Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Modelos Probabilísticos Discretos

Washington Luiz Martins de Souza

Goiânia

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Washington Luiz Martins de Souza.

3. Título do trabalho

Modelos Probabilísticos Discretos

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Júnior**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/11/2020, às 15:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **WASHINGTON LUIZ MARTINS DE SOUZA**, **Discente**, em 30/11/2020, às 18:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1653604** e o código CRC **A93961D0**.

Referência: Processo nº 23070.047770/2020-40 SEI nº 1653604

Washington Luiz Martins de Souza

Modelos Probabilísticos Discretos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática Aplicada.
Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.

Goiânia

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Souza, Washington Luiz Martins de
Modelos Probabilísticos Discretos [manuscrito] / Washington Luiz Martins de Souza. - 2020.
C, 100 f.

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.
Bibliografia.
Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, tabelas, lista de figuras.

1. Probabilidade. 2. Modelos Probabilísticos. 3. Modelos Probabilísticos Discretos. I. Júnior, Valdivino Vargas, orient. II. Título.

CDU 517

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **16** da sessão de Defesa de Dissertação de Washington Luiz Martins de Souza., que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática Aplicada.

Aos trinta dias do mês de outubro de dois mil e vinte, a partir das 14 **horas**, por meio de videoconferência devido a pandemia covid-19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"**Modelos Probabilísticos Discretos**"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador o professor doutor Valdivino Vargas Júnior (IME/UFG), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor doutor Tiago Moreira Vargas (IME/UFG) e os membros titulares externos o Professor doutor Pablo Martin Rodriguez (UFPE) e o professor doutor Alejandro Roldan Correa (UA). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho**.** A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor doutor Valdivino Vargas Júnior, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos trinta dias do mês de outubro de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **ALEJANDRO ROLDAN CORREA**, **Usuário Externo**, em 03/11/2020, às 10:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Júnior**, **Professor do Magistério Superior**, em 07/11/2020, às 19:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Pablo Martin Rodriguez**, **Usuário Externo**, em 12/11/2020, às 16:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica — Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas**, **Professor do Magistério Superior**, em 16/11/2020, às 13:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1630296** e o código CRC **F12D9087**.

Referência: Processo nº 23070.047770/2020-40 SEI nº 1630296

Washington Luiz Martins de Souza graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Católica de Brasilia (Campus de Taguatinga) em 2019, bacharel em Engenharia Civil pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás em 2011, especializou-se em Auditoria, Avaliações e Perícias em Engenharia pelo Institudo de Pós-Graduação em 2015, atualmente é sócio proprietario da empresa Doctors Engenharia e Construções em Goiânia-GO.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo".

(Galileu Galilei)

A Deus pela sua infinita misericórdia. Ao Senhor toda honra, glória, louvor e aplauso.

Agradecimentos

Eu, Washington Luiz, agradeço em primeiro lugar à Deus pois a Ele devo a minha existência, por me inserir num seio familiar tão abençoado, por me proporcionar os meios de uma vida feliz em busca dos meus sonhos.

Às princesas da minha vida e do meu coração Adriana e Emanuele. Eu jamais teria conseguido tal êxito sem o apoio, carinho, atenção e paciência da minha esposa e da minha filhinha. Vocês estiveram comigo por todos os dias ao longo desta jornada. Os momentos delicados foram diversos mas não se comparam no prazer de superá-los com vocês ao meu lado. Amo vocês.

Aos meus familiares, em especial aos meus queridos pais Manoel e Adelice que proporcionaram a mim e ao meu amado irmão Wellington uma vida estudantil pautada no melhor, proporcionando as condições necessárias para que pudéssemos nos tornar profissionais e cidadãos abençoados. Cito neste momento uma passagem bíblica descrita em Êxodo 20:12 que diz "Honra teu pai e tua mãe, a fim de que tenhas vida longa na terra que o Senhor o teu Deus, te dá".

Aos meus amigos(as), e em especial ao meu querido amigo irmão Wesley Pereira Nunes da Silva que tanto me incentivou ao mestrado e por todas as orientações que marcaram a minha vida acadêmica. Não teria iniciado minha licenciatura em matemática e este mestrado sem a sua indicação e entusiasmo.

Ao meu querido professor, orientador, Valdivino Vargas Junior, que desde o início não poupou esforços em me ajudar. Um dos momentos marcantes desta minha caminhada foi quando minha esposa passou por um processo cirúrgico delicado e ele me proporcionou toda a tranquilidade para seguir em frente. Ainda ocorreram outras dificuldades na minha vida familiar, emocional e profissional que conseguimos superar uma à uma. Dotado de uma humildade e de um carisma cativante. Um exemplo, uma verdadeira inspiração de profissionalismo que levarei para sempre comigo.

Aos irmãos em Cristo da minha amada igreja Assembleia de Deus - Ministério Madureira - Campo de Campinas - sob a direção do meu querido pastor Bispo Oídes José do Carmo. Muitos foram os momentos de ausência na obra do Senhor pois o período de plantio na área acadêmica foi extenso para que a colheita chegasse no tempo de Deus.

À minha querida turma (PROFMAT 2018 - UFG). Foi um prazer nossos encontros semanais às sextas-feiras e quero aqui destacar a nossa união pois sempre estávamos dispostos a apoiar uns aos outros. Já tenho saudades da nossa rotina e creio que sempre terei. Foi um privilégio conhecer pessoas tão incríveis. Grande honra obtive por ter colegas, na verdade amigos que levarei no meu coração por toda a vida, amigos estes extremamente capacitados onde me proporcionaram com maestria o meu desenvolvimento acadêmico. Aos meus queridos amigos(as) André, Aguiobey, Cláudio, Cléo, Débora, Danilo, Felipe, Ferdinand, Humberto, José, Luís, Rafael Lemes, Rafael Lucas, Reginaldo, Simone, Willian e Uendel. Mais uma vez muito obrigado por tudo. Às minhas queridas amigas Leila e Rebeca, me faltam palavras para agradecê-las. Somente o Pai para recompensá-las. A turma me marcou positivamente de forma única, sutil e permanente.

À minha querida UFG, em especial ao IME - UFG (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás) nas pessoas de seus professores e colaboradores. Uma equipe qualificada e determinada de destaque internacional. Minha universidade que eu tanto amo. Como eu sonhava estudar aqui.

E para encerrar quero fazer mais uma menção: Agradecer ao Pai Celestial depois de uma oração respondida é gratidão mas agradecer ao Senhor antecipadamente é um ato de Fé. Por isso minha gratidão e fé são renovadas a cada manhã na minha vida.

Resumo

A sociedade atual necessita e requer cada vez mais de pessoas capacitadas para o contexto matemático visto que nos deparamos a todo momento com números, fórmulas, gráficos e outros conteúdos matemáticos. É indispensável a importância destes assuntos para a vida social dos alunos. Buscamos neste trabalho dispor sobre um pouco de história da probabilidade, seus princípios básicos, alguns casos de modelos probabilísticos e exemplos de aplicabilidade no ensino médio. Neste sentido, almejamos trazer uma proposta didática pedagógica para o ensino da probabilidade que no que lhe concerne permita ao aluno meditar, expor e criar estratégias para a resolução de um problema. O aluno precisa se tornar construtor do conhecimento e o professor sendo incumbido o papel de mediador do conhecimento, vindo a ser o vetor que irá explicar, estimular, direcionar, mas sem impor verdades matemáticas que possam muitas vezes ficar obscuras na realidade dos alunos.

Palavras-chave

Probabilidade. Modelos Probabilísticos. Modelos Probabilísticos Discretos.

Abstract

Today's society needs and requires more and more people capable to understand math as we are constantly faced with numbers, formulas, graphs and other mathematical content. These subjects are important and necessary for a student?s social life. We seek in this work to provide a brief history of probability, its basic principles, some insights on probabilistic models and examples on how to apply it in high school. In this sense, we aim to bring a didactic pedagogical approach for probability teaching that allows the student to think, present and create strategies for solving a problem. The student becomes a knowledge builder and the teacher acts as knowledge moderator that will explain, stimulate and supervise, without imposing mathematical truths that can often be obscured in the students' reality.

Keywords

Probability. Probabilistic Models. Discrete Probabilistic Models.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O teor sobre ensino de Probabilidade vem se destacando cada vez mais nos currículos brasileiros. Todavia, o simples ato de "difundir" fórmulas e conceitos não converte seu aprendizado de forma agradável e sucinta. Para tal, tratar com temáticas contextualizadas e com possibilidades de execuções palpáveis e suscetíveis de observação de nossos alunos amparam no alcance de resultados mais expressivos.

Neste trabalho, têm-se inicialmente como objetivo apresentar os conceitos básicos de probabilidade, de alguns modelos probabilísticos discretos, a forma como o conceito de probabilidade está inserido na Educação Básica no Brasil e sugerir possibilidades de aplicação no Ensino Médio. Estes conceitos estão presentes nas mais diversas áreas do conhecimento, como na física, biologia e informática por exemplo.

Diante de tal panorama, é possível conciliar estes dois conceitos, probabilidade e modelos probabilísticos discretos, na intenção de aprimorar o entendimento dos alunos na Educação Básica. Outrora, é preciso que o professor encarregado por ministrar tal temática possua o entendimento, suas aplicações e saiba conciliá-las para facilitar a compreensão, de forma adequada, ao nível de seus alunos do Ensino Básico.

Este trabalho foi realizado com o intuito de ser um facilitador desta compreensão, além de observar atualmente o panorama da Probabilidade no Brasil e indicar aplicações de alguns modelos probabilísticos discretos adaptados para o ensino da probabilidade aos alunos do Ensino Médio, possibilitando, desta forma, um aprendizado mais adequado para o nosso cotidiano.

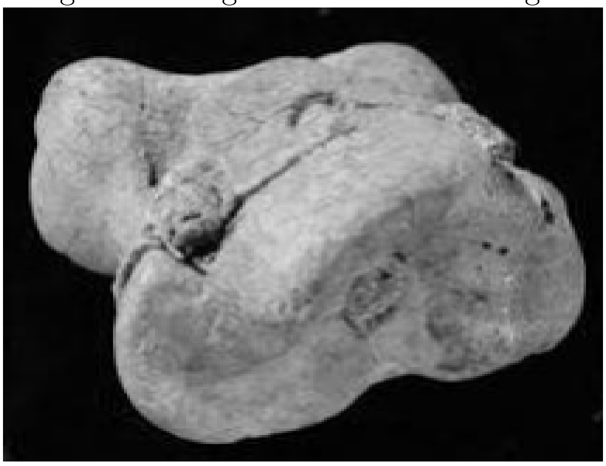
Esta dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos. O primeiro refere-se a parte introdutória deste trabalho ligada à Probabilidade. No segundo capítulo, é elencado um breve histórico, conceitos básicos e definições sobre o assunto. O terceiro aborda alguns modelos probabilísticos discretos, bem como exemplos importantes para uma boa interpretação e compreensão oportuna dos temas citados na sequência do trabalho. O quarto capítulo apresenta a maneira como o conteúdo encontra-se presente na Educação Básica Brasileira e são apresentadas quatro sugestões de aplicação para o Ensino Médio. Enfim, no quinto capítulo são descritas algumas considerações finais e conclusões do trabalho aqui apresentado.

2 Probabilidade

2.1 Breve Histórico de Probabilidade

Na grande maioria das situações que envolviam os primórdios da probabilidade a mesma era utilizada na realização de apostas. Não se sabe ao certo quando a primeira aposta foi realizada na história da humanidade mas baseando-se em fontes históricas pode-se observar que no Antigo Egito as pessoas já apreciavam apostas, na época as mesmas ocorriam através de uma espécie de dado primitivo que possuía quatro lados, feito através de ossos de animais denominado de Astrágalo (possuindo um formato de tetraedro irregular). A Figura 1 mostra uma imagem deste tipo de dado primitivo.

Figura 1: Imagem de um osso Astrágalo



Fonte: http://www.ancienttouch.com/1081.jpg. Acesso em 20 de março de 2020.

Em expedições arqueológicas pelo mundo, em uma delas, afirma-se que na Índia Antiga já era comum ouvir a expressão "jogar os dados" em um dos antigos documentos da literatura hindu composto de hinos, oferendas e rituais às divindades. Alguns estudos descrevem que crianças indianas lançavam um pedaço de osso com o intuito de obterem uma de suas faces para cima ou para baixo.

Na Idade Média o ato de jogar dados tinha grande popularidade entre os cavaleiros.

Seguindo um pouco mais adiante verificaram-se um dos primeiros manuscritos sobre apostas que se tem notícia escrito pelo imperador romano Claudius que viveu entre 10 a.C e 54 d.C. O mesmo tinha como título: "Como ganhar nos dados". No entanto o que se conhece sobre esta obra é que a mesma foi perdida e nunca mais encontrada.

O ato de jogar dados envolvia apostas e também era relacionado com jogos de azar. Era uma atividade que tinha leis especiais em Roma. O grande imperador Júlio César era considerado um jogador nato e segundo informações deste período em uma destas partidas Júlio César teria dito uma frase que ficou famosa por todo o mundo: "A sorte está lançada". Jogar dados era o passatempo preferido dos romanos à época. Os romanos eram reconhecidos como exímios jogadores de dados.

A expansão dos jogos de azar na Idade Média propiciaram que vários matemáticos aprofundassem os seus estudos em Probabilidade. A partir de então começaram a surgir os primeiros conceitos e teorias sobre jogos e apostas.

Dentre alguns matemáticos importantes à época podem ser citados os italianos Gerônimo Cardano (1501 - 1576), Galileu Galilei (1564 - 1642), Luca Pacioli (1445 - 1517) e Niccolo Tartaglia (1499 - 1557) como os primeiros a implementarem, matematicamente, os estudos envolvendo o jogo de dados, desenvolvendo as ideias do conjunto universo e dos eventos que pertenciam neste conjunto.

De acordo com o aprofundamentos destes estudos foram descritas situações mais complexas e a partir de então surgiram outros matemáticos buscando relatar novas teorias. Podem ser citados alguns em destaque:

Pierre de Fermat (1601 - 1655).
Blaise Pascal (1623 - 1662).
Jacob Bernoulli (1654 - 1705).
Abraham de Moivre (1667 - 1754).
Pierre Simon Laplace (1749 - 1827).
Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855).
Lenis Poisson (1781 - 1840).
Pafnuti Tchebycheff (1821 - 1894).
Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987).

Observa-se que os primeiros indícios sobre jogar dados foram descritos desde o Antigo Egito mas pode-se perceber que as teorias e conceitos sobre probabilidade alcançaram notoriedade com a disseminação dos jogos de azar na Idade Média.

As bases que se apoiaram a teoria do cálculo das probabilidades e da análise combinatória foram proporcionadas por Pascal e Fermat, os estudos e pesquisas relacionando apostas no jogo de dados ocasionaram diversas conjecturas envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciências.

Jacob Bernoulli relatou sobre os grandes números, discorrendo sobre as combinações, permutações e a classificação binomial. Laplace estabeleceu a regra de sucessão e Gauss revelou a lei das distribuições das probabilidades e o método dos mínimos quadrados.

No tempo atual, as ponderações relacionadas às probabilidades são utilizadas em diversas situações que utilizam axiomas, teoremas e definições bem contundentes. Possui aplicação nos estudos relacionados à estatística, economia, engenharia, física, química, jogos estratégicos, sociologia, psicologia, biologia, entre outros ramos do conhecimento. Pode-se verificar uma aplicação essencial direcionada à Estatística Indutiva, na acepção de amostra, extensão dos resultados à população e na previsão de acontecimentos futuros.

2.2 Conceitos Básicos de Probabilidade

Este trabalho tem como objetivo apresentar conceitos, definições, teoremas e lemas ao longo do seu desenvolvimento sobre a probabilidade e suas aplicações no Ensino Médio. O Referencial Teórico é apresentado de maneira clara e objetiva sem deixar de lado a essência necessária que será suporte para o bom desenvolvimento do mesmo. As demonstrações são omitidas nesta etapa, não sendo objeto de estudo no momento. No interesse de explorá-las, sugere-se a leitura de alguns autores como GOULART (2007), MORGADO (2016), MEYER (1995) e ROSS (2010).

2.2.1 Teoria dos Conjuntos

Definições e Linguagens

Nesta seção são apresentados conceitos e resultados acerca da teoria básica de probabilidade, da teoria dos conjuntos, suas definições mais simples e linguagens mais utilizadas. É apresentado um breve resumo sobre os conteúdos aqui apresentados que julga-se serem os mais relevantes para o bom entendimento dos mesmos. O conhecimento sobre a teoria dos conjuntos torna-se fundamental e imprescindível para o saber matemático, pois a partir deste pode-se expressar a base da maioria dos conceitos matemáticos.

Simplificadamente pode-se dizer que *conjunto* é uma coleção de objetos quaisquer. Um exemplo comum de citação são as cores da bandeira nacional brasileira: verde, amarelo, azul e branco. Ou seja, ao representar este conjunto, este pode ser nomeado por exemplo pela letra B em referência ao país Brasil. Desta forma, tem-se: B = {verde, amarelo, azul, branco}. Outro exemplo a ser citado é o conjunto dos números pares, que é nomeado neste caso pela letra P, desta forma: P = {2, 4, 6, ...}. Têm-se a seguir algumas notações e linguagens essenciais:

- A letra grega Ω (Ômega) retrata o *Conjunto universo*.
- As letras minúsculas $a, b, ..., w, z$ retratam os *elementos dos conjuntos*.
- *Conjuntos* são retratados por letras maiúsculas, por exemplo: $A, B, ..., W, Z$.
- A letra grega $\varnothing$ retrata o *conjunto vazio*.
- As letras gregas $\in$ e $\notin$ retratam uma relação de um determinado elemento *pertencer* ou *não pertencer*, respectivamente, a um conjunto.
- Para simbolizar se um conjunto é *subconjunto(ou que está contido)* em outro conjunto utiliza-se o símbolo $\subset$.
- A notação de $n(C)$ simboliza a *cardinalidade* ou o *número de elementos* do conjunto C.
- Para retratar a *união* de dois conjuntos C e D (representação do conjunto dos elementos que pertencem a C ou D) usa-se $C \cup D$. Ou seja, $C \cup D = \{x \in \Omega | x \in C \text{ ou } x \in D\}$. Usualmente, a união de n conjuntos $C_1, C_2, ...C_n$ é descrita e representada pela expressão: $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$.
- A *intersecção* entre dois conjuntos C e D (retratando o conjunto dos elementos que pertencem a C e D simultaneamente) é simbolizada por $C \cap D$, ou seja $C \cap D = \{x \in \Omega | x \in C \text{ e } x \in D\}$. Em geral, para n conjuntos C_1, C_2, ..., C_n a intersecção é representada por $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$.
- O *conjunto diferença* entre dois conjuntos C e D, simbolizado por $C - D$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a C e não pertencem a D. É definido por: $C - D = \{x \in \Omega | x \in C \text{ e } x \notin D\}$.

- Dois conjuntos C e D são ditos disjuntos caso $C \cap D = \varnothing$, $\dot{\text{D}}$ados n conjuntos A_1, A_2, ..., A_n diz-se que eles são disjuntos dois a dois caso $A_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ para todo i e j com $i \neq j$.

- O *conjunto complementar* de D simbolizado por D^c retrata o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem ao conjunto D. Simbolicamente, representa-se: $D^c = \{x \in \Omega \mid \mathrm{x} \notin D\}$.

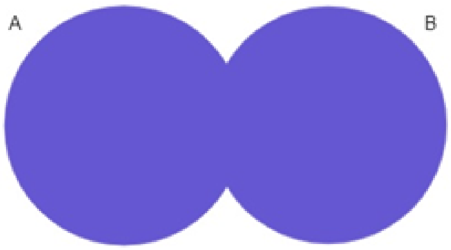
2.2.2 Operações

Nas operações entre conjuntos pode-se verificar a facilidade que elas trazem para a resolução de problemas numéricos do cotidiano. Utilizam-se algumas ferramentas gráficas, como o diagrama de Venn-Euler, para indicar as principais operações entre dois ou mais conjuntos, sendo elas: *união de conjuntos, intersecção de conjuntos, diferença de conjuntos e conjunto complementar. A união entre dois ou mais conjuntos* proporcionará o surgimento de um novo conjunto constituído por elementos que pertencem a, pelo menos, um dos mesmos. De maneira mais formal pode-se representar a união de dois conjuntos A e B, por exemplo, da seguinte forma:

$$A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Sendo A e B dois conjuntos, a união entre os mesmos é formada por elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B, ou simplesmente, que ocorra a união entre os elementos de A com os de B. A seguir tem-se na Figura 2 um exemplo de união entre dois conjuntos A e B.

Figura 2: União entre os conjuntos A e B



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm

Acesso em 20 de março de 2020.

Exemplo 2.2.1. *Sejam os conjuntos A = {0, 2, 4, 6 } e B = {1, 3, 5, 7 }. A união entre os conjuntos A e B pode ser escrita da seguinte forma:*

A $\cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Exemplo 2.2.2. $A = \{x \in \mathbb{N} | \, x \text{ é par}\}$ *e* $B = \{y \in \mathbb{N} | \, y \text{ é ímpar}\}$. *Ao realizar a união de todos os números pares naturais com todos os números ímpares naturais tem-se por consequencia a totalidade do conjunto dos números naturais, portanto:*

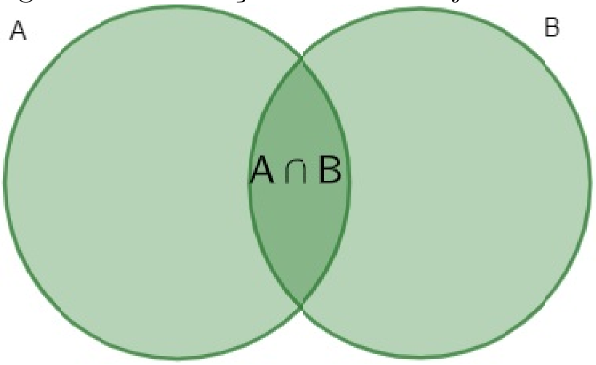
$A \cup B = \mathbb{N}$.

Ao realizar a *intersecção entre dois ou mais conjuntos* esta ocasiona em um outro conjunto constituído por elementos que pertencem, simultaneamente, em todos os conjuntos envolvidos. Desta forma, tem-se:

$A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Dados dois conjuntos A e B, a intersecção entre eles é constituída por elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B. Assim, precisa-se considerar somente os elementos que estão em ambos os conjuntos. Na Figura 3 a seguir tem-se a intersecção entre os conjuntos A e B.

Figura 3: Intersecção entre os conjuntos A e B



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm

Acesso em 20 de março de 2020.

Exemplo 2.2.3. *Tem-se os conjuntos A = {3, 4, 5, 6}, B = {-1, 4, 6, 8, 10} e C = {0, -1, -2}.*

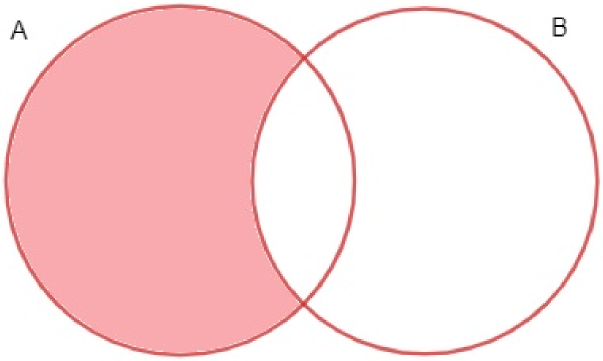
$A \cap B = \{4, 6\}$.
$A \cap C = \varnothing$.
$B \cap C = \{-1\}$.

Ao relatar sobre o conjunto que não possui nenhum elemento este é denominado *conjunto vazio* e possui as seguintes representações:

$A = \{\ \}$ ou $A = \varnothing$.

Veja a diferença entre conjuntos no diagrama de Venn-Euler na Figura 4 a seguir:

Figura 4: Diferença entre os conjuntos A e B



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm

Acesso em 20 de março de 2020.

Exemplo 2.2.4. *Sejam os conjuntos* A = *{0, 1, 2, 3, 4, 5}*, B = *{0, 1, 2, 3, 4, 6 }* e C = *{ }. Calcule as seguintes diferenças entre conjuntos:*

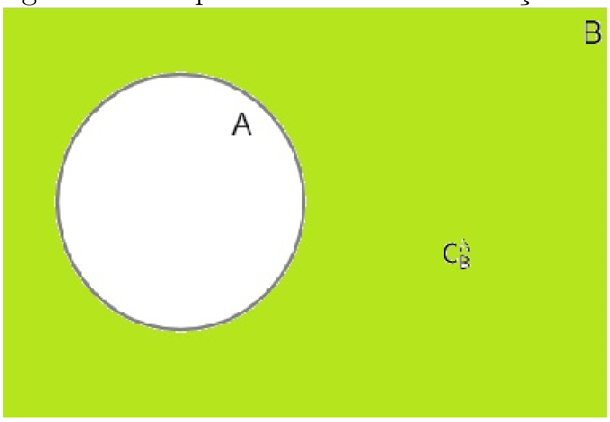
a) $A - B = \{5\}$.
b) $A - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
c) $C - A = \{\ \}$.

Pode-se perceber que, no conjunto A - B, tem-se inicialmente o conjunto A e "extrai-se" os elementos do conjunto B. No conjunto A - C, toma-se o A e "extrai-se" o vazio, ou seja, nenhum elemento. Finalmente, em C - A, toma-se o conjunto vazio e "extrai-se" os elementos de A, que, por sua vez, já não estavam lá. Considere os conjuntos A

e B, em que o conjunto *A* está inserido(contido) no conjunto *B*, ou seja, todo elemento de *A* também é elemento de *B*. A diferença entre os conjuntos, *B* - *A*, é chamada de *complementar de A em relação a B*. De forma semelhante, o complementar é composto por todo elemento que não pertence ao conjunto *A* em relação ao conjunto *B*, em que ele está inserido.

A Figura 5 apresenta o complementar de *A* em relação a *B*.

Figura 5: Complementar de *A* em relação a *B*.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm

Acesso em 20 de março de 2020.

Exemplo 2.2.5. *Sejam os seguintes conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4 }, B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }. Calcule o complementar de A em relação a B:*

Solução:

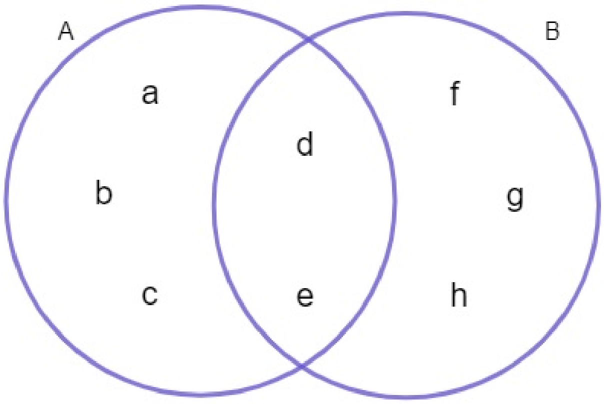
C_B^A = *B - A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } - { 0, 1, 2, 3, 4 } = { 5, 6, 7, 8 }.*

Exemplo 2.2.6. *Seja* $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A \cap B = \{d, e\}$ *e A - B = { a, b, c }. Obtenha o conjunto B.*

Solução:

Segundo o enunciado e dispondo os elementos no diagrama de Venn-Euler, tem-se pela Figura 6:

Figura 6: Diagrama de Venn-Euler.



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm

Acesso em 20 de março de 2020.

Pode-se concluir, portanto, $B = \{\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\ \}$.

A seguir são relacionadas algumas propriedades essenciais que possuem familiaridade com os conceitos estabelecidos anteriormente.

Propriedades elementares dos Conjuntos

P1) $C \subset D \Leftrightarrow C \cup D = D$;
P2) $C \subset D \Leftrightarrow C \cap D = C$;
P3) Para todo conjunto $C \subset \Omega$, $C \cup \varnothing = C$ e $C \cap \Omega = C$;
P4) $C \cup (D \cup E) = (C \cup D) \cup E$;
P5) $C \cap (D \cap E) = (C \cap D) \cap E$;
P6) $C \cup (D \cap E) = (C \cup D) \cap (C \cup E)$;
P7) $C \cap (D \cup E) = (C \cap D) \cup (C \cap E)$;
P8) $(C \cup D)^c = C^c \cap D^c$;
P9) $(C \cap D)^c = C^c \cup D^c$;
P10) $(C^c)^c = C$; $C \subset D \Leftrightarrow D^c \subset C^c$;
P11) $C \cup C^c = \Omega$, $C \cap C^c = \varnothing$, $\varnothing^c = \Omega$, $\Omega^c = \varnothing$.

Definição 2.2.7. *Partição de um conjunto*

Seja W um conjunto finito não vazio. Uma partição de W é uma familia de conjuntos $W_1, W_2, ..., W_k$, todos não vazios, e tais que: $W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_k = W$; $W_i \cap W_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Em palavras, os conjuntos $W_1, W_2, ..., W_k$ são disjuntos dois a dois e sua união é o conjunto W. Também pode-se dizer que W foi particionado pelos conjuntos $W_1, W_2, ..., W_k$.

2.3 Análise Combinatória

Considere a seguinte situação problema. Utilizando as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos quantas placas distintas de um automóvel pode-se formar sabendo que são necessárias de 03 letras seguidas (repetidas ou não) e 04 algarismos seguidos (repetidos ou não)? Problemas e situações como estas envolvem o cálculo da quantidade de agrupamentos que podem ser realizados de um ou mais conjuntos sujeitos as mesmas condições. Desta forma, pode-se dizer que esses problemas representam o que se chama de *problemas de contagem*, e a intenção é saber como calculá-las sem necessariamente enumerar seus quantitativos.

Nesta seção pretende-se apresentar algumas definições e teoremas relativos a Análise Combinatória, com ênfase a aplicações do *Princípio Multiplicativo*.

Proposição 2.3.1 (Princípio aditivo para partes disjuntas, LEBENSZTAYN (2012, pg. 01))**.** *Se $A_1 ... A_m$ são conjuntos dois a dois disjuntos, então*

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n\left(A_i\right).$$

Proposição 2.3.2 (Princípio Multiplicativo, LEBENSZTAYN (2012, pg. 01))**.** *"Uma tarefa deve ser executada em uma sequência de r etapas. Existem n_1 maneiras de realizar a primeira etapa; para cada uma dessas n_1 maneiras, existem n_2 maneiras de realizar a segunda etapa; para cada uma dessas n_2 maneiras, existem n_3 maneiras de realizar a terceira etapa, e assim por diante. Então o número total de maneiras de efetuar a tarefa é dado por $n_1\ n_2 ... n_r$."*

Observação. "Ao usar o princípio multiplicativo, é fundamental que o número de maneiras de realizar uma determinada etapa não seja influenciado por nenhuma das etapas predecessoras." (LEBENSZTAYN, 2012, pg. 01).

O Princípio Multiplicativo também pode ser chamado de "Princípio Fundamental de Contagem" ou "Princípio da Multiplicação".

Exemplo 2.3.3. *De um baralho comum com 52 cartas são extraídas sucessivamente ao acaso e sem reposição três cartas. Calcule o número de extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama.*

Solução:

A ideia é usar o princípio aditivo. Defina os conjuntos:

A_1*: Conjunto das extrações nas quais a primeira carta é o rei de copas.*

A_2*: Conjunto das extrações nas quais a primeira carta é a dama de copas.*

A_3*: Conjunto das extrações nas quais a primeira carta é de copas mas não é dama nem rei.*

Para obter o número de extrações em A_1 *note que fixando a primeira carta como rei de copas, há 1 modo de selecionar a primeira carta, 3 modos de selecionar a segunda carta e 46 modos de selecionar a terceira. Logo, pelo princípio multiplicativo:*

$n(A_1) = 1 \cdot 3 \cdot 46 = 138.$

Para obter o número de extrações em A_2 *note que fixando a primeira carta como dama de copas, há 1 modo de selecionar a primeira carta, 4 modos de selecionar a segunda carta e 47 modos de selecionar a terceira. Logo, pelo princípio multiplicativo:*

$n(A_2) = 1 \cdot 4 \cdot 47 = 188.$

Por fim, para obter o número de extrações em A_3 *note que fixando a primeira carta como copas (não sendo dama nem rei), há 11 modos de selecionar a primeira carta, 4 modos de selecionar a segunda carta e 46 modos de selecionar a terceira. Assim, pelo princípio multiplicativo:*

$n(A_3) = 11 \cdot 4 \cdot 46 = 2024.$

A solução segue então pelo princípio aditivo:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \; = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) = 138 + 188 + 2024 \; = 2.350.$$

Portanto, há 2.350 extrações nas condições impostas pelo enunciado.

Exemplo 2.3.4. *Quantos números de 3 algarismos pode-se formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? (DANTE, 2014, p. 472).*

Solução:

Há 6 possibilidades para preencher a lacuna das centenas, 6 possibilidades para preencher a lacunas das dezenas e outras 6 possibilidades de preencher a lacuna das unidades, pois um algarismo pode aparecer mais de uma vez no mesmo número.

Portanto, tem-se $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ possibilidades no total, o que indica que pode-se escrever 216 números de três algarismos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Exemplo 2.3.5. *Quantos números de 3 algarismos distintos pode-se formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6? (DANTE, 2014, p. 472).*

Solução:

Há 6 possibilidades para preencher a lacuna das centenas, 5 possibilidades para preencher a lacunas das dezenas e 4 possibilidades de preencher a lacuna das unidades, já que o exercício pede números de 3 algarismos distintos. Então tem-se $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ possibilidades, ou seja, pode-se formar 120 números.

Proposição 2.3.6 (Princípio da Inclusão Exclusão)**.** *Sejam A_1, A_2, ..., A_m conjuntos com cardinalidade finita, então:*

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} n(A_i) \; - \sum_{1 \leq i < j \leq m} n(A_i \cap A_j) \; + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} n(A_i \cap A_j \cap A_k) \; - \; ... \; +$$

$$(-1)^{m+1} n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right).$$

Exemplo 2.3.7. *Numa escola há 32 alunos. Destes 16 falam inglês, 8 falam espanhol e 5 falam inglês e espanhol.*

a) Quantos alunos falam pelo menos um dos idiomas?
b) Quantos alunos não falam nem inglês nem espanhol?

Solução:

Sejam I e E o conjunto alunos que falam inglês e espanhol respectivamente. Então:

i) $n(\Omega) = 32$ *(são 32 alunos no total).*
ii) $n(I) = 16$ *(são 16 alunos que falam inglês).*
iii) $n(E) = 8$ *(são 08 alunos que falam espanhol).*
iv) $n(I \cap E) = 5$ *(são 05 alunos que falam inglês e espanhol).*

a) Segue pelo Princípio da Inclusão Exclusão:

$n(I \cup E) = n(I) + n(E) - n(I \cap E).$
$n(I \cup E) = 16 + 8 - 5 = 19.$

b) Note que:

$n(I^c \cap E^c) = n((I \cup E)^c) = n(\Omega) - n(I \cup E).$
$n(I^c \cap E^c) = 32 - 19 = 13.$

Resposta:

a) 19 estudantes falam pelo menos um dos idiomas.
b) 13 estudantes não falam nem inglês nem espanhol.

2.3.1 Permutações

A palavra *permutar* possui como sinônimo *trocar*. De maneira genérica, deve-se ligar a permutação à ideia de trocar, embaralhar objetos de posição. A quantidade de permutações é o número de ordens possíveis dos elementos dos conjuntos.

Proposição 2.3.8 (Permutações Simples, LEBENSZTAYN (2012, pg. 01))**.** *O número de maneiras de permutar n objetos distintos é*

$$n! = n(n-1)...2\,1$$

"O número $n!$ *é chamado o fatorial de n. Por convenção,* $0! = 1$*.*

Observação: Uma fórmula muito importante quando se trata de fatoriais foi obtida por Stirling(1930):

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n},$$

onde o símbolo $\sim$ *indica que a razão entre os dois lados tende a 1 quando* $n \to \infty$*."*

Exemplo 2.3.9. *Quantos anagramas (número de ordenações possíveis das letras da palavra) tem a palavra DEUS? (DANTE, 2014, p. 473).*

Solução:

Permuta-se todas as letras da palavra DEUS. $P_n = n! = P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Tem-se, então, 24 anagramas.

Proposição 2.3.10 (Permutações Circulares, LEBENSZTAYN (2012, pg. 02))**.** *"O número de maneiras de dispor n objetos distintos em torno de um círculo é* $(n-1)!$*."*

Seja $(PC)_n$ *a expressão para calcular o número de permutações circulares, assim:*

$$(PC)_n = (n-1)!.$$

"Nessa contagem, interessa apenas a posição relativa dos objetos entre si, ou seja, duas disposições são consideradas indistinguíveis se uma pode ser obtida a partir da outra por uma rotação conveninte dos objetos.

O número de palavras de comprimento k que podem ser compostas com n elementos dados é n^k*."*

Exemplo 2.3.11. *De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda? (MORGADO, 2015, p. 122).*

Solução:

"À primeira vista parece que para formar uma roda com as cinco crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $5! = 120$ modos. Entretanto, as rodas ABCDE e EABCD são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda ABCDE pode ser "virada"na roda EABCD. Como cada roda pode ser "virada" de cinco modos, a contagem de 120 rodas contou cada roda 5 vezes e a resposta é $120/5 = 24$."

Outra forma de resolver este exercício é utilizando a (Proposição 2.3.10), assim:

$(PC)_5 = (5-1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$

Portanto, são 24 modos que pode-se dispor 5 crianças em uma roda de ciranda.

Proposição 2.3.12 (Permutações com Repetições)**.** *A quantidade de permutações de n elementos tais que um ou mais deles são repetidos é dada por:*

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_w} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_w},$$

onde α_i é a quantidade de vezes que aparece o i-ésimo tipo de elemento com $i = 1, 2, \ldots, w$.

Exemplo 2.3.13. *Quantos anagramas da palavra CAMARADA começam pela letra C? (DANTE, 2014, p. 474).*

Solução:

Fixe a letra C como 1ª letra e faça:

$P_7^{4,1,1,1} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$

Portanto, são 210 os anagramas de CAMARADA que começam por C.

2.3.2 Arranjos

Proposição 2.3.14 (Arranjos Simples, LEBENSZTAYN (2012, pg. 02))**.** *"O número de k-subconjuntos ordenados de um n-conjunto é"*

$$(n_k) = n(n-1)...(n-k+1).$$

Exemplo 2.3.15. *Quantos números de dois algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? (DANTE, 2014, p. 476).*

Solução:

1ª maneira: usando a fórmula

"Procura-se agrupamentos de 2 elementos em que a ordem é importante, pois, por exemplo, $12 \neq 21$. Tem-se 9 elementos para serem arranjados 2 a 2. Assim, tem-se que calcular:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72.$$

Portanto, existem 72 números de dois algarismos diferentes que podem ser escritos com os algarismos de 1 a 9."

2ª maneira: sem usar a fórmula

"Para o algarismo das dezenas tem-se 9 opções e, para o algarismo das unidades, apenas 8 opções, pois não se pode repetir algarismos. Assim, há $9 \cdot 8 = 72$ possibilidades. Portanto, são 72 números."

2.3.3 Combinações

O conceito de combinação está intimamente ligado à noção de escolher subconjuntos. A *combinação simples* é um tipo de agrupamento no estudo sobre análise combinatória. Os agrupamentos formados com os elementos de um conjunto em subconjuntos serão considerados combinações simples se os elementos dos agrupamentos diferenciarem apenas pela sua natureza.

Proposição 2.3.16 (Combinações, LEBENSZTAYN (2012, pg. 02))**.** *"O número de k-subconjuntos de um n-conjunto é"*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Corolário 2.3.17. *De forma simplificada, para cada grupo de k elementos escolhidos entro os n disponíveis, existe um grupo de $n-p$ elementos associado. Assim, tem-se a seguinte igualdade: $C_n^k = C_n^{n-k}$.*

Exemplo 2.3.18. *No jogo de truco, cada jogador recebe 3 cartas de um baralho de 40 cartas (são excluídas as cartas 8, 9 e 10). De quantas maneiras diferentes um jogador pode receber suas três cartas? (DANTE, 2014, p. 480).*

Solução:

As três cartas diferem entre si pela natureza delas e não pela ordem. Como a ordem não importa, o problema se resolve da seguinte forma:

$C_{40}^{3} = \dfrac{40!}{3!(40-3)!} = \dfrac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9880.$

Portanto, cada jogador pode receber suas três cartas de 9880 maneiras diferentes.

2.3.4 Combinações Completas

Definição 2.3.19 (Combinações Completas)**.** *Uma combinação completa é um agrupamento de elementos, de tal maneira que:*

i) A ordem dos elementos que pertencem ao agrupamento não é considerada;

ii) As possíveis repetições dos elementos que pertencem é considerada. Combinações completas são também chamadas combinações com elementos repetidos.

De acordo com MORGADO (1991, p. 48), "De modo geral, C_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, e CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados".

Proposição 2.3.20 (Combinações com repetição)**.** *O número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ é dado por:*

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p.$$

Aqui n representa a quantidade de objetos distintos e p a ordem do agrupamento ou a quantidade de objetos a serem escolhidos.

Exemplo 2.3.21. *Na loja há 3 marcas diferentes de camisa. Pedro deseja comprar 4 camisas. Quantas são as possibilidades de escolha? (SILVA, 2014, p. 53).*

Solução:

$CR(3,4) = \frac{(3+4-1)!}{4!(3-1)!}$ *= 15.*

Portanto, tem-se 15 possibilidades de escolha para a compra.

2.4 Definições de Probabilidade

"Vemos que a teoria da probabilidade é no fundo somente o senso comum reduzido ao cálculo; ela nos faz apreciar com exatidão o que mentes pensantes percebem como que por instinto, muitas vezes sem se dar conta disso. (...) É extraordinário que esta ciência, que surgiu da análise dos jogos de azar, tenha se tornado o mais importante objeto do conhecimento humano. (...) As mais importantes questões da vida são na verdade, em sua grande maioria, apenas problemas de probabilidade."Assim disse o famoso matemático e astrônomo francês Pierre-Simon, marquês de Laplace ("o Newton francês"). Embora muitas pessoas pensem que o famoso marquês, que também foi um dos que mais contribuiu para o desenvolvimento da probabilidade, possa ter exagerado um pouco, é no entanto verdade que a teoria da probabilidade se tornou uma ferramenta fundamental para praticamente todos os pesquisadores, engenheiros, médicos, juristas e empresários. De fato, um indivíduo instruído em probabilidade aprende a não perguntar "É assim mesmo?" mas em vez disso, "Qual é a probabilidade de ser assim?". (SHELDON ROSS, Prefácio).

O primeiro passo para a construção de um modelo probabilístico é definir o espaço amostral do experimento. Este nada mais é do que o conjunto dos possíveis resultados do experimento. Usualmente, um espaço amostral é representado por Ω. Os subconjuntos de Ω são chamados eventos. A formulação do modelo probabilístico fica completo definindo o espaço amostral Ω, a classe de eventos aleatórios (eventos para os quais será atribuído probabilidade) representado por $\mathcal{F}$ e a medida de probabilidade P.

A quantidade de elementos de um evento é representado da seguinte forma: Dado o evento A, o número de elementos de A é n(A).

Um evento é chamado de *evento simples* quando o mesmo possui apenas um elemento. Em outras palavras, evento simples representa um único resultado. Um *evento certo* é igual ao espaço amostral, pois, a probabilidade de que um evento certo ocorra é a maior entre todas, 100%, ou seja, 1. De maneira distinta, quando o evento é igual ao conjunto vazio, ele é chamado de *evento impossível.*

Continuando com o exposto por Morgado cita-se o seguinte exemplo:

Exemplo 2.4.1. *"Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é* $\Omega = \{$*cara, coroa*$\}$ *e há 4 eventos:*

$$\varnothing, \text{A} = \{\text{cara}\}, \text{B} = \{\text{coroa}\} \text{ e } \Omega.$$

$\varnothing$ é um evento que não ocorre nunca e é chamado de evento impossível. O evento A ocorre se, e somente se, o lançamento resulta em cara. O evento B ocorre se, e somente se, o lançamento resulta em coroa. O espaço amostral Ω ocorre sempre e é chamado de "evento certo."

A cada evento associa-se um valor, um número, que denomina-se de probabilidade do evento e desta forma demostrará a fé na capacidade que o mesmo ocorra.

Considerando experimentos com espaço amostral finito pode-se definir probabilidade como uma função que relaciona a cada evento A um número P(A) de modo que:

i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;

ii) $\text{P}(\Omega) = 1$;

iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, então: P $(\text{A} \cup B) = P(A) + P(B)$.

Uma função $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$ satisfazendo i), ii) e iii) é chamada probabilidade finitamente aditiva.

Teorema 2.4.2. *Se A e B são eventos, tem-se que:*

i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*;*

ii) $P(\varnothing) = 0$*;*

iii) $P(A^c) = 1 - P(A)$*;*

iv) Se $A \subset B$*, então* $P(A) \leqslant P(B)$*;*

O cálculo de probabilidade é realizado da seguinte forma: seja A um evento qualquer dentro de um espaço amostral Ω (com um número finito de elementos) com o total de *n(A)* pontos amostrais, a probabilidade de A, denotada por P(A), é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Observe que o número de elementos do espaço amostral será sempre maior ou igual ao número de elementos do evento. Dessa maneira, o menor valor que essa divisão pode resultar é 0, o que reflete a chance de haver um evento impossível. Já o maior valor a que se pode chegar é 1, quando o evento é igual ao espaço amostral. Nesse caso, o resultado da divisão é 1. Desse modo, a probabilidade de um evento A dentro do espaço amostral Ω acontecer está compreendida no intervalo:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Observações:

- Caso necessite expressar a probabilidade de um evento acontecer por meio de um valor percentual, basta multiplicar o resultado da divisão acima por 100.
- Existe a possibilidade de calcular a probabilidade de um evento não acontecer. Para tanto, basta realizar:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Em relação à Probabilidade Condicional, analise a seguinte questão. Dado o espaço amostral Ω e os eventos A e B em Ω, considere que o evento A já ocorreu. A probabilidade que o evento B também ocorra é chamada de probabilidade condicional de B dado A, e dada por:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

2.4.1 Definição Clássica

Definição 2.4.3 (Definição Clássica)**.** *Seja um espaço amostral Ω com $n(\Omega)$ resultados possíveis chamados de eventos simples, todos sendo equiprováveis. Seja ainda A um evento com um total de n(A) eventos simples. Então, a probabilidade de A, denotada P(A), é dada por:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Simplificadamente, ao descrever o conceito de probabilidade na definição clássica o mesmo pode ser entendido por: *Razão entre o número de "casos favoráveis" e o número de "casos possíveis".* Pode-se verificar essa definição na maioria dos livros de ensino médio ou até mesmo em literaturas de ensino superior. De acordo com (MORGADO), essa foi a primeira definição formal de probabilidade e apareceu pela primeira vez de forma objetiva na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jeronimo Cardano (1663), também pode-se atribuir as obras de De Moivre (1718) e Laplace (1812). Pode-se concluir algumas características acerca da definição clássica de probabilidade:

i) Tem-se um número finito de eventos elementares e a união entre estes é o espaço amostral.

ii) Os eventos elementares possuem a mesma probabilidade de acontecer.

iii) A probabilidade de ocorrer um determinado evento é a soma das probabilidades dos eventos elementares favoráveis ao evento. O número de eventos elementares neste caso é menor ou igual ao número de casos possíveis.

Exemplo 2.4.4. *Joga-se um dado, a probabilidade de se obter um "4 ou 5"será igual a 2/6, ou seja, 1/3. Ao jogar uma moeda, neste caso a probabilidade de se obter a face cara é 1/2.*

Lembrando, portanto, que a moeda e o dado devem ser equilibrados, "honestos".

A definição clássica de probabilidade é a que ocorre com maior frequência em relação as literaturas ligadas ao ensino médio. Muitas situações no cálculo de probabilidades envolvem compreensões que estão além da compreendida na definição clássica e por isso, neste trabalho, aborda-se as outras definições de probabilidade: *definições frequentista, subjetiva e axiomática de probabilidade.*

2.4.2 Definição Frequentista ou a Posteriori

Após a introdução da definição clássica apareceu na segunda metade do século XVII a semente de uma nova definição.

Considere um experimento que possa ser repetitivo nas mesmas condições uma quantidade "grande" de vezes. Novamente Ω denotará o espaço amostral de resultados do experimento. Considere A um evento cuja probabilidade se deseje calcular. Deste modo o experimento será repetido várias vezes, aproximando-se a probabilidade de A pela sua freqüência relativa de incidência, isto é:

$$= \frac{número\, de\, ocorrências\, de\, A}{número\, total\, de\, incidências/repetições}$$

Veja a seguir a definição frequentista de probabilidade:

Definição 2.4.5 (Frequentista)**.** *Considere um determinado experimento cujo espaço amostral é Ω e seja A um evento qualquer desse espaço amostral. Considere o experimento repetido n vezes e seja $n(A)$ a quantidade de vezes que A acontece nessas repetições. Assim, define-se a probabilidade do evento A ocorrer por:*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Sucintamente, $P(A)$ é a conformidade (limite) de vezes em que A acontece, ou seja, a frequência limite de A.

Pode-se observar que desta forma não são necessárias as hipóteses de equiprobabilidade dos eventos elementares nem de finitude do espaço dos resultados, sobrepondo-se dessa forma as duas restrições da definição clássica. Embora, esta nova definição desencadeia as seguintes dificuldades:

i) Necessita-se de certa regularidade da seqüência das freqüências relativas, no tocante que a mesma se mantenha estável e convergindo para um valor que seria a probabilidade de A;

ii) E quando deve-se parar nossa análise dos eventos mesmo quando admite-se a existência do limite mencionado em A?

Ao verificar o item (i) é improvável demonstrar precisamente a existência do limite acima mencionado; pode-se ensaiar a estabilidade da freqüências relativas como um vestígio apenas da existência do limite, pois *a estabilidade é uma condição imprescindível para sua existência.*

Ao verificar o item (ii), se considerar a existência do limite acima, ou seja, que existe a probabilidade, o teorema de Bernoulli (1713) assegura a convergência da seqüência das freqüências relativas à probabilidade (de modo que não é objeto de análise neste trabalho). Mesmo neste caso é possível avaliar a probabilidade de A com certa exatidão e nível de confiança prefixados, se a quantidade de repetições n for "aceitavelmente grande".

Exemplo 2.4.6. *Veja o histórico do confronto Goiás Esporte Clube (GO) $\times$ Vila Nova Futebol (GO) pelo Futebol Masculino Profissional. Observe a quantidade de empates e vitórias de cada time nas primeiras 303 partidas realizadas entre eles:*

- *Goiás venceu 150 partidas;*
- *Vila Nova venceu 71 partidas;*
- *Empataram 82 vezes.*

Nesses 303 jogos a proporção de vitórias do Goiás, de empates e de vitórias do Vila Nova são, respectivamente:

$$p_G = \frac{150}{303} \approx 0,495 = 49,5\%,$$

$$p_N = \frac{82}{303} \approx 0,271 = 27,1\%$$

e

$$p_E = \frac{71}{303} \approx 0,234 = 23,4\%.$$

Em jogos de futebol a definição frequentista não é indicada, pois em cada partida pode ser apresentada uma determinada situação diferente, como fator campo, fator extra campo, condições meteorológicas, plantel de jogadores, etc.

Numa próxima partida entre Goiás e Vila Nova os valores $49,5\%$, $27,1\%$ *e* $23,4\%$ *não podem de forma alguma serem atribuídos como probabilidades. Seria necessário algum tipo de metodologia utilizando a definição subjetiva dada a seguir.*

2.4.3 Definição Subjetiva

A definição subjetiva de probabilidade consiste em atribuir probabilidades a eventos com base em estimativas obtidas a partir de critérios subjetivos. É baseada em diversos fatores que incluem julgamento pessoal, acúmulo de conhecimento e experiência do pesquisador.

As definições clássicas ou frequentistas nem sempre são passíveis de serem aplicadas. Pode-se perceber que há dificuldade de garantir uma regularidade na distribuição de frequência de um determinado evento. Desta forma, pode-se concluir que existem situações nas quais a repetição de um evento não pode ser executada e outras em que elas não podem ser executadas em condições idênticas. Pode-se exemplificar a definição subjetiva através de algumas situações:

i) Calcular a probabilidade da vitória do time do Vila Nova Futebol Clube (GO) sobre o time do Goiás Esporte Clube (GO) na próxima partida quando ambos estiverem na série A do Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino;

ii) Calcular a probabilidade de ocorrer um terremoto na cidade de Goiânia - GO;

iii) Qual a probabilidade de um enfermo se recuperar completamente de COVID - 19?

2.4.4 Definição Axiomática

O entendimento de toda matemática passou por um processo de axiomatização a partir da segunda metade do século XIX e a exposição de Kolmogorov faz parte deste processo. Kolmogorov anunciou que a teoria das probabilidades poderia ser desenvolvida a partir de axiomas, de forma semelhante que a geometria e a álgebra. Nestes axiomas ficam estabelecidos os entes matemáticos a serem analisados e as correspondências entre eles. A teoria é construída a partir destes axiomas, independentemente de qualquer compreensão dos mesmos ou de seus efeitos.

Kolmogorov ponderou a teoria das probabilidades como caso especial da teoria da medida e integração desenvolvida por Lebesgue, Borel e Fréchet, determinando analogias entre medida de um conjunto e probabilidade de um evento e entre integral de uma função e esperança de uma variável aleatória.

Kolmogorov inseriu como axiomas as propriedades comuns das noções de probabilidade clássica e freqüentista, que assim viraram casos particulares da definição axiomática. É natural que poderão existir outras compreensões da definição axiomática sem concordância com as ideias ou os problemas que a começaram.

Definição 2.4.7 (Classe de eventos aleatórios)**.** *Seja Ω um espaço amostral não vazio. Uma classe de eventos aleatórios $\mathcal{F}$ é uma classe de subconjuntos de Ω satisfazendo:*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

ii) Se $A \in \mathcal{F}$ *então* $A^c \in \mathcal{F}$, *iii) Se $A_n \in \mathcal{F}$, para n = 1, 2, 3, ... então:*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

A seguir a definição de Kolmogorov:

Definição 2.4.8 (Axiomática(Kolmogorov(1933))). *Seja Ω um espaço amostral e F uma classe de eventos aleatórios do espaço amostral Ω. Uma probabilidade é uma função $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0; 1]$, tal que:*

i) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo $A \in \mathcal{F}$;

ii) $P(\Omega) = 1$;

iii) Aditividade enumerável: para qualquer sequência $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ de eventos dois a dois disjuntos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Observação: Ao analisar o espaço amostral Ω e este for finito ou infinito enumerável, pode-se definir a probabilidade na classe $\mathcal{F}$ de todos os subconjuntos de Ω, de modo que é capaz de representar por 2^{Ω} ou $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto das partes de Ω). Desta forma, descreve-se $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$, relaciona-se a cada ω_i, $i = 1, 2, ...$, um valor $p(\omega_i)$ tal que $p(\omega_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$. Para $i = 1, 2, ...$, $p(\omega_i)$ é a probabilidade do evento simples ω_i. A probabilidade de um evento $A \in \mathcal{F}$ é estabelecida por:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Exemplo 2.4.9. *No lançamento de um dado honesto analisa-se a face que ficará voltada para cima. Determinando o espaço amostral tem-se* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e assim o número de eventos é* $2^6 = 64$ *eventos. Parte desses eventos são* $\varnothing$*, que não ocorre nunca;* Ω *que ocorre sempre;* $A = \{1, 3, 5\}$*, que ocorre, se e somente se, o resultado do lançamento for ímpar, e assim por diante.*

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é chamada espaço de probabilidade.

2.5 Propriedades de uma Probabilidade

Proposição 2.5.1 (Propriedades de uma Probabilidade)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Suponha que* $A \in \mathcal{F}$ *e* $B \in \mathcal{F}$*. Então:*

1) $P(\Omega) = 1$;
2) $P(\varnothing) = 0$;
3) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;
4) $P(A^c) = 1 - P(A)$;
5) Se $A \subset B$*, então* $P(A) = P(B) - P(B - A)$;
6) Se $A \subset B$*, então* $P(A) \leqslant P(B)$;

Proposição 2.5.2 (Aditividade finita)**.** *Para qualquer sequência* $B_1 \in \mathcal{F}$, $B_2 \in \mathcal{F}$, *...*, $B_n \in \mathcal{F}$ *eventos dois a dois disjuntos, tem-se:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i);$$

Proposição 2.5.3 (Subatividade finita)**.** *Para quaisquer eventos* $B_1 \in \mathcal{F}$, $B_2 \in \mathcal{F}$, *...*, $B_n \in \mathcal{F}$*, tem-se:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(B_i);$$

Proposição 2.5.4 (Subatividade enumerável)**.** *Para quaisquer eventos* $B_1 \in \mathcal{F}$, $B_2 \in \mathcal{F}$, *...*, $B_n \in \mathcal{F}$, *..., tem-se:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

Proposição 2.5.5 (Princípio da Inclusão Exclusão)**.** *Para quaisquer n eventos* $W_1 \in \mathcal{F}$, $W_2 \in \mathcal{F}$, *...*, $W_n \in \mathcal{F}$, *tem-se:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(W_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(W_i \cap W_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(W_i \cap W_j \cap W_k) ... +$$

$$(-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\right).$$

Exemplo 2.5.6. *Numa escola há 32 alunos. Destes 16 falam inglês, 8 falam espanhol e 5 falam inglês e espanhol. Selecionando um aluno ao acaso qual a probabilidade que ele fale pelo menos um idioma?*

Solução:

Sejam I o evento onde o aluno selecionado fala inglês e E o evento onde o aluno selecionado fala espanhol. Então:

i) $n(\Omega) = 32$ *(são 32 alunos no total).*
ii) $n(I) = 16$ *(são 16 alunos que falam inglês).*
iii) $n(E) = 8$ *(são 08 alunos que falam espanhol).*
iv) $n(I \cap E) = 5$ *(são 05 alunos que falam inglês e espanhol).*

Pelo Princípio da Inclusão Exclusão:

$$P(I \cup E) = P(I) + P(E) - P(I \cap E).$$

$$P(I) = \frac{n(I)}{n(\Omega)} = \frac{16}{32},\ P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{8}{32},\ P(I \cap E) = \frac{n(I \cap E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{32}.$$

$$P(I \cup E) = \frac{8}{32} + \frac{16}{32} - \frac{5}{32} = \frac{19}{32}.$$

Portanto, ao selecionar um aluno ao acaso, a probabilidade de que ele fale pelo menos um idioma é $\frac{19}{32}$.

2.6 Probabilidade Condicional e Independência

2.6.1 Definições

Definição 2.6.1 (Probabilidade Condicional)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Seja dois eventos aleatórios* $C \in \mathcal{F}$ *e* $D \in \mathcal{F}$ *tais que* $P(D) > 0$. *A probabilidade condicional de* C *dado que* D *ocorreu é dada por:*

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}.$$

Este valor só pode ser definido quando verifica-se $P(D) > 0$. *Também pode-se escrever a equação como* $P(C \cap D) = P(C).P(D|C)$, *desde que* $P(C) > 0$, *ou ainda* $P(C \cap D) = P(D).P(C|D)$, *se* $P(D) > 0$.

Proposição 2.6.2. *Seja* A *tal que* $P(A) > 0$. *Então:*

i) $P(\varnothing|A) = 0$, $P(\Omega|A) = 1$, $0 \leq P(B|A) \leq 1$.

ii) $P((B \cup C)|A) = P(B|A) + P(C|A)$, *se* $B \cap C = \varnothing$. *Ou seja, fixado* A, *com* $P(A) > 0$, *a probabilidade condicional é uma probabilidade sobre* $\mathcal{F}$.

2.6.2 Teorema da Multiplicação

Teorema 2.6.3 (Teorema da Multiplicação)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Sejam* $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *eventos aleatórios em* $\mathcal{F}$ *tais que* $P(W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_{n-1}) > 0$. *Então:*

$$P(W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n) = P(W_1).P(W_2|W_1).P(W_3|W_1 \cap W_2) \ldots P(W_n|W_1 \cap \ldots \cap W_{n-1}).$$

2.6.3 Fórmula da Probabilidade Total

Teorema 2.6.4 (Fórmula da Probabilidade Total)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* I *um conjunto enumerável de índices. Suponha que os eventos aleatórios* $W_i, i \in I$ *produzam uma partição do espaço amostral* Ω*, ou seja:*

i)$W_i \cap W_j = \varnothing, \forall i \neq j$;

ii) $\bigcup_{i \in I} W_i = \Omega$;

iii)$P(W_i) > 0 \ \forall i$.

Dado $B \in \mathcal{F}$*, tem-se:*

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|W_i).P(W_i).$$

2.6.4 Fórmula de Bayes

Teorema 2.6.5 (Teorema de Bayes)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* I *um conjunto enumerável de índices. Suponha que os eventos aleatórios* $W_i, i \in I$ *produzam uma partição do espaço amostral* Ω*. Dado um evento aleatório* $B \in \mathcal{F}$ *tem-se para todo* $j \in I$*:*

$$P(W_j|B) = \frac{P(B|W_j).P(W_j)}{\sum_{i \in I} P(B|W_i).P(W_i)}.$$

Exemplo 2.6.6. *Numa prova há 3 possibilidades de respostas para cada pergunta e apenas uma delas está correta. Portanto, para cada pergunta, um aluno tem probabilidade de 1/3 de escolher a resposta certa se ele está adivinhando, vulgarmente chamado de "chutando" e 1 se sabe a resposta correta. Um estudante sabe 30% das respostas da prova. Se o aluno deu a resposta correta para uma das perguntas, qual é a probabilidade de que a adivinhou?*

Solução:

Sejam os eventos A onde o estudante chuta a resposta e R onde o estudante acerta a resposta correta. Tem-se:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A).P(A)}{P(R|A).P(A) + P(R|A^c).P(A^c)}$$

$$P(A|R) = \frac{\frac{1}{3}.0,7}{\frac{1}{3}.0,7 + 0,3.1}$$

$$P(A|R) = \frac{7}{16}.$$

A probabilidade que o aluno acertou a pergunta dado que ele adivinhou a alternativa correta é $\frac{7}{16}$.

2.6.5 Independência

Definição 2.6.7 (Independência)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade.*

i) Dois eventos $A \in \mathcal{F}$ *e* $B \in \mathcal{F}$ *são independentes se* $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

ii) Os eventos $A_1 \in \mathcal{F}$, ..., $A_n \in \mathcal{F}$ *são independentes se para qualquer escolha de* $k\,(2 \leq k \leq n)$ *e índices* $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$, $P(Ai_1 \cap Ai_2 \cap ... \cap Ai_k) = P(Ai_1).P(Ai_2)...P(Ai_k)$.

iii) Uma coleção infinita de eventos é independente caso toda subcoleção finita desses eventos é de eventos independentes.

Observação: Em outras palavras, diz-se que dois eventos A e B são independentes se o conhecimento da ocorrência de um deles não influencia a probabilidade de ocorrência do outro.

Proposição 2.6.8. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* $A_1 \in \mathcal{F}$, ..., $A_n \in \mathcal{F}$ *eventos independentes. Então para toda escolha de* B_j *com* $B_j = A_j$ *ou* $B_j = A_j^c$, $j =$ *1, 2, ..., n tem -se:*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i).$$

2.6.6 Independência Condicional

Definição 2.6.9 (Independência Condicional)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* $A \in \mathcal{F}$ *e* $B \in \mathcal{F}$ *são ditos condicionalmente independentes dado* $F \in \mathcal{F}$ *se*

$$P(A|B \cap F) = P(A|F), \text{ com } P(B \cap F) > 0.$$

Ou de forma equivalente:

$$P(A \cap B|F) = P(A|F).P(B|F).$$

Intuitivamente, A *e* B *são condicionalmente independentes dado* F *se, dado que* F *ocorreu, a probabilidade de* A *ocorrer não seja afetada pela informação de que* B *tenha ocorrido ou não.*

2.6.7 Teorema da Multiplicação Condicional

Teorema 2.6.10 (Teorema da Multiplicação Condicional)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Sejam* $B, W_1, W_2, \ldots, W_n$ *eventos aleatórios em* $\mathcal{F}$ *tais que* $P(W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_{n-1} \cap B) > 0$*. Então:*

$$P(W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n|B) =$$
$$P(W_1|B).P(W_2|W_1 \cap B).P(W_3|W_1 \cap W_2 \cap B) \ldots P(W_n|W_1 \cap \ldots \cap W_{n-1} \cap B).$$

2.6.8 Fórmula da Probabilidade Total Condicional

Teorema 2.6.11 (Fórmula da Probabilidade Total Condicional)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade. Seja* $\{B_n\}_{n \in I}$ *uma partição enumerável de* Ω *e* $A \in \mathcal{F}$ *e* $C \in \mathcal{F}$*. Então, se* $P(C \cap B_i) > 0$ *para todo* $i \in I$*:*

$$P(A|C) = \sum_{i \in I} P(A|C \cap B_i).P(B_i|C).$$

2.6.9 Continuidade da Probabilidade

Teorema 2.6.12 (Continuidade da Probabilidade)**.** *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *um espaço de probabilidade e* $\{B_n\}_{n \geq 1}$ *uma sequência de eventos aleatórios em* $\mathcal{F}$ *tal que* $B_n \subset B_{n+1}$ *para todo* n*. Se* $B = \lim_{n\to\infty} B_n$*, então:*

$$P(B) = \lim_{n \to \infty} P(B_n).$$

Analogamente, se $\{B_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de eventos aleatórios em $\mathcal{F}$ tal que $B_{n+1} \subset B_n$ para todo n e $B = \lim_{n\to\infty} B_n$, conclui-se que:

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

3 Modelos Probabilísticos

Um modelo probabilístico é um modelo matemático para um experimento aleatório. Basicamente, é constituído por um conjunto de resultados possíveis, uma classe de eventos aleatórios e uma medida de probabilidade.

Neste capítulo são apresentados alguns modelos probabilísticos: modelo de urnas, regra de sucessão de Laplace e modelo de retirada em urnas sequenciais.

3.1 Modelo de Urnas

Considere uma urna contendo $g + r$ bolas das quais g ($g \geq 1$) são bolas verdes e r ($r \geq 1$) são bolas vermelhas. As bolas são retiradas uma a uma da urna ao acaso e com reposição.

Sejam os eventos:

G_i - "sair bola verde na i-ésima retirada", i = 1, 2, 3, ...

R_i - "sair bola vermelha na i-ésima retirada", i = 1, 2, 3, ...

Teorema 3.1.1. *Ao realizar-se n retiradas, a probabilidade de se retirar somente bolas verdes é*

$$\left(\frac{g}{g+r}\right)^n.$$

Demonstração. Usando o fato que G_1, G_2, ..., G_n são independentes, segue:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(G_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{g}{g+r}\right) = \left(\frac{g}{g+r}\right)^n.$$

□

Teorema 3.1.2. *Ao realizar-se n retiradas, a probabilidade de se retirar pelo menos uma bola verde é*

$$1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^n.$$

Demonstração. O evento onde sai pelo menos uma bola verde tem como complementar o evento onde saem somente bolas vermelhas. Usando a lei de DeMorgan e a independência dos eventos R_1, R_2, ..., R_n segue:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) = 1 - P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)^c\right] = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(R_i).$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r}{g+r}\right) = 1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^n.$$

□

Teorema 3.1.3. *Suponha que bolas sejam retiradas indefinidamente. Então, a probabilidade de sair somente bolas verdes é 0.*

Demonstração. Note que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \supset \bigcap_{i=1}^{n+1} G_i.$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \downarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Pelo Teorema da Continuidade da Probabilidade (Teorema 2.6.12), segue que:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right).$$

Aplicando o Teorema 3.1.1, tem-se:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g}{g+r}\right)^n = 0.$$

□

Teorema 3.1.4. *Suponha que bolas sejam retiradas indefinidamente. Então a probabilidade de sair pelo menos uma bola verde é 1.*

Demonstração. Note que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+1} G_i.$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_i \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Logo, usando o Teorema da Continuidade da Probabilidade (Teorema 2.6.12), segue que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right).$$

Pelo Teorema 3.1.2, tem-se:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^n\right] = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{g+r}\right)^n = 1.$$

□

Teorema 3.1.5. *Suponha que bolas sejam retiradas indefinidamente. Então, a probabilidade de sair uma série de n bolas verdes consecutivas antes de uma sequência de m bolas vermelhas consecutivas é:*

$$\frac{\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}\left(1 - \left(\frac{g}{g+r}\right)^n\right)}{\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1} + \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1} - \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}}.$$

Demonstração. Seja W o evento em que uma série de n bolas verdes consecutivas ocorra antes de uma série de m bolas vermelhas consecutivas. Para obter *P(W)*, inicialmente condiciona-se no resultado da primeira extração. Sendo assim, tem-se:

$$P(W) = P(G_1)P(W|G_1) + P(R_1)P(W|R_1).$$

No entanto, se a primeira retirada resultar em bola verde, uma das maneiras pelas quais pode-se obter uma série de n bolas verdes consecutivas antes de uma série de m bolas vermelhas consecutivas seria obter bolas verdes nas próximas n - *1* retiradas seguintes. Condiciona-se então na ocorrência ou não de tal série. Defina F como o evento onde as retiradas de *2 a* n resultam em bola verde, isto é:

$$F = \bigcap_{i=2}^{n} G_i.$$

Então, pela fórmula da Probabilidade Total Condicional (Teorema 2.6.11) segue:

$$P(W|G_1) = P(W|F \cap G_1)P(F|G_1) + P(W|F^c \cap G_1)P(F^c|G_1).$$

Além disso,

$$P(W|F \cap G_1) = P\left(W|\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) = 1.$$

Além disso, se o evento:

$$P(F) = F^c \cap G_1 = \left(\bigcap_{i=2}^{n} G_i\right)^c \cap G_1$$

ocorrer, então a primeira extração resultaria em bola verde, mas haveria alguma bola vermelha durante as próximas *n - 1* extrações. Contudo, quando sair essa bola vermelha, ela vai fazer com que todas as bolas verdes anteriores sejam desconsideradas, e a situação seria como se fosse iniciado de novo com uma bola vermelha. Assim:

$$P(W|F^c \cap G_1) = P(W|G_1^c).$$

Como a independência das extrações implica a independência de

$$F = \bigcap_{i=2}^{n} G_i$$

e G_1, e como:

$$P(F) = P\left(\bigcap_{i=2}^{n} G_i\right) = \prod_{i=2}^{n} P(G_i) = \prod_{i=2}^{n}\left(\frac{g}{g+r}\right) = \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}.$$

.

Então:

$$P(W|G_1) = \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1} + \left(1 - \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\right) P(W|G_1^c).$$

De forma análoga, pode-se obter uma expressão para $P(W|G_1^c)$. Escreva E como o evento em que todas as extrações de *2 a m* resultam em bolas vermelhas. Isto é,

$$E = \bigcap_{i=2}^{m} R_i = \bigcap_{i=2}^{m} G_i^c.$$

Então:

$$P(W|G_1^c) = P(W|E \cap G_1^c)P(E|G_1^c) + P(W|E^c \cap G_1^c)P(E^c|G_1^c).$$

Note que:

$$E \cap G_1^c = \left(\bigcap_{i=2}^{m} G_i^c\right) \cap G_1^c = \bigcap_{i=1}^{m} G_i^c = \bigcap_{i=1}^{m} R_i.$$

É o evento em que as primeiras m extrações resultam em bolas vermelhas, de forma que $P(W|E \cap G_1^c) = 0$. Além disso, se $E^c \cap G_1^c$ ocorrer, a primeira extração será bola vermelha, mas ocorrerá pelo menos uma bola verde nas *m - 1* extrações seguintes. Esta bola verde faz com que todas as bolas vermelhas anteriores sejam desconsideradas. Assim,

$$P(W|E^c \cap G_1^c) = P(W|\left(\bigcap_{i=2}^{m} R_i\right)^c \cap R_1) = P(W|G_1).$$

Como,

$$P(W|E^c \cap G_1^c) = P(E^c) = 1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1},$$

obtém-se

$$P(W|E^c \cap G_1^c) = \left[1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}\right] P(W|G_1).$$

Resolvendo as equações tem-se:

$$P(W|G_1) = \frac{\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}}{\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1} + \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1} - \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}}.$$

e

$$P(W|G_1^c) = \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}\right]\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}}{\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1} + \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1} - \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}}.$$

Logo,

$$P(W) = \left(\frac{g}{g+r}\right)P(W|G_1) + \left(\frac{r}{g+r}\right)P(W|G_1^c).$$

$$= \frac{\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n} + \left(\frac{r}{g+r}\right)\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\left[1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}\right]}{\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1} + \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1} - \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}}.$$

$$= \frac{\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\left[1 - \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m}\right]}{\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1} + \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1} - \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}}.$$

Observação: Pela simetria do problema, a probabilidade de se obter uma série de m bolas vermelhas antes de uma série de n bolas verdes será:

$$= \frac{\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}\left[1 - \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n}\right]}{\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1} + \left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1} - \left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1}\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}}.$$

□

3.2 Regra de Sucessão de Laplace

Considere uma sequência de urnas numeradas por 0, 1, 2, ..., k. Na urna de número j há j bolas verdes e k - j bolas vermelhas. Uma urna é sorteada aleatoriamente e desta, bolas são retiradas sequencialmente (uma a uma) ao acaso e com reposição.

Sejam os eventos:

U_i - "a i-ésima urna é a selecionada", $i = 0, 1, 2, ..., k$.

G_n - "a n-ésima bola selecionada é verde", $n = 1, 2, 3, ...$

Teorema 3.2.1. *Os eventos G_1 e G_2 não são independentes.*

Demonstração. Pela Fórmula da Probabilidade Total (Teorema 2.6.4), segue:

$$P(G_1) = \sum_{j=0}^{k} P(U_j)P(G_1|U_j).$$

$$P(G_1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{j}{k} = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k} j = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} j.$$

$$P(G_1) = \frac{1}{k(k+1)} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$P(G_2) = \sum_{j=0}^{k} P(U_j)P(G_2|U_j).$$

Isto é,

$$P(G_2|G_1 \cap U_j) = P(G_2 \cap U_j) = \frac{j}{k}.$$

$$P(G_2) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{j}{k} = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k} j = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^{k} j.$$

$$P(G_2) = \frac{1}{k(k+1)} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$P(G_1 \cap G_2) = \sum_{j=0}^{k} P(U_j) P(G_1 \cap G_2 | U_j).$$

Mas,

$$P(G_1 \cap G_2 | U_j) = P(G_1 | U_j) P(G_2 | G_1 \cap U_j).$$

$$P(G_1 \cap G_2 | U_j) = \frac{j}{k} \cdot \frac{j}{k},\ pois,$$

G_2 e G_1 são condicionalmente independentes dado U_j. Isto é,

$$P(G_2 | G_1 \cap U_j) = P(G_2 | U_j) = \frac{j}{k}.$$

Prosseguindo:

$$P(G_1 \cap G_2 | U_j) = \frac{j^2}{k^2}.$$

$$P(G_1 \cap G_2) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{j^2}{k^2} = \frac{1}{k^2(k+1)} \sum_{j=0}^{k} j^2 = \frac{1}{k^2(k+1)} \sum_{j=1}^{k} j^2.$$

Mas,

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

$$P(G_1 \cap G_2) = \frac{1}{k^2(k+1)} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{2k+1}{6k}.$$

Então, G_1 e G_2 não são independentes. De fato,

$$P(G_1 \cap G_2) = \frac{2k+1}{6k} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(G_1)P(G_2).$$

$\square$

Teorema 3.2.2. *A probabilidade da (n+1)-ésima bola sorteada ser verde dado que as n primeiras foram verdes é:*

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^{n}}.$$

Demonstração. Escreva o evento F_n em que as n primeiras retiradas resultam em bola verde. Isto é,

$$F_n = \bigcap_{j=1}^{n} G_j.$$

Pela fórmula da Probabilidade Total Condicional (Teorema 2.6.11) a probabilidade desejada pode ser escrita:

$$P(G_{n+1}|F_n) = \sum_{i=0}^{k} P\left(G_{n+1}|F_n \cap U_i\right) P\left(U_i|F_n\right).$$

Assim que a i-ésima urna for selecionada os resultados serão condicionalmente independentes. Isto é,

$$P(G_{n+1}|F_n \cap U_i) = P\left(G_{n+1}|\bigcap_{j=1}^{n} G_j \cap U_i\right) = P\left(G_{n+1}|U_i\right) = \frac{i}{k}.$$

Além disso,

$$P(U_i|F_n) = \frac{P(U_i \cap F_n)}{P(F_n)}.$$

Mas,

$$P(U_i \cap F_n) = P(F_n|U_i)P(U_i) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} G_j|U_i\right) P(U_i).$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{n} P(G_j|U_i)\right] P(U_i) = \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{i}{k}\right] \frac{1}{(k+1)} = \left(\frac{i}{k}\right)^n \cdot \frac{1}{(k+1)}.$$

e

$$P(F_n) = \sum_{j=0}^{k} P(F_n|U_j)P(U_j) = \sum_{j=0}^{k} P\left(\bigcap_{l=1}^{n} G_l|U_j\right) P(U_j).$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[\prod_{l=1}^{n} P(G_l|U_j)P(U_j)\right] P(U_j) = \sum_{j=0}^{k} \left[\prod_{l=1}^{n} \frac{j}{k}\right] \cdot \frac{1}{(k+1)}.$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^n \cdot \frac{1}{(k+1)}.$$

Logo,

$$P(U_i|F_n) = \frac{\left(\frac{i}{k}\right)^n \cdot \frac{1}{(k+1)}}{\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^n \cdot \frac{1}{(k+1)}}.$$

$$= \frac{\left(\frac{i}{k}\right)^n}{\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^n}.$$

Dessa forma,

$$P(G_{n+1}|F_n) = \frac{\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{k}\right) \left(\frac{i}{k}\right)^n}{\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^n}.$$

$$P(G_{n+1}|F_n) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^n} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n+1}}{1}.$$

Finalmente, pode-se concluir que:

$$P(G_{n+1}|F_n) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i}{k}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j}{k}\right)^{n}}.$$

□

Teorema 3.2.3. *Para k grande, a probabilidade da (n + 1)-ésima bola sorteada ser verde dado que as n-primeiras foram verdes é, aproximadamente,* $\frac{n+1}{n+2}$.

Demonstração. Se k é grande:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} \approx \int_0^1 x^{n+1}dx = \left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^1 = \frac{1}{n+2}$$

e

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^{n} \approx \int_0^1 x^{n}dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Logo, para k grande:

$$P(G_{n+1}|F_n) \approx \frac{n+1}{n+2}.$$

$\square$

3.3 Retiradas em Urnas Sequenciais

Considere uma sequência de urnas numeradas de acordo com o conjunto dos números naturais 1, 2, 3, ..., de modo que a urna de número i possui g_i bolas verdes e r_i bolas vermelhas. Uma bola é extraída de cada urna.

3.3.1 Cenário I

Suponha que

$$g_i = \begin{cases} i^2, \text{ se } i \leqslant k, \\ i^2 - k^2, \text{ se } i > k. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 0, \text{ se } i \leqslant k, \\ k^2, \text{ se } i > k. \end{cases}$$

Para urnas numeradas com $n \leqslant k$ (inteiro positivo fixado) há somente bolas verdes. Para cada urna numerada com n > k, o total de bolas é uma função quadrática do número da urna e o número de bolas vermelhas é fixado igual a k^2.

Teorema 3.3.1. *A probabilidade de sair apenas bolas verdes até a urna de número n é:*

$$\frac{(k!)^2(n+1)(n+2)...(n+k)}{(2k)!n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))} =$$

$$= \frac{(k!)^2(n-k)!(n+k)!}{(2k)!(n!)^2}.$$

Demonstração. Sejam os eventos:

V_n: "A extração na urna n resulta em bola verde".

A_n: "Sair apenas bolas verdes até a urna de número n".

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Considerando a independência dos eventos, tem-se:

$$P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(V_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{g_i}{g_i + r_i}.$$

Se $n \leq k$:

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(V_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{i^2}{i^2} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1.$$

Se $n > k$:

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(V_i) = \prod_{i=1}^{k} P(V_i) \prod_{i=k+1}^{n} P(V_i).$$

$$P(A_n) = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i^2}{i^2}\right) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i^2 - k^2}{i^2} = 1 \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i^2 - k^2}{i^2} = \prod_{i=k+1}^{n} \frac{(i-k)(i+k)}{i^2}.$$

$$P(A_n) = \prod_{i=k+1}^{n} \frac{(i-k)(i+k)}{i^2} = \frac{\prod_{i=k+1}^{n}(i-k)\prod_{i=k+1}^{n}(i+k)}{(\prod_{i=k+1}^{n} i)^2} = \frac{(k!)^2(n-k)!(n+k)!}{(2k)!(n!)^2},$$

□

Teorema 3.3.2. *A probabilidade de sair apenas bolas verdes em todas as urnas é:*

$$\frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

Demonstração. Seja o evento:

A: "Sair bolas verdes em todas as urnas".

Tem-se que:

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \supseteq \bigcap_{i=1}^{n+1} V_i = A_{n+1}.$$

e

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \downarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = A.$$

Pelo Teorema da Continuidade da Probabilidade (Teorema 2.6.12), segue que:

$$P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Desta forma, segue-se:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{(k!)^2(n-k)!(n+k)!}{(2k)!(n!)^2} = \frac{(k!)^2}{(2k)!} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-k)!(n+k)!}{(n!)^2}.$$

$$P(A) = \frac{(k!)^2}{(2k)!} \cdot 1$$

$$P(A) = \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

□

3.3.2 Cenário II

Suponha que

$$g_i = \begin{cases} i; \text{ se } i \leqslant k, \\ i-k; \text{ se } i > k. \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} 0; \text{ se } i \leqslant k, \\ k; \text{ se } i > k. \end{cases}$$

Para urnas numeradas com $n \leqslant k$ (inteiros positivo fixado) há somente bolas verdes. Para cada urna numerada com n > k, o total de bolas é uma função linear do número da urna e o número de bolas vermelhas é fixado e igual a k.

Teorema 3.3.3. *A probabilidade de sair apenas bolas verdes até a urna de número n é:*

$$\frac{k!(n-k)!}{(n+k)!}.$$

Demonstração. Sejam os eventos:

V_n: "A extração na urna n resulta em bola verde".

A_n: "Sair apenas bolas verdes até a urna de número n".

Então:

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

Considerando a independência dos eventos, segue:

$$P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(V_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{g_i}{g_i + r_i}.$$

Se $n \leq k$:

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(V_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1.$$

Se $n > k$:

$$P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(V_i) = \prod_{i=1}^{k} P(V_i) \prod_{i=k+1}^{n} P(V_i).$$

$$P(A_n) = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i}\right) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i-k}{i} = 1 \cdot \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i-k}{i} = \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i-k}{i}.$$

$$P(A_n) = \prod_{i=k+1}^{n} \frac{(i-k)}{i} = \frac{\prod_{i=k+1}^{n}(i-k)}{\prod_{i=k+1}^{n} i} = \frac{k!(n-k)!}{(n+k)!},$$

□

Teorema 3.3.4. *A probabilidade de sair apenas bolas verdes em todas as urnas é 0.*

Demonstração. Seja o evento:

A: "Sair bolas verdes em todas as urnas".

Tem-se que:

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \supseteq \bigcap_{i=1}^{n+1} V_i = A_{n+1}.$$

e

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \downarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = A.$$

Pelo Teorema da Continuidade da Probabilidade (Teorema 2.6.12), segue:

$$P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Desta forma, segue-se:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{k!(n-k)!}{(n+k)!} = k! \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n-k)!}{(n+k)!}.$$

Observação: Quando n tende ao infinito, o cálculo da expressão matemática tende à zero, portanto:

$$P(A) = k! \cdot 0.$$

$$P(A) = 0.$$

□

3.4 Uso da Teoria da Probabilidade no cálculo de Séries e Produtórios.

Teorema 3.4.1. *Suponha que* $a_i = \dfrac{g_i}{r_i + g_i}$, $0 \leqslant a_i \leqslant 1$.

Então:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right] + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) = 1.$$

Demonstração. Seja A_i o evento sair bola verde na urna i, com $i = 1, 2, 3, \ldots$. Defina o evento B onde saem apenas bolas vermelhas em todas as urnas. Então:

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

Para obter *P(B)* primeiro defina:

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c.$$

B_n é o evento onde saem apenas bolas vermelhas nas urnas de número $1, 2, ..., n$. Da independência, segue:

$$P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)].$$

$$P(B_n) = \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)] = \prod_{i=1}^{n} [1 - a_i].$$

Mas,

$$B_{n+1} \supseteq B_n \ e \ B_n \downarrow B.$$

Pelo Teorema da Continuidade da Probabilidade (Teorema 2.6.12), segue que:

$$P(B) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} [1 - a_i] = \prod_{i=1}^{\infty} [1 - a_i].$$

$$P(B) = \prod_{i=1}^{\infty} [1 - a_i].$$

Por outro lado, defina C_i como o evento onde sai bola verde na urna i e vermelha nas urnas *1, 2, ..., i - 1*.

$$B^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Assim:

$$P(B^c) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right).$$

C_1, C_2, C_3, ... são eventos 2 a 2 disjuntos. Logo, pelo Axioma 3 de Kolmogorov:

$$P(B^c) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i).$$

Mas,

$$C_i = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c\right) \cap A_i.$$

Prosseguindo, tem-se que:

$$P(C_i) = P\left((\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c) \cap A_i)\right) = \left[\prod_{j=1}^{i-1} P(A_j^c)\right] P(A_i).$$

$$P(C_i) = \left[\prod_{j=1}^{i-1} [1 - P(A_j)]\right] P(A_i) = \left[\prod_{j=1}^{i-1} [1 - a_j]\right] a_i.$$

Logo, pela independência das extrações:

$$P(B^c) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - a_j)\right].$$

Mas,

$$P(B^c) + P(B) = 1.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i\prod_{j=1}^{i-1}(1-a_j)\right]+\prod_{i=1}^{\infty}(1-a_i)=1.$$

□

4 Probabilidade no Ensino Médio

4.1 Parâmetros Curriculares

Os PCN´s (Parâmetros Curriculares Nacionais) são um tipo de documento que norteiam a grade e os currículos oficiais. Os conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória para a Educação Básica foram inseridos no Brasil em 1997. Outros países obtiveram a implementação dos PCN´s acerca deste assunto mais precocemente. A Itália e a França em 1985, os Estados Unidos em 1988, o Japão em 1989 e Espanha e Portugal em 1991.

Outro documento que norteia o ensino de probabilidade no Brasil é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que foi efetivada apenas em 2018 no Brasil. A BNCC designa quais são as habilidades mínimas necessárias que os estudantes de probabilidade necessitam alcançar sobre o estudo, atribuições e aptidões que sejam satisfatoriamente desenvolvidas no processo de aprendizagem.

O ensino de análise combinatória e probabilidade é iniciado já a partir do ensino fundamental. E tanto o ensino de análise combinatória como da probabilidade são intensamente trabalhados no segundo ano do ensino médio. Pode-se observar que estes conteúdos são dos mais "temidos" pelos alunos exigindo uma base solidificada de conceitos, aplicabilidade e interdisciplinaridade entre disciplinas.

Neste capítulo são apresentados modelos de aulas com o objetivo de auxiliar o professor no ensino destes conteúdos. As dinâmicas foram construídas visando despertar o interesse do aluno para esta área do conhecimento.

4.2 Aplicações ao Ensino Médio

Ao longo deste trabalho teve-se o intuito de apresentar os conceitos básicos de probabilidade, de alguns modelos probabilísticos discretos e parte de suas aplicações. Diante deste contexto, nesta seção, são apresentados quatro modelos de atividades em sala de aula (nomeados em sequência por: Proposta de Atividade 01, Proposta de Atividade 02, Proposta de Atividade 03 e Proposta de Atividade 04) que podem ser apresentados no Ensino Médio.

4.3 Proposta de Atividade 01

PÚBLICO-ALVO

Alunos do segundo ano do Ensino Médio.

PROPOSTA: *Há 05 urnas com bolas (as bolas constantes em cada urna são idênticas entre si exceto pela sua cor). Nomeie em sequência as urnas por: Urna 0, Urna 01, Urna 02, Urna 03 e Urna 04. A distribuição das bolas com seus respectivos quantitativos e cores seguem a seguir:*

Urna 0 - 1 bola verde.
Urna 01 - 1 bola verde e 1 bola vermelha.
Urna 02 - 1 bola verde, 1 bola vermelha e 1 bola preta.
Urna 03 - 1 bola verde, 1 bola vermelha, 1 bola preta e 1 bola branca.
Urna 04 - 1 bola verde, 1 bola vermelha, 1 bola preta, 1 bola branca e 1 bola azul.

Para facilitar o bom desenvolvimento desta proposta de atividade, para fins didáticos, represente os eventos: *retirar bola verde* pela letra G, *retirar bola vermelha* pela letra R, *retirar bola preta* pela letra B, *retirar bola branca* pela letra W e *retirar bola azul* pela letra Z. Mais adiante é explicado o significado da palavra "evento".

Nesta proposta de atividade serão observados cinco experimentos distintos:

Experimento 01 - Sortear uma bola na *urna 0*.
Experimento 02 - Sortear uma bola na *urna 01*.
Experimento 03 - Sortear uma bola na *urna 02*.

Experimento 04 - Sortear uma bola na *urna 03*.
Experimento 05 - Sortear uma bola na *urna 04*.

OBJETIVOS

Ensinar o aluno diferenciar experimentos aleatórios de experimentos determinísticos. Prover a base para formação do espaço de probabilidade o que significa ensinar ao aluno como definir o espaço amostral, identificar os eventos e atribuir probabilidade.

METODOLOGIA

Diante do exposto, analisa-se os experimentos separadamente.

1º Momento - Experimento 01 - O Experimento 01 consiste em retirar uma bola da *Urna 0*. Se observar esta urna, facilmente se verifica a possibilidade de retirar apenas uma única bola, que neste caso refere-se à uma bola de cor verde, ou seja, um único resultado possível: *sair bola verde*. O Experimento 01 é um exemplo de *Experimento Determinístico*. Para facilitar o entendimento deste conceito é apresentado seu significado e o conceito de *Experimentos Aleatórios*.

Experimentos Determinísticos: São experimentos em que os seus resultados podem ser determinados antes de acontecer. Um exemplo desta situação é a que ocorre no *Experimento 01* em que antes que se realize a retirada de uma bola da *Urna 0* já se sabe que o único resultado possível é a retirada da única bola verde.

Experimentos Aleatórios: São experimentos que quando repetidos nas mesmas condições podem levar a resultados diferentes. Um exemplo desta situação é a que ocorre no *Experimento 02* em que antes que se realize a retirada de uma bola não temos a certeza se será retirada a bola verde ou a bola vermelha. Pode-se saber as possibilidades de resultados: *sair bola verde ou sair bola vermelha* mas não se sabe com exatidão qual bola será realmente a retirada.

2º Momento - Experimento 02 - O Experimento 02 consiste em retirar uma bola da *Urna 1*. Ao se observar esta urna, facilmente verifica-se a possibilidade de retirar bola *verde ou* retirar bola *vermelha*, ou seja, tem-se dois resultados possíveis. O Experimento 02 é um exemplo de *Experimento Aleatório*.

Em relação aos *Experimentos Aleatórios*, pode-se citar outro exemplo para simplificar o entendimento de alguns conceitos importantes ligados à probabilidade. No lançamento de um dado comum não-viciado com faces numeradas de um à seis, existem seis resultados possíveis neste lançamento. Ao conjunto de resultados possíveis deste lançamento dá-se o nome de *Espaço Amostral*, este é o conjunto de todos os resultados possíveis para um experimento aleatório, sendo usualmente representado pela letra grega Ω. *Evento* é qualquer subconjunto de um *Espaço Amostral*, sendo usualmente representado por letra maiúscula, como exemplo, evento C. O *Evento* pode conter nenhum elemento (conjunto vazio simbolizado por $\varnothing$), parte ou todo o *espaço amostral*. Um retrato do que se acabou de expressar pode ser exemplificado pelo seguinte experimento aleatório: Lançar um dado e anotar seus resultados. Sabendo que o dado tem seis faces são seis possibilidades de resultados para um lançamento, então tem-se $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Diante do exposto, pode-se concluir que o espaço amostral referente ao *Experimento 01* é $\Omega = \{G\}$ e $n(\Omega) = 1$ e o espaço amostral referente ao *Experimento 02* é $\Omega = \{G, R\}$ e $n(\Omega) = 2$.

Outro conceito importante para ser comentado refere-se ao "conjunto de eventos", que também pode ser nomeado como *conjunto das partes*. No experimento em questão, considere o *conjunto das partes de* $\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{P}(\Omega)$ é o conjunto que contém *todos* os subconjuntos do espaço amostral Ω, que inclui o conjunto vazio $\varnothing$ e o próprio conjunto Ω. Desta forma, em relação ao *Experimento 02*, $\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{G\}, \{R\}, \{\Omega\}\}$, $n(\mathcal{P}(\Omega))$ $= 4$.

Prosseguindo com algumas definições em probabilidade, é importante salientar sobre o conceito central que enuncia o exposto. O que é *probabilidade*? Pode-se descrever que o conceito de *probabilidade* na definição clássica pode ser entendido por: *Razão entre o número de "casos favoráveis" e o número de "casos possíveis" entre determinados experimentos.*

De acordo com a Definição e Propriedades de uma Probabilidade (Proposição 2.5.1), segue que:

1) $P(\Omega) = 1$.
2) $P(\varnothing) = 0$.
3) Para todo evento C, $0 \leq P(C) \leq 1$.

Como há apenas duas possibilidades de retirada de bola da *Urna 1* a probabilidade de se retirar bola verde será $P(Verde) = \frac{1}{2}$. De forma semelhante, a probabilidade de se retirar bola vermelha será $P(Vermelha) = \frac{1}{2}$.

Observa-se que no *Experimento 02*:

$n(\Omega) = 2$.

$n(\mathcal{P}(\Omega))$ =4.

$P(Verde) + P(Vermelha) = 1$.

3º Momento - Experimento 03 - O Experimento 03 consiste em retirar uma bola da *Urna 2*. Ao se observar esta urna, facilmente verifica-se a possibilidade de retirar bola *verde*, *ou* retirar bola *vermelha*, *ou* retirar bola *preta*, isto significa que há três resultados possíveis. O Experimento 03 também é um exemplo de *Experimento Aleatório*. O espaço amostral referente ao *Experimento 03* é $\Omega = \{verde, vermelha, preta\}$ ou $\Omega = \{G, R, B\}$. Assim, $n(\Omega) = 3$. Em relação a classe de eventos aleatórios tem-se seguintes eventos: $\mathcal{P}(\Omega)$ =$\{\varnothing, \{G\}, \{R\}, \{B\}, \{G, R\}, \{G, B\}, \{R, B\}, \Omega\}$, assim, $n(\mathcal{P}(\Omega)) = 8$.

No que segue será cometido o seguinte abuso de notação $P(\{B\}) = P(B)$, $P(\{B, A\}) = P(B, A)$ para não carregar a notação.

De acordo com a classe de eventos aleatórios o professor realiza a leitura de cada evento, expondo seus significados e respectivos valores de probabilidade:

Probabilidade de retirar nenhuma bola: $P(ConjuntoVazio) = P(\varnothing) = 0$.

Probabilidade de retirar bola verde: $P(Verde) = P(G) = \frac{1}{3}$.

Probabilidade de retirar bola vermelha: $P(Vermelha) = P(R) = \frac{1}{3}$.

Probabilidade de retirar bola preta: $P(Preta) = P(B) = \frac{1}{3}$.

Probabilidade de retirar bola verde ou vermelha: $P(Verde, Vermelha) = P(G, R) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Probabilidade de retirar bola verde ou preta: $P(Verde, Preta) = P(G, B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Probabilidade de retirar bola vermelha ou preta: $P(Vermelha, Preta) = P(R, B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Probabilidade do evento certo: $P(G, R, B) = 1$.

Pode-se observar também que:

$P(G) = P(R) = P(B) = \frac{1}{3}$.

$P(G, R) = P(G, B) = P(R, B) = \frac{2}{3}$.

$P(G) + P(R) + P(B) = 1.$

4º Momento - Experimento 04 - O professor solicita aos seus alunos para que estes obtenham o espaço amostral, conjunto dos eventos e probabilidades em relação ao *Experimento 04*. Após um tempo o professor realiza a correção.

O Experimento 04 consiste em retirar uma bola da *Urna 3*. Ao se observar esta urna, facilmente verifica-se a possibilidade de se retirar bola *verde*, *ou* retirar bola *vermelha*, *ou* retirar bola *preta*, *ou* retirar bola *branca*, isto representa que tem-se quatro resultados possíveis. O experimento quatro é um exemplo de *Experimento Aleatório*. O espaço amostral referente ao *Experimento 04* é $\Omega = \{verde, vermelha, preta, branca\}$ ou $\Omega = \{G, R, B, W\}$. Assim, $n(\Omega) = 4$. Em relação a classe de eventos aleatórios tem-se os seguintes eventos:

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\varnothing, \{G\}, \{R\}, \{B\}, \{W\}, \{G, R\}, \{G, B\}, \{G, W\}, \{R, B\}, \{B, W\}, \{R, W\}, \{G, R, B\}, \{G, R, W\}, \{G, B, W\}, \{R, W, B\}, \Omega\}$.

Portanto, $n(\mathcal{P}(\Omega))$ =16.

No que segue será cometido o seguinte abuso de notação $P(\{B\}) = P(B)$, $P(\{B, A\}) = P(B, A)$ para não carregar a notação.

De maneira similar no *Experimento 04*, são apresentados os valores das probabilidades:

Probabilidade de retirar nenhuma bola: $P(Conjunto Vazio) = P(\varnothing) = 0$.

Probabilidade de retirar bola verde: $P(Verde) = P(G) = \frac{1}{4}$.

Probabilidade de retirar bola vermelha: $P(Vermelha) = P(R) = \frac{1}{4}$.

Probabilidade de retirar bola preta: $P(Preta) = P(B) = \frac{1}{4}$.

Probabilidade de retirar bola branca: $P(Branca) = P(W) = \frac{1}{4}$.

Probabilidade de retirar bola verde ou vermelha: $P(Verde, Vermelha) = P(G, R) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Probabilidade de retirar bola verde ou preta: $P(Verde, Preta) = P(G, B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Probabilidade de retirar bola verde ou branca: $P(Verde, Branca) = P(G, W) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Probabilidade de retirar bola vermelha ou preta: $P(Vermelha, Preta) = P(R, B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Probabilidade de retirar bola vermelha ou branca: $P(Vermelha, Branca) = P(R, W) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Probabilidade de retirar bola preta ou branca: $P(Preta, Branca) = P(B, W) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

De maneira mais simplificada:

$P(Verde, Vermelha, Preta) = P(G, R, B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$P(Verde, Vermelha, Branca) = P(G, R, W) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$P(Verde, Preta, Branca) = P(G, B, W) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$P(Vermelha, Preta, Branca) = P(R, B, W) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Probabilidade do evento certo: $P(G, R, B, W) = 1$.

5º Momento - Montar Tabela - O professor monta uma tabela relacionando os experimentos com os seus respectivos resultados possíveis e eventos. Segue abaixo a Figura 7.

Figura 7: Experimento x resultado x eventos

Experimento	Nº de resultados possíveis	Nº de eventos
01	1	2
02	2	4
03	3	8
04	4	16

6º Momento - Experimento 05 - O Experimento 05 consiste em retirar uma bola da *Urna 4*. Ao se observar esta urna, facilmente verifica-se a possibilidade de retirar bola *verde*, *ou* retirar bola *vermelha*, *ou* retirar bola *preta*, *ou* retirar bola *branca*, *ou* retirar bola *azul*, isto representa que tem-se cinco resultados possíveis, portanto, $n(\Omega) = 5$. O Experimento 05 é um exemplo de *Experimento Aleatório.*

Neste momento o professor descreve o espaço amostral referente ao *Experimento 05* que é o seguinte: $\Omega = \{verde, vermelha, preta, branca, azul\}$, ou seja, $\Omega = \{G, R, B, W, Z\}$. Assim, $n(\Omega) = 5$.

Após a descrição do espaço amostral o professor pede aos seus alunos que respondam os seguintes itens:

a) Quantos eventos há no *Experimento 05*?

b) Cite um evento que tenha probabilidade $\frac{3}{5}$.

c) Cite quantos eventos possuem probabilidade $\frac{2}{5}$ no *Experimento 05.*

Após um tempo o professor corrige a atividade.

Correção - Experimento 05:

Em relação a classe de eventos aleatórios tem-se os seguintes eventos:

$\mathcal{P}(\Omega)$= $\{\varnothing, \{G\}, \{R\}, \{B\}, \{W\}, \{Z\}, \{G,R\}, \{G,B\}, \{G,W\}, \{G,Z\}, \{R,B\},$ $\{R,W\}, \{R,Z\}, \{B,W\}, \{B,Z\}, \{W,Z\}, \{G,R,B\}, \{G,R,W\}, \{G,R,Z\}, \{G,B,W\},$ $\{G,B,Z\}, \{G,W,Z\}, \{R,B,W\}, \{R,B,Z\}, \{R,W,Z\}, \{B,W,Z\}, \{G,R,B,W\},$ $\{G,R,B,Z\}, \{R,B,W,Z\}, \{G,R,W,Z\}, \{G,B,W,Z\}, \Omega\}$.

Portanto, $n(\mathcal{P}(\Omega)) = 32$.

Desta forma, respondendo ao item a, há 32 eventos no *experimento 05.*

Para responder os itens b e c, note que $P(\varnothing) = 0$ e $P(G) = P(R) = P(B) = P(W)$ $= P(Z) = \frac{1}{5}$.

Em resposta ao item b basta utilizar qualquer evento que possui três elementos. Por exemplo, $\{G, R, B\}$, sair bola verde, vermelha ou preta.

Em resposta ao item c, basta observar quantos eventos são compostos por dois elementos Como o número de subconjuntos de dois elementos escolhidos dentre cinco é C_5^2, segue que há 10 eventos com probabilidade $\frac{2}{5}$.

7º Momento - O professor explica aos seus alunos que se o espaço amostral tem n elementos, ou seja, $n(\Omega) = n$, então há $n(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$ eventos aleatórios possíveis, e que se os resultados forem equiprováveis (isto é, possuem a mesma probabilidade de ocorrência), cada resultado terá probabilidade de $\frac{1}{n}$.

8º Momento - O professor propõe aos alunos um experimento com uma urna contendo 20 bolas que se diferem apenas pela cor. Uma bola será sorteada. Aos alunos é solicitado que respondam as seguintes perguntas:

d) Quantos eventos aleatórios há neste caso?

e) Quantos eventos tem probabilidade $\frac{3}{20}$?

Após um tempo o professor corrige a atividade.

Resolução:

d) De acordo com o enunciado, a urna possui 20 bolas que se diferem apenas pela cor, ou seja, $n(\Omega) = 20$. Para se saber a quantidade de eventos aleatórios neste caso basta calcular $n(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$. Assim, $n(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{20} = 1.048.576$ eventos aleatórios.

e) De acordo com o enunciado, a urna possui 20 bolas que se diferem apenas pela cor, ou seja, n = 20. Para se saber a quantidade de eventos que possuem probabilidade $\frac{3}{20}$ neste caso basta obter o total de combinações possíveis das 20 bolas tomadas 3 a 3. Isso segue do fato que cada resultado tem probabilidade $\frac{1}{20}$. Logo,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \rightarrow C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3! \cdot 17!} = 1.140\, eventos.$$

Tem-se, portanto, 1.140 eventos com probabilidade $\frac{3}{20}$.

Após a resolução das letras *d* e *e* pelos alunos o professor encerra a aula fazendo as correções dos itens.

DURAÇÃO

Para a finalização da atividade, serão necessárias 02 horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar ambientado com os conceitos de probabilidade e combinatória.

CONTEÚDOS

Probabilidade.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Quadro, giz, folhas de papel A4, lápis, borracha, urna, 05 bolas idênticas que se diferem apenas pela cor.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua dedicação e empenho ao longo da proposta de atividade e análise dos resultados.

4.4 Proposta de Atividade 02

PÚBLICO-ALVO

Alunos do segundo ano do Ensino Médio.

PROPOSTA: *O professor propõe aos seus alunos a realização de uma dinâmica. Esta dinâmica consiste em um processo no qual na etapa final o professor tenta adivinhar a resposta que os alunos têm em mente.*

OBJETIVOS

Levar o aluno a perceber que existem experimentos determinísticos e aleatórios e capacitá-lo a diferenciar os dois tipos. O aluno será induzido a compreensão de que num experimento aleatório nem sempre os resultados são equiprováveis. Além disso, deve perceber que nem sempre é possível definir probabilidade de forma exata e única.

METODOLOGIA

1º Momento

Passo 1 - O professor pede que cada aluno, em segredo, escolha mentalmente um número natural de 1 à 10.

Passo 2 - Após a escolha deste número, o professor pede que cada aluno multiplique esse número por 9. Logo em seguida o professor pede que cada aluno utilize o resultado encontrado e realize a soma dos dígitos. Por exemplo: Se o número escolhido inicialmente foi o número 4 então se multiplicar por 9, obtém-se: $4 \text{ x } 9 = 36$. Prosseguindo, realiza-se a soma dos dígitos do resultado encontrado, assim: $3 + 6 = 9$.

Passo 3 - Após a operação, o professor pede que cada aluno subtraia o resultado por 5.

Passo 4 - O professor pede então que cada aluno associe uma letra ao número obtido anteriormente. Exemplo: A-1, B-2, C-3, D-4 F-5, ..., etc.

Passo 5 - Agora o professor pede que cada aluno pense em um país europeu que comece com a letra associada (detalhe: o nome do país deve estar escrito em língua portuguesa).

Passo 6 - O professor pede que cada aluno utilize a 5ª (quinta) letra do nome do país e associe um animal que inicie com essa letra (detalhe: o nome do animal deve estar escrito em língua portuguesa).

Passo 7 - Imediatamente, após a turma finalizar o momento anterior, *passo 6*, o professor realiza a seguinte pergunta: *Existe macaco na Dinamarca?*

2º Momento

Após o professor questionar a turma o mesmo pergunta se eles ficaram surpreendidos.

Após um período de reflexão, o professor expõe aos seus alunos a Figura 8 que demonstra uma tabela iniciando a explicação desta atividade apresentando as possibilidades de resultados solicitados nos passos *1, 2 e 3*.

Figura 8: Possibilidade de escolha dos alunos x Resultados.

Passo 1	Passo 2	Passo 2	Passo 3
1	1 x 9 = 09	0 + 9 = 9	9 - 5 = 4
2	2 x 9 = 18	1 + 8 = 9	9 - 5 = 4
3	3 x 9 = 27	2 + 7 = 9	9 - 5 = 4
4	4 x 9 = 36	3 + 6 = 9	9 - 5 = 4
5	5 x 9 = 45	4 + 5 = 9	9 - 5 = 4
6	6 x 9 = 54	5 + 4 = 9	9 - 5 = 4
7	7 x 9 = 63	6 + 3 = 9	9 - 5 = 4
8	8 x 9 = 72	7 + 2 = 9	9 - 5 = 4
9	9 x 9 = 81	8 + 1 = 9	9 - 5 = 4
10	10 x 9 = 90	9 + 0 = 9	9 - 5 = 4

O professor pergunta aos seus alunos quais foram as impressões que os mesmos tiveram ao observar os resultados possíveis da tabela em relação aos passos *1, 2 e 3* e se eles perceberam que todos os resultados coincidiram, sendo o número 4.

Depois de realizar os *passos 1, 2, 3 e 4* precisa-se escolher um país europeu que comece com a letra associada (detalhe: o nome do país deve estar escrito em língua portuguesa). Para facilitar o entendimento o professor pede aos alunos que citem alguns destes países, pelo menos os mais conhecidos. *O continente europeu é formado por 50 países.*

Cita-se neste momento alguns destes países europeus, à titulo de conhecimento: *Alemanha, Áustria, Bélgica, Dinamarca, Espanha, Grécia, França, Inglaterra, Itália, Irlanda, Mônaco, Noruega, Polônia, Portugal, Rússia, Suécia, Suíça e Vaticano* são alguns dos países europeus mais conhecidos.

Após a realização do *passo 4* o resultado encontrado, caso todas as contas estejam corretas, será o número 4, e a associação que os alunos irão fazer será associar o número "4" com a "quarta" letra do nosso alfabeto em português, representado pela letra *d.* Após esse passo, o único país europeu que começa com a letra *d*, em português, é a *Dinamarca.*

No passo 6, o professor argumenta com seus alunos que se todos fizessem as contas corretamente, a letra que eles encontrariam seria a letra "m".

O professor explica que até a chegada da letra m, no caso das contas terem sido feitas corretamente, tem-se um *experimento determinístico* e aproveita o momento para descrever este conceito.

Experimentos Determinísticos: São experimentos em que os seus resultados podem ser determinados antes de acontecer. Um exemplo desta situação é a que ocorre no *experimento 01 da Proposta de Atividade 01* em que antes que se realize a retirada de uma bola da *Urna 0* já se sabe que o único resultado possível é a retirada da bola verde.

O professor explica que a escolha do animal é um *experimento aleatório* e expõe o conceito.

Experimentos Aleatórios: São experimentos que mesmo repetidos nas mesmas condições podem ter resultaods diferentes. Isto é, são experimentos que possuem mais de um resultado possível. Um exemplo desta situação é a que ocorre no *experimento 02* em que antes que se realize a retirada de uma bola não tem-se a certeza se será extraída a bola verde ou a bola vermelha.

O professor salienta que a escolha do macaco é bem provável.

Diante do exposto, o professor pede aos seus alunos para realizarem uma atividade extra-classe. Esta consiste em solicitar à uma pessoa (amigo ou família) o nome de um animal cujo nome se inicia com a letra "m".

3º Momento

O professor solicita aos seus alunos a construção do espaço amostral relativo a escolha de um animal cujo nome se inicia com a letra "m".

$\Omega = \{macaco, mico, morcego, mosca, mosquito, maçarico, mula, marimbondo,$ $marta, macuru, morsa, mexilhão, ..., minhoca\}$.

4º Momento

O professor discute com seus alunos as atribuições de probabilidades e levanta algumas questões:

Macaco e maçarico possuem a mesma probabilidade?
A probabilidade dependeria da localidade?
A definição clássica de probabilidade não poderia ser aplicada porque?

5º Momento

O professor explica que neste tipo de problema é necessário trabalhar com a definição *subjetiva de probabilidade*, com base em critérios pré-estabelecidos (localidade, tipo de fauna dominante, etc.)

Sem realizar cálculos, pensando por exemplo na realidade de uma sala de aula na cidade de Goiânia-GO a probabilidade que o nome "macaco" seja mencionado como animal escolhido é bem superior ao nome "maçarico". Uma possível justificativa seria que o nome macaco é bem "mais popular" que o nome maçarico.

A *definição subjetiva* pode ser vista como uma estimativa do que o indivíduo pensa que seja a viabilidade de ocorrência de um evento. A probabilidade subjetiva é baseada no julgamento pessoal, acúmulo de conhecimento, e experiência do pesquisador. É uma alternativa quando não há possibilidade de utilização da probabilidade clássica ou frequentista.

As definições clássicas ou frequentistas nem sempre são passíveis de serem aplicadas para definir probabilidade em um experimento aleatório. Note que há dificuldade de garantir uma regularidade na distribuição de frequência de um determinado evento. Existem situações nas quais a repetição de um evento não pode ser executada e outras em que elas não podem ser executadas em condições idênticas.

A seguir são apresentadas situações onde a definição subjetiva pode ser aplicada:

i) Calcular a probabilidade de vitória do time do Atlético Goianiense (GO) sobre o time do Santos Futebol Clube (SP) na próxima partida entre as equipes.

ii) Calcular a probabilidade de ocorrer um tsunami na cidade de Goiânia - GO.

iii) Qual a probabilidade de se descobrir uma única vacina para se curar todo o tipo de câncer no mundo?

O professor encerra a aula.

DURAÇÃO

Para a finalização da atividade, será necessária 01 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar ambientado com os conceitos de probabilidade e combinatória.

CONTEÚDOS

Probabilidade.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Quadro, giz, folhas de papel A4, lápis e borracha.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua dedicação e empenho ao longo da proposta de atividade e análise dos resultados.

4.5 Proposta de Atividade 03

PÚBLICO-ALVO

Alunos do segundo ano do Ensino Médio.

PROPOSTA: *O professor propõe aos seus alunos que utilizem 10 bolas idênticas, umas verdes outras vermelhas, para uma atividade. Nesta atividade o professor desenvolverá um processo com intuito de adivinhar quantas bolas verdes há na caixa.*

OBJETIVOS

Mostrar a partir de situações simples três conceitos de probabilidade: definição clássica, definição frequentista e definição subjetiva. Ao final da aula espera-se que o aluno entenda como esses conceitos se relacionam e o escopo onde cada definição pode ser aplicada.

METODOLOGIA

1º Momento - A turma escolhe três alunos para colorirem as bolas. Cada bola deve ser colorida na cor verde ou vermelha. Os alunos não podem contar a ninguém quantas bolas foram coloridas de cada cor. As bolas são colocadas em uma caixa. Elas são misturadas e a caixa passa de carteira em carteira. Cada aluno sorteia cinco bolas (uma a uma ao acaso e com reposição. Todo o processo é feito pelos três alunos que pintaram as bolas. O professor não sabe quantas bolas há de cada cor. No fim os três alunos vão ao quadro e apresentam através da Figura 9 uma tabela com as seguintes informações:

Figura 9: Relação: Bolas retiradas x bolas verdes retiradas x bolas vermelhas retiradas.

Nº de bolas retiradas	Nº de bolas verdes retiradas	Nº de bolas vermelhas retiradas

2º Momento - O professor questiona seus alunos quantas bolas de cada cor eles acham que tem na caixa e o porquê (exceto os três alunos que pintaram as bolas e que sabem a quantidade exata de cada cor).

O professor utiliza a relação (fazendo no quadro):

$$\frac{número\, de\, bolas\, verdes}{número\, de\, bolas\, retiradas} \cdot 10,$$

para estimar o número de bolas verdes na urna.

A estimativa é valor natural mais próximo do valor obtido por esta fórmula.

O professor questiona seus alunos se entendem o porque desta estratégia adotada.

Por fim os três alunos revelam quantas bolas tem na caixa.

3º Momento - O professor enuncia a *Definição Clássica de Probabilidade* (Definição 2.4.3), como a seguir:

Seja um espaço amostral Ω com $n(\Omega)$ resultados possíveis chamados de *eventos simples*, todos sendo equiprováveis. Seja A um evento com um total de *n(A)* eventos simples. Então, a probabilidade de A, denotada *P(A)*, pode ser escrita por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

De forma simplificada, o conceito de probabilidade na definição clássica pode ser entendido por: *Razão entre o número de "casos favoráveis" e o número de "casos possíveis"*.

Seja P(A) a probabilidade de sair bola verde em uma extração então:

$$P(A) = \frac{número\, de\, bolas\, verdes}{número\, de\, bolas\, verdes + \, número\, de\, bolas\, vermelhas}$$

O professor apresenta a Definição *Frequentista de Probabilidade* (Definição 2.4.5) como a seguir:

Considere um determinado experimento cujo espaço amostral é Ω e seja A um evento qualquer desse espaço amostral. Considere o experimento repetido n vezes de forma idêntica e nas mesmas condições e seja *n(A)* a quantidade de vezes que A acontece nessas repetições. Assim, define-se a probabilidade do evento A ocorrer:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Sucintamente, *P(A)* é a conformidade (limite) de vezes em que A acontece, ou seja, a frequência limite de A. Obviamente, o experimento não pode ser repetido. Na prática, pela definição frequentista aproxima-se

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{n},$$

quando n é grande.

Pode-se observar que desta forma não são necessárias as hipóteses de equiprobabilidade dos eventos elementares nem de finitude do espaço dos resultados, sobrepondo-se dessa forma as duas restrições da definição clássica.

Adequando a definição frequentista para a atividade, têm-se para n grande:

$$P(A) \simeq \frac{(número\, de\, bolas\, verdes\, retiradas)}{n}$$

Assim, usando as duas definições:

$$\frac{número\, de\, bolas\, verdes}{10} = P(A) \approx \frac{número\, de\, bolas\, verdes\, retiradas}{número\, de\, bolas\, retiradas} =$$

$$número\, de\, bolas\, verdes \approx \left(\frac{número\, de\, bolas\, verdes\, retiradas}{número\, de\, bolas\, retiradas}\right) \cdot 10.$$

4º Momento - O professor apresenta o histórico de confrontos do futebol masculino profissional entre Goiânia x Goiás até o ano de 2019 na Figura 10 à seguir:

Figura 10: Histórico: Goiânia x Goiás.

Goiânia	**Empate**	**Goiás**	**Total de Jogos**
63 vitórias	*52 empates*	*89 vitórias*	*204 jogos*

Goiás e Goiânia vão se enfrentar. Sejam os eventos: V - *Goiás vence*, E - *Empate* e B - *Goiânia vence*. O professor diz que uma pessoa atribuiu as seguintes probabilidades:

$$P(V) = \frac{89}{204} = 0,436.$$

$$P(E) = \frac{52}{204} = 0,255.$$

$$P(B) = \frac{63}{204} = 0,309.$$

O professor explica aos seus alunos como os valores foram obtidos e faz algumas perguntas:

a) Se os alunos concordam com esses valores.

b) Se para este problema o método de obtenção das probabilidades é o mesmo do problema das bolas. Senão, o que difere?

5º Momento - O professor explica que na aplicação da definição frequentista é importante que as repetições ocorram nas mesmas condições. E discute por que esse não é o caso.

O professor explica que nesse caso deve ser aplicada alguma definição subjetiva com base em critérios pré-estabelicidos (mandante, desempenho das equipes nos últimos jogos, etc.)

Após comparar os três conceitos de probabilidade e explicar o escopo de aplicação de cada um o professor encerra a atividade.

DURAÇÃO

Para a finalização da atividade, será necessária 01 hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar ambientado com os conceitos de probabilidade e combinatória.

OBJETIVOS

Mostrar a partir de situações simples três conceitos de probabilidade: definição clássica, definição frequentista e definição subjetiva. Ao final da aula espera-se que o aluno entenda como esses conceitos se relacionam e o escopo onde cada definição pode ser aplicada.

CONTEÚDOS

Definições de probabilidade.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Quadro, giz, folhas de papel A4, lápis, borracha, caixa, 10 bolas idênticas.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua dedicação e empenho ao longo da proposta de atividade e análise dos resultados.

4.6 Proposta de Atividade 04

PÚBLICO-ALVO

Alunos do segundo ano do Ensino Médio.

PROPOSTA: *Experimento composto de um jogo envolvendo urnas, bolas e dado num primeiro momento e uma dinâmica sobre atualização de probabilidades num segundo momento.*

OBJETIVOS

Trabalhar com o cálculo de probabilidade de forma indireta. Introduzir a idéia de probabilidade a priori e a posteriori a partir de um problema bem conhecido na literatura matemática.

METODOLOGIA

1º Momento:

Tem-se três urnas com a seguinte composição verificada na Figura 11 à seguir:

Figura 11: Composição: Urnas x Bolas.

Composição	Bolas Verdes	Bolas Vermelhas	Total
Urna I	7	3	10
Urna II	4	6	10
Urna III	12	8	20
Total	23	17	40

Um jogo consiste em sortear uma das urnas e retirar uma bola aleatoriamente da urna sorteada. Um dado honesto é utilizado para sortear a urna. Dois jogadores A e B disputam a brincadeira de modo que A aposta em bola verde e B em bola vermelha.

Imagine o seguinte cenário:

Se sair a face 1, escolhe-se a urna I.

Se sair a face 2, 3, 4 ou 5 escolhe-se a urna II.

Se sair face 6, escolhe-se a urna III.

O professor propõe as seguintes questões:

a) Qual jogador tem mais chance de vencer?

b) O cenário descrito anteriormente é apenas um dentre os possíveis. Se pelo menos uma face deve ser atribuída a cada uma das urnas, quais são os valores máximo e mínimo de probabilidade do jogador A vencer?

c) Pensando em todos os cenários possíveis, há algum cenário em que temos um jogo justo?

Um tempo é dado para que os alunos deem suas impressões.

Após o período de discussões o professor corrige as questões.

Correção:

Sobre as chances de vencer:

Sejam os eventos:
A_i - "Sortear a urna i com i = I, II, III."
V - "Sair bola verde (o jogador A vence)."

Pela Fórmula da Probabilidade Total (Teorema 2.6.4) a probabilidade desejada pode ser escrita:

$$P(V) = P(A_I) \cdot P(V|A_I) + P(A_{II}) \cdot P(V|A_{II}) + P(A_{III}) \cdot P(V|A_{III}).$$

$$P(V) = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{20}.$$

$$P(V) = \frac{7}{60} + \frac{16}{60} + \frac{12}{120} = \frac{14+32+12}{120}.$$

$$P(V) = \frac{58}{120} = \frac{29}{60}.$$

Respondendo ao item a) o professor argumenta que o jogador A tem $\frac{29}{60}$ de vencer. Como $P(V^c) = 1 - P(V)$, segue

$$P(V^c) = 1 - \frac{29}{60} = \frac{31}{60}.$$

.

Assim, a chance de B vencer é $\frac{31}{60}$. Logo, o jogador B tem mais chance de vencer. Em geral, pensando em outros cenários:

$$P(A_I) = P_1,\ P(A_{II}) = P_2\ e\ P(A_{III}) = P_3,\ com\ P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Assim,

$$P(V) = P_1 \cdot \frac{7}{10} + P_2 \cdot \frac{4}{10} + P_3 \cdot \frac{12}{20}.$$

$$P(V) = 0,7 \cdot P_1 + 0,4 \cdot P_2 + 0,6 \cdot P_3.$$

$$P(V) = 0,7 \cdot P_1 + 0,4 \cdot P_2 + 0,6 \cdot (1 - P_1 - P_2).$$

$$P(V) = 0,7P_1 + 0,4P_2 + 0,6 - 0,6P_1 - 0,6P_2.$$

$$P(V) = 0,1P_1 - 0,2P_2 + 0,6,$$

com $P_1 + P_2 + P_3 = 1$.

Com essa fórmula o professor tem condições de responder aos itens b) e c). Com relação a b) o maior valor ocorre quando o peso maior está na urna I, tendo a maior proporção de bolas verdes.

Assim, a probabilidade de A vencer é máxima quando:

$$P_1 = \frac{4}{6},\ P_2 = \frac{1}{6}\ e\ P_3 = \frac{1}{6}.$$

Prosseguindo, obtém-se:

$$P(V) = 0,1 \cdot \frac{4}{6} - 0,2 \cdot \frac{1}{6} + 0,6.$$

$$P(V) = \frac{0,4 - 0,2}{6} + 0,6.$$

$$P(V) = \frac{0,2}{6} + 0,6 = \frac{0,2 + 3,6}{6}.$$

$$P(V) = \frac{3,8}{6} = \frac{38}{60}.$$

$$P(V) = \frac{19}{30} = 0,633.$$

Por fim, o professor argumenta que antes de se definir o cenário a ser usado já se sabe que a probabilidade de A vencer satisfaz:

$$\frac{29}{60} \leq P(V) \leq \frac{19}{30}.$$

O menor valor para a probabilidade de A vencer ocorre quando o maior peso está na urna II que possui a maior proporção de bolas vermelhas. Assim, o cenário proposto inicialmente dá a menor probabilidade de A vencer. Isto é, $P(V) = \frac{29}{60} = 0,483$.

Por fim, o professor volta a atenção para o item c). Para se ter um jogo justo é necessário que $P(V) = 0,5$.

Já se sabe que

$$P(V) = 0,1P_1 - 0,2P_2 + 0,6 \ e \ P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

O professor então apresenta os dois piores cenários para o jogador A. A Figura 12 apresenta estes cenários:

Figura 12: Composição: P(V) x Bolas.

Composição	*Bolas Verdes*	*Bolas Vermelhas*
P1	1/6	1/6
P2	4/6	3/6
P3	1/6	2/6
P (V)	29/60 = 0,483	31/60 = 0,516

Calculando $P(V)$ para o segundo pior cenário:

$$P(V) = 0,1 \cdot \frac{1}{6} - 0,2 \cdot \frac{3}{6} + 0,6.$$

$$P(V) = \frac{0,1 - 0,6}{6} + 0,6 = \frac{-0,5}{6} + 0,6.$$

$$P(V) = \frac{-0,5 + 3,6}{6} = \frac{3,1}{6}.$$

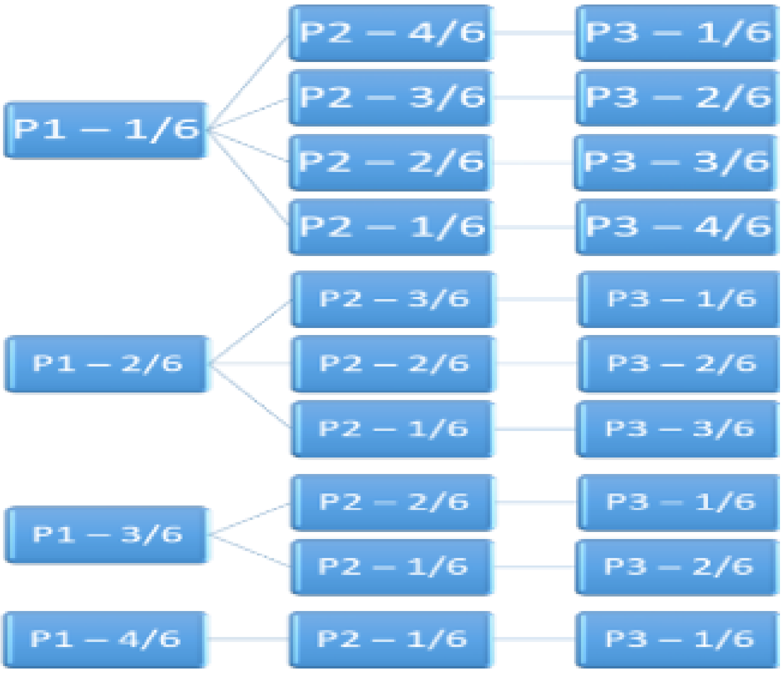
$$P(V) = \frac{31}{60}.$$

Entre os dois piores cenários para o jogador A um é favorável a B e o outro ainda é favorável à A. Logo, *não há cenário para jogo justo.*

O jogador B só não tem maior probabilidade de perder do que A num único cenário.

O professor pergunta aos seus alunos, quantos cenários existem? E as possibilidades são descritas no diagrama de árvores (Figura 13) à seguir descrevendo cada possibilidade de cenário:

Figura 13: Diagramas de Árvore x Cenários.



Portanto, $4 + 3 + 3 = 10$. Assim, pode-se concluir que há 10 cenários possíveis.

2º Momento

Na sequência, o professor falará de atualização de probabilidades.

Problema de Monty Hall. Este problema tornou-se famoso nos EUA como o problema de Monty Hall, devido ao apresentador que possuía um quadro bem semelhante (ou o contrário seria mais apropriado) em seu programa popular "Let´s Make a Deal" ("Vamos fazer um trato") nos anos 70. Aqui no Brasil este problema foi bastante utilizado em diversos programas de auditório que ficaram famosos com o apresentador Sílvio Santos.

O problema se baseia na existência de três portas, onde atrás de uma delas há um prêmio.

O professor propõe a realização da seguinte dinâmica:

O participante escolhe uma porta.

O apresentador abre outra porta que não seja a escolhida pelo participante.

Sobram duas portas. O apresentador dá a oportunidade para o participante trocar ou não de porta.

O professor faz a seguinte pergunta aos seus alunos, *qual é a melhor estratégia?*

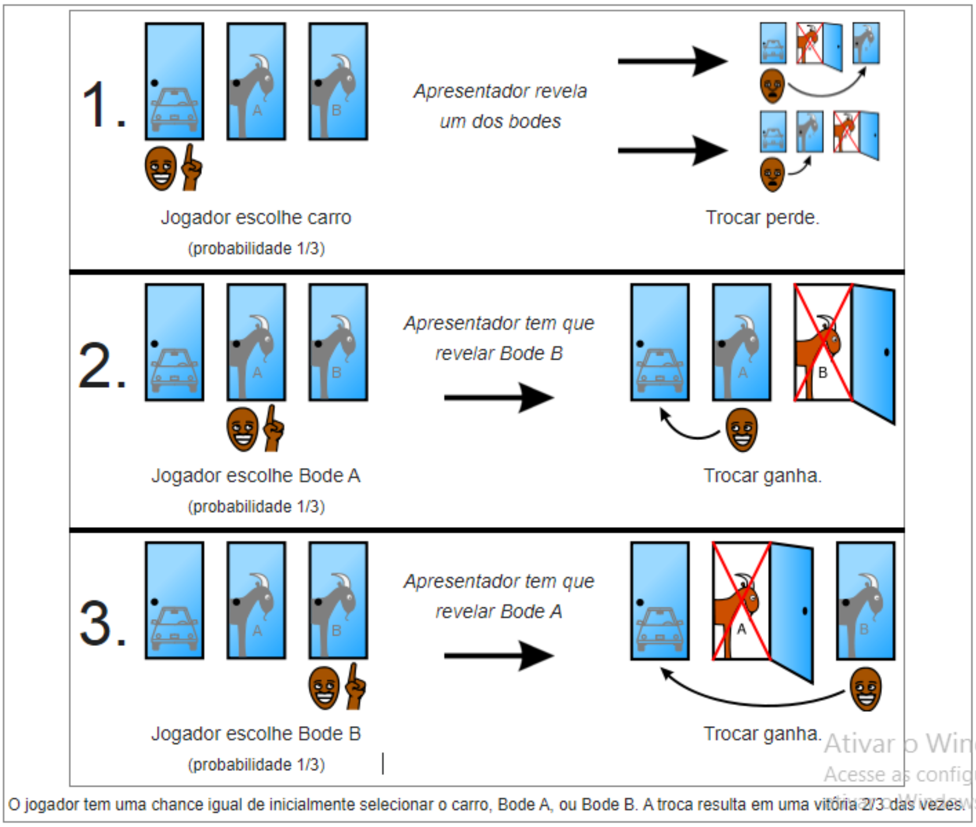
O participante deve manter a porta inicialmente escolhida?

O participante deve trocar a porta inicialmente escolhida?

Tanto faz realizar ou não a troca da porta inicialmente escolhida pelo participante?

A seguir tem-se uma ilustração (Figura 14) referente às três possibilidades de escolha de porta. Note que atrás de uma das três portas há um prêmio e em cada uma das outras portas duas há um bode.

Figura 14: Problema das três portas - Problema de Monty Hall.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema de Monty Hall. Acesso em 17 de setembro de 2020.

O professor cede um tempo para os seus alunos analisarem as perguntas. Após esse tempo o professor argumenta com seus alunos que se o participante trocar a porta escolhida inicialmente suas chances de ganhar o prêmio dobram.

Apesar que possa parecer contra-intuitivo para alguns, a probabilidade de ganhar o prêmio trocando de porta é duas vezes maior do que permanecendo na porta inicialmente escolhida, isto é, 2/3 e 1/3 respectivamente.

O professor realiza a simulação do processo em sala de aula formando duplas com seus alunos (as duplas são formadas por apresentador e participante). Para aumentar a eficiência, os alunos que farão o papel de apresentadores terão posição fixa e os participantes vão passando por cada apresentador. Os resultados são anotados e analisados no fim do processo.

Uma discussão é realizada. O professor então começa a fazer suas ponderações.

A idéia por trás da solução desse problema é a seguinte. Inicialmente, o participante tem chance $\frac{1}{3}$ de ganhar o prêmio. A probabilidade do prêmio estar em uma das outras duas portas é $\frac{2}{3}$. O apresentador sempre vai abrir uma porta onde não há prêmio. Mas isso não muda o fato, de que a probabilidade do participante ter acertado a porta com a escolha inicial é $\frac{1}{3}$. Como há probabilidade $\frac{2}{3}$ do prêmio estar ou na porta que o apresentador abriu ou na outra porta, a informação do apresentador é valiosa para o participante. Em outras palavras, mudando para a porta que o apresentador não abriu a chance do prêmio estar ali é $\frac{2}{3}$.

Para os alunos que não se convenceram dos resultados o problema pode ser alterado colocando mil portas à disposição. Agora o jogo tem mil portas. O participante escolhe uma porta, o apresentador abre 998 portas deixando sem abrir a porta escolhida pelo participante e mais uma porta. Enfim, é dada ao participante a oportunidade de aceitar ou não a troca da porta escolhida inicialmente com a porta que ainda não foi aberta. Nesse caso, a chance do jogador vencer se não trocar de porta é $\frac{1}{1000}$ (probabilidade de acertar a porta de cara). A probabilidade de ganhar o prêmio trocando de porta é $\frac{999}{1000}$ (probabilidade de errar de porta na primeira escolha). Nesse caso é bem intuitivo que trocar de porta é a melhor estratégia. Antes de dar esses argumentos o professor pergunta qual é a melhor estratégia. Como na dinâmica anterior as estratégias são analisadas.

DURAÇÃO

Para a finalização da atividade, serão necessárias 02 horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

O aluno deve estar ambientado com os conceitos de probabilidade e Teorema de Bayes.

CONTEÚDOS

Definições de probabilidade.

MATERIAIS NECESSÁRIOS

Quadro, giz, folhas de papel A4, lápis, borracha, caixa, bolas.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua dedicação e empenho ao longo da proposta de atividade e análise dos resultados.

5 Considerações Finais

Pode-se perceber com facilidade a importância do ensino da Probabilidade no Brasil. A aplicabilidade dos seus conceitos é essencial na formação dos estudantes brasileiros. A probabilidade nos proporciona realizar inferências de fenômenos futuros a partir de coleta de dados tanto experimentais como observacionais que já ocorreram e a partir destes minimizar possíveis incertezas de eventos futuros.

É importante a aplicação de conceitos de Probabilidade, principalmente para alunos de Ensino Médio. A utilização de fórmulas "maçantes e cansativas", dificultam um interesse maior dos alunos por esse conteúdo tão importante para toda a sociedade.

O ensino da matemática em si já apresenta "certa resistência" por boa parte dos alunos desde os anos iniciais do ensino fundamental e cabe aos professores atentar para importância de bons planejamentos e estratégias de conduzir o conhecimento de maneira mais natural e prazerosa possível aos estudantes.

Neste trabalho há a intenção de contribuir com o saber matemático, propondo elucidar junto à Probabilidade a parte histórica, os conceitos básicos tão necessários para uma formação mais sólida, alguns modelos probabilísticos discretos e propostas de atividades adequadas para a realidade do Ensino Médio Brasileiro.

Para preparar um ambiente de entretenimento e almejando maior envolvimento dos alunos com o processo de ensino e fixação mais precisa do conteúdo, as propostas de atividades envolvem a utilização de dados, moedas e urnas com retirada aleatória de bolas. As situações apresentadas favorecem o aprender "brincando", sem deixar de lado a exposição de toda a fundamentação teórica básica com a ligação da mesma com a prática. Isso torna o desenvolvimento das atividades mais atraente.

Embora não tenha ocorrido a aplicação das Propostas de Atividades em sala de aula, a criteriosa confecção dos detalhes unindo formação teórica e situações cativantes leva a crer que são boas propostas. Crê-se em sua aplicabilidade, onde se busca trazer um ambiente de aprendizado menos formal e mais descontraído, possibilitando um interesse mais aguçado do aluno para o envolvimento do mesmo no processo de aprendizagem.

É importante salientar que o professor que simplesmente "despeja" qualquer tipo de conteúdo na lousa, sem que seu propósito ocorra com contextualização e prováveis aplicações, cria um ensino sem relevância e insociável aos olhos dos alunos. Ao professor é imputado a responsabilidade de adequar e transformar o caminho do conhecimento para que o aluno o absorva de maneira agradável e significativa. O que se constrói não se destrói com facilidade.

Referências

[1] ANCIENTTOUCH. , *Imagem de um osso Astrágalo.* Disponível em: http://www.ancienttouch.com/1081.jpg. Acesso em 20/03/2020.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC.* Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/ BNCC _EI _EF _110518 _versaofinal _site.pdf>. Acesso em 30/03/2020.

[3] BRASIL, Secretaria de Ensino Fundamental: *Parâmetros curriculares nacionais: ensino fundamental (5ª a 8ª série)/matemática.* Brasília: MEC/-SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 30/03/2020.

[4] BOYER, Carl B.. *História da Matemática.* Tradução Elza F. Gomide, 2ª Edição. São Paulo: Blücher / Edusp, 1996.

[5] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações* - Volume 1, 2ª Edição. São Paulo - SP: Ática, 2014.

[6] EVANGELISTA SOBRINHO, F., *O raciocínio combinatório e probabilístico de alunos do 6º ano do ensino fundamental.* 135f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo - SP, 2010.

[7] GOULART, A. , *O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a escola básica.* 88f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo - SP, 2007.

[8] IEZZI, G. et al., *Fundamentos De Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade.* 8º Edição. São Paulo - SP: Atual, 2013.

[9] IME. UFG , *https://semanadoime.ime.ufg.br/up/34/o/SEMANAIME2016.pdf.* Acesso em 13/04/2020.

[10] JÚNIOR, Valdivino V. *Probabilidade: Vetores Aleatórios e Teoremas Limite.* Instituto de Matemática e Estatística - UFG, Goiânia, 2015.

[11] JÚNIOR, Valdivino V. *Modelos Probabilísticos.* Anais da XXVII Semana do IME/UFG e IV Seminário de Pesquisa e Pós-Graduação do IME/UFG, 2016. Disponível em: <https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/34/o/SEMANAIME2016.pdf>. Acesso em 14/07/2020.

[12] LEBENSZTAYN, E. COLETTI, C. F. *Probabilidade: Teoria e Exercícios.* 2012. Disponível em <http://professor.ufabc.edu.br/ rafael.grisi/wp-content/uploads/2019/10/CristianElcio.pdf>. Acesso em 05/06/2020.

[13] LUIZ, Robson. , *Complementar de A em relação a B; VUNESP, Brasil Escola.* Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm Acesso em 20/03/2020.

[14] LUIZ, Robson. , *Diagrama de Venn-Euler; Brasil Escola.* Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm Acesso em 20/03/2020.

[15] LUIZ, Robson. , *Diferença entre os conjuntos A e B; Brasil Escola.* Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm Acesso em 20/03/2020.

[16] LUIZ, Robson. , *Intersecção entre os conjuntos A e B; Brasil Escola.* Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm Acesso em 20/03/2020.

[17] LUIZ, Robson. , *Operações com conjuntos; Brasil Escola.* Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/operacoes-com-conjuntos.htm. Acesso em 20/03/2020.

[18] LOPES, C. A. E. , *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil.* 281 f. Tese (Doutorado em Educação) Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas -SP, 2003.

[19] LOPES, C. A. E., *Educação Matemática e Educação Estatística: intersecções na produção científica. In: ARAÚJO JR., C.F; AMARAL, L. H.. (Org.). Ensino de Ciências e Matemática: Tópicos em Ensino e Pesquisa.* São Paulo - SP. ANDROSS, v. , p. 177-196, 2006.

[20] LOPES, C. E , *A educação estatística no currículo de matemática: um ensaio teórico. IN: REUNIÃO ANUAL DA ANPED. 33.* 2010b, Caxambu - MG. Anais..., 2010.

[21] LUGLI, L. C.; LOPES, C. E., *Avaliações Externas e o Currículo do Ensino Médio: uma análise sobre as questões que envolvem Probabilidade.* IN: II Enrede - UFSCAR. São Carlos (SP). Anais..., 2010.

[22] MAROCCI, L. M. ; NACARATO, A. M.. *Um ambiente de aprendizagem baseado na resolução de problemas: a possibilidade de circulação de significações sobre probabilidade por meio da linguagem.* Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 15, p. 101-123, 2013.

[23] MENDONÇA, L. O. *A Educação estatística em um ambiente de modelagem matemática no ensino médio.* 245f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2008.

[24] MEYER, PAUL L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística.* Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho, 2ª Edição, Rio de Janeiro - RJ. Livros técnicos e científicos Editora, 1995.

[25] MORGADO, AUGUSTO CÉSAR. *Análise combinatória e probabilidade.* Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho e Pedro Fernandez. Rio de Janeiro. Fundação VITAE, 1991.

[26] MORGADO, AUGUSTO CÉSAR. *Análise combinatória e probabilidade.* Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho e Pedro Fernandez. 10ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016 (Coleção Professor de Matemática).

[27] MORGADO, AUGUSTO CÉSAR. *Matemática Discreta.* Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho e Pedro Fernandez. 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).

[28] PROBLEMA DE MONTY HALL, *https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema de Monty Hall.* Acesso em 17/09/2020.

[29] ROSS, SHELDON. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações.* Tradução de Alberto Resende De Conti. 8ª Edição. Bookman, 2010.

[30] SILVA, Luiz Paulo Moreira. *O que é probabilidade?* Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-probabilidade.htm. Acesso em 14/04/2020.

[31] SILVA, J. C. T. *Reflexões sobre conhecimentos evidenciados por licenciandos em matemática por meio da elaboração de um jogo sobre análise combinatória.* 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Vitória: IFES. v. 1, 2014.

[32] SILVA, J. C. T.; SILVA, S. A. F. *Combinando na cidade.* Vitória: IFES. v. 1, 2014.