $\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \pi$
   portanto $\widehat{AP'} = \pi - x$.
   É imediato que:
   $sen\ x = sen(\pi - x)$
   $cos\ x = -cos(\pi - x)$

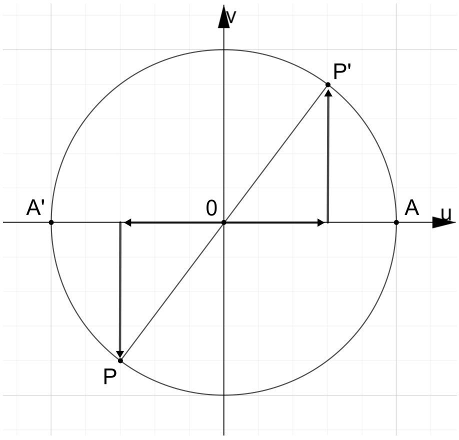
Figura 24 – Redução do 2º ao 1º quadrante




Fonte: (IEZZI, 1977)

2. REDUÇÃO DO 3º AO 1º QUADRANTE
   Dado o número real $x$ tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seja $P$ a imagem de $x$ no ciclo. Seja $P'$ o ponto do ciclo, simétrico de $P$ em relação ao centro. Temos:
   $\widehat{AP} - \widehat{AP'} = \pi$ (no sentido anti-horário)
   portanto $\widehat{AP'} = x - \pi$.
   É imediato que:
   $sen\ x = -sen(x - \pi)$
   $cos\ x = -cos(x - \pi)$

Figura 25 – Redução do 3º ao 1º quadrante




Fonte: (IEZZI, 1977)

3. REDUÇÃO DO 4º AO 1º QUADRANTE

   Dado o número real $x$ tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, seja $P$ a imagem de $x$ no ciclo. Seja $P'$ o ponto do ciclo, simétrico de $P$ em relação ao eixo dos cossenos. Temos:

   $\widehat{AP} + \widehat{PA} = 2\pi$ (no sentido anti-horário)

   e, como $\widehat{AP'} = \widehat{PA}$, em: $\widehat{AP} + \widehat{AP'} = 2\pi$

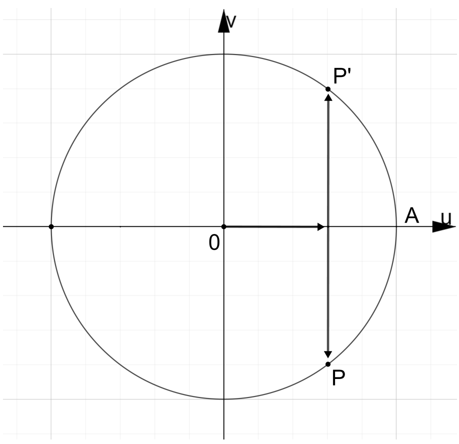
   portanto $\widehat{AP'} = 2\pi - x$.

   É imediato que:

   $sen\ x = -sen(2\pi - x)$

   $cos\ x = cos(2\pi - x)$

Figura 26 – Redução do 4º ao 1º quadrante




Fonte: (IEZZI, 1977)

## 3.4 Funções trigonométricas: propriedades e gráficos

### 3.4.1 Definições importantes

- Função periódica[1]
  Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição

  $$f(x+p) = f(x), \forall\ x \in \mathbb{R}$$

  O menor valor de $p$ que satisfaz a condição acima é chamado período de $f$.

- Função limitada
  Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada se existir $M > 0$, tal que

  $$|f(x)| \leq M, \forall\ x \in X$$

  ou equivalente,

  $$-M \leq f(x) \leq M, \forall\ x \in X$$

- Paridade de função
  Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, a função $f$ é chamada ímpar.

### 3.4.2 Função Seno

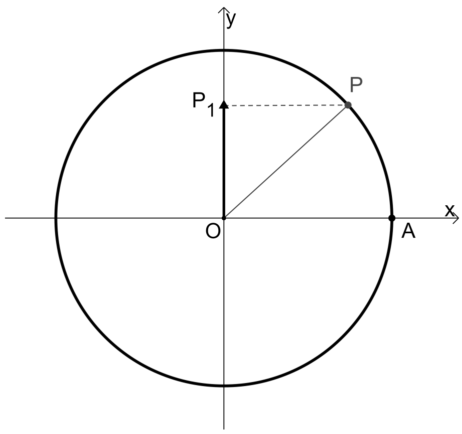
Dado um número real $t$, seja $P$ sua imagem na circunferência trigonométrica. Denomina-se seno de $t$ (indicado por $\operatorname{sen} t$) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto $P$ em relação ao sistema $xOy$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real $t$ o real $\overline{OP_1} = \operatorname{sen} t$ é chamada função seno, isto é:

$$f(t) = \operatorname{sen} t$$

[1] Enfatizaremos apenas as funções seno e cosseno, visto que essas foram os objetos de estudo desse trabalho.

Figura 27 – $\overline{OP_1}$ = sen $t$




Fonte: (IEZZI, 1977)

#### 3.4.2.1 Propriedades da função Seno

**P1** O domínio da função seno é o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$).

**P2** A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq$ sen $x \leq 1$, o que mostra que tal função é limitada.

**P3** Se $t$ pertence ao 1º ou 2º quadrante, sen $t > 0$, pois, $P$ está acima do eixo $x$ e sua ordenada é positiva.

**P4** Se $t$ pertence ao 3º ou 4º quadrante, sen $t < 0$, pois nesse caso, $P$ está abaixo do eixo $x$ e sua ordenada é negativa.

**P5** A função sen $t$ é crescente quando $t$ pertence ao 1º ou 4º quadrante, e decrescente quando $t$ pertence ao 2º ou 3º quadrante.

**P6** A função seno é periódica, de período $2\pi$, pois da expressão do seno da soma de arcos, temos:
sen $(t + 2K\pi)$ = sen $t \cdot$ cos $2K\pi$ + sen $2K\pi \cdot$ cos $t$ e sendo que cos $2K\pi = 1$ e sen $2K\pi = 0$, obtemos:

$$\text{sen } (t + 2K\pi) = \text{ sen } t \cdot 1 + 0 \cdot \text{ cos } t = \text{ sen } t$$

Assim, pela definição de função periódica, o período dessa função é o menor valor de $2K\pi, K \in \mathbb{R}$, o que ocorre quando $K = 1$, ou seja, o período é $2\pi$.

**P7** A função seno é ímpar. Para mostrar esse fato, observe que:

$$\text{sen } (-x) = \text{ sen } (0 - x)$$

Utilizando a expressão do seno da diferença de dois arcos, ou seja,

$$\text{sen }(-x) = \text{sen }(0 - x) = \text{sen } 0 \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 0$$

pois $\text{sen } 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$. Logo,

$$\text{sen }(-x) = 0 \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot 1 = -\text{sen } x,$$

como queríamos demonstrar.

#### 3.4.2.2 Gráfico da função Seno

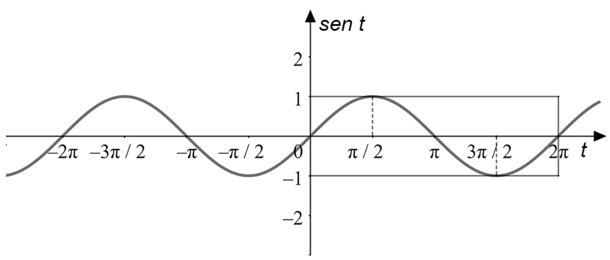
Como vimos acima, a função seno é periódica de período $2\pi$. Assim, podemos restringir o estudo dessa função ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Fazendo $t \in \mathbb{R}$ percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

| t | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $t$ | $0$ | cresce | $1$ | decresce | $0$ | decresce | $-1$ | cresce | $0$ |

Fazendo um diagrama com $t$ em abscissas e $\text{sen } x$ em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *senóide*, que nos indica como varia a função $f(t) = \text{sen } t$.

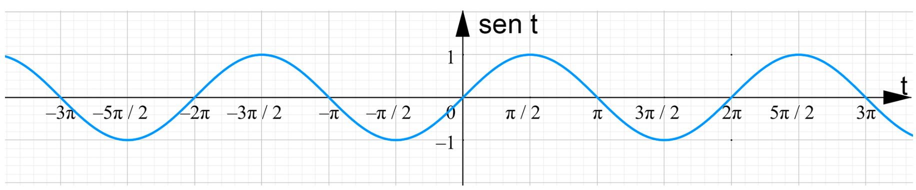
Figura 28 – Gráfico da função seno




Fonte: A autora

Para estender o gráfico da função seno para todos os reais basta replicar o gráfico obtido acima várias vezes, como na figura.

Figura 29 – Senóide




Fonte: A autora

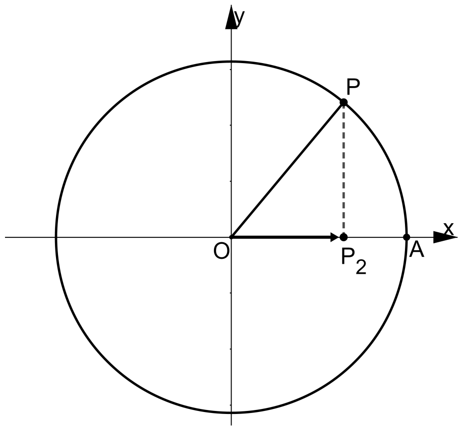
### 3.4.3 Função Cosseno

Dado um número real $t$, seja $P$ sua imagem na circunferência trigonométrica. Denomina-se cosseno de $t$, escrevendo $\cos t$, a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto $P$ em relação ao sistema $xOy$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real $t$ o real $\overline{OP_2} = \cos t$ é chamada função cosseno, isto é:

$$f(t) = \cos t$$

Figura 30 – $\overline{OP_2} = \cos t$




Fonte: (IEZZI, 1977)

#### 3.4.3.1 Propriedades da função Cosseno

**P1** O domínio da função cosseno é o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$).

**P2** A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, o que equivale dizer que $-1 \leq \cos x \leq 1$, o que mostra que tal função é limitada.

**P3** Se $t$ pertence ao 1º ou 4º quadrante, $\cos t > 0$, pois nesse caso, $P$ está à direita da origem e sua abscissa é positiva.

**P4** Se $t$ pertence ao 2º ou 3º quadrante, $\cos t < 0$, pois dessa forma, $P$ está à esquerda da origem e sua abscissa é negativa.

**P5** A função $\cos t$ é crescente quando $t$ pertence ao 3º ou 4º quadrante, e decrescente quando $t$ pertence ao 1º ou 2º quadrante.

**P6** A função cosseno é periódica, de período $2\pi$. Mostraremos essa afirmação: $\cos(t + 2K\pi) = \cos t \cdot \cos 2K\pi + \text{sen } t \cdot \text{sen } 2K\pi$. Como $\cos 2K\pi = 1$ e $\text{sen } 2K\pi = 0$:

$$\cos(t + 2K\pi) = \cos t \cdot 1 - \text{sen } t \cdot 0 = \cos t$$

Logo, pela definição de função periódica, o período dessa função é o menor valor de $2K\pi, K \in \mathbb{Z}$, o que ocorre quando $K = 1$, ou seja, o período é $2\pi$.

**P7** A função cosseno é par. Para provar essa afirmação, escreveremos:

$$\cos\,(-x) = \cos\,(0 - x) = \cos\,0 \cdot \cos\,x + \text{sen}\,0 \cdot \text{sen}\,x$$

Como $\cos\,0 = 1$ e $\text{sen}\,0 = 0$, temos:

$$\cos\,(-x) = 1 \cdot \cos\,x + 0 \cdot \text{sen}\,x = \cos\,x,$$

.

#### 3.4.3.2 Gráfico da função Cosseno

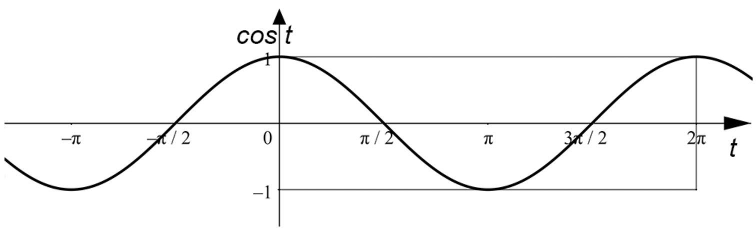
Analogamente à função seno, a função cosseno é periódica, de período $2\pi$. Assim, basta restringirmos seu estudo ao intervalo $[0, 2\pi]$.

Quando $t \in \mathbb{R}$, percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, temos os seguintes valores:

| t | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos $t$ | 1 | decresce | 0 | decresce | -1 | cresce | 0 | cresce | 1 |

Fazendo um diagrama com $x$ em abscissas e $\cos\,x$ em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *cossenóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = \cos\,x$.

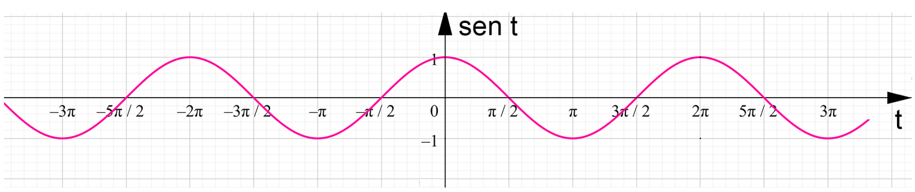
Figura 31 – Gráfico da função cosseno




Fonte: A autora

Para estender o gráfico da função cosseno para todos dos reais basta replicar o gráfico obtido acima várias vezes, como na figura abaixo.

Figura 32 – Cossenóide




Fonte: A autora

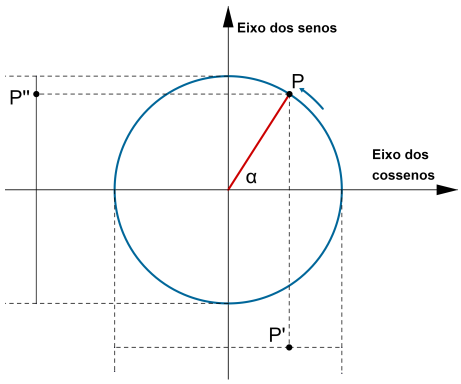
### 3.4.4 Fenômenos periódicos e funções do "tipo" trigonométricas

São inúmeros os fenômenos periódicos presentes na natureza, ou seja, que se repetem após o mesmo intervalo de tempo, denominado período. Como exemplo, temos: os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz visível, dos pêndulos, dentre outros.

Para descrever tais fenômenos as funções mais adequadas são as trigonométricas, uma vez que são periódicas.

Para associar as funções trigonométricas a um movimento periódico deve-se considerar um ponto $P$, associado ao ângulo $\alpha$, percorrendo toda a circunferência trigonométrica. "A projeção desse ponto no eixo dos senos ou no eixo dos cossenos descreve um movimento periódico"(DANTE, 2008, p.236).

Figura 33 – Ponto P móvel




Fonte: (DANTE, 2008)

A projeção do ponto $P(x, y)$ sobre o eixo dos cossenos descreve um movimento cuja equação é do tipo $x =$ cos $\alpha$ e sobre o eixo dos senos, $y =$ sen $\alpha$.

Dessa forma podemos associar a qualquer movimento periódico uma função do tipo $f(x) = a + b \cdot$ sen $(cx + d)$ ou $f(x) = a + b \cdot$ cos $(cx + d)$, denominadas funções do tipo trigonométricas.

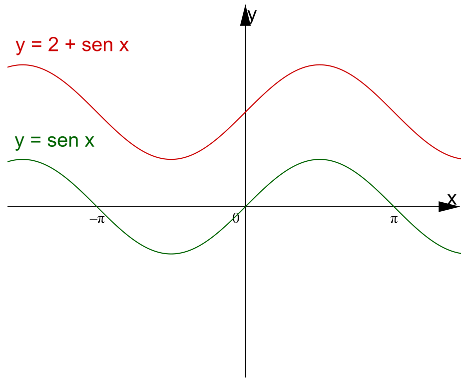
#### 3.4.4.1 Papel das constantes $a$, $b$, $c$ e $d$ nas funções do tipo $f(x) = a + b \cdot$ sen $(cx + d)$ e $f(x) = a + b \cdot$ cos $(cx + d)$

As constantes $\underline{a}$ e $\underline{b}$ alteram a imagem da função. Tomemos a função $f(x) = a + b \cdot$ sen $(cx + d)$, para $f(x) = a + b \cdot$ cos $(cx + d)$ é análogo.

Fazendo $t = cx + d$, temos que, quando $x$ percorre os reais, $b \cdot$ sen $t$ percorre o intervalo $[-b, b]$ e $y = a + b \cdot$ sen $t$ percorre o intervalo $[a - b, a + b]$, que é a imagem de $f$. Em detalhes:

- A constante $\underline{a}$ translada o gráfico da função seno em $\underline{a}$ unidades verticais. Se $a > 0$, o gráfico "sobe" $\underline{a}$ unidades, e se $a < 0$, o gráfico "desce" $|a|$ unidades. Observe:

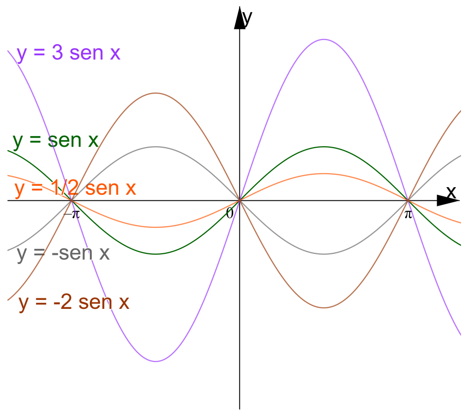
Figura 34 – Efeito da constante $a$




Fonte: A autora

- A constante $\underline{b}$ comprime ou dilata o gráfico verticalmente. Se $|b| > 1$, o gráfico dilata. Se $0 < |b| < 1$, o gráfico comprime. Se $b = -1$, o gráfico se inverte. Se $b < 0$, o gráfico fica simétrico, em relação ao eixo $x$, ao original com $b > 0$. Exemplos:

Figura 35 – Efeito da constante $b$




Fonte: A autora

- Já a constante $\underline{c}$ altera o período da função, ou seja, comprime ou dilata o gráfico padrão na horizontal.

  Ainda sobre $f(x) = a + b \cdot$ sen $(cx + d)$. Para que $f$ complete um período é necessário que $t = cx + d$ varie de $0$ a $2\pi$. Daí:

  Se $t = 0 \Rightarrow cx + d = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{d}{c}$.

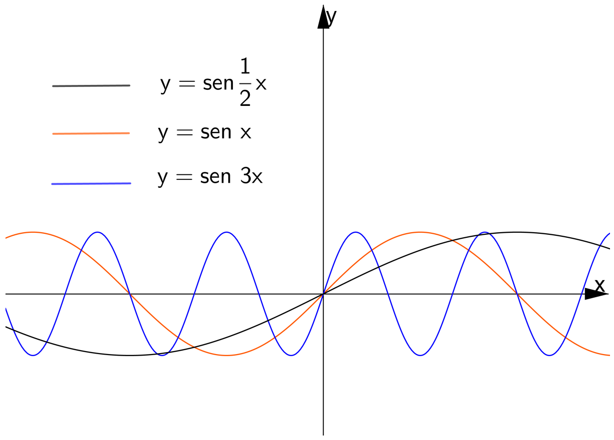
  Se $t = 2\pi \Rightarrow cx + d = 2\pi \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{|c|} - \dfrac{d}{c}$.

Portanto, o período é a variação de $x$, ou seja:

$$p = \frac{2\pi}{|c|} - \frac{d}{c} - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{|c|}$$

Se $|c| > 1$, $f(x)$ será comprimido horizontalmente em |c| unidades.
Se $0 < |c| < 1$, $f(x)$ será dilatado horizontalmente em |c| unidades.

Figura 36 – Efeito da constante $c$

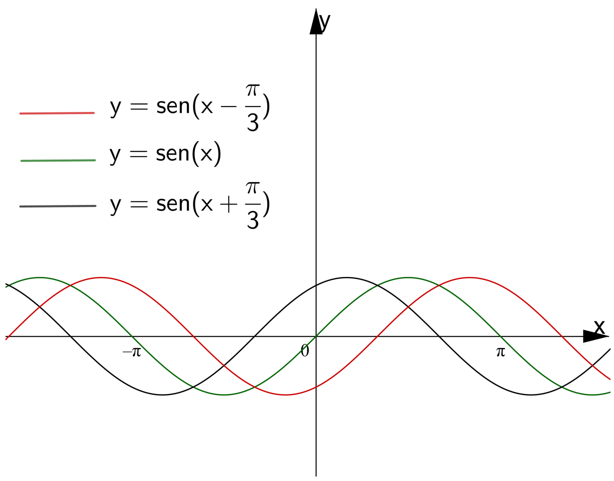



Fonte: A autora

- Por fim, a constante $\underline{d}$ translada o gráfico padrão em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades horizontais.

Se $d < 0$, o gráfico translada $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a direita, e se $d > 0$, o gráfico translada $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda.

Figura 37 – Efeito da constante $d$




Fonte: A autora

## 3.5 Equações trigonométricas

Dadas duas funções trigonométricas $f(x)$ e $g(x)$, de domínios $D_1$ e $D_2$, respectivamente. Resolver a equação $f(x) = g(x)$ equivale a determinar o conjunto dos números reais $k$, tais que: $k \in D_1$ e $k \in D_2$, para os quais $f(k) = g(k)$ é verdade. Nesse trabalho interessa-nos apenas dois tipos dessas equações. São eles:

1. $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta$

2. $\cos \alpha = \cos \beta$

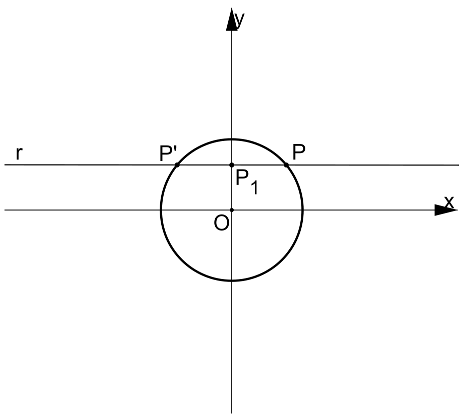
### 3.5.1 Resolução da equação $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta$

Se $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta = \overline{OP_1}$, então as imagens de $\alpha$ e $\beta$ na circunferência estão sobre a reta $r$, isto é, estão em $P$ ou $P'$. Daí temos que:

- $\alpha$ e $\beta$ possuem a mesma imagem ou

- $\alpha$ e $\beta$ possuem imagens simétricas em relação ao eixo dos senos.

Figura 38 – $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta$




Fonte: (IEZZI, 1977)

Em resumo:

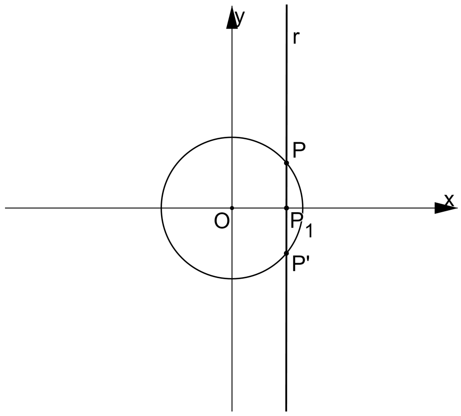
$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

### 3.5.2 Resolução da equação $\cos\alpha = \cos\beta$

Se $\cos\alpha = \cos\beta = \overline{OP_2}$, então as imagens de $\alpha$ e $\beta$ no ciclo estão sobre a reta $r$, que é perpendicular ao eixo dos cossenos $P_2$, ou seja, estão em $P$ ou $P'$. Assim, temos que:

- $\alpha$ e $\beta$ possuem a mesma imagem ou
- $\alpha$ e $\beta$ possuem imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos.

Figura 39 – $\cos\alpha = \cos\beta$




Fonte: (IEZZI, 1977)

Em resumo:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

# 4 A PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA APLICADA NO CEPI GRICON E SILVA

Neste capítulo apresentaremos uma proposta de ensino - aprendizagem de Trigonometria, através da Modelagem Matemática. O objetivo desse trabalho é, principalmente, realizar a transição da Trigonometria no triângulo retângulo para a Trigonometria na circunferência de maneira significativa e ainda dar sentido às funções trigonométricas, além de meras construções de gráficos.

## 4.1 A instituição escolar e a turma: caracterização

O trabalho foi desenvolvido no CEPI (Centro de Educação em Período Integral) Gricon e Silva, em Rianápolis, Goiás. Nesse modelo de escola os alunos possuem aulas das disciplinas da base curricular nacional, dito núcleo comum e também do núcleo diversificado.

Segundo o projeto político pedagógico do CEPI Gricon e Silva, as bases teóricas da proposta pedagógica da escola são: protagonismo, educação interdimensional, pedagogia da presença e os quatro pilares da educação.Já a estrutura curricular da referida escola está pautada pela BNCC, abrangendo as quatro áreas do conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências Humanas e Ciências da Natureza) e pela base diversificada, composta pelas disciplinas: Pós-Médio, Prática de Laboratório, Projeto de Vida, Protagonismo, Eletivas e Estudo Orientado. A parte diversificada do currículo conta ainda com as práticas educativas Acolhimento e Tutoria, visando a permanência e o sucesso do aluno na escola

A proposta de Modelagem Matemática foi aplicada para uma turma de primeira série do Ensino Médio, com 31 alunos. A escolha da turma foi motivada pelo fato de que ainda não haviam estudado Trigonometria, além daquela proposta no ensino Fundamental. Dessa forma, foi o primeiro contato dos alunos com o aprofundamento desse tópico, o que nos deu um indicador plausível sobre a eficácia da estratégia de ensino adotada, a Modelagem Matemática.

O número de aulas de Matemática semanal é seis. Foram disponibilizadas inicialmente, duas aulas semanais para o desenvolvimento deste. A aplicação iniciou em setembro e finalizou em dezembro, sendo que, a partir de novembro foram disponibilizadas mais duas aulas semanais, totalizando 36 aulas para toda a execução do projeto, porém, algumas eventualidades (reuniões, aulas de menor duração) não permitiram a realização integral de todas elas.

À princípio, foi entregue aos alunos o Anexo A contendo questões de Trigonometria referentes ao Ensino Fundamental e algumas perguntas sobre suas impressões em relação à Matemática e à Trigonometria, visando compreender o que possuíam de pré-requisitos acerca do conteúdo.

A maioria dos estudantes disseram não se lembrar de ter estudado tal tema e não souberam nem mesmo reconhecer um triângulo retângulo.

A partir do diagnóstico, os alunos foram distribuídos em 5 grupos de 5 pessoas e 1 grupo de 6 pessoas para iniciar o trabalho. Nesse momento foi possível perceber que um número expressivo dos integrantes da turma não se relacionavam bem. Dessa forma, os grupos foram estabelecidos por afinidades, não sendo possível o reordenamento deles no decorrer do trabalho.

## 4.2 Acessibilidade e triângulos retângulos

O tema enfocado inicialmente foi "acessibilidade". Os alunos foram convidados a observar a escola e refletir sobre a acessibilidade da mesma. A discussão teve seu início através do texto "Acessibilidade aos cadeirantes", que consta no Anexo B.

### 4.2.1 Analisando as rampas

Assim, motivados por esse pequeno artigo, foram levantadas duas questões:

1. "As rampas de nossa escola são acessíveis"?

2. "É viável construir uma rampa ligando o 1º ao 2º piso da escola"?

A partir das questões apontadas, iniciamos as etapas da atividade de modelagem, segundo Biembengut e Hein (2019):

**1ª etapa)** INTERAÇÃO: momento em que os alunos reconhecem a situação-problema dada e buscam se familiarizar com a mesma. Para isso, buscamos conhecer e refletir acerca das leis que regulamentam a acessibilidade em nosso país, chegando assim, à ABNT NBR 9050. Segue também no Anexo B um fragmento de tal documento.

O primeiro passo dos estudantes foi buscar compreender a equação dada na NBR 9050 que certifica, se uma dada rampa é ou não acessível: $i = 100 \cdot \frac{h}{c}$, onde:

- $i$ = inclinação da rampa, em porcentagem;
- $h$ = altura do desnível;
- $c$ = comprimento da projeção horizontal da rampa.

**2ª etapa)** MATEMATIZAÇÃO: formulação e resolução do problema em termos do modelo. Nessa fase, os estudantes saíram em busca das rampas existentes na escola, para efetuar as medições, com a seguinte instrução:

As rampas que nossa escola possui estão de acordo com a norma NBR 9050?

Vamos verificar? Preencha a tabela abaixo:

a) Local pesquisado:

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| | | |

b) Local pesquisado:

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| | | |

**3ª ETAPA)** MODELO MATEMÁTICO: interpretação da solução e validação do modelo. Depois de inúmeras tentativas, concluíram que dentre 7 rampas que a escola possui, apenas uma está de acordo com a NBR 9050, ou seja, possui inclinação menor do que ou igual a 8,33%.

Quanto a segunda parte do problema proposto, os alunos buscaram as medidas da altura que a provável rampa deveria possuir, e com base na inclinação máxima que poderia possuir, concluíram a inviabilidade da construção da mesma.

Nem todos os grupos conseguiram realizar essa etapa da atividade até o final. Sabiam que deveriam considerar a altura da possível rampa e o índice máximo de inclinação de 8,33% que consta na NBR 9050, mas não conseguiam relacioná-los. Ao término das tentativas, o grupo que conseguiu finalizar a atividade, apresentou sua forma de pensar para os demais colegas, buscando socializar os conhecimentos adquiridos.

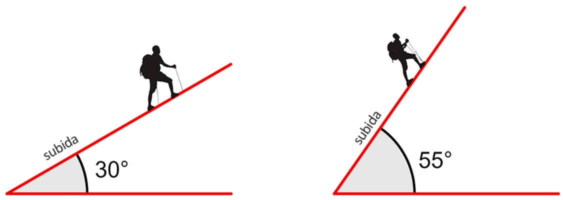
### 4.2.2 Relacionando rampas e triângulos retângulos

Posteriormente, em sala de aula, o próximo passo foi relacionar as rampas aos triângulos retângulos. E, assim, de acordo a Dante (2008) conceituar seno, cosseno e tangente de um ângulo, no triângulo retângulo.

Inicialmente, a situação problema a seguir, foi apresentada:

Observe uma pessoa que sobe dois tipos de rampa:

Figura 40 – Rampas 1



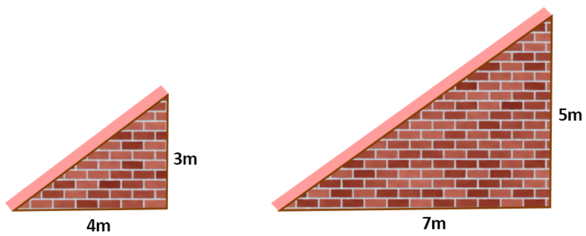

Fonte: (DANTE, 2008)

Qual rampa é mais íngreme?

Logo depois, uma situação parecida:

Sem conhecer os ângulos de subida, como saber qual das duas rampas é a mais íngreme?

Figura 41 – Rampas 2

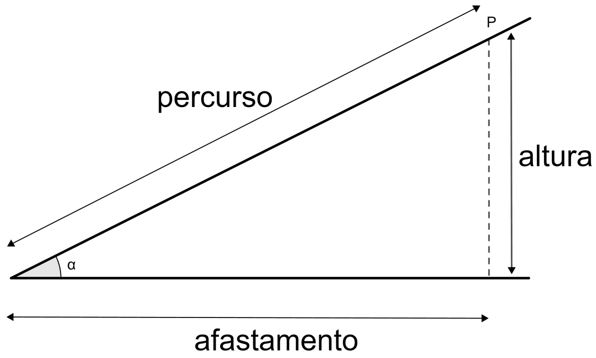



Fonte: (DANTE, 2008)

Facilmente, no primeiro caso, os alunos responderam que a segunda rampa é mais íngreme que a primeira, visto que $55^o > 30^o$. No segundo, utilizaram a equação da NBR 9050, concluindo que a primeira rampa é mais íngreme que a segunda. Nesse momento, passamos à formalizar a ideia do índice de subida, como abaixo.

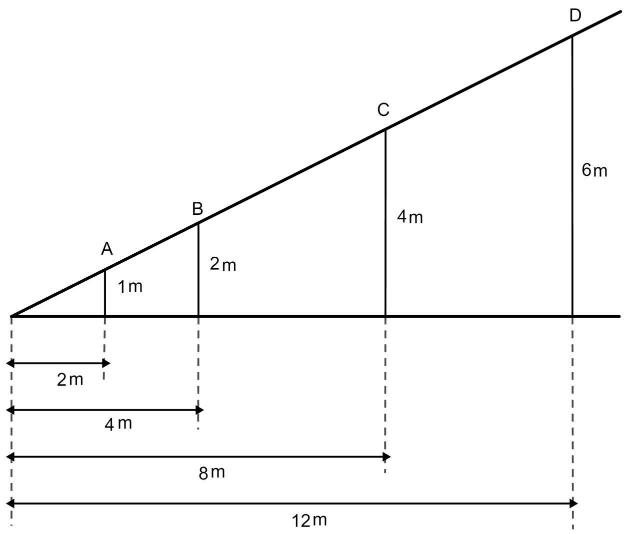
Para cada ponto $P$ alcançado na subida, temos um percurso, um afastamento e uma altura, conforme as figuras 42 e 43:

Figura 42 – Rampa




Fonte: (DANTE, 2008)

Figura 43 – Diferentes pontos da rampa




Fonte: (DANTE, 2008)

| Ponto | Afastamento | Altura |
|---|---|---|
| A | 2 m | 1 m |
| B | 4 m | 2 m |
| C | 8 m | 4 m |
| D | 12 m | 6 m |

Para cada um dos pontos, a razão entre a altura e o afastamento correspondente é dada por:

$$ponto\ \mathbf{A} : \frac{altura}{afastamento} = \frac{1m}{2m} = \frac{1}{2}$$

$$ponto\ \mathbf{B} : \frac{altura}{afastamento} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2}$$

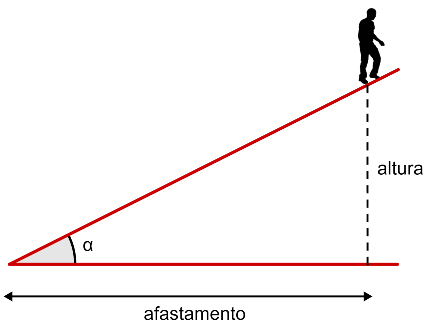
$$ponto\ \mathbf{C} : \frac{altura}{afastamento} = \frac{4m}{8m} = \frac{1}{2}$$

$$ponto\ \mathbf{D} : \frac{altura}{afastamento} = \frac{6m}{12m} = \frac{1}{2}$$

Foi enfocado aos alunos o fato da razão entre a altura e o afastamento, para pontos distintos de uma mesma subida, ser uma constante. Essa proporcionalidade decorre da semelhança de triângulos retângulos e foi mostrada aos estudantes. No caso acima, essa constante é $\frac{1}{2}$ e chama–se *índice de subida*.

O próximo passo foi definir *tangente* de um ângulo para associar a medida do ângulo de subida com o índice na mesma subida. A tangente do ângulo de subida é igual ao índice de subida associado e a indicaremos por $k_1$.

Figura 44 – Tangente de $\alpha$




Tangente de um ângulo

de subida $= k_1$

$\text{tg}\ \alpha = k_1$

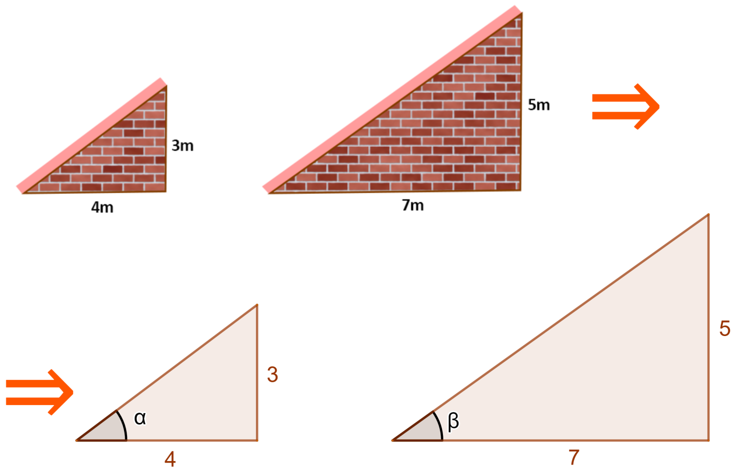
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{altura}{afastamento} =$

$= \textit{índice de subida}$

Fonte: (DANTE, 2008)

Voltamos à situação-problema, sobre qual rampa ser mais íngreme sem conhecer seu ângulo de subida. Foram construídos seus modelos matemáticos, dois triângulos retângulos, como seguem:

Figura 45 – Modelando as rampas




Fonte: (DANTE, 2008)

E aplicando o conceito de tangente concluíram:

Índice de subida da primeira ou $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{3}{4}$

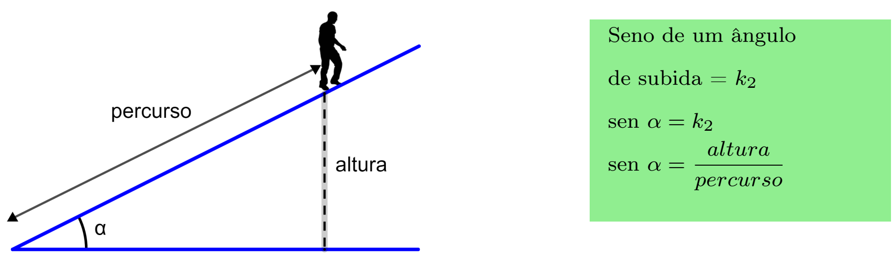
Índice de subida da segunda ou $\text{tg}\ \beta = \dfrac{5}{7}$

Como $\dfrac{3}{4} > \dfrac{5}{7}$, a primeira subida é mais íngreme do que a segunda.

Além da razão entre a altura e o afastamento, podemos determinar também a razão entre a altura e o percurso, que será um número que indicaremos por $k_2$ e chamaremos de seno do $\alpha$.

$$\frac{altura}{percurso} = \text{número } k_2$$

Figura 46 – Seno de $\alpha$

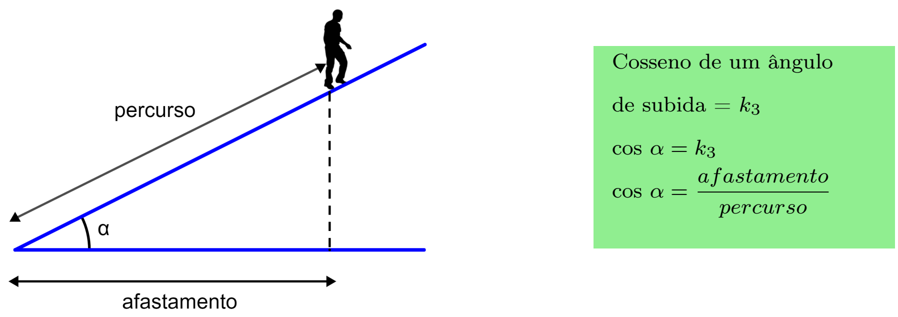



Fonte: (DANTE, 2008)

E ainda, em qualquer subida podemos determinar a razão entre o afastamento e o percurso, que será um número que indicaremos por $k_3$ e chamaremos de cosseno do $\alpha$.

$$\frac{afastamento}{percurso} = \text{número } k_3$$

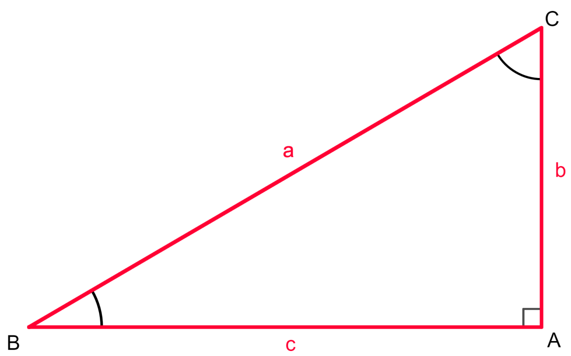
Figura 47 – Cosseno de $\alpha$




Fonte: (DANTE, 2008)

Posteriormente, passamos às definições de seno, cosseno e tangente por meio de semelhança de triângulos. Tomemos o triângulo $ABC$ retângulo em A, como na figura 48:

Figura 48 – Triângulo retângulo ABC




Fonte: (DANTE, 2008)

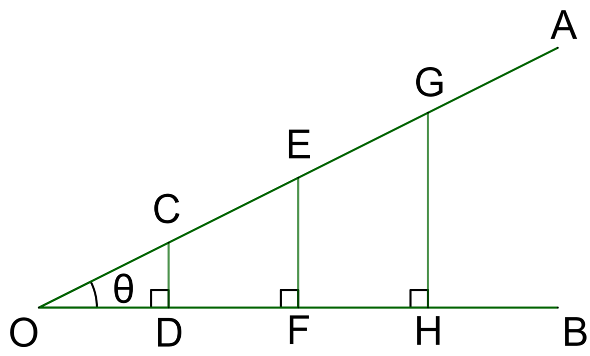
Assim,

- **a** é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- **b** e **c** são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos;
- $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$;

- $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$;

Consideremos agora um ângulo $A\hat{O}B = \theta$, $0^o < \theta < 90^o$ e tracemos, a partir dos pontos $C$, $E$, $G$ etc. da semi-reta $OA$, as perpendiculares $CD$, $EF$, $GH$, etc., à semi-reta $OB$.

Figura 49 – Triângulos semelhantes




Fonte: (DANTE, 2008)

Os triângulos $OCD$, $OEF$, $OGH$, etc., são semelhantes, pois possuem os mesmos ângulos. Dessa forma, temos:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \ldots \text{(constante)}$$

Essa relação só depende do ângulo $\theta$ (e não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\theta$ é um dos ângulos agudos) sendo denominada de **seno de** $\theta$ e escrevemos:

$$\text{sen } \theta = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}, (0^o < \theta < 90^o)$$

Analogamente, partindo da semelhança dos triângulos, obtemos:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \ldots \text{(constante)}$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \ldots \text{(constante)}$$

que também dependem apenas do ângulo $\theta$ e que definimos, respectivamente, como **cosseno do ângulo** $\theta$ e **tangente do ângulo** $\theta$:

$$\cos \theta = \frac{OD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}, (0^o < \theta < 90^o)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{CD}{OD} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}, (0^o < \theta < 90^o)$$

As razões $\text{sen}\ \theta = \dfrac{CD}{OC}$, $\cos\ \theta = \dfrac{OD}{OC}$ e $\text{tg}\ \theta = \dfrac{CD}{OD}$ são chamadas *razões trigonométricas* em relação ao ângulo $\theta$.

Podemos estabelecer várias relações entre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, dentre as quais destacamos:

1. Relação fundamental da trigonometria

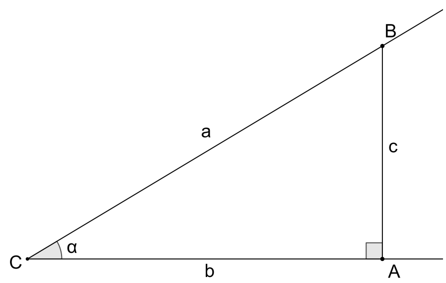
$$\text{sen}\ ^2\alpha + \cos\ ^2\alpha = 1,\ 0^o < \alpha < 90^o$$

**Demonstração 4.2.1.** *Consideremos um ângulo $\alpha$ de vértice $C$ e um triângulo $CAB$, retângulo em $A$. Temos:*

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Figura 50 – Triângulo ABC




Fonte: (DANTE, 2008)

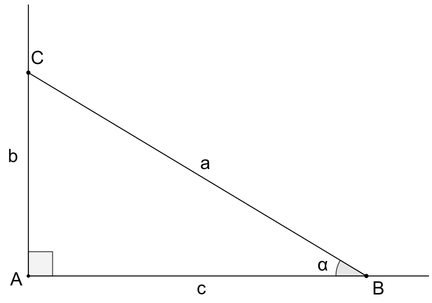
*Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:*

$$\text{sen}\ ^2\alpha + \cos\ ^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

*Portanto,* $\text{sen}\ ^2\alpha + \cos\ ^2\alpha = 1\ (0^o < \alpha < 90^o)$.

2. $$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha},\ 0^o < \alpha < 90^o$$

Figura 51 – Triângulo ABC




Fonte: (DANTE, 2008)

**Demonstração 4.2.2.**

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha$$

*ou*

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \textit{(dividimos ambos os termos da razão por } a \neq 0)$$

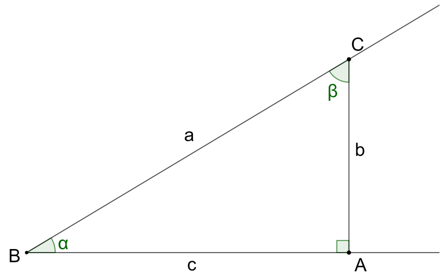
*Portanto,* $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ $(0^o < \alpha < 90^o)$*.*

3. Dados dois ângulos $\alpha$ e $\beta$ complementares $(\alpha + \beta = 90^o)$, então $\text{sen } \alpha = \cos \beta$ (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar e vice-versa) e $\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \beta}$

**Demonstração 4.2.3.** *:*

*Considere o triângulo retângulo da figura 52, onde* $\alpha$ *e* $\beta$ *são complementares.*

Figura 52 – Triângulo ABC




Fonte: (DANTE, 2008)

*Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente no triângulo dado, temos:*

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{c} = \cos \beta; \textit{ portanto, } \boxed{\text{sen } \alpha = \cos \beta}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \text{sen } \beta; \textit{ portanto, } \boxed{\cos \alpha = \text{sen } \beta}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\text{tg } \beta}; \textit{ portanto, } \boxed{\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta}}.$$

Ao término dessas explanações, foi distribuído a Lista I de exercícios (Anexo C), a fim de verificar e fixar os conteúdos apreendidos, extraídos do livro do Dante (2008), concordando com Biembengut e Hein (2019), quando afirmam:

> Pode-se propor, também, a resolução de exercícios (convencionais, aplicados, demonstrações). Esses exercícios servem como meio de avaliar se os conceitos apresentados foram apreendidos. (BIEMBENGUT; HEIN, 2019, p.21)

Importante ressaltar que os alunos resolveram essa lista em grupos, sendo que a atividade de número oito foi realizada com a ajuda da professora, no quadro. Em seguida, foi proposta a Lista II (Anexo D) e realizada no quadro a atividade número sete, visando enfocar a utilização das relações trigonométricas na resolução de problemas.

## 4.3 Roda a Roda e a circunferência trigonométrica

Essa fase foi iniciada propondo o seguinte problema, retirado da lista de exercícios da apostila "círculo trigonométrico", do Portal do Saber[1].

**Exercício 13.** Em um programa que se chama Roda a Roda, existe uma roleta que os participantes giram para saber qual o seu prêmio, conforme a figura. A roleta deve estar posicionada sempre no PERDE TUDO antes do giro de qualquer participante e o giro deve ser sempre no sentido horário.

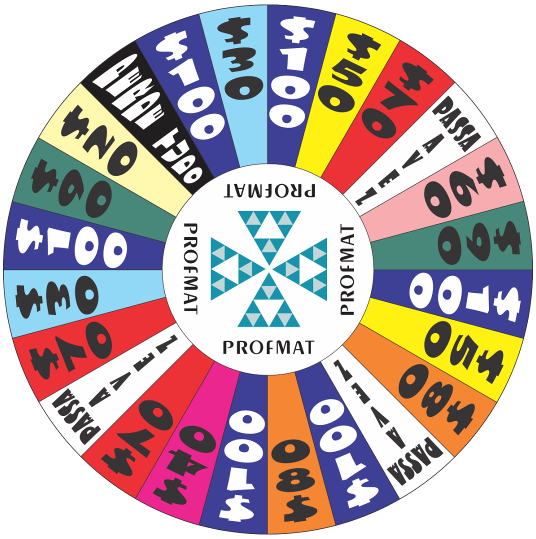
a) Jairo gira a roleta $2760^o$. Qual é seu prêmio?

b) Qual o menor ângulo para que o prêmio de Juarez seja $ 100?

c) Quais ângulos fazem com que Josué perca a vez ou perca tudo?

[1] <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/c04oipxwhcg8c.pdf>

Figura 53 – Roda




Fonte: A autora

### 4.3.1 Entendendo a Roda

**1ª etapa) INTERAÇÃO:** momento em que os alunos reconhecem a situação-problema dada e buscam se familiarizar com a mesma.

Nesse caso, a interação foi realizada de forma diferente da primeira situação. Os alunos manipularam uma roleta, podendo observar o que significa girar no sentido horário e o que significa girar no sentido anti-horário.

Figura 54 – Protótipo do Jogo Roda a Roda

Fonte: A autora

Outro ponto explorado nessa fase foi o fato de uma volta completa na circunferência equivaler a $360^o$. Para isso, foi proposto aos alunos a leitura do texto intitulado "A Circunferência de $360^o$"[2], conforme Anexo E.

A maioria dos estudantes possuíam a ideia de que uma volta completa na circunferência equivale a $360^o$. Assim, todos os grupos concluíram rapidamente que para solucionar o item **a)** seria necessário mais de uma volta.

**2ª etapa) MATEMATIZAÇÃO:** formulação e resolução do problema em termos do modelo. Como foi percebido pelos alunos que seria necessário mais de uma volta, a primeira atitude foi entender o número de voltas necessárias, para isso, realizaram a divisão, $\frac{2760}{360} = 7$ voltas e sobram $240^o$.

A partir daí, buscaram compreender a que setor da roda se refere $240^o$. Para isso, como a roleta possui 24 faixas, efetuaram $\frac{360}{24} = 15$, obtendo que cada setor possui $15^o$. Logo, $\frac{240}{15} = 16$, e Jairo parou na 16ª faixa.

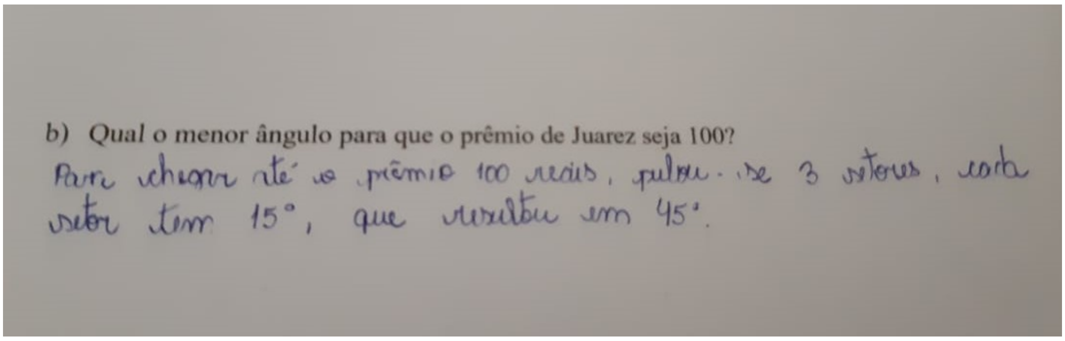
Até aí, todos os grupos estavam em concordância. Porém, no momento de dizer o prêmio, tivemos discordâncias entre 90 e 40. Motivo: alguns grupos consideraram a 16ª faixa no sentido horário, enquanto outros, consideraram no sentido anti-horário.

**3ª ETAPA) MODELO MATEMÁTICO:** interpretação da solução e validação do modelo.

Estávamos com 2 soluções distintas para o problema, a validação seria o momento de definir a correta. Para isso, foi proposto outros valores, menores, fáceis de serem percebidos no giro da roleta. Através de repetições, a turma chegou ao consenso quanto à resposta, ou seja, à validação do modelo. Ao girar a roleta no sentido horário, a passagem das faixas pelo ponto inicial de referência se dá no sentido anti-horário. Portanto, o prêmio de Jairo é R$ 90,00.

Os itens **b)** e **c)** eles resolveram sem maiores dificuldades, como segue:

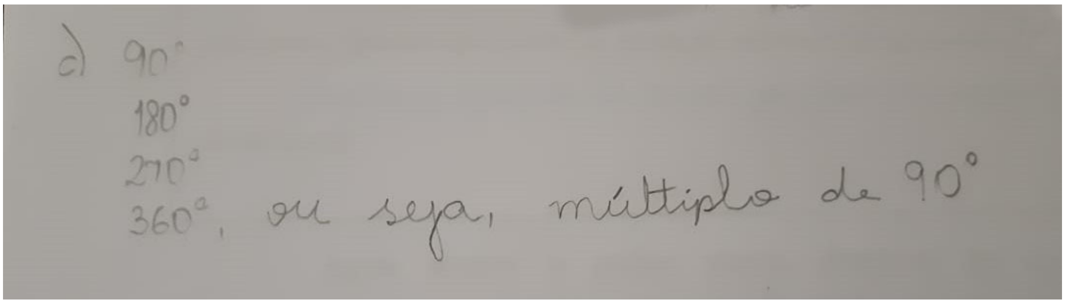
Figura 55 – Resposta do aluno B




Fonte: A autora

[2] Disponível em <https://www.sofazquemsabe.com/2012/01/por-que-circunferencia-mede-360-graus.html>, acessado em 21/10/2019.

Figura 56 – Resposta do aluno C




Fonte: A autora

### 4.3.2 Conhecendo a circunferência trigonométrica

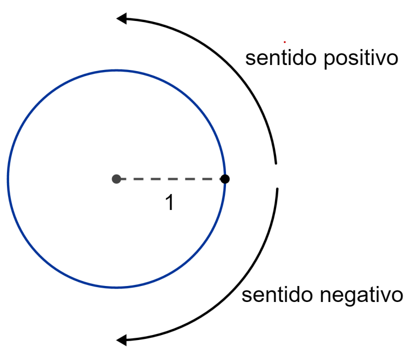
Nessa etapa, definiu-se um novo ambiente, a circunferência trigonométrica, visando ampliar os conceitos de seno, cosseno e tangente. Para isso, realizou-se segundo o capítulo 3:

- Definição de arcos, ângulos e unidades de medida para tais;
- Relação entre as unidades para medir arcos.

O conceito de circunferência trigonométrica e arcos côngruos, com objetivo de tornar mais simples, foram realizados segundo Dante (2008), como segue:

Circunferência trigonométrica é a circunferência orientada cujo raio é uma unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

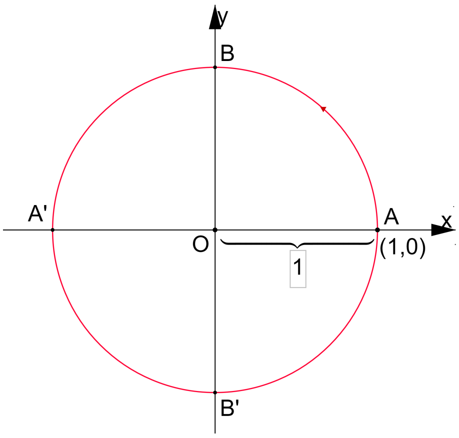
Figura 57 – Arcos orientados




Fonte: (DANTE, 2008)

Associando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais à circunferência unitária de centro $O$ e fixando o ponto $A$ de coordenadas $(1, 0)$ como origem dos arcos, obtemos:

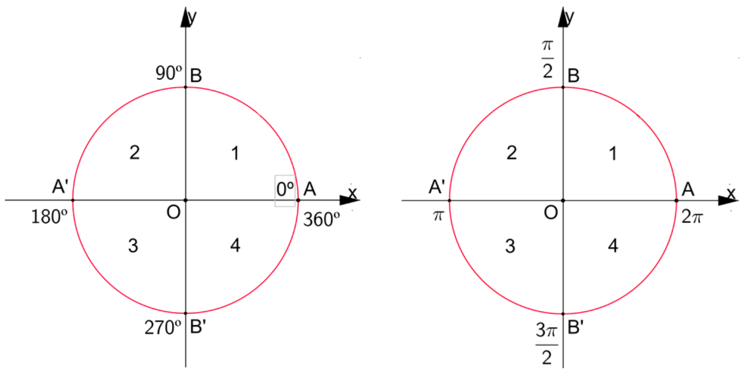
Figura 58 – Circunferência trigonométrica




Fonte: (DANTE, 2008)

Os eixos $x$ e $y$ dividem a circunferência unitária em quatro partes congruentes chamadas *quadrantes*, numeradas de 1 a 4 e contadas a partir de A, no sentido positivo.

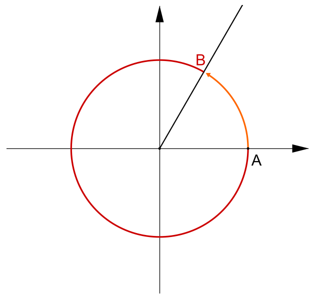
Figura 59 – Alguns arcos no ciclo trigonométrico




Fonte: (DANTE, 2008)

Arcos côngruos ou arcos congruentes são arcos que possuem a mesma extremidade na circunferência trigonométrica, por exemplo, 0 e $2\pi$. É notório que todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de $2\pi$, que é o comprimento de cada volta.

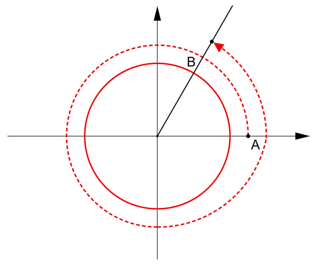
Figura 60 – Arco $\widehat{AB} = \dfrac{\pi}{3}$




Fonte: (DANTE, 2008)

Ao número $\dfrac{\pi}{3}$ está associado o ponto B.

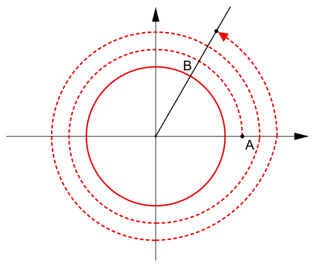
Figura 61 – Arco côngruo a $\widehat{AB} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi$




Fonte: (DANTE, 2008)

Ao número $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi$ também está associado o ponto B.

Figura 62 – Arco côngruo a $\widehat{AB} = \dfrac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$




Fonte: (DANTE, 2008)

Ao número $\dfrac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$ está associado o mesmo ponto B.

Consideremos o ponto como um móvel que se desloca sobre a circunferência no sentido anti-horário, consequentemente teríamos:

Na primeira figura , o ponto deslocou-se $\dfrac{\pi}{3}$ ou $60^o$ de A até B.

Na segunda figura, o ponto deslocou-se uma volta inteira ($2\pi$ ou $360^o$) e mais $\dfrac{\pi}{3}$ ou $60^o$, ou seja, deslocou-se $\dfrac{7\pi}{3}$ ou $420^o$.

Na terceira figura, o ponto deslocou-se duas voltas inteiras ($2 \cdot 2\pi$ ou $2 \cdot 360^o$) e mais $\dfrac{\pi}{3}$ ou $60^o$; ou seja, $\dfrac{13\pi}{3}$ ou $780^o$.

Supondo que o ponto se deslocasse $k$ voltas inteiras, o número associado à extremidade B do arco $\widehat{AB}$ seria escrito assim:

$$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } 60^o + k \cdot 360^o, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos então definir:

Dois arcos são côngruos ou congruentes quando suas medidas diferem de um múltiplo de $2\pi$ *rad* ou $360^o$.

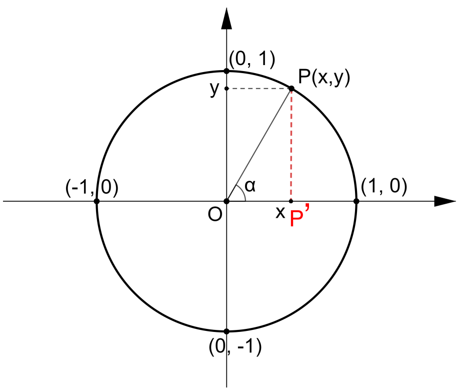
Em seguida, foi proposta a Lista de atividade 3 (Anexo F), visando fixar os conceitos tratados. Os alunos desenvolveram-na individualmente. Exercícios que geraram dúvidas foram realizados no quadro.

### 4.3.3 Seno, Cosseno e Tangente na circunferência trigonométrica

A partir de então, passamos à extensão da definição de seno, cosseno e tangente, ampliando tais conceitos para números reais. Para isso prosseguimos como relatado abaixo.

Consideremos um ponto $P$ na circunferência trigonométrica, associada a um ângulo $\alpha$ tal que: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

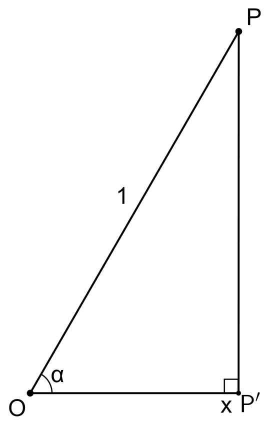
Figura 63 – Circunferência e razões trigonométricas




Fonte: A autora

Traçando a perpendicular de $P$ ao eixo $x$, obtemos $P'$. Temos que $OPP'$ é um triângulo retângulo. Como a hipotenusa é um raio, seu valor é 1. Obtemos assim o triângulo da figura 64:

Figura 64 – Seno e cosseno do ângulo $\alpha$




Fonte: A autora

Das definições de seno e cosseno, temos:

$$\text{sen } \alpha = PP' \text{ e } \cos \alpha = OP'$$

ou seja, o comprimento de $PP'$ é sen $\alpha$, que é também igual à ordenada do ponto $P$. Analogamente, $\cos \alpha$ é igual à abscissa do ponto $P$. Logo $P = (\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$.

Importante ressaltar que essa forma de definir seno e cosseno se aplica apenas para ângulos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ *radianos*, ou seja, ângulo agudos. Para um ângulo $\beta$ fora desse intervalo, associado a um ponto $Q$ do ciclo trigonométrico, define-se:

$$\begin{aligned}
\cos \beta &= \text{abscissa de } Q \\
\text{sen } \beta &= \text{ordenada de } Q \\
\text{tg } \beta &= \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta}, \ \cos \beta \neq 0
\end{aligned}$$

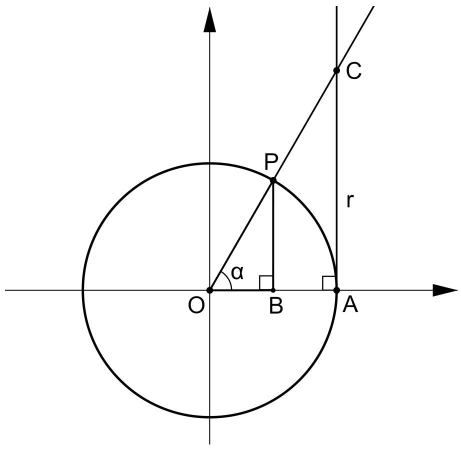
Assim, definidos seno e cosseno, temos que:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{sen } 0 = 0 & \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1 & \text{sen } \pi = 0 & \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1 & \text{sen } 2\pi = 0 \\
\cos 0 = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & \cos \pi = -1 & \cos \frac{3\pi}{2} = 0 & \cos 2\pi = 1
\end{array}$$

Agora, definiremos a tangente de um ângulo $\alpha$ utilizando o ciclo trigonométrico.

Considere $A = (1, 0)$ e seja $P$ um ponto qualquer da circunferência trigonométrica associado ao ângulo $\alpha$. Trace por $P$ uma perpendicular ao eixo $x$, obtendo o ponto $B$. Trace ainda a reta $r$ perpendicular ao eixo $x$ passando por $A$. Essa é a reta tangente à circunferência. Trace $PO$ até interceptar $r$, obtendo $C$.

Figura 65 – Tangente de $\alpha$




Fonte: A autora

Os triângulos $OBP$ e $OAC$ são semelhantes, pois possuem o ângulo $\alpha$ em comum, e ambos são retângulos. Daí:

$$\frac{AC}{BP} = \frac{AO}{BO} \Rightarrow \frac{AC}{|\operatorname{sen}\,\alpha|} = \frac{1}{|\cos\,\alpha|} \Rightarrow |\cos\,\alpha| \cdot AC = |\operatorname{sen}\,\alpha| \Rightarrow$$

$$AC = \frac{|\operatorname{sen}\,\alpha|}{|\cos\,\alpha|} \Rightarrow AC = |\operatorname{tg}\,\alpha|$$

Logo, a reta que contém o segmento AC é o eixo das tangentes.

Observe que quando o ponto $C$ estiver acima do eixo $x$ é porque $P$ se localiza no 1º ou 3º quadrantes. A tangente nesses casos é positiva, pois seno e cosseno possuem sinais iguais. Por outro lado, quando $C$ estiver abaixo do eixo $x$, $P$ está posicionado no 2º ou 4º quadrantes. Nesses contextos, a tangente é negativa, pois seno e cosseno possuem sinais diferentes. Quando $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ o valor de $\operatorname{tg}\,\alpha$ não está definido. A reta que passa por $(0,0)$ e $(0,1)$ é paralela ao eixo das tangentes, não existindo interseção. Como já vimos, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, e sendo $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}}{\cos\dfrac{\pi}{2}}$, esse valor não é definido, visto que o denominador é zero. De maneira geral, a tangente não está definida para nenhum ângulo $\alpha$ tal que, $\cos\,\alpha = 0$, ou seja, para nenhum $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A redução dos arcos ao primeiro quadrante foi enfatizada segundo a seção 3.3.5 deste trabalho, mostrando a simetria dos pontos da circunferência e encorajando os estudantes a não se prenderem em fórmulas.

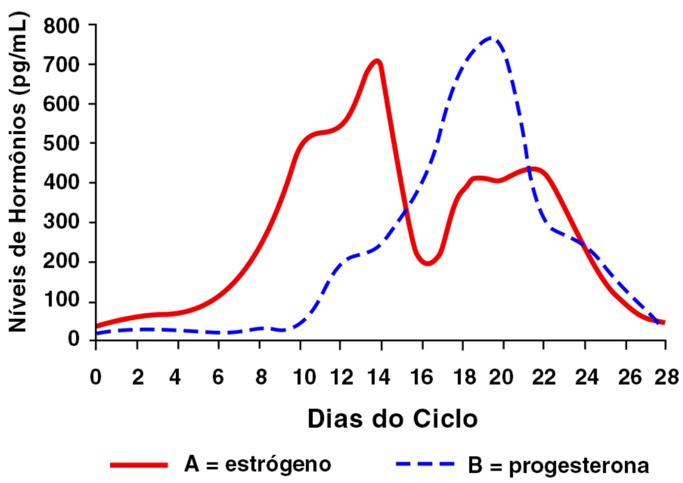
A seguir, foi proposta a lista de exercícios 4 (Anexo G), para os alunos resolverem em grupos.

## 4.4 Mulher de fases e periodicidade

Essa etapa teve início com a proposta de leitura do texto conforme Anexo H, seguida da seguinte situação-problema:

Agora observe o gráfico abaixo, disponível em <http://biologia-no-vestibular.blogspot.com/2012/07/unicamp-2010-reproducao-humana.html>, acessado em (09/09/2019). Ele representa um ciclo menstrual normal, de 28 dias, mostrando as alterações das concentrações hormonais sanguíneas durante o ciclo menstrual.

Figura 66 – Alterações hormonais durante o ciclo menstrual




Fonte: Site Biologia no Vestibular

Considere as informações acima e responda:

1. Existe um modelo matemático que possa descrever o nível de progesterona no organismo de uma mulher, considerando seu ciclo menstrual de 28 dias?

2. E de estrógeno?

### 4.4.1 Conhecendo funções periódicas

**1ª etapa) INTERAÇÃO:** momento em que os alunos reconhecem a situação-problema dada e buscam se familiarizar com a mesma.

Iniciamos essa etapa buscando compreender o que são funções periódicas e em que situações se encaixam. De forma intuitiva, os alunos citaram situações como o decorrer do ano, do dia e o movimento das marés como fenômenos periódicos.

Em seguida, passamos à leitura do texto adaptado do livro do Dante (2008, p.236) (Anexo I), visando compreender melhor o assunto tratado.

A partir desse texto, voltamos ao nosso problema, relemos, e os estudantes concluíram sem muitas discordâncias que a função trigonométrica é a que melhor descreve o ciclo menstrual.

**2ª etapa) MATEMATIZAÇÃO:** formulação e resolução do problema em termos do modelo. Nesse momento os alunos foram instigados a construírem tabelas a partir do gráfico dado, com a finalidade de ter maior clareza sobre a função que buscam. Seguem as tabelas apresentadas por 2 grupos, com valores exatos, e, portanto, mais fácil para prosseguir com a modelagem da função. Outros grupos apresentaram tabelas diferentes, e foram encorajados a prosseguir com seus dados.

Tabela grupo 1

| Dia do ciclo | Nível de estrógeno (pg/mL) |
|---|---|
| 0 | 50 |
| 14 | 700 |
| 28 | 50 |

Tabela grupo 2

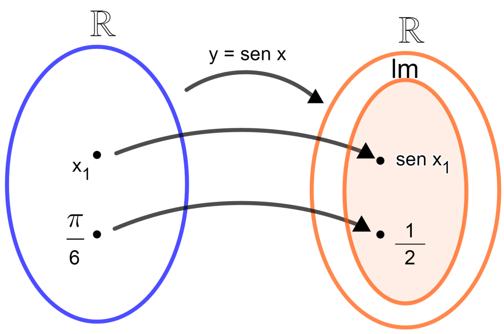
| Dia do ciclo | Nível de progesterona (pg/mL) |
|---|---|
| 0 | 30 |
| 19 | 800 |
| 28 | 30 |

Questionados, os alunos optaram por começar com a tabela do grupo 1. Por se tratar de algo que estavam com dificuldades para resolver, decidiram por tentarem todos o mesmo caso.

Foi ressaltado pela professora que o fenômeno em questão é periódico, motivando os educando a dotar as funções trigonométricas como alternativas para a busca do modelo que melhor descreve a situação proposta. Os alunos preferiram modelar utilizando a função seno. Assim, fez se necessária a definição:

A um número real $x$, é possível associar o valor do seno de um arco de $x$ radianos:

Figura 67 – Função Seno




Fonte: (DANTE, 2016b)

Dessa forma, a função real de variáveis reais que associa a cada número real $x$ o valor seno x é denominada função seno, ou seja:

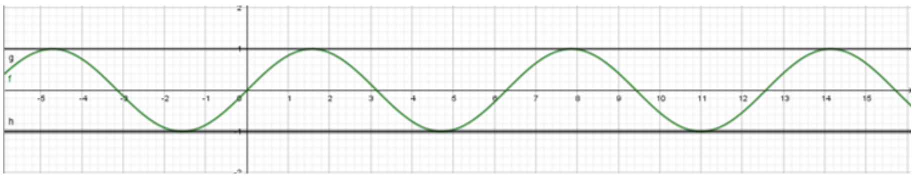
$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \text{ sen } x$$

Lembramos que $x$, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

Utilizando o software Geogebra, o gráfico da função seno foi plotado.

Figura 68 – Senoide



Fonte: (DANTE, 2016b)

Foi ressaltado que a função é limitada, pois $-1 \leq senx \leq 1$, ou seja, o maior valor que o seno assume é 1 e o menor é -1. Dessa maneira, a função $f(x) = a + b \cdot \text{ sen } (cx + d)$ assume seu máximo quando $\text{ sen } (cx + d)$ é 1, o que equivale a $a + b$ e seu mínimo, quando $\text{sen } (cx + d)$ vale $-1$, ou seja $a - b$. Assim o conjunto imagem da função procurada é $[a - b, a + b]$. Por outro lado, observando a tabela, percebemos que esse conjunto equivale a $[50, 700]$, ou seja:

$$[a - b, a + b] = [50, 700]$$

$a - b = 50$ e $a + b = 700$ , que nos fornece, a $=$ 375 e b $=$ 325.

Desse modo, o primeiro modelo para a função procurada é:
$f(x) = 375 + 325 \cdot \text{ sen } x$, que claramente não satisfaz as condições propostas, pois se $x = 0$:
$f(0) = 375 + 325 \cdot \text{ sen } 0 = 375 + 0 = 375$, que não condiz com os dados retirados do gráfico, que é $f(0) = 50$.

Isso significa que devemos melhorar nosso modelo. Temos que $T = \dfrac{2\pi}{c}$, onde $T$ é o período da função. Como o ciclo é de 28 em 28 dias, implica que $2\pi = 28c$. Logo, $c = \dfrac{2\pi}{28} = \dfrac{\pi}{14}\ rad.$

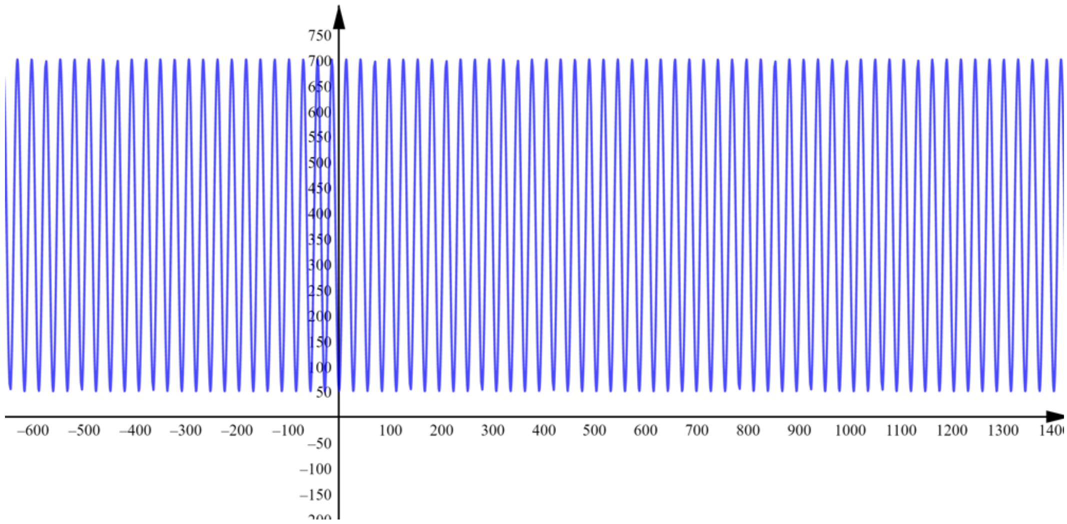
E podemos apostar no próximo modelo:
$f(x) = 375 + 325 \cdot \text{ sen } (\dfrac{\pi}{14})x$
mas, $f(0) = 375 \neq 50$, ou seja, $f(x)$ não é um modelo adequado.

Concluímos assim, que nos falta determinar a constante $d$ em $f(x) = a + b \cdot \text{ sen } (cx + d)$. Sabemos que $f(0) = 50$. Logo:

$f(0) = 375 + 325\,\text{sen}\,(\frac{\pi}{14} \cdot 0 + d),$
$50 = 375 + 325\,\text{sen}\,d$
$-325 = 325\,\text{sen}\,d$
$\text{sen}\,d = -1$
$d = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k$ inteiro. Para $k = 0$, $d = -\frac{\pi}{2}$

E daí:
$f(x) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{2}\right)$, cujo gráfico é:

Figura 69 – Gráfico da $f(x)$




Fonte: A autora

**3ª ETAPA) MODELO MATEMÁTICO:** interpretação da solução e validação do modelo.

Na função $f(x) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{2}\right)$, é possível verificar que:

- Pela análise do gráfico, o conjunto imagem é $[50, 700]$;
- $f(0) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\,(-\frac{\pi}{2}) = 375 - 325 = 50;$
- $f(14) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\,(\pi - \frac{\pi}{2}) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 375 + 325 = 700;$
- $f(28) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\,(2\pi - \frac{\pi}{2}) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = 375 - 325 = 50.$

Portanto, a função $f(x) = 375 + 325 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{14}x - \frac{\pi}{2}\right)$ é um bom modelo para descrever os níveis de estrógeno em pg/ml no organismo de uma mulher cujo ciclo menstrual é de 28 dias.

Faz-se necessário ressaltar que a associação da situação-problema dada a uma função trigonométrica não ocorreu de forma imediata. Os alunos foram direcionados pela professora a considerarem as funções trigonométricas como uma ferramenta para a resolução do problema.

Os alunos procederam de maneira análoga para determinar a função que descreve o nível de progesterona.

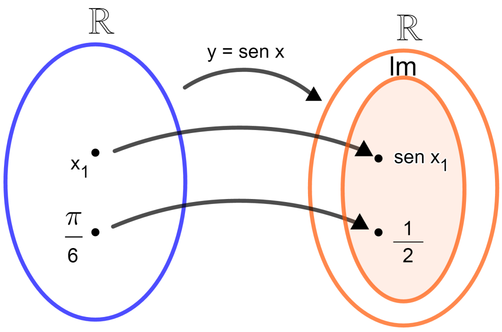
### 4.4.2 Formalizando o conceito de funções trigonométricas

A formalização dos conceitos de função seno e cosseno foi realizada segundo Dante (2016b), como segue:

#### 4.4.2.1 Função Seno

A um número real $x$, é possível associar o valor do seno de um arco de $x$ radianos:

Figura 70 – Função seno




Fonte: (DANTE, 2016b)

Dessa forma, a função real de variáveis reais que associa a cada número real $x$ o valor seno x é denominada função seno, ou seja:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \text{sen } x$$

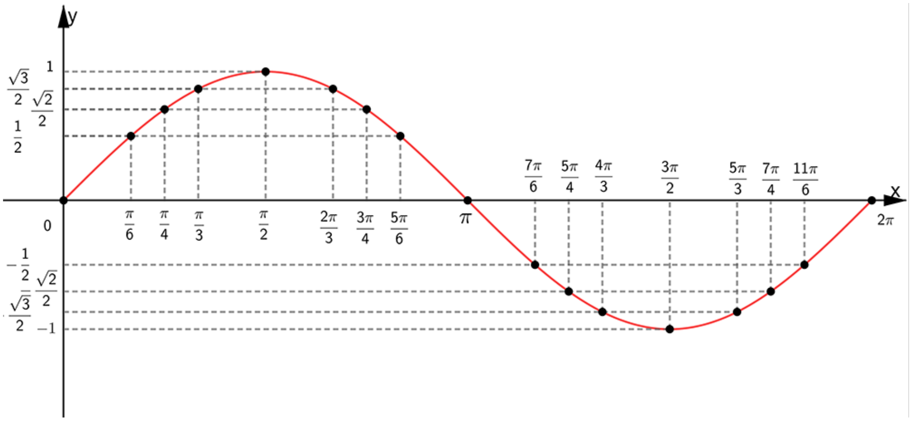
Lembramos que $x$, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

Em seguida foi proposto aos alunos completarem a tabela com os respectivos valores do seno de cada número real, para construção do gráfico da função seno, a senóide.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |

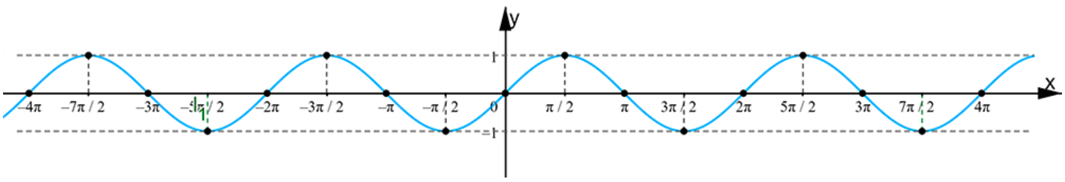
Figura 71 – Gráfico de $f(x) = sen(x)$, $x \in [0, 2\pi]$



Fonte: (DANTE, 2016b)

O gráfico construído foi de $[0, 2\pi]$, porém foi ressaltado aos alunos que a função é periódica, logo, para obter o gráfico para todos os reais, basta repetir o esboço obtido acima infinitas vezes.

Figura 72 – Senóide

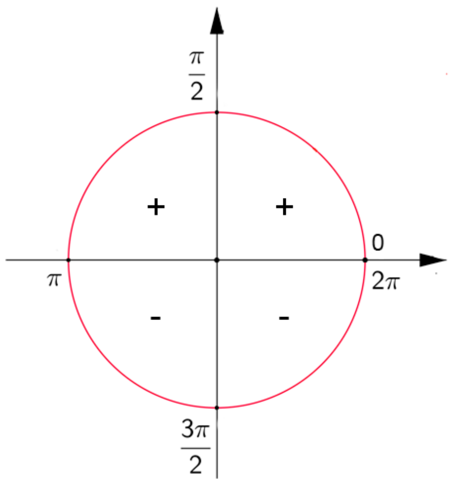


Fonte: (DANTE, 2016b)

Considerações relevantes acerca da função seno foram ressaltadas:

- O domínio de $f(x) = \text{sen } x$ é $\mathbb{R}$, pois está definida para todos os valores reais.
- O conjunto imagem de $f(x) = \text{sen } x$ é o intervalo $[-1, 1]$.
- A função seno é função ímpar, ou seja, dado $x \in D(f) = \mathbb{R},\ \text{sen } (-x) = -\text{sen } x$.
- A função seno é periódica, de período $2\pi$.
- A função seno é **positiva** para valores pertencentes ao 1º e 2º quadrantes e **negativa** para valores do 3º e 4º quadrantes, conforme modelo descrito na figura 73.

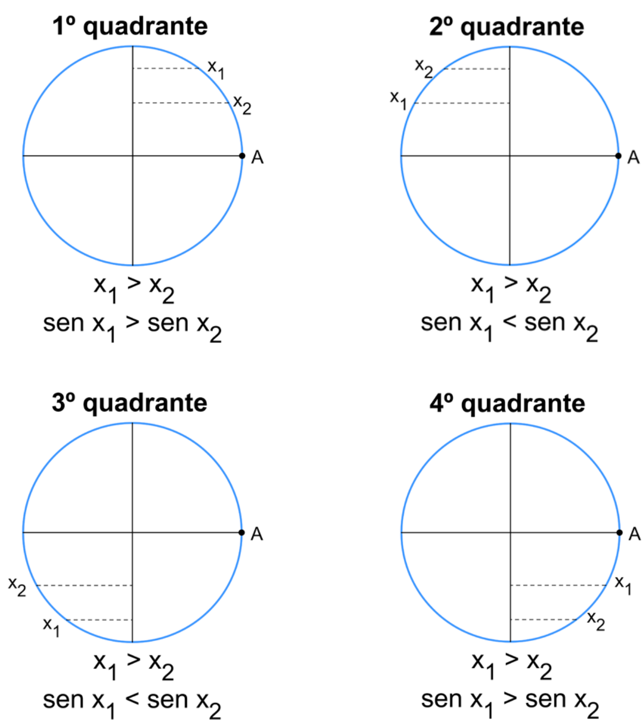
Figura 73 – Sinais da função seno




Fonte: (DANTE, 2016b)

- Para valores no intervalo de $[0, 2\pi]$, a função seno é crescente para valores do 1º ou 4º quadrantes e decrescente para valores pertencentes ao 2º ou 3º quadrantes. Observe as seguintes imagens:

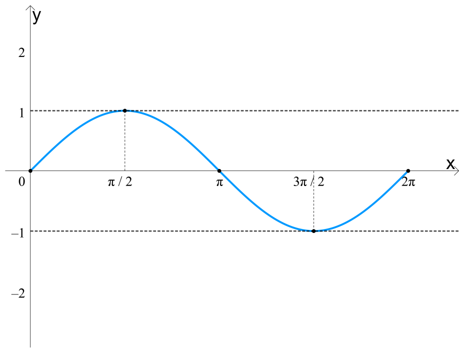
Figura 74 – Variação da função seno




Fonte: (DANTE, 2016b)

No gráfico:

Figura 75 – Função f(x)=sen x




Fonte: (DANTE, 2016b)

Analisando a variação em cada quadrante, temos o seguinte quadro:

1º quadrante: Quando $x$ cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, sen $x$ cresce de 0 a 1.

2º quadrante: Quando $x$ cresce de $\frac{\pi}{2}$ a $\pi$, sen $x$ decresce de 1 a 0.

3º quadrante: Quando $x$ cresce de $\pi$ a $\frac{3\pi}{2}$, sen $x$ decresce de 0 a $-1$.

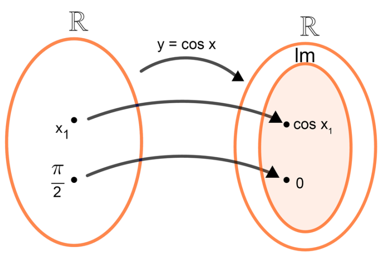
4º quadrante: Quando $x$ cresce de $\frac{3\pi}{2}0$ a $2\pi$, sen $x$ cresce de $-1$ a 0.

Finalizando essas explanações foi proposta a lista de atividades 5 (Anexo J), visando a fixação dos conceitos.

#### 4.4.2.2 Função Cosseno

A um número real $x$, é possível associar o valor do cosseno de um arco de $x$ radianos:

Figura 76 – Função cosseno




Fonte: (DANTE, 2016b)

Dessa forma a função real de variáveis reais que associa a cada número real $x$ o valor cosseno $x$ é denominada função cosseno, ou seja:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

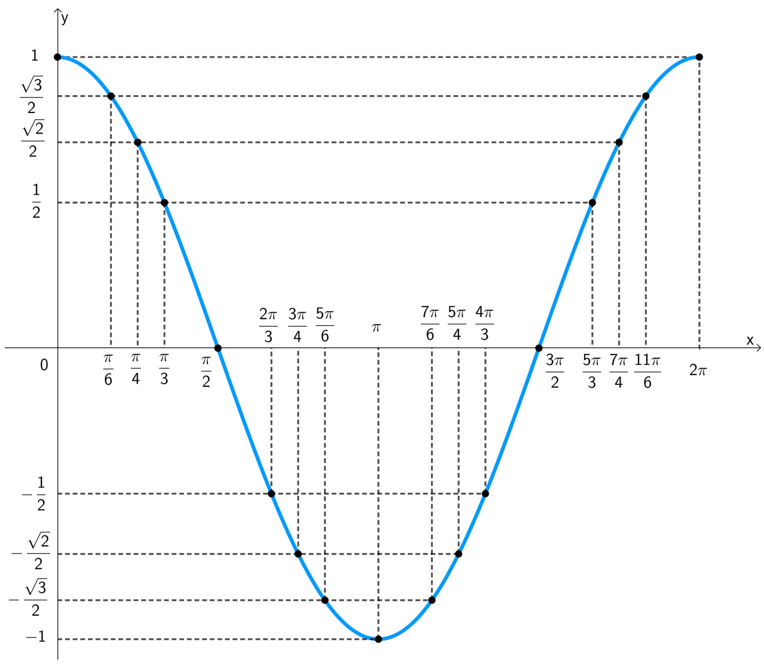
Lembramos que $x$, medida de ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

Em seguida foi proposto aos alunos completarem a tabela com os respectivos valores do cosseno de cada número real, para construção do gráfico da função cosseno.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |

| $x$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

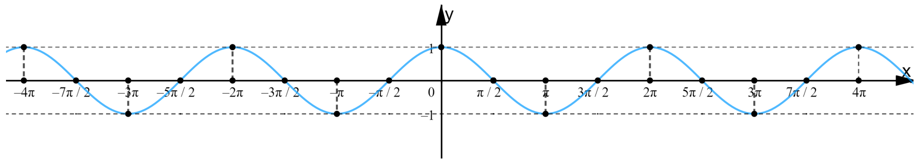
Figura 77 – Gráfico de f(x) = cos x




Fonte: (DANTE, 2016b)

Foi enfatizado que, como o conjunto domínio da função cosseno é o conjunto dos reais $\mathbb{R}$, a curva pode ser estendida para valores menores do que zero e maiores do que $2\pi$. E, sendo periódica, de período $2\pi$, basta repetir o gráfico obtido acima infinitas vezes, obtendo a curva chamada cossenóide.

Figura 78 – Cossenóide

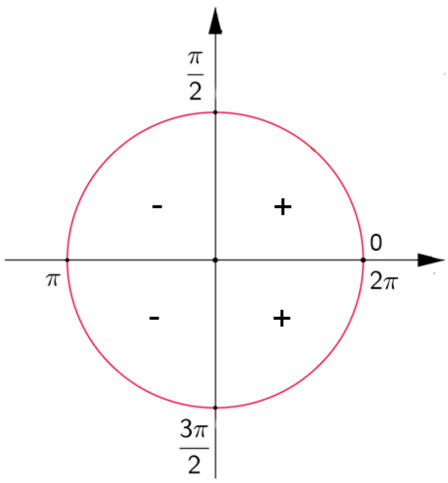


Fonte: (DANTE, 2016b)

Considerações relevantes à cerca da função cosseno foram ressaltadas:

- Seu domínio é o conjunto dos $\mathbb{R}$
- O conjunto imagem é $[-1, 1]$.
- A função cosseno é periódica de período $p = 2\pi$.
- A função cosseno é par, ou seja, $\cos -x = \cos x$.
- A função cosseno é **positiva** para valores do 1º e 4º quadrantes e **negativa** para valores do 2º e 3º quadrantes.

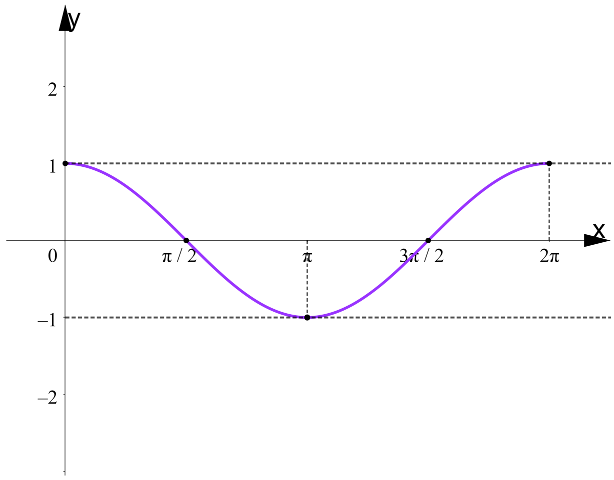
Figura 79 – Sinais da função cosseno




Fonte: (DANTE, 2016b)

- A função cosseno é crescente para valores do 1º ou 2º quadrantes e decrescente para valores do 3º ou 4º quadrantes.

Figura 80 – Função f(x) = cos x




Fonte: (DANTE, 2016b)

Analisando a variação no intervalo $[0, 2\pi]$, temos o seguinte quadro:

| |
|---|
| 1º quadrante: Quando $x$ cresce de 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ decresce de 1 a 0. |
| 2º quadrante: Quando $x$ cresce de $\frac{\pi}{2}$ a $\pi$, $\cos x$ decresce de 0 a $-1$. |
| 3º quadrante: Quando $x$ cresce de $\pi$ a $\frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ cresce de $-1$ a 0. |
| 4º quadrante: Quando $x$ cresce de $\frac{3\pi}{2}$0 a $2\pi$, $\cos x$ cresce de 0 a 1. |

Posteriormente foi proposta a lista de exercícios 6 (Anexo K).

#### 4.4.2.3 Funções do tipo trigonométricas

Nesse momento buscamos formalizar o conceito de função do tipo $y = a + b \operatorname{sen}(cx + d)$ e $y = a + b \cos(cx + d)$. Para isso, retomamos o que havia sido tratado no momento da modelagem do problema do ciclo menstrual, enfatizando o conceito de função periódica. A seguir, algumas propriedades dessas funções foram ressaltadas, apoiando-nos em Dante (2016b).

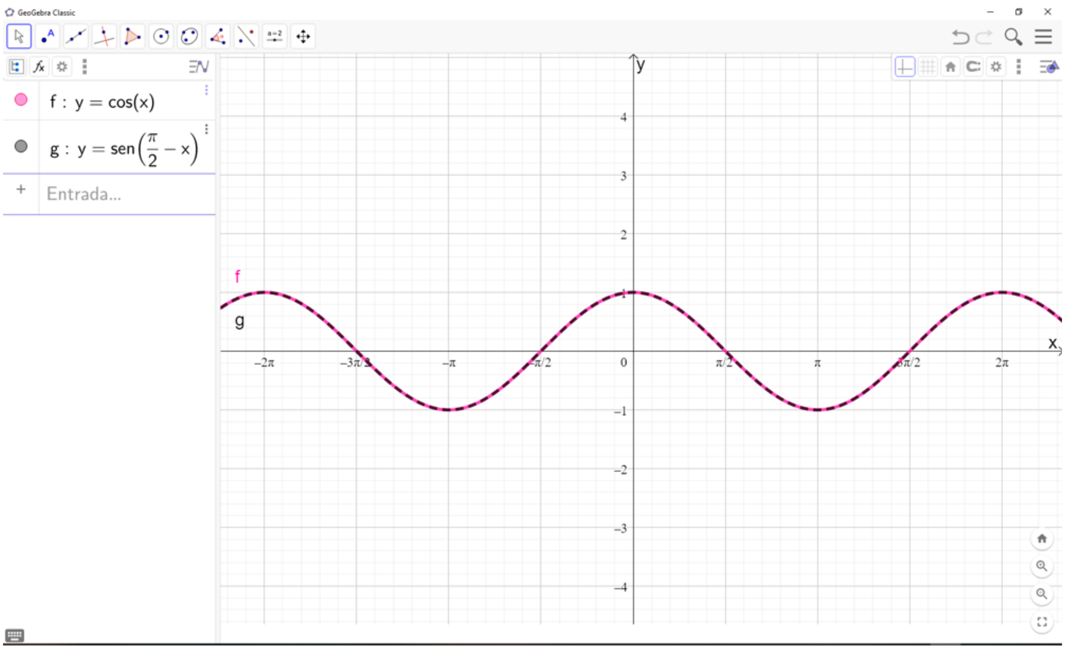
Inicialmente foi ressaltado que os gráficos dessas funções têm características que podem ser relacionadas com as funções seno e cosseno, enfatizando que as constantes $a$ e $b$ alteram a imagem da função (valores de y), enquanto $c$ e $d$ alteram as características relacionadas aos valores de x.

A formalização desses conceitos foi realizada de acordo com a seção 3.4.4.1 desse trabalho.

Nessa etapa, os alunos foram convidados a observarem que uma cossenóide é, na verdade, uma senóide transladada $\frac{\pi}{2}$ unidades.

Utilizando o Geogebra, foi possível mostrar que as curvas são coincidentes, ou seja, $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Figura 81 – Função $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$




Fonte: A autora

Assim, foi um bom momento para falar sobre a expressão do seno da diferença, rapidamente, visto que não é o nosso foco.

Logo, usando $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$, obtivemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 0 = \cos x$$

Logo depois, foi proposta a lista de atividade 7 (Anexo L).

# 5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DO ENSINO DE TRIGONOMETRIA ATRAVÉS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo relataremos de maneira geral e com um olhar qualitativo, os resultados obtidos no desenvolvimento desta proposta de Modelagem Matemática. Serão evidenciados, através de respostas/registros dos alunos durante a execução das aulas, os principais desafios em ensinar e aprender Trigonometria. A fazer Modelagem na sala de aula. Apresentaremos também algumas dificuldades enfrentadas e os benefícios obtidos em se fazer Modelagem Matemática na sala de aula.

## 5.1 Sobre a Trigonometria

### 5.1.1 Trigonometria no triângulo retângulo

O início do trabalho propôs uma investigação das rampas existentes na escola, visando descobrir se as mesmas se enquadram na NBR 9050.

A escola possui 7 rampas, segue imagens de algumas dessas:

Figura 82 – Rampa A

Fonte: A autora

Figura 83 – Rampa B

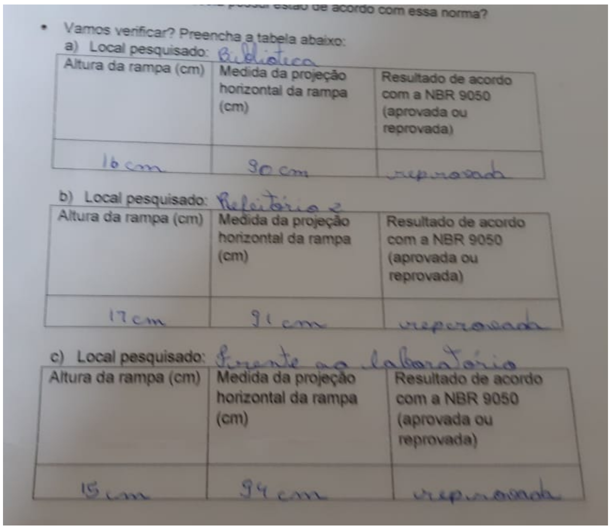
Fonte: A autora

Figura 84 – Rampa C

Fonte: A autora

Os alunos efetuaram as medidas da altura e da projeção horizontal das rampas e preencheram a tabela, como mostra a Figura 85:

Figura 85 – Planilha do grupo 1


... estão de acordo com essa norma?

- Vamos verificar? Preencha a tabela abaixo:

a) Local pesquisado: Biblioteca

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| 16 cm | 90 cm | reprovado |

b) Local pesquisado: Refeitório 2

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| 17 cm | 91 cm | reprovado |

c) Local pesquisado: Frente ao laboratório

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| 15 cm | 94 cm | reprovado |

Fonte: A autora

Nesse momento da atividade ficou extremamente evidente a dificuldade dos alunos em lidar com instrumentos de medições tais como régua e trena. Um número expressivo de alunos não consegue converter uma dada medida em metros para centímetros. Foi necessário realizar uma retomada desse tópico.

Outra dificuldade apresentada por eles nesse momento foi em entender o que seria a projeção horizontal da rampa e conseguir medi-la para substituir os valores encontrados na relação dada.

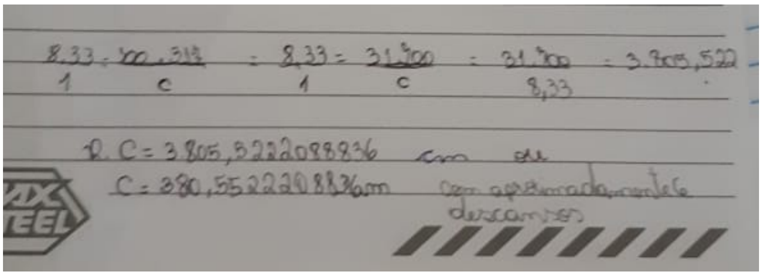
Quanto à segunda parte do problema proposto, alguns alunos buscaram as medidas da altura que a provável rampa deveria possuir, medindo a distância entre o primeiro e o segundo piso (Figura 86) e com base na inclinação máxima que poderia possuir, concluíram a inviabilidade da construção da mesma.

Figura 86 – Fachada interna do CEPI Gricon e Silva

Fonte: A autora

O grupo 4, cuja resposta está apresentada na Figura 87, concluiu que a projeção horizontal da rampa deveria ser longa demais, para alcançar a inclinação máxima exigida, e assim, deveria ter muitos "descansos", conforme rege a NBR- 9050. Logo, a construção da mesma é inviável financeiramente.

Figura 87 – Resposta do grupo 4 sobre a inviabilidade da construção da rampa



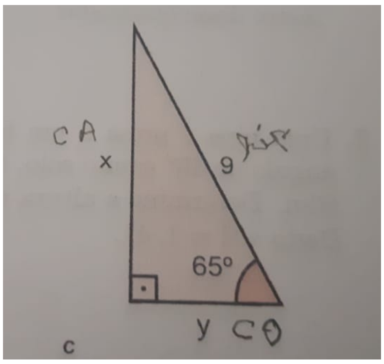
Fonte: A autora

Os demais grupos não conseguiram finalizar essa atividade, alegando não saber resolver uma equação de 1º grau. Após o grupo referido acima socializar sua solução, a maioria reagiu concordando, e considerando fácil, o que nos leva a concluir que não se esforçaram o suficiente, optando por não realizar a tarefa.

Os alunos demonstraram boa compreensão, principalmente do conceito de tangente de um ângulo no triângulo retângulo, visto que associaram à inclinação das rampas. A maioria expressou ter assimilado também os conceitos de seno e cosseno, resolvendo de forma satisfatória as listas 1 e 2. Porém, tiveram aqueles que apresentaram algumas dificuldades, tais como:

- Não nomear corretamente os lados de um triângulo retângulo em relação a um ângulo: cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa, como mostra a Figura 88;

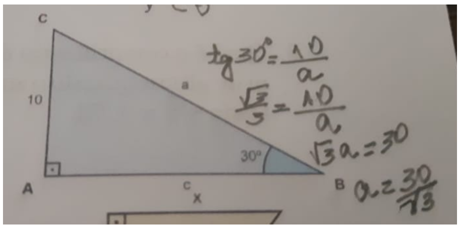
Figura 88 – Resposta do aluno H ao exercício 1 da lista 2




Fonte: A autora

- Não conseguir reconhecer qual relação trigonométrica utilizar em uma dada situação (vide Figura 89).

Figura 89 – Resposta da aluna L ao item 2 da lista 2




Fonte: A autora

O que buscamos nessa etapa foi apresentar as relações trigonométricas de forma que não parecessem “abstratas”, mostrando que elas estão mais presentes em seu cotidiano do que possam imaginar. E nesse sentido, creio que o objetivo foi alcançado, pois a aluna A, disse:

> ”Já tinha visto no 9º ano, mas foi colocado só a fórmula. Parecia uma coisa que nem existe. Assim ficou muito melhor.”

Já o aluno D, evidenciou:

> "Se vi isso um dia nem lembro. Mas, achei legal dessa forma que foi feito. Acho que não esqueço mais".

### 5.1.2 A Trigonometria na circunferência

Essa fase foi iniciada com mais motivação pelos alunos, acredito que por parecer um jogo famoso da televisão. Todos os grupos resolveram o problema inicial, utilizando o protótipo da Roda como mostra a Figura 90.

Figura 90 – Alunas utilizando a roda

Fonte: A autora

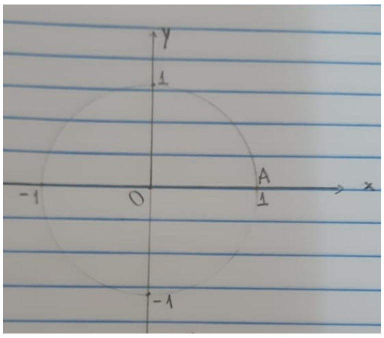
Ao iniciar a formalização do conceito de arcos, ângulos e unidades de medidas para medi-los, alguns entraves começaram a surgir. Os alunos vêm de uma realidade em que ângulos são medidos utilizando graus. Outra unidade de medida não é sequer citada. Acabamos de estudar trigonometria no triângulo retângulo, onde ângulo foi medido em graus. E na circunferência aparece o radiano que vem acompanhado do irracional $\pi$. E ainda, é necessário lembrar do comprimento da circunferência para determinar quantos radianos o ângulo de uma volta possui. Nesse contexto, não foi "natural"para os alunos aceitarem o radiano enquanto unidade de medida de ângulos.

E ainda existiram as dificuldades relacionadas aos cálculos para realizar a conversão das unidades: graus em radianos, e vice-versa, pois envolvia o conceito de regra de três simples, bem como simplificações das frações obtidas nessas conversões.

Em seguida, introduzimos a definição de circunferência trigonométrica. Nesse momento surgem dificuldades relacionadas, principalmente, ao conhecimento do plano cartesiano e à orientação dos arcos.

Alguns alunos apresentaram extrema dificuldade em conceber as coordenadas de um ponto sobre um eixo coordenado, como mostra a Figura 91, esboçada pelo aluno F:

Figura 91 – Aluno F representando a circunferência trigonométrica



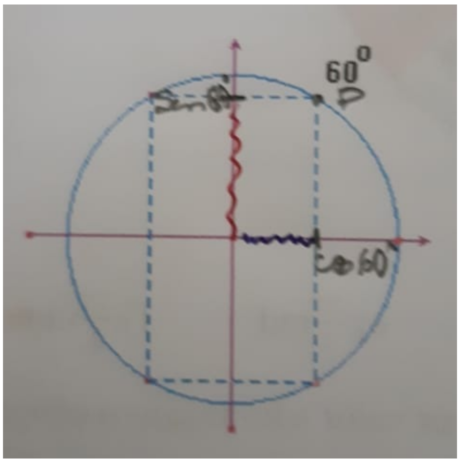

Fonte: A autora

Após esclarecimentos dos itens acima, a maioria dos alunos realizaram as atividades propostas na lista 3 com tranquilidade.

A extensão dos conceitos de seno, cosseno e tangente para números reais provocou inúmeras dúvidas. Ao definirmos seno de um ângulo como a ordenada do ponto da circunferência trigonométrica associado ao ângulo e o cosseno como a abscissa, exigimos um certo entendimento de par ordenado, que muitos alunos não possuem.

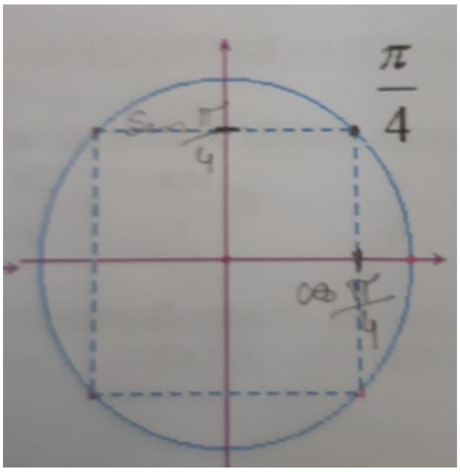
Com insistência e paciência, os estudantes foram associando o seno e o cosseno de um ângulo referente a um ponto P do ciclo, com as projeções, respectivamente, no eixo das ordenadas e no eixo das abscissas, como mostram as Figuras 92 e 93:

Figura 92 – Aluna G representando sen $60^o$ e cos $60^o$




Fonte: A autora

Figura 93 – Aluna G representando sen $\frac{\pi}{4}rad$ e cos $\frac{\pi}{4}rad$




Fonte: A autora

### 5.1.3 Funções trigonométricas

Nessa fase, o maior entrave encontrado foi o fato dos alunos não conceberem o conceito de função. Desde o primeiro bimestre estes estudaram funções: afim, polinomial de segundo grau, exponencial e logarítmica. Porém, apresentaram extrema dificuldades em compreender conceitos como domínio e imagem de uma função.

Os alunos não demonstraram uma percepção da relação de dependência entre duas grandezas. Foi necessário retomar a definição de função, ressaltando aspectos como: as maneiras de representar uma função (gráfica, algébrica, tabela), as definições dos conjuntos domínio e imagem e a simbologia utilizada.

Ao abordarmos o problema dado, envolvendo o ciclo menstrual de uma mulher, esbarramos em uma novidade: função periódica. Apesar de intuitivamente, terem noção de fenômenos periódicos, apresentaram insegurança até o momento da formalização desse conceito.

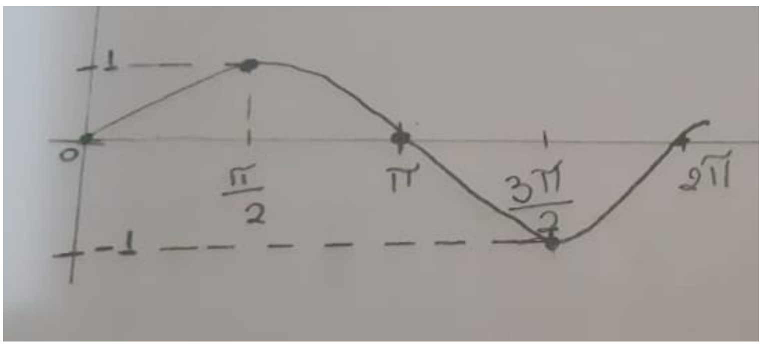
No decorrer da modelagem, o momento em que surge a necessidade do conhecimento da relação $T = \dfrac{2\pi}{c}$ é também o de maior dificuldade. Essa relação foi demonstrada, como consta na seção 3.4.4.1 desse trabalho. E, a partir de então, o problema foi resolvido sem maiores dificuldades.

Ao formalizar os conceitos de função seno e função cosseno, alguns alunos se manifestaram, dizendo não entender por que um ponto $Q$ dado, por exemplo, da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, é expresso por $Q = (x, \operatorname{sen} x)$. De acordo com os mesmos, tínhamos visto que um ponto $P$ pertencente à circunferência trigonométrica seria da forma $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, em que $x$ é um número real, ou seja, estavam entendendo que, qualquer ponto referente a qualquer função trigonométrica, deveria pertencer à circunferência trigonométrica.

Foi necessário explicar que, se um ponto $P$ pertence a uma função trigonométrica, digamos $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $P = (x, f(x)) = (x, \operatorname{sen} x)$. Caso $f(x) = \cos x$, $P = (x, f(x)) = (x, \cos x)$. Porém, caso $P$ pertença à circunferência trigonométrica, então $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, com $x$ real e onde $\operatorname{sen} x$ não é $f(\cos x)$.

Na construção dos gráficos dessas funções (listas 5 e 6) foi mostrado a não linearidade das mesmas. Os alunos foram instigados a observar que para intervalos de deslocamentos iguais no eixo x, a taxa de variação referente, não é constante, ou seja, não existe proporcionalidade. Segue na Figura 94 o gráfico esboçado pelo Aluno B.

Figura 94 – Resposta do aluno B ao item 2 da lista 5




Fonte: A autora

Na formalização das funções do tipo $y = a + b\operatorname{sen}(cx + d)$ ou $y = a + b\cos(cx + d)$, foi ressaltado o papel de cada constante no gráfico da função trigonométrica de origem, no caso, seno e cosseno. Não houve tempo para desenvolver em sala, a lista de atividade número 7 por completo.

## 5.2 Sobre a utilização da modelagem em sala de aula

Conforme Bassanezi (2004) afirma, apesar do uso da Modelagem Matemática em sala de aula possuir inúmeros pontos positivos, existem também os entraves. Nesse trabalho, particularmente, foi notável:

1º) O aluno não demonstra autonomia em relação ao processo ensino-aprendizagem, mantém-se em uma postura acomodada e com a introdução da modelagem, torna-se apático diante das atividades propostas;

2º) O planejamento nem sempre é atendido, pois como o aluno é o centro do processo de ensino-aprendizagem, as aulas caminham em ritmo lento, não sendo garantido o cumprimento do currículo proposto naquele intervalo de tempo;

3º) A estrutura organizacional da escola não aceita muito bem vários alunos "passeando" pelo pátio, ainda que tenham instrumentos de medição nas mãos.

No primeiro caso listado, faz-se necessário ressaltar, que, inicialmente, alguns alunos chegaram a mencionar, quando convidados repetidas vezes a participarem das tarefas propostas, que "preferiam" as aulas como antes. Citaram que era "mais fácil" o professor expor e eles ouvirem.

Já no segundo caso, o grande protagonista da questão é o tempo. As atividades foram preparadas para serem desenvolvidas em 28 aulas de 50 minutos, distribuídas da seguinte forma:

- Trigonometria no triângulo retângulo: 8 aulas
- Circunferência trigonométrica: 8 aulas
- Funções trigonométricas: 12 aulas

Ocorre que, apenas para o primeiro tópico foi suficiente. Já para os dois últimos, finalizamos com o seguinte saldo de aulas:

- Circunferência trigonométrica: 11 aulas sendo distribuídas:
  - Problema inicial: 2 aulas
  - Definição de arcos, ângulos e relação entre unidades de medidas: 4 aulas
  - Extensão dos conceitos de seno, cosseno e tangente e lista 4: 5 aulas
- Funções trigonométricas: 16 aulas distribuídas da seguinte forma:
  - Problema inicial: 2 aulas
  - Formalização dos conceitos da função seno e lista 5: 5 aulas

- Formalização dos conceitos da função cosseno e lista 6: 5 aulas
- Formalização das funções do tipo trigonométricas: 4 aulas, sendo que a última lista não foi completamente desenvolvida.

Ao final foram 35 aulas - visto que uma das aulas previstas para a aplicação da proposta foi preenchida com reunião pedagógica emergencial - deixando ainda a última lista em aberto. Esse fato deixa a coordenação pedagógica extremamente preocupada, uma vez que as cobranças e preocupações giram em torno de avaliações externas, que obrigam o cumprimento integral do currículo bimestral.

Buscamos valorizar ao longo desse, sempre os aspectos qualitativos, em detrimento dos quantitativos, realizando a todo o tempo retomada de conteúdos antes vistos, situações que tornam o ritmo da aula mais lento. E ainda vale enfocar a heterogeneidade da turma. Os grupos se formaram por afinidades, sendo assim, estavam em grande discrepância quanto à velocidade de raciocínio e compreensão de conteúdo.

Agora, apesar de todos os empecilhos listados, os motivos para se trabalhar com a Modelagem Matemática em sala de aula, são maiores e mais gratificantes.

Ao longo de toda a experiência (setembro a dezembro), os alunos desenvolveram em muitos aspectos, não apenas intelectualmente, com a constituição dos conceitos matemáticos. Esses, obviamente, principal motivo de nossos estudos, foram satisfatoriamente aprimorados, além disso, apresentaram um crescimento notório na capacidade de conviver em grupo, aceitar opiniões diferentes, esperar o colega desenvolver seu raciocínio, enfim, aprenderam a se respeitar como pessoas diferentes que são.

A autonomia cresceu, bem como a capacidade de reter os conceitos. Saber que um determinado conteúdo matemático possui aplicação faz com que o aluno deixe de encará-lo como algo abstrato, estanque e inútil, facilitando assim, que tal conhecimento faça sentido e não seja facilmente esquecido.

Com o passar dos dias, os alunos se mostraram motivados, empenhados e dispostos à realização das atividades propostas. Assim, as aulas tornaram-se mais dinâmicas e interessantes para eles, que passaram a compreender o que estava sendo tratado.

Não há dúvidas que fácil não é, porém, como afirma Carlos Castañeda, em FREITAS (2000, p.183)

> (...) Qualquer caminho é apenas um caminho e não constitui insulto algum – para si mesmo ou para os outros – abandoná-lo quando assim ordena o seu coração. (...) Olhe cada caminho com cuidado e atenção. Tente-o tantas vezes quantas julgar necessárias.... Então, faça a si mesmo e apenas a si mesmo uma pergunta: possui esse caminho um coração? Em caso afirmativo, o caminho é bom. Caso contrário, esse caminho não possui importância alguma.

Embora pareça utópico, acredito que seja exatamente assim. Assumido um "caminho", com responsabilidade e comprometimento, ele levará a algum lugar. E nesse caso, a

Modelagem como caminho, propiciou-nos, a mim e aos alunos, descobertas incríveis: a eles, conhecimentos, que em certos momentos os encantaram, a mim, a certeza que muito pouco eu sei, tanto de Matemática, quanto das relações humanas. Mas, estou caminhando.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme o que foi tratado nesse trabalho, é notório que a utilização de metodologias que tornem o ensino de Matemática eficiente é emergencial. Os alunos não têm retido os conceitos tratados, ou seja, o processo ensino/aprendizagem não tem sido significativo, e automaticamente, não é efetivo.

O trabalho com a Modelação Matemática mostrou que os alunos anseiam por mudança, porém esses também, apresentam resistência à mesma. A organização estrutural da escola, bem como as exigências de cumprimento de currículo em tempo hábil também foram fatores bastante evidentes.

Buscou-se realizar o alinhamento das propostas referentes ao ensino de trigonometria que constam nos documentos referência, currículo e matrizes do SAEGO e do ENEM aos objetivos do presente trabalho. Vale salientar que o tempo é fator preponderante nessa equação, e alguns aspectos considerados aqui extremamente relevantes, como a periodicidade das funções, não são levados em consideração, para garantir o cumprimento dos prazos.

A utilização do software Geogebra no desenvolver das atividades agradou muito aos alunos. Esses, não conheciam a ferramenta e se mostraram entusiasmados com as possibilidades.

A percepção da Matemática no cotidiano e a construção do conhecimento gradativamente, com as aulas de retomadas de conteúdos, lentamente, cativaram os estudantes ao desenvolvimento das atividades propostas. Não foi o foco desse trabalho a preocupação com o quantitativo, mas, não poderia deixar de mencionar que, na reta final, apenas dois alunos não se mostravam envolvidos no desenvolvimento do que era proposto.

Não queremos aqui dizer que todas as mazelas da educação e da falta de motivação dos alunos irão se resolver com a utilização da Modelagem em sala de aula. De forma alguma. Acreditamos que, na realidade com a qual trabalhamos, foi válido. Produziu efeitos positivos, notados por toda a comunidade escolar. A pretensão aqui então é, causar uma reflexão no sentido de não nos conformarmos com o que não está produzindo bons resultados. E assim, ousarmos experimentar!

# Referências

ALMEIDA, L. W. d.; SILVA, K. P. d.; VERTUAN, R. E. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

ANDRADE, M. A. V. Concepção de história e ensino na proposta de reorientação curricular de goiás, mudança ou permanência. *Anais do XXVI Simpósio Nacional de História - ANPUH*, São Paulo, 2011.

APPLE, M. *Política cultural e educação*. São Paulo: Editora Cortez, 2001.

ARAGÃO, M. d. F. A. A história da modelagem matemática: Uma perspectiva de didática no ensino básico. *IX EPBEM*, Campina Grande-PB, 2016.

AUSUBEL, D. P. *The Psycology of Meaningful verbal Learning*. New York, NY: Grune and Stratton, 1963.

BARBOSA, J. C. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *Reunião anual da ANPED*, v. 24, n. 7, 2001.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Editora Contexto, 2004.

BENEVIDES, F. S. Radiano, círculo trigonométrico e congruência de arcos. *Portal da Matemática, OBMEP*, 2018.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia*, v. 2, n. 2, 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Editora Contexto, 2019.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. *História da matemática. 3ª Edição*. São Paulo: [s.n.], 2012.

BRUMANO, C. E. P. *A modelagem matemática como metodologia para o estudo de análise combinatória*. 153 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2014.

BURAK, D. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas,SP, 1992. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252996>. Acesso em: 24 jan. 2020.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria números complexos*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1992.

CARNEIRO, E. M. F.; FONSECA, M. T. L. da. Ensino médio público em goiás, currículo e diversificação de escolas. *Cadernos Cenpec | Nova série*, v. 6, n. 2, 2016.

COSTA, N. M. L. d. *Funções Seno e Cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental"e do Computador*. 250 f. Dissertação (Mestrado no Ensino da Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

DANTE, L. R. *Matemática Dante Volume Único*. São Paulo: Editora Ática, 2008.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações: ensino médio*. [S.l.: s.n.], 2016. v. 2.

DANTE, L. R. *Sistema de ensino ser: ensino médio, caderno 5: Geometria: contexto e aplicações: ensino médio*. São Paulo: Editora Ática, 2016.

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. In: *CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (EDUCERE), X*. PUC - Paraná: [s.n.], 2011.

EVES, H. *Introdução à história da matemática, trad.* São Paulo: Editora UNICAMP, 2011.

FREITAS, N. G. d. *Pedagogia do amor: caminho da libertação na relação professor-aluno*. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2000.

FREITAS, R. S. de et al. As dificuldades apresentadas por professores e alunos no ensino da trigonometria. In: *III Congresso Nacional de Educação*. Natal-RN: [s.n.], 2016.

HUANCA, R. R. H. A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula. *Boletim de Educação Matemática*, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro-SP, v. 20, n. 27, 2006.

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar Trigonometria*. [S.l.: s.n.], 1977. v. 3.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA, E. L. Sobre o ensino da matemática. *Revista do professor de matemática*, 1995.

LIMA, E. L. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

MCLONE, R. R. Can mathematical modelling be taught? In: *in Teaching and Applying Mathematical Modelling*. Londres: [s.n.], 1984. p. 476–483.

NUNES, T. et al. *Educação Matemática: números e operações numéricas*. 2ª. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2009.

PEREIRA, C. d. S.; RÊGO, R. M. d. Aprendizagem em trigonometria–contribuições da teoria da aprendizagem significativa (co). In: XIII CONFERêNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAçãO MATEMáTICA. [S.l.], 2011.

ROQUE, J. D. N.; MORETTI, M. T. Dificuldades do ensino de funções trigonométricas e o geogebra. In: *Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática, V*. Recife: [s.n.], 2010.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SANTOS, A. L. M. d. *Modelação matemática como método de ensino para o ENEM*. Dissertação (Mestrado PROFMAT) — Universidade Federal do Tocantins, Tocantins, 2017.

SANTOS, M. B. et al. Ensinando e aprendendo trigonometria no ensino médio. In: *XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo: [s.n.], 2016. ISBN 2178-034X.

SEE/GO, S. de Estado da Educação de G. *SAEGO - Sistema de Avaliação do Estado de Goiás - Revista do Sistema*. Goiás, 2017.

SILVEIRA, A.; FERREIRA, G. P.; SILVA, L. A. da. A evolução da modelagem matemática ao longo da história, o surgimento da modelagem no brasil e suas contribuições enquanto estratégia de ensino de matemática. *Actas del VII CIBEM ISSN*, 2013.

VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação básica. *IVEPMEM*, Paraná, 2010.

# Anexos

# ANEXO A – QUESTIONÁRIO I

**Aluno(a):** ______________________________________________

1. Como é sua relação com a Matemática?

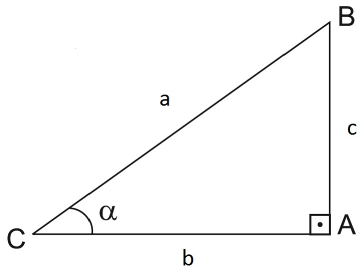
2. Você acredita que a Matemática pode te ajudar/atrapalhar em outras disciplinas? Se sim, quais?

3. Conhece a palavra TRIGONOMETRIA?

4. Já estudou Trigonometria? Do que se lembra?

5. Consegue perceber o significado nos conceitos estudados em Trigonometria? Justifique:

6. Considere o triângulo ABC dado e responda:

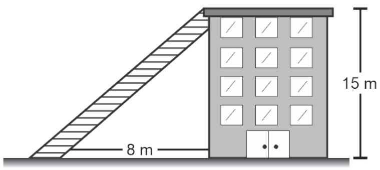



a) O triângulo dado é um triângulo ______________________, pois possui um ângulo de 90º.

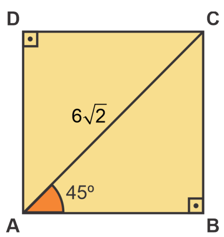
b) Os lados **b** e **c** são chamados de ______________________.

c) E o lado **a** é chamado de ______________________.

d) Nesse triângulo temos uma importante relação, chamada de Teorema de Pitágoras. Você se recorda dela? ______________________.




7. A figura mostra um edifício que tem 15m de altura, com uma escada colocada a 8m de sua base ligada ao topo do edifício. Qual é o comprimento da escada?




8. A diagonal de um quadrado mede $6\sqrt{2}$ cm, conforme nos mostra a figura. Nessas condições, qual é o perímetro desse quadrado?

9. Pra você, como é uma "boa"aula de Matemática?

10. Em sua opinião, como deve ser um "bom"professor de Matemática?

# ANEXO B – Acessibilidade aos cadeirantes

Acessibilidade é o direito de todo cadeirante em trafegar pelo mesmo lugar de uma pessoa sem deficiência. Acessibilidade é ter facilidade ao passar em calçadas, ir a banheiros e entrar em estabelecimentos.

Esse é um tema ainda pouco discutido, isso porque, segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), mais de 6,2% da população tem algum tipo de deficiência.

As pessoas com deficiência, além de sofrerem com a ignorância e preconceito de alguns, ainda precisam lidar com a falta de acessibilidade existente em várias cidades e estados.

Existem algumas leis que regem sobre os cadeirantes e outros tipos de deficientes, porém, o principal problema é o cumprimento dessas leis.

Disponível em: <https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/idiomas/acessibilidade-a
72526> (14/09/2019)

A Norma NBR 9050 é um instrumento que serve para instruir arquitetos, construtores, engenheiros e outros profissionais da área, sobre critérios e parâmetros técnicos na construção, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos e ainda na instalação e adaptação de edificações. Segue abaixo um fragmento do documento (ABNT NBR 9050, 11/09/2015, pg. 58-59), referente a construção de rampas:

**6.6. Rampas**

**6.6.1. Gerais**

**São consideradas rampas às superfícies de piso com declividade igual ou superior a 5%. Os pisos das rampas devem atender às condições de 6.3.**

**6.6.2 Dimensionamento**

**Para garantir que uma rampa seja acessível, são definidos os limites máximos de inclinação, os desníveis a serem vencidos e o número máximo de segmentos. A inclinação das rampas, conforme figura 70, deve ser calculada conforme a seguinte equação:**

**i = 100 h/c onde :**

**· I é a inclinação, expressa em porcentagem (%);**

**· H é a altura do desnível;**

**· C é o comprimento da projeção horizontal**

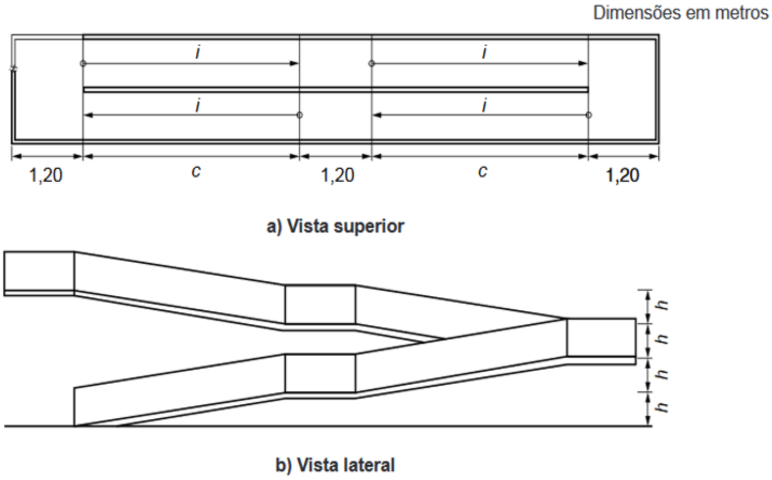



Figura 70 – Dimensionamento de rampas

**6.6.2.1. As rampas devem ter inclinação de acordo com os limites estabelecidos na Tabela 6. Para inclinação entre 6,25 % e 8,33 %, é recomendado criar áreas de descanso (6.5.) nos patamares, a cada 50 m de percurso. Excetuam-se deste requisito as rampas citadas em 10.4 (plateia e palcos), 10.12 (piscinas) e 10.14 (praias).**

Tabela 6 – Dimensionamento de rampas

| Desníveis máximos de cada segmento de rampa *h*<br>m | Inclinação admissível em cada segmento de rampa *i*<br>% | Número máximo de segmentos de rampa |
|---|---|---|
| 1,50 | 5,00 (1:20) | Sem limite |
| 1,00 | 5,00 (1:20) < *i* ≤ 6,25 (1:16) | Sem limite |
| 0,80 | 6,25 (1:16) < *i* ≤ 8,33 (1:12) | 15 |

**6.6.2.2 Em reformas, quando esgotadas as possibilidades de soluções que atendam integralmente à Tabela 6, podem ser utilizadas inclinações superiores a 8,33 % (1:12) até 12,5 % (1:8), conforme Tabela 7.**

Tabela 7 – Dimensionamento de rampas para situações excepcionais

| Desníveis máximos de cada segmento de rampa *h*<br>m | Inclinação admissível em cada segmento de rampa *i*<br>% | Número máximo de segmentos de rampa |
|---|---|---|
| 0,20 | 8,33 (1:12) < *i* ≤ 10,00 (1:10) | 4 |
| 0,075 | 10,00 (1:10) < *i* ≤ 12,5 (1:8) | 1 |

Reflita e Responda:

1) Nossa escola é acessível?

2) Ela possui rampas?

3) As rampas que nossa escola possui estão de acordo com essa norma?

· Vamos verificar? Preencha a tabela abaixo:

a) Local pesquisado:

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| | | |

b) Local pesquisado:

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| | | |

c: Local pesquisado:

| Altura da rampa (cm) | Medida da projeção horizontal da rampa (cm) | Resultado de acordo com a NBR 9050 (aprovada ou reprovada) |
|---|---|---|
| | | |

4) Agora, que você já conhece a NBR 9050, projete uma rampa que interligue o primeiro e o segundo piso. Mas, inicialmente, planeje o que é necessário para realizar tal atividade.

# ANEXO C – Lista de Exercícios 1

1. Que subido é mais íngreme: ima com índice 1 ou outra com índice $\frac{1}{3}$.

2. Para determinada rampa, temos os dados da tabela abaixo. Complete a tabela e calcule o índice de subida.

| Ponto | Afastamento | Altura |
|---|---|---|
| A | 4m | 8m |
| B | | 4m |
| C | 1m | |
| D | | 6m |
| E | 5m | |
| F | 10m | |

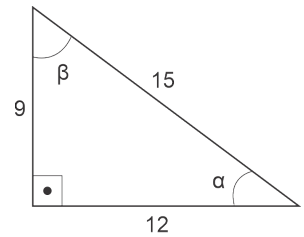
3. Desenhe uma rampa com índice de subida igual a $\frac{3}{2}$

4. Numa subida de índice igual a $\frac{1}{2}$ se nos afastamos 50m, a quantos metros nos elevamos do chão?

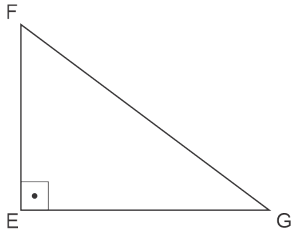
5. Numa subida de índice igua a $\frac{2}{5}$ se nos elevamos a uma altura de 4 metros, qual será o afastamento correspondente?

6. Examine o triângulo retângulo da figura abaixo e calcule em seu caderno o valor destas razões:

a) sen $\alpha$ b) cos $\alpha$ c) tg $\alpha$
d) sen $\beta$ e) cos $\beta$ f) tg $\beta$




7. Em um triângulo EFG, retângulo em E, temos:




$$sen\ \hat{F} = \frac{5}{6},\ cos\ \hat{F} = \frac{\sqrt{11}}{6} \text{ e } tg\ \hat{F} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

a) Calcule $sen\ \hat{G}$, $cos\ \hat{G}$ e $tg\ \hat{G}$;

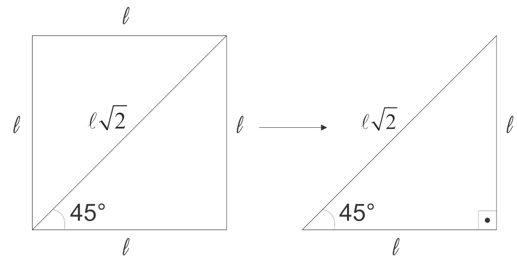
b) Se a hipotenusa do $\Delta EFG$ mede 30 cm, quanto medem os catetos?

c) Calcule o valor das expressões:

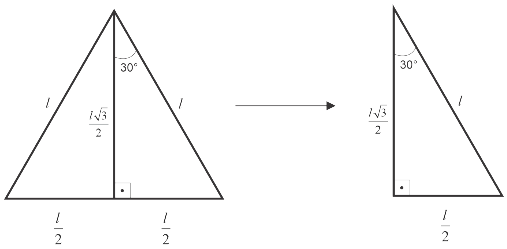
- $(sen\ \hat{F})^2 + (cos\ \hat{F})^2$
- $\dfrac{sen\ \hat{F}}{cos\ \hat{F}}$
- $sen^2\ \hat{G} + cos^2\ \hat{G}$
- $\dfrac{sen\ \hat{G}}{cos\ \hat{G}}$

8. Você vai construir uma tabela de valores muito importantes; para isso:

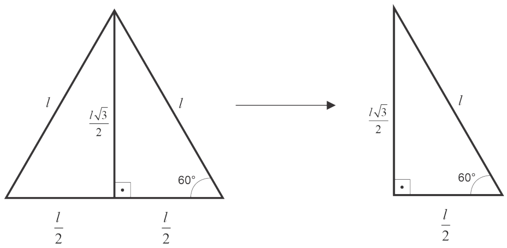
a) calcule sen 45º, cos 45º e tg 45º utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado abaixo:




b) calcule sen 30º, cos 30º e tg 30º utilizando o triângulo retângulo destacado do triângulo equilátero abaixo:




c) calcule sen 60º, cos 60º e tg 60º utilizando o triângulo destacado do triângulo equilátero abaixo:

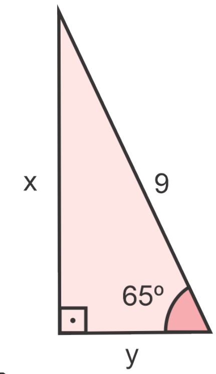



d) com os valores que você encontrou, complete a tabela:

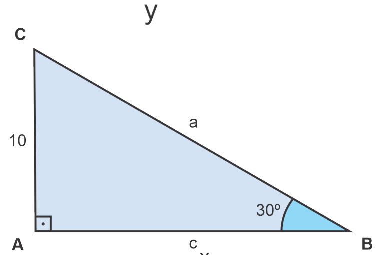
| | 45° | 30° | 60° |
|---|---|---|---|
| sen | | | |
| cos | | | |
| tg | | | |

# ANEXO D – Lista de Exercícios 2

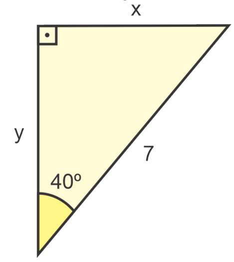
1. No triângulo retângulo determine as medidas $x$ e $y$ indicadas.
   (Use: *sen* $65^o = 0{,}91$; *cos* $65^o = 0{,}42$ e *tg* $65^o = 2{,}14$)



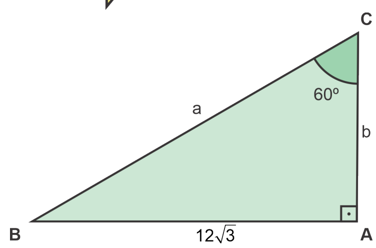

2. Determine no triângulo retângulo ABC as medidas $a$ e $c$ indicadas.



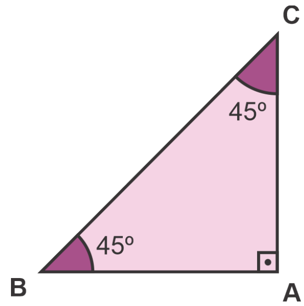

3. Sabendo que *sen* $40^o = 0{,}64$; *cos* $40^o = 0{,}77$ e *tg* $40^o = 0{,}84$, calcule as medidas $x$ e $y$ indicadas no triângulo retângulo.



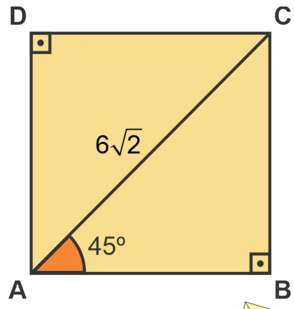

4. Considerando o triângulo retângulo ABC, determine as medidas $a$ e $b$ indicadas.



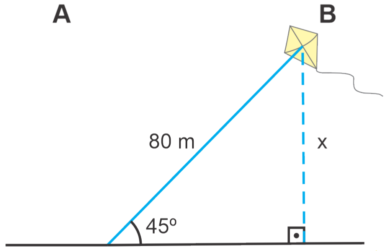

5. Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.



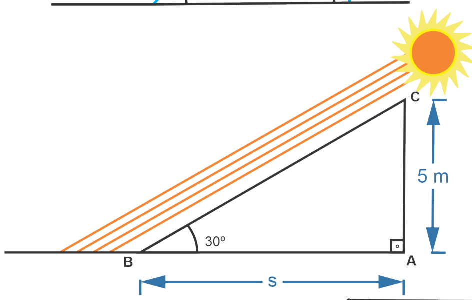
6. A diagonal de um quadrado mede $6\sqrt{2}$ cm, conforme nos mostra a figura. Nessas condições, qual é o perímetro desse quadrado?



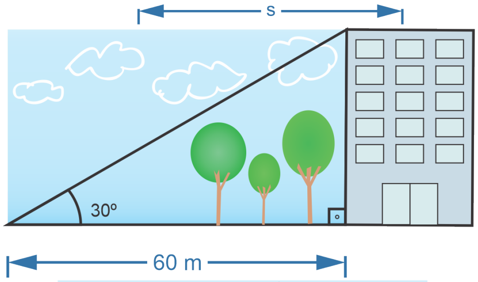

7. Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento do fio é de 80m. Determine a altura da pipa em relação ao solo. Dado $\sqrt{2} = 1,41$.



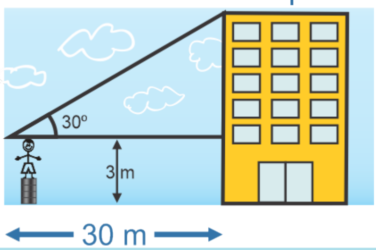

8. Qual é o comprimento da sombra de uma árvore de 5 m de altura quando o sol está 30º acima do horizonte? Dado $\sqrt{3} = 1,73$.




9. Determine a altura do prédio da figura seguinte:



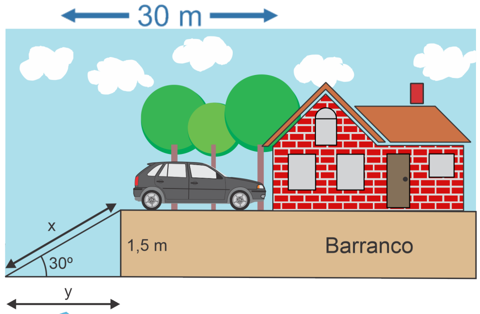

10. Para determinar a altura de um edifício, um observador coloca-se a 30 m de distância e assim o observa segundo um ângulo de 30º, conforme mostra a figura. Calcule a altura do edifício medida a partir do solo horizontal. Dado $\sqrt{3} = 1,73$.



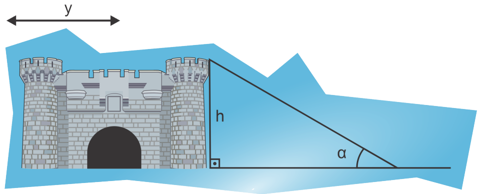

11. Observe a figura e determine:

    a) Qual é o comprimento da rampa?

    b) Qual é a distância do início da rampa ao barranco?




12. A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo $\alpha$, como mostra a figura. Determine a altura $h$ da torre se $\alpha = 30º$.




13. Em um triângulo ABC, retângulo em $A$, o ângulo $B$ mede 30º e a hipotenusa mede 5 cm. Determine as medidas dos catetos $AC$ e $AB$ desse triângulo.

# ANEXO E – A CIRCUNFERÊNCIA DE 360º

Por volta do século II antes de Cristo, os matemáticos da época eram altamente influenciados pela matemática da Babilônia.

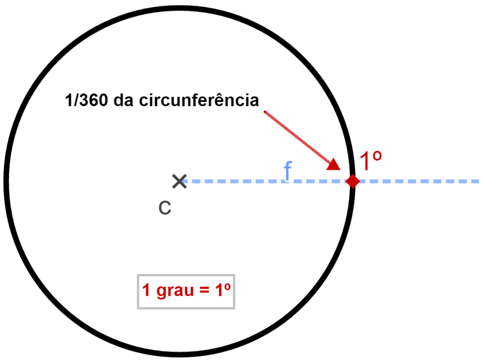
Hoje nós usamos para contar, o **sistema de numeração decimal**, ou seja, na base 10. Mas naquela época, os babilônios acreditavam que a melhor base para realizar contagens era a base 60 (Entenda o que são bases, lendo o artigo **Entendendo o que são Sistemas de Numeração.** e também o artigo **Sistemas Numéricos Posicionais. Generalizando para qualquer Base**).

Os babilônios tinham lá seus motivos para usar a base 60. Eles achavam que o número 60 tinha muitos **divisores** (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60) e poderia ser facilmente decomposto num produto de fatores, o que facilitaria muito os cálculos, principalmente as divisões.

Nessa época, entre os anos 180 e 125 a. C., viveu na Grécia um famoso matemático chamado Hiparco de Nicéia.

Hiparco resolveu dividir a circunferência. Como fortemente influenciado pelos babilônios, assim como todos os matemáticos da época, escolheu um múltiplo de 60 para fazer essa divisão: o número 360.

Dividiu a circunferência em 360 partes iguais e a cada uma dessas partes deu o nome de arco de um grau ($1^o$).



# ANEXO F – Lista de Exercícios 3

1. Construa uma circunferência com qualquer raio, e faça o que se pede:

   a) Qual a medida do seu raio?

   b) Utilizando um barbante, marque a medida do raio nesse, várias vezes.

   c) Envolva o barbante em volta da circunferência e corte-o.

   d) Sabendo a definição de radiano: "O arco de circunferência que possui a mesma medida do seu raio", aproximadamente, quantos radianos possui uma circunferência?

2. Transforme em graus as seguintes medidas de arcos em radianos.

   a) $\dfrac{3\pi}{4}$ & b) $\dfrac{7\pi}{6}$ & c) $-\dfrac{\pi}{4}$ & d) $\dfrac{16\pi}{3}$ & e) $\dfrac{2\pi}{3}$ & f) $\dfrac{7\pi}{4}$

3. Transforme em radianos as seguintes medidas de arcos em graus.

   a) $30^o$ & b) $300^o$ & c) $1080^o$ &d) $135^o$ & e) $330^o$ & f) $20^o$ & g) $150^o$

4. Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado de Mineirinho, conseguiu a manobra denominada 900, na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no munod a conseguir esse feito. A denominação 900 refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a:

   a) Uma volta completa.

   b) Uma volta e meia.

   c) Duas voltas completas.

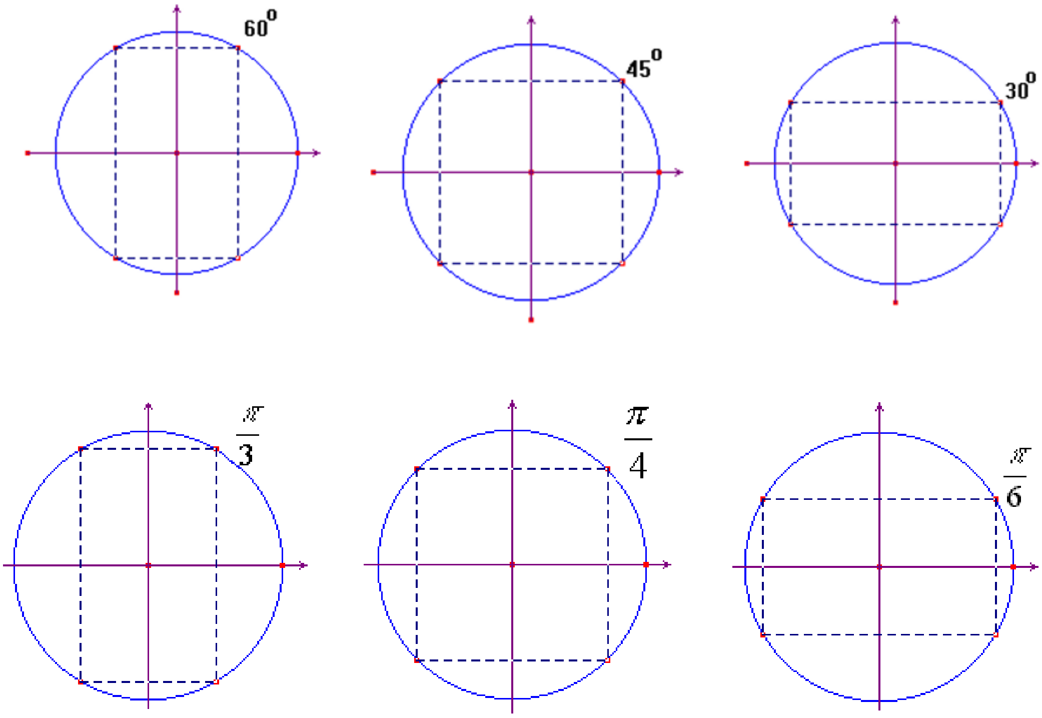
   d) Duas voltas e meia.

   e) Cinco voltas completas.

5. Em qual quadrante está a extremidade dos arcos? Represente-os na circunferência trigonométrica.

   a) $\dfrac{5\pi}{6}$ & b) $\dfrac{6\pi}{5}$ & c) $-\dfrac{\pi}{4}$ & d) $-\dfrac{3\pi}{2}$

6. Complete, nas figuras, as medidas dos arcos trigonométricos correspondentes.




7. Escreva a expressão geral dos arcos congruentes a:

   a) $60^o$ & b) $300^o$ & c) $120^o$ & d) $\dfrac{\pi}{3}\ rad$ & e) $\dfrac{5\pi}{4}\ rad$ & f) $\dfrac{2\pi}{3}\ rad$

8. Descubra a 1ª determinação positiva, ou seja, o menor valor não-negativo côngruo ao arco de:

   a) $685^o$ & b) $400^o$ & c) $1140^o$ & d) $-1310^o$ & e) $-400^o$ & f) $\dfrac{15\pi}{2}\ rad$

# ANEXO G – Lista de Exercícios 4

1. Em que quadrante temos simultaneamente:

   a) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$;

   b) $\operatorname{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha > 0$;

   c) $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$.

2. A que quadrante pode pertencer $\alpha$ se:

   a) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{4}$

   b) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

   c) $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$

   d) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

3. Determine $\cos x$ sabendo que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{5}$. (Lembre-se de que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.)

4. Use os valores notáveis do seno para calcular pela redução ao 1º quadrante:

   a) $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}$

   b) $\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}$

   c) $\operatorname{sen} 330^o$

5. Determine $x$ nos seguintes casos:

   a) $0^o \leq x < 360^o$ e $\operatorname{sen} x = -1$

   b) $0 \leq x < 2\pi$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

   c) $0^o \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   d) $0 \leq x < \pi$ e $\operatorname{sen} x = 0$

   e) $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$

6. Use os valores notáveis do cosseno e calcule fazendo redução ao 1º quadrante:

   a) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$

   b) $\cos 315^o$

   c) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$

   d) $\cos 330^o$

   e) $\cos\dfrac{5\pi}{4}$

   f) $\cos 240^o$

7. Calcule os possíveis valores reais de $x$ em:

   a) $\operatorname{sen} x = -1$

   b) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   c) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$

   d) $\operatorname{sen} x = 0$

# ANEXO H – Mulher de fases e periodicidade

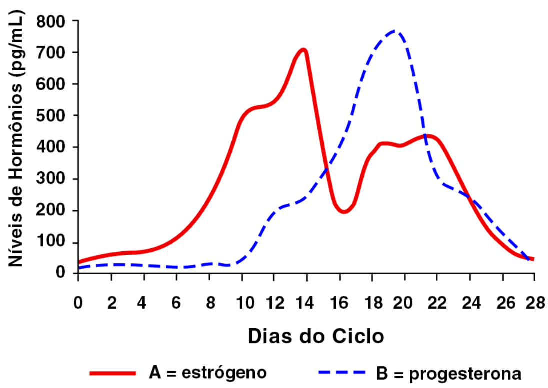
"Em mulheres que não chegaram à menopausa, o ciclo menstrual causa alterações na produção de diversos hormônios. O ciclo menstrual é dividido em fase folicular e lútea, com cada fase durando cerca de 14 dias. Perto do final da fase folicular, há um aumento dos hormônios FSH e LH. Esse aumento induz a ovulação, causando a ruptura do folículo no ovário para a liberação do óvulo.

Durante a fase lútea, o local onde o folículo se rompeu transforma-se no corpo lúteo. Os níveis de FSH e LH diminuem, enquanto que as concentrações de progesterona e estradiol aumentam. Estes níveis hormonais, por sua vez, diminuem depois de vários dias se o óvulo não for fertilizado. A menstruação então começa e o ciclo é renovado.

Conforme a idade avança, diminui a função ovariana até a chegada da menopausa. Quando isso ocorre, os níveis de estradiol e progesterona diminuem."

TEXTO EXTRAÍDO DA PUBLICAÇÃO "ESTRADIOL: EXAME AVALIA ALTERAÇÕES NO ÚTERO, TROMPAS E MAMAS", NO SITE MINHA VIDA <https://www.minhavida.com.br/saude/tudo-sobre/18562-estradiol-sangue>.

Agora observe o gráfico abaixo, disponível em <http://biologia-no-vestibular.blogspot.com/2012/07/unicamp-2010-reproducao-humana.html>, acessado em (09/09/2019). Ele representa um ciclo menstrual normal, de 28 dias, mostrando as alterações das concentrações hormonais sanguíneas durante o ciclo menstrual.




Considere as informações acima e responda:

1. Existe um modelo matemático que possa descrever o nível de progesterona no organismo de uma mulher, considerando seu ciclo menstrual de 28 dias?

2. E de estrógeno?

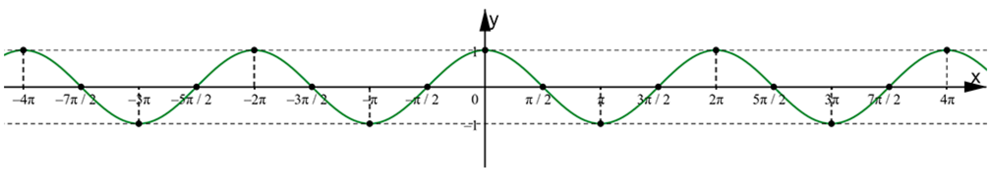
# ANEXO I – Fenômenos periódicos

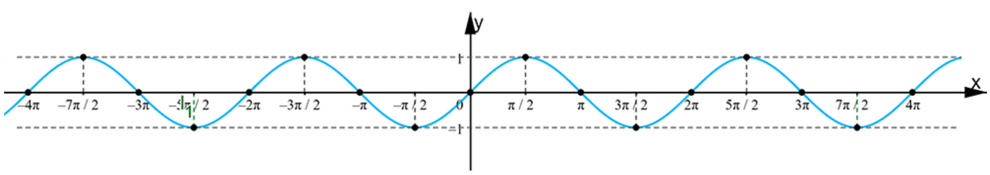
## FENÔMENOS PERIÓDICOS

A natureza está repleta de fenômenos físicos ditos periódicos, ou seja, que se repetem sem alteração cada vez que transcorre um intervalo de tempo determinado (período). Por exemplo, os movimentos das marés, da radiação eletromagnética, da luz visível, dos pêndulos, das molas, são todos periódicos.

As funções trigonométricas são excelentes para descrever tais fenômenos, pois são periódicas. A melhor maneira de associar essas funções a um movimento periódico é imaginar um ponto percorrendo toda a circunferência trigonométrica. A projeção desse ponto no eixo dos senos ou no eixo dos cossenos descreve um movimento periódico.

Dessa forma, podemos associar a qualquer movimento periódico uma função senoidal do tipo f(x)= a+bsen (cx+d) ou f(x)=a+bcos(cx+d). Segue abaixo, os gráficos das funções seno e cosseno:



# ANEXO J – Lista de Exercícios 5

1. Complete as tabelas:

| x | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen x | | | | | | | | | |

| x | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen x | | | | | | | | |

2. Construa o gráfico referente as tabelas preenchidas:

3. Por que os pontos do gráfico não são ligados por segmentos de reta?

4. Podemos representar a função seno por outras formas, além das representações por tabela e gráfico? Quais?

5. Qual o conjunto domínio e o conjunto imagem da função seno?

6. Determine os valores reais de $m$ para que as seguintes equações tenham solução:

   a) $\text{sen } x = 2m - 7$

   b) $\text{sen } x = m - 5$

   c) $\text{sen } x = m^2 - 1$

# ANEXO K – Lista de Exercícios 6

1. Complete as tabelas:

| x | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos x | | | | | | | | | |

| x | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos x | | | | | | | | |

2. Construa o gráfico referente as tabelas preenchidas:

3. Por que os pontos do gráfico não são ligados por segmentos de reta?

4. Podemos representar a função cosseno por outras formas, além das representações por tabela e gráfico? Quais?

5. Qual o conjunto domínio e o conjunto imagem da função cosseno?

6. Determine os valores máximo e mínimo de y.

   a) $y = \text{ sen } x - 10$

   b) $y = 6 - 10\cos x$

   c) $y = 3\cos {}^2 x + 1$

# ANEXO L – Lista de Exercícios 7

1. Considere as funções $f$ e $g$ definidas por:

   - $f(x) = \text{sen } 4x$
   - $g(x) = 1 - \cos x$

   Determine:

   a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

   b) $g(\pi)$

   c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

   d) $D(g)$

   e) $Im(g)$

   f) $x \in [0, 2\pi]$ tal que $f(x) = 1$

2. Construa o gráfico (um período completo) e dê o domínio, a imagem e o período de cada função. (Sugestão: para construí-lo, reveja os gráficos de seno e cosseno.)

   a) $f$ tal que $f(x) = \cos 3x$

   b) $g$ tal que $g(x) = |\text{sen } x|$

3. (Vunesp) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que ele era periódico e podia ser aproximado pela expressão $P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right)$, em que $t$ é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ($t = 0$) e $P(t)$ é a profundidade da água (em metros) no instante $t$.

   a) Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, para $t > 0$.

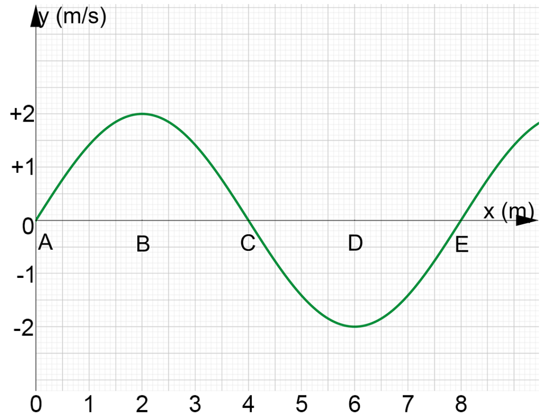
   b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

4. (Vunesp) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C) do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às 3 horas da manhã do primeiro dia (t=0) e terminou 72 horas depois (t=72). Os dados puderam ser aproximados pela função $H(t) = 15 + 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right)$, em que $t$ indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação de $H(t)$ à temperatura (em °C) no instante $t$.

   a) Resolva a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$, para $t \in [0, 24]$.

   b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia de observação.

5. O gráfico representa, num dado instante, a velocidade transversal dos pontos de uma corda na qual se propaga uma onda senoidal na direção do eixo dos $x$.




Para esse instante, determine uma senóide que relaciona a velocidade **v** com a posição **x** dos pontos da corda.

6. (UFG-GO) O gráfico abaixo mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS) no intervalo de tempo entre 0 e 4 s. A equação da posição em função do tempo para este movimento harmônico é dada por $x = A \cdot \cos\,(\omega \dagger + \phi)$. A partir do gráfico, encontre as constantes $A$, $\omega$ e $\phi$.