UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

JABSON DA CUNHA SILVA

USO DO SCRATCH PARA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E OS NÚMEROS MÁGICOS DE BALL

ARRAIAS - TO
2020

JABSON DA CUNHA SILVA

USO DO SCRATCH PARA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E OS NÚMEROS MÁGICOS DE BALL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa

ARRAIAS - TO
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586u SIlva, Jabson da Cunha .
USO DO SCRATCH PARA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E OS NÚMEROS MÁGICOS DE BALL. / Jabson da Cunha SIlva. – Arraias, TO, 2020.
69 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2020.
Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Investigação Matemática . 2. Pensamento Computacional . 3. Número Mágicos de Ball. 4. SCRATCH. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JABSON DA CUNHA SILVA

O USO DO SCRATCH PARA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E OS NÚMEROS MÁGICOS DE BALL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins-UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 11 de dezembro de 2020

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa - UFT/ProfMat - Arraias
Orientador-presidente

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha - UFT/ProfMat - Palmas
Examinador

Prof. Dr. Ronaldo Antonio dos Santos - IME-UFG
Examinador

Arraias - TO
2020

Dedico aos meus pais Abis Bandeira da Silva e Luzia Pereira da Cunha Silva que são meus maiores incentivadores, à minha esposa Fabiana Lima Vieira da Cunha pela paciência e por sempre está ao meu lado.

Agradecimentos

Inicialmente a Deus, por sempre está ao meu lado e mostrar novos caminhos diante das dificuldades;

Aos meus pais Abis Bandeira da Silva e Luzia Pereira da Cunha Silva que demonstram preocupação e aflição diante das dificuldades no decorrrer do curso e por apoiar minhas decisões.

A minha amada esposa Fabiana Lima Vieira da Cunha, que não mediu esforços nos momentos que não tinha condições de cuidar da nossa família, por ser uma excelente mãe para nosso pequeno Rafael e pelos incentivo na continuidade dos meus estudos.

As minhas amigas e colegas de trabalho Cleudemar Abreu Lopes, Maria do Desterro Soares Ibiapina e Nayjla Lane Ramos Gonçalves pelo apoio incondicional no decorrer dessa caminhada.

Ao meu orientador Dr. Eudes Antonio da Costa, que contribuiu de maneira significativa para o desenvolvimento deste.

Aos meus colegas de viagem e de curso Amanda Vieira da Silva, Indiara Vizzoto Diehl, Vilmar Costa Silva, Rafael Pimenta Alves e Rodrigo Mota Marinho, pela disposição em enfrentar os desafios e promover momentos de alegria.

"A única habilidade competitiva de longo prazo é a capacidade de aprender."
(PAPERT,1960)

Resumo

Este apresenta a construção e aplicação de um cenário desenvolvido no SCRATCH para auxiliar no processo de investigação matemática envolvendo os números mágicos de Ball, trazendo uma abordagem fundamentada na investigação matemática e no pensamento computacional. Tendo como principais objetivos, utilizar a plataforma SCRATCH para produzir conteúdos digitais visando auxiliar o processo de ensino e de aprendizagem da matemática, elencar os significados de investigação matemática como metodologia de ensino com o intuito de investigar propriedades aritméticas dos números mágicos de Ball. Na vertente de aplicação foi realizada uma pesquisa para verificar como o cenário elaborado e ancorado no SCRATCH, contribui no entendimento dos números mágicos de Ball por estudantes da Escola Estadual Homero Honorato - GO e Escola de Tempo Integral Padre Josimo Tavares - TO contemplando a 2ª fase do ensino fundamental.

Palavras-chaves: Investigação matemática; Números mágicos de Ball; Pensamento computacional; SCRATCH

Abstract

This presents the construction and application of a scenario developed at SCRATCH to assist in the mathematical investigation process involving Ball's magic numbers, bringing an approach based on mathematical investigation and computational thinking. Having as main objectives, to use the SCRATCH platform to produce digital content aiming to assist the teaching and learning process of mathematics, to list the meanings of mathematical investigation as a teaching methodology in order to investigate the arithmetic properties of Ball's magic numbers. In terms of application, a research was carried out to verify how the scenario elaborated and anchored in SCRATCH, contributes to the understanding of the magic numbers of Ball by students from the Homero Honorato State School - GO and Padre Josimo Tavares - TO Full Time School contemplating the 2nd phase of elementary education.

Key-words: Mathematical research; Magic Ball Numbers; Computational thinking; SCRATCH

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DIF	Didática e Formação
MCT	Ministério da Ciência e Tecnologia
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
UFG	Universiade Federal do Goiás
UFSJ	Universidade de São João Del-Rei
UNIT	Universidade Tiradentes
UFT	Universiade Federal do Tocantins
IME	Instituto de Matemática e Istatística

Sumário

INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa abordamos a utilização da ferramenta de programação SCRATCH, tendo como fundamentação teórica a investigação matemática aplicado aos números mágicos de Ball. A inserção da tecnologia computacional na sociedade que possibilitaram mudanças em nossas rotinas dentro de um contexto social, mas relacionando ao processo educacional, principalmente os profissionais da educação, ainda existe resistência, no que tange a utilização de mecanismos tecnológicos, como ferramentas auxiliadoras no processo de ensino e de aprendizagem, e são vários fatores, diretos e indiretos que influencia o sujeito envolvido.

No desenvolvimento deste, produzimos conteúdo digital com o SCRATCH, que está disponível no repositório online da plataforma citada[1], investigar propriedades aritméticas dos números mágicos de Ball e os significados da investigação matemática como mecanismo de ensino.

Tivemos como perguntas motivadoras para o desenvolvimento do projeto, para os discentes da 2ª fase do ensino fundamental: Como funciona o processo de investigação matemática? No processo de investigação matemática, como determinar números mágicos, seguindo o algoritmo de Ball?

Destacamos as competência 2 e 5 elencadas na Base Nacional Comum Curricular -BNCC:

> 2 - Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo, 5 - Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. Tendo como argumento a necessidade de desenvolver métodos e experimentos que envolva o discente, recorrendo à ferramentas pedagógicas no que diz respeito ao processo de construção de sua formação, como protagonista, instigando por desafios matemático. (BRASIL, 2018, p. 265)

A nossa pesquisa é qualitativa e pesquisa-ação. Segundo Demo(1987) qualitativo no sentido de entender o objeto de estudo e suas relações com os métodos utilizados e pesquisa-ação, pois contempla o envolvimento de um grupo de discente desde as instruções iniciais ao levantamento dos pontos específicos da investigação, buscando compreender o

[1]scratch.mit.edu/projects/421955561/

entendimento coletivo e a aplicação de novas estratégias envolvidas com recursos tecnológicos.

No primeiro capítulo abordaremos as teorias relacionadas ao pensamento computacional, construcionismo de Seymour Papert e investigação matemática relacinando-as com os princípios e as normativas que regem o processo de ensino e aprendizagem da matemática na segunda fase do ensino fundamental.

No segundo capítulo, apresentamos alguns tópicos da teoria dos números,a trajetória histórica sobre processo de contagem, desenvolvimento do conceito de número. Depois elencamos algumas propriedades da divisão Euclidiana, divisibilidade, sistema de numeração e congruências. Por fim apresentamos o algoritmo de Ball e exemplos de números mágicos de Ball.

Já no capítulo 3, explicitamos conceitos relacionados ao uso do SCRATCH com a teoria dos números e a estrutura de programação a finalidade de exibir o cenário envolvendo os números mágicos de Ball.

No último capítulo, apresentamos uma análise sobre o uso do SCRATCH como ferramenta de intervenção pedagógica mediando a investigação matemática e os números mágicos de Ball, trazendo um estudo de caso com coleta de dados envolvendo estudantes da a 2ª fase do ensino fundamental da Escola Estadual Homero Honorato - GO e a Escola de Tempo Integral Padre Josimo Tavares - TO.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Pensamento Computacional

O processo de pensar estruturadamente, nos fornece mecanismos de sequenciamento, ou seja, o passo a passo que realizamos e tendenciamos nosso desenvolvimento dando importância para os detalhes que foge de uma análise simplesmente visual e rasa. O pensamento computacional segundo Wing(2006),

> O Pensamento Computacional é um tipo de pensamento analítico. Compartilha com o pensamento matemático as maneiras gerais em que nós podemos resolver um problema. Compartilha com o pensamento de engenharia as maneiras gerais em que nós poderíamos projetar e avaliar um sistema grande, complexo que opere dentro das limitações do mundo real. Compartilha com o pensamento científico nas maneiras gerais em que nós podemos abordar nossa compreensão de computabilidade, inteligência, da mente e do comportamento humano (WING, 2006, p. 32).

Nessa abordagem nos deparamos com uma visão de construção do conhecimento envolvendo o processo de ensino e aprendizagem, no que tange as habilidades que são elencadas na Base Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), que nos remete ao significado do que venha a ser o pensamento computacional, dentro de um contexto educacional e formativo.

> [...] associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando- as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.(BRASIL, 2018, p. 271)

Na era da tecnologia, estamos diante de grandes desafios principalmente de transformação ou evolução de práticas e métodos de ensino, pois necessitamos buscar meios que possibilitem a interação e reflexão dos nossos discentes. Pela definição de Wing(2006), o pensamento computacional não está diretamente ligado ao uso de computadores, mas como encaramos os problemas diversos, independente da área de estudo, sendo que possibilita uma postura lógica argumentativa racional, confrontando as limitações que cada situação exige dentro de nossas necessidades geradas na ação envolvida.

Observamos que a ideia de pensamento computacional está diretamente ligada ao processo de resolução de problemas em matemática, pois

> Utilizar, propor e/ou implementar soluções(processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espirito de investigação e a criatividade.(BRASIL, 2018, p. 471).

Este trabalho foi desenvolvido para produção de material no seguimento de investigação matemática, direcionamos os entendimentos sobre pensamento computacional, sabendo que tal conceito trás um leque de possibilidades e aplicabilidade em outras áreas. Temos que tomar cuidado com a possibilidade de confundir o pensamento computacional com o pensamento matemático, mesmo delimitando o pensamento computacional a matemática, ainda existe características que lhes são específicas, tais como : simulação, programação e robótica.

Na aplicação do pensamento computacional na resolução de problemas, podemos nos apropriar das fases para resolver um problema de matemática de forma mais eficiente segundo Polya(1995)

> Compreender o problema (CP): o que é necessário para resolvê-lo? Quais suas variáveis e incógnitas? Designar um plano (DP): Esse problema é conhecido? Como as variáveis estão correlacionadas? Quais estratégias devemos usar para sua resolução? Executar o plano (EP): é possível verificar cada passo da execução? É possível demonstrar que o plano está correto? Retrospecto do problema (RP): é possível verificar o resultado encontrado?(POLYA, 1995, p. 4 -12).

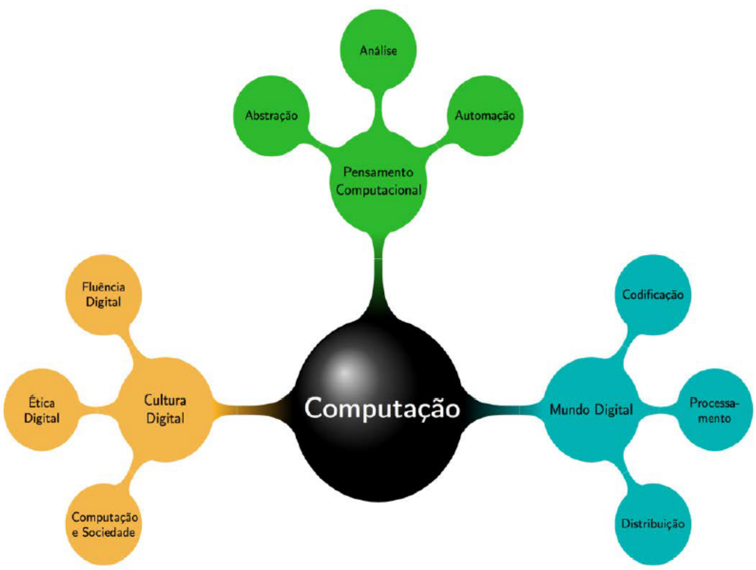
O ato de ensinar matemática deve dar condições para a criança relacionar os conteúdos com outros contextos, principalmente do seu convívio, desse modo o processo de aprendizagem de situações que envolvem a memorização devem ser permutados por métodos que usufrua da investigação e dentro do que pregoa Polya(1995), o ato de dar significado ao aprendizado parte da compreensão do problema envolvido e a dinâmica das etapas citadas dentro de uma dinâmica cíclica de verificação de conjecturas e validações, fundamentada pela metodologia da resolução de problemas. O pensamento computacional reforça a necessidade da algoritmização e o uso de tecnologias para análise e validações de situações produzidas dentro de um conjunto de problemas.

A Sociedade Brasileira de Computação(SBC-2019) também elaborou diretrizes para o ensino da computação e definiu o pensamento computacional como

> O Pensamento Computacional se refere à capacidade de compreender, definir, modelar, comparar, solucionar, automatizar e analisar problemas (e soluções) de forma metódica e sistemática, através da construção de algoritmos. Apesar de ser um termo recente, vem sendo considerado como um dos pilares fundamentais do intelecto humano, junto com a leitura, a escrita e a aritmética pois, como estas, serve para descrever, explicar e modelar o universo e seus processos complexos. O Pensamento Computacional envolve abstrações e técnicas necessárias para a descrição e análise de informações (dados) e processos, bem como para a automação de soluções. O conceito de algoritmo está presente em todas as áreas e está intrinsecamente ligado à resolução de problemas, pois um algoritmo é uma descrição de um processo (que resolve um determinado problema). (SBC, 2019, p. 5).

O pilar fundamental do pensamento computacional segundo a SBC(2019) é a abstração, pois precisamos enxergar uma problema sobre vários aspectos e fazer seleção dos que são considerados relevantes e enfatizados no modelo abstrato. Essa linha de pensamento requer além da abstração, delinear mecanismos analítico, aí temos o segundo pilar do pensamento computacional, contudo necessitamos a partir do modelo abstrato seguido da análise sistêmica, reapresentar a solução de um determinado problema, com uma nova roupagem no sentido de facilitar e otimizar sua aplicação dentro de um contexto de generalização, nesse seguimento temos a automação, cujas relações podem ser evidenciadas acima e na figura 1.

Figura 1: Eixos dos conhecimentos da área da computação



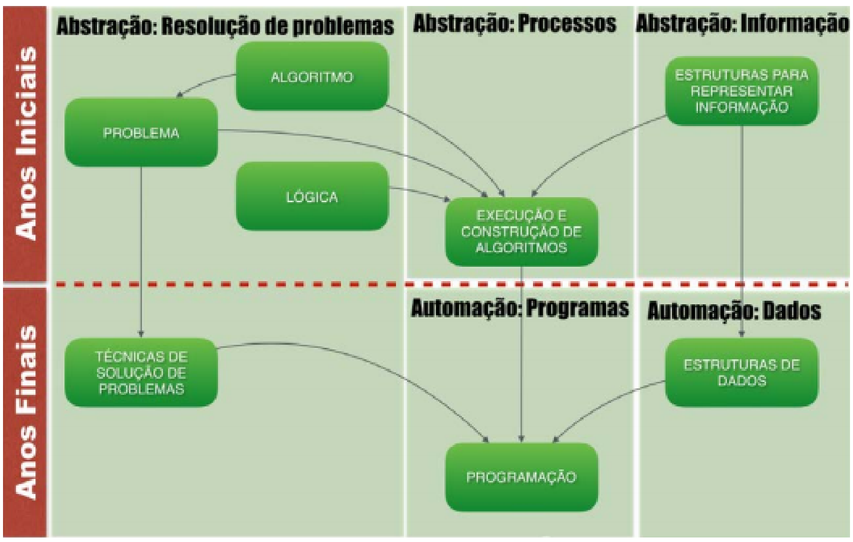
Fonte: SBC, 2019 , p. 4

A SBC(2019) além de formalizar as competências do pensamento computacional, o trás como um pilar do intelecto humano, assim como a leitura, escrita e a aritmética, pois fortalece a dinâmica da comunicação e induz ao desenvolvimento do discente da educação básica a interpretação e transformação do mundo, aplicação da computação em diversas áreas, formulação execução e análise no processo de resolução de problemas, desenvolvimento de projetos e o entendimento da computação como ciência. Para que o pensamento computacional possa ter sentido, necessita de uma linguagem estruturada e que seja precisa,

> Porém, para que se consiga construir um modelo abstrato que possa ser compreendido e analisado, ele precisa estar descrito em uma linguagem precisa. A matemática provê uma linguagem formal e universal, que pode ser usada para construir os mais diferentes tipos de modelos, bem como várias técnicas para analisar com precisão. (SBC, 2019, p.3).

No eixo do pensamento computacional nos deparamos com três tipos de abstração, inicial da organização e sistematização do problema, e depois ajustamos a padrões de linguagens de programação partindo do algoritmo e por último a compilação, tradução ou interpretação dando significado ao conjuntos de dados do problema.

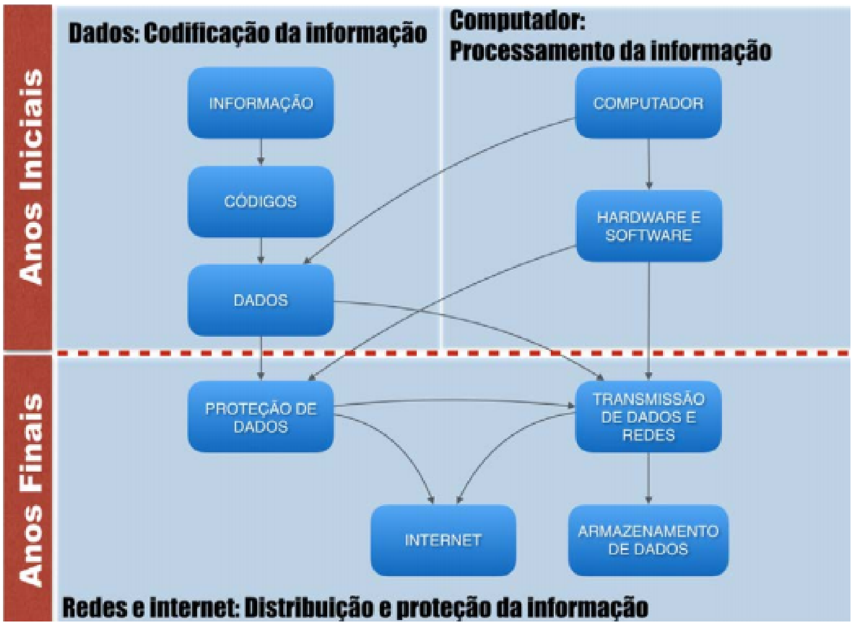
Figura 2: Conceitos do eixo Pensamento Computacional no Ensino Fundamental



Fonte: SBC, 2019 , p. 7

O eixo do mundo digital na educação fundamental envolve a codificação da informação e o seu tratamento por mecanismos físicos, que podemos perceber na figura 3. Em pleno século XXI por mais que as ferramentas tecnológicas não sejam acessíveis a toda a população, precisamos nos familiarizar, sendo essa necessidade decorrente de sua aplicabilidade e presença em todos os setores da sociedade, e nas escolas não é diferente, mesmo diante de uma situação precária que muitas vivenciam.

Figura 3: Conceitos do eixo Mundo Digital no Ensino Fundamental



Fonte: SBC, 2019 , p. 7

1.2 Construcionismo de Seymour Papert

O matemático, cientista da computação e educador Seymour Parpet (1928 - 2016), ficou conhecido por ser o idealizador do construcionismo, e pelo desenvolvimento de ferramentas educacionais, principalmente a linguagem de programação LOGO, tendo como finalidade proporcionar as crianças, formas de explorar os recursos computacionais de uma maneira acessível e benéfica, ou seja, abordagens que possibilitam a potencialização da criatividade, sendo antagônico aos modelos tradicionais de ensino.

> Assim, o Construcionismo, minha reconstrução pessoal do Construtivismo, apresenta como principal característica o fato de que examina mais de perto do que outros – ismos educacionais a ideia da construção mental. Ele atribui especial importância ao papel das construções no mundo como apoio para o que ocorreu na cabeça tornando-se, desse modo, menos uma doutrina puramente mentalista. (PAPERT, 1994, p. 128).

Papert, discípulo de Peaget e seguidor da corrente construtivista, entende que o sujeito deve ser autor de sua aprendizagem, auxiliado por ferramentas tecnológicas que propiciam sua formação, partindo do princípio de que o construcionismo é ensinar de maneira otimizada podendo assim produzir maior aprendizagem, através de um processo dinâmico que cative o estudante.

No método educacional construcionista, Papert entende que a criança ao manipular por comandos um computador, sua aprendizagem aproxima-se da construção do conhecimento podendo ser matemático, dado por um instinto natural e tecnológico, pois

> A hipótese das crianças serão melhores construídas no processo de encontrar por elas mesmas o conhecimento específico que elas precisam; educação organizada ou informal pode ajudar mais ou ter certeza que eles estão apoiados moralmente, psicologicamente, e intelectualmente em suas tentativas. (PAPERT, 1980, p. 139).

Nesta abordagem, nos deparamos com um método sistêmico que propicia o desenvolvimento de projetos dentro das tendências da educação matemática, principalmente Tecnologia e Educação Matemática, no limiar das propostas pedagógicas pois segundo Zorzan(2007), "não é mais possível que a escola continue a desmerecer ou desconsiderar a tecnologia em suas propostas pedagógicas ".(ZORZAN, 2007, p. 86), e

> a escola não virá a usar computadores adequadamente pelo fato de os pesquisadores apontarem como fazê-lo. Ela virá a usá-los bem (se o fizer algum dia) como uma parte integral de um processo coerente de desenvolvimento. Como bons professores centrados no desenvolvimento, os pesquisadores poderão contribuir melhor quando entenderem o processo de mudança na escola como sendo um desenvolvimento a apoiarem-no utilizando as ideias que foram bem sucedidas na compreensão da mudança em crianças. (...) A escola não se deixou mudar sob a inluência do novo aparelho, ela viu o computador pela lente mental das suas próprias formas de pensar e fazer. (PAPERT, 2008, p. 52).

Papert(2008) critica a forma que é conduzida a utilização dos computadores na escola, pois criam um mecanismo engessado por doutrinas estabelecidas por currículos, ou seja, fazem do uso das tecnologias com uma disciplina, levando com que o discente, não seja o agente do seu desenvolvimento, mais simplesmente espectador do processo instrucionista. No tocante do processo instrucionista, partimos de que a relação computador discente, seja unilateral no fluxo da dinâmica de aprendizagem, sendo que os computadores são programados para disponibilizar determinados assuntos, dentro de uma associação mecanizada e conservadora, levando em conta que, o discente não participa ativamente de sua formação, gerando rotinas exaustivas e improdutiva.

> Na proposta construcionista de Papert (1986 e 1994) o aluno, usando o computador, visualiza suas construções mentais relacionando o concreto e o abstrato por meio de um processo interativo favorecendo a construção do conhecimento. Um dos princípios da teoria de Papert (1986) é a criação de ambientes ativos de aprendizagem que permitam ao aluno testar suas ideias e teorias ou hipóteses.(NUNES, SANTOS, 2013, p. 3).

Analisar e validar metodologias educacionais nunca será uma rotina puramente de especulação em detrimento apenas do sucesso de sua aplicação, teremos que entender o contexto de sua estruturação e o meio de execução. Por isso que Papert(2008) defende que o discente seja autor do seu mecanismo de aprendizagem, trazendo o pilar do construcionismo.

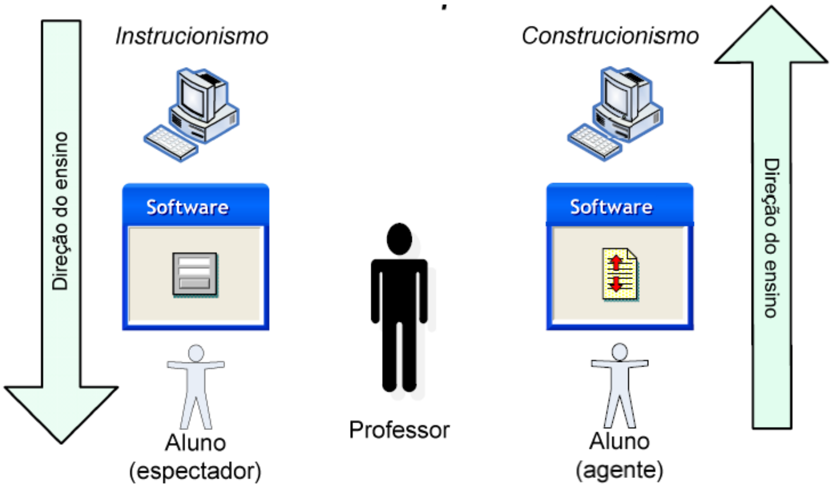
Construcionismo é uma teoria baseada no construtivismo de Piaget, partindo do pressuposto que a criança é um ser pensante e responsável por sua aprendizagam diante do mínimo de ensino e que o computador é uma ferramenta de auxílio, que proporcione uma ambiente colaborativo e de auto-aprendizagem.

> a frase "instrução ajudada pelo computador" (computer-aidedinstruction) significa fazer com que o computador ensine a criança. Pode se dizer que o computador está sendo usado para "programar" a criança. Na minha perspectiva é a criança que deve programar o computador e, ao fazê-lo, ela adquire um sentimento de domínio sobre um dos mais modernos e poderosos equipamentos tecnológicos e estabelece um contato íntimo com algumas das idéias mais profundas da ciência, da matemática e da arte de construir modelos intelectuais. (PAPERT,1980/1985, p.17)

Com uso das máquinas no processo de desenvolvimento de um cenário de aprendizagem, conseguimos compreender a essência da teoria de Papert(2008), em um ambiente de resolução de problemas a partir da elaboração de projetos para solução dos mesmo, tal que o educando utiliza o computador como ferramenta de construção do seu conhecimento. Pois para Papert(1980), "ao ensinar o computador a pensar, a criança embarca numa exploração sobre a maneira como ela própria pensa. Pensar sobre modos de pensar faz a criança tornar-se um epistemólogo, uma experiência que poucos adultos tiveram".

Nos remetemos a uma reflexão sobre a importância em nossa formação, que é entender a estrutura do nosso ato de pensar e como é crucial termos essa informação. Principalmente por desempenharmos um papel único em nossa sociedade e criarmos meios que possibilitem a criança desenvolver esse tipo de pensamento, faz com que norteie sua capacidade argumentativa e maturidade sobre seu processo de aprendizagem.

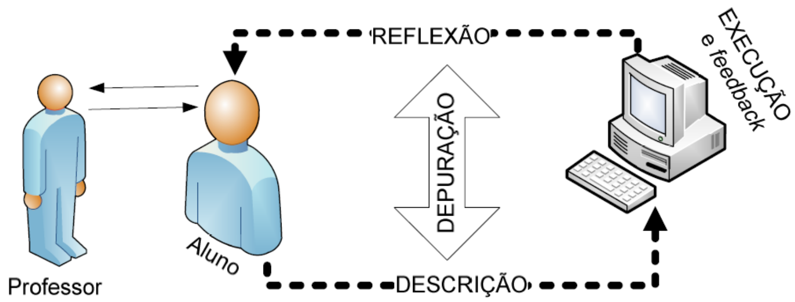
Figura 4: Ensino-aprendizagem usando o computador



(Fonte:Construcionismo de Papert e ensino e aprendizagem de programação de computadores no ensino superior, Lima, 2009, p. 35)

Na figura 4 apresenta um comparativo entre o processo de aprendizagem instrucionista e construcionista. Sendo que no primeiro caso, observamos a direção do ensino e a postura do discente, que é um mero espectador e o software que já está programado para adestrar o educando, levando-o a uma versão hermética e conservadora no que diz respeito a relação discente-computador. No construcionismo o processo é invertido, pois o discente passa a ter uma postura pró-ativa e desenvolve uma interação dinâmica com software pré-programado e o professor deixa de ser o detentor do conhecimento e cumpre o papel de intermediador no sentido de orientar sobre as situações problemas e os requisitos básicos para construção das estratégias das resoluções.

Figura 5: Interação aluno-computador-professor estabelecida na atividade de programação



(Fonte: Construcionismo de Papert e ensino e aprendizagem de programação de computdores no ensino superior, Lima, 2009, p. 43)

A figura 5, ilustra os quatro estágios da resolução de problemas pelo computador, citados por (Lima, 2009), que são:

> ETAPA 1 – Descrição da resolução do problema em termos de linguagem de programação: Após a apreciação do problema a ser resolvido, o aluno usa sua estrutura de conhecimentos – conceitos relativos à questão, estratégias de aplicações dos conceitos, conceitos inerentes à linguagem de computador e também sobre o próprio computador – para explicitar, passo a passo, a solução do problema. Reitera-se que essa descrição vem ao encontro da elaboração de algoritmos sob a forma de pseudocódigos, os quais sintetizam esse fazer.(LIMA, 2009 , p. 44)

Na etapa acima, fica nítido a valorização do conhecimento prévio apresentado pelo discente, e também no que institui a sistematização e organização no processo da resolução, auxiliados por conceitos computacionais tais como métodos otimizados de apresentação da formulação e solução do problema.

> ETAPA 2 – Execução da descrição pelo computador: Uma vez implementada a descrição do problema, essa codificação pode ser lida, interpretada e executada pelo computador. Ao executar, o computador irá fornecer um feedback fiel e imediato ao educando, daquilo que foi solicitado à máquina. (LIMA, 2009 , p. 44).

Diante da codificação construída pelo educando, dentro de normas de semântica e sintaxe padronizadas em uma linguagem de máquina. Essa etapa constrói um caminho de comunicação entre as partes, gerando rotinas de devolução das informações para análise e possíveis reformulações da solução do problema proposto.

> ETAPA 3 – Reflexão sobre o que foi produzido pelo computador: A máquina configura-se no processo como executora das tarefas solicitadas pelo aluno. Ao fazê-lo, fornece o resultado, geralmente usando o monitor de vídeo ou mesmo uma impressora. Nesse ponto do processo o aluno avalia, interpreta e reflete sobre o resultado fornecido pelo computador (feedback). A atividade pode provocar diferentes situações: o aluno alcança o sucesso, uma vez que sua descrição conseguiu suprir a solução do problema e finaliza a atividade; acontece um erro na descrição ou durante a execução (bug) – esse é apresentado ao aluno para correção; ou ainda,mesmo que o aluno tenha conseguido uma solução satisfatória, ele quer melhorar ainda mais sua construção. Nas duas últimas situações mencionadas, o processo evolui para o estágio de depuração. (LIMA, 2009 , p. 44).

Agora o discente está diante de um leque de informações que precisam ser selecionadas, tendo como referência o problema inicial e sua nova perspectiva confrontada por dados que não se tinham antes, possibilitando o estado ótimo da solução ou refinamento do modelo proposto inicialmente.

> ETAPA 4 – Depuração dos conhecimentos por intermédio da busca de novas informações ou do pensar: Na etapa 3, o computador pode acusar um erro de sintaxe (por exemplo, um termo da linguagem que foi escrito erroneamente), ou mesmo um equívoco na lógica empregada na construção do programa. No primeiro caso, o aluno terá de rever os conceitos da linguagem utilizada e proceder à correção do que está conflitante. No segundo caso, ele precisará reconsiderar sua estratégia de solução, buscando melhorá-la e adequá-la. Como visto, ainda na etapa 3, ao executar seu programa o aluno pode obter sucesso, mas ainda assim desejar melhorar algum detalhe de sua construção. Nesse ponto, ele passa também a rever suas estratégias e conceitos utilizados na sua representação. Para todos os casos aqui salientados, o processo de pós-depuração da solução inicial implica em uma nova descrição, execução, reflexão e depuração. É um processo contínuo, que se perpetua até que o educando se dê por satisfeito. (LIMA, 2009 , p. 45).

Nessa inquietante investigação depurada em quatro etapas, torna-se um processo cíclico, sendo considerado o ápice do pensamento computacional para construção do conhecimento, e desenvolvimento da criticidade diante de fatos e hábitos necessários assimilados na dinâmica empregada, enfatizando principalmente nessa última etapa, que coloca em voga a tomada de decisão.

Essas etapas são independentes. Quando bem interpretadas e utilizadas, condiciona a uma aprendizagem significativa por parte dos envolvidos. No limiar da interação com os computadores, os discentes se deparam com muitas dúvidas e dependendo da implementação, com fortuitos erros. Para Papert(1980) o momento ápice da aprendizagem está nos erros, pois temos uma oportunidade ideal para construção do conhecimento.

Dentro do método construcionista, o retorno(feedback) dado pela máquina, faz com que o discente, evolua no sentido de entender os possíveis erros e depurá-los, ou seja, pensar a pensar.

1.3 Investigação Matemática

Quando falamos de Investigação Matemática, nos remetemos a um pensamento de exclusão, pois partimos do pressuposto, que somente grandes especialistas, utilizam-se de tal método, daí precisamos entender, como podemos utilizar a investigação como mecanismo de aprendizagem, para com nossos discentes?

Uma forma de responder, é buscar compreender a estruturação da investigação matemática e suas competências, analisando como metodologia educacional. Para Ponte(2003), o processo de investigação matemática envolve quatro momentos principais:

> O primeiro momento envolve o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último, diz respeito à argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. (PONTE, 2003, p. 7).

No primeiro momento nos preocupamos com o entendimento do cenário que abrange a situação envolvida e as possíveis formulações de perguntas. Dentro do processo investigativo não se tem uma limitação de soluções possíveis, pois estamos preocupados em fazer com que o discente amplie sua visão diante de fatos que servem apenas para aguçar a inquirição do discente. A investigação matemática vem como um processo de exploração que para Ponte(2003), pode ser numérica, geométrica ou estatística cada uma desempenhando uma papel fundamental para evolução do conhecimento do discente, quando a plicado a técnica investigativa, e para novas descoberta dentro de cada área de estudo.

No segundo momento, nos deparamos com uma lista de possíveis soluções dentro do que foi formulado na primeira fase. Nessa etapa o educando busca informações e padrões que podem ser de alguns elementos dentro de um conjunto de dúvidas ou tenta generalizar diante de algumas propriedades que apresenta cada elemento. Lembrando que nesta etapa ainda não temos a confirmação de que todas as soluções e obervações são verdadeiras dentro do campo de estudo. Diante dessa etapa o discente passa a ser um epistemólogo, ou seja, em detrimento dos fatos e incertezas de sua autoria, tende a refletir e encontrar sentindo para suas conclusões e parte para uma zona de análise sobre o ato de pensar a pensar.

No terceiro momento, damos continuidade a análise das conjecturas apontadas no segunda etapa, só que agora precisamos determinar mecanismos que irão validar ou verificar erros diante do conjunto de soluções e observações realizadas nesse estudo. Tais mecanismo podem ser orientados pelo professor que tem um papel de intermediador no processo investigativo, buscando sempre dar dicas que sirvam para que os discente consigam associar com o cenário estudado, mas que venha deles as decisões tomadas que podem ser individuais ou colaborativas. Para Cunha, Oliveira e Pontes(1995),

> A realização de atividades de investigação na aula de matemática são importantes porque elas: (a) constituem uma parte essencial da experiência matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência; (b) estimulam o envolvimento dos alunos, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por alunos de ciclos diferentes, a níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático.(CUNHA, OLIVEIRA, PONTE, 1995, p. 1).

Figura 6: Etapas da Investigação, segundo Ponte ,2003

Fonte: Própria (2020)

Observamos que a estrutura do processo investigativo, não apresenta uma ordem definida em sua aplicação, pois cada etapa tem seu significado e rotina, podem se cruzar ou acontecer em paralelo. Nesse sentido o discente irá encarar partindo de seu conhecimento prévio, buscando mecanismo que auxilie seu pensamento sobre o objeto de estudo. Nas competências gerais da BNCC sobre pensamento crítico, científico e criativo, consolidamos o processo de investigação matemática, como um aporte no processo de aprendizagem significativa,

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas(BRASIL, 2018, p. 9).

Diante das competências contempladas na BNCC(BRASIL,2018), há uma necessidade de ter mecanismo que envolva de maneira mais intensa na natureza investigativa do discente, nessa abordagem estaremos preocupados com desenvolvimento do pensamento matemático e a autônomia, não somente no resultado, mais também com todo o processo de resolução e reconstrução do objeto de estudo.

> Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações.(PONTE, 2003, p. 313)

Quando o discente se apropria do objeto de estudo, em um processo de construção, o mesmo é o ator principal de sua aprendizagem, chegamos ao momento de equilíbrio na dinâmica investigativa. Dentro dessa proposta, o educando tem que entender seu papel, que é o sujeito ativo em todas as etapas do método, pois incorpora o papel do matemático pesquisador que busca identificar critérios, conjecturar e argumentar com os demais colegas.

Tabela 1: Diferentes tipos de questões matemáticas

Tarefas matemáticas	*Exemplos*	*Sujeitos*
Exercício	Resolve a equação: 2x+23=-3+7x	Alunos do 8º ano
Problema	Calcular a diagonal de um paralelepípedo rectângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura. (Pólya, 1945)	Alunos do 8º ano
Investigação	Escreve em coluna os 20 primeiros múltiplos de 5. Repara nos algarismos das unidades e das dezenas. Que observas? E o que acontece com os múltiplos de 4 e de 6? E com os múltiplos de outros números?	Alunos do 5º ano

Fonte:Investigação sobre Investigações Matemáticas em Portugal, Ponte, 2003

Devemos destacar a diferença entre, exercícios, problemas e investigação. Para estes Polya(1945) trás a diferença entre os dois primeiros, "um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método imediato de resolução, ao passo que um exercício pode ser resolvido usando um método ou algoritmo já conhecido". Diante de tais distinções, temos que levar em conta o público que será aplicado o exercício ou problema, pelo fato de levarmos em conta a grau de conhecimento sobre o assunto e as técnicas que poderão ser utilizadas. Para Ponte,

> Há uma característica comum aos exercícios e problemas – em ambos os casos o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido, sem quaisquer ambiguidades. O professor sabe de antemão a solução e a resposta apresentada pelo aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação é diferente. O ponto de partida é uma situações aberta, ou seja, a questão não está completamente definida, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua concretização. Sendo possível concretizar de vários modos os pontos de partida, os pontos de chegada, naturalmente são também diferentes. Ao requerer a participação ativa do aluno na própria formulação das questões a estudar, favorecemos o seu envolvimento na aprendizagem.(PONTE, 2003, p. 9).

Como bem entendemos, o protagonismo de discente é fundamental na desenvolvimento do processo investigativo, pois diante da proposta estabelecida o educando não tem um partida definida e nem um final, nessa perspectiva ele deverá ser autônomo em sua aprendizagem, o professor que estará intermediando e coordenando em todos os segmentos da dinâmica. Sabendo que nem sempre as perguntas iniciais irão levar a um único caminho, mas poderão alavancar o espirito investigativo dado pela curiosidade e necessidade de superar desafios, pois na investigação matemática o que determina o fator de aprendizagem são os caminhos e refutações que aprimora ainda mais nossos conhecimentos.

> Uma questão que não está completamente formulada, ou seja, uma questão aberta, pode ser interpretada e concretizada de diversas maneiras e, com isso, aumentam as possibilidades de envolvimento dos alunos. O facto de as ideias matemáticas se desenvolvem como fruto das tentativas de compreensão, como resposta a problemas e necessidades experimentadas pelo próprio aluno, e não como simples assimilação de ideias pré-existentes, confere grande importância à formulação de boas questões. Ao mostrar aos alunos que é possível olhar para as ideias matemáticas de modo interrogativo, colocando questões que podem ser investigadas — e promovendo a investigação, de facto, de algumas delas — o professor está a exercer um importante papel na educação não só do raciocínio matemático dos alunos, mas também do modo de eles se relacionarem com o mundo.(PONTE, OLIVEIRA, BRUNHEIRA, VARANDAS, 1998, p. 54)

Avaliar o progresso dos discentes é de suma importância para sabermos até quando eles conseguiram compreender a proposta de investigação, quais conceitos ainda são necessários enfatizar para melhor significação, se estão trabalhando de maneira individualizada ou calaborativa, motivá-los através de mecanismo educacionais, por exemplo uso de tecnologias, lúdico ou gameficação, ou seja, ferramentas de interação e metodologias ativas.

2 TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo apresentamos uma abordagem histórica sobre a origem e desenvolvimento da teoria dos números e explanaremos algumas propriedades. Temos o intuito de contextualizar e agregar conceitos básicos que darão embasamento para compreensão e motivação da referida pesquisa. Buscando entender, elencar fatos e necessidades para evolução do conhecimento matemático e relacionar com o processo de aprendizagem dessa área. Na continuidade deste capítulo, apresentamos o algoritmo e a análise das propriedades dos números mágicos de Ball. Como alicerce desta pesquisa consideramos os trabalhos publicados por (COSTA, SANTOS, 2008), (COSTA, MESQUITA, 2014), (HEFEZ, 2006), (HEFEZ, 2015), (IFRAH, 1995), (ROQUE, 2005), (ROQUE, PITOMBEIRA, 2012).

2.1 Contexto Histórico

No limiar da trajetória histórica da nossa espécie, temos a percepção de que o homem não abstraía a noção de contar, associar grandeza ou mensurar, e vivia em pleno instinto irracional e movido por necessidades primitivas, limitando-se apenas a sua natureza de sobrevivência.

> Houve um tempo em que os homens não deviam saber contar. Tanto quantos nos é possível supor, o conceito de número devia revestir no seu espírito o aspecto de uma realidade concreta, indissociável da natureza dos objetos, reduzindo-se a uma espécie de percepção direta da pluralidade material. Nossos longínquos ancestrais deviam, portanto, muito provavelmente se encontrar na incapacidade mental de conceber os números por eles mesmos, isto é, sob o ângulo da abstração, sem dúvida não deviam ter consciência do fato de que conjuntos tais como o dia e a noite,um casal de lebres, as asas de pássaro ou os olhos, as orelhas, os braços ou as pernas de um ser humano apresentam um caráter comum que é precisamente aquele de "ser dois".(IFRAH, 1995 , p.3).

Os homens eram nômades, viviam apenas da caça e coleta de alimentos, após fixar-se em solo, observamos os primeiros relatos sobre a necessidade de contar, pois estavam relacionadas as suas práticas na manipulação da terra e de animais.

> Um bom número de populações "primitivas"contemporâneas parecem igualmente ultrapassadas pelo número, considerado sobre o aspecto conceitual e abstrato. O número é com efeito, "sentido"e "percebido", é aprendido de uma maneira qualitativa, um pouco como se percebe uma dor, uma cor, uma barulho ou ainda a presença de um indivíduo ou de uma coisa do mundo exterior. Noutras palavras, esses "selvagens"são afetados pela mudança de aspecto do seu campo visual. Seguindo uma relação direta de sujeito a objeto. Suas capacidades de compreensão dos números abstratos limitam-se, portanto, ao que suas disposições naturais permitem reconhecer numa só olhada.(IFRAH, 1995, p. 10).

O processo de contagem deu-se por mudanças no comportamento e modo de vida, sujeitados ao acúmulo, desenvolvendo a ideia de contagem dentro dos padrões qualitativos puramente sentidos e não por modelos quantitativos, inicialmente. Segundo Ifrah(1995),

> Vários povos "primitivos"estavam ainda no "grau zero"do conhecimento dos números abstratos. Foi o caso, por exemplo dos bosquímanos da África austral, dos zulus e dos pigmeus da África central, dos botocudos do Brasil, dos índios da Terra do Fogo, dos Kamilarai e dos aranda da Austrália, dos indígenas das ilhas Murray(não longe da penísula australiana do cabo York), dos vedda do Ceilão e de muitas outras culturas "não civilizadas". (IFRAH,1995, p. 10).

Diante das mudanças e de novos conhecimentos adquiridos no processo de contagem, podemos analisar algumas civilizações diante das representatividades e equivalências entre objetos e grandezas e suas manipulações, pois o desenvolvimento da agricultura e criação de animais estavam diretamente atrelados ao da contagem, era necessário um mecanismo concreto para representá-los, tais como marcação em madeira, ossos ou barro, nós em corda, empilhamento de pedras, partes do corpo. Estes meios eram usados para quantificar rebanhos, pois era feito uma correspondência biunívoca.

> Em uma História dos Números, é difícil escolher um ponto de partida. Por onde começar? Em que época? Em que local? Em que civilização específica? Não é difícil imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mais frequente é o de pastores de ovelhas que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, em vez de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas escritas na argila, e essas marcas estariam na origem dos números.(ROQUE, 2005, p. 25).

Segundo Roque(2005) para entendermos melhor sobre a história dos números, é preciso abordar a data da escrita, que é aproximadamente do quarto milênio antes da Era Comum, pois o surgimento da escrita e da matemática são consonantes, sendo que a finalidade da escrita deu-se inicialmente por registrar quantidades de rebanhos e mantimentos, possibilitando melhorias na organização da sociedade.

> Obviamente, seria muito difícil estudar culturas cuja prática numérica fosse somente oral. Como nosso objetivo é relacionar a história dos números com a história de seus registros, é preciso abordar o nascimento da escrita, que data aproximadamente do quarto milênio antes da Era Comum. Os primeiros registros que podem ser concebidos como um tipo de escrita são provenientes da Baixa Mesopotâmia, onde atualmente se situa o Iraque. O surgimento da escrita e o da matemática nessa região estão intimamente relacionados. As primeiras formas de escrita decorreram da necessidade de se registrar quantidades, não apenas de rebanhos, mas também de insumos relacionados à sobrevivência e, sobretudo, à organização da sociedade. (ROQUE, 2005, p. 25).

O desenvolvimento do conceito de número, mesmo sendo alavancado por situações concretas, contempla um grau de abstração, não somente dentro do que estamos habituados no significado de abstrato, pois para efeito de esclarecimento, contar é concreto, mas usar um mesmo número para representar quantidades iguais de coisas distintas é um processo de abstração. A matemática nesse período era simplesmente empírica, totalmente direcionada para problemas práticos, mas também apresentava técnicas de escritas, mostrando um aprimoramento do que conhecemos como matemática.

A matemática no antigo Egito, fazia uso de objetos(tokens) com formatos geométricos distintos para representar medidas.

> Com o desenvolvimento da sociedade, aperfeiçoaram-se métodos para armazenar esses tokens. Um deles empregava invólucros de argila, como uma bola vazada, dentro dos quais eles eram guardados e fechados. Os invólucros escondiam os tokens e, por isso, em sua superfície, eram impressas as formas contidas em seu interior. O número de unidades de um produto era expresso pelo número correspondente de marcas na superfície. Uma bola contendo sete ovoides, por exemplo, possuía sete marcas ovais na superfície, às vezes produzidas por meio da pressão dos próprios tokens contra a argila ainda molhada. A substituição de tokens por sinais foi o primeiro passo para a escrita. Os contadores do quarto milênio a.E.C. devem ter percebido que o conteúdo dos invólucros se tornava desnecessário em vista das marcas superficiais, e essas marcas passaram a incluir sinais traçados com estilete. Ambos os tipos de sinais eram derivados dos tokens e não consistiam de figuras representando os produtos em si, mas os tokens usados para contá-los. (ROQUE, 2005, p. 31).

Ainda não tinham conhecimento dos símbolos que utilizamos hoje em dia, cada token servia para contar os insumos, servindo como meio de comparação, ou seja, fazendo uma equivalência biunívoca, temos nesse comparativo situações que contempla um processo tanto concreto quanto abstrato, pois o mesmo objeto é equivalente a uma determinada grandeza independente do tipo.

Diante da trajetória histórica e da necessidade de quantificar e relacionar grandezas, desenvolveu-se o sistema de numeração posicional, nessa representação numérica o valor de cada algarismo depende de sua posição na composição do número.

2.2 Números Naturais e Inteiros

O conjunto dos naturais, indicado por $\mathbb{N}$, atualmente é representado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots\}$$

Quando pensamos em quantidade ou contagem sempre iniciamos pelo números naturais, envolvendo-os com a manipulação de operações básicas, sem realmente definir o q ele são. A descrição abaixo dos números naturais foi realizado por Costa, Santos (2008, p.3).

Tomemos como ponto de partida a série

$0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots$

é esta série que teremos em mente quando falarmos da série dos números naturais. Sabemos que foi necessário muito tempo para aceitar que um par cadeiras é um casal de humanos são ambos manifestações da quantidade (número) 2. O grau de abstração envolvido está longe de ser fácil.

O método axiomático, introduzido por Euclides na geometria grega (clássica) no século III a.C. é na álgebra utilizado por Peano (somente no séc. XIX) para fundamentar de forma lógica a aritmética.

No método axiomático deve-se, em primeiro lugar, aceitar certos termos da teoria sem uma explicação formal. Estes termos são chamados de Conceitos Primitivos e em nosso caso são: o zero, número natural e sucessor de. Em segundo lugar aceitar certas sentenças (ou asserções) como verdadeiras (independente de demonstração), tais sentenças são chamadas de Axiomas. A partir dos termos primitivos acima, Peano formulou cinco axiomas, são eles:

A_1 - Zero é um número natural.

A_2 - Todo número natural tem um único sucessor que também é um número natural.

A_3 - Zero não é sucessor de nenhum natural.

A_4 - Dois números naturais que tem sucessores iguais são, eles próprios, iguais.

A_5 - Se uma coleção S de números naturais contém o zero e também contém o sucessor de todos os seus elementos, então S é o conjunto de todos os naturais.

A teoria se completa com Proposições(Teoremas) que, a partir dos axiomas, podem ser demonstrados por raciocínio lógico e correto. As demonstrações dos proposições podem ser encontradas na referência acima citada.

Segundo Hefez (2006), a divisão de um número natural por outro nem sempre é possível, expressa-se esta possibilidade através da relação de divisibilidade. Quando não existir uma relação de divisibilidade entre dois números, veremos que, ainda assim, será possível efetuar uma "divisão com resto pequeno", chamada de divisão euclidiana. O fato de ser possível efetuar tal divisão é responsável por inúmeras propriedades dos naturais.

Dados dois números naturais a e b com $a \neq 0$, diremos que a divide b, escrevendo $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Neste caso, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda, que b é um múltiplo de a.

Observe que a notação $a \mid b$ não representa nenhuma operação em $\mathbb{N}$, nem representa uma fração. Trata-se de uma sentença que diz ser verdade quando existe c tal que $b = ac$. A negação dessa sentença é representada por $a \nmid b$, significando que não existe nenhum número natural c tal que $b = ac$.

Suponha que $a \mid b$ e seja $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$. O número natural c é chamado de quociente de b por a e denotado por $c = \frac{b}{a}$ Por exemplo,

$$\frac{0}{1} = 0, \quad \frac{0}{2} = 0, \quad \frac{6}{1} = 6, \quad \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{6}{6} = 1$$

Note, ainda, a semelhança entre as definições da relação de divisibilidade e da relação de ordem em $\mathbb{N}$:

$$a \leq b \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}; b = a + c,$$
$$a \mid b \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{N}; b = a \cdot c$$

A divisibilidade é, portanto, a contrapartida multiplicativa em $\mathbb{N}$ da relação de ordem (note, porém, que não vale a tricotomia para a relação de divisibilidade). Estabeleceremos a seguir algumas propriedades da divisibilidade.

Proposição 2.1. Sejam, $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$. Tem-se que

i) $1|c,\ a|a \quad e\ a \mid 0$

ii) se $a \mid b$ e $b \mid c$, ent $\tilde{a} \circ a \mid c$

Para Hefez(2006) mesmo quando um número natural **a** não divide o número natural **b**, Euclides, nos seus Elementos, utiliza, sem enunciá-lo explicitamente, o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de **b** por **a**, com resto. Este resultado, não só é um importante instrumento na obra de Euclides, como também é um resultado central da teoria.

Teorema 2.1. *Teorema (Divisão Euclidiana). Sejam a e b dois números naturais* com $0 < a < b$ *Existem dois únicos números naturais q e r tais que*

$$b = a \cdot q + r, \qquad com\ r < a$$

Demonstração: Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números

$$b, b - a, b - 2a, \ldots, b - n \cdot a, \ldots$$

, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q\cdot$ a. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < a$

Se $a \mid b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar.

Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq a$ e, portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequientemente, sendo $r = c + a = b - q \cdot a$ teríamos

$$c = b - (q + 1) \cdot a \in S, \text{ com } c < r$$

contradição com o fato de r ser o menor elemento de S.

Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de q e r.

■

Agora, vamos provar a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - a \cdot q$ e $r' = b - a \cdot q'$, com $r < r' < a$, teriamos $r' - r \geq a$, o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, absurdo. Portanto, $r = r'$.

Daí segue-se que $b - a \cdot q = b - a \cdot q'$, o que implica que $a \cdot q = a \cdot q'$ e, portanto, $q = q'$.

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de b por a.

Note que o resto da divisão de b por a é zero se, e somente se, a divide b. Note que a demonstração do teorema fornece um algoritmo (i.e. um procedimento executável) para calcular o quociente e o resto da divisão de um número por outro, por subtrações sucessivas.

Exemplo 1. Vamos achar o quociente e o resto da divisão de 19 por 5. Considere as diferenças sucessivas:

$$19 - 5 = 14, 19 - 2 \cdot 5 = 9, 19 - 3 \cdot 5 = 4 < 5$$

Isto nos dá $q = 3$ e $r = 4$

Aparentemente, não haveria necessidade de se provar a unicidade de q e r no Teorema 2.1, já que o resultado da subtração a cada passo do algoritmo é único e, portanto, r e q têm valores bem determinados. O fato é que apresentamos um método para determinar q e r, satisfazendo as condições do teorema, mas nada nos garante que, utilizando um outro método, não obteríamos outros valores para q e r; daí a necessidade de se provar a unicidade.

Segundo Hefez(2010) Dados dois números naturais a e b, até o momento, o número $b - a$ só foi definido quando $b \geq a$. Como remediar esta situação? O jeito que os matemáticos encontraram para que seja sempre definido o número $b - a$ foi o de ampliar o conjunto dos números naturais formando um novo conjunto $\mathbb{Z}$ chamado de conjunto dos números inteiros, cujos elementos são dados ordenadamente como segue:

$$\cdots + (-3) \to (-2) \to (-1) \to (0) \to (1) \to (2) \to (3) \to \cdots$$

Os números à esquerda do zero são chamados de números negativos e os à direita são chamados de números positivos.

> O conceito de número inteiro originou - se do conceito bem mais antigo de número natural, cuja criação objetivava resolver problemas de contagem. Os números negativos têm sido considerados esporadicamente desde a antiguidade, mas sempre com muita desconfiança por parte dos matemáticos até que, a partir do desenvolvimento das atividades mercantins que ocorriam na Europa no final da Idade Média, sentiu-se a necessidade de considerar os inteiros relativos e com eles efetuar operações. (...)A evolução da noção intuitiva de número inteiro para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século XIX, quando os fundamentos de toda a matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos.(HEFEZ, 2015, p.02).

2.3 Sistema de Numeração Posicional

Por Hefez(2006) temos que no sistema decimal, todo número inteiro é representado por uma sequência formada pelos algarismos

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

acrescidos do simbolo 0 (zero), que representa a ausência de algarismo. Por serem dez os algarismos, o sistema é chamado decimal. O sistema é também chamado posicional, pois cada algarismo, alem do seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número. Esse peso, sempre uma potência de dez, varia do seguinte modo: O algarismo da extrema direita tem peso 1; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso dez; o seguinte tem peso cem; o seguinte tem peso mil e etc. Portanto, os números de um a nove são representados pelos algarismos de 1 a 9, correspondentes. O número dez é representado por 10, o número cem por 100, o número mil por 1000 Por exemplo, o número 12019, na base 10, é a representação de

$$1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10 + 9$$

Cada algarismo de um número possui uma ordem contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima, o primeiro que aparece é de segunda ordem, enquanto que o último é de quinta ordem. O 9 é de primeira ordem, enquanto que o 2 é de quarta ordem. Cada terna de ordens, também contadas da direita para a esquerda, forma uma classe. As classes são, às vezes, separadas umas das outras por meio de um ponto. Damos a seguir os nomes das primeiras classes e ordens:

$$\text{Classe das Unidades} \begin{cases} \text{unidades} & 1^a \text{ ordem} \\ \text{dezenas} & 2^a \text{ ordem} \\ \text{centenas} & 3^a \text{ ordem} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhar} \begin{cases} \text{unidades de milhar} & 4^a \text{ ordem} \\ \text{dezenas de milhar} & 5^a \text{ ordem} \\ \text{centenas de milhar} & 6^a \text{ ordem} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhão} \begin{cases} \text{unidades de milhão} & 7^a \text{ ordem} \\ \text{dezenas de milhão} & 8^a \text{ ordem} \\ \text{centenas de milhão} & 9^a \text{ ordem} \end{cases}$$

Teorema 2.2. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, \ldots, c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_n b^n$.*

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre a. Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$. Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } r < b$$

Como $q < a$ (verifique), pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais $n' \text{e} d_0, d_1, \ldots, d_n{}', \text{com} d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} b^{n'}$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = bq + r = b\left(d_0 + d_1 b + \cdots + d_{n'} b^{n'}\right) + r$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r, n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, \ldots, n$ A unicidade segue-se facilmente das unicidades acima estabelecidas. A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b. Quando $b = 10$, essa expansão é chamada expansão decimal, e quando $b = 2$, ela toma o nome de expansão binária. A demonstração do Teorema também nos fornece um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base b. Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, \quad r_0 < b \\ q_0 &= bq_1 + r_1, \quad r_1 < b \\ q_1 &= bq_2 + r_2, \quad r_2 < b \end{aligned}$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > \cdots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, portanto, de

$$q_{n-1} = bq_n + r_n$$

decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$, e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$ Temos, então, que

$$a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_n b^n$$

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b simbolos

$$S = \{s_0, s_1, \dots, s_{b-1}\}$$

com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b-1$. Um número natural a na base b se escreve da forma

$$x_n x_{n-1} \dots . x_1 x_0$$

com $x_0, \dots + a_n \in S$, e n variando, dependendo de a, representando o número

$$x_0 + x_1 b + \cdots + x_n b^n$$

No sistema decimal, isto ϵ_t de base $b = 10$, usa-se

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Se $b \leq 10$, utilizam-se os simbolos $0, 1, \dots, b-1$, Se $b > 10$, costuma-se usar os simbolos de 0 a 9 , acrescentando novos simbolos para $10, \dots, b-1$. No sistema de base $b = 2$, temos que

$$S = \{0, 1\}$$

e todo numero natural é representado por uma sequencia de 0 e 1 . Por exemplo, o número 10 na base 2 representa o número 2 (na base 10). Temos tambem que

$$100 = 2^2, \quad 101 = 1 + 2^2, \quad 111 = 1 + 2 + 2^2, \quad 1011 = 1 + 2 + 2^3$$

O sistema na base 2 e habitualmente utilizado nos computadores.

Exemplo 2. Vamos representar o número 723 na base 5 Por divisão euclidiana sucessiva,

$$723 = 144 \cdot 5 + 3, 144 = 28 \cdot 5 + 4, 28 = 5 \cdot 5 + 3, 5 = 1 \cdot 5 + 0, 1 = 0 \cdot 5 + 1$$

Portanto,

$$723 = 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4$$

e, consequentemente, 723 na base 5 se representa por 10343.

■

Dentro do nosso estudo nos limitaremos até o conjunto dos números inteiros, fato justificável, pela proposta e os conceitos que foram utilizados que estão baseado nos conjuntos abordados.

2.4 Congruências

Segundo Hefez(2006) seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b \text{ mod}$$

Por exemplo, $21 \equiv 13$ mod 2 , já que os restos da divisão de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1. Quando a relação $a \equiv b$ mod m for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. Escreveremos, neste caso, $a \neq b$ mod m.

Como o resto da divisão de um número natural qualquer por 1 é sempre nulo, temos que $a \equiv b$ mod 1, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Isto torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, doravante, consideraremos sempre $m > 1$.

Decorre, imediatamente, da definição que a congruência, módulo um inteiro fixado m, é uma relação de equivalência. Vamos enunciar isto explicitamente abaixo.

Proposição 2.2. Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que:

(i) $a \equiv a$ mod m

(ii) se $a \equiv b$ mod m, entao $b \equiv a$ mod m

(iii) se $a \equiv b$ mod $meb \equiv c$ mod m, então $a \equiv c\underline{m}odm$

Para verificar se dois números são congruentes módulo m, não necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos.

Proposição 2.3. Suponha que a, $b \in$ IN são tais que $b \geq a$. Tem-se que a $\equiv b$ mod m se, e somente se, $m \mid b - a$.

Demonstração: Sejam $a = mq + r$, com $r < m$ e $b = mq' + r'$, com $r' < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$b - a = \begin{cases} m(q' - q) + (r' - r), & \text{se } r' \geq r \\ m(q' - q) - (r - r'), & \text{se } r \geq r' \end{cases}$$

onde $r' - r < m$, ou $r - r' < m$. Portanto, $a \equiv b$ mod m se, e somente se, $r = r'$, o que é equivalente a dizer que $m \mid b - a$.

Note que todo número natural é congruente módulo m ao seu resto pela divisão euclidiana por m e, portanto, é congruente módulo m a um dos números $0, 1, \ldots, m - 1$.

Além disso, dois desses números distintos não são congruentes módulo m. Portanto, para achar o resto da divisão de um número a por m, basta achar o número natural r dentre os números $0, \ldots, m-1$ que seja congruente a a módulo m. Chamaremos de sistema completo de residuos módulo m a todo conjunto de números naturais cujos restos pela divisão por m são os números $0, 1, \ldots, m-1$, sem repetiçóes e numa ordem qualquer.

Portanto, um sistema completo de resíduos módulo m possui m elementos. É claro que, se $a_1, \ldots, a_m$ são m números naturais, dois a dois não congruentes módulo m, então eles formam um sistema completo de residuos módulo m. De fato, os restos da divisão dos a_i por m são dois a dois distintos, o que implica que são os números $0, 1, \ldots, m-1$ em alguma ordem. O que torna útil e poderosa a noção de congruência é o fato de ser uma relação de equivalência compatível com as operações de adição e multiplicação nos inteiros. ■

2.5 Números Mágicos de Ball

Segundo Costa(2020), entendemos como número mágico de Ball, o número resultante do Algoritmo 1 (abaixo):

Algoritmo 1. O número mágico de Ball B.

1. Considere um número x_n;
2. Escreva o número reverso x'_n
3. Encontre o valor absoluto da diferença entre esses números, representado por $y_n = |x_n - x'_n| = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_2b_1b_0$(O que deve ser considerado como um número de n algarismos, mesmo quando o algarismo b_{n-1} *ou* b_{n-2} *ou* ... for zero.)
4. Escreva o número reverso y'_n
5. Escreva o número $B = y_n + y'_n$

Para qualquer $B \neq 0$, chamamos o número B de mágico de Ball se for o resultado do Algoritmo 1. Quando $x_n > x'_n$, de forma simplificada obtemos o número mágico de Ball fazendo $B = (x_n - x'_n) + (x_n - x'_n)'$

Exemplo 3. Para $n = 3$, dado $x_3 = 843$, usamos o algoritmo para obter $x'_3 = 348$, donde obtemos $y_3 = 843 - 348 = 495$. Assim, $y'_3 = 594$. Finalmente, resulta que $B = 495 + 594 = 1089$

2.5.1 Entendendo o raciocínio algébrico do número mágico 1089

A demonstração foi retirada de Costa e Mesquita. (2014, p.34).

Demonstração: Primeiramente, lembramos que pelo nosso sistema de numeração posicional decimal escrevemos os números como uma adição de parcelas de potência de 10 multiplicadas por números de um algarismo. Por exemplo, o número 15.495 pode ser descrito como $1 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10 + 5 \times 10^0$.

Sejam agora a_2, a_1, a_0 os algarismos dois à dois distintos do número escolhido. Considerando $a_2 > a_0$, para fazer a subtração $a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2$ devemos escrever: $a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 = (a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0) - (a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2)$.

$a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 = (a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0) - (a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2)$. Por termos $a_0 < a_2$, necessitamos reescrever deslocando uma dezena de $a_1 \times 10$ para a unidade a_0, assim: $a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 = [a_2 \times 10^2 + (a_1 - 1)\,10 + (a_0 + 10)] - [a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2]$

Agora, deslocamos uma centena de $a_2 \times 10^2$ para $(a_1 - 1)\,10$ por ser menor que $a_1 \times 10$. Assim

$$\begin{aligned} a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 &= \big[(a_2 - 1) \times 10^2 + \big((a_1 - 1)\,10 + 10^2\big) + \\ &\quad + (a_0 + 10)\big] - \big[a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2\big] \\ &= (a_2 - a_0 - 1) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a_0 - a_2 + 10) \\ &= b_2b_1b_0 \end{aligned}$$

O próximo passo é considerar o número $b_2b_1b_0$ (resultado da subtração) e adicionar ao seu contrário $b_0b_1b_2$ (ordem dos algarismos inverticlos). Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} b_2b_1b_0 + b_0b_1b_2 &= \big[(a_2 - a_0 - 1) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a_0 - a_2 + 10)\big] + \\ &\quad + \big[(a_0 - a_2 + 10) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a_2 - a_0 - 1)\big] \\ &= (a_2 - a_0 - 1 + a_0 - a_2 + 10)\,10^2 + (9 + 0)10 + \\ &\quad + (a_0 - a_2 + 10 + a_2 - a_0 - 1) \\ &= 9 \times 10^2 + (10 + 8)10 + 9 = 1089 \end{aligned}$$

Portanto não importando qual número escolhido, formado por três algarismos (dois à dois) distintos, os cálculos efetuados sempre resulta em 1089. Assim o número 1089 é considerado "mágico" por esta razão.

∎

3 SCRATCH E AS PROPRIEDADES DA TEORIA DOS NÚMEROS

A integração das tecnologias da informação nos mecanismos educacionais se faz necessário, pois propicia o desenvolvimento de métodos que possibilitam a da aprendizagem mediada por ferramentastecnológicas como o SCRATCH. Neste capítulo iremos abordar a utilização e construção de propriedades aritméticas na codificação do cenário sobre os números mágicos de Ball desenvolvido em uma plataforma de programação e uma análise sobre o uso do SCRATCH como ferramenta de intervenção pedagógica.

3.1 Análise do Cenário

O SCRATCH é uma plataforma de programação em blocos disponível online, elaborada com intuito de iniciar crianças no mundo da programação em alto nível, pois propicia de forma dinâmica e divertida a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento computacional colaborativo, com uso de códigos predefinidos em blocos, facilitando o entendimento dos discentes no processo de elaboração de projetos de jogos e animações.

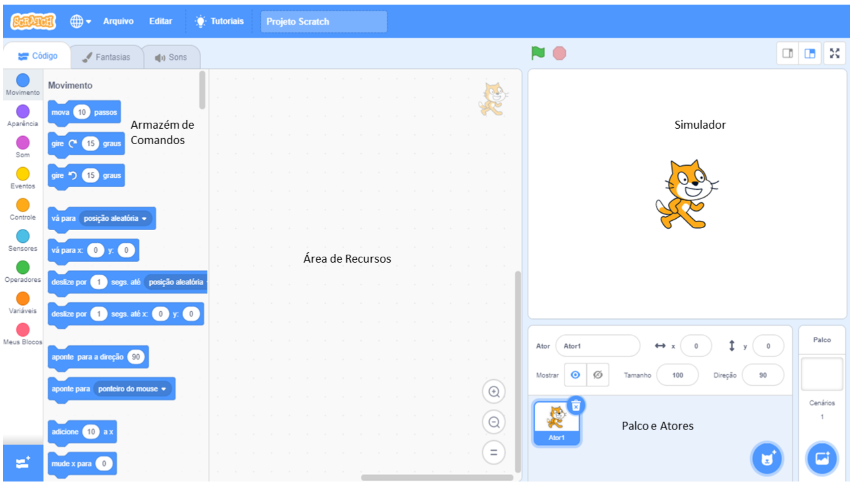
> A educação é o elemento-chave na construção de uma sociedade baseada na informação, no conhecimento e no aprendizado, educar em uma sociedade da informação significa muito mais que treinar as pessoas para o uso das tecnologias de informação e comunicação. Trata-se também de formar os indivíduos para "aprender a aprender", de modo a serem capazes de lidar positivamente com a contínua e acelerada transformação da base tecnológica. (BRASIL, 2000, p. 45).

Dentro dessa perspectiva educacional, podemos relacionar a construção do pensamento computacional com a abordagem da investigação matemática, para criar uma cenário de aprendizagem, tendo como ferramenta mediadora o SCRATCH.

Utilizamos a versão 3.9.0 do SCRATCH para desenvolvimento do cenário e de um jogo. O ambiente inicial do SCRATCH está dividido em : Armazém de Comandos, Área de Recursos, Simulador, Palco e Atores.

No Armazém de Comandos, apresenta os grupos de comandos a serem utilizados tanto pelos atores quanto para o palco. Na Área de recursos, colocamos nossos blocos de comandos e os efeitos necessários para cada animação ou jogo implementado. Simulador é o local que executamos os comandos listados em blocos na área de recurso. Palco e Atores, podemos manipular o plano de fundo e os objetos(atores) fixados no cenário.

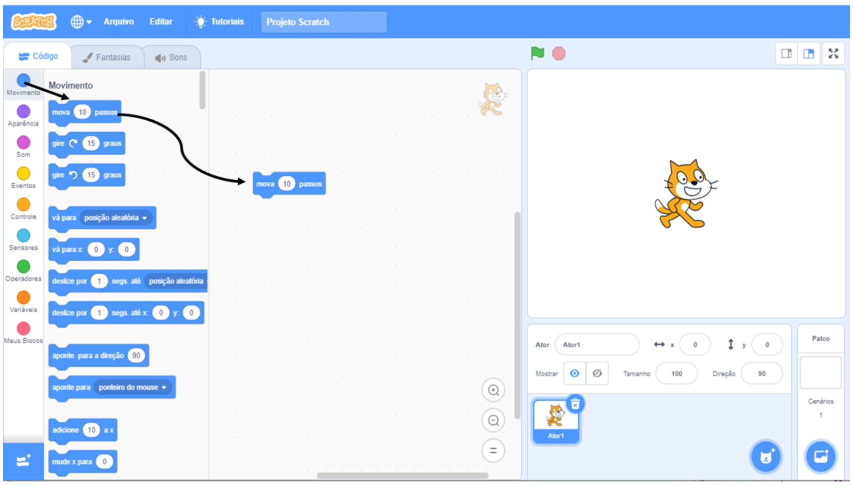
Figura 7: Tela inicial do SCRATCH



Fonte: Própria (2020)

Para produzir o efeito de movimento em um ator, selecionamos o grupo de blocos azul(Movimento) e arrastamos para a área de recursos. Como exemplo iremos utilizar o bloco mova 10 passos, para executar basta dar duplo clique sobre o mesmo. Observe na figura 8.

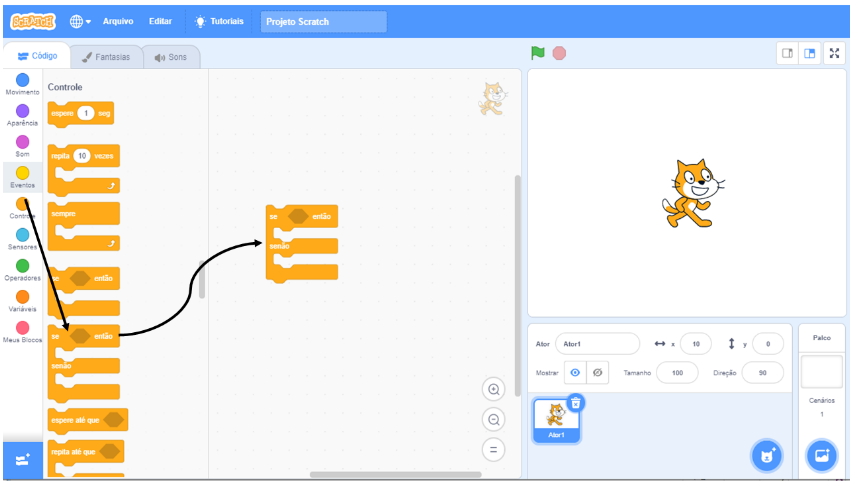
Figura 8: Bloco de Movimento



Fonte: Própria (2020)

Quando for executado duplo clique sobre o bloco, no ambiente simulador o ator(gato) irá andar 10 passos sobre o eixo das abcissas. Observe que a única manipulação feita nesse bloco é colocar o número de movimento. Para os demais blocos de comandos o procedimento é análogo.

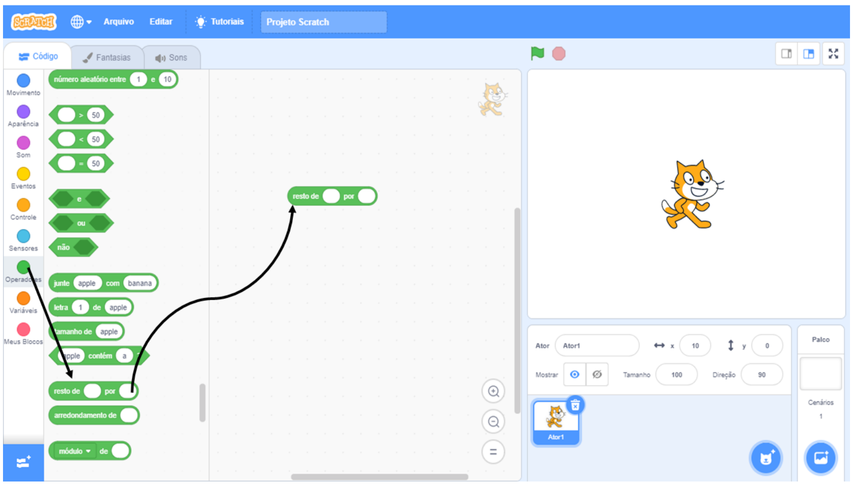
Figura 9: Bloco de Controle



Fonte: Própria (2020)

No Bloco de Controle executamos a lógica Booleana, tais como laços de repetições, condicionais e controle de tempo para cada objeto envolvido no cenário. As ações desenvolvidas nesses blocos possibilitam o controle do fluxo de informação diante da codificação de um jogo, no entanto a facilidade está simplesmente em montar a lógica como se fosse um quebra-cabeça, apenas juntando os blocos semelhantes geometricamente.

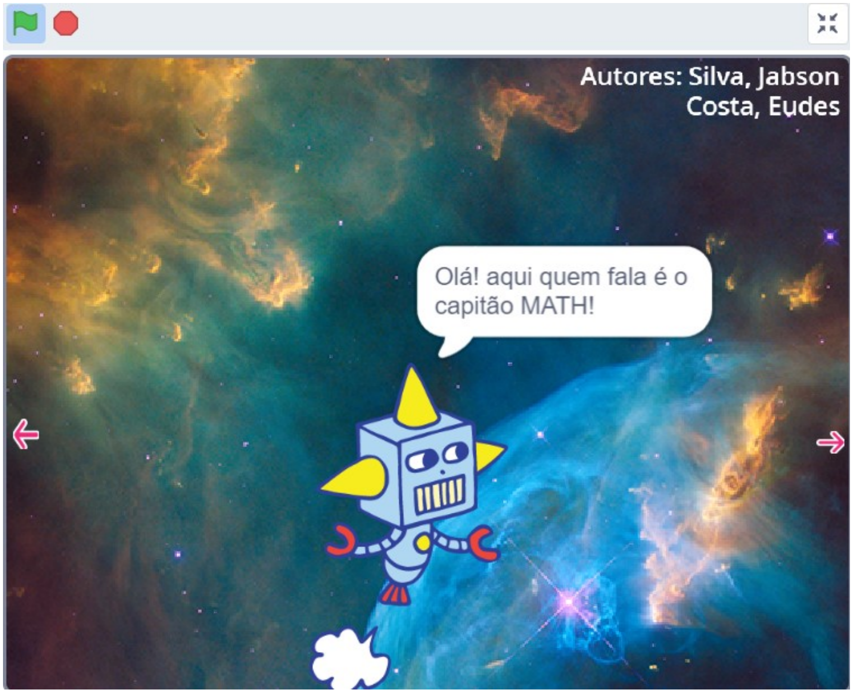
Figura 10: Bloco de Operadores



Fonte: Própria (2020)

O Bloco de Operadores, desempenha uma papel fundamental no contexto matemático, pois possibilita executar operações básicas, relações de conjunção, disjunção, negação, concatenação e aritmética do restos.

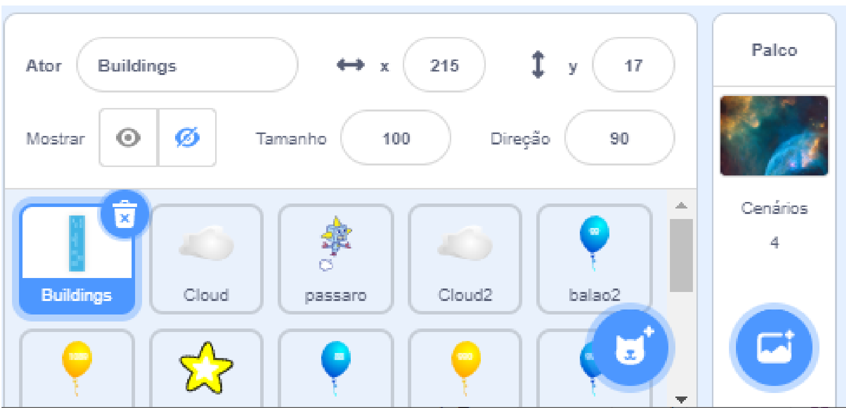
Figura 11: Simulador



Fonte: Própria (2020)

No ambiente de simulação, após a estrutura lógica montada na área de recursos, podemos testar os efeitos e controles, e verifica-se se estão condizentes com a proposta em desenvolvimento. Observe na figura 11, podemos iniciar a simulação pela bandeira verde e parar com o botão vermelho no canto superior esquerdo da tela. Na área de palco e atores, podemos inserir atores, cenários e fantasias que serão necessários no projeto.

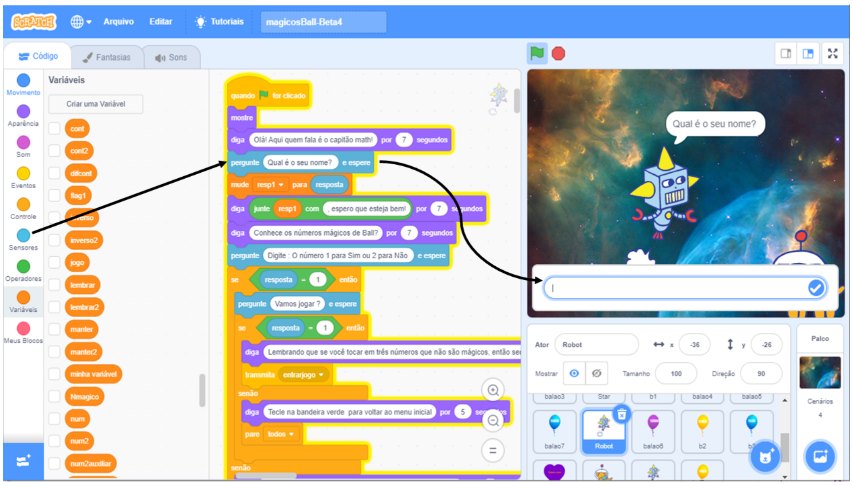
Figura 12: Palco e Atores



Fonte: Própria (2020)

Até o momento foram contempladas noções gerais da utilização do SCRATCH, a relação entre os ambientes, principais blocos de comandos e suas utilizações. Nos próximos tópicos iremos abordar os comandos específicos para construção do código principal que verifica se um número é mágico em relação a quantidade de algarismos do número de entrada através do algoritmo.

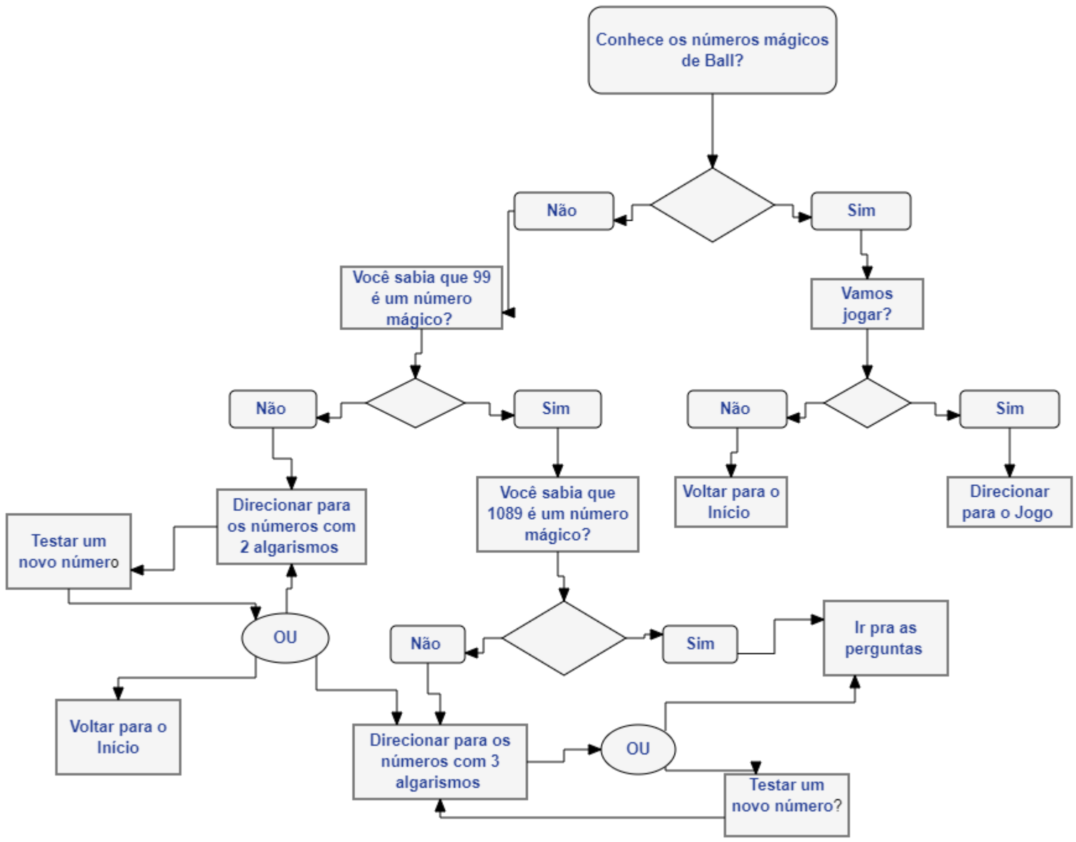
Figura 13: Interação com usuário



Fonte: Própria (2020)

No desenvolvimento do cenário, optamos pela interação dinâmica com o discente, fazer com que ele participe do processo de obtenção do número mágico de Ball. No bloco de Sensores, temos o bloco Pergunte e Espere, com ele podemos armazenar a resposta escrita em uma caixa de diálogo como mostra na figura 13.

Figura 14: Dinâmica da interação envolvendo os números mágicos e o jogo



Fonte: Própria (2020)

Pelo fluxograma apresentado na figura 14, notamos as possibilidades do discente na estrutura de tomada de decisão, trazendo uma linguagem de fluxo reiterada pelo pensamento computacional. Nesse esquema podemos entender o processo de escolha e verificação dos números mágicos de Ball e os requisitos para que possa responder as perguntas sobre a generalização da aplicação do algoritmo, tentando estabelecer um padrão entre os números gerados por números de dois e três algarismos e posteriormente visualizar a possibilidade de gerar números mágicos com números de quatro ou mais algarismos.

Figura 15: Reverso de um número

Fonte: Própria (2020)

Um dos fatores primordiais para gerar um número mágico de Ball é escrever o número na ordem inversa da posição dos algarismos que denotaremos por número reverso. Por exemplo se verificarmos para o número 123 em algum passo do algoritmo precisaremos escrever seu reverso, ou seja, 321. Para isso devemos instruir o computador a realizar tal ação. Na figura 15 temos um módulo da codificação do algoritmo dos números mágicos de Ball, que escreve o reverso de um número independente da quantidade de algarismos. Vamos entender como funciona.

Para construir usaremos algumas ferramentas da Teoria dos Números, tais como: recursividade, aritmética dos restos e decomposição de um número natural e um pouco de álgebra básica envolvendo variáveis.

Criaremos algumas variáveis : num, $lembrar$, $inverso$;

A variável num irá guardar o número de entrada;

A variável $lembrar$ irá guardar os algarimos do número reverso;

A variável $inverso$ irá guardar a decomposição do número de entrada.

Como número de entrada usaremos o 123, na figura 15, observamos que temos uma laço de repetição, dado um condição, que será quando $num = 0$. Começaremos manipulando a variável $lembrar$, que receberá o resto de num dividido por 10, que é 3, pois num=123. Na segunda linha iremos manipular o $inverso$, que receberá $inverso = inverso * 10 + lembrar$, ou seja, colocando em valores $inverso = 0 * 10 + 3 = 3$. Na terceira linha iremos manipular num, que receberá : O quociente $num/10$, agora fazemos $num = 12$ e finalizamos a primeira rotina, atualizando os valores das variáveis, temos : $num = 12$, $lembrar = 3$, $inverso = 3$.

Como $num \neq 0$ temos que continuar dentro do laço de repetição.

Refazendo o processo :

$lembrar = restode(num/10) = 2;$

$inverso = inverso * 10 + lembrar => inverso = 3 * 10 + 2 = 32;$

$num = arredondamentoparabaixo(num/10) = 1;$

Finalizamos a segunda rotina, atualizando os valores das variáveis, temos : $num = 1$, $lembrar = 2$, $inverso = 32$.

Como $num \neq 0$ temos que continuar dentro do laço de repetição.

Refazendo o processo :

$lembrar = restode(num/10) = 1;$

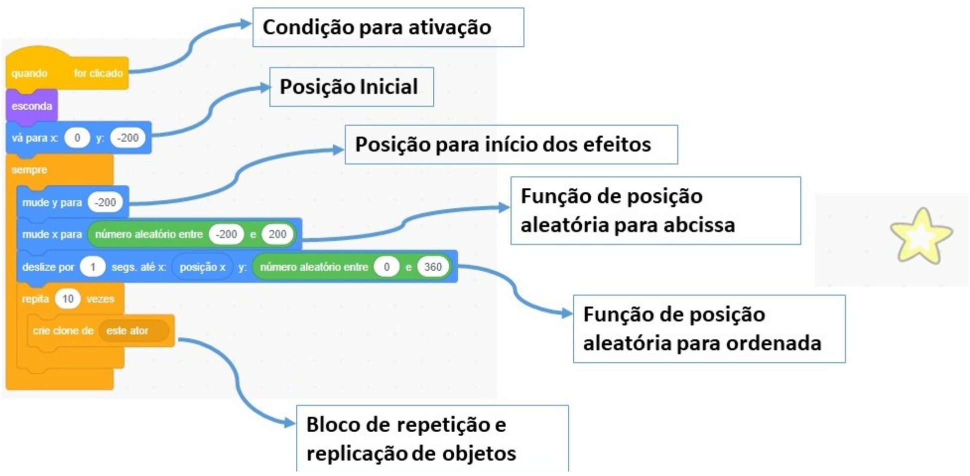
$inverso = inverso * 10 + lembrar => inverso = 32 * 10 + 1 = 321;$

$num = arredondamentoparabaixo(num/10) = 0.$

Atualizando os valores, $num = 0$, $lembrar = 1$, $inverso = 321$. Já temos o reverso do número de entrada, que está armazenado em $inverso$ e a condição de parada foi satisfeita, pois $num = 0$.

Dentro do bloco para gerar o número (figura 15) temos a variável $cont$, que é usada para guardar a quantidade de algarismos que tem o número de entrada, pois inicialmente vale 0 e a cada repetição é adicionado 1.

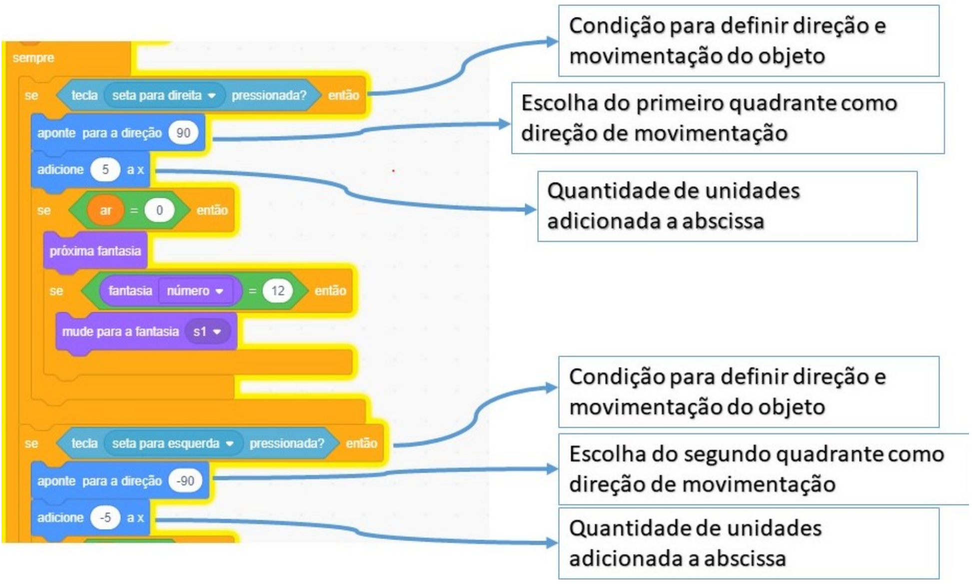
Figura 16: Replicação de Objetos



Fonte: Própria (2020)

Na codificação podemos simular um plano cartesiano, fornecendo valores de entrada, tais como pares ordenados, como métodos numéricos e limitaçoes condicionados a intervalos fixos. Na figura 16 , utilizamos um bloco para definir a posição inicial que o objeto deve ficar toda vez que executamos o cenário, e também um bloco para geração de posição aleatória na construção das posições dinâmicas, estabelecendo limites para abscissa e ordenada. No bloco de replicação, irá criar clones do objetos, dando uma sensação de efeitos especiais.

Figura 17: Movimentação dos Objetos



Fonte: Própria (2020)

Como a proposta do SCRATCH é criar jogos em cenários dinâmicos, na figura 17 visualizamos como simular a movimentação dos objetos, controlando a direção e a quantidade de passos incrementados recursivamente a um par ordenado anterior. No controle da direção é definido uma abertura com ângulo reto, como a movimentação a direita e menos o ângulo reto, sendo a esquerda.

Figura 18: Tela inicial do jogo

Fonte: Própria (2020)

Na figura 18, temos a tela inicial do jogo que foi desenvolvido para auxiliar na aprendizagem e investigação sobre os números mágicos de Ball, tendo como objetivo encontrar os seis números mágicos de Ball, que foi construído em três ambientes. Vale destacar que o personagem Sonic não pode tocar em quatro números que não são mágicos.

3.2 Resultado e discussão

Nesta seção apresentamos uma análise sobre o uso do SCRATCH como ferramenta de intervenção pedagógica mediando a investigação matemática e os números mágicos de Ball, tendo como resultados da pesquisa o desenvolvimento do cenário para produzir conteúdos digitais para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem da matemática. A coleta de dados feita por meio de um questionário aplicado remotamente envolvendo um grupo de 5 discentes da Escola Estadual Homero Honorato - GO e 9 discentes da Escola de Tempo Integral Padre Josimo Tavares - TO, nos quais os envolvidos são educandos da 2ª fase do Ensino Fudamental do 6º ano até 8º ano, devido ao distanciamento social (suspensão das atividades presenciais nas escolas) que estamos vivendo, não foi possível realizar a proposta inicial, que era aplicar o cenário no formato de oficinas nos laboratórios disponibilizados pelas escolas. A metodologia utilizada foi pesquisa-ação e qualitativa.

> O uso da pesquisa-ação surgiu da lacuna existente entre teoria e prática, com a característica de poder intervir no decorrer do processo de forma inovadora e não apenas como mais uma metodologia, cuja recomendação se dá ao final de uma pesquisa. Ela consiste em organizar a investigação em torno da concepção do desenrolar e da avaliação de uma ação planejada.(TANAJURA, BEZERRA, 2015 , p. 12).

A pesquisa-ação contempla o envolvimento de um grupo desde as instruções iniciais ao levantamento dos pontos específicos da investigação, buscando compreender o entendimento coletivo e a aplicação de novas estratégias envolvidas com recursos tecnológicos.

> Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. (...) Contudo, mesmo quando se utiliza o equipamento, os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contato direto. (...) Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 47-48).

Na abordagem qualitativa, buscamos compreender a postura comportamental dos enredados diante de uma investigação matemática, dentro de uma rotina escolar inovadora, influenciada pelas circunstâncias acometidas no contexto social, pois analisando as competências específicas da matemática para o ensino fundamental na BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) , evidencia-se " Desenvolver o raciocínio lógico, e espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender a atuar no mundo". Diante de tal paradigma, precisamos desenvolver ferramentas tecnológicas e pedagógicas que possibilitem adicionalmente ao processo de ensino na matemática, uma construção e desenvolvimento do processo de aprendizagem, em que o discente sinta-se responsável, incluído e participe de forma ativa na sua formação.

Os números mágicos de Ball, traz possibilidades de instigar no discente e gerar dúvidas, tais como: O que leva uma número ser caracterizado como mágico? Quais os operações envolvidas na obtenção desses números? Existem outros números mágicos? No limiar das indagações, surge a necessidade da investigação, que para Pontes(2003), " Quem investiga está a procurar aprender e quem aprende pode ter muito interesse em investigar", ou seja, a investigação matemática predominantemente apresenta com um valor educacional formativo, pois remete ao discente, uma necessidade da organização de seus questionamentos, criando suas conjecturas, validando-as por contra exemplos no transcorrer do processo de verificação.

Na BNCC(BRASIL, 2018), a tecnologia tem um papel importante, em seu texto é tratado como um dos seus pilares que é a cultura digital, especificando como deve ser inserida no processo de ensino e aprendizagem, na qual uma das suas competências, trata:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, competencia 5).

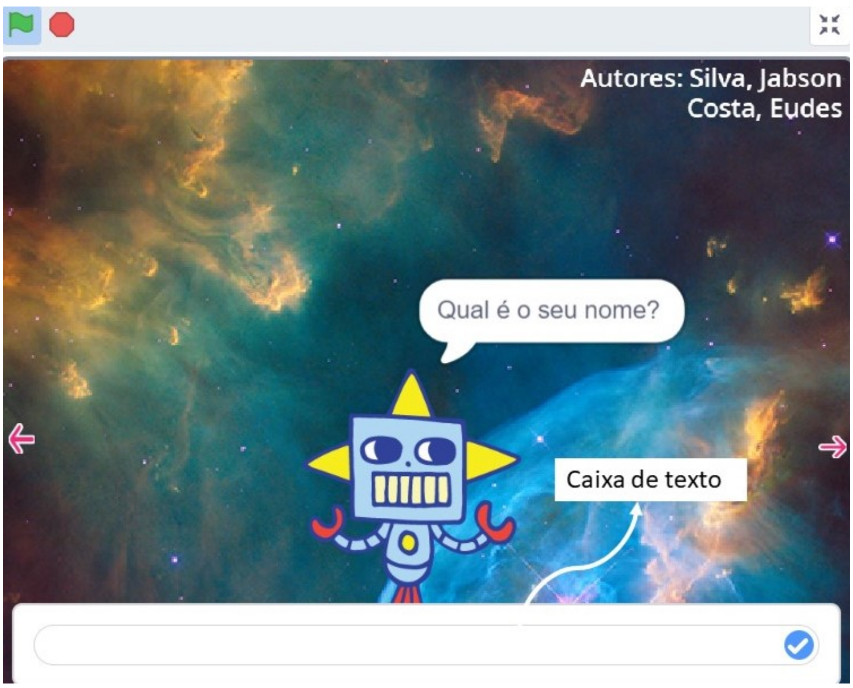
Diante da competência citada, necessitamos envolver ferramentas tecnológicas que dinamize e ajude no processo de ensino da matemática, em nossas aulas, e a plataforma SCRATCH atende estas orientações e pode ser usada como uma ferramenta pedagógica. Ademais diante da necessidade e das propostas da BNCC(BRASIL, 2018), pois parte do prerrogativa que o estudante é autor da sua aprendizagem em uma perspectiva construcionista.

Partindo da aprendizagem de conteúdos matemáticos, na construção do cenário no SCRATCH, desempenhamos um papel fundamental na aplicabilidade de saberes matemáticos, no que envolve o conhecimento de operações básicas, decomposição de números naturais, plano cartesiano, arredondamentos, e aritmética dos restos e como ferramenta relacional a lógica de Boole que sustenta os laçoes de repetições, laços condicionais e de parada nas tomadas de decisões.

> Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo- se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil. (BRASIL, 2018, p. 59).

Nesse estudo observamos que a lógica de programação em blocos, é uma ferramenta poderosa para o auxílio no ensino, principalmente da matemática, pois a aprendizagem é construída e palpável no sentido visual e de resultados. No ambiente escolar os laboratórios de informática devem ter um estrutura mínima de equipamentos e de ferramentas, para que os discentes juntamente com o professor possam usar uma metodologia ativa de ensino que contemple os requisitos de investigação e que a aprendizagem aconteça naturalmente e alinhada nas propostas da base curricular de cada área. Buscamos dentro da construção do cenário, que discente participe de forma dinâmica dos passos do algoritmo para determinação dos números mágicos de Ball, através de caixa de textos em que o educando entra com uma resposta que servirá para validar a continuidade dos passos, como vemos na figura 19, só irá para próxima etapa, quando a entrada corresponder com o comando de entrada, acontecendo em todas etapas.

Figura 19: Caixa de Texto



Fonte: Própria (2020)

Aliar jogos educativos ao ensino de matemática induz a desafios, que faz com que o discente desenvolva sua capacidade de iniciativa, despertando habilidades e conhecimentos, como a linguagem, criatividade e raciocínio dedutivo. Possibilitando meios de introduzir conceitos básicos de matemática e paulatinamente proposições mais complexas. Levando em conta que para vencer em um jogo, deverá traçar estratégias, observar, analisar, conjecturar e verificar, compondo o raciocínio lógico que é necessário dentro da investigação matemática. Diante das vantagens citadas, na figura 20, temos o cenário de um jogo, a finalidade é capturar os 6 números mágicos de Ball, dentre tantos números nos ambientes, sendo que deverá sempre lembrar da condição de não capturar mais que 3 números que não são mágicos.

Figura 20: Sonic e os Números Mágicos de Ball

Fonte: Própria (2020)

Sobre aplicação do cenário, foi disponibilizado no repositório do SCRATCH[2], qualquer um pode ter acesso, precisando apenas ter conexão de internet. E também um video[3] explicativo sobre como manipular e orientações básicas sobre a finalidade do ambiente.

Diante das dificuldades relacionadas ao distanciamento, foi realizado remota-

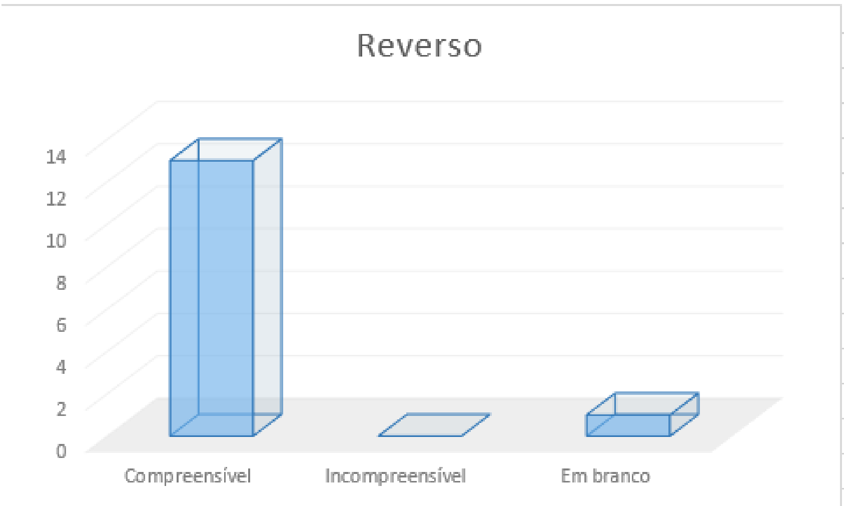
[2]scratch.mit.edu/projects/421955561/
[3]www.youtube.com/watch?v= DVQUtdDYYSQ

mente, com auxílio dos professores regentes, para dois grupos. Um grupo com 5 discentes da Escola Estadual Homero Honorato - GO, e 9 discentes da Escola de Tempo Integral Padre Josimo Tavares - TO, nos quais os envolvidos são alunos da 2ª fase do ensino fundamental desde 6º ano até 8º ano.

A dinâmica de execução deu-se com um prazo de quatro dias, inicialmente os educandos foram auxiliados pelo video explicativo e pelo professor regente. A proposta é que eles tivessem acesso ao cenário por três dias e só depois foi enviado um questionário contemplando perguntas que envolvia propriedades e entendimento sobre o procedimento para determinar os números mágicos de Ball (apendice A).

O objetivo da enquete(questionário), era averiguar se o cenário elaborado no SCRATCH auxiliava no entendimento do algoritmo para gerar os números mágicos de Ball e tivemos um resultado satisfatório, pois os discentes conseguiram escrever com suas palavras o passo a passo do algoritmo e ainda utlizavam exemplos numéricos para explicar. Analisando um dos passos do algoritmo que é encontrar o reverso de um número com dois ou mais algarismos, não apresentaram dificuldade para entender e conseguiram caracterizar as condições de existências para eles. Na figura 21, constatamos que todos assimilaram o conceito de reverso, apenas um questionário estava em branco.

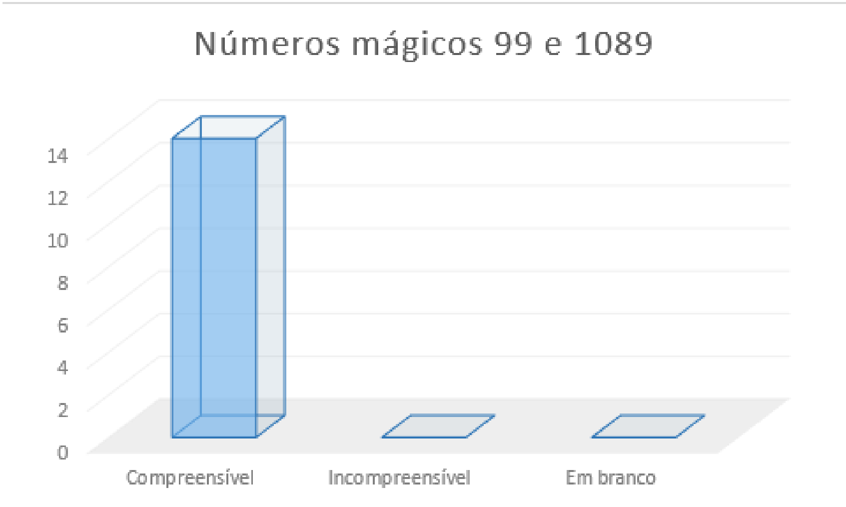
Figura 21: Análise dos resultados sobre reverso



Fonte: Própria (2020)

Diante dos testes e repetições observaram que os números com dois algarismos com reverso distinto, sempre gera o 99 e a mesma situação para os números com três algarismos que gera o 1089. No figura 22, temos que por unanimidade todos compreenderam o algoritmo dos números mágicos de Ball.

Figura 22: Análise dos resultados sobre os números mágicos de Ball



Fonte: Própria (2020)

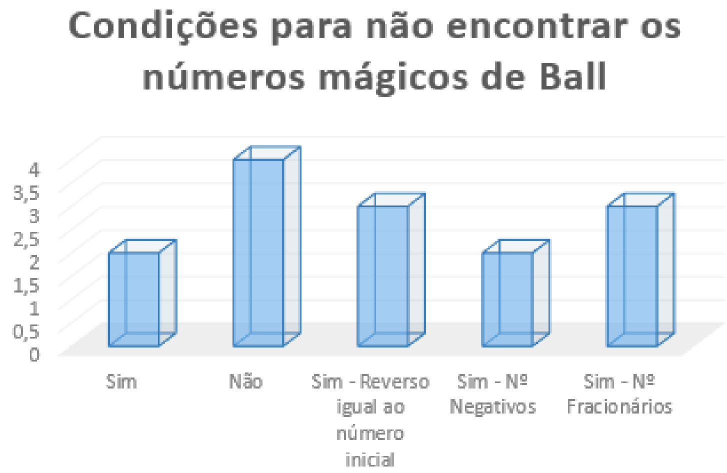
Registramos ainda que alguns estudantes conseguiram observar que esses números são múltiplos de 3, 9 ,11 e 99, pelos menos um dos quatro foi citado nos questionários. Veja na figura 23.

Figura 23: Divisores dos números mágicos de Ball

Fonte: Própria (2020)

Sobre as condições para não encontrar os números mágicos de Ball, tivemos as seguintes respostas como mostrado na figura 24, sendo que a maioria respondeu que sim e apresentou uma justificativa, por outro lado alguns discentes optaram pela resposta direta sem argumentação.

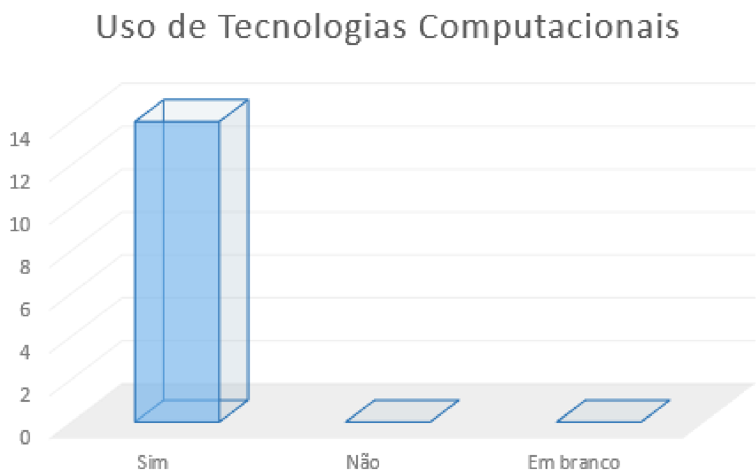
Figura 24: Critérios de Existência



Fonte: Própria (2020)

No questionário também indagava sobre uso de ferramentas tecnológicas para auxiliar atividades de ensino em matemática, uma quantidade expressiva respondeu que sim, veja na figura 25, citaram algumas ferramentas, mas SCRATCH não fazia parte da lista. A justificativa para não uso do SCRATCH pode ser a falta de conhecimento da existência da ferramenta ou até mesmo de noções básicas dos educadores sobre lógica de programação. Comentaram que acharam divertido os números mágicos de Ball, partindo dessa proposta de investigação, principalmente envolvendo o jogo do Sonic para números com dois, três e quatro algarismos.

Figura 25: Ferramentas Tecnológicas



Fonte: Própria (2020)

> A mediação digital remodela certas atividades cognitivas fundamentais que envolvem a linguagem, a sensibilidade, o conhecimento e a imaginação inventiva. A escrita, a leitura, o jogo e a composição musical, a visão e a elaboração das imagens, a concepção, a perícia, o ensino e o aprendizado, reestruturados por dispositivos técnicos inéditos, estão ingressando em novas configurações sociais. (LEVY, 1998, p. 17).

Mesmo diante das dificuldades que enfrentamos como o distanciamento social e a não possibilidade de aplicação dessas atividades nos laboratórios de informática das escolas, conseguimos informações que mostram que a tecnologia aliada a investigação matemática, torna possível a aprendizagem matemática mais significativa e prazerosa, despertando em nossos discentes o espirito investigativo proposto na BNCC(BRASIL, 2018).

CONSIDERAÇÕES

O momento atual da educação, diante dos resultados mostrados pelos indicadores, principalmente pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB, mostrados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira(BRASIL, 2020), tem-se que são insatisfatórios. Desde 2013 a média nacional não atinge as metas estipuladas para 2ª fase do ensino fundamental, levando em consideração o desempenho em português e matemática. Diante desta realidade, nós como profissionais da educação, devemos repensar nossas propostas de ensino, não com o peso de que a responsabilidade é toda nossa, em detrimento dos resultados, mas com a necessidade de contribuir significativamente. Por mais que seja desafiador, os recursos tecnológicos e cada vez mais acessível (a uma parcela da população), e estão interferindo diretamente nas relações sociais e substancialmente na forma em que nos comunicamos.

No decorrer deste trabalho, procuramos realizar um estudo sobre o uso do SCRATCH no processo de investigação dos números mágicos de Ball, fundamentado no pensamento computacional e no construcionismo. Observamos que o cenário contempla tais habilidades, não explorando simplesmente o processo de memorização dos números mágicos de Ball, e sim instigando o discente a desobrir outros números, além do que é apresentado como exemplo norteador. Sabemos que o processo de ensino e aprendizagem passa transformações, como todo a sociedade, e é necessário apropriar-se das novas ferramentas e metodologias de ensino, diante da realidade em que os estudantes estão inseridos, em um pujante cultura digital.

> Para enfrentar as dificuldades com o ensino de Matemática, mais do que despertar o interesse pelas suas aplicações práticas, é fundamental desvelar sua beleza intrínseca, sua vocação para apreensão dos padrões e das regularidades na natureza, suas relações diretas com os ritmos, com a música, com as artes de modo geral. É preciso compreendê-la como um sistema básico de expressão e compreensão do mundo, em sintonia e em absoluta complementaridade com a língua materna. É necessário pensar e sentir, consumir e produzir, compreender e fruir os temas que estudamos. Como na vida cotidiana, é inevitável deparar com mistérios, com questões complexas demais para certezas ingênuas, tão comum aos muito jovens ou aos muito loucos. Em outras palavras, é preciso reencantar a Matemática. (MACHADO, 2012, p. 13).

O uso do SCRATCH como ferramenta de preparação de objetos matemáticos de estudos, proporciona uma alternativa de ensino, uma dinâmica de possibilidades na construção do saber, pois tem características de uma nova forma de aprender, que predomina do início da elaboração e construção do objeto, acompanha ou realizada pelo docente, e a sua execução ou utilização com estudantes(e demais usuários da plataforma SCRATCH).

A investigação matemática como metodologia de ensino, desperta no discente, a curiosidade, o desejo de entender e resolver de forma autônoma, delinear novas propostas de investigação que vislumbra-se não apenas com um objeto de estudo , mas com um conjunto de saberes que mostram padrões e que precisam ser entendidos.

REFERÊNCIAS

- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto editora, 1994.

- BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018.

- ______.Ministério da Ciência e Tecnologia. **Sociedade da Informação no Brasil**.

- ______.Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Brasília,DF. 2020. Disponível em < https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/ideb/resultados > Acesso em 20/11/2020

- COSTA, Eudes A. **Número de Ball e Sequencia de Fibonacci**. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática. 2020.(aceite,à publicar)

- COSTA, E. A.; SANTOS, R. A. **Números: dos naturais aos reais**. Proceedings do XXIII Semana do IME/UFG, p. 10, 2008.

- COSTA,Eudes A.; MESQUITA, Élis G.**O Número Mágico M**. Revista da Olimpíada -IME - UFG , Nº 9, 2014.

- CUNHA, Helena;OLIVEIRA,Hélia;PONTE,J.P.**Investigações matemáticas na sala de aula**. Lisboa. 1995.

- DEMO, Pedro **Introdução ao ensino da metodologia da ciência.** 2.ed. São Paulo:Atlas, 1987.

- HEFEZ, A. **Iniciação à aritmética. Sociedade Brasileira de Matemática**, 2015. Disponível em: www.obmep.org.br/docs/apostila1.pdf. Acesso em: 28/09/2020.

- ______. Abramo . Elementos da Aritmética. Coleção Textos Universitários. 2006

- IFRAH, G.**Os números:** A história de uma grande invenção. Rio de Janeiro. 1995.

- LEVY,Pierre. **A máquina universo:** criação, cognição e cultura informática. Tradução Bruno Charles Magne. Porto Alegre: Editora ArtMed, 1998.

- LIMA, Márcio R. **Construcionismo de Papert e ensino-aprendizagem de programação de computadores no ensino superior**. UFSJ.2009.Livro Verde. Tadao Takahashi (org.). Brasília, Setembro, 2000.

- MACHADO,Nilson José. **Matemática e educação:** alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6 ed. São Paulo : Cortez, 2012

- NUNES,Sergio C.;SANTOS,Renato P.**O Construcionismo de Papert na criação de um objeto de aprendizagem e sua avaliação segundo a taxionomia de Bloom**.IX Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – IX ENPEC. 2013.

- PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças**. Repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

- ______. Seymour**A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Trad. Sandra Costa. Ed. revisada. Porto Alegre: Artmed, 2008.

- ______.Seymour. **Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas**. Basic Books, Inc., 1980.

- PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática,2012. (Coleção Profmat).

- PÓLYA, G.**How to solve it: A new aspect of mathematical method**. Princeton: Princeton University Press. 1945.

- ______.George**A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro. 1995

- PONTE, E. A. S .**Método de Polya para resolução de problemas matemáticos:** Uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. Instituto Federal de Alagoas. 2019

- ______. João Pedro.**Investigações matemáticas na sala de aula**.Autêntica Editora. Edição do Kindle. 2003.

- ______.João Pedro.;OLIVEIRA,Hélia;BRUNHEIRA,Lina;VARANDAS,José M.**O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Escola Secundária Bramcaamp Freire. 1995.

- ______.João Pedro. **Investigação sobre Investigações Matemática em Portugal** . Grupo de Investigação DIF – Didáctica e Formação - Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. 2003.

- ROQUE, Tatiana. **História da Matemática** - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2005. ZAHAR

- SBC. **Diretrizes para ensino de Computação na Educação Básica**. Disponível em : www.sbc.org.br/educacao/diretrizes-para-ensino-de-computacao-na-educacao-basica . Acesso em 27/09/2020

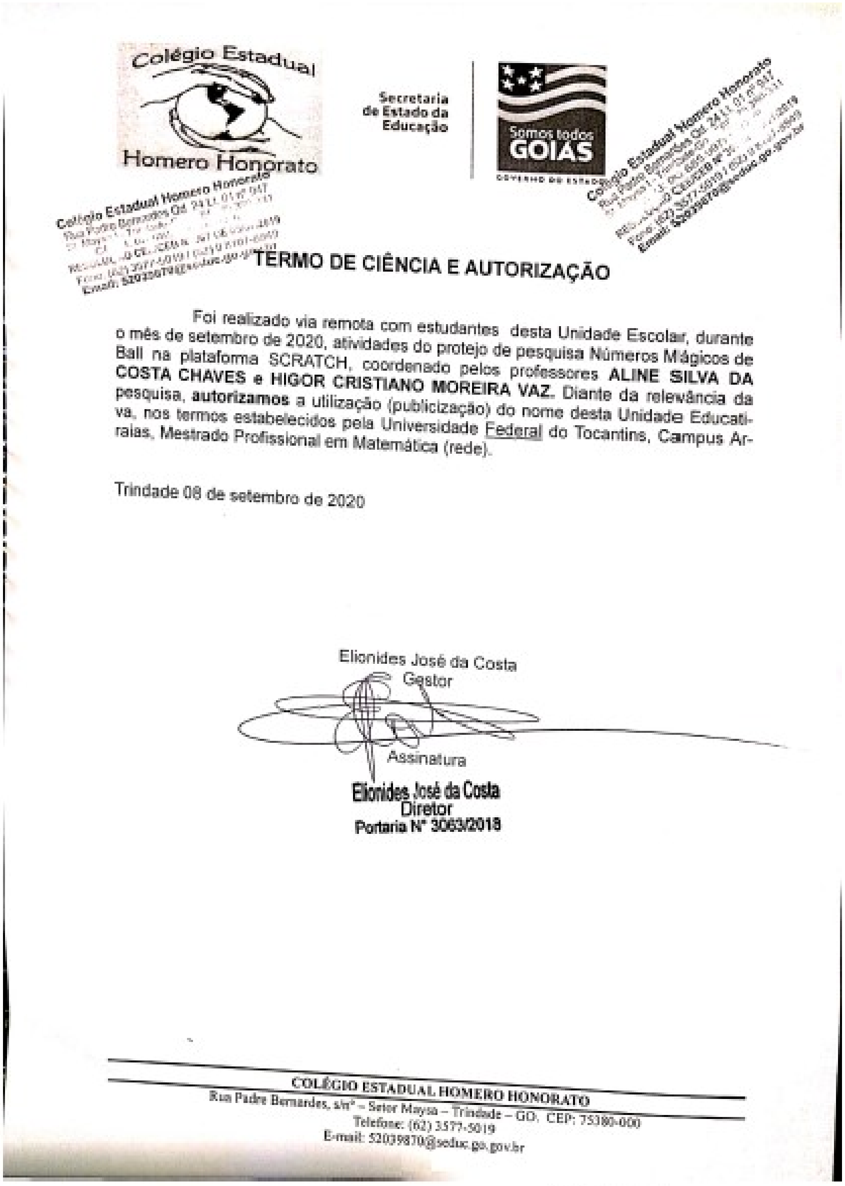
- TANAJURA,Laudelino L. C. ; BEZERRA, ADA A. C. **Pesquisa-ação sob a ótica de René Barbier e Michel Thiollent :** Aproximações e especificidades metodológicas. Universidade Tiradentes - UNIT. 2015.

- WING, J.**Computational Thinking. Communications of the ACM**, vol. 49, no. 3, 2006.

- ZORZAN,Adriana Salete Loss. **Ensino-Aprendizagem:** Algumas Tendências na Educação Matemática. Revista de Ciências Humanas. 2007.

ANEXO

Figura 26: Termo de Ciência e autorização - Colégio Estadual Homero Honorato



Colégio Estadual Homero Honorato

Secretaria de Estado da Educação

Somos todos GOIAS

TERMO DE CIÊNCIA E AUTORIZAÇÃO

Foi realizado via remota com estudantes desta Unidade Escolar, durante o mês de setembro de 2020, atividades do protejo de pesquisa Números Mágicos de Ball na plataforma SCRATCH, coordenado pelos professores **ALINE SILVA DA COSTA CHAVES e HIGOR CRISTIANO MOREIRA VAZ.** Diante da relevância da pesquisa, **autorizamos** a utilização (publicização) do nome desta Unidade Educativa, nos termos estabelecidos pela Universidade Federal do Tocantins, Campus Araias, Mestrado Profissional em Matemática (rede).

Trindade 08 de setembro de 2020

Elionides José da Costa
Gestor

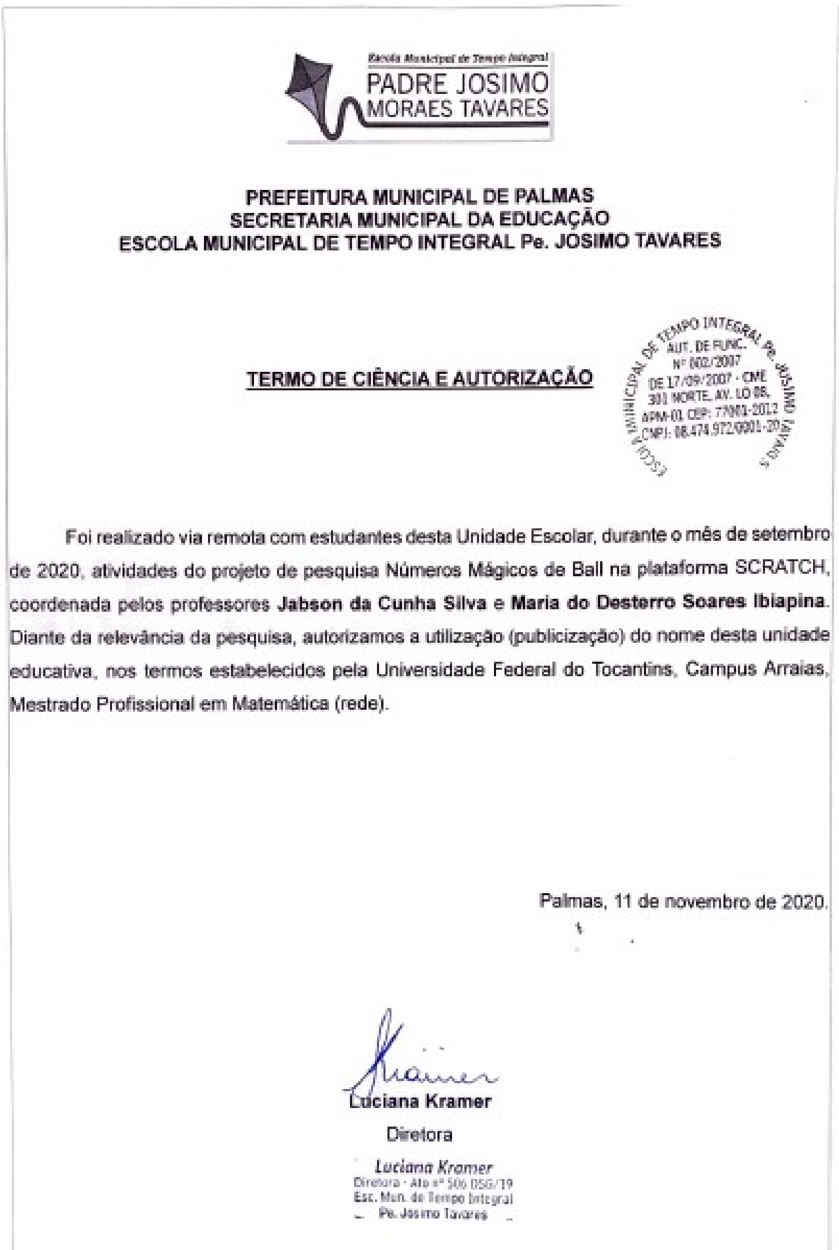
Assinatura

Elionides José da Costa
Diretor
Portaria N° 3063/2018

COLÉGIO ESTADUAL HOMERO HONORATO
Rua Padre Bernardes, s/nº - Setor Maysa - Trindade - GO. CEP: 75380-000
Telefone: (62) 3577-5019
E-mail: 52039870@seduc.go.gov.br

Fonte: Própria (2020)

Figura 27: Termo de Ciência e autorização - Eti. Pe. Josimo Tavares



Escola Municipal de Tempo Integral
PADRE JOSIMO
MORAES TAVARES

PREFEITURA MUNICIPAL DE PALMAS
SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO
ESCOLA MUNICIPAL DE TEMPO INTEGRAL Pe. JOSIMO TAVARES

TERMO DE CIÊNCIA E AUTORIZAÇÃO

ESCOLA MUNICIPAL DE TEMPO INTEGRAL Pe. JOSIMO TAVARES
AUT. DE FUNC.
Nº 002/2007
DE 17/09/2007 - CME
301 NORTE, AV. LO 08,
APM-01 CEP: 77001-2012
CNPJ: 08.474.972/0001-20

Foi realizado via remota com estudantes desta Unidade Escolar, durante o mês de setembro de 2020, atividades do projeto de pesquisa Números Mágicos de Ball na plataforma SCRATCH, coordenada pelos professores **Jabson da Cunha Silva** e **Maria do Desterro Soares Ibiapina**. Diante da relevância da pesquisa, autorizamos a utilização (publicização) do nome desta unidade educativa, nos termos estabelecidos pela Universidade Federal do Tocantins, Campus Arraias, Mestrado Profissional em Matemática (rede).

Palmas, 11 de novembro de 2020.

Luciana Kramer
Diretora

Luciana Kramer
Diretora - Ato nº 506 DSG/19
Esc. Mun. de Tempo Integral
Pe. Josimo Tavares

Fonte: Própria (2020)

Figura 28: Certificado de apresentação do resumo simples

Fonte: Própria (2020)

APÊNDICE

Questionário

Números Mágicos de Ball

Olá estudante, se você encontrou os números mágicos de Ball em (endereço), agora pedimos que nos ajude respondendo o questionário abaixo.

Não há necessidade de identificar.

1. Explique com suas palavras como podemos encontrar um número reverso. Escreva três exemplos.

2. Um número pode ser igual ao seu reverso ? Justifique sua resposta ou apresente três exemplos.

3. Explique com suas palavras como podemos encontrar os números mágicos de Ball.

4. (a) Qual o número mágico gerado por números com dois algarismos? (b) Qual o número mágico gerado por números com três algarismos? (c) Esses números são múltiplos de quais números?

5. Podemos encontrar os números mágicos de Ball gerados por números com 1 algarismo?

6. Tem outra situação que não podemos encontrar os números mágicos de Ball.

7. Sua escola, ou professor(a), usa ferramentas tecnológicas com intuito de auxiliar na investigação matemática?

8. Aqui você pode colocar qualquer informação além das questões anteriores que você observou na geração dos números mágicos de Ball.

Quer saber mais sobre os números mágicos de Ball? Vejam na Revista da Olimpíada de Matemática. https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Eudes9.pdf