Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

Luis Antonio de Souza da Silva

Grafos: uma abordagem através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática

São Gonçalo

2020

Luis Antonio de Souza da Silva

Grafos: uma abordagem através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática

Dissertação apresentada, como requisito par-cial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Profª. Dra. Priscila Cardoso Petito

São Gonçalo

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

S586 TESE

Silva, Luis Antonio de Souza da.
Grafos: uma abordagem através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática / Luis Antonio de Souza da Silva. – 2020.

58 f.

Orientadora: Profª. Dra. Priscila Cardoso Petito.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática - Educação básica - Teses. 3. Teoria dos grafos - Teses. I. Petito, Priscila Cardoso. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III .Título.

CRB/7 - 6150 CDU 51.07

Assinatura Data

Luis Antonio de Souza da Silva

Grafos: uma abordagem através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática

Dissertação apresentada, como requisito par-cial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 26 de Outubro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dra. Priscila Cardoso Petito (Orientador)
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

Profª. Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo
Universidade Federal Fluminense

Profª. Dra. Fernanda Pereira Rodrigues
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

Profª. Dra. Marcele Câmara de Souza
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

São Gonçalo

2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar sempre comigo, me dando força e sabedoria.

Aos meus pais João (in memorian) e Lídia, por todo apoio e carinho.

A minha esposa Nilcimara, companheira, amiga e incentivadora.

Aos meus filhos Luis Guilherme e Luisa Helena, presentes de Deus.

Aos professores do PROFMAT sempre atenciosos.

À professora Priscila Petito, minha orientadora, que sempre esteve disposta a ajudar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

SILVA, Luis Antonio de Souza da. *Grafos*: uma abordagem através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática. 2020. 58 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

Este trabalho tem como objetivo mostrar como o conceito de Grafos vem ganhando espaço em algumas competições matemáticas disputadas no Brasil. Apresentamos uma possibilidade da aplicação de conceitos da Teoria dos Grafos na modelagem das questões da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Canguru da Matemática, além de questões inéditas. Para isso, fizemos um levantamento, através da análise prévia das provas dessas competições, e selecionamos algumas questões que podem ser resolvidas utilizando alguns conceitos e resultados básicos sobre grafos, e outras que podem ser exploradas como situação-problema para introdução desses conceitos e resultados. Desta forma, mostramos como os grafos podem ser úteis na resolução de diversos problemas e como aparecem com certa frequência em avaliações de competições de matemática, sinalizando a importância destes conceitos na educação básica.

Palavras-chave: OBMEP. Canguru da Matemática. Teoria dos Grafos.

ABSTRACT

SILVA, Luis Antonio de Souza da. *Graphs*: an approach through OBMEP and Kangoroo Mathematics questions. 2020. 58 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

This work aims to show how the concept of Graphs has been gaining space in some mathematical competitions disputed in Brazil. We present a possibility of applying Graph Theory concepts in the modeling of questions the Brazilian Maths Olympiad for Public Schools (OBMEP) and the Mathematical Kangaroo, in addition to unpublished questions. For this, we made a survey, through the prior analysis of the exams of these competitions, and we selected some questions that can be solved using some basic concepts and results about graphs, and others that can be explored as a problem situation for introducing these concepts and results. In this way, we show how graphs can be useful in solving various problems and how they appear with some frequency in evaluations of mathematics competitions, signaling the importance of these concepts in basic education.

Keywords: OBMEP. Mathematical Kangaroo. Graph Theory.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Diante do avanço científico - tecnólogico ocorrido nas últimas décadas, percebemos que se faz necessária uma reformulação do nosso sistema educacional, de modo que este seja capaz de atender as transformações da sociedade no presente e no futuro, que contribua na formação de jovens críticos e com o raciocício lógico mais bem aprimorado, preparados para atender as necessidades do mundo do trabalho. Acreditamos que não existe um caminho que leve a mudanças significativas neste sistema que não passe por uma formação de qualidade e aperfeiçoamento contínuo dos professores, assim como uma atualizaçao curricular, que adeque os conteúdos abordados na educação básica à nossa realidade atual.

Na maioria dos currículos de Matemática podemos perceber um caráter cumulativo e hierarquizado que, por vezes, leva o professor a ter dificuldades na hora de relacionar assuntos da própria Matemática. Problemas como falta de concentração e interesse são comuns no ensino de Matemática e representam uma barreira a ser rompida a cada aula, para isto, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), que é um documento normativo do Ministério da Educação (MEC) cujo o objetivo é nortear as propostas curriculares dos sistemas estaduais, municipais e privados de todo o Brasil, deve existir a contextualização dos conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas.

Apesar do conceito de grafos não estar presente no currículo de Matemática da educação básica no Brasil, e nas grades dos cursos de licenciatura em Matemática aparecer em alguns casos apenas como disciplina eletiva, os conceitos básicos são simples, e podem ser introduzidos até mesmo para alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, pois não exige do aluno a compreensão de conceitos matemáticos anteriores ou o uso de fórmulas já estabelecidas. Podemos representar um grafo utilizando apenas pontos e linhas. Com os pontos correspondendo a objetos e as linhas (ligando alguns pares destes pontos) indicando que objetos, dois a dois, estão relacionados segundo uma relação previamente estabelecida. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), o ensino de Matemática deve levar o aluno a utilizar diferentes registros gráficos - desenhos, esquemas, escritas numéricas - como recurso para expressar ideias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados.

Entendemos que seja necessária uma abordagem criativa, contextualizada e mais atrativa de alguns conteúdos, de modo que seja capaz de despertar o interesse do estudante pela Matemática. A abordagem de alguns conteúdos através do conceito de grafos é viável devido a sua aplicabilidade, além de permitir um aprendizado de forma lúdica. Devido essa enorme abrangência de possibilidades de aplicação dos grafos, assim como suas inúmeras formas de abordagem (como será apresentado neste trabalho), (BRIA, 2001) em sua tese de doutorado propõe:

> a exploração dos grafos e suas aplicações, para o Ensino Fundamental e Médio no Brasil, em termos de seu conteúdo propriamente dito e/ou como instrumento metodológico para diversos fins, como representação do conhecimento, organização do raciocínio, resolução de problemas, transporte de esquemas similares de pensamento entre contextos distintos, visualização geométrica, prática efetiva de interdisciplinaridade, modelagem de situações-problema do próprio cotidiano do aluno, aprendizado matemático através de jogos, entre outras possibilidades.(p. 2)

O leitor encontrará ao longo deste trabalho as ideias centrais da Teoria dos Grafos, apresentaremos seus principais conceitos e resultados básicos, através de uma abordagem introdutória baseada em questões extraídas de competições matemáticas como a Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e o Canguru da Matemática, além de problemas do Banco de Questões (BQ) da OBMEP. Através de uma pesquisa a algumas dessas questões, foi feito um levantamento sobre a possibilidade de usar ideias elementares da Teoria dos Grafos para resolvê-las, mostrando como o conceito de grafos pode ser útil na resolução de problemas, ou mesmo explorá-las como situação problema para a introdução de alguns conceitos e resultados importantes sobre grafos. O objetivo deste texto é mostrar que a Teoria dos Grafos vem aparecendo em competições de matemática e dar subsídios para que professores possam explorar tais questões usando a resolução de problemas em clubes de matemática nas escolas ou em pólos de treinamento da OBMEP, por exemplo.

Duas das principais competições de Matemática são abordadas no Capítulo 1, onde são analisados o surgimento, regulamento, execução e premiação da Olimpíada Brasileira de Matemática e do Canguru da Matemática.

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos da Teoria dos Grafos relevantes para o acompanhamento deste texto, através de questões da OBMEP e do Canguru de Matemática, analisando tais questões segundo a sua relação com conceitos e resultados da Teoria dos Grafos.

No Capítulo 3 é descrita uma ação pedagógica realizada com alunos de uma turma do Ensino Médio, com as atividades desenvolvidas, fatos observados no desempenho dos alunos e exemplos de respostas comentados.

1 COMPETIÇÕES MATEMÁTICAS

Neste capítulo, faremos uma apresentação suscinta de como funciona cada uma das competições analisadas, das quais foram extraídas as questões que serviram como objeto de estudo deste trabalho.

1.1 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)

Criada em 2005 com o objetivo de incentivar o estudo da Matemática e identificar talentos nessa área, além de contribuir para a formação de alunos e professores e na produção de material didático, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP, 2020) é um projeto nacional que desde 2017 é dirigido tanto às escolas públicas quanto às escolas privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovido com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

O público-alvo da OBMEP até 2017 era composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até último ano do Ensino Médio. Em 2018, os alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental também puderam participar da competição com a criação da OBMEP Nível A. Assim os participantes da OBMEP são divididos em 4 (quatro) níveis, de acordo com o ano de escolaridade em que estiverem matriculados:

- **Nível A** - 4º ou 5º anos do Ensino Fundamental
- **Nível 1** - 6º ou 7º anos do Ensino Fundamental
- **Nível 2** - 8º ou 9º anos do Ensino Fundamental
- **Nível 3** - Ensino Médio

As provas da OBMEP (Níveis 1, 2 e 3) são realizadas em duas fases, sendo a primeira composta por 20 questões objetivas, de caráter eliminatório, cada uma com apenas uma opção correta dentre as cinco apresentadas e 2h 30min (duas horas e trinta minutos) de duração. Na primeira fase, são selecionados os 5% (cinco por cento) do total de alunos inscritos em cada escola, classificando-os para a segunda fase. A segunda fase é composta por prova discursiva, de caráter classificatório, composta de 6 (seis) questões valendo até 20 (vinte) pontos cada, totalizando 120 (cento e vinte) pontos e 3 horas de duração. As provas da OBMEP Nível A são realizadas em fase única e são compostas por 15 questões objetivas com 5 alternativas, sendo apenas uma correta.

As provas da primeira fase são realizadas na própria escola inscrita na OBMEP, que é responsável por sua aplicação e correção, de acordo com as instruções enviadas pelo IMPA junto com o material de prova. O material para a aplicação das provas de primeira fase é enviado para as escolas, por via postal, para o endereço indicado na inscrição.

As provas da segunda fase são aplicadas pelo IMPA em centros de aplicação organizados nos espaços cedidos pelas escolas participantes em todo o território nacional. A correção das provas de segunda fase é de responsabilidade exclusiva do IMPA.

Para que os alunos se preparem para as provas, a OBMEP disponibiliza em sua página (OBMEP, 2020) provas anteriores e oferece a todas as escolas públicas do país um Banco de Questões (BQ) com problemas e desafios de Matemática para alunos e professores. As questões do BQ tem por objetivo despertar o prazer pela Matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e apresentar a OBMEP aos alunos que não a conhecem. Todas as edições do Banco de Questões, assim como as apostilas do Programa de Iniciação Científica da OBMEP estão disponíveis em formato eletrônico na página da OBMEP (OBMEP, 2020).

Outra sugestão para a preparação de alunos para as provas da OBMEP é estudar em grupo, o que é muito proveitoso para entrosamento entre alunos e de alunos e professores. A OBMEP sugere a criação de clubes de Matemática ou pólos de treinamento, e oferece aos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, interessados em participar da OBMEP ou de outras competições matemáticas cursos intensivos gratuitos através do Programa Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), financiando aulas presenciais em Polos que apresentem demanda e estrutura adequada para tal, além de oferecer o POTI Virtual (POTI VIRTUAL, 2020) para alunos que não podem comparecer aos encontros presenciais.

A OBMEP também oferece aos alunos premiados com medalhas em cada edição, o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), que proporciona ao aluno entrar em contato com interessantes questões no ramo da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico. No programa, o estudante pode participar do PIC presencial, se houver um polo de Iniciação Científica próximo da sua residência, com encontros presenciais ou participar do PIC a distância com aulas virtuais.

Com o objetivo de contribuir para a formação de professores de Matemática das escolas públicas municipais e estaduais, a OBMEP oferece o programa OBMEP na Escola, que estimula estudos mais aprofundados e a adoção de novas práticas didáticas em suas salas de aula, no trabalho com grupos de alunos selecionados em suas escolas ou em escolas vizinhas.

Como incentivo e promoção do desenvolvimento acadêmico dos participantes, são premiados alunos, professores, escolas e Secretarias Municipais de Educação pelos melhores desempenhos nesta competição. Na edição do ano 2018 a OBMEP premiou:

- **Alunos de Escolas Públicas**
  - **Medalha de ouro:** 500 - Alunos das escolas municipais, estaduais e federais. Primeiros colocados na classificação nacional.
    - Nível 1: 200 medalhas
    - Nível 2: 200 medalhas
    - Nível 3: 100 medalhas
  - **Medalha de prata:** 1500 - Excluídas as notas dos alunos premiados com medalhas de ouro, os 500 primeiros alunos em cada nível:
    - Nível 1: 500 medalhas
    - Nível 2: 500 medalhas
    - Nível 3: 500 medalhas
  - **Medalha de bronze:** 4500 - Excluídas as notas dos alunos premiados com medalhas de ouro e prata, as melhores notas de alunos de escolas não seletivas em sua respectiva Unidade da Federação (UF). Excluídas as notas dos alunos premiados com medalha de ouro e prata e excluídos os alunos premiados no item anterior, os alunos com melhores notas de todas as escolas na classificação nacional.
    - Nível 1: 1990 medalhas
    - Nível 2: 1440 medalhas
    - Nível 3: 1070 medalhas
  - **Bolsas de Iniciação Científica Jr., do CNPq:** 6.500 - Alunos medalhistas de ouro, prata e bronze e matriculados em escolas públicas em 2017
  - **Certificados de Menção Honrosa:** até 46.200 - Excluídas as notas dos alunos premiados com medalhas, as melhores notas de alunos de escolas não seletivas em sua respectiva Unidade de Federação (UF) - até 16.200 certificados. Excluídas as notas dos alunos premiados com medalha e excluídos os alunos premiados no ítem anterior, os alunos com melhores notas de todas as escolas - até 30.000 certificados.
    - Nível 1: até 15.400 certificados;
    - Nível 2: até 15.400 certificados;
    - Nível 3: até 15.400 certificados;
- **Alunos de Escolas Privadas**
  - **Medalha de ouro:** 75 - Alunos de Escolas Privadas. Primeiros colocados na classificação nacional.

    * Nível 1: 25 medalhas
    * Nível 2: 25 medalhas
    * Nível 3: 25 medalhas

  - **Medalha de prata:** 225 - Excluídas as notas dos alunos premiados com medalhas de ouro, os 75 primeiros alunos em cada nível.
    * Nível 1: 75 medalhas
    * Nível 2: 75 medalhas
    * Nível 3: 75 medalhas

  - **Medalha de bronze:** 625 - Excluídos os premiados com medalhas de ouro e prata, os primeiros alunos em cada nível.
    * Nível 1: 225 medalhas
    * Nível 2: 225 medalhas
    * Nível 3: 225 medalhas

  - **Certificados de Menção Honrosa:** até 5.700 - Excluídos os medalhistas de ouro, prata e bronze, os primeiros alunos em cada nível.
    * Nível 1: 1900 medalhas
    * Nível 2: 1900 medalhas
    * Nível 3: 1900 medalhas

- **Professores**

  - **Participação no programa OBMEP na Escola em 2019, 1 diploma e 1 livro de apoio para formação matemática:** 84 - Os 2 (dois) professores de escola pública não seletiva com a maior média em sua UF, sendo um entre os grupos 1 e 8 e outro entre os grupos 9 e 15. No Anexo A, é descrita esta distribuição dos professores em grupos de 1 a 15. Excluídos os premiados acima, os 2 (dois) professores de escola pública não seletiva com a maior média em seu grupo.

  - **1 diploma e 1 livro de apoio para formação matemática:** 885 - Em cada grupo, de cada UF, 1 (um) professor de escola pública não seletiva que obtiver a maior média em seu grupo, excluídos os premiados acima. Aos 30 (trinta) professores de escola não seletiva com a maior média nacional em seu grupo, excluídos os premiados no item anterior.
    * A 1 (um) professor de escola pública seletiva com a maior média nacional de cada grupo.
    * A 1 (um) professor de escola privada com a maior média nacional de cada grupo.

- **Escolas**
  - **Kit Esportivo:** 105- As 7 (sete) escolas públicas não seletivas que alcançarem a maior pontuação em cada um dos quinze grupos.
  - **Kit de material didático: 405-** A escola pública não seletiva que alcançar o maior número de pontos em seu respectivo grupo, em cada UF, excluídas as escolas premiadas no item anterior.
  - **Troféus:** 30
    - A escola pública seletiva que alcançar o maior número de pontos em seu respectivo grupo.
    - A escola privada que alcançar o maior número de pontos em seu respectivo grupo.
- **Secretarias Municipais de Educação**
  - **Troféus:** 52 - As 2 (duas) secretarias municipais que obtiverem a maior pontuação em sua respectiva UF.

Os certificados de mensão honrosa, medalhas de prata e bronze, bem como os prêmios de professores, escolas e secretarias municipais serão entregues pelas coordenações regionais da OBMEP no ano subsequente à realização da edição. O IMPA é responsável pela organização da cerimônia de premiação para entrega das medalhas de ouro, que é realizada no ano subsequente à realização da edição. Todos os certificados e diplomas de premiação são disponibilizados exclusivamente na página da OBMEP para download. Não são emitidos certificados e diplomas impressos pelo IMPA, com exceção dos certificados de menção honrosa.

1.2 Canguru de Matemática

O Concurso Canguru de Matemática (CANGURU DA MATEMáTICA, 2020) é uma competição anual internacional destinada aos alunos do 3º ano do Ensino Fundamental até os da 3ª série do Ensino Médio, das escolas públicas e privadas do Brasil e de mais de 80 países. O Canguru de Matemática foi criado em 1995, na França, inspirado em um grande programa de competições matemáticas da Austrália (de onde vem o nome do concurso). Anualmente, um seleto grupo de professores se reúne para discutir o ensino da Matemática e preparar as provas que serão aplicadas nos países participantes.

O objetivo do Canguru de Matemática é promover a divulgação da Matemática por todos os meios ao seu alcance e, em particular, com a realização do concurso que envolve e motiva milhares de alunos pelo mundo. No Brasil, o Canguru da Matemática teve início em 2009, e a partir daí o número de escolas participantes tem crescido expressivamente. Em 2018, foram mais de 2 mil escolas e mais de 300 mil alunos participantes.

Os participantes do concurso são divididos em 6 (seis) níveis de prova:

- **Nível P** - 3º ou 4º anos do Ensino Fundamental
- **Nível E** - 5º ou 6º anos do Ensino Fundamental
- **Nível B** - 7º ou 8º anos do Ensino Fundamental
- **Nível C** - 9º ano do Ensino Fundamental
- **Nível J** - 1º ou 2º ano do Ensino Médio
- **Nível S** - 3º ano do Ensino Médio

No Brasil, a prova é realizada em um único dia e tem duração de 100 minutos, para coincidir com a duração de duas aulas de 50 minutos, comum à maioria das escolas. As questões das provas são objetivas (testes) com cinco respostas alternativas, sendo apenas uma a correta. As provas dos níveis P e E têm 24 questões e as dos demais níveis, 30 questões. As questões são separadas explicitamente por três níveis de dificuldades: básico, intermediário e mais avançado, sendo um terço das questões para cada um dos níveis. Para melhor discriminação dos desempenhos dos estudantes, os valores das questões são de 3, 4 e 5 pontos para cada um dos níveis de dificuldade, respectivamente. Além disso, cada quatro questões erradas anulam uma correta.

O pagamento da taxa de inscrição efetuado pela escola participante para o Concurso é único e independe do número de alunos que realizará a prova.

As provas são baixadas pelas escolas participantes na área reservada do site do concurso conforme data prevista no calendário oficial, e reproduzidas de acordo com o número de inscritos da escola. Após a aplicação das provas, é de responsabilidade da escola o envio, via plataforma, das respostas dadas pelos seus alunos para serem corrigidas. A plataforma do Concurso Canguru de Matemática Brasil fornece, às escolas participantes, os resultados preliminares de seus respectivos alunos divididos nas seguintes categorias: alunos com potencial de premiação e alunos participantes.

Os alunos com potencial de premiação são divididos nas quatro categorias abaixo:

- 1% dos melhores colocados, por nível, em território nacional, recebem a classificação ouro;
- 2% dos melhores colocados, por nível, em território nacional, recebem a classificação prata;

- 3% dos melhores colocados, por nível, em território nacional, recebem a classificação bronze, e;
- 4% dos melhores colocados, por nível, em território nacional, recebem a classificação honra ao mérito.

As escolas participantes terão acesso aos certificados de participação e de premiação de todos os alunos que realizaram a prova do Concurso. A escola é responsável pela impressão e entrega dos certificados aos seus alunos e familiares. Após a divulgação dos resultados finais, as escolas que optarem poderão realizar a compra das medalhas de premiação para seus alunos.

2 GRAFOS ATRÁVES DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

Neste capítulo, utilizamos questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP) e do Canguru da Matemática para introduzir conceitos e resultados da Teoria dos Grafos. Nesta dissertação, abordamos todas as questões de grafos encontradas nestas competições desde a sua origem até o ano de 2019. Com o objetivo de subsidiar o trabalho do professor na perspectiva de mostrar as competições e/ou de promover grupos de treinamento, apresentamos algumas questões na forma de sequências didáticas que nesta dissertação são denotadas por **problemas**, e incluem explicações detalhadas das suas resoluções. Além de algumas questões que foram consideradas como adicionais porque usam a mesma ideia de uma questão anterior e, neste caso, denotamos simplesmente por **questões**, e acrescentamos comentários para facilitar a consulta rápida e a busca por alguma característica. As questões que não possuem referência em relação a alguma das duas competições abordadas nesta pesquisa, são inéditas, elaboradas pelo próprio autor e são relacionadas a tópicos da Teoria dos Grafos que ainda não são explorados pela OBMEP e pelo Canguru da Matemática em suas questões.

Em (CARNEIRO, 2004), por exemplo, são apresentadas algumas sugestões de como o professor pode proceder em sala de aula ou em iniciativas na escola para utilizar as questões da OBMEP, mas não há referência a materiais sobre a Teoria dos Grafos. Várias abordagens já foram apresentadas até mesmo no Profmat sobre o tema de grafos na educação básica, como (SILVA et al., 2015) em seu trabalho, *Grafos: Uma experiência no Ensino Fundamental*, que descreve, a partir de um estudo de caso, uma experiência com grafos em uma escola de Ensino Fundamental da rede particular de ensino, no estado do Rio de Janeiro, assim como (COSTA, 2017) em, *Grafos: Algumas aplicações a nível médio*, que mostra como a Teoria dos Grafos pode ser usada como ferramenta para auxiliar no ensino de Matemática a nível médio, além de (GOMES, 2017) que em seu trabalho, *Grafos: Uma modelagem possível para as provas do ENEM*, apresenta uma possibilidade da aplicação do estudo de grafos na modelagem das questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A proposta aqui apresentada difere exatamente por propor a utilização das questões de competições de matemática para a introdução dos grafos e a utilização deste tipo de abordagem é sugerida em ações específicas, como em clubes de matemática. Desta forma, os grafos aparecem naturalmente como sendo provenientes da necessidade de resolver questões e não há a percepção de que questões foram criadas para testar os conhecimentos sobre um certo conteúdo, o que é muito comum no ensino tradicional da matemática. Entender a ciência desta forma, que é desenvolvida a partir das necessidades, é fundamental para que o aluno não tenha a falsa impressão de que as coisas estão todas prontas e não fazem sentido.

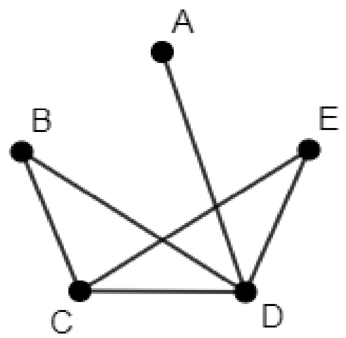
2.1 Noções básicas: Construindo grafos

A questão a seguir tem por objetivo introduzir as definições e t erminologia da Teoria dos Grafos. As definições sobre grafos apresentadas neste trabalho foram retiradas de (JURKIEWICZ, 2009) e (BRIA, 2001).

Problema 1.*(Canguru de Matemática - Nível C - 2019)* - Alana, Bela, Clara, Dora e Érica se encontraram numa festa e apertaram as mãos, exatamente uma vez, de todas as pessoas que elas já conheciam neste grupo. Alana deu um aperto de mão, Bela deu dois, Clara deu três e Dora deu quatro apertos de mãos. Quantos apertos de mão deu Érica?

Solução. Para resolver este problema podemos construir um diagrama em que associamos pessoas a pontos, e linhas ligando esses pontos, indicando duas pessoas que já se conheciam. Sejam: A-Alana, B-Bela, C-Clara, D-Dora e E-Érica. Dora apertou a mão de todas as outras quatro pessoas, ou seja, no diagrama o ponto D deve estar ligado a todos os outros pontos, da mesma forma, o ponto C que representa Clara deve estar ligado a todos os outros pontos, exceto ao ponto A que representa Alana que apertou apenas a mão de Dora. Note que com isso os pontos B e E devem estar ambos conectados aos pontos C e D, satisfazendo assim as condições do problema. De acordo com o diagrama construído (Figura 1) podemos concluir que Érica apertou a mão de duas pessoas (Clara e Dora).

Figura 1 - Diagrama(Grafo)



Fonte: O autor, 2020.

Podemos utilizar diagramas feitos com pontos e linhas como modelo matemático na resolução de diversos problemas. Na Matemática essas estruturas são chamadas de **grafo** e o desenho que o representa é chamado de **representação geométrica** do grafo . Ao representarmos a situação problema dessa forma, estamos fazendo uma **modelagem em grafos** da questão proposta, concebendo um **grafo-modelo** à mesma.

O que realmente nos importa saber em um grafo é quem são os seus vértices e quais deles estão ou não conectados (ou seja, quem são suas arestas). Dessa forma também podemos representar um grafo por meio de dois Conjuntos :

- O conjunto V de **vértices** (pontos) que na questão representa cada uma das cinco pessoas - $V = \{A, B, C, D, E\}$
- O conjunto E de **arestas** (linhas) que representa os apertos de mãos dados por elas - $E = \{AD, BC, BD, CD, CE, DE\}$

De modo formal temos que um **grafo** $G\,(V, E)$ é uma estrutura matemática que consiste de :

- um conjunto finito não vazio V(G) de elementos denominados **vértices** de G;
- outro conjunto E(G) de pares não ordenados de vértices distintos, pares estes denominados **arestas** de G.

O número de vértices será representado por $|V|$ ou pela letra n.

O número de arestas será representado por $|A|$ ou pela letra m.

No nosso exemplo $n = 5$ e $m = 6$.

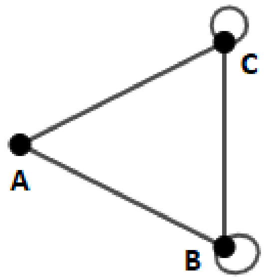
Sejam a e b dois elementos quaisquer do conjunto V, designa-se por $e = (a, b)$ ou simplesmente ab a aresta cujas extremidades são os vértices a e b. Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são **adjacentes** e que a aresta é **incidente** aos vértices.

Chamamos de **grau de um vértice** v o número de arestas que nele incide e é representado por $d\,(v)$. No nosso exemplo da Figura 1 $d\,(A) = 1$; $d\,(B) = 2$.

Um **percurso** é uma sequência de arestas do tipo $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{s-1}v_s$; s é o comprimento do percurso (exemplo: ADECDE, Figura 1). Se todos os vértices do percurso são distintos, o percurso é chamado de **caminho** (exemplo: ADECB, Figura 1), e se $v_0 = v_s$ (caminho fechado) temos um **ciclo** (exemplo: BCEDB, Figura 1).

Um **laço** é uma aresta que liga um vértice a ele mesmo. A Figura 2 mostra um grafo com laços nos vértices B e C.

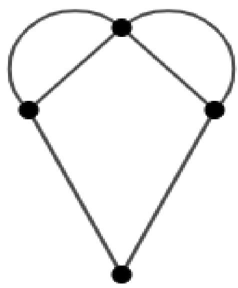
Figura 2 - Grafo com laço



Fonte: O autor, 2020.

Quando duas ou mais arestas ligam os mesmos dois vértices elas são chamadas de arestas múltiplas e o grafo que as contém é denominado por **multigrafo**. A Figura 3 mostra um multigrafo.

Figura 3 - Multigrafo



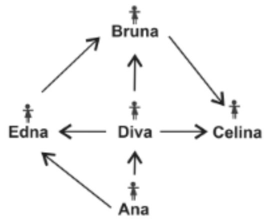
Fonte: O autor, 2020.

A questão a seguir apresenta um grafo cujas arestas têm uma orientação, esse grafo recebe o nome de digrafo.

Problema 2.*(OBMEP - 2007 - NÍVEL 1)* A Figura 4 mostra como comparar as idades de cinco irmãs, usando flechas que partem do nome de uma irmã mais nova para o nome de uma mais velha. Por Exemplo Edna é mais velha que Ana. Qual é a irmã mais velha?

A) Ana B) Bruna C) Celina D) Diva E) Edna

Figura 4 - Digrafo



Fonte: OBMEP - Nível 1 - 2007

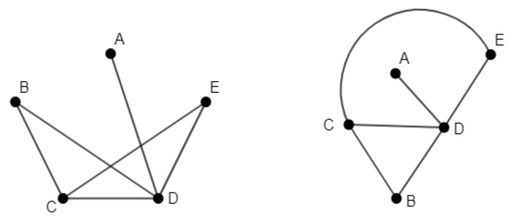
Solução. Como as flechas partem da irmã mais nova para a mais velha, a irmã mais velha é aquela que tem o nome do qual não partem (ou só chegam) flechas. Essa irmã é a Celina. Resposta C.

Grafos que não possuem laços ou arestas múltiplas são chamados de **grafos simples**. Nesta dissertação estamos trabalhando quase sempre com grafos simples e sem orientação. Em caso contrário, será mencionado este fato no texto.

2.2 Isomorfismo

Considerando o grafo representado no problema inicial deste trabalho (Figura 1), onde pessoas de um determinado grupo se conhecem, podemos verificar que este mesmo grafo pode ser desenhado de maneiras diferentes como mostra a Figura 5, onde os dois grafos apresentam a mesma estrutura e assim podem representar uma mesma situação.

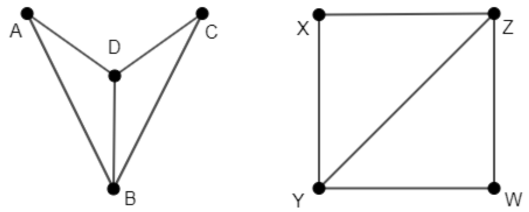
Figura 5 - Grafos isomorfos



Fonte: O autor, 2020.

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos **isomorfos** se existe uma correspondência bijetiva entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências. Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais. Na Figura 6 temos exemplos de grafos isomorfos.

Figura 6 - Grafos isomorfos



Fonte: O autor, 2020.

Estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os conjuntos dos vértices temos:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \leftrightarrow A \\ & Y \leftrightarrow B \\ & W \leftrightarrow C \\ & Z \leftrightarrow D \end{aligned}$$

2.3 Representação por matrizes

No caso de um grafo ter um grande número de vértices e arestas, a sua representação geométrica pode se tornar invíavel e para resolver problemas deste tipo o auxílio de um computador acaba sendo indispensável. Neste caso uma forma de representar a estrutura de um grafo a um computador é através de uma tabela, onde cada vértice esteja representado em uma linha e em uma coluna e a tabela deve ser preenchida colocando 1 se existir uma aresta ligando os vértices, e 0 se não existir tal aresta. A tabela a seguir representa o grafo do nosso problema introdutório (Figura 1).

X	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	0
B	0	0	1	1	0
C	0	1	0	1	1
D	1	1	1	0	1
E	0	0	1	1	0

Esta tabela pode ser representada por uma matriz M de ordem 5.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Na Teoria dos Grafos é chamada **Matriz de Adjacência** do grafo toda matriz quadrada formada por 1 e 0, onde 1 representa a existência de aresta ligando dois vértices, e 0, que não há tal aresta. Note que o grau de um vértice pode ser determinado examinando-se a matriz de adjacência, pela quantidade de 1's que aparece na linha ou na coluna relativa ao vértice considerado.

A simplicidade dessas estruturas e suas inúmeras formas de abordagem e aplicação criam um ambiente favorável a aprendizagem de muitos temas da Matemática, pois não requerem, por parte dos alunos, conhecimento profundo em conteúdos prévios, permitindo que este use a sua intuição e criatividade na resolução de diversos problemas, e despertando um novo olhar para esta ciência.

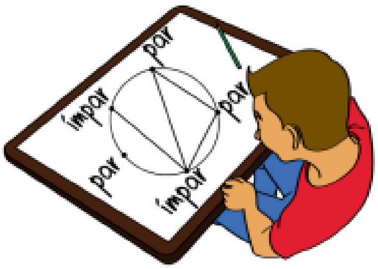
Para resolver as questões apresentadas neste trabalho, utilizaremos a representação geométrica dos grafos, pois é a que melhor corresponde aos nossos objetivos. Mas o professor pode escolher a forma de representação que considerar mais conveniente.

2.4 Descobrindo alguns resultados

Utilizamos a questão a seguir como situação-problema, a fim de explorar de forma lúdica o que há de mais elementar em termos de resultados da Teoria dos Grafos, a relação entre a soma dos graus dos vértices de um grafo e o seu o número de arestas.

Problema 3.*(OBMEP- 2ª fase - 2011 - Nível 1)* Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e traça segmentos ligando alguns desses pontos. Ele chama um ponto de ponto-ímpar quando este está ligado a um número ímpar de pontos, e de ponto-par caso contrário. Por exemplo, na ilustração (Figura 7), ele escolheu cinco pontos e fez quatro ligações.

Figura 7 - OBMEP- 2a fase - Nível 1 - 2011

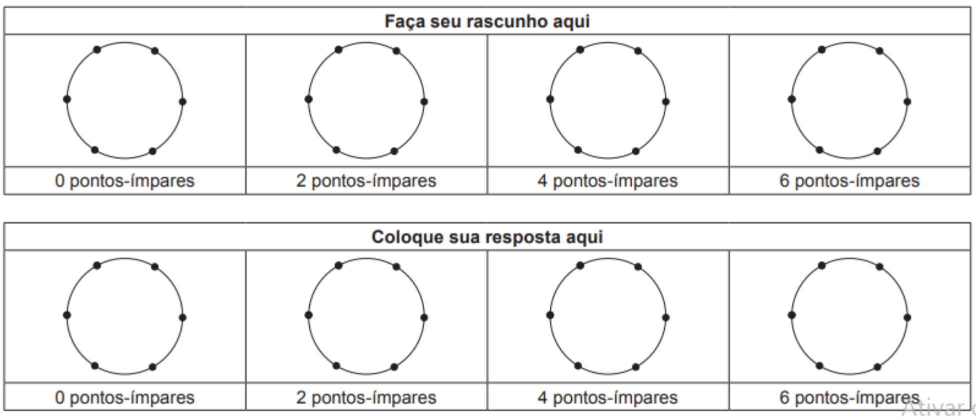


Fonte: O autor, 2020.

a) Juquinha marcou cinco pontos sobre uma circunferência e traçou todas as ligações possíveis, exceto uma. Quantos pontos-ímpares foram obtidos?

b) Juquinha marcou seis pontos em cada uma das circunferências (Figura 8). Em cada caso, mostre como obter o número de pontos-ímpares indicado com exatamente cinco ligações.

Figura 8 - OBMEP- 2a fase - Nível 1 - 2011



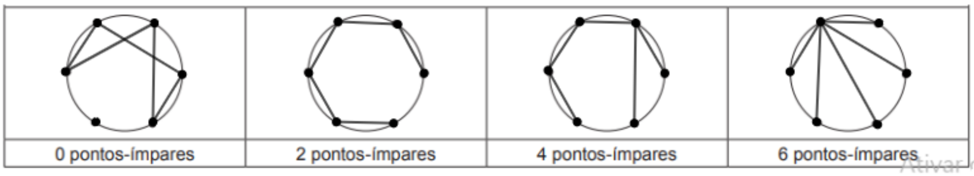
Fonte: O autor, 2020.

c) Explique por que Juquinha sempre encontrará um número par de pontos-ímpares, quaisquer que sejam o número de pontos que ele marcar e o número de ligações que ele traçar.

Solução. a) Marcando todas as ligações possíveis, cada um dos cinco pontos (vértices) fica ligado aos outros quatro pontos, assim teríamos cinco pontos-pares, excluindo uma ligação (aresta), os dois pontos que foram desconectados ficarão ligados aos outros três pontos restantes. Assim obtemos dois pontos-ímpares.

b) A Figura 9 ilustra uma maneira de obter 0, 2, 4 e 6 pontos-ímpares.

Figura 9 - OBMEP- 2a fase - 2011 - Nível 1



Fonte: O autor, 2020.

c) Para cada vértice do desenho feito por Juquinha, contamos a quantos outros vértices ele está conectado e somamos todos esses números. Essa soma é par, pois como cada ligação conecta dois vértices, essa soma é duas vezes o números de ligações. Nessa soma cada vértice par contribui com uma parcela par e cada vértice ímpar com uma parcela ímpar; como a soma é par, o número de parcelas ímpares deve ser par, ou seja, o número de vértices ímpares é par.

Tendo em vista que o que difere a figura feita por Juquinha da estrutura de um grafo, é a circunferência, a questão possibilita ao aluno a experiência de construir alguns grafos como é pedido no item b da questão, além de definir de modo informal o que é um vértice de grau par e um vértice de grau ímpar. O exemplo ilustrado na Figura 7 facilita a interpretação da questão.

Com a resolução deste problema, é possível conjecturar o nosso primeiro resultado sobre grafos. O Teorema 1 mostra que a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

Os resultados apresentados e demonstrados nos teoremas, lemas e corolários encontrados neste capítulo foram retirados de (JURKIEWICZ, 2009).

Teorema 1. *Seja $G\,(V,E)$ um grafo tal que m é o número de arestas de E*

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2.m$$

A demonstração deste Teorema segue imediatamente da ideia de que cada aresta possui duas extremidades, assim quando contamos os graus dos vértices e os somamos, estamos contando cada aresta duas vezes.

Como consequência do resultado anterior temos que, em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar deve ser par.

Corolário. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Observe que se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par.

2.4.1 Algumas questões adicionais sobre noções básicas de grafos

Questão 1.*(BQ - OBMEP - 2014 - Nível 3)* - Num grupo de 20 pessoas, algumas pessoas trocam apertos de mão.

a) Contamos quantos apertos de mão cada pessoa deu e somamos todos esses números. Mostre que o resultado é par.

b) É possível que num grupo de 99 pessoas cada pessoa tenha dado exatamente 3 apertos de mão?

Solução. a) Como um aperto de mão é dado entre duas pessoas, quando somamos os apertos de mão de todas as pessoas, cada aperto de mão é contado duas vezes. Assim, a soma de quantas vezes cada pessoa apertou a mão de alguém é par.

b) Como são 99 pessoas, se cada uma apertasse a mão de alguém 3 vezes, isso daria um total de $3 \times 99 = 297$ apertos de mão. Mas como vimos no item anterior, este total deve ser par, pois cada aperto de mão entre duas pessoas foi contado duas vezes. Por outro lado, 297 é ímpar, logo, não é possível.

Comentário. Podemos pensar no problema como um grafo, onde cada um de seus vértices representa uma das 20 pessoas do grupo, e cada aperto de mão dado por duas dessas pessoas, uma aresta desse grafo. O número de apertos de mão trocados por cada pessoa representa o grau de cada vértice desse grafo, que quando somados resultam em um número par como vimos na resolução do item a) da questão.

Questão 2.*(OBMEP - 2007 - Nível 1)* - Um grupo de amigos acampou durante seis noites e toda noite, dois deles vigiaram o acampamento. Cada um ficou de guarda três vezes. Nunca com o mesmo amigo. Quantos eram os amigos?

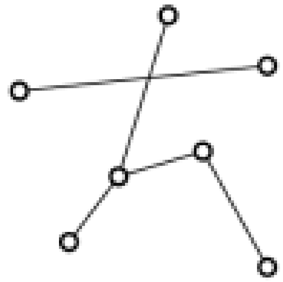
A)3 B)4 C)6 D)12 E)18

Solução. Considerando que cada amigo represente um vértice de um grafo e cada par de amigos que vigiaram o acampamento por uma das seis noites como uma aresta, podemos afirmar que o grafo formado pelos amigos possui seis arestas e v vértices, cada um possuindo grau igual a três (cada um ficou de guarda três vezes). Daí temos que a soma dos graus dos vértices é igual a $3v$ e deve ser igual ao dobro do número de arestas, assim temos que $3v = 2.6$, resolvendo a equação temos que $v = 4$, logo os amigos eram 4. Resposta B.

Comentário. Além de poder ser utilizada para introduzir os resultados obtidos nesta seção, a questão também pode ser resolvida utilizando o raciocínio combinatório. Podemos pensar qual é o número de amigos n que combinados dois a dois tem o 6 como resultado, para isto basta resolver a equação $\frac{n.(n-1)}{2} = 6$, obtendo $n = 4$.

Questão 3._(Canguru da Matemática - 2014 - Nível J)_ - Carina quer adicionar alguns segmentos na Figura 10, de modo que cada um dos sete pontos tenha o mesmo número de ligações com os demais. Pelo menos quantos segmentos ela deve traçar?
A)4 B)5 C)6 D)9 E)10

Figura 10 - Canguru da Matemática



Fonte: O autor, 2020.

Solução. O grafo representado na Figura 10 possui 7 vértices, devemos adicionar algumas arestas ao grafo de modo que todos os vértices tenham o mesmo grau (par ou ímpar), mas como já sabemos o número de vértices de grau ímpar em um grafo deve ser par, assim todos os vértices do grafo devem ser pares e ter o mesmo grau. Como o maior grau de um vértice do grafo é 3, todos os vértices devem ter grau no mínimo igual a 4. Logo o número de arestas do grafo deve ser $m = \frac{4.7}{2} = 14$ e, como já temos 5 arestas no grafo, devemos adicionar pelo menos mais 9 arestas.

Comentário. A Figura 10 ilustra um grafo com 7 vértices e 5 arestas que deve ser transformado, através da inclusão de novas arestas em um grafo cujos vértices tenham o mesmo grau (grafo regular). A questão também pode ser resolvida desenhando na Figura 10 as arestas que faltam, de modo a cumprir as exigências do enunciado.

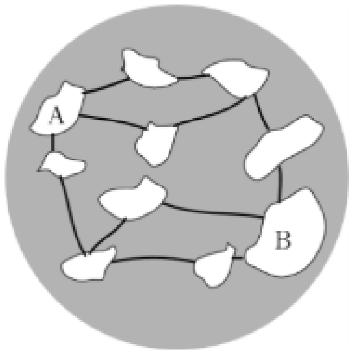
2.5 **Grafos Conexos**

O problema a seguir tem o objetivo de abordar os conceitos de grafos **conexos** e grafos **desconexos**.

Problema 4. *(Canguru da Matemática - 2017 - Nível B)* - Num certo lugar (Figura 11) há 10 ilhas e 12 pontes. Todas as pontes estão abertas ao tráfego neste momento. Qual é o menor número de pontes que devem ser fechadas de forma que seja impossível ir de A para B ou de B para A?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

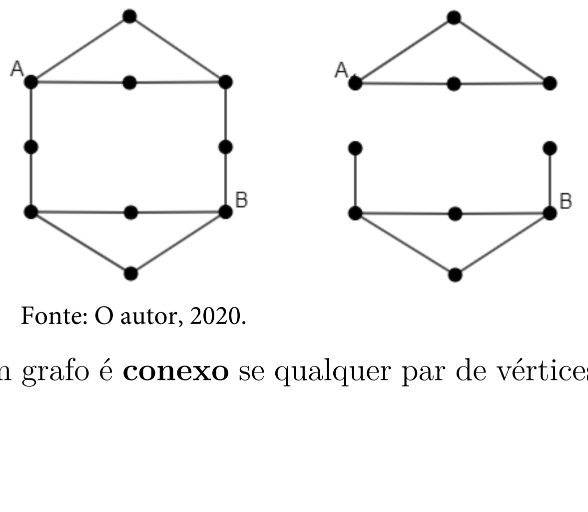
Figura 11 - Canguru da Matemática - Nível B - 2017



Fonte: O autor, 2020.

Solução. Considerando ilhas como vértices e pontes como arestas, podemos modelar o problema da forma ilustrada na Figura 12 que possui um grafo onde é possível ir do vértice A até o vértice B, passando por vértices intermediários, note que removendo apenas uma das 12 arestas deste grafo percebemos que mesmo assim ainda é possível ir do vértice A até o vértice B, mas removendo duas de suas arestas como mostra a Figura 12 fica impossível realizar um percurso que ligue estes dois vértices. Note que após essas remoções o grafo fica dividido em duas partes, tornando impossível ir do vértice A ao vértice B, um grafo com essas características será chamado de **grafo desconexo**. Cada parte desse grafo é chamada de **componente conexa do grafo**. Neste problema, quando removemos duas das arestas desse grafo, ele passa a ser desconexo, formado por duas componentes conexas.

Figura 12 - Grafo conexo e grafo desconexo



Fonte: O autor, 2020.

Dizemos que um grafo é **conexo** se qualquer par de vértices é ligado por ao menos um caminho.

Questão 4._(BQ - OBMEP - 2018 - Nível 3)_ - Em um certo país há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente 2 das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer 2 cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

Solução retirada do BQ da OBMEP. Diremos que um grupo de cidades é conexo se é possível viajar de uma delas para qualquer outra por meio de estradas. Naturalmente, grupos de cidades conexas distintos não podem possuir cidades em comum. Se o governo construir todas as estradas de um grupo de 20 cidades e deixar uma cidade isolada sem estradas, a propriedade de todas as cidades pertencerem a um mesmo grupo conexo não será estabelecida. Portanto, $n > \binom{20}{2} = 190$. Mostraremos agora que se o governo construir 191 estradas todas as cidades farão parte de um mesmo grupo conexo. De fato, suponha que exista mais de um grupo conexo e seja k, com $1 \leq k \leq 20$, o número de vértices de um deles, que chamaremos de A. Recordamos que se ligarmos todas as estradas possíveis em um grupo de n cidades, obteremos $\frac{n(n-1)}{2}$ estradas. Como não devem existir estradas entre o grupo A e os demais grupos que contém as outras $21-k$ cidades, o total de estradas não é maior que

$$\begin{aligned}
\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(21-k)(20-k)}{2} &= \\
k^2 - 21k + 210 &= \\
(k - \frac{21}{2})^2 + \frac{399}{4} &\leq \\
\frac{19^2}{2} + \frac{399}{4} &= 190
\end{aligned}$$

Isso é um absurdo, pois o governo construiu 191 estradas. Assim, o menor valor de n é 191.

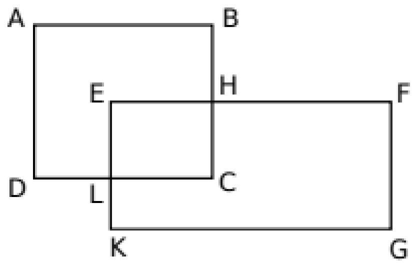
Comentário. Considerando cidades como vértices e estradas como arestas de um grafo, temos na solução do problema a definição de grafos conexos de modo informal, e o que se quer saber na verdade no problema é o número mínimo de arestas que devem ser adicionadas ao grafo para que este seja conexo. Como estratégia de resolução o aluno deve utilizar além do raciocínio lógico, algumas técnicas básicas de contagem e cálculo algébrico. Mais adiante neste trabalho, veremos como resolver problemas deste tipo de forma bem simples, utilizando um tipo de grafos específico, as árvores.

2.6 Grafos Eulerianos

O problema a seguir tem o objetivo de introduzir noções sobre grafos eulerianos.

Problema 5. *(BQ - OBMEP - 2013 - Nível 1)* - Dizemos que um desenho é bem desenhado quando pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar o lápis duas vezes por cima de uma mesma linha. Por exemplo, o desenho representado na Figura 13 é bem desenhado, pois pode ser desenhado, por exemplo, seguindo a ordem dos vértices:

Figura 13 - BQ - OBMEP - Nível 1 - 2013

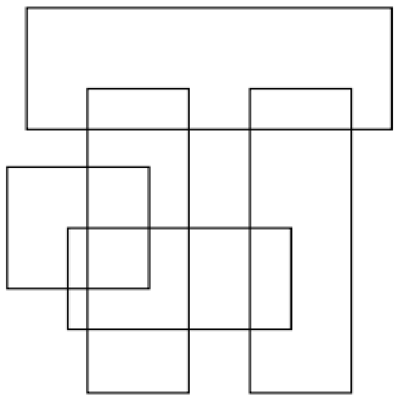


Fonte: O autor, 2020.

$$A \to B \to H \to F \to G \to K \to L \to C \to H \to E \to L \to D \to A$$

a) Mostre que o desenho representado na Figura 14 é bem desenhado:

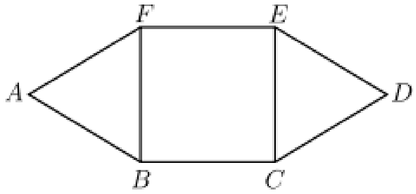
Figura 14 - BQ - OBMEP - Nível 1 - 2013



Fonte: O autor, 2020.

b) O desenho representado na Figura 15 é bem desenhado? Justifique.

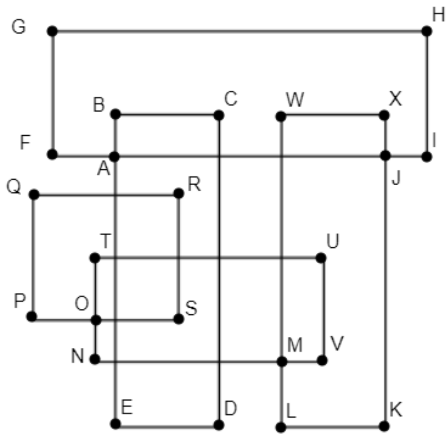
Figura 15 - BQ - OBMEP - Nível 1 - 2013



Fonte: O autor, 2020.

Solução. a) O desenho é bem desenhado, para verificar tal fato basta seguir a seguinte sequência de vértices na Figura 16:
$A \to B \to C \to D \to E \to A \to F \to G \to H \to I \to J \to K \to L \to M \to N \to O \to P \to Q \to R \to S \to O \to T \to U \to V \to M \to W \to X \to J \to A$

Figura 16 - Desenho bem desenhado



Fonte: O autor, 2020.

b) A figura não pode ser bem desenhada. De fato, se percorremos o desenho como no enunciado do problema, chegaremos em cada vértice tantas vezes quanto sairmos (exceto os vértices inicial e final). Assim, o grau de cada vértice, exceto dois deles, deve ser par. Isto não acontece no desenho ilustrado no item b) do problema (Figura 15).

O desenho ilustrado no exemplo dado no enunciado do problema prévio, pode ser modelado como um grafo, onde seus vértices são os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, L e K e suas arestas são os segmentos que ligam alguns desses pontos como ilustra a Figura 13. O percurso formado pela sequência de vértices

$$A \to B \to H \to F \to G \to K \to L \to C \to H \to E \to L \to D \to A$$

mostra que o desenho pode ser considerado bem desenhado. Na Teoria dos Grafos quando um grafo possui esta propriedade, ele é chamado de **grafo euleriano** ou **grafo semi-euleriano**. Essa terminologia deve-se ao fato de o primeiro problema dessa classe ter sido propoto por Euler (1707-1783).

Um grafo com m arestas é dito **euleriano** quando existe um percurso que passe por cada uma das arestas exatamente uma vez, voltando ao ponto de partida. Se o grafo não é euleriano mas tem um percurso passando por cada aresta uma única vez, ele é dito **semi-euleriano**. Em outras palavras, podemos desenhar um grafo euleriano (ou melhor, uma representação geométrica dele) sem retirar o lápis do papel e retornando ao ponto inicial. Num grafo semi-euleriano começamos em um vértice e terminamos em outro.

O problema de saber se podemos desenhar uma figura sem tirar o lápis do papel e sem passar o lápis duas vezes por cima de uma mesma linha, pode não parecer importante, mas imaginemos que para prestar o serviço de recolhimento de lixo em um bairro, um caminhão sai de um ponto de partida, e para economizar combustível e beneficiar a natureza, deve passar uma única vez por cada rua desse bairro e voltar ao ponto de partida. Na verdade, é o mesmo problema. De uma forma geral, a Teoria dos Grafos se mostra uma ferramenta muito útil na análise de viabilidade de certas situações, como especificar rotas de atendimento para serviços a domicílio, transportes e coleta de lixo em cidades.

Notemos que ao olharmos para os desenhos ilustrados nas Figuras 13 e 14 como grafos eulerianos (já que são bem desenhados), temos que todos os vértices destes dois grafos possuem grau par (grau 2 ou grau 4), veremos a seguir alguns resultados importantes sobre percursos eulerianos em grafos, mostraremos que o fato de um grafo ser considerado euleriano ou semi-euleriano, depende da paridade do graus de seus vértices.

Lema. *Se todo vértice de um grafo G (não necessariamente simples) tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração. Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. A partir de um vértice v_0, qualquer, iniciamos nosso percurso. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. ∎

Teorema 2.(Teorema de Euler para grafos). *Um grafo conexo G (não necessariamente simples) é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

Demonstração.
($\Rightarrow$) Suponhamos que G tenha um ciclo de comprimento m. Cada vez que o percurso passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.
($\Leftarrow$) Usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com

menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo. Dentre todos os ciclos em G escolhemos um ciclo C com comprimento máximo. Se C tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de C. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de C, e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com C e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem um ciclo que passa por todos os vértices de H, e podemos adicionar as arestas desse ciclo às de C, obtendo assim um ciclo C_1 de comprimento maior que C. Mas isto contraria a hipótese de que C tinha comprimento maximo. ∎

Corolário[Euler]. *Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é semi-euleriano se, e somente se, dois vértices têm grau ímpar.*

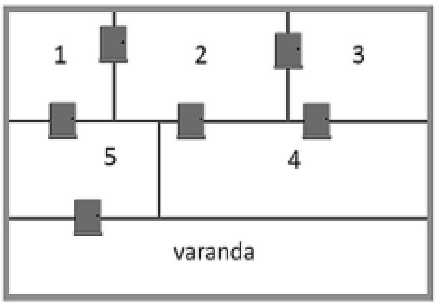
Demonstração.
($\Rightarrow$) Considere um grafo G de comprimento m semi-euleriano, ou seja G apresenta um caminho de comprimento m que começa em v_k e termina em v_p. Como o caminho é aberto, temos que v_k e v_p são distintos. Logo tanto v_k e v_p possuem graus ímpares, pois o percurso não retorna ao ponto de partida.
($\Leftarrow$) Seja o grafo G conexo com um par de vértices de grau ímpar, digamos v_k e v_p. Pelo Teorema de Euler, acrescentando uma aresta que liga v_k a v_p, os graus de todos os vértices se tornam pares, e existe um ciclo euleriano de comprimento $m + 1$ que começa e termina em v_k, e um caminho aberto de comprimento m que começa em v_k e termina em v_p que descreve um caminho semi-euleriano. ∎

2.6.1 Mais algumas questões sobre grafos eulerianos

Questão 5. *(Canguru da Matemática - 2018 - Nível S)* - A Figura 17 é a planta da casa de Renata. Ela entra pela porta da frente, na varanda, e passa por cada uma das portas exatamente uma vez. Em qual dos cômodos irá ficar?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Figura 17 - Canguru da Matemática - Nível S - 2018

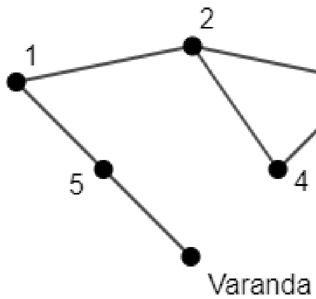


Fonte: O autor, 2020.

Solução. Renata entra forçosamente nos cômodos 5, 1 e 2. Do cômodo 2 pode ir para o 4 e depois o 3 ou pode ir para o 3 e depois o 4. Em ambos os casos deve voltar para o cômodo 2, pois tem que passar pelas seis portas. Resposta (B).

Comentário. O grafo ilustrado na Figura 18 representa a planta da casa de Renata, onde cada vértice representa um cômodo da casa e cada aresta representa uma porta, esse grafo é semi-euleriano, pois possui exatamente dois vértices de grau ímpar, o vértice que representa a varanda e o vértice que representa o cômodo 2, de graus iguais a 1 e 3, respectivamente. Como Renata iniciou o percurso pela varanda, ela deve terminá-lo no cômodo 2.

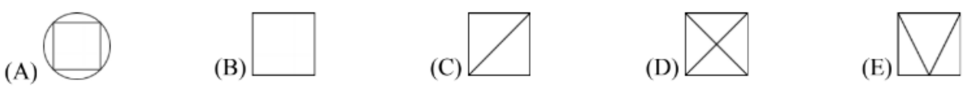
Figura 18 - Grafo-modelo da planta da casa de Renata



Fonte: O autor, 2020.

Questão 6. *(Canguru da Matemática - 2019 - Nível C)* - Qual dos desenhos a seguir (Figura 19) não pode ser feito sem você tirar o lápis do papel e sem passar o lápis pela mesma linha mais de uma vez?

Figura 19 - Canguru da Matemática - Nível C -2019



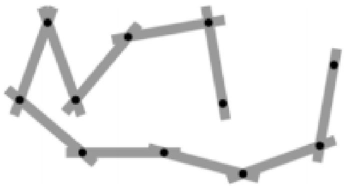
Fonte: O autor, 2020.

Solução. O grafo que representa o desenho procurado na questão não pode ser euleriano (ter todos os vértices de grau par) nem semi-euleriano (ter exatamente dois vértices de grau ímpar), o único que cumpre essas propriedades é o desenho do item D), que possui todos os vértices de grau ímpar. Resposta (D).

Comentário. A questão pode ser resolvida sem maiores dificuldades tentando fazer os desenhos e eliminando as alternativas que não estão de acordo com o enunciado.

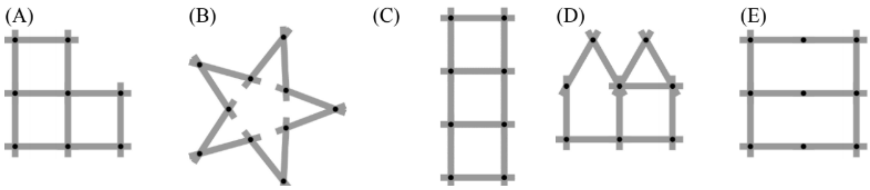
Questão 7. *(Canguru da Matemática - 2019 - Nível B)* - Lia brinca com o metro de carpinteiro de seu pai, com dez segmentos, mostrado na Figura 20. Qual das formas ilustradas na Figura 21 não pode ser feita com esse metro?

Figura 20 - Canguru da Matemática - Nível B - 2019



Fonte: O autor, 2020.

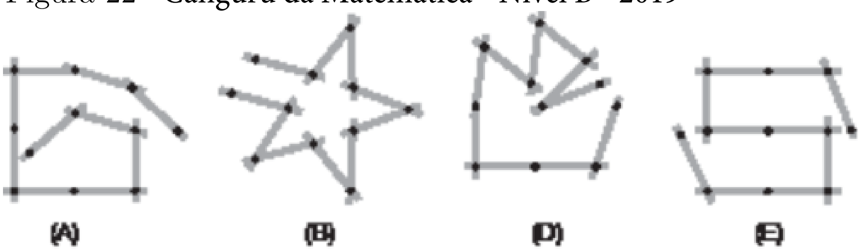
Figura 21 - Canguru da Matemática - Nível B - 2019



Fonte: O autor, 2020.

Solução - Canguru da Matemática: Os desenhos ilustrados na Figura 22 mostram formas de como dobrar o metro para obter as formas mostradas na Figura 21 nas alternativas (A), (B), (D) e (E). Isto indica que a forma (C) não pode ser obtida com o metro.

Figura 22 - Canguru da Matemática - Nível B - 2019



Fonte: O autor, 2020.

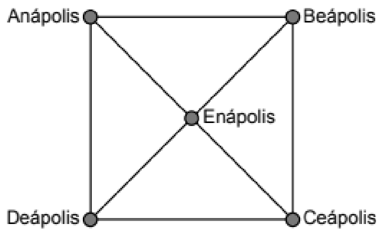
Comentário. Utilizando as noções de percursos semi-eulerianos, temos que os vértices com número ímpar de arestas tem que ser as duas pontas do metro. Na forma (C) há quatro vértices com número ímpar de arestas, logo não podem os quatro serem o início e o fim do metro.

2.7 Grafos Hamiltonianos

O problema a seguir tem o objetivo de introduzir noções de grafos hamiltonianos e fazer uma aplicação da Teoria dos Grafos no cotidiano.

Problema 6. *(BQ - OBMEP - 2014 - Nível 2)* a) A doutora Maria Amélia viaja para atender seus pacientes. Em seu primeiro dia de trabalho, ela tem que atender pacientes nas cidades Anápolis, Beápolis,Ceápolis, Deápolis e Enápolis. As cidades são ligadas por estradas, como mostra a Figura 23. Para atender os pacientes mais rapidamente, a doutora Maria Amélia precisa passar por cada cidade exatamente uma vez, e no fim voltar para a cidade de onde começou o percurso. A doutora começa em Anápolis. Mostre como ela pode fazer isso!

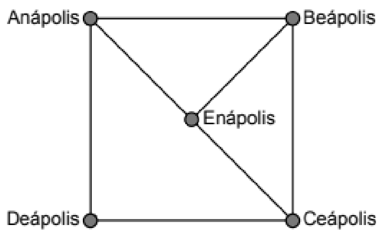
Figura 23 - BQ - OBMEP - Nível 2 - 2014



Fonte: O autor, 2020.

b) A doutora Maria Amélia precisa fazer o mesmo, mas agora uma estrada foi interditada para manutenção (Figura 24). Mostre que a doutora ainda pode fazer o percurso descrito anteriormente passando apenas uma vez por cada cidade e retornando para a cidade de partida, Anápolis.

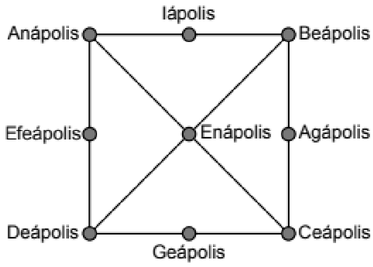
Figura 24 - BQ - OBMEP - Nível 2 - 2014



Fonte: O autor, 2020.

c) Com o crescimento populacional, surgiram novas cidades, Efeápolis, Geápolis, Agápolis e Iápolis, como mostrado na Figura 25. As estradas que estavam em manutenção voltaram a ser transitáveis. Mostre que neste caso não há solução para o problema, ou seja, não há como a doutora sair de Anápolis, passar por cada uma das outras cidades exatamente uma vez, e então voltar para Anápolis.

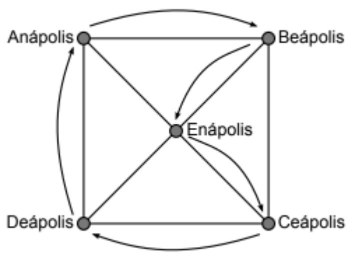
Figura 25 - BQ - OBMEP - Nível 2 - 2014



Fonte: O autor, 2020.

Solução OBMEP. a) Há várias soluções possíveis. Uma delas é a solução ilustrada na Figura 26.

Figura 26 - BQ - OBMEP - Nível 2 - 2014

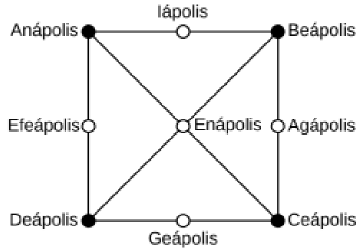


Fonte : O autor, 2020.

b) A solução anterior também serve para este item.

c) Uma maneira seria verificar todos os caminhos possíveis. Entretanto, façamos uma solução mais legal. Começemos colorindo os pontos que representam as cidades de preto (P) e branco (B) conforme ilustrado na Figura 27. Qualquer caminho passando uma vez por cada um dos pontos deveria visitar 5 pontos brancos e 4 pontos pretos. Note que, a partir de um ponto preto somente é possível seguir para um ponto branco e, da mesma forma, a partir de um ponto branco somente é possível seguir para um ponto preto. Logo, se fosse possível sair do ponto representando a cidade de Anápolis e voltar para esse mesmo ponto passando uma vez por cada um dos outros pontos, a sequência das cores dos pontos visitados deveria ser uma sequência alternada do tipo P, B, P, B, P, B,. . ..Logo, essa sequência deveria ter a mesma quantidade de pontos pretos e pontos brancos. Mas já havíamos determinado que essa sequência deveria ter 5 pontos brancos e 4 pontos pretos! Logo, não é possível que tal caminho exista.

Figura 27 - BQ - OBMEP - Nível 2 - 2014



Fonte: O autor, 2020.

O desenho ilustrado no enunciado da questão pela Figura 23 apresenta um grafo, cujos vértices representam as cidades onde Doutora Maria Amélia deve atender seus pacientes, e as arestas representam as estradas que ligam tais cidades. O que nos interessa saber na questão é se existe um percurso começando em um de seus vértices, passando por todos os outros uma única vez e voltando ao vértice de partida. Os grafos que satisfazem esta condição são denominados **hamiltonianos**, e recebem esse nome pelo fato de o problema precursor sobre esse tipo de grafo dever-se ao matemático Hamilton (1805-1865).

Um grafo G é dito ser **hamiltoniano** se existe um ciclo em G que contenha todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo. Este ciclo é chamado de **ciclo hamiltoniano**. Sendo assim, um grafo é hamiltoniano se ele contiver um ciclo hamiltoniano.

Apesar dos problemas com grafos hamiltonianos parecerem similares aos de grafos eulerianos, essa semelhança para por aqui. O problema de saber se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos mais estudados da Teoria dos Grafos pois pode ser aplicado a diversos contextos como na comunicação, no transporte e planejamento. Entretanto, até hoje, nenhuma condição necessária e suficiente para que um grafo seja hamiltoniano foi encontrada.

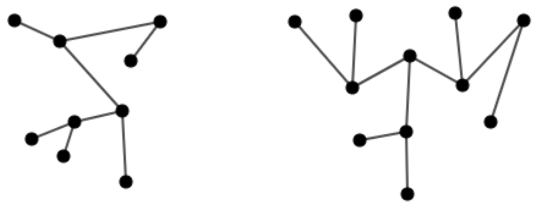
Para solucionar o item c) do problema prévio, utilizamos a estratégia de colorir os vértices do grafo (Figura 27), no decorrer deste trabalho abordaremos alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando essa mesma estratégia, a coloração de vértices em grafos.

2.8 Árvores

Nesta seção abordaremos um tipo de grafo bem simples, mas que pode ser utilizado para modelar diversas situações-problemas, as **árvores**.

Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos. No exemplo ilustrado na Figura 28, temos duas árvores, uma com 9 vértices e 8 arestas e outra com 11 vértices e 10 arestas.

Figura 28 - Árvores



Fonte: O autor, 2020.

Note que, como uma árvore não possui ciclos, ela pode ser considerada o grafo conexo com o menor número de arestas. O resultado a seguir relaciona o número de vértices e o número de arestas de uma árvore.

Teorema 3. *Se T é uma árvore com n vértices, então T possui exatamente $n - 1$ arestas.*

Demonstração. Demostraremos este resultado por indução matemática:

- *Caso base ($n = 1$)*: Toda árvore com um vértice tem zero arestas. Este passo é verdadeiro já que a única aresta que poderia existir seria uma aresta laço e, assim, haveria um ciclo. Como árvores não possuem ciclos, logo não pode haver nenhuma aresta.

- *Hipótese de indução* : Se T é uma árvore com n vértices, então T possui exatamente $n - 1$ arestas.

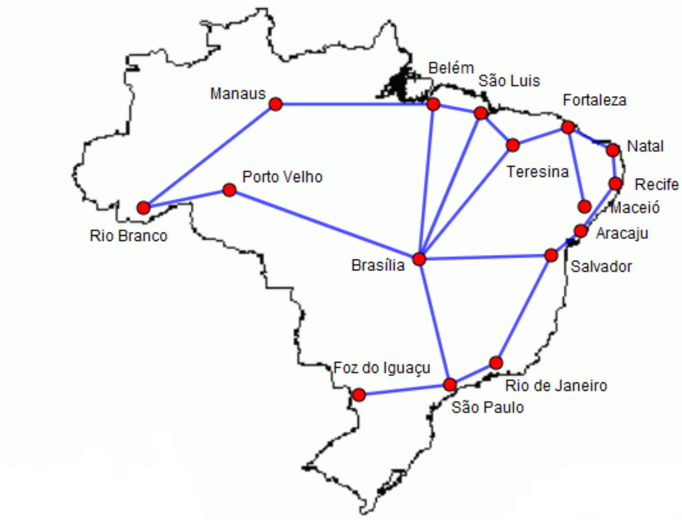
- *Passo de indutivo* : Devemos mostrar que toda árvore com $n + 1$ vértices tem n arestas, $k \geq 1$. Seja G uma árvore com $n + 1$ vértices, pela definição de árvore, G não contém ciclos. Portanto, a retirada de uma aresta uv separa u de v e o grafo é separado em um par de árvores G_1 e G_2, com n_1 e n_2 vértices, respectivamente, tais que $n_1 + n_2 = k + 1$. O número de arestas de G_1 é $n_1 - 1$ e o número de arestas de G_2 é $n_2 - 1$. Acrescentando a aresta uv, concluímos que o número de arestas de G é, portanto, $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n$. Assim toda árvore com $n + 1$ vértices possui n arestas ■

Mesmo que árvores seja um tópico da Teoria dos Grafos ainda não explorado em questões da OBMEP e do Canguru de Matemática, através do resultado anterior podemos resolver diversos problemas relacionados a este tópico, como a questão a seguir, que é inédita e foi elaborada pelo autor desta dissertação.

Questão 8. Uma companhia aérea possui permissão para voar em rotas que ligam 16 cidades do Brasil ilustradas na Figura 29. No entanto, por questões de economia, esta empresa irá deixar de operar em algumas rotas. Determine o maior número de rotas que esta empresa poderá deixar de operar, de modo que seja possível viajar entre quaisquer 2 cidades (podendo passar por cidades intermediárias)?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 15

Figura 29 - Rotas aéreas



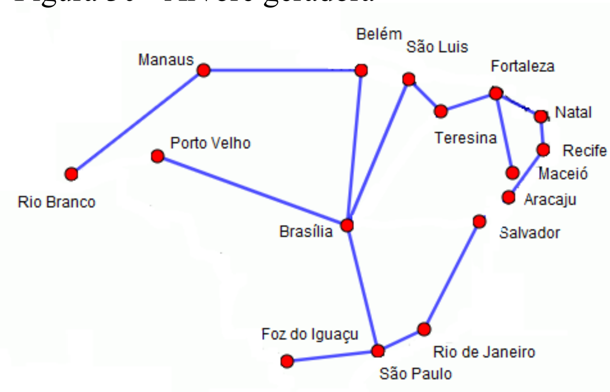
Fonte: O autor, 2020.

Solução. O grafo conexo com o menor número de arestas que podemos formar, ligando 16 vértices, é uma árvore com 15 arestas. Dessa forma, a empresa pode deixar de operar em $20 - 15 = 5$ rotas.

Um grafo $H(V', E')$ é **subgrafo** de um grafo $G(V, E)$ se todo vértice de H é vértice de G e toda aresta de H é aresta de G ($V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$).

Na Figura 30 temos um subgrafo do grafo ilustrado na Figura 29 que representa uma das possíveis soluções para o problema anterior, essa árvore recebe o nome de **árvore geradora**. Uma árvore geradora de uma componente conexa de um grafo G, com n vértices, é um subgrafo que é uma árvore e tem todos os vértices da componente conexa, logo, tem $n - 1$ arestas.

Figura 30 - Árvore geradora

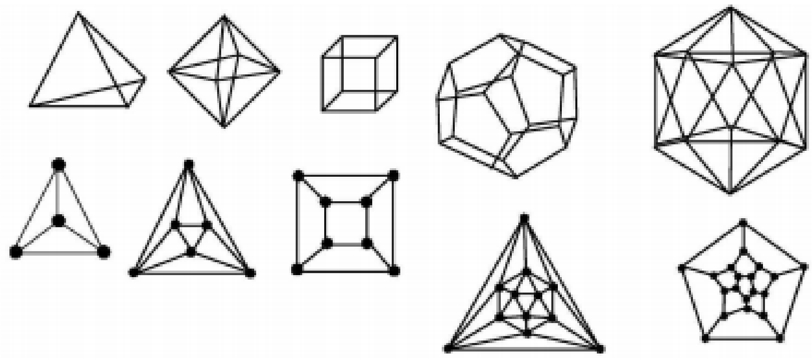


Fonte: O autor, 2020.

2.9 Grafos Planares

Um grafo que admite uma representação gráfica na qual as suas arestas não se intersectem (exceto em suas extremidades) é chamado de grafo **planar**. Exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos dos cinco sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro (Figura 31).

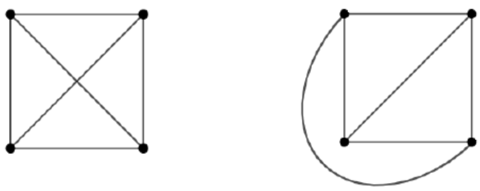
Figura 31 - Sólidos platônicos



Fonte: O autor, 2020.

É muito importante que o leitor compreenda que um grafo pode ser planar mesmo se algumas de suas arestas se intersectem em uma determinada representação. Por exemplo, na Figura 32 temos duas representações gráficas de um mesmo grafo que é planar porque admite uma representação onde arestas não se intersectam.

Figura 32 - Grafos planares



Fonte: O autor, 2020.

Dizemos que um grafo planar está representado propriamente por uma figura se suas arestas não se intersectam. Se um grafo estiver representado propriamente, então ele dividirá o plano em diversas regiões denominadas faces. Vamos denotar o número de faces por f, o número de vértices por n e o número de arestas por m. Para o grafo da Figura 32, temos n = 4, m = 6 e f = 4 (a região externa infinita do plano é contada como uma face).

Teorema 4. (Teorema de Euler para Poliedros Convexos) - Em um grafo planar conexo, se n é o número de vértices, m o número de arestas e f o número de faces, vale $f - m + n = 2$.

Demonstração. Demonstraremos o teorema por indução sobre o número de arestas. No grafo com 0 arestas e 1 vértice temos, $n = 1$, $m = 0$ e $f = 1$, aplicando a Fórmula de Euler temos,$f - m + n = 1 + 1 - 0 = 2$. Portanto para um grafo com 0 arestas, a Fórmula Euler é válida. Tomemos um grafo conexo qualquer. Se for uma árvore, temos $f = 1$ e $m = n - 1$, assim $f - m + n = 1 - (n - 1) + n = 2$. Se houver um ciclo, retiramos uma aresta do ciclo, e o grafo fica com uma face a menos. Mas, pela hipótese de indução, a relação vale para o novo grafo. Temos então $(f - 1) - (m - 1) + n = 2$ e, portanto, $f - m + n = 2$.

Corolário [Euler]. *Em um grafo planar conexo G vale* $m \leq 3.n - 6$.

Demonstração. Se formos contar as arestas de cada face, contaremos duas vezes cada aresta do grafo. Como toda face é limitada por no mínimo 3 arestas temos:

$$3.f \quad \leq \quad 2.m.$$

Substituindo na expressâo dada no Teorema de Euler:

$$f - m + n = 2$$

$$3.f - 3.m + 3.n = 6)$$

$$2.m - 3.m + 3.n \geq 3.f - 3.m + 3.n = 6$$

$$2.m - 3.m + 3.n \geq 6$$

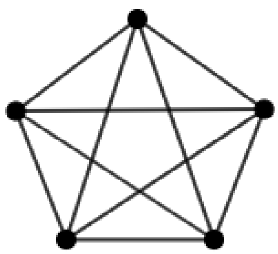
■

assim,

$$m \leq 3.n - 6$$

Chamamos de **grafo completo** o grafo onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n. A Figura 33 mostra um K_5, um grafo completo com 5 vértices.

Figura 33 - Grafo completo com 5 vértices: K_5

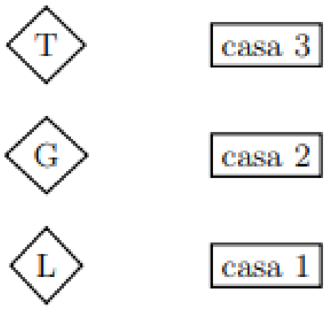


Fonte: O autor, 2020.

O resultado anterior nos dá, como corolário, que K_5 não é planar. De fato, K_5 e todos os grafos completos com mais do que quatro vértices, não obedecem a relação acima. Por exemplo para K_5 temos $10 > 3.5 - 6$.

Um problema muito popular, que quase todos os professores de Matemática já se depararam algum dia, consiste em propor que se ligue, em três casas, água, luz e telefone, a partir de três centrais diferentes. Casas, centrais, e ligações estão no mesmo plano. Não se permite que as ligações se cruzem. O problema pode ser ilustrado como na Figura 34. Mais adiante veremos que é impossível realizar esta tarefa, pois o grafo que representa tais ligações não é um grafo planar.

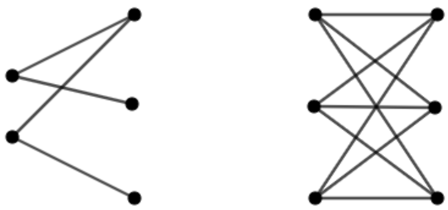
Figura 34 - Ligações de água, luz e telefone



Fonte: O autor, 2020.

O grafo utilizado para modelar este problema é formado por um conjunto V de vértices que pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 (centrais de serviços) e V_2 (de casas) tal que toda aresta deste grafo tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Na Teoria dos Grafos chamamos este tipo de grafo de **grafo bipartido**. Quando todos os vértices de V1 são ligados a todos os vértices deV2, como no problema o grafo é chamado de grafo bipartido completo e denotaremos por Kp,q onde p é o número de vértices de V1 e q, o de V2. Na Figura 35, temos exemplos de dois grafos bipartidos, sendo o grafo da direita um grafo bipartido completo K3,3.

Figura 35 - Grafo bipartido e grafo bipartido completo (K3,3)



Fonte: O autor, 2020.

Note que, ao resolver este problema estamos procurando saber se o grafo K3,3 é planar. Aplicando o resultado anterior temos para K3,3 que $9 < 2.6 - 6$ e, mesmo assim K3,3 não é planar. Ou seja, existem grafos não planares para os quais a relação $m \leq 3.n-6$ também vale. Dessa forma a condição é necessária, mas não é suficiente.

Note que, ao resolver este problema estamos procurando saber se o grafo $K_{3,3}$ é planar. Aplicando o resultado anterior temos para $K_{3,3}$ que $9 < 2.6 - 6$ e, mesmo assim $K_{3,3}$ não é planar. Ou seja, existem grafos não planares para os quais a relação $m \leq 3.n-6$ também vale. Dessa forma a condição é *necessária*, mas não é *suficiente*.

Corolário. *Se G é um grafo planar bipartido conexo então G possui $m \leq 2.n-4$.*

Demonstração. Sejam X e Y as duas partes de uma partição de G. Observe que G só possui ciclos pares, pois todo caminho em G alterna um vértice de X com um vertice de Y. Supondo que um ciclo contém um vértice v_i em uma das duas partes. Para voltar a esse vértice, é preciso ir na outra partição e voltar um número par de vezes. Dessa forma, cada face tem no mínimo 4 arestas.

$$4.f \leq 2.m$$

Substituindo na fórmula de Euler:

$$f - m + n = 2$$

$$4.f - 4.m + 4.n = 8$$
$$2.m - 4.m + 4.n \geq 4.f - 4.m + 4.n = 8$$

$$2.m - 4.m + 4.n \geq 8$$
$$m \leq 2.n - 4$$

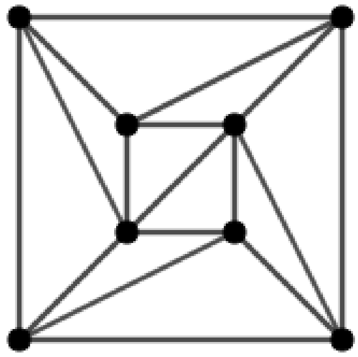
Vemos agora que $K_{3,3}$ não é planar, pois $9 > 2.6 - 4$. O problema clássico das ligações de água, luz e telefone, ilustrado na Figura 35, acaba de ser resolvido.

Apesar de planaridade ser um tópico clássico da Teoria dos Grafos, de acordo com essa pesquisa percebemos a escassez de questões de competições matemáticas relacionadas a este tópico, e a partir daí elaboramos a questão a seguir, que pode ser resolvida através da aplicação das noções de grafos planares abordadas anteriormente.

Questão 9. Quatro pontos estão marcados dentro de um quadrado (Figura 36). Eles estão ligados entre si por segmentos que não se cruzam e estão conectados com os vértices do quadrado de modo que o quadrado fica dividido em 10 triângulos. Em quantos triângulos ficará dividido o quadrado se forem marcados 10 no seu interior?

∎

Figura 36 - Triângulos



Fonte: O autor, 2020.

Solução. Consideremos os pontos e os vértices do quadrado como os vértices de um grafo planar, e os segmentos e os lados do quadrado como suas arestas. Para cada região em que se divide o plano, calculamos o número de arestas em sua fronteira e depois somamos todos esses números. Como qualquer aresta separa exatamente duas faces diferentes, este total tem que ser o dobro do número de arestas. Como todas as faces são triângulos, exceto a face externa, cuja fronteira é formada por quatro arestas, obtemos $3(f-1)+4=2m$; ou seja, $m=\frac{3(f-1)}{2}+2$. Como o número de vértices é igual a 14, usando a fórmula de Euler, temos:

$$14-(\frac{3(f-1)}{2}+2)+f=2$$

Dessa forma, $f=23$ (contando a face externa). Logo, o quadrado está dividido em 22 triângulos.

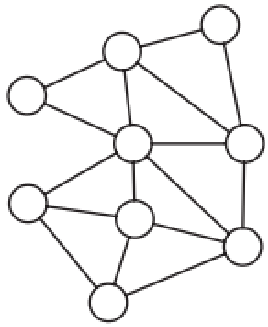
2.10 Coloração de Vértices

Os problemas desta subseção tratam da Coloração de Vértices, um dos clássicos problemas da Teoria dos Grafos.

Problema 7. *(OBMEP - 2012 - Nível 1)* - De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da Figura 37 com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 9

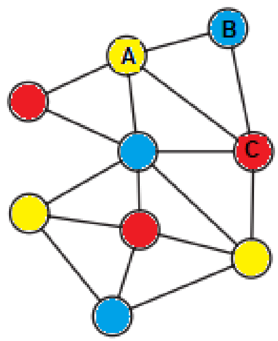
Figura 37 - OMEP - Nível 1 - 2012



Fonte: O autor, 2020.

Solução. Começamos a colorir o desenho (Figura 38) pelo círculo marcado com a letra A. Temos 3 opções de cores para A e, uma vez selecionada a cor de A, temos 2 possibilidades de cores para o círculo B. Para cada escolha de cores para A e B, a cor de C fica unicamente determinada pelas condições do problema. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades diferentes de colorir os círculos A, B e C. Agora notamos que, para qualquer escolha de cores para A, B e C, as cores dos círculos restantes ficam unicamente determinadas. Portanto, temos 6 maneiras diferentes de colorir os círculos da figura de acordo com as condições impostas no enunciado da questão. Resposta (D).

Figura 38 - Coloração de vértices



Fonte: O autor, 2020.

Apesar de não haver comentário algum a respeito de grafos no enunciado da questão prévia e utilizarmos o princípio multiplicativo para resolver a questão, a Figura 37 usada para ilustrar tal problema apresenta um grafo, cujos vértices devem ser coloridos. Na Teoria dos Grafos este é um problema conhecido como Coloração de Vértices e consiste em, usando o menor número de cores possível, atribuir cores aos vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes tenham necessariamente cores diferentes.

Podemos colorir o grafo ilustrado na Figura 37 com até 9 cores (uma para cada vértice) mas o menor número possível de cores é 3 (veja na Figura 38). Descobrir o número mínimo de cores com que se pode colorir os vértices de um grafo, atribuindo cores distintas a vértices adjacentes é uma questão central sobre coloração de vértices. Esse número é chamado de número cromático de um grafo. Assim o número cromático do grafo ilustrado no nosso problema é 3.

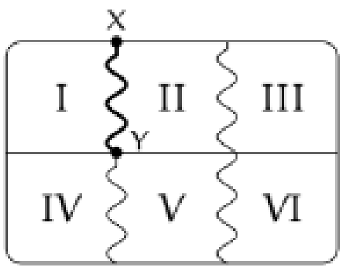
Dentre muitos problemas que podem ser explorados através de grafos, destacam-se os de coloração de mapas. Todo mapa pode ser identificado como um grafo, onde as regiões (países) são os vértices e uma fronteira entre dois países é representada por uma aresta ligando dois vértices.

Em 1852 foi formulada a conjectura que deu origem ao Teorema das Quatro Cores, sendo este demonstrado só depois de mais de um século. Esse teorema afirma que com quatro cores é possível pintar qualquer mapa. Equivalentemente, qualquer grafo planar pode ser colorido com quatro cores.

Teorema 5.(Teorema das Quatro Cores) - *Todo mapa pode ser colorido com quatro cores.*
Em 1976, os matemáticos Appel, Haken e Koch, com o auxílio de 1200 horas do computador mais rápido de sua época, executando mais do que 10^{10} operações computacionais, provaram o Teorema.

Problema 8.*(BQ - OBMEP - 2011 - Nível 1)* - No mapa da Figura 39 a curva XY é uma das fronteiras. Países como I e II têm fronteira comum. O ponto Y não é considerado fronteira, ou seja, países como I e V não têm fronteira comum. Você deve colorir o mapa fazendo países de fronteira comum terem cores diferentes.

Figura 39 - BQ - OBMEP - Nível 1 - 2011



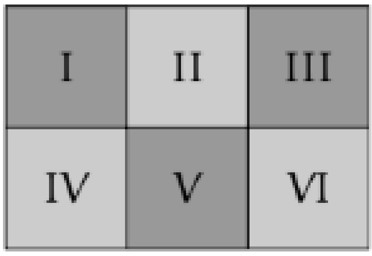
Fonte : O autor, 2020.

a) Qual é o número mínimo de cores para colorir o mapa? Mostre como colori-lo.

b) Desenhe outro mapa de 6 países que precise de pelo menos 4 cores para ser pintado. Mostre como colori-lo com cores A, B, C e D.

Solução. a) No mínimo são necessárias duas cores, como mostrado na Figura 40.

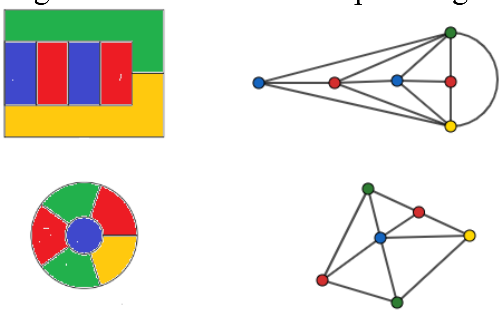
Figura 40 - BQ - OBMEP - Nível 1 - 2011



Fonte: O autor, 2020.

(b) A Figura 41 exibe dois mapas com seis países que precisam de, no mínimo, quatro cores para serem pintados e mostram-nos como se modela mapas em grafos para efeito do tratamento dessa questão.

Figura 41 - Modelos de mapas em grafos



Fonte: O autor, 2020.

2.10.1 Mais algumas questões sobre coloração de vértices

Questão 10. *(Canguru da Matemática - 2019 - NÍVEL J)* - Um grafo consiste de 16 vértices e algumas arestas que os conectam, conforme a Figura 42. Uma formiga está no vértice A. A cada movimento, ela pode caminhar de um vértice para qualquer vértice vizinho pela aresta que os liga. Em quais dos vértices P, Q, R, S, T pode estar a formiga, ao término de 2019 movimentos?

(A) Somente P, R ou S, mas não Q e T.

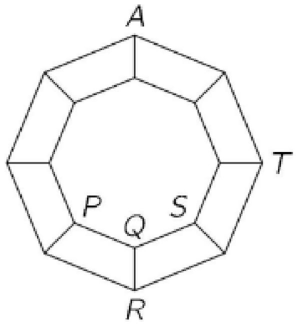
(B) Somente P, R, S ou T, mas não Q.

(C) Somente Q.

(D) Somente T.

(E) Em todos esses pontos.

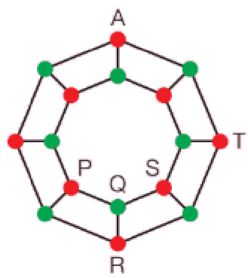
Figura 42 - Canguru da Matemática - Nível J - 2019



Fonte : O autor, 2020

Solução Canguru da Matemática. Podemos pintar os vértices do diagrama de vermelho e verde, por exemplo, de tal forma que dois vértices diretamente ligados por uma aresta tenham cores diferentes, como na Figura 43. Dessa forma, fica claro que se a formiga partir de A e passar por um número ímpar de arestas irá terminar num ponto verde. Dentre os vértices P, Q, R, S, T somente o Q é verde. Logo, depois de 2019 movimentos a formiga poderá estar somente nesse vértice. Uma possível sequência de movimentos que levem a formiga do ponto A ao ponto Q é ir até e voltar do ponto verde mais próximo 1007 vezes, num total de 2014 movimentos e depois seguir com 5 movimentos até o ponto Q.

Figura 43 - Canguru da Matemática - Nível J - 2019



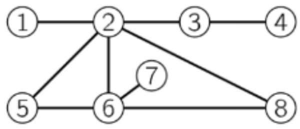
Fonte: O autor, 2020.

Comentário. Há de se destacar que dentre todas as questões que compõe este trabalho, esta é a única que utiliza o termo *grafo* em seu enunciado, definindo-o de uma forma básica (consiste de 16 vértices e algumas arestas que os conectam). Para solucionar a questão aplica-se o conceito de coloração de vértices e a ideia de paridade. Outra possibilidade, seria a utilização do conceito de grafo bipartido para explicar a ideia de que percorrer as arestas um número ímpar de vezes, leva a formiga a estar em um vértice da outra parte da partição.

Questão 11.(Canguru da Matemática - 2019 - Nível J) - Pedro vai pintar os oito círculos da Figura 44 de vermelho, amarelo ou azul, de modo que dois círculos ligados por um segmento não tenham a mesma cor. Quais são os dois círculos que terão necessaria-mente a mesma cor?

(A) 5 e 8 (B) 1 e 6 (C) 2 e 7 (D) 4 e 5 (E) 3 e 6

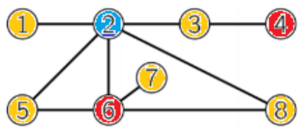
Figura 44 - Canguru da Matemática - Nível J - 2019



Fonte: O autor, 2020.

Solução. Os círculos 2 e 6 possuem cores diferentes. Os círculos 5 e 8 são ambos ligados aos círculos 2 e 6, dessa forma só podem ter a terceira cor, igual para os dois. O exemplo ilustrado na Figura 45 mostra que as demais alternativas não são necessariamente verdadeiras. Resposta (A).

Figura 45 - Canguru da Matemática - Nível J - 2019



Fonte: O autor, 2020.

Comentário. A questão aborda o problema de coloração de vértices em grafos, e não requer conhecimento específico algum para ser resolvida, apenas um pouco de raciocínio lógico, podendo ser resolvida utilizando a estratégia de tentativa e erro.

3 DESCRIÇÃO DA AÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo descreveremos o trabalho de campo realizado durante essa pesquisa. Nele constam as atividades aplicadas e alguns resultados observados no desempenho dos alunos, como estratégias adotadas por eles na resolução de alguns problemas e comentários feitos sobre o novo tema.

Há de se destacar que as sequências didáticas das atividades aqui apresentadas não se tratam de proposta de inserção dos conceitos e resultados da Teoria dos Grafos nos currículos da educação básica. Este trabalho tem a finalidade de apresentar o tema através de questões de competições de matemática para que esta abordagem seja utilizada em ambientes específicos, como clubes de ciências, de matemática ou em grupo de treinamento como os POTI, que são polos olímpicos de treinamento intensivo voltados para a Olimpíada Brasileira de Matemática. Várias universidades recebem alunos da escola em programas como este.

A experiência piloto foi feita em turmas de uma escola em que leciono a partir do desejo e da necessidade de entender a reação dos alunos diante de conteúdo tão novo para eles, além de permitir que a relação teoria-prática contribua para que este texto seja, de fato, fonte de uma proposta factível de ser realizada.

3.1 Público-alvo

As atividades foram exploradas com alunos de duas turmas do 1^o ano do Ensino Médio, no turno da tarde, com 24 e 26 alunos, respectivamente, com idades entre 14 e 19 anos, da Escola Estadual Salvador de Mendonça localizada no município de Itaboraí no Estado do Rio de Janeiro, onde leciono desde 2010.

3.2 Descrição de atividades

O trabalho experimental foi desenvolvido em três encontros, cada um correspondendo a duas aulas de 50 minutos, durante o mês de setembro de 2019. A tarefa proposta aos alunos consistiu na resolução de algumas questões que, em sua maioria, já foram abordadas no Capítulo 2 e que foram retiradas de provas anteriores da OBMEP e do Canguru de Matemática. Além destas, foram utilizadas questões inéditas, criadas especificamente para este fim. Tais questões permitem introduzir alguns conceitos básicos da Teoria dos

Grafos, em diversos contextos e sobre diferentes tópicos da teoria. Ao final da aplicação de cada questão, as respostas dadas pelos alunos foram corrigidas e discutidas com toda a turma, apontando-se as principais estratégias utilizadas por eles na resolução de cada problema e chamando a atenção para alguns resultados importantes.

Antes que as atividades começassem os alunos foram avisados de que aprenderiam um assunto novo, e que este não fazia parte do currículo estudado na escola, mas que não precisavam se preocupar, pois se tratava de um assunto fácil de ser compreendido e poderia ajudá-los a resolver diversos problemas.

A partir da leitura e interpretação do texto que compõe cada problema, os alunos foram conduzidos na exploração das atividades, e para resolvê-las, organizaram-se em duplas.

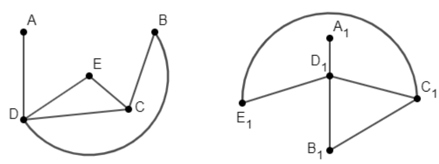
3.3 Atividades do 1º dia

A questão a seguir foi explorada para introduzir definições e terminologia da Teoria dos Grafos.

Problema 1. *(Canguru de Matemática - Nível C - 2019)* - Alana, Bela, Clara, Dora e Érica se encontraram numa festa e apertaram as mãos, exatamente uma vez, de todas as pessoas que elas já conheciam neste grupo. Alana deu um aperto de mão, Bela deu dois, Clara deu três e Dora deu quatro apertos de mãos. Quantos apertos de mão deu Érica?

Relatório da aplicação. Após os alunos realizarem a leitura do enunciado da questão e tentarem resolvê-la por alguns minutos, foi solicitado que os alunos representassem a situação por uma figura, onde as pessoas seriam representadas por pontos e, caso duas dessas pessoas apertassem as mãos, os pontos que as representam deveriam ser ligados por uma linha. Após a intervenção feita pelo professor, todos os alunos conseguiram desenhar um diagrama que representasse o problema, chegando assim a resposta correta. Depois da questão resolvida, o professor diz aos alunos que figuras como as que foram feitas para resolver o problema são chamadas de grafos, e os pontos e linhas que as formam são chamados de vértices e arestas, respectivamente. A Figura 45 mostra alguns diagramas feitos pelos alunos.

Figura 46 - Resposta de alunos



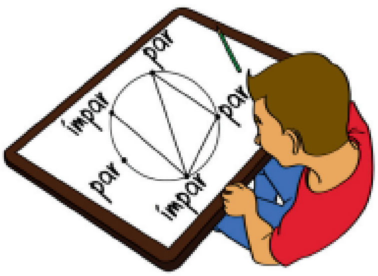
Fonte: O autor, 2020.

Foi chamada a atenção para o fato de que a localização dos pontos e o formato das linhas são irrelevantes na resolução do problema. Com isso, podemos desenhar grafos diferentes para representar o mesmo problema, o que nos permitiu explorar também a ideia de grafos isomorfos.

A questão a seguir foi explorada com o objetivo de estabelecer a relação entre a soma dos graus dos vértices de um grafo e o seu o número de arestas.

Problema 2.*(OBMEP - 2ª fase - 2011 - Nível 1 - 2011)* Juquinha marca pontos sobre uma circunferência e traça segmentos ligando alguns desses pontos. Ele chama um ponto de ponto-ímpar quando este está ligado a um número ímpar de pontos, e de ponto-par, caso contrário. Por exemplo, na ilustração (Figura 46), ele escolheu cinco pontos e fez quatro ligações.

Figura 46 - OBMEP- 2a fase - Nível 1 - 2011

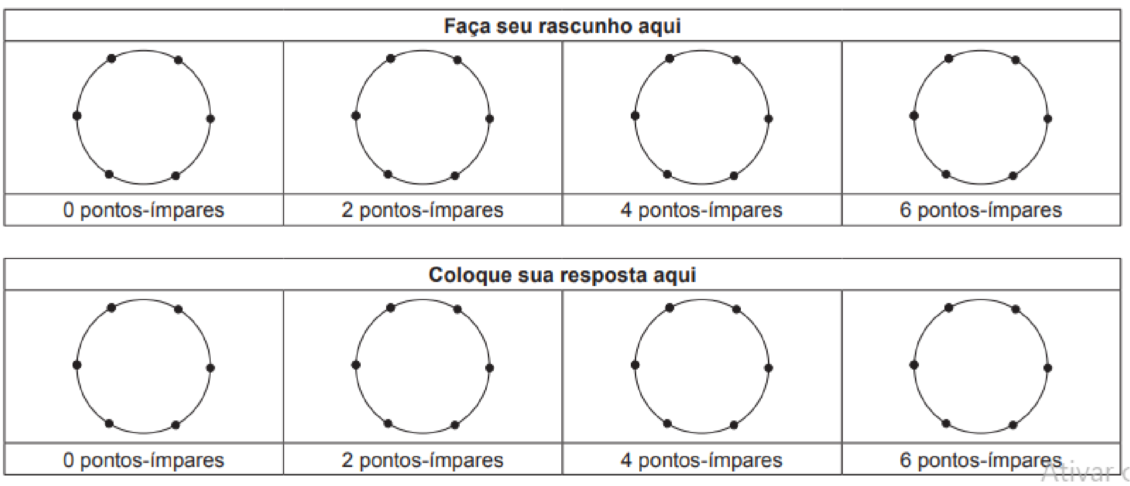


Fonte: O autor, 2020.

a) Juquinha marcou cinco pontos sobre uma circunferência e traçou todas as ligações possíveis, exceto uma. Quantos pontos-ímpares foram obtidos?

b) Juquinha marcou seis pontos em cada uma das circunferências (Figura 47). Em cada caso, mostre como obter o número de pontos-ímpares indicado com exatamente cinco ligações.

Figura 47 - OBMEP- 2a fase - Nível 1 - 2011



Fonte: O autor, 2020.

c) Explique por que Juquinha sempre encontrará um número par de pontos-ímpares, quaisquer que sejam o número de pontos que ele marcar e o número de ligações que ele traçar.

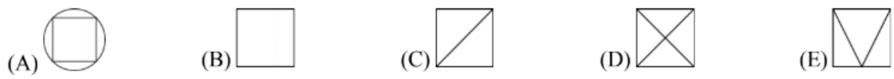
Relatório da aplicação. Os alunos conseguiram fazer os itens a) e b) sem maiores dificuldades. Já no item c) todos concordaram que sempre será encontrado um número par de pontos-ímpares, mas a maioria não conseguiu explicar o motivo pelo qual tal fato ocorre. A seguir descreveremos o raciocínio utilizado na única resposta coerente dada por uma dupla de alunos: *se marcarmos no desenho feito por Juquinha todas as ligações possíveis, e o número de pontos for ímpar, cada ponto deve ser par. Se o número de pontos for par, cada ponto deve ser ímpar. Nos dois casos o número de pontos ímpares é par. Se retirarmos qualquer ligação, teremos que dois pontos pares se tornarão dois pontos ímpares. A partir daí, cada ligação retirada pode ligar um ponto par e um ponto ímpar, dessa forma o ponto que era par se torna ímpar e o ponto que era ímpar se torna par, e o número de pontos ímpares não muda. Ou se a ligação retirada liga dois pontos ímpares, estes se tornarão pontos pares e o número de pontos ímpares diminuirá 2 unidades. Assim o número de pontos ímpares deve ser sempre par.*

3.4 Atividades do 2º dia

A questão a seguir foi explorada a fim de abordar os resultados sobre ciclos e caminhos eulerianos em grafos.

Problema 1. *(Canguru da Matemática - 2019 - Nível C)* - Qual dos desenhos a seguir (Figura 48) não pode ser feito sem você tirar o lápis do papel e sem passar o lápis pela mesma linha mais de uma vez?

Figura 48 - Canguru da Matemática - Nível C - 2019



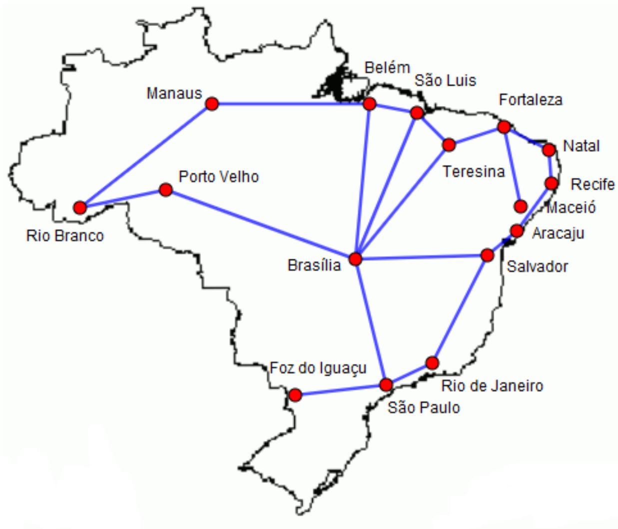
Fonte: O autor, 2020.

Relatório da aplicação. Eliminando as demais alternativas, os alunos observaram que o desenho do item D não pode ser feito sem tirar o lápis do papel ou sem passar o lápis mais de uma vez sobre alguma linha. Após tal constatação, o professor explicou que só é possível desenhar um grafo com as condições dadas no enunciado se o mesmo tiver todos os vértices de grau par, como nos itens A) e B), ou se houver somente dois vértices de grau ímpar, como nos itens C) e E), de modo que um desses pontos seja o início do percurso e o outro seja o final.

A questão a seguir tem o objetivo de introduzir a noção de grafos desconexos e árvores.

Problema 2. Uma companhia aérea possui permissão para voar em rotas que ligam 16 cidades do Brasil ilustradas na Figura 49. No entanto, por questões de economia, esta empresa irá deixar de operar em algumas rotas, determine o maior número de rotas que esta empresa poderá deixar de operar, de modo que seja possível viajar entre quaisquer 2 cidades (podendo passar por cidades intermediárias)?

Figura 49 - Rotas aéreas



Fonte: O autor, 2020.

Relatório da aplicação. Após a leitura e interpretação do enunciado do problema, o professor chama a atenção para o fato de que, se a empresa deixar de operar nas rotas Brasília - São Paulo e Rio de Janeiro - Salvador, ficaria impossível ir de São Paulo, Rio de Janeiro ou Foz do Iguaçu até qualquer outra cidade descrita no mapa. Fazendo isso o grafo que representa as rotas atendidas pela companhia aérea fica dividido em duas partes que não se conectam, uma contendo os vértices que representam as cidades de São Paulo, Rio de Janeiro e Foz do Iguaçu, e outra contendo os vértices que representam as demais cidades. Estas duas partes juntas formam um grafo desconexo. A partir daí, a maioria dos alunos tentou resolver o problema apagando algumas arestas do grafo de modo que este continuasse conexo e com o menor número de arestas possíveis, e chegaram a conclusão de que o menor número de rotas que a companhia deve continuar operando de modo que seja possível ir de uma cidade a outra qualquer é 15. Neste momento, o professor diz que grafos com essas características são chamados de árvores e chama a atenção para o fato desse tipo de grafo não possuir ciclos.

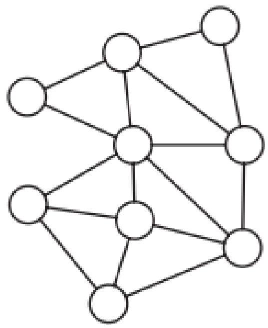
3.5 Atividades do 3º dia

A questão a seguir foi explorada a fim de introduzir a ideia de coloração de vértices em grafos.

Problema 1.*(OBMEP - 2012 - Nível 1)* - De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da Figura 50 com uma das cores amarelo, azul e vermelho, de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 9

Figura 50 - OBMEP - Nível 1 - 2012



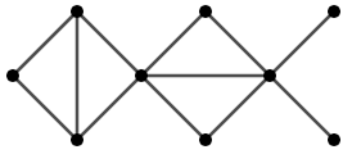
Fonte: O autor, 2020.

Relatório da aplicação. Para resolver a questão anterior, a maioria dos alunos tentou colorir a figura de acordo com o seu enunciado, colorindo-a de formas diferentes e contando as possibilidades no final. Apenas três alunos conseguiram chegar à resposta correta.

O problema a seguir trata-se de uma questão inédita (elaborada pelo autor desta dissertação) que aborda de forma bem contextualizada, um tópico da Teoria dos grafos ainda não explorado pela OBMEP e pelo Canguru de Matemática nas questões de suas provas, o problema da **Cobertura por Vértices**.

Problema 2. Um condomínio residencial dispõe de ruas retilíneas que se ligam em alguns pontos (Figura 51). Por questão de segurança deseja-se instalar câmeras nesses pontos, de modo que todas as ruas do condomínio sejam monitoradas. Cada câmera deve ser capaz de monitorar todas as ruas que saem do ponto onde foi instalada. Qual o número mínimo de câmeras que devem ser instaladas de modo que todas as ruas do condomínio sejam monitoradas?

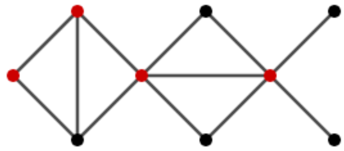
Figura 51 - Grafo-modelo do condomínio



Fonte: O autor, 2020.

Relatório da aplicação. A Figura 52 mostra o desenho de um grafo feito por um aluno, em que é possível monitorar todas as ruas instalando apenas quatro câmeras nos vértices em vermelho. Os demais alunos não tiveram dificuldades para chegar a esse resultado.

Figura 52 - Resposta de um aluno



Fonte: O autor, 2020.

Cobertura de vértices de um grafo é um subconjunto de vértices tal que toda aresta é incidente a, pelo menos, um vértice do conjunto.

Dessa forma, os vértices que estão em vermelho na Figura 52 formam uma cobertura de vértices do grafo dado na questão.

Consideramos o experimento como satisfatório, conseguimos realizar todas as atividades planejadas para os três dias do experimento, com uma boa aceitação e participação por parte dos alunos. Houve, inclusive, a participação de alguns alunos que se mostravam desinteressados e desestimulados com as aulas de Matemática. Alguns alunos destacaram que o tema não exige a compreensão de fórmulas e o uso cálculos complicados para resolver problemas a ele relacionados, e que seria muito bom ter mais aulas de Matemática desse tipo. Há de se destacar a importância da visualização gráfica na resolução dos problemas, pois auxilia na interpretação dos problemas e na organização do pensamento dos alunos.

Pessoalmente, o experimento foi de grande importância porque podemos perceber, além do fato de que atividades como esta trazem inúmeros benefícios aos alunos, que tais experiências são possíveis. Além disso, a partir do desenvolvimento das questões pelos alunos, foi possível aprimorar este texto, fazendo-o corresponder aos objetivos do trabalho, sem esquecer de atender também às demandas dos alunos e professores envolvidos neste tipo de atividade.

CONCLUSÃO

Sabemos que as olímpiadas de matemática tem um papel incentivador tanto para alunos quanto para professores, pois permite que estes estejam em contato com novas ideias matemáticas, além de estimular o seu estudo e consequentemente melhorar o ensino e aprendizagem desta ciência.

Neste trabalho apresentamos alguns conceitos e resultados sobre a Teoria dos Grafos, abordando o tema atráves de problemas desafiadores como questões das provas da OBMEP e do Canguru da Matemática, além de questões inéditas, podendo dessa forma contribuir não só para a preparação de alunos para essas competições, mas também servir como fonte de pesquisa para professores da educação básica e outros interessados em pesquisar o assunto. Para tal, foram listadas e analisadas todas as questões que já estiveram em alguma OBMEP ou em alguma avaliação do Canguru e que podem utilizar conceitos, resultados ou algoritmos de grafos para serem resolvidas.

As questões analisadas neste trabalho mostram que os grafos vêm ganhando espaço nas provas de competições matemáticas como a OBMEP e o Canguru da Matemática. Tais questões são diferentes das encontradas habitualmente nos livros didáticos, com enunciados agradáveis, mas desafiadores, que não comprometem o rigor matemático e que, em geral, não exigem conteúdos prévios da Matemática para serem resolvidas. Sendo assim, valorizam mais o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de organizar os pensamentos.

Além de possibilitar ao leitor uma iniciação aos grafos, este trabalho apresentou uma variedade de questões dessas duas competições, relacionadas a diversos tópicos desta teoria, como percursos eulerianos, percursos hamiltonianos, coloração de vértices, em diferentes níveis de dificuldade.

Algumas das questões presentes neste trabalho foram testadas em uma pesquisa de campo realizada com duas turmas de 1º ano do Ensino Médio, tal experimento mostrou uma boa aceitação dos alunos com relação ao novo tema, sendo capaz de despertar o interesse até mesmo de alunos que não gostam das aulas de Matemática.

O uso da Teoria dos Grafos em diferentes contextos como foi mostrado neste trabalho, nos permite afirmar que os grafos tem se tornado uma tendência no ensino de Matemática, seja atráves da sua inclusão no currículo da educação básica ou da sua exploração em grupos de estudos, como grupos da OBMEP. Diante desse fato destacamos a importância das autoridades competentes proporcionarem cursos de formação continuada para professores da educação básica, para que estes estejam conectados a novos temas da Matemática, obtendo uma visão mais abrangente, para enfrentar os desafios do ensino no futuro além de dar subsídios para que estes professores participem desta importante discussão sobre o currículo com embasamento suficiente sobre os novos rumos da ciência.

REFERÊNCIAS

BNCC. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. 16 p. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>.

BRIA, J. *Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e realidade*. Tese (Doutorado), 2001.

CANGURU DA MATEMáTICA. *Canguru de Matemática Brasil*. 2020. Disponível em: <https://www.cangurudematematicabrasil.com.br/para-escolas/provas-anteriores>. Acesso em: 16 fev. 2020.

CARNEIRO, Emanuel. Olimpíada de matemática-uma porta para o futuro. *II Bienal da SBM. Salvador-BA*, 2004.

COSTA, Rodrigo Vaz. Grafos: Algumas aplicações a nível médio. 2017.

GOMES, Jorge da Conceição. *Grafos: Uma modelagem possível para as provas do ENEM*. 2017.

JURKIEWICZ, Samuel. Grafos–uma introduçao. *São Paulo: OBMEP*, 2009.

OBMEP. *Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas*. 2020. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 19 fev. 2020.

PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. *Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF*, 1998.

POTI VIRTUAL. *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo*. 2020. Disponível em: <https://poti.impa.br/index.php/site/virtual>. Acesso em: 27 fev. 2020.

SILVA, Alan Marcelo Oliveira da et al. Grafos: uma experiência no ensino fundamental. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2015.

APÊNDICE – Premiação de Professores na OBMEP

Para a premiação, os professores serão divididos em 15 (quinze) grupos:

- Compõe o Grupo 1 professores vinculados a 2 (dois) ou 3 (três) alunos.
- Compõe o Grupo 2 professores vinculados a 4 (quatro) alunos.
- Compõe o Grupo 3 professores vinculados a 5 (cinco) alunos.
- Compõe o Grupo 4 professores vinculados a 6 (seis) alunos.
- Compõe o Grupo 5 professores vinculados a 7 (sete) alunos.
- Compõe o Grupo 6 professores vinculados a 8 (oito) alunos.
- Compõe o Grupo 7 professores vinculados a 9 (nove) alunos.
- Compõe o Grupo 8 professores vinculados a 10 (dez) alunos.
- Compõe o Grupo 9 professores vinculados a 11 (onze) alunos.
- Compõe o Grupo 10 professores vinculados a 12 (doze) alunos.
- Compõe o Grupo 11 professores vinculados a 13 (treze) ou 14 (quatorze) alunos.
- Compõe o Grupo 12 professores vinculados a 15 (quinze) ou 16 (dezesseis) alunos.
- Compõe o Grupo 13 professores vinculados a uma quantidade de 17 (dezessete) a 19 (dezenove) alunos.
- Compõe o Grupo 14 professores vinculados a uma quantidade de 20 (vinte) a 24 (vinte e quatro) alunos.
- Compõe o Grupo 15 professores vinculados a 25 (vinte e cinco) ou mais alunos.