



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Peterson Euzébio Silva**

**Emparelhamento em grafos**

RECIFE  
2020





UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



**Peterson Euzébio Silva**

**Emparelhamento em grafos**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior

RECIFE  
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

E91e

Euzebio, Peterson

Emparelhamento em grafos / Peterson Euzebio. - 2020.  
98 f. : il.

Orientador: Antonio Jose Ferreira Gomes Junior.  
Inclui referências e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2020.

1. Grafos . 2. Emparelhamento em grafos. 3. Teorema de Hall. 4. Teorema de Tutte. I. Junior, Antonio Jose Ferreira Gomes, orient. II. Título

CDD 510

---

PETERSON EUZEBIO SILVA

## **Emparelhamento de Grafos**

*Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Aprovado em \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Júnior (Orientador)– UFRPE**

---

**Profª. Drª. Maria Isabelle Silva Dias Yanes – UEPB**

---

**Profª. Drª. Karla Ferreira de Arruda Duque– PROFMAT/UFRPE**



# Agradecimentos

Ao Deus Soberano por conduzir tudo em minha vida e derramar graça sem medida aos dias.

A minha esposa pelo amor dedicado e torcida constante.

A minha filha Luísa por tornar o meu coração aquecido em momentos difíceis.

Aos meus pais e irmãos pelo exemplo de sempre seguir em frente mesmo diante de incertezas.

A minha igreja pelo ensino exclusivo da verdade.

Aos amigos Paulo, Ju, Clayton, Belinha, Deddy e Eline por todo amor e momentos de renovo em nossos pgs.

Ao amigo Josuel pelo incentivo de sempre.

Aos amigos do PROFMAT pelo apoio e dias de estudo.

Aos professores da UFRPE que ministraram aulas para a turma de 2018 pelo empenho, em especial ao Prof. Antonio pela paciência.





*“Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas.*

*A ele seja a glória para sempre!*

*Amém.”*

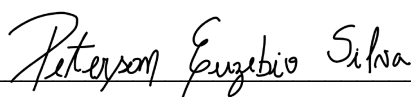
*(Bíblia Sagrada, Romanos 11.36)*



## DECLARAÇÃO

Eu, Peterson Euzébio Silva, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título “**Emparelhamento em grafos**”, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como o professor orientador Prof. Dr. Antonio José Ferreira Gomes Junior, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, 15 de outubro de 2020.



---

Peterson Euzébio Silva



# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre a Teoria dos grafos e Emparelhamento em grafos. Sobre a Teoria dos grafos apresentamos a ideia inicial de um grafo formado através de um mapa, em seguida foram analisamos conceitos como: grau de um vértice, subgrafo, isomorfismo de grafos, caminho, ciclo, conexidade, grafos bipartidos, árvore, entre outros. Algumas questões envolvendo a Teoria dos grafos foram resolvidas para mostrar a funcionalidade de um grafo em conteúdos como Análise Combinatória e Geometria Espacial. Demonstramos três teoremas importantes para o estudo de Emparelhamento em grafos, o Teoremas de Berge, Teorema de Hall e o Teorema de Tutte. Como aplicação para tudo que foi estudado desenvolvemos um jogo, Wald, uma homenagem ao matemático Abraham Wald.

**Palavras-chave:** Grafos, Emparelhamento em grafos, Teorema de Hall e Teorema de Tutte.



# Abstract

This project presents a study about the Theory of graphs and Pairing in graphs. The theory about graphs has the initial idea of a graph made based on a map, afterwards it is analysed by concepts like : degree of a vertex, subgraph, isomorphism of the graph, path, cycle, connectedness, bipartite graphs, trees, and so on. Some questions involving the Theory of Graphs were solved to show the functionality of a graph in topics like Combinatorial Analysis and Spatial Geometry. We demonstrated three important theorems for the study of pairing in graphs, the Theorem of Berge, Theorem of Hall and the Theorem of Tutte. To apply everything that was studied we developed a game, Wald, a reference to the mathematician Abraham Wald.

**Keywords:** Graphs, Pairing in graphs, Theorem of Hall and Theorem of Tutte.





# Lista de ilustrações

Figura 1 – Mapa com parte das capitais da região Nordeste do Brasil . . . . .	23
Figura 2 – Grafo representando as 4 capitais selecionadas e as referidas conexões .	23
Figura 3 – Grafo $G_1$ . . . . .	24
Figura 4 – Grafo $G_2$ . . . . .	24
Figura 5 – Grafo $G$ . . . . .	26
Figura 6 – Subgrafo $H$ . . . . .	26
Figura 7 – Grafo $G$ . . . . .	26
Figura 8 – Grafo conexo . . . . .	28
Figura 9 – Grafo desconexo . . . . .	28
Figura 10 – Grafo $G$ . . . . .	28
Figura 11 – Grafo $H$ . . . . .	28
Figura 12 – Grafo $G$ . . . . .	29
Figura 13 – Grafo $G[A]$ . . . . .	29
Figura 14 – Grafo $G$ . . . . .	29
Figura 15 – Grafo $G + xy$ . . . . .	29
Figura 16 – Grafo $G$ . . . . .	30
Figura 17 – Grafo $G - \{v\}$ . . . . .	30
Figura 18 – Grafo bipartido . . . . .	31
Figura 19 – Grafo planar . . . . .	31
Figura 20 – Grafo bipartido . . . . .	41
Figura 21 – Grafo que representa a solução . . . . .	42
Figura 22 – Grafo $G$ . . . . .	42
Figura 23 – Emparelhamento maximal . . . . .	42
Figura 24 – Emparelhamento máximo . . . . .	42
Figura 25 – Caminho aumentante $P$ . . . . .	43
Figura 26 – Caminho $P$ . . . . .	45
Figura 27 – . . . . .	46
Figura 28 – . . . . .	46
Figura 29 – . . . . .	50
Figura 30 – . . . . .	51
Figura 31 – Grafo $G$ . . . . .	55
Figura 32 – Grafo $G - S$ . . . . .	55
Figura 33 – Conjunto $S$ e as componentes conexas . . . . .	56
Figura 34 – Caminho $p$ . . . . .	61
Figura 35 – Ciclo $C$ . . . . .	62
Figura 36 – Ciclo $C$ . . . . .	63



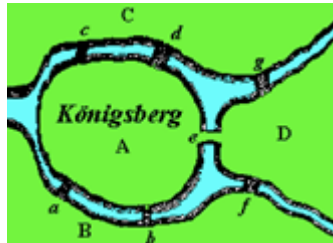
# Sumário

	Introdução . . . . .	19
1	<b>CONCEITOS BÁSICOS</b> . . . . .	23
1.1	O que é um GRAFO? . . . . .	23
1.2	Isomorfismo de grafos . . . . .	24
1.3	Grau de um vértice . . . . .	25
1.4	Subgrafo . . . . .	26
1.5	Passeio ou percurso . . . . .	26
1.6	Trilha ou Cadeia . . . . .	27
1.7	Caminho . . . . .	27
1.8	Ciclo ou circuito . . . . .	27
1.9	Conexidade . . . . .	27
1.10	Operações . . . . .	28
1.11	Árvores . . . . .	29
1.12	Grafos bipartidos . . . . .	31
1.13	Grafo planar . . . . .	31
2	<b>APLICAÇÕES</b> . . . . .	33
2.1	O problema das pontes de Königsberg . . . . .	33
2.2	Grafo e o Princípio fundamental de contagem . . . . .	34
2.3	Enem 2010 e Grafos . . . . .	34
2.4	O conjunto das diagonais espaciais e grafos . . . . .	36
2.5	Qual o número máximo de regiões em que $t$ retas dividem o plano? . . . . .	36
2.6	Grafos e os produtos notáveis . . . . .	38
3	<b>EMPARELHAMENTO EM GRAFOS</b> . . . . .	41
3.1	Introdução . . . . .	41
3.2	Emparelhamento . . . . .	42
3.2.1	Aplicação do Teorema de Berge . . . . .	47
3.3	Emparelhamento em grafos bipartidos . . . . .	50
3.3.1	Aplicação do Teorema de Hall . . . . .	53
3.4	Emparelhamento perfeito . . . . .	55
3.4.1	Paridade das componentes . . . . .	55
4	<b>WALD</b> . . . . .	65

Conclusão . . . . .	81
REFERÊNCIAS . . . . .	83
ANEXOS	85
ANEXO A – GRAFOS PRINCIPAIS . . . . .	87

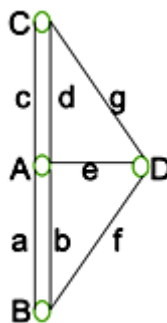
# Introdução

O primeiro registro de uma situação modelada pela teoria dos grafos ocorreu em 1736. O grande matemático Leonhard Euler, fez uma visita a cidade de Königsberg, atualmente conhecida como Kaliningrad, situada na Rússia. Euler ao chegar na cidade foi apresentado a um desafio que ainda não tinha sido resolvido. O Rio Pregel, corta a cidade de Königsberg, formando duas ilhas que são conectadas por uma ponte, e estas eram conectadas as demais regiões por mais seis pontes. O desafio consistia em saber se era possível cruzar as sete pontes em uma caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas. Na figura abaixo, temos uma representação das pontes ( $a, b, c, d, e, f, g$ ) e das quatro regiões ( $A, B, C, D$ ).



Fonte: <[www.google.com.br](http://www.google.com.br)>

É possível apresentar as mesmas informações da figura através de um modelo matemático chamado grafo. Para uma melhor análise da situação um grafo é uma excelente opção para modelar de forma inteligente. Na figura abaixo, temos um grafo que representa as pontes e regiões da cidade. Apresentaremos a solução do problema das pontes de Königsberg no capítulo 2.



Fonte: Produzido pelo autor

No desenvolvimento da dissertação estudaremos com detalhes os conceitos básicos sobre grafos e veremos como usar um grafo para facilitar a resolução de algumas questões, bem como a abordagem de conteúdos da Matemática.

Para ilustrar a ideia de um emparelhamento, podemos analisar o seguinte problema: imaginemos que duas pessoas, José e Laura, que não se conhecem cheguem a uma

concessionária de automóveis no mesmo momento, decididos a comprar o mesmo modelo de carro que é vendido em apenas três cores, branco, preto e vermelho. Os compradores são informados que naquele momento a concessionária possui apenas um carro de cada cor. Para tentar resolver a situação foi sugerido que cada cliente escolhesse pelo menos duas cores em ordem de preferência, onde a primeira cor seria a opção ideal, a segunda cor seria a opção 2 e a terceira cor, seria a opção 3. A tabela mostra a escolha feita por José e Laura.

Cliente	Cores selecionadas em ordem de preferência
José	Vermelho e branco
Laura	Branco, preto e vermelho

A tabela com as opções pode ser representada pelo grafo abaixo.



Fonte: Produzido pelo autor

Analisando o grafo apresentado, podemos afirmar que é possível que ambos os clientes comprem o carro na cor de sua preferência?

Sim é possível, vejamos como ficaria com o grafo abaixo. Os segmentos de reta em destaque representam a opção mais desejada pelos clientes e representa um emparelhamento em um grafo.



Fonte: Produzido pelo autor

A situação envolvendo José e Laura nos dá uma noção superficial do emparelhamento em grafos e poderia ser facilmente resolvida. Agora, fica a pergunta: se pensarmos na mesma situação com 20 clientes e 25 cores é possível que todos os clientes comprem o carro na cor de sua preferência? Fazendo a mesma pergunta de outra maneira, é possível emparelhar o grafo que representa a mesma situação com 20 clientes e 25 cores? É extremamente desafiador buscar essa resposta. Trataremos detalhadamente três teoremas fundamentais para o emparelhamento em grafos, o Teorema de Berge, o Teorema de Hall e o Teorema de Tutte. Cada teorema foi demonstrado justificando todas as etapas o que é muito relevante, já que normalmente esses teoremas são provados de maneira bastante resumida

nos livros. Por fim, idealizamos um jogo sobre emparelhamento em grafos, Wald, onde é possível desenvolver os conceitos apresentados na dissertação. Desejamos que esse trabalho seja utilizado para ajudar pessoas interessadas em aprender sobre a teoria dos grafos e principalmente sobre emparelhamento em grafos.





# 1 Conceitos básicos

Nesse capítulo, trataremos dos conceitos básicos de grafos, que são relevantes para a compreensão das definições e teoremas abordados ao longo da dissertação.

## 1.1 O que é um GRAFO?

De modo simples podemos criar uma figura que represente parte do tráfego aéreo da região Nordeste do Brasil. Para facilitar basta tomarmos 4 capitais, Recife, Natal, Fortaleza e Teresina.

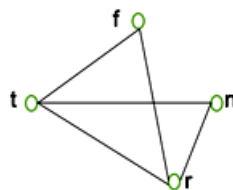
Figura 1 – Mapa com parte das capitais da região Nordeste do Brasil



Fonte: <[www.google.com.br](http://www.google.com.br)>

Está representado na figura 1 os vôos ligando essas 4 capitais. Não levaremos em consideração a origem ou destino de cada trajeto, apenas que é possível viajar diretamente entre as capitais que apresentam um segmento de reta entre elas. Podemos agora redefinir a nossa representação para uma figura mais simples com o objetivo de analisarmos apenas as informações desejadas.

Figura 2 – Grafo representando as 4 capitais selecionadas e as referidas conexões



Fonte: produzida pelo autor

Na figura 2, está indicado por um pequeno círculo, que chamaremos de **vértice** ou pontos cada uma das capitais selecionadas e estão indicados por segmentos de reta os possíveis trajetos ligando as capitais, que chamaremos de **arestas**. Vale ressaltar que a interseção de arestas que não apresente uma notação (círculo) não é considerado vértice. Uma figura desse tipo representa um **grafo**.

**Definição 1.** Um grafo  $G = (V, E)$  é uma estrutura formada por dois conjuntos: vértices e arestas, para o conjunto de vértices usaremos  $V(G)$  e para o conjunto de arestas,  $E(G)$ .

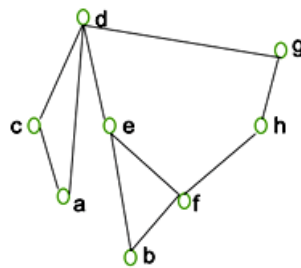
Cada aresta é um par não ordenado de vértices, ou seja, um conjunto com exatamente dois vértices. Uma aresta do grafo como  $\{r, f\}$  será denotada simplesmente por  $rf$  ou  $fr$ , pois o que realmente importa são as extremidades da aresta. Dizemos que os vértices  $r$  e  $f$  são **adjacentes**, pois existe uma aresta que os conecta e que a aresta  $rf$  incide em  $r$  e  $f$ , pois  $r$  e  $f$  são extremos da aresta. Estudaremos apenas os **grafos simples**, isto é, grafos que apresentam no máximo uma aresta entre dois vértices e não possuem arestas que liguem um vértice a ele mesmo, que é chamado de **laço**.

## 1.2 Isomorfismo de grafos

Um **isomorfismo** entre dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  é uma função  $\omega : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  bijetora tal que  $xy \in E(G_1)$  se, e somente se  $\omega(x)\omega(y) \in E(G_2)$ .

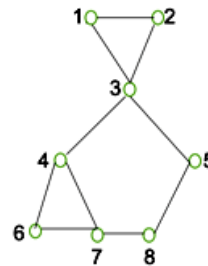
Um exemplo de isomorfismo está representado com os grafos das figuras 3 e 4.

Figura 3 – Grafo  $G_1$



Fonte: produzida pelo autor

Figura 4 – Grafo  $G_2$



Fonte: produzida pelo autor

Vamos provar que se  $xy \in E(G_1)$  então  $\omega(x)\omega(y) \in E(G_2)$ . Temos

$$\begin{aligned}\omega(a) &= 1, \\ \omega(b) &= 6, \\ \omega(c) &= 2, \\ \omega(d) &= 3, \\ \omega(e) &= 4, \\ \omega(f) &= 7, \\ \omega(g) &= 5, \\ \omega(h) &= 8.\end{aligned}$$

Devemos encontrar as 10 arestas do grafo  $G_2$ , sem que ocorra repetição. Usando a condição temos que:

$$\begin{aligned}
ac \in E(G_1) &\rightarrow \omega(a)\omega(c) \in E(G_2) = 12 \in E(G_2), \\
ad \in E(G_1) &\rightarrow \omega(a)\omega(d) \in E(G_2) = 13 \in E(G_2), \\
cd \in E(G_1) &\rightarrow \omega(c)\omega(d) \in E(G_2) = 23 \in E(G_2), \\
dg \in E(G_1) &\rightarrow \omega(d)\omega(g) \in E(G_2) = 35 \in E(G_2), \\
de \in E(G_1) &\rightarrow \omega(d)\omega(e) \in E(G_2) = 34 \in E(G_2), \\
gh \in E(G_1) &\rightarrow \omega(g)\omega(h) \in E(G_2) = 58 \in E(G_2), \\
ef \in E(G_1) &\rightarrow \omega(e)\omega(f) \in E(G_2) = 47 \in E(G_2), \\
be \in E(G_1) &\rightarrow \omega(b)\omega(e) \in E(G_2) = 64 \in E(G_2), \\
bf \in E(G_1) &\rightarrow \omega(b)\omega(f) \in E(G_2) = 67 \in E(G_2), \\
fh \in E(G_1) &\rightarrow \omega(f)\omega(h) \in E(G_2) = 78 \in E(G_2).
\end{aligned}$$

Assim constatamos que  $G_1$  e  $G_2$  possuem o mesmo número de arestas.

Observe que para mostrar que  $\omega(x)\omega(y) \in E(G_2)$  temos que  $xy \in E(G_1)$  basta observar que as 10 arestas de  $G_2$  foram contempladas acima sem repetição.

### 1.3 Grau de um vértice

Em um grafo  $G$ , o **grau** do vértice  $v$  será denotado  $d(v)$  e tem valor igual ao número de arestas que incidem em  $v$ . No grafo da figura 2, temos  $d(t) = 3$  e  $d(n) = 2$ , por exemplo.

**Proposição 1.** *Em qualquer grafo, a soma dos graus de seus vértices é igual ao dobro do número de arestas.*

*Demonstração.* Em um grafo  $G$  qualquer, uma aresta  $uv$  é contabilizada para o grau do vértice  $u$  e  $v$ , logo, toda aresta participa com duas unidades para o somatório dos graus do grafo  $G$ . ■

Como consequência da proposição 1, temos o seguinte teorema.

**Teorema 1.** *Todo grafo  $G$  tem um número par de vértices de grau ímpar.*

*Demonstração.* Se  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  temos que a soma dos graus de todos os vértices de  $G$  pode ser representada por:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum_{\text{grau par}} d(v_i) + \sum_{\text{grau ímpar}} d(v_i)$$

A primeira parcela do lado direito da equação é par, pois a soma de números pares tem resultado par. Pela proposição 1, a soma dos graus de todos os vértices é par, logo, a segunda parcela da direita é par. Na segunda parcela, o grau de cada vértice é ímpar e dessa forma, para que o lado direito da soma seja par, devemos ter uma quantidade par de vértices de grau ímpar. ■

## 1.4 Subgrafo

Um grafo  $H$  é **subgrafo** de um grafo  $G$  se todo vértice de  $H$  é vértice de  $G$  e toda aresta de  $H$ , caso exista, é aresta de  $G$ , ou seja, o subgrafo  $H$  é composto por um subconjunto de arestas e vértices que pertencem ao conjunto de arestas e vértices do grafo  $G$ .

Figura 5 – Grafo  $G$

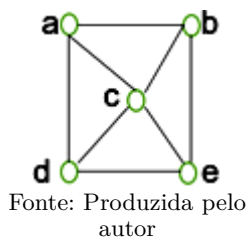
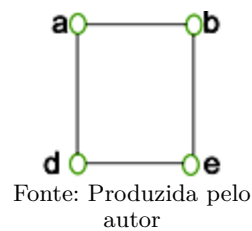


Figura 6 – Subgrafo  $H$

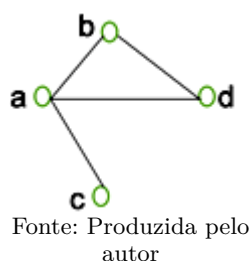


Na figura 5, a retirada do vértice  $c$  e das arestas que incidem nesse vértice no grafo  $G$  deu origem ao subgrafo  $H$  (figura 6), vamos explicar esse tipo de operação mais adiante.

## 1.5 Passeio ou percurso

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um **passeio** em  $G$  é uma sequência de vértices em que cada vértice é adjacente ao seguinte. O **comprimento de um passeio** é o número de arestas percorridas entre o primeiro e o último vértice. Na figura 7, temos como exemplo o passeio  $P = (c, a, b, d)$ , cujo comprimento é igual a 3.

Figura 7 – Grafo  $G$



## 1.6 Trilha ou Cadeia

Se for imposta ao passeio a restrição de não passar pela mesma aresta mais de uma vez, teremos uma **trilha** ou **cadeia**. Na figura 7, podemos obter uma trilha com a sequência  $\beta = (c, a, d, b, a)$ . Perceba que a trilha pode conter o mesmo vértice mais de uma vez.

## 1.7 Caminho

Um **Caminho** em um grafo é um passeio em que nenhum vértice é repetido. Na figura 7, temos o caminho  $C = (c, a, b, d)$ .

## 1.8 Ciclo ou circuito

Um **ciclo** é uma trilha de comprimento mínimo três, em que não há repetição de vértices, com exceção do primeiro, que se repete uma única vez, coincidindo com o último vértice. Na figura 7, temos o ciclo  $M = (a, b, d, a)$ .

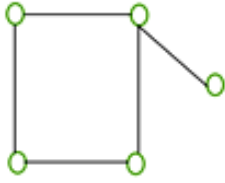
**Teorema 2.** *Se todo vértice de um grafo  $G$  tem grau maior ou igual a 2, então  $G$  contém um ciclo.*

*Demonstração.* Escolha um caminho  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n)$  de cardinalidade máxima. Como  $v_n$  tem grau no mínimo 2, temos que  $v_n$  está conectado a pelo menos outro vértice de  $G$  distinto de  $v_{n-1}$ , digamos  $v$ . Observe que esse vértice deve estar no caminho acima, do contrário o caminho  $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n, v)$  seria um caminho de cardinalidade maior, e teríamos um absurdo. Logo,  $v = v_k$ , para algum  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-2\}$ . Dessa forma temos o ciclo  $(v_k, v_{k+1}, \dots, v_{n-1}, v_n, v_k)$  como queríamos demonstrar. ■

## 1.9 Conexidade

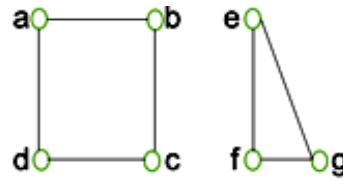
Um grafo  $G$  é **conexo** se para todo par de vértice  $v_1, v_2 \in V(G)$  existe caminho contendo  $v_1$  e  $v_2$  (figura 8), caso contrário  $G$  é **desconexo**. Uma **componente conexa** de um grafo  $G$  é um subgrafo conexo maximal em relação ao número de arestas, isto é, se for adicionado qualquer aresta ao subgrafo ele deixa de ser conexo. No grafo da figura 9 temos duas componentes conexas, uma com vértices  $(a, b, c, d)$  e a outra com vértices  $(e, f, g)$ .

Figura 8 – Grafo conexo



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 9 – Grafo desconexo



Fonte: Produzida pelo autor

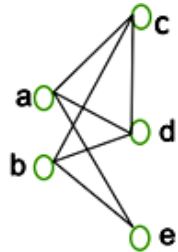
## 1.10 Operações

Sejam  $G$  um grafo,  $S \subset V(G)$ ,  $A \subset E(G)$  e  $\{x, y\} \subset V(G)$  tal que a aresta  $xy$  não pertence a  $E(G)$ . Nessas condições vamos definir três operações no grafo  $G$ .

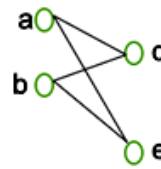
### Operação 1: Deleção de um conjunto $S$ de vértices

Essa operação dá origem ao grafo  $G - S$ , que é definido da seguinte forma:

$V(G - S) = V(G) - S$ , esses são os vértices do grafo  $G - S$ . Suas arestas são definidas por:  $E(G - S) = \{ab \in E(G) \mid a \notin S \text{ e } b \notin S\}$  (observe que  $E(G - S)$  são arestas de  $G$  que não tem vértice em  $S$ ). Temos um exemplo dessa operação nas figuras abaixo. Escolhendo  $S = \{c\}$  do grafo  $G$  (figura 10) temos na figura 11 o grafo  $G - S$ .

Figura 10 – Grafo  $G$ 

Fonte: Produzida pelo autor

Figura 11 – Grafo  $H$ 

Fonte: Produzida pelo autor

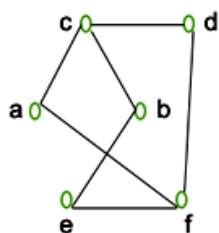
### Operação 2: Restrição de $G$ a um conjunto de arestas $A$ .

Nessa operação, vamos obter o grafo  $G[A]$ . O conjunto de vértices desse grafo  $V(G[A])$  é igual a todo vértice  $v$  de  $V(G)$  tal que  $v$  é vértice de alguma aresta de  $A$ , e  $E(G[A]) = A$ . Note que com essa definição não há vértices isolados em  $G[A]$ , pois todo vértice desse grafo está ligado a pelo menos uma aresta de  $A$ . Na figura 12, temos um grafo  $G$ , escolhendo  $A = \{ac, cd, cb\}$  obtemos o grafo  $G[A]$  (figura 13).

### Operação 3: Adição de uma aresta $xy$

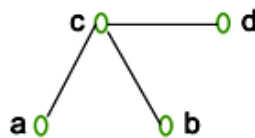
Nessa operação vamos obter o grafo  $G + xy$ . Temos que  $V(G + xy) = V(G)$  e  $E(G + xy) = E(G) \cup \{xy\}$ . Temos um exemplo da adição de uma aresta  $xy$  a um grafo  $G$  nas figuras abaixo.

Figura 12 – Grafo  $G$



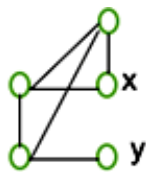
Fonte: Produzida pelo autor

Figura 13 – Grafo  $G[A]$



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 14 – Grafo  $G$



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 15 – Grafo  $G + xy$

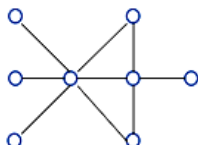


Fonte: Produzida pelo autor

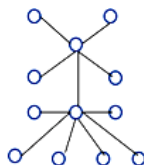
## 1.11 Árvores

Um grafo conexo e sem ciclos é chamado de **árvore**.

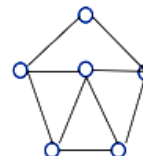
Grafo 1



Grafo 2



Grafo 3



Fonte: Produzido pelo autor

Os grafos 1 e 3 são conexos e apresentam ciclos, logo não podem ser considerados árvores. O grafo 2 é o único entre os três grafos acima que é uma árvore, pois é conexo e não apresenta ciclos.

**Teorema 3.** *Toda árvore com mais de um vértice possui pelo menos um vértice de grau 1.*

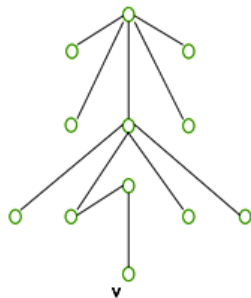
*Demonstração.* (baseada em Edward R. Scheinerman) Seja  $A$  uma árvore com mais de um vértice. Seja  $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$  o caminho com cardinalidade máxima em  $A$ . Vamos mostrar que o primeiro e o último vértice ( $v_0$  e  $v_n$ ) de  $P$  têm grau 1. Vamos supor, por contradição, que  $v_0$  não possui grau 1. Como  $v_0$  tem pelo menos um vizinho ( $v_1$ ), temos que o  $d(v_0) \geq 2$ . Seja  $k$  o outro vértice adjacente a  $v_0$ . Note que  $k$  não pertence a  $P$ , pois do contrário teríamos um ciclo  $(v_0, v_1, v_2, \dots, k, v_0)$  o que é um absurdo já que o grafo é uma árvore. Caso  $k$  não pertença ao caminho  $P$ , teríamos um novo caminho

$P' = (k, v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Nesse caso,  $|P'| > |P|$ , ou seja, um absurdo. Logo, toda árvore com mais de um vértice possui pelo menos um vértice de grau 1. ■

**Teorema 4.** *Toda árvore com  $n$  vértices possui  $n - 1$  arestas.*

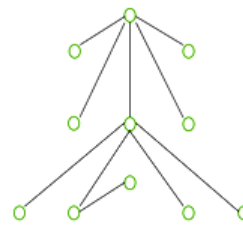
*Demonstração.* Vamos provar por indução no número de vértices. Para  $n = 1$ , temos que o número de arestas é  $n - 1 = 1 - 1 = 0$ . Suponha que o resultado é válido para qualquer árvore com  $n$  vértices. Considere  $G$  uma árvore com  $n + 1$  vértices e  $v \in V(G)$  com grau 1. O vértice  $v$  existe pelo teorema 3. Considere  $G' = G - \{v\}$ . Note que  $G'$  também será uma árvore, pois a retirada de um vértice de grau 1 não gera um ciclo e o grafo continua conexo (figuras 16 e 17). A árvore  $G'$  possui  $n$  vértices e pela hipótese de indução,  $n - 1$  arestas. Dessa forma,  $G$  possui  $n - 1$  arestas de  $G'$  mais uma aresta que foi retirada. Logo  $G$  possui  $n$  arestas.

Figura 16 – Grafo  $G$



Fonte: Produzida pelo autor

Figura 17 – Grafo  $G - \{v\}$



Fonte: Produzida pelo autor

**Teorema 5.** *Toda árvore com pelo menos dois vértices tem pelo menos dois vértices de grau 1.*

*Demonstração.* Vamos supor por absurdo que numa árvore com  $n$  vértices, existe no máximo um vértice de grau 1. Como pelo teorema 3 toda árvore tem pelo menos um vértice de grau 1, então teremos na árvore  $n - 1$  vértices de grau maior que 1, uma vez que numa árvore com pelo menos dois vértices não tem vértice de grau zero. Portanto:

$$\sum d(v) \geq 2(n - 1) + 1.$$

Como o  $\sum d(v)$  igual ao dobro do número de arestas (proposição 1) e pelo Teorema 4 a árvore possui  $n - 1$  arestas, podemos afirmar que  $\sum d(v) = 2(n - 1)$ . Logo, substituindo na inequação acima temos:

$$\begin{aligned} 2(n - 1) &\geq 2(n - 1) + 1 \\ 0 &\geq 1 \quad (\text{Absurdo}) \end{aligned}$$

Com isso, toda árvore com pelo menos dois vértices tem pelo menos dois vértices de grau 1. ■



## 1.12 Grafos bipartidos

Grafos que admitem que o conjunto de seus vértices seja particionado em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  com  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , de forma que toda aresta do grafo tenha uma extremidade em  $V_1$  e outra extremidade em  $V_2$  é chamado de **grafo bipartido**.

Figura 18 – Grafo bipartido



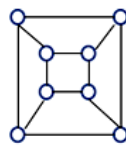
Fonte: Produzida pelo autor

Na figura 18, temos um exemplo de grafo bipartido. Fica fácil verificar que os vértices  $a$ ,  $c$  e  $d$  podem formar o subconjunto  $V_1$  e os vértices  $b$  e  $e$  podem formar o subconjunto  $V_2$ . Além disso, toda aresta desse grafo possui extremidades em subconjuntos distintos.

## 1.13 Grafo planar

Um grafo é **planar** se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando. Em um grafo planar, chamaremos de **faces internas** aquelas limitadas entre as arestas e a **face externa** será a região ilimitada que se encontra fora do grafo.

Figura 19 – Grafo planar



Fonte: Produzida pelo autor

Verifique que na figura 19, temos um grafo planar composto por 8 vértices, 12 arestas e 6 faces, sendo 5 faces internas e uma externa.

**Teorema 6** (Relação de Euler). *Se  $G$  é um grafo planar conexo com  $n$  vértices,  $e$  arestas e  $f$  faces, então vale a relação  $f - e + n = 2$ .*

*Demonstração.* Vamos provar por indução em  $e$ . Se o grafo for uma árvore, temos pelo teorema 4 que esse grafo possui  $n - 1$  arestas. Logo:

$$f - e + n = 1 - (n - 1) + n = 2.$$

A relação fica verificada. Se houver um ciclo, podemos retirar uma aresta do grafo e com isso teremos uma face a menos, mas pela hipótese de indução a relação valerá para o novo grafo. Temos que:

$$(f - 1) - (e - 1) + n = 2$$

$$f - e + n = 2.$$



## 2 Aplicações

### Introdução

Neste capítulo iremos resolver dois problemas clássicos da Teoria dos grafos, o problema das pontes de Königsberg e a quantidade máxima de regiões em que um determinado número de retas divide o plano. Faremos uma pequena análise de um grafo como ferramenta para melhorar a apresentação do Princípio fundamental de contagem. Resolveremos uma questão do Enem envolvendo grafos, em seguida, vamos usar um grafo para modelar a situação apresentada em uma questão da OBMEP sobre Geometria Espacial. Encerraremos o capítulo com uma sugestão para abordar o tema Produtos Notáveis através de grafos.

### 2.1 O problema das pontes de Königsberg

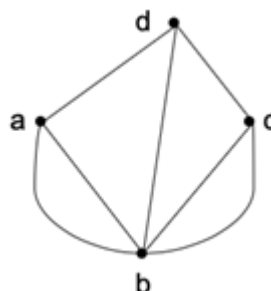
Na cidade de Königsberg (Rússia) sete pontes cruzam o Rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e o continente conforme a figura abaixo:



Fonte: <[www.google.com.br](http://www.google.com.br)>

Será que é possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar e passando por cada uma das pontes apenas uma vez?

*Resolução:* Vamos modelar esse problema através de um grafo.



Fonte: Produzido pelo autor

Cada vértice do grafo está representando uma região da cidade e cada aresta está representando uma ponte. Vamos descrever o grau de cada vértice do grafo,  $d(a) = 3$ ,  $d(b) = 5$ ,  $d(c) = 3$  e  $d(d) = 3$ . Devemos escolher um vértice qualquer para ser o primeiro do nosso ciclo, porém esse vértice precisa ter grau par, pois é necessário ter uma aresta de “saída” e outra aresta de “chegada”. Como no problema todos os vértices possuem grau ímpar, podemos afirmar que não é possível realizar um passeio de modo a começar e terminar no mesmo lugar passando por todas as 7 pontes.

## 2.2 Grafo e o Princípio fundamental de contagem

No início do estudo de Análise Combinatória, no Ensino Médio, é apresentado aos alunos o Princípio fundamental de contagem. Uma ferramenta que pode melhorar a compreensão dos alunos é a modelagem de alguns problemas utilizando grafos. Vejamos a resolução do exercício abaixo.

Temos três cidades A, B e C. Existem duas rodovias que ligam A e B e três que ligam B e C. Partindo de A e passando por B, de quantas maneiras podemos chegar até C?

*Resolução:* Vamos utilizar um grafo para representar a situação descrita no problema. O conjunto de vértices  $V = \{A, B, C\}$  representa as cidades e o conjunto de arestas  $E = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$  as rodovias.

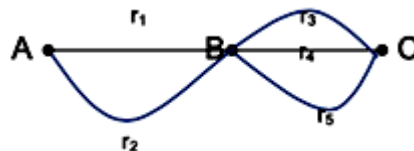


Figura produzida pelo autor

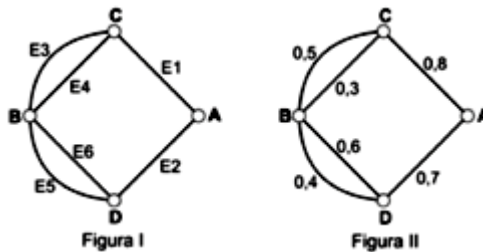
Com o uso do grafo fica fácil perceber que são 6 maneiras de sair de A e chegar até C passando por B.

## 2.3 Enem 2010 e Grafos

A questão que resolveremos agora foi aplicada no Enem 2010 e traz um grafo que modela as informações do texto.

Questão: A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim, há uma probabilidade de

30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.



Enem 2010

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é:

- a) E1E3                                      c) E2E4                                      e) E2E6  
b) E1E4                                      d) E2E5

*Resolução:* Vamos calcular a probabilidade de não pegar engarrafamento em nenhum dos trajetos, a opção E2E4 não será considerado, pois não se ajusta as condições da questão:

$$E1E3: 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$$

$$E1E4: 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$$

$$E2E5: 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$E2E6: 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

Fica fácil calcularmos a probabilidade de pegar engarrafamento em pelo menos um trajeto.

$$E1E3: 1 - 0,1 = 0,9$$

$$E1E4: 1 - 0,14 = 0,86$$

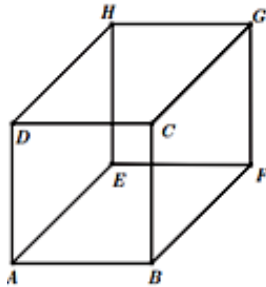
$$E2E5: 1 - 0,18 = 0,82$$

$$E2E6: 1 - 0,12 = 0,88$$

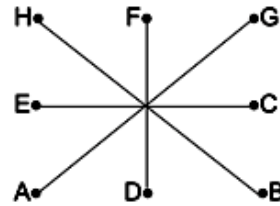
Logo, a opção com menor probabilidade de engarrafamento é o trajeto E2E5.

## 2.4 O conjunto das diagonais espaciais e grafos

Uma diagonal espacial é um segmento de reta com extremidades em vértices não pertencentes a uma mesma face. Se pensarmos nas diagonais espaciais de cubo como um grafo, podemos encontrar que esse grafo seria formado por 8 vértices e 4 arestas.



Fonte:  
<[www.google.com.br](http://www.google.com.br)>



Fonte: Produzido pelo autor

Podemos encontrar o número de arestas do grafo, ou seja, as diagonais espaciais de um poliedro convexo? Para responder a essa pergunta iremos resolver um problema do banco de questões da OBMEP 2011 nível 3.

*Questão:* Um poliedro convexo  $P$  tem 26 vértices, 60 arestas e 36 faces. 24 faces são triangulares e 12 são quadriláteros. Uma diagonal espacial é um segmento de reta unindo dois vértices não pertencentes a uma mesma face.  $P$  possui quantas diagonais espaciais?

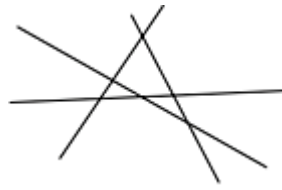
*Resolução:* É importante notar que esse grafo é composto por arestas que são distintas das arestas do poliedro e das diagonais das faces. Vamos calcular o total de segmentos com extremidades em dois vértices do poliedro, temos a  $C_{26,2} = 325$  segmentos. Como cada quadrilátero tem duas diagonais, a quantidade de diagonais das faces é igual a  $12 \cdot 2 = 24$ . Portanto, o número de diagonais espaciais é  $325 - 24 - 60 = 241$ .

## 2.5 Qual o número máximo de regiões em que $t$ retas dividem o plano?

*Resolução:* Como o objetivo é encontrar o máximo de regiões, a posição entre as  $t$  retas deve satisfazer duas condições:

- I) *entre as retas não pode ter retas paralelas.*
- II) *cada ponto de interseção pertence a apenas duas retas.*

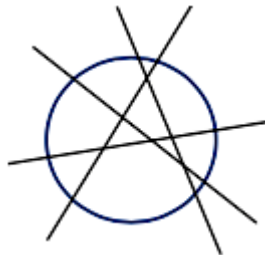
Uma representação de como ficaria a imagem com 4 retas está na figura abaixo. Fica fácil verificar que são 11 regiões.



Fonte: Produzido pelo autor

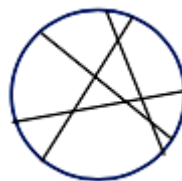
Agora, vamos seguir a resolução através de uma sequência de etapas, usaremos a imagem acima apenas como auxílio:

*Etapa 1:* traçar um círculo que contenha no seu interior todos os pontos de interseção das  $t$  retas. Como cada ponto pertence a exatamente duas retas, teremos um total de pontos igual a  $C_{t,2} = t(t-1)/2$  no interior do círculo.



Fonte: Produzido pelo autor

*Etapa 2:* vamos desprezar as partes das retas que ficaram no exterior do círculo, dessa forma obteremos o grafo  $G$ .



Fonte: Produzido pelo autor

O total de vértices de  $G$  é igual a  $2t + t(t-1)/2$ .

*Etapa 3:* verificar que o total de arestas de  $G$  é composto por  $2t$  arcos e mais  $t^2$  arestas no interior do círculo. Essas  $t^2$  arestas são justificadas, pois cada uma das  $t$  arestas iniciais ficam dividida em novas  $t$  arestas. Logo, o total de arestas é  $2t + t^2$ .

*Etapa 4:* Vale lembrar que estamos querendo calcular o número de regiões internas ao grafo  $G$ . Logo a relação de Euler (Teorema 6) fica escrita  $f - e + n = 1$ . Temos que,  $f$  é o número de regiões,  $e = 2t + t^2$  e  $n = 2t + t(t-1)/2$ . Substituindo as informações na relação de Euler, teremos:

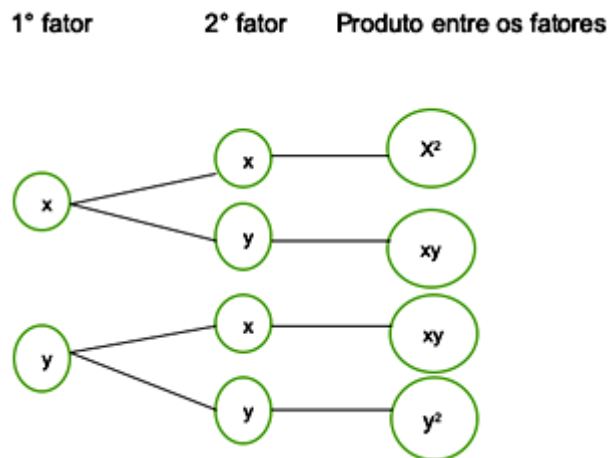
$$\begin{aligned}
 f - (2t + t^2) + 2t + t(t - 1)/2 &= 1 \\
 f &= 1 + t^2 - t(t - 1)/2 \\
 f &= 1 + t + t(t - 1)/2, \text{ o que é equivalente a:} \\
 f &= C_{t,0} + C_{t,1} + C_{t,2}
 \end{aligned}$$

## 2.6 Grafos e os produtos notáveis

No Ensino Fundamental 2 é apresentado aos alunos do 8º ano o conteúdo dos produtos notáveis. Não é difícil encontrar alunos do Ensino Médio com dificuldade em desenvolver  $(x + y)^2$  e  $(x + y)^3$ . Quero deixar uma sugestão para a apresentação desse conteúdo no Ensino Fundamental 2 através de um grafo.

i) desenvolvimento de  $(x + y)^2$

Como  $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$  podemos criar o grafo abaixo.



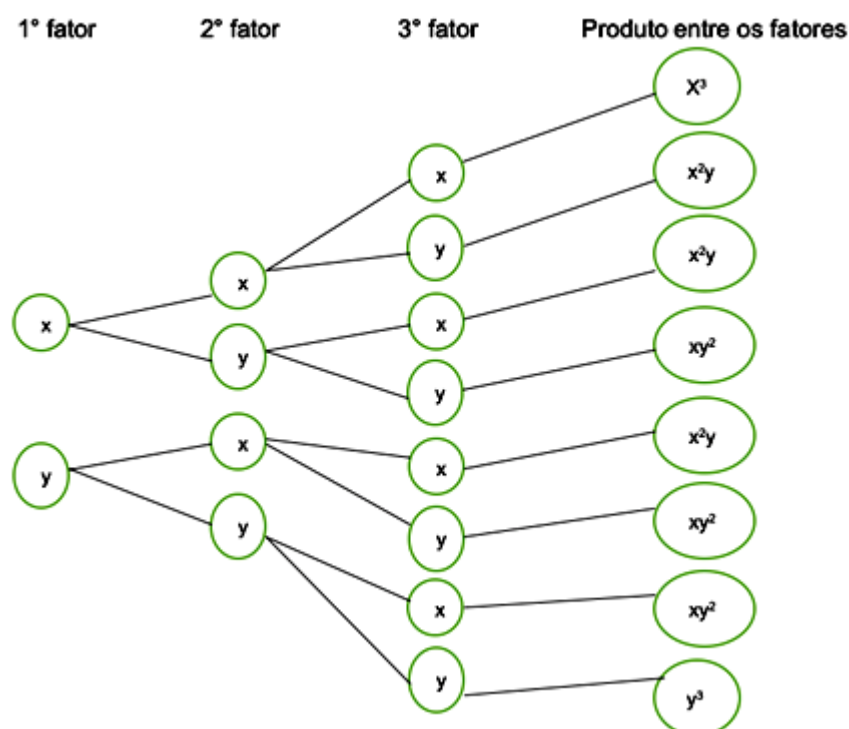
Fonte: Produzido pelo autor

Basta apenas somar os resultados encontrados no produto entre os fatores. Dessa forma, teremos  $x^2 + xy + xy + y^2$ . Logo,  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$



ii) desenvolvimento de  $(x + y)^3$

Como  $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$  podemos criar o grafo abaixo.



Fonte: Produzido pelo autor

Basta apenas somar os resultados encontrados no produto entre os fatores. Dessa forma, teremos  $x^3 + x^2y + x^2y + xy^2 + x^2y + xy^2 + xy^2 + y^3$ . Logo,

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$



## 3 Emparelhamento em grafos

### 3.1 Introdução

Nesse capítulo, trataremos de emparelhamento em grafos, apresentando o conceito de emparelhamento e demonstrando 3 dos principais teoremas: Berge, Hall e Tutte.

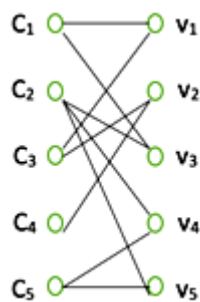
Como motivação, vamos analisar o seguinte problema:

Suponha que em um pequeno condomínio formado por 5 casas, cada família tem direito a uma vaga em um estacionamento que possui 5 vagas. Após uma breve análise, os moradores escolheram no máximo 3 possíveis vagas para guardar seu veículo. Dessa forma, as opções que cada família fez foram as seguintes:

- A família 1 tem preferência pelas vagas 1 e 3;
- A família 2 tem preferência pelas vagas 3, 4 e 5;
- A família 3 tem preferência pelas vagas 1 e 2;
- A família 4 tem preferência pela vaga 2;
- A família 5 tem preferência pelas vagas 4 e 5;

O objetivo do síndico é encontrar, caso exista, uma maneira de estacionar todos os carros respeitando as opções de cada família. Na figura 20, temos um grafo bipartido que representa o problema.

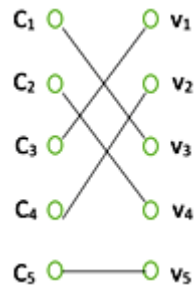
Figura 20 – Grafo bipartido



Fonte: Produzido pelo autor

Com as restrições fornecidas, é possível encontrar um grafo que representa a solução para o problema.

Figura 21 – Grafo que representa a solução



Fonte: Produzido pelo autor

Observe que na figura 21 em nenhum vértice incide duas arestas e todos os vértices foram contemplados. Com isso temos um *emparelhamento perfeito* que estudaremos com mais detalhes no decorrer deste capítulo.

## 3.2 Emparelhamento

Um conjunto de arestas  $M$  de um grafo  $G$  é chamado **emparelhamento** se para cada vértice  $v \in V(G)$  existe no máximo uma aresta de  $M$  que incide em  $v$ . Dizemos que o emparelhamento  $M$  **cobre** ou **satura** o vértice  $v$  se existe uma aresta de  $M$  que incide em  $v$ . Caso contrário, dizemos que  $v$  é um **vértice livre**.

Um emparelhamento  $M$  será **máximo** em  $G$  se  $M$  possui o maior número possível de arestas, ou seja, se a cardinalidade de  $M$  ( $|M|$ ) for máxima. Um emparelhamento  $M$  é **maximal** em  $G$  se qualquer acréscimo de aresta em  $M$  faz com que  $M$  deixe de ser emparelhamento. Com isso, todo emparelhamento máximo é maximal, mas nem todo maximal é máximo. As figuras 23 e 24 ilustram esse fato. As arestas em destaque representam o emparelhamento.

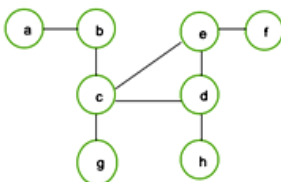
Figura 22 – Grafo  $G$ 

Figura 23 – Emparelhamento maximal

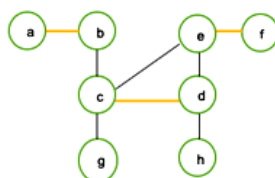
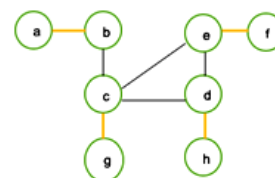


Figura 24 – Emparelhamento máximo



Fonte: Produzido pelo autor

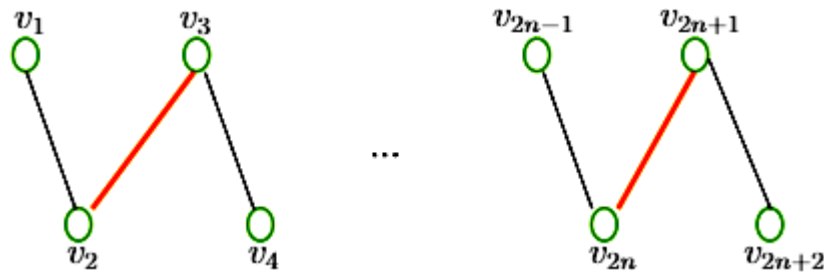
Dado um grafo  $G$  e um emparelhamento  $M$ , um **caminho alternante** em  $G$  é um caminho cujas arestas estão alternadamente em  $M$  e em  $E(G) - M$ . Dizemos que um **caminho é aumentante** se for alternante e possuir extremos em vértices livres em  $M$ . Na figura 23 podemos encontrar um caminho alternante  $(a, b, c, d, e, f)$  e um caminho aumentante  $(g, c, d, h)$ .

**Teorema 7 (Berge).** *Um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$  é máximo se e só se não existe em  $G$  um caminho aumentante.*

*Demonstração.* Provaremos em duas partes utilizando a contrapositiva.

$\Rightarrow$ : Vamos mostrar que se existe um caminho aumentante em  $G$  o emparelhamento  $M$  não é máximo. Seja  $P = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{2n-1}, v_{2n}, v_{2n+1}, v_{2n+2})$  um caminho aumentante em  $G$  (figura 25).

Figura 25 – Caminho aumentante  $P$



Fonte: Produzido pelo autor

Então por definição temos que  $\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\} \cap M = \emptyset$  e temos que  $\{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{2n}v_{2n+1}\} \subset M$ . Observe que o caminho  $P$  possui  $(2n + 1)$  arestas, das quais  $n$  são arestas do emparelhamento  $M$  e  $(n + 1)$  arestas não pertencem a  $M$ . Dessa forma  $M = \{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{2n}v_{2n+1}\} \cup F$ , onde  $F$  é um conjunto de arestas de  $G$  que não pertencem ao caminho  $P$ . Defina  $M' = F \cup \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}$ . Note que  $M'$  será um emparelhamento, pois a escolha de duas arestas quaisquer  $e$  e  $f$  que pertencem a  $M'$  pode ocorrer de uma das três maneiras relacionadas abaixo.

- i) as arestas  $e$  e  $f$  pertencem ao conjunto  $F$ .

Como  $F$  é um conjunto de arestas que pertencem ao emparelhamento  $M$ , então  $e$  e  $f$  não possuem vértice em comum. Com isso, temos que  $M'$  também será um emparelhamento.

- ii) as arestas  $e$  e  $f$  pertencem ao conjunto  $\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}$ .

Como o conjunto  $\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}$  não possui vértice em comum, pois  $\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}$  são arestas de um emparelhamento, então  $e$  e  $f$  não possuem vértice em comum. Logo,  $M'$  também será um emparelhamento.

- iii) a aresta  $e$  pertence a  $F$  e a aresta  $f$  pertence ao conjunto

$$\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}.$$

Seja a aresta  $e$  uma aresta que incide nos vértices  $a$  e  $b$ . Vamos mostrar que tanto  $a$  quanto  $b$  não são vértices do caminho  $P$ . Observe primeiro que  $a$  e  $b$  tem que ser diferente de  $v_2, v_3, \dots, v_{2n}, v_{2n+1}$ , pois teríamos duas arestas do emparelhamento  $M$

incidindo no mesmo vértice. Se  $a$  for igual a  $v_1$  ou  $v_{2n+2}$ , então  $v_1$  ou  $v_{2n+2}$  seria saturado por uma aresta do emparelhamento, o que é um absurdo, pois  $v_1$  e  $v_{2n+2}$  são vértices livres no emparelhamento. A hipótese de  $b$  ser igual a  $v_1$  ou  $v_{2n+2}$  resultaria no mesmo absurdo. Logo, tanto  $a$  quanto  $b$  não são vértices do caminho  $P$ , dessa forma, nenhuma aresta de  $F$  pertence ao caminho  $P$ . Como  $f$  pertence ao conjunto  $\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}$  e esse conjunto está contido em  $P$ , então  $f$  pertence ao caminho  $P$  e conseqüentemente  $e$  e  $f$  não possuem vértice em comum. Logo,  $M'$  também será um emparelhamento.

Com esses três itens provamos que  $M'$  é um emparelhamento.

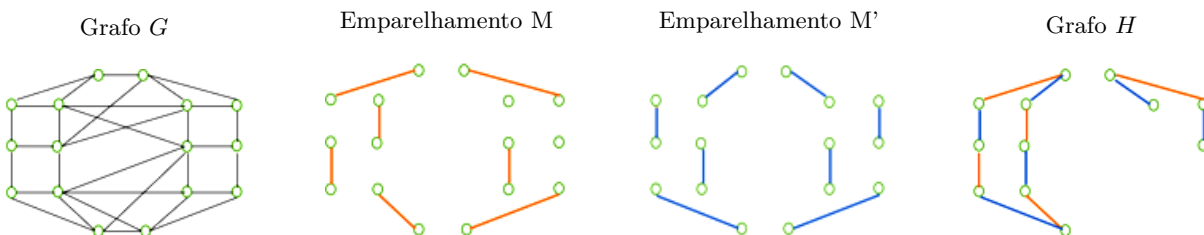
Note que  $|M| = |F| + n$ , pois  $M = \{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{2n}v_{2n+1}\} \cup F$ .

Temos que  $|M'| = |F| + |\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}, v_{2n+1}v_{2n+2}\}|$

$$|M'| = |F| + n + 1$$

Portanto  $|M'| = |M| + 1$ . Logo, se  $G$  possui um caminho aumentante, então o emparelhamento  $M$  não é máximo.

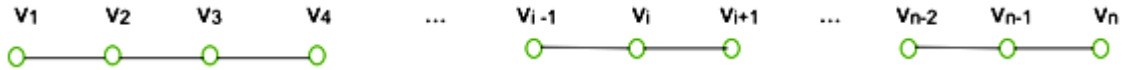
$\Leftarrow$ : Vamos mostrar que se o emparelhamento  $M$  não é máximo, então existe um caminho aumentante. Seja  $M'$  um emparelhamento de cardinalidade máxima em  $G$  ( $|M'| > |M|$ ). Seja o grafo  $H = G[M\Delta M']$ , onde  $M\Delta M'$  é a diferença simétrica entre  $M$  e  $M'$ , ou seja,  $M\Delta M' = (M \cup M') - (M \cap M')$ . As figuras abaixo representam um exemplo de como podemos obter o grafo  $H$ .



Fonte: Produzido pelo autor

Vamos mostrar que todos os vértices do grafo  $H$  tem grau 1 ou 2. Por definição  $H$  não tem vértice de grau zero. A existência de um vértice de grau maior ou igual a 3 seria um absurdo, visto que em cada vértice de  $H$  incide no máximo uma aresta de cada emparelhamento, pois a existência de uma terceira aresta implicaria que pelo menos duas arestas de  $M$  ou  $M'$  incidiriam nesse vértice e isso viola o conceito de emparelhamento.

As componentes conexas de  $H$  são ciclos com um número par de arestas ou caminhos, em ambos os casos alternando arestas de  $M$  e  $M'$ . Vamos demonstrar essa afirmação. Seja  $P = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n)$  um caminho de cardinalidade máxima nesta componente conexa (figura 26).

Figura 26 – Caminho  $P$ 

Fonte: Produzido pelo autor

Vamos analisar os possíveis casos para essa componente conexa.

1º caso: todos os vértices da componente conexa estão no caminho  $P$ .

i) se  $v_1$  tem grau 1, obrigatoriamente  $v_n$  também terá grau 1.

Vamos supor por absurdo que  $v_n$  tem grau 2. Nesse caso  $v_n$  estaria ligado a algum vértice  $v_k$ , com  $1 \leq k \leq n-1$ . Mas isso é um absurdo, pois se  $k = 1$  o vértice  $v_1$  teria grau 2 contrariando a hipótese. E se  $k \neq 1$ , o vértice  $v_k$  teria grau 3, o que seria impossível pois o grafo  $H$  só possui vértices com grau 1 ou 2. Dessa forma,  $v_n$  obrigatoriamente tem grau 1 e com isso, a componente é um caminho.

ii) se  $v_1$  tem grau 2, obrigatoriamente  $v_n$  também terá grau 2.

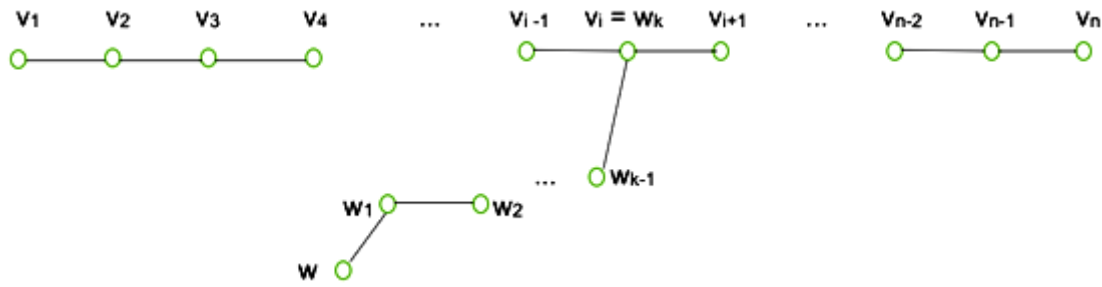
Como  $v_1$  tem grau 2 e possui uma aresta adjacente a  $v_2$ , a outra aresta tem que estar ligada a um vértice  $v_k$ , com  $3 \leq k \leq n$ . Se  $k \neq n$ , o vértice  $v_k$  teria grau 3, o que seria impossível pois o grafo  $H$  só possui vértices com grau 1 ou 2. Com isso,  $v_1$  está ligado a  $v_n$ , portanto,  $v_n$  tem grau 2. Logo,  $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  é um ciclo. Seja  $n$  o total de arestas do ciclo. Vamos supor que  $n$  seja ímpar. Como as arestas de  $P$  são alternadas entre  $M$  e  $M'$ , necessariamente teremos que duas arestas adjacentes pertencem ao mesmo emparelhamento, mas isso é um absurdo. Logo  $n$  é par.

2º caso: existe um vértice  $w$  da componente conexa que não está no caminho  $P$ .

Como em uma componente conexa precisa existir um caminho entre dois vértices quaisquer, temos que existe um caminho ligando  $w$  a  $P$ .

i) esse caminho pode levar  $w$  a um vértice que não está nas extremidades de  $P$  (figura 27).

Figura 27

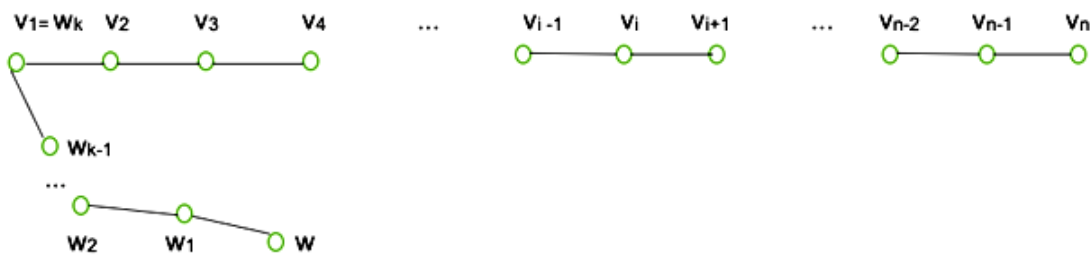


Fonte: Produzido pelo autor

Essa possibilidade leva a um absurdo, pois o vértice  $v_i$  teria grau 3.

- ii) esse caminho pode levar  $w$  a um vértice que está em uma das extremidades de  $P$  (figura 28).

Figura 28



Fonte: Produzido pelo autor

Dessa forma o caminho  $(w, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, w_k, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}, v_n)$  seria maior do que o caminho  $P$ , o que é um absurdo, pois  $P$  tem cardinalidade máxima na componente conexa.

Logo, o 2º caso não pode ocorrer. Com isso, temos que a componente conexa é um caminho ou ciclo com um número par de arestas que alternam entre  $M$  e  $M'$ .

Agora, queremos mostrar que existe pelo menos uma componente conexa com mais arestas de  $M'$  do que de  $M$ . Suponha por absurdo que em todas as componentes conexas o número de arestas de  $M'$  seja menor ou igual que o número de arestas de  $M$ .

Componente conexa	Nº de arestas de $M'$	Nº de arestas de $M$	Suposição
1	$a_1$	$b_1$	$a_1 \leq b_1$
2	$a_2$	$b_2$	$a_2 \leq b_2$
3	$a_3$	$b_3$	$a_3 \leq b_3$
...	...	...	...
$n$	$a_n$	$b_n$	$a_n \leq b_n$



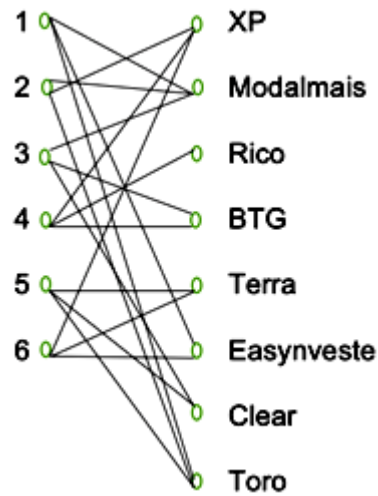
Da tabela, podemos notar que  $|M'| = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + |M \cap M'|$  e que  $|M| = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) + |M \cap M'|$ . Com isso temos que  $|M'| \leq |M|$  o que é um absurdo, pois a suposição é que  $|M'| > |M|$ . Portanto, existe pelo menos uma componente conexa com mais arestas de  $M'$  do que de  $M$  e essa componente conexa não pode ser um ciclo, pois o ciclo possui mesma quantidade de arestas de  $M$  e  $M'$ . Logo, essa componente conexa é um caminho com mais arestas de  $M'$  do que de  $M$  e por definição será um caminho aumentante pois os extremos não são saturados pelas arestas do emparelhamento  $M$ . Então fica provado que se o emparelhamento  $M$  não é máximo, então existe um caminho aumentante. ■

### 3.2.1 Aplicação do Teorema de Berge

Trader é um profissional responsável por negociar ativos financeiros, seja como contratado para uma instituição financeira ou para si mesmo. Esse profissional usa um sistema chamado Home Broker que o conecta ao pregão eletrônico através da internet. Cada corretora de valores possui o seu Home Broker e tem foco em diferentes clientes: investidor em ações, fundos de investimento, tesouro direto e renda fixa. Seis traders que são amigos e trabalhavam por conta própria, decidiram enviar seus currículos para algumas corretoras. Escolheram as 8 maiores corretoras do Brasil e combinaram que cada um deveria mandar seu currículo para 3 corretoras. Na tabela consta as opções de cada trader em ordem de preferência.

Trader	Opção 1	Opção 2	Opção 3
1	Modalmais	Toro	Easynveste
2	Toro	Modalmais	XP
3	Clear	BTG	Modalmais
4	XP	Rico	BTG
5	Clear	Toro	Terra
6	XP	Terra	Easynveste

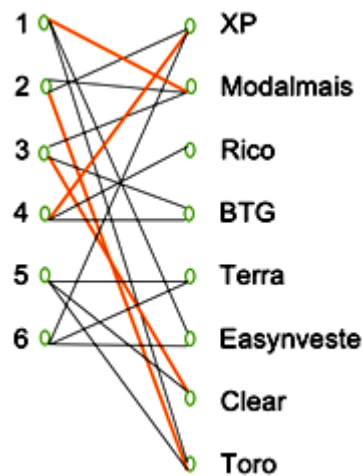
Vamos construir o grafo representando as opções de cada trader.



Fonte: Produzido pelo autor

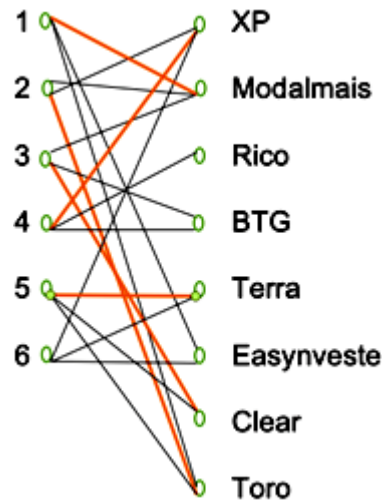
É possível emparelhar o grafo respeitando apenas a 1ª opção de cada trader?

Não, pois só é possível emparelhar os 4 primeiros traders respeitando essa condição, uma vez que a 1ª opção dos traders 5 e 6 já serão emparelhadas. Vejamos como fica o grafo.



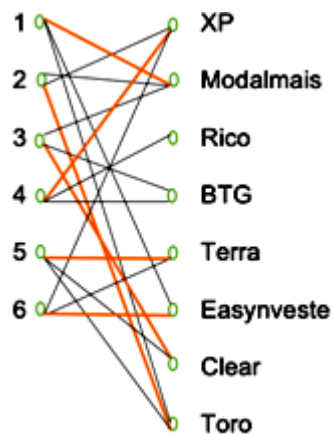
Fonte: Produzido pelo autor

É possível adicionar mais arestas ao emparelhamento no grafo anterior? Note que temos um caminho aumentante  $A = (5, \text{Clear}, 3, \text{BTG})$  e pelo Teorema de Berge o emparelhamento apresentado não é máximo. Logo, é possível encontrarmos um emparelhamento com mais arestas. Podemos emparelhar o trader 5 com a sua terceira opção. Vejamos como fica o grafo.



Fonte: Produzido pelo autor

É possível adicionar mais arestas ao emparelhamento no grafo anterior? Note que temos um caminho aumentante  $B = (6, \text{Terra}, 5, \text{Clear}, 3, \text{BTG})$  e pelo Teorema de Berge o emparelhamento apresentado não é máximo. Logo, é possível encontrarmos um emparelhamento com mais arestas. Podemos emparelhar o trader 6 com a sua terceira opção. Vejamos como fica o grafo.

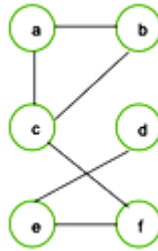


Fonte: Produzido pelo autor

### 3.3 Emparelhamento em grafos bipartidos

**Definição 2.** Dado um conjunto  $S$  de vértices em um grafo  $G$ , vizinhança de  $S$ ,  $N(S)$ , é o conjunto de todos os vértices de  $G$  adjacentes aos vértices do conjunto  $S$ . Na figura 29, se  $S = \{a\}$ , temos que  $N(S) = \{b, c\}$  e se  $S = \{c, f\}$ , temos que  $N(S) = \{a, b, c, e, f\}$ .

Figura 29



Fonte: Produzido pelo autor

**Teorema 8 (Hall).** Seja  $G$  um grafo bipartido com bipartição  $(X, Y)$ . Então  $G$  contém um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$  se, e somente se,  $|N(S)| \geq |S|$ , para todo  $S \subset X$ .

*Demonstração.*  $\Rightarrow$ : Suponha que o grafo  $G$  possui um emparelhamento  $M$  que satura todos os vértices de  $X$ . Seja  $S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  um subconjunto de vértices de  $X$ . Como todos os elementos de  $S$  estão saturados pelo emparelhamento  $M$ , existe em  $Y$  o conjunto  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  de forma que  $\{x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \dots, x_ny_n\}$  são arestas de  $M$ . Observe que o conjunto  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$  está contido no conjunto dos vizinhos de  $S$  ( $N(S)$ ). Portanto,  $|\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}| \leq |N(S)|$ , como  $|\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}| = |S|$  temos que  $|N(S)| \geq |S|$ .

$\Leftarrow$ : Queremos provar que se  $|N(S)| \geq |S|$ , para todo  $S \subset X$ , então  $G$  possui um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$ . Suponha, por contradição, que  $G$  é um grafo bipartido em que  $|N(S)| \geq |S|$  para todo  $S \subset X$  mas que  $G$  não possui um emparelhamento que sature todos os vértices de  $X$ . Seja  $M'$  um emparelhamento máximo em  $G$ . Pela suposição  $M'$  não satura todos os vértices de  $X$ . Seja  $x_1 \in X$ , um vértice não saturado pelo emparelhamento  $M'$  e seja  $A$  o conjunto formado por todos os vértices de todos os caminhos alternantes a partir de  $x_1$ . Vejamos duas afirmações importantes para a demonstração.

Afirmação 1: o conjunto  $A$  possui pelo menos 3 elementos.

Note que  $x_1$  não é um vértice isolado, ou seja,  $x_1$  tem grau diferente de zero, pois se  $x_1$  fosse isolado poderíamos ter um conjunto  $S = \{x_1\}$  e  $N(S) = \emptyset$ . E nesse caso,  $|N(S)| < |S|$  contrariando a hipótese de que  $|N(S)| \geq |S|$ . Logo, incide pelo menos uma

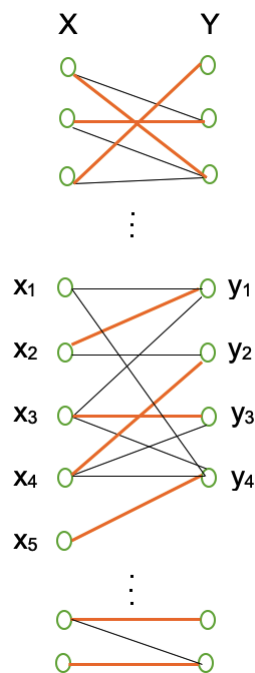
aresta em  $x_1$ . Dessa forma, existe  $y_1 \in Y$  tal que  $x_1y_1$  é uma aresta do grafo  $G$ . Observe que  $y_1$  tem que estar saturado pelo emparelhamento  $M'$ , caso contrário, a aresta  $x_1y_1$  poderia ser adicionada ao emparelhamento  $M'$  e com isso, teríamos um emparelhamento maior que  $M'$ , o que é um absurdo, pois  $M'$  é um emparelhamento máximo. Logo, no vértice  $y_1$  incide uma aresta do emparelhamento  $M'$ . Então, existe um vértice  $x_2 \in X$  ligado a  $y_1$  por uma aresta do emparelhamento  $M'$ . Portanto, o conjunto  $A$  possui pelo menos três elementos,  $x_1, y_1$  e  $x_2$ .

Afirmção 2:  $x_1$  é o único vértice não saturado por  $M'$  no conjunto  $A$ .

Suponha que exista outro vértice livre  $v$  no conjunto  $A$ . Como  $v \in A$ , existe um caminho alternante contendo  $x_1$  e  $v$ . Como  $x_1$  e  $v$  são livres eles serão extremos do caminho, com isso, esse caminho é aumentante. Pelo Teorema de Berge temos um absurdo, pois se  $M'$  é máximo não existe em  $G$  caminho aumentante. Logo,  $x_1$  é o único vértice livre em  $A$ .

Note que o conjunto  $A$  é formado por dois subconjuntos: um deles com vértices de  $X$ , chamaremos esse subconjunto de  $S$  e o outro, formado por vértices de  $Y$ , chamaremos de  $T$ , sendo assim  $A = S \cup T$ . A partir da figura 30, vamos obter um exemplo de como podem ser os conjuntos  $A, S$  e  $T$ . As arestas em destaque são arestas de um emparelhamento.

Figura 30



Fonte: Produzido pelo autor

Na figura 30, temos alguns caminhos alternantes a partir de  $x_1$ , entre eles, o caminho  $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_4, y_3, x_3, y_4, x_5)$ . Dessa forma,  $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ,  $T = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$  e  $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4\}$

Já provamos na afirmação anterior que o emparelhamento  $M'$  satura todos os vértices de  $A$ , exceto  $x_1$ , e como  $A = S \cup T$ , o emparelhamento  $M'$  satura todos os vértices de  $S$  e  $T$ , exceto  $x_1$ . Como todo vértice de  $T$  é saturado por  $M'$ , para cada vértice  $y \in T$  existe um vértice  $x \in X$  tal que  $xy \in M'$ . Agora vamos provar que  $|S| > |T|$ .

Como para cada  $y \in T$  encontramos um  $x \in S$  tal que  $xy \in M'$  e  $S$  possui um vértice que não pertence ao emparelhamento  $M'$ , temos que  $|S| > |T|$ .

Agora vamos mostrar que  $N(S) \subset T$ , ou seja, que a vizinhança de  $S$  é formada pelos vértices de  $T$ . Tome  $y \in N(S)$  vamos mostrar que  $y \in T$ . Como  $y \in N(S)$  então existe  $x \in S$  tal que  $xy$  é uma aresta de  $G$ . Como existe um caminho alternante ligando  $x_1$  a  $x$  temos dois casos para analisar.

1º caso:  $y$  está no caminho alternante, com isso,  $y \in A$ . Como  $A = S \cup T$  e  $y \notin S$  temos que  $y \in T$ .

2º caso:  $y$  não está no caminho alternante. Temos que mostrar que o caminho de  $x_1$  a  $y$  é um caminho alternante. O caminho  $x_1$  a  $x$  começa com uma aresta que não pertence ao emparelhamento e termina com uma aresta do emparelhamento, pois  $x$  é adjacente a um vértice  $y_n \in T$  e todo vértice de  $T$  é saturado por uma aresta de  $M'$ . Como  $y$  não está no caminho alternante e  $y \in N(S)$  temos que a aresta  $xy$  do grafo não pertence ao emparelhamento, pois se  $xy$  fosse uma aresta de  $M'$  teríamos duas arestas do emparelhamento incidindo no vértice  $x$ . Ao acrescentar a aresta  $xy$  ao caminho temos um novo caminho que inicia em  $x_1$  e termina em  $y$  e esse caminho será alternante.

Com isso, mostramos que  $y \in A$  e pelo caso 1,  $y \in T$ , e dessa forma  $|N(S)| \leq |T|$ . No entanto, provamos que  $|S| > |T|$ , logo  $|N(S)| < |S|$ , e isso contradiz a hipótese de  $|N(S)| \geq |S|$ . Dessa forma, provamos que em um grafo  $G$  bipartido com bipartição  $(X, Y)$ ,  $G$  contém um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$  se, e somente se,  $|N(S)| \geq |S|$ , para todo  $S \subset X$ . ■

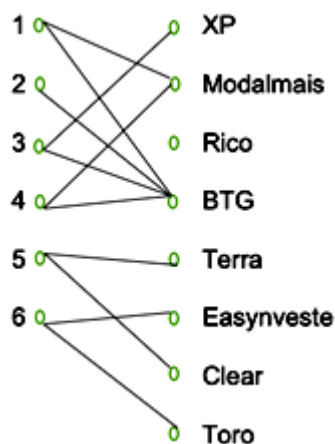
### 3.3.1 Aplicação do Teorema de Hall

Trader é um profissional responsável por negociar ativos financeiros, seja como contratado para uma instituição financeira ou para si mesmo. Esse profissional usa um sistema chamado Home Broker que o conecta ao pregão eletrônico através da internet. Cada corretora de valores possui o seu Home Broker e tem foco em diferentes clientes: investidor em ações, fundos de investimento, tesouro direto e renda fixa. Seis traders que são amigos e trabalhavam por conta própria, ficaram sabendo que algumas corretoras estavam contratando novos profissionais. Sendo mais específico, a informação que chegou até os seis amigos foi que as 8 maiores corretoras do país estavam cada uma delas buscando um trader novo. Eles decidiram enviar seus currículos e combinaram que cada um deveria mandar seu currículo para no máximo 2 corretoras. A escolha das corretoras deveria levar em conta a facilidade de operar o Home Broker, as taxas cobradas e o tipo de investimento que cada trader possui maior experiência. Na tabela está as escolhas feitas por cada trader. É possível que todos os profissionais consigam uma vaga para trabalhar em seis corretoras distintas respeitando as escolhas de cada um?

Trader	Corretora
1	BTG e Modalmais
2	BTG
3	BTG e XP
4	BTG e Modalmais
5	Clear e Terra
6	Easynveste e Toro

Resolução:

i) Vamos representar a situação através de um grafo bipartido



Fonte: Produzido pelo autor

ii) O Teorema de Hall garante que um grafo bipartido com bipartição  $(X, Y)$  contém um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$  se, e somente se,  $|N(S)| \geq |S|$ ,

para todo  $S \subset X$ . Temos um grafo bipartido com dois conjuntos de vértices,  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $Y = \{XP, \text{Modalmais}, \text{Rico}, \text{BTG}, \text{Terra}, \text{Easynveste}, \text{Clear}, \text{Toro}\}$ . A proposta é encontrar um emparelhamento que satura todos os vértices de  $X$ . A escolha de um conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  nos fornece um  $N(S) = \{XP, \text{Modalmais}, \text{BTG}\}$ . Com isso, temos que  $|S| = 4$  e  $|N(S)| = 3$ , logo,  $|N(S)| < |S|$ . Portanto, não é possível encontrarmos um emparelhamento que sature todos os vértices de  $X$ , ou seja, não será possível que os seis profissionais consigam uma vaga para trabalhar em seis corretoras distintas respeitando as escolhas de cada um.



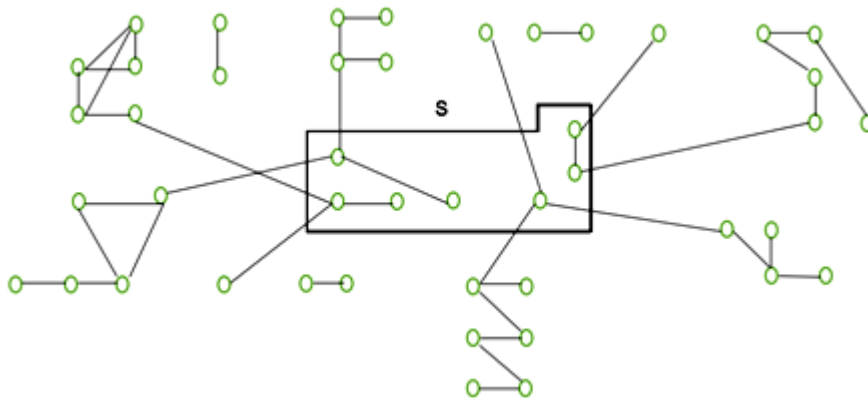
## 3.4 Emparelhamento perfeito

Em um grafo  $G$ , um emparelhamento  $M$  é **perfeito**, se cada vértice  $v \in V(G)$  é saturado por alguma aresta de  $M$ .

### 3.4.1 Paridade das componentes

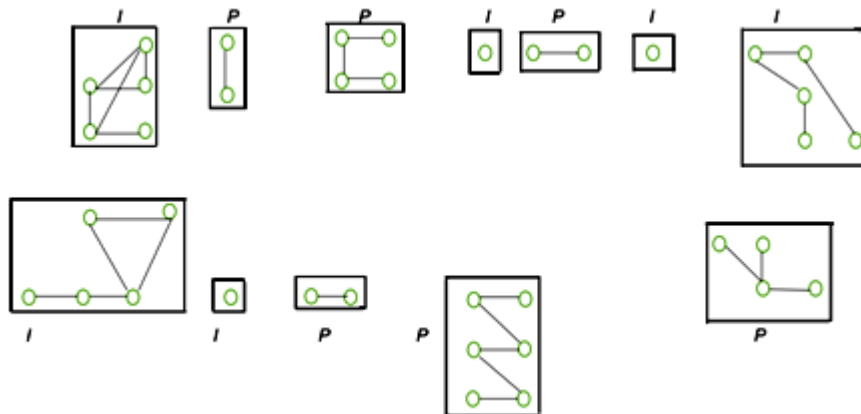
Seja  $S$  um conjunto de vértices de um grafo  $G$ . O grafo  $G - S$  é formado por **componentes ímpares** (número de vértice ímpar) e **componentes pares** (número de vértice par).

Figura 31 – Grafo  $G$



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 32 – Grafo  $G - S$



Fonte: Produzido pelo autor

Chamaremos de  $o(G - S)$  o número de componentes ímpares do grafo  $G - S$ . Na figura 32, temos que  $o(G - S) = 6$  e o número de componentes pares também é igual a 6.

**Teorema 9 (Tutte).** *Um grafo  $G$  possui um emparelhamento perfeito se, e somente se,  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$ .*

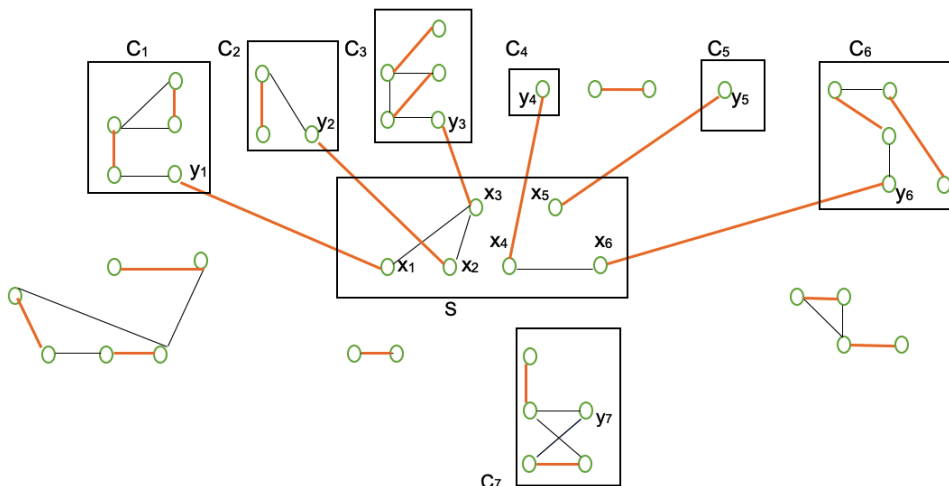
*Demonstração.*  $\Rightarrow$ : Vamos provar que se  $G$  tem um emparelhamento perfeito então  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$ . A estratégia que usaremos será a seguinte: provar que se  $G$  possui pelo menos um conjunto  $S$  tal que  $o(G - S) > |S|$  então  $G$  não possui emparelhamento perfeito. Iremos supor por contradição que  $G$  possui um emparelhamento perfeito. Dessa forma, provaremos por uma contradição na contrapositiva

Seja  $M$  um emparelhamento perfeito em  $G$  e  $C$  uma componente ímpar de  $G - S$ , então existe um vértice  $y \in V(C)$  e um vértice  $x \in S$  tal que  $xy \in M$ . Essa afirmação requer uma demonstração.

Seja  $C$  uma das componentes ímpares de  $G - S$  e  $y \in V(C)$  um vértice que não está emparelhado com nenhum outro vértice de  $C$ . Note que a existência do vértice  $y$ , ocorre porque em um emparelhamento perfeito cada componente ímpar terá pelo menos um vértice que não estará emparelhado com outro vértice da própria componente. Como  $M$  é um emparelhamento perfeito  $y$  tem que estar emparelhado com algum vértice  $x$  do grafo  $G$ . O vértice  $x$  não pode ser vértice de outra componente de  $G - S$ , pois pensar que  $x$  pode pertencer a outra componente nos levaria a uma aresta  $xy$  ligando duas componentes conexas distintas o que é um absurdo. Logo,  $x \in S$  e  $xy \in M$ .

Vamos supor que  $|S| = n$  e sejam  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots, C_k$  componentes ímpares de  $G - S$ , com  $k > n$ , pois estamos supondo que  $o(G - S) > |S|$ . Pela afirmação acima, em cada componente  $C_i$ , com  $1 \leq i \leq k$ , existe um vértice  $y_i$  que estará emparelhado com  $x_i \in S$ , de forma que  $y_i x_i \in M$ . Como  $k > n$ , algum  $x_i$  tem que estar emparelhado com pelo menos dois vértices  $y_i$ , o que é um absurdo em um emparelhamento perfeito. Logo, se  $G$  tem um emparelhamento perfeito então  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$ . Vejamos o exemplo da figura 33. Temos as componentes ímpares  $C_1, C_2, \dots, C_7$  e  $|S| = 6$ . Note que para o emparelhamento ser perfeito temos que um vértice de  $S$  deve ser emparelhado com o vértice  $y_7$ , o que é um absurdo.

Figura 33 – Conjunto  $S$  e as componentes conexas



Fonte: Produzido pelo autor

$\Leftarrow$ : Queremos provar que se  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$  então  $G$  tem um emparelhamento perfeito. Provaremos usando a contrapositiva. Vamos supor que não existe um emparelhamento perfeito em  $G$ . Com essa suposição basta encontrar um conjunto  $S \subseteq V(G)$  tal que  $o(G - S) > |S|$ .

Vamos definir um conjunto  $S$  como um **conjunto mau**, se  $o(G - S) > |S|$  e  $S$  será um **conjunto bom**, se  $o(G - S) \leq |S|$ . Sobre esse conjunto mau podemos fazer duas afirmações:

Afirmiação 1: Se  $S$  é um conjunto mau em  $G + xy$  então  $S$  será mau em  $G$ , onde  $xy$  é uma aresta que não pertence ao grafo  $G$  e os vértices  $x$  e  $y$  são vértices de  $G$ .

Provaremos a afirmação mostrando que se  $S$  for um conjunto bom em  $G$  então  $S$  será bom em  $G + xy$ , ou seja, provaremos usando a contrapositiva da afirmação. Analisaremos os seis possíveis casos para a adição de uma aresta  $xy$  ao grafo  $G$ .

Caso 1: se  $x$  e  $y$  são vértices de uma mesma componente conexa de  $G - S$ ,  $o(G - S)$  não é alterado, pois a adição da aresta  $xy$  não altera o número de vértices de nenhuma componente. Como o número de componentes ímpares não sofre alteração com a adição da aresta  $xy$ , temos que  $o[(G + xy) - S] = o(G - S)$ . Como  $S$  é bom em  $G$ , temos que  $o[(G + xy) - S] = o(G - S) \leq |S|$ . Logo,  $o[(G + xy) - S] \leq |S|$  e  $S$  é bom em  $G + xy$ .

Caso 2: se  $x \in C_1$  e  $y \in C_2$ , com  $C_1$  e  $C_2$  componentes ímpares distintas de  $G - S$ . A adição de  $xy$  dá origem a uma componente par em  $[(G + xy) - S]$ . Com isso, estaremos diminuindo o número de componentes ímpares, e dessa forma, teremos  $o[(G + xy) - S] < o(G - S)$ . Como  $S$  é bom em  $G$ , temos que  $o[(G + xy) - S] < o(G - S) \leq |S|$ . Logo,  $o[(G + xy) - S] < |S|$  e  $S$  é bom em  $G + xy$ .

Caso 3:  $x \in C_1$  e  $y \in C_2$ , com  $C_1$  e  $C_2$  componentes pares distintas de  $G - S$ . A adição de  $xy$  dá origem a uma componente par em  $[(G + xy) - S]$ . Portanto, o número de componentes ímpares não é alterado, com isso,  $o[(G + xy) - S] = o(G - S)$ . Logo,  $o[(G + xy) - S] \leq |S|$  e  $S$  é bom em  $G + xy$ .

Caso 4:  $x \in C_1$  e  $y \in C_2$ , com  $C_1$  par e  $C_2$  ímpar. A adição da aresta  $xy$  dá origem a uma componente ímpar, mas o número de componentes ímpares não é alterado, com isso,  $o[(G + xy) - S] = o(G - S)$ . Logo,  $o[(G + xy) - S] \leq |S|$  e  $S$  é bom em  $G + xy$ .

Caso 5: se  $x$  pertence a uma componente conexa e  $y \in S$ . A adição de  $xy$  não altera o total de componentes ímpares, com isso,  $o[(G + xy) - S] = o(G - S)$ . Logo,  $o[(G + xy) - S] \leq |S|$  e  $S$  é bom em  $G + xy$ .

Caso 6: se  $x$  e  $y$  pertencem a  $S$ . A adição de  $xy$  não altera o total de componentes ímpares, com isso,  $o[(G + xy) - S] = o(G - S)$ . Logo,  $o[(G + xy) - S] \leq |S|$  e  $S$  é bom em  $G + xy$ .

A partir de agora vamos trabalhar com um grafo  $H$  que será definido da seguinte forma: se todas as componentes de  $G$  são completas (ou seja, se tomarmos qualquer par de vértices da componente, existe uma aresta que incide nesses vértices), vamos definir  $H = G$ . Caso contrário, ou seja, se alguma componente não for completa em  $G$ , podemos adicionar alguma aresta  $x_1y_1$  a esse grafo. Vamos fazer isso de tal forma que  $G + x_1y_1$  seja não emparelhável, se isso não puder ocorrer o grafo  $G$  tem a propriedade de que a adição de qualquer aresta o torna emparelhável e nesse caso, vamos definir  $H = G$ . No caso que  $G + x_1y_1$  não é emparelhável, se todas as componentes conexas de  $G + x_1y_1$  forem completas vamos definir  $H = G + x_1y_1$ . Se não, podemos adicionar  $x_2y_2$  ao grafo  $G + x_1y_1$ . Vamos fazer de tal forma que  $(G + x_1y_1) + x_2y_2$  não seja emparelhável, se isto não for possível, a adição de qualquer aresta torna o grafo  $G + x_1y_1$  emparelhável e nesse caso, vamos definir  $H = G + x_1y_1$ . Se  $(G + x_1y_1) + x_2y_2$  é não emparelhável vamos continuar com esse processo até chegar a um grafo  $H$  em que todas as componentes são completas ou a adição de qualquer aresta ao grafo  $H$  o torna emparelhável. A partir de agora nosso objetivo é encontrar um conjunto mau para o grafo  $H$ , pois se o conjunto for mau para  $H$ , será mau para todos os grafos que antecederam  $H$ , inclusive  $G$ .

O grafo  $H$  pode ser analisado sob dois aspectos, se todas as componentes de  $H$  forem completas ou se pelo menos uma componente de  $H$  não for completa.

i) se todas as componentes de  $H$  forem completas.

$H$  tem uma quantidade ímpar de vértices e nesse caso  $H$  tem que ter pelo menos uma componente ímpar, se não  $H$  teria um emparelhamento perfeito. Seja  $S = \emptyset$ , com isso,  $S$  será um conjunto mau? Podemos afirmar que

$$o(H - \emptyset) = o(H) \geq 1 > 0 = |\emptyset|$$

Logo,  $S$  é mau em  $H$ . Nesse caso a demonstração está encerrada, pois se  $S$  é mau em  $H$  será mau em  $G$ .

ii) se pelo menos uma componente de  $H$  não for completa.

Se um conjunto  $S$  contido em  $V(H)$  satisfaz as duas condições descritas a seguir diremos que  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$ .

Condição 1: se todas as componentes conexas de  $H - S$  são completas;

Condição 2: se todo vértice  $s \in S$  é adjacente a todos os vértices de  $V(H) - s$ .

Se  $H$  tem um conjunto mau  $S$ , então  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$ .

Mostraremos que essa afirmação é verdadeira usando a contradição na contrapositiva, ou seja, vamos assumir que  $S$  não satisfaz a condição  $(\star)$  e supor por contradição que  $S$  seria um conjunto mau. Temos que analisar as duas condições que compõe a condição  $(\star)$ .

i) alguma das componentes de  $H - S$  não é completa.

De fato, se acrescentarmos uma aresta  $xy$  em uma componente conexa de  $H - S$  o conjunto  $S$  continua mau em  $H + xy$ , pois não altera o número de componentes ímpares e nem o número de componentes pares. Pela construção de  $H$ ,  $H + xy$  possui emparelhamento perfeito. Pela ida do Teorema de Tutte todo conjunto  $S \subseteq V(H + xy)$  não é um conjunto mau, mas isso é uma contradição.

ii) existe  $s \in S$  e um vértice de  $V(H) - s$  que não são adjacentes.

De fato, seja  $s \in S$  e  $v$  um vértice de  $H - s$  dois vértices não adjacentes. O vértice  $v$  pode pertencer a  $S$  ou a  $H - S$ , em ambos os casos, com o acréscimo da aresta  $sv$ , o conjunto  $S$  continua mau em  $H + sv$ , pois não altera o número de componentes ímpares e nem o número de componentes pares. Pela construção de  $H$ ,  $H + sv$  possui emparelhamento perfeito. Pela ida do Teorema de Tutte todo  $S \subseteq V(H + sv)$  não é um conjunto mau, mas isso é uma contradição.

Com essas duas demonstrações podemos afirmar que se o grafo  $H$  possui um conjunto  $S$  mau, então todas as componentes de  $H - S$  são completas e todo vértice  $s \in S$  é adjacente a todos os vértices de  $V(H) - s$ .

Afirmção 2: Se  $S \subseteq V(H)$  e satisfaz a condição  $(\star)$ , ou seja, toda componente conexa de  $H - S$  é uma componente completa e todo vértice  $s \in S$  é adjacente a todos os vértices de  $V(H) - s$ , então  $S$  é mau ou o conjunto vazio é mau.

Vamos supor que  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$  e  $S$  não é mau, com isso basta provar que o conjunto vazio é mau. Para isso, vamos tentar construir um emparelhamento perfeito em  $H$ . Analisando um emparelhamento dentro de cada componente, temos que nas componentes pares podemos emparelhar os vértices da componente com as próprias arestas da componente, pois as componentes são completas, nas componentes ímpares sempre teremos um vértice que não participa do emparelhamento formado com os demais vértices da componente.

Como  $S$  não é mau,  $o(H - S) \leq |S|$  e como  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$ , todo vértice  $s \in S$  é adjacente a todos os vértices de  $H - s$ . Com isso, podemos emparelhar o vértice que sobrou da componente ímpar com um vértice de  $S$ . Vamos analisar os vértices do conjunto  $S$  que sobrarão após o emparelhamento, se:

i) sobrar uma quantidade par de vértices em  $S$ .

Nesse caso o grafo  $H$  terá um emparelhamento perfeito, pois todos os vértices de  $S$  estão conectados a todos os outros vértices, pois  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$ , com isso os vértices de  $S$  que sobraram serão emparelhados entre si. Além disso, todos os outros vértices das componentes já foram emparelhados. Mas isso não pode ocorrer já que  $H$  é um grafo que não possui um emparelhamento perfeito.

ii) sobrar uma quantidade ímpar de vértices em  $S$ .

Com isso,  $H$  possui um número ímpar de vértices, pois se sobrou uma quantidade ímpar de vértices em  $S$  após emparelhar todos os outros vértices, temos que  $H$  possui um número ímpar de vértices. Portanto  $H$  possui pelo menos uma componente ímpar, ou seja,  $o(H) \geq 1$ . Assim,

$$o(H - \emptyset) = o(H) \geq 1 > 0 = |\emptyset|$$

Logo, o conjunto vazio é mau. Com isso, encerramos a demonstração.

Por essas duas afirmações podemos concluir que afirmar que no grafo  $H$  um conjunto é mau é o mesmo que afirmar que ele satisfaz a condição  $(\star)$ . Para provar o nosso teorema, basta mostrar que existe  $S$  que satisfaz a condição  $(\star)$ , uma vez que  $S$  seria mau em  $H$  e conseqüentemente mau em  $G$ .

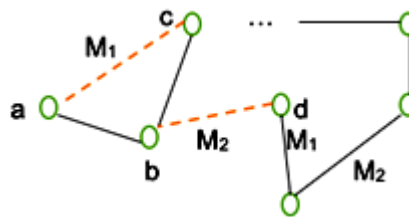
Seja  $S$  o conjunto formado por todos os vértices de  $H$  que são adjacentes a todos os outros vértices de  $H$ , isto é,  $v \in S$  se e somente se,  $vw \in E(H)$  para todo  $w \in V(H) - \{v\}$ . É importante deixar claro que  $S$  pode ser vazio, pois o conjunto vazio pode ser mau.

Se  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$  terminou a demonstração.

Então vamos supor por contradição que  $S$  não satisfaz a condição  $(\star)$ , então, obrigatoriamente alguma componente conexa de  $H - S$  não é completa, já que todo vértice de  $S$  por definição está ligado aos demais vértices. Vamos analisar essas componentes de  $H - S$ . Como a componente não é completa existe pelo menos dois vértices não adjacentes (chamaremos de  $a$  e  $a'$ ). Vamos escolher um caminho de cardinalidade mínima nessa componente, ligando esses dois vértices. Observe que esse caminho tem pelo menos três vértices: além de  $a$  e  $a'$ , que não são adjacentes, temos um terceiro vértice que chamaremos de  $b$ .

Seja  $a, b$  e  $c$  os três primeiros vértices desse caminho. Temos que as arestas  $ab$  e  $bc$  pertencem a  $E(H)$ , mas  $ac \notin E(H)$  pois estamos trabalhando com o menor caminho.

Como  $b \notin S$ , existe  $d \in V(H)$  de modo que  $bd$  não é aresta de  $H$ , pois se não existisse o vértice  $d$ , o vértice  $b$  estaria ligado a todos outros vértices, mas  $b \notin S$ . Pela definição de  $H$  existe um emparelhamento perfeito  $M_1$  em  $H + ac$ , com isso  $ac$  é uma aresta de  $M_1$ , pois se  $ac$  não estiver em  $M_1$  então todas arestas de  $M_1$  seriam arestas de  $H$ . Logo,  $H$  seria emparelhável o que é um absurdo, uma vez que não existe emparelhamento perfeito em  $H$ . Temos também um emparelhamento perfeito  $M_2$  em  $H + bd$ , com isso  $bd$  é uma aresta de  $M_2$ , pois se  $bd$  não estiver em  $M_2$  então todas arestas de  $M_2$  seriam arestas de  $H$ . Logo,  $H$  seria emparelhável o que é um absurdo, uma vez que não existe emparelhamento perfeito em  $H$ .

Figura 34 – Caminho  $p$ 

Fonte: Produzido pelo autor

Seja  $p = (d, \dots, v)$  um caminho de cardinalidade máxima em  $H$  começando em  $d$  com uma aresta de  $M_1$  e em seguida uma aresta de  $M_2$  e que segue alternando arestas de  $M_1$  e de  $M_2$ . O caminho  $p$  tem pelo menos uma aresta, pois todas as arestas do emparelhamento  $M_1$  são arestas de  $H$  com exceção de  $ac$ . Logo, no vértice  $d$  incide uma aresta de  $M_1$ .

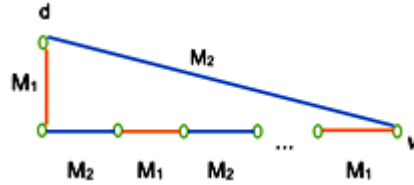
O caminho  $p = (d, \dots, v)$  possui duas possibilidades para a última aresta. Essa aresta pode ser de  $M_1$  ou de  $M_2$ , vamos analisar as duas opções.

Caso 1: a última aresta de  $p$  está em  $M_1$ .

Nesse caso  $v = b$ . Vamos supor por contradição que  $v \neq b$ . No caminho  $p$  a última aresta é de  $M_1$ , ou seja,  $M_1$  possui uma aresta que incide  $v$ . No vértice  $v$  também incide uma aresta de  $M_2$ , já que  $M_2$  é um emparelhamento perfeito  $H + bd$ , mas essa aresta não é  $bd$ , pois  $v \neq b$  e  $d$  é o primeiro vértice do caminho. Então podemos adicionar essa aresta de  $M_2$  que pertence a  $E(H)$  (já que é diferente de  $bd$ ) ao caminho  $p$  obtendo um caminho maior que alterna as arestas de  $M_1$  e  $M_2$ . Nesse caso temos uma contradição, pois o caminho  $p$  tem cardinalidade máxima. Logo, se a última aresta de  $p$  está em  $M_1$  o vértice  $v$  tem que ser igual a  $b$ .

Observe que  $C = (d, \dots, v, d)$  é um ciclo no grafo  $H + bd$  com a mesma quantidade de arestas de  $M_1$  e  $M_2$ , ou seja,  $C$  possui um número par de arestas.

Figura 35 – Ciclo  $C$



Fonte: Produzido pelo autor

Vamos definir  $(M_2 - C)$  como o conjunto de arestas de  $M_2$  que não estão em  $C$  e  $(M_1 \cap C)$  o conjunto de arestas que estão em  $M_1$  e  $C$ . Assim, podemos definir o conjunto de arestas  $M = (M_2 - C) \cup (M_1 \cap C)$ . Vamos mostrar que  $M$  é um emparelhamento. Para isso, escolha  $e$  e  $f$  duas arestas em  $M$ . Dessa forma, temos três casos, se:

i)  $e$  e  $f$  estão em  $(M_2 - C)$ .

Como  $(M_2 - C)$  é o conjunto de arestas de  $M_2$  que não estão em  $C$ , temos que as arestas  $e$  e  $f$  não possuem vértice em comum, pois  $M_2$  é um emparelhamento.

ii)  $e$  e  $f$  estão em  $(M_1 \cap C)$ .

Como  $(M_1 \cap C)$  é o conjunto de arestas que estão em  $M_1$  e  $C$ , então,  $(M_1 \cap C)$  está contido em  $M_1$  e como  $M_1$  é um emparelhamento,  $e$  e  $f$  não possuem vértice em comum.

iii)  $e$  está em  $(M_2 - C)$  e  $f$  está em  $(M_1 \cap C)$ .

A aresta  $e$  não está em  $C$ , pois  $e$  está em  $(M_2 - C)$ . Temos que  $f$  está no ciclo  $C$ , pois  $f$  está em  $(M_1 \cap C)$ . Note que não existe uma aresta com vértices em comum nos conjuntos  $(M_2 - C)$  e  $(M_1 \cap C)$ , uma vez que se existisse teríamos um vértice saturado por duas arestas do mesmo emparelhamento, pois no ciclo  $C$  em cada vértice incide uma aresta de  $M_1$  e  $M_2$ .

Com esses três itens, mostramos que  $M$  é um emparelhamento. Agora, vamos mostrar que  $M$  é um emparelhamento perfeito.

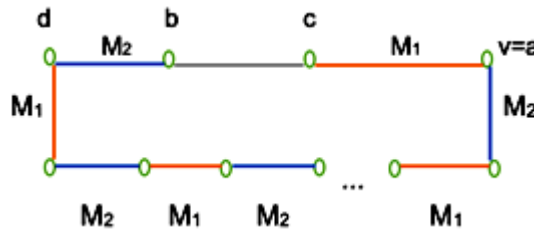
Note que  $(M_2 - C)$  é o conjunto de arestas de  $M_2$  que não estão em  $C$  e  $(M_1 \cap C)$  é o conjunto de arestas de  $M_1$  que estão em  $C$ . Pela construção de  $C$  a quantidade de arestas de  $M_1$  e  $M_2$  em  $C$  são iguais, assim  $|(M_1 \cap C)| = |(M_2 \cap C)|$ . Portanto,  $|M| = |(M_2 - C)| + |(M_1 \cap C)| = |(M_2 - C)| + |(M_2 \cap C)|$ . Logo,  $|M| = |M_2|$ . Como  $M_2$  satura todos os vértices de  $H + bd$ , e  $|M| = |M_2|$ ,  $M$  é um emparelhamento perfeito em  $H$ . Mas isso é uma contradição, pois,  $H$  não possui emparelhamento perfeito. Logo,  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$  em  $H$ , com isso,  $S$  é mau em  $H$  e consequentemente é mau em  $G$ .



Caso 2: a última aresta de  $p$  está em  $M_2$ .

Nesse caso  $v = a$  ou  $v = c$ . Vamos supor que  $v \neq a$  e  $v \neq c$ . No caminho  $p$  a última aresta é de  $M_2$ , ou seja,  $M_2$  possui uma aresta que incide em  $v$ . No vértice  $v$  também incide uma aresta de  $M_1$ , pois  $M_1$  é um emparelhamento perfeito. Se  $v \neq a$  e  $v \neq c$ , então existe um vértice  $v_1$  adjacente a  $v$ , de modo que  $vv_1$  é uma aresta de  $M_1$ , pois  $M_1$  satura todos os vértices de  $H + ac$ . Então podemos adicionar essa aresta de  $M_1$  que pertence a  $E(H)$  (já que é diferente de  $ac$ ) ao caminho  $p$  obtendo um caminho maior que alterna as arestas de  $M_1$  e  $M_2$ . Nesse caso temos uma contradição, pois o caminho  $p$  tem cardinalidade máxima. Logo,  $v = a$  ou  $v = c$ .

Figura 36 – Ciclo  $C$



Fonte: Produzido pelo autor

Observe que  $C = (d, \dots, v, c, b, d)$  é um ciclo no grafo  $(H + ac) \cup \{bd\}$  com a mesma quantidade de arestas de  $M_1$  e  $M_2$ .

Vamos definir  $(M_1 - C)$  como o conjunto de arestas de  $M_1$  que não estão em  $C$  e  $(M_2 \cap C)$  o conjunto de arestas que estão em  $M_2$  e  $C$ . Assim, podemos definir o conjunto de arestas  $M = (M_1 - C) \cup (M_2 \cap C)$ . Vamos mostrar que  $M$  é um emparelhamento. Para isso, escolha  $e$  e  $f$  duas arestas em  $M$ . Dessa forma, temos três casos, se:

i)  $e$  e  $f$  estão em  $(M_1 - C)$ .

Como  $(M_1 - C)$  como o conjunto de arestas de  $M_1$  que não estão em  $C$ , temos que as arestas  $e$  e  $f$  não possuem vértice em comum, pois  $M_1$  é um emparelhamento.

ii)  $e$  e  $f$  estão em  $(M_2 \cap C)$ .

Como  $(M_2 \cap C)$  o conjunto de arestas que estão em  $M_2$  e  $C$ , então,  $(M_2 \cap C)$  está contido em  $M_2$  e como  $M_2$  é um emparelhamento  $e$  e  $f$  não possuem vértice em comum.

iii)  $e$  está em  $(M_1 - C)$  e  $f$  está em  $(M_2 \cap C)$ .

A aresta  $e$  não está em  $C$ , pois  $e$  está em  $(M_1 - C)$ . Temos que  $f$  está no ciclo  $C$ , pois  $f$  está em  $(M_2 \cap C)$ . Note que não existe uma aresta com vértices em comum nos conjuntos  $(M_1 - C)$  e  $(M_2 \cap C)$ , uma vez que se existisse teríamos um vértice

saturado por duas arestas do mesmo emparelhamento, pois no ciclo  $C$  em cada vértice incide uma aresta de  $M_1$  e  $M_2$ .

Com esses três itens, mostramos que  $M$  é um emparelhamento. Agora, vamos mostrar que  $M$  é um emparelhamento perfeito.

Note que  $(M_1 - C)$  é o conjunto de arestas de  $M_1$  que não estão em  $C$  e  $(M_2 \cap C)$  é o conjunto de arestas de  $M_2$  que estão em  $C$ . Pela construção de  $C$  a quantidade de arestas de  $M_1$  e  $M_2$  em  $C$  são iguais, assim  $|(M_1 \cap C)| = |(M_2 \cap C)|$ . Portanto,  $|M| = |(M_1 - C)| + |(M_2 \cap C)| = |(M_1 - C)| + |(M_1 \cap C)|$ . Logo,  $|M| = |M_1|$ . Como  $M_1$  satura todos os vértices de  $H + ac$ , e  $|M| = |M_1|$ ,  $M$  é um emparelhamento perfeito em  $H$ . Mas isso é uma contradição, pois,  $H$  não possui emparelhamento perfeito. Logo,  $S$  satisfaz a condição  $(\star)$  em  $H$ , com isso,  $S$  é mau em  $H$  e conseqüentemente é mau em  $G$ .

Com a análise realizada nesses dois casos conseguimos encontrar um conjunto de vértices  $S \subseteq V(H)$  tal que  $S$  é mau em  $H$  e como  $V(H) = V(G)$  pela construção de  $H$ , temos que  $S$  é mau em  $G$ , ou seja,  $o(G - S) > |S|$ . Dessa forma, se  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$  então  $G$  possui um emparelhamento perfeito. ■

## 4 Wald

### JOGO SOBRE EMPARELHAMENTO EM GRAFOS



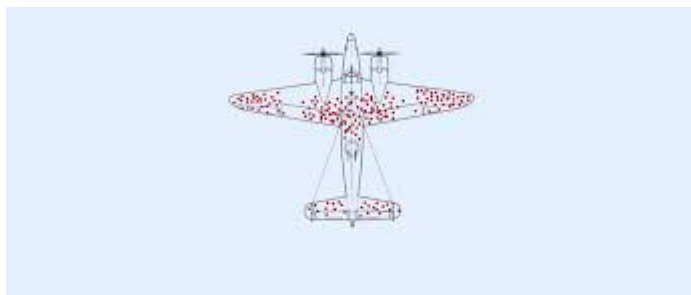
Com o intuito de mostrar uma aplicação de emparelhamento perfeito em grafos, trazemos neste capítulo o jogo Wald, cujo nome é dado em homenagem ao grande matemático **Abraham Wald**.

## 1 - Por que o nome do jogo é Wald?

Durante a Segunda Guerra Mundial, os EUA desenvolveram a primeira bomba nuclear através de um programa que ficou conhecido como Projeto Manhattan. Será que durante esse período apenas o Projeto Manhattan foi decisivo para a vitória dos Aliados contra os nazistas? Não.

Em 1902, na cidade que naquela época se chamava Klausenburg (Império Austro-Húngaro) nasceu **Abraham Wald**, filho de judeus e neto de rabino. Desde muito jovem Wald mostrou interesse por Matemática e conseguiu ingressar na Universidade de Viena na Áustria onde fez sua graduação em Matemática.

Concordo com Jordan Ellenberg ao dizer que a história de Wald é “como muitas outras da Segunda Guerra Mundial, começa com os nazistas expulsando um judeu da Europa e termina com os nazistas lamentando esse ato”. Nos EUA, Wald fez parte do Grupo de Pesquisa Estatística (SRG, na sigla em inglês), um programa sigiloso que usava a Estatística e a Matemática na guerra contra os nazistas. Wald foi considerado o matemático mais brilhante do grupo. Um dia, os militares americanos trouxeram um problema para ser solucionado pela equipe da SRG. Eles queriam blindar seus aviões contra os caças inimigos. O problema consistia em descobrir as áreas que deveriam ser blindadas, já que blindar demais torna o avião muito pesado e blindar de menos o torna fácil de ser abatido. Para entendermos melhor a solução de Wald vamos analisar a imagem que representava um avião após o combate.



Fonte: Google imagens

Os militares alertavam Wald e sua equipe que os furos estavam concentrados na fuselagem e poucos furos no motor. Para os militares parecia fazer sentido blindar mais a fuselagem e dessa forma deixar o avião mais seguro. No entanto, Wald teve uma ideia genial: ele percebeu que a análise estava sendo feita com os aviões que conseguiam retornar e apresentou a solução, blindar mais apenas o motor. Wald percebeu que os aviões que não tinham capacidade de retornar não estavam ali para serem analisados. Wald é um jogo em homenagem a esse grande matemático.

## 2 - Número de jogadores

No mínimo dois e máximo três jogadores.

## 3 - Total de peças

- 1 dado
- 60 pinos (20 pinos vermelhos, 20 pinos amarelos e 20 pinos brancos)
- 1 bloco de papel para responder a pergunta e justificar
- 10 mapas/grafos distintos onde acontecerá o emparelhamento (grafos principais)
- 30 mapas/grafos (3 cópias de cada grafo principal) para os jogadores elaborarem sua estratégia.
- 2 ampulhetas (uma de 1 minuto e outra de 5 minutos)

## 4 - Regras:

### 4.1 Escolha da cor dos pinos

Pode ser feita através do dado ou a escolha pode ser feita de comum acordo entre os jogadores.

### 4.2 A ordem que cada jogador irá participar


Deve ser feita através do dado, o primeiro a jogar será aquele que tirou maior número, o segundo a jogar aquele que tirou o segundo maior número e assim sucessivamente.

### 4.3 Escolha do mapa a ser emparelhado

A escolha deve ser feita com todos os mapas voltados para a mesa, ou seja, com o verso voltado pra cima. Um jogador faz a escolha do mapa de modo aleatório.

### 4.4 Resposta e justificativa

Cada jogador receberá um papel para responder a pergunta: O grafo possui emparelhamento perfeito? E deve apresentar uma justificativa para sua resposta. A resposta de cada jogador deve ser anotada no cartão e guardada sem que os outros participantes tenham acesso. Será utilizada uma ampulheta para limitar o tempo de resposta em no máximo 5 minutos. Abaixo temos o modelo do cartão para cada jogador responder.



O grafo possui emparelhamento perfeito?

Sim       Não

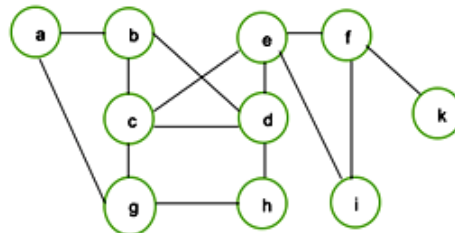
Justificativa: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

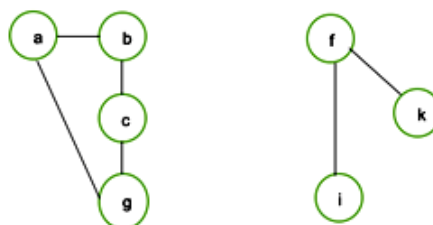
\_\_\_\_\_

Para ajudar na justificativa vamos relembrar alguns conceitos sobre emparelhamento em grafos.

Vejamos o que diz o Teorema de Tutte: **um grafo  $G$  possui um emparelhamento perfeito se, e somente se,  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$ .** O conjunto  $S$  é um conjunto de vértices do grafo  $G$ .  $|S|$  significa a cardinalidade de  $S$ , ou seja, o número de elementos de  $S$ . O grafo  $G - S$  é formado pelo conjunto de vértices e arestas que sobraram após a retirada do conjunto  $S$  e das arestas que incidiam nos vértices de  $S$ . Temos que  $o(G - S)$  representa o total de componentes ímpares do grafo  $G - S$ . Vamos entender esses conceitos através do grafo  $G$ .

Grafo  $G$ 

Vamos escolher  $S = \{e, d, h\}$ , dessa forma,  $|S| = 3$ . Vamos verificar como fica o grafo  $G - S$ .

Grafo  $G - S$ 

---

O grafo  $G - S$  possui duas componentes, sendo uma par, formada pelos vértices  $a, b, c$  e  $g$  e uma ímpar, formada pelos vértices  $f, i$  e  $k$ . Dessa forma,  $o(G - S) = 1$ . Temos que  $o(G - S) \leq |S|$ . Note que o Teorema de Tutte diz se  $o(G - S) \leq |S|$  para todo  $S \subseteq V(G)$  o grafo tem um emparelhamento perfeito. Portanto, para afirmar que o grafo possui um emparelhamento perfeito teríamos que verificar para todos os conjuntos  $S$ . Como cada jogador terá 5 minutos para responder e justificar é mais interessante buscar um conjunto  $S$  tal que  $o(G - S) > |S|$ , pois assim pode afirmar que o grafo não possui emparelhamento perfeito. Essa etapa do jogo vale 3 pontos se a resposta estiver correta e a justificativa trouxer um exemplo correto relacionando  $o(G - S)$  e a  $|S|$ .

#### 4.5 Emparelhar as capitais

Usando a ordem definida pelo item 4.2, cada jogador deve emparelhar duas capitais por vez e para realizar essa etapa terá no máximo 1 minuto. É importante nessa etapa cada jogador fazer com que os seus adversários não consigam emparelhar, pois assim terá mais chance de pontuar mais. Cada aresta do emparelhamento vale 1 ponto.

#### 4.6 Total de pontos

O total de pontos de cada jogador será o somatório dos pontos alcançados pelo jogador.

## 5 - Simulações

## 5.1 SIMULAÇÃO COM UM GRAFO SEM EMPARELHAMENTO PERFEITO

Grafo  $G$  (18 vértices)

1 - ESCOLHA DA COR DOS PINOS

Jogador 1 - Vermelho

Jogador 2 - Azul

2 - A ORDEM QUE O JOGO VAI SER DESENVOLVIDO (USO DE UM DADO)

Jogador 1 - tirou 5 no dado

Jogador 2 - tirou 3 no dado



## 3 - JOGADOR 1

Antes de fazer o primeiro emparelhamento o jogador 1 responde que o grafo não possui um emparelhamento perfeito. Vejamos a justificativa apresentada.

Seja  $S = \{\text{Teresina}\}$ , logo a  $|S| = 1$ . Vejamos como fica o grafo  $G - S$ .



Note que o vértice representando Teresina foi retirado do grafo e as arestas que foram retiradas estão representadas utilizando a cor branca. Dessa forma, temos que o grafo  $G - S$  possui 3 componentes ímpares, sendo duas delas os vértices Belém e São Luís e a terceira componente formada por 15 vértices, logo,  $o(G - S) = 3$ . Portanto,  $o(G - S) > |S|$ , o grafo  $G$  não possui um emparelhamento perfeito.

## 4 - JOGADOR 2

Antes de fazer o primeiro emparelhamento o jogador 2 responde que o grafo tem um emparelhamento perfeito. Vejamos a justificativa.

Seja  $S = \{\text{Palmas}\}$ . Vejamos como fica o grafo  $G - S$ .



Note que o vértice representando Palmas foi retirado do grafo e as arestas que foram retiradas estão representadas utilizando a cor branca. Dessa forma, o grafo  $G - S$  possui duas componentes, uma contendo 14 vértices e a outra contendo 3 vértices, logo,  $o(G - S) = 1$ . Diante do resultado ( $o(G - S) \leq |S|$ ), o jogador 2 afirmou que o grafo  $G$  possui um emparelhamento perfeito.

- 5 - JOGADOR 1  
Rio Branco - Porto Velho
- 6 - JOGADOR 2  
Salvador - Aracaju
- 7 - JOGADOR 1  
Vitória – Belo Horizonte
- 8 - JOGADOR 2  
Boa Vista - Manaus
- 9 - JOGADOR 1  
Palmas - Cuiabá
- 10 - JOGADOR 2  
São Paulo - Rio de Janeiro
- 11 - JOGADOR 1  
Campo Grande - Curitiba
- 12 - JOGADOR 2  
Belém - Teresina

\* Vamos verificar como ficou o grafo.



Resultado das duas etapas do jogo

i) Para a resposta e justificativa sobre a existência ou não de um emparelhamento perfeito.

Jogador 1 (3 pontos)

Jogador 2 (0 ponto)

ii) Vértices emparelhados.

Jogador 1 (4 pontos)

Jogador 2 (4 pontos)

Resultado do jogo

Jogador 1 (7 pontos)

Jogador 2 (4 pontos)

## 5.2 SIMULAÇÃO COM UM GRAFO COM EMPARELHAMENTO PERFEITO

Grafo  $G$  (22 vértices)

## 1 - ESCOLHA DA COR DOS PINOS

Jogador 1 - vermelho

Jogador 2 - Azul

## 2 - A ORDEM QUE O JOGO VAI SER DESENVOLVIDO (USO DE UM DADO)

Jogador 1 - tirou 6

Jogador 2 - tirou 2

## 3 - JOGADOR 1

Antes de fazer o primeiro emparelhamento o jogador 1 responde que o grafo possui um emparelhamento perfeito. Vejamos a sua justificativa para sua resposta.

Seja  $S = \{\text{Porto Alegre, Belém, Salvador}\}$ . Vejamos como ficou o grafo  $G - S$ .



As arestas que foram retiradas estão na cor branco e os vértices, Porto Alegre, Salvador e Belém também foram retirados do grafo. Ficamos com apenas uma componente ímpar, com isso,  $o(G - S) = 1$  e  $|S| = 3$ .

## 4 - JOGADOR 2

Antes de fazer o primeiro emparelhamento o jogador responde que o grafo não possui um emparelhamento perfeito. Vejamos sua justificativa sua resposta. O conjunto  $S$  escolhido foi  $\{\text{Salvador, Fortaleza}\}$ , logo,  $|S| = 2$ . Segundo o jogador  $o(G - S) = 2$ . Dessa forma ele conclui que o grafo não possui um emparelhamento perfeito. Vamos verificar o grafo  $G - S$  encontrado pelo jogador. O grafo possui uma componente ímpar com 19 vértices e outra com apenas um vértice (Natal).



- 5 - JOGADOR 1  
Natal - Fortaleza
- 6 - JOGADOR 2  
Recife - João Pessoa
- 7 - JOGADOR 1  
Maceió - Aracaju
- 8 - JOGADOR 2  
São Luís - Teresina
- 9 - JOGADOR 1  
Belém - Porto velho
- 10 - JOGADOR 2  
Palmas - Cuiabá
- 11 - JOGADOR 1  
Salvador - Vitória
- 12 - JOGADOR 2  
Belo Horizonte - Goiânia
- 13 - JOGADOR 2  
Rio de Janeiro - São Paulo
- 14 - JOGADOR 1  
Campo Grande - Porto Alegre
- 15 - JOGADOR 2  
Florianópolis - Curitiba



\* Vamos verificar como ficou o grafo.



Resultado das duas etapas do jogo

i) Para a resposta e justificativa sobre a existência ou não de um emparelhamento perfeito.

Jogador 1 (3 pontos)

Jogador 2 (0 ponto)

ii) Vértices emparelhados.

Jogador 1 (6 pontos)

Jogador 2 (5 pontos)

Resultado do jogo

Jogador 1 (9 pontos)

Jogador 2 (5 pontos)



# Conclusão

Este trabalho representa um começo, não um fim. Digo isso, na convicção plena de que muito mais que o cuidado com a precisão das demonstrações fui levado a refletir sobre o imensurável uso do pensamento matemático. A maneira como os teoremas foram apresentados, certamente ajudarão outros a desenvolver ideias que podem gerar benefícios para a sociedade ou no mínimo ajudar a desenvolver um estudo mais detalhado sobre o tema. Se apropriar desse campo da Matemática pode ser como uma semente. Como disse Vern Poythress: “ ao longo dos séculos, os matemáticos desenvolveram cada vez mais subdisciplinas e continuaram a desvelar belezas extraordinárias” (POYTHRESS 2020).

Acredito que o texto apresentado pode ser considerado relevante, mas apresenta alguns fatores que carecem de melhorias. As figuras cumprem o papel de ajudar em cada situação, mas poderiam ser desenvolvidas em um software mais apropriado. As aplicações da Teoria dos Grafos foram importantes para entender a funcionalidade do assunto, mas poderiam ser em maior número. Sobre o jogo, Wald, foi muito desafiador desenvolver, mas a falta de pessoas pra jogar pode ter comprometido a elaboração, seria muito enriquecedor ter realizado algumas rodadas.

Finalizo, convicto de que a Teoria dos Grafos é campo da Matemática riquíssimo para o dia a dia de um professor. Deve ser explorado como ferramenta para muitos temas abordados em sala de aula. Quanto ao tema Emparelhamento em grafos, eu agora entendo o conselho dado por Paulo Boaventura: “o fascínio da teoria e das aplicações leva o pesquisador a ignorar o aviso de Marisa Monte, em sua bela canção: “Só não se perca ao entrar ...”. Mais do que isso, ele pode levá-lo a não mais querer sair desse particular infinito” (BOAVENTURA 2017). Espero que cada página lida tenha sido o combustível para a próxima e que agora no fim da viagem você tenha pelo menos posto os olhos em um mundo novo.



# Referências

Boaventura, Paulo; **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 4<sup>a</sup> edição. São Paulo, SP: Blucher, 2006.

Boaventura, Paulo; Jurkiewicz, Samuel. **Grafos: introdução e prática**. 2<sup>a</sup> edição. São Paulo, SP: Blucher, 2017.

Diestel, Reinhard. **Graph Theory**. Edição eletrônica. New York: Springer-Verlag, 2000.

Jurkiewicz, Samuel. **Grafos: uma introdução**. Edição eletrônica. Rio de Janeiro, RJ: 2009.

Laber, Eduardo Sany. **Apostila de Estruturas Discretas**. Edição eletrônica. 2016.

Lovász, László; Pelikán, József; Vesztergombi, Katalin. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2010.

Macedo, Marcos Antônio. **Matemática Discreta**. Edição eletrônica. Fortaleza: UAB/IFCE, 2012.

Poythress, Vern S. **Redimindo a Matemática: uma abordagem teocêntrica/** Brasília, DF: Editora Monergismo, 2020.

Scheinerman, Edward. **Matemática discreta: uma introdução**. São Paulo, SP: Thomson Learning Edições, 2006.

Wakabayashi, Yoshiko. **Um curso de grafos**. Edição eletrônica. São Paulo, SP: 2015.



# Anexos





# ANEXO A – Grafos principais

Os grafos principais são aqueles onde o jogo Wald irá se desenvolver. Além do grafo, teremos uma única informação que é a quantidade de vértices.

Grafo 1



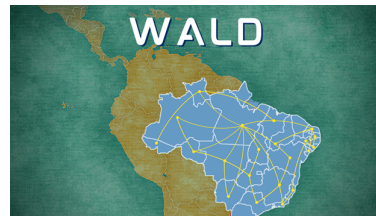
Grafo  $G$  (24 vértices)



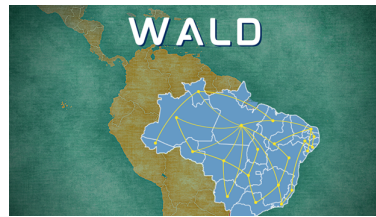
## Grafo 2

Grafo  $G$  (26 vértices)

## Grafo 3

Grafo  $G$  (22 vértices)

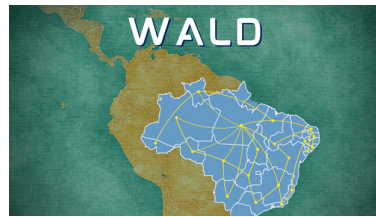
## Grafo 4

Grafo  $G$  (26 vértices)

## Grafo 5

Grafo  $G$  (21 vértices)

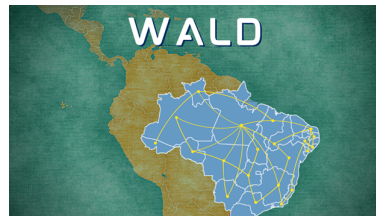
Grafo 6



Grafo  $G$  (25 vértices)



Grafo 7

Grafo  $G$  (26 vértices)



Grafo 8



Grafo  $G$  (24 vértices)





Grafo 9

Grafo  $G$  (26 vértices)

Grafo 10



Grafo  $G$  (20 vértices)

