UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

VILMAR COSTA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MEDIADA PELO GEOGEBRA

ARRAIAS - TO
2020

VILMAR COSTA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MEDIADA PELO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa

ARRAIAS - TO

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586p Silva, Vilmar Costa .
Uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas usando a resolução de problemas mediada pelo GeoGebra. / Vilmar Costa Silva. – Arraias, TO, 2020.
84 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2020.
Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Funções. 2. GeoGebra. 3. Resolução de Problemas. 4. Ensino. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

VILMAR COSTA SILVA

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS USANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MEDIADA PELO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins-UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 11 de dezembro de 2020

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa - UFT/ProfMat - Arraias
Orientador-presidente

Profª. Drª. Keidna Cristiane Oliveira Souza - UFT/ProfMat - Arraias
Examinadora

Prof. Dr. Ivo Pereira da Silva - UFT/Matemática - Arraias
Examinador

Arraias - TO
2020

Dedico esse trabalho aos meus pais, Maria Genezi e Lucimã, que guiaram meus primeiros passos e com amor me ensinaram a ter respeito, seriedade e humildade. Aos meus irmãos, irmãs, sobrinhos, sobrinhas, amigos e amigas pela amizade e companheirismo.

Agradecimentos

À minha família e amigos, que me apoiaram e entenderam minhas escolhas.

Ao Professor Dr. Eudes Antonio da Costa, que me orientou desde o início, para este trabalho de conclusão do curso, com conselhos e desafios que fizeram a diferença.

Aos meus queridos e eternos professores do Colegial, Gilvan Peixoto, Rosilene Costa e Taianne Roberta, por despertar a curiosidade sobre os enigmas e a beleza da matemática, incentivando a ser professor e cultivando o prazer de aprender.

Aos professores do Curso de Mestrado da Universidade Federal do Tocantins Campus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Dra. Alcione, Me. Dirlei, Dr. Elis Gardel, Ma. Gisele, Dr. Kaled, Dra. Keidna e Dr. Thiago por acreditarem no projeto e pela dedicação a nossa turma.

Aos meus colegas de mestrado, Amanda, Céliton, Daniel, Deiny Dhuly, Ducianyr, Drielle, Indiara, Lucio, Rafael, Rodrigo pela companhia e por tornarem alguns momentos mais leves e em especial aos amigos Jabson da Cunha e Valton Gomes que com suas amizades e companheirismo me incentivaram e deram forças para continuar à estudar.

Aos meus amigos da Universidade Federal do Tocantins, em especial Dr. Ivo Pereira pela amizade e companheirismo.

À Universidade Federal do Tocantins, que ofereceu a oportunidade. Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

Saber muito não lhe torna inteligente. A inteligência se traduz na forma que você recolhe, julga, maneja e, sobretudo, onde e como aplica esta informação. (Carl Sagan)

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo apresentar atividades didáticas para professores ensinarem Funções Exponenciais e Logarítmicas no 1º do Ensino Médio, utilizando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino mediada pelo aplicativo computacional GeoGebra. A utilização da Metodologia de Resolução de Problemas (MRP) e do GeoGebra como alternativa de ensino na discussão dos conceitos referentes ao conteúdo escolhido é justificado e proposto pelos documentos oficiais da educação, buscando competências, habilidades e relações entre conceitos e procedimentos. Para o desenvolvimento da pesquisa foi necessário realizar uma pesquisa bibliográfica,amparada nos eixos categorizados sobre a MRP. Tratamos das relações entre as propriedades das expressões algébricas e das funções com suas respectivas representações gráficas. Enfatizamos que estas representações devem ser exploradas pelo docente de forma articulada pela tecnologia. Os resultados da pesquisa apontam que não se pode mecanizar o ensino da MRP e que a condução do estudante, por intermédio de perguntas podem torná-los independentes para a Resolução de Problemas.

Palavras-chaves: Funções; GeoGebra; Resolução de Problemas; Ensino de Matemática.

Abstract

This research aims to present didactic activities for teachers to teach Exponential and Logarithmic Functions in the 1st of High School, using Problem Solving as a teaching methodology mediated by the computational application GeoGebra. The use of the Problem Resolution Methodology (MRP) and GeoGebra as a teaching alternative in the discussion of concepts related to the chosen content is justified and proposed by the official education documents, seeking competences, skills and relationships between concepts and procedures. For the development of the research it was necessary to carry out a bibliographic search, supported by the categorized axes about the MRP. We deal with the relationships between the properties of algebraic expressions and functions with their respective graphic representations. We emphasize that these representations must be explored by the teacher in an articulated way by technology. The results of the research show that the teaching of MRP cannot be mechanized and that the student's conduct, through questions, can make them independent for problem solving.

Key-words: Functions; GeoGebra; Problem Solving; Math Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
dB	Decibel
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
MEC	Ministério da Educação
MRP	Metodologia de Resolução de Problemas
NIS	Nível de Intensidade Sonora
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
OMS	Organização Mundial da Saúde
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TIC	Tecnologias da informação e Comunicação
UPE	Universidade de Pernambuco
UEPA	Universidade do Estado do Pará

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho abordaremos as relações entre as propriedades das expressões algébricas e das Funções Exponenciais e Logarítmicas, juntamente com suas respectivas representações gráficas. Estas representações gráficas precisam ser discutidas pelo docente de forma articulada, e é importante, sempre que possível, fazer referência e explicitar as relações entre elas. Neste processo as tecnologias serão aliadas para estabelecer claramente estas articulações.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) normatiza que a matemática no Ensino Médio tem papel formativo, pois contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e para a aquisição de atitudes. A matemática possui caráter instrumental capaz de ser aplicada às diversas áreas do conhecimento e deve ser visto também como ciência, com suas características estruturais específicas. Nesta perspectiva, considerando a competência específica 1 e 2 do Ensino Médio no ensino da matemática a BNCC (BRASIL, 2018) espera que os educandos tenham habilidades de

> Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais e investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (BRASIL, 2018, p. 532 – 534)

As noções de função abordadas por meio de procedimentos algébricos, simplesmente como "fórmula", induzem os estudantes a desenvolverem uma concepção confusa. Ao ensinar a matemática buscando relacionar e articular representações numéricas, algébricas e gráficas na Resolução de Problemas são caminhos que se pode chegar ao desenvolvimento das habilidades exigidas pela BNCC (2018).

Temos neste estudo o objetivo de apresentar atividades didáticas [1] para professores ensinarem Funções Exponenciais e Logarítmicas no 1º do Ensino Médio, utilizando a

[1] As atividades didáticas constituem meios de organização do trabalho pedagógico em sala de aula, que concretizam um conjunto de procedimentos específicos, próprios da situação de ensino-aprendizagem e servem como mediadoras da relação entre os estudantes e um objeto de conhecimento. (MONTEIRO, [s.d.])

Resolução de Problemas como metodologia de ensino mediada pelo aplicativo computacional GeoGebra como ferramenta de ensino[2]. Para isto realizaremos um estudo referente ao conteúdo proposto, faremos caracterizações, traremos teoremas e propriedades associadas aos exemplos. Salientamos que sustentados na BNCC (BRASIL, 2018) buscaremos as competências e as habilidades nela declarada.

Desta maneira buscaremos respostas referente a como construir uma proposta de atividades didáticas que engloba o contexto relatado. Podemos construir esta proposta embasados na MRP e TIC de forma articulada e vinculada a aspectos do cotidiano ou interdisciplinares. Além disso, é fundamental observamos que a ideia não é simplesmente usar o GeoGebra para verificar o que está certo ou errado nas representações gráficas das funções. Em lugar disso, a visualização no GeoGebra deve ser explorada para motivar reflexões e conjecturas sobre as funções, que devem ser verificadas por meio de ferramentas matemáticas.

No tocante aos aspectos metodológico esse estudo é caracterizado como pesquisa bibliográfica que de acordo com Gil (2002) é o tipo de pesquisa desenvolvida tendo como base materiais já elaborados, possuindo como principais fontes de consulta livros e artigos científicos. Ademais possui uma abordagem qualitativa, isso pois, destacamos o processo de resolução de cada situação e não o resultado final, mas amparada de eixos categorizados sobre a MRP.

No segundo capítulo abordamos a MRP tendo em vista as ideais defendidos por pesquisadores como Dante (1991), Polya (1995) e Onuchic (2013), além dos documentos oficiais da educação brasileira em relação a Resolução de Problemas. Nesse capítulo também abordamos caracterizações referente ao uso das TIC no ensino da matemática, especialmente a ferramenta GeoGebra.

Já capítulo 3, explicitamos conceitos relacionados as Funções Exponenciais e Logarítmicas, descrevemos um breve contexto histórico, apontamos definições, propriedades e exemplos, e mediamos as representações gráficas pelo GeoGebra e destacamos os seus processos de construção.

[2]Ferramenta de ensino é uma facilitadora do ensino-aprendizado, com a função de contribuir para aprendizagem efetiva do educando.

Assim, o capítulo 4, possui como destaque a proposta das atividades didáticas, orientados pelas concepções de Polya (1995) no tocante a MRP mediada pelo GeoGebra. As atividades vêm a contribuírem no ensino da matemática, tendo em vista a utilização de diversas abordagens de aplicação da matemática, intermediada pela MRP e TIC.

Nesse ultimo capítulo justificamos a utilização da MRP e das TIC como alternativa de ensino na discussão dos conceitos referentes ao conteúdo escolhido é proposto pelos documentos oficiais da educação, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) apresentou como o ato de inquirir acerca de qualquer cenário ou aspecto a ser ensinado e atualmente a BNCC (BRASIL, 2018) que normatiza competência como a compreensão das relações entre conceitos e procedimentos de funções, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos e desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

A motivação deste estudo surgiu a partir das experiências e curiosidades particulares acerca da temática e também ao verificamos os relatos da Tenente (2020) acerca dos dados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) que é um indicador de qualidade deste nível de ensino. Pois, o IDEB 2019, mostra que o nível de qualidade do Ensino Médio brasileiro continua abaixo do esperado pelo Ministério da Educação (MEC). Embora tenha havido avanços em relação a 2017, o país não atinge a meta nessa etapa de ensino desde 2013. Ao analisamos as médias nacionais do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), um dos componentes do IDEB, concluímos que em matemática os estudantes são capazes de resolver operações básicas, reconhecer proporções, associar uma tabela a um gráfico e fazer progressões aritméticas. Mas, não conseguem, em geral, determinar probabilidade, calcular porcentagem, resolver uma expressão algébrica ou analisar formas geométricas e representações gráficas.

2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O GEOGEBRA

Neste capítulo apresentaremos características da MRP, proposta por Polya (1995) e amplamente discutido por autores como Dante (1991), Fiorentini (1994), Echeverría e Pozo (1998), Onuchic e Allevato (2004), Pinto e Soares (2011) e Onuchic (2013). Também apontaremos caraterísticas do uso das TIC, em particular da ferramenta GeoGebra, abordado por Borba e Penteado (2003), Costa e Gomes (2006), Brandt e Montorfano (2008), Caridade (2012) e Giraldo et al. (2012). Além de ser articulada pelos documentos oficiais da educação como os PCN (BRASIL, 1998) e a BNCC (BRASIL, 2018) que destacam a importância da Resolução de Problemas e das TIC para o ensino de matemática.

Na contemporaneidade há necessidade de que os estudantes obtenham competências e habilidades que lhes proporcionem a construção de novos conhecimentos sobre a cultura, ciência, tecnologia e sociedade, pois deste modo tornam-se capazes de intervir de maneira crítica e criativa para o desenvolvimento da humanidade, almejando uma melhoria na sua qualidade de vida.

Então, segundo Pinto e Soares (2011) é preciso possibilitar que os estudantes sejam capazes de enfrentar situações dentro de contextos diferentes, façam com que busquem construir novas habilidades, por exemplo, resolver e elaborar problemas com Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas nos quais sejam necessários para compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas em diversos contextos, conforme a BNCC (BRASIL, 2018) apregoa.

2.1 Metodologia de resolução de problemas

Nos Estados Unidos na década de 1960, George Polya (1887 – 1985) no livro “A arte de resolver problemas” desenvolve e defende a MRP como alternativa para o ensino de matemática. Conforme estudos produzidos por Fiorentini (1994), haviam experiências e estudos similares anteriores desenvolvidos por John Dewey (1859 – 1952), entre 1896 e 1904, nessas experiências as crianças estudavam por intermédio de projetos que reproduziam as situações socioeconômicas, sugerindo que essa orientação pedagógica poderia colaborar para o desenvolvimento do pensamento crítico das crianças, capacitando-as para que contribuam no aperfeiçoamento de uma sociedade democrática. Além disso, a respeito da MRP, temos que:

> [...] Significava apresentar problemas e, talvez, incluir uma técnica de resolução específica. Uma atenção mais moderna ao desenvolvimento de habilidades nos alunos em resolução de problemas, nos livros-texto, apresenta-se colorida, com desenhos, chamando a atenção para fatos da vida real, mas sempre com alguém resolvendo o problema e deixando-se uma lista com problemas semelhantes para serem resolvidos. (ONUCHIC, 2013, p. 4)

Sendo assim, a Resolução de Problemas possui sua importância, pois trazem ideias novas, impulsionando os diversos ramos da matemática. Segundo Polya (1995) é importante que os problemas sejam provocativos, pois quando o estudante é desafiado, suas emoções de entusiasmo na busca de solução são despertadas.

Observamos que geralmente a Resolução de Problemas é pensada e resumida em resolver os problemas que estão no livro didático, sem a preocupação com a qualidade, se são problemas fáceis, médios, difíceis, se envolvem situações desafiadoras e relacionadas com o cotidiano ou até mesmo na perspectiva da interdisciplinaridade. Agora, considerando o modo de encontrar a solução devemos ressaltar que a Resolução de Problemas possibilita diversos caminhos, mostrando-lhes que não existe um único modelo, ideal e infalível, destacando que

> [...] a Resolução de Problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo. (DANTE, 1991, p. 59)

Neste aspecto, o docente pode trabalhar com tentativas e erros dos educandos, observando o caminho usado para chegar à solução do problema. Essa observação servirá para compreender o seu raciocínio e prepará-lo as discussões em torno da resolução. A respeito da condução da resolução do problema o docente deve buscar aprimorar nos estudantes:

> O espírito solucionador e a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Por meio desta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático. qualquer (POLYA, 1995, p. 03)

Assim, para resolver um problema, é necessário levarmos em consideração certas etapas que podem beneficiar a compreensão dos argumentos matemáticos, fazendo que esse procedimento seja visto como um conhecimento capaz de ser apreendido pelos estudantes. Antes de passar para etapas definidas por Polya (1995), é importante ressaltar que nenhuma tem o papel de fórmula mágica ou regra que deve ser seguida em sequência de etapas estabelecidas, sem a necessidade de voltar e rever observações necessárias para o continuamento da ação, essas atividades dependerão do trabalho a ser realizado em cada turma considerando a habilidade de comunicação, expressão oral e escrita, de cálculo e raciocínio lógico, favorecendo o desenvolvimento do pensar, levando o educando a conhecer, questionar, transformar, produzir e compartilhar ideias.

Agora, apresentaremos quatro etapas relevantes da MRP e que iremos utilizar para elaboração das atividades didáticas pertencente ao capítulo 3, segundo perspectivas de Polya (1995, p. $4-10$) :

1. Compreensão do problema, nesta fase o autor apresenta que para compreender um problema é necessário estimular o educando a fazer perguntas: O que é solicitado? Quais são os dados? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a solução? Faltam dados? Que relações podem estabelecer para encontrar os dados omitidos? Que fórmulas e/ou algoritmos posso utilizar?

2. Construção de uma resolução, momento para estimular o educando a buscar conexões entre os dados e o que é solicitado, estimulando, também, que pensem em situações similares, a fim de que possam estabelecer um plano de resolução, definindo prioridades e, se necessário, investigações complementares para resolver o problema;

3. Execução escolhida, é o momento de executar o plano idealizado. Para que o educando obtenha sucesso, deve ser estimulado a realizar cada procedimento com muita atenção, estando atento a cada ação desenvolvida, verificando cada passo. O Estudante também deve ser estimulado a mostrar que cada procedimento realizado está correto, possibilitando a afirmação de seu aprendizado e a comunicação de sua produção;

4. Revisão da solução, é um momento muito importante, pois propicia uma depuração é uma abstração da solução do problema. A depuração tem por objetivo verificar os procedimentos utilizados, procurando simplificá-los ou, buscar outras maneiras de resolver o problema de forma mais simples. A abstração tem por finalidade refletir sobre o processo realizado procurando descobrir a essência do problema e do método empregado para resolvê-lo, de modo a favorecer uma transposição do aprendizado adquirido neste trabalho para a resolução de outras situações-problema.

Nos PCN (BRASIL, 1998) indicava a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática e discutem caminhos para ensinar matemática, destacando-se, entre outras, a importância das TIC. Desde modo, formar estudantes criativos e versáteis, capazes de entender o processo como um todo, dotados de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe e utilizar diferentes tecnologias e linguagens. Ainda neste contexto apontava que:

> [...] Os alunos, confrontados com situações-problema, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 1998, p. 52)

Atualmente, o processo de elaboração de problemas a BNCC (BRASIL, 2018) recomenda que os estudantes desenvolvam a capacidade de identificar possibilidades de utilização da matemática para resolver problemas, empregando conceitos, procedimentos e resultados para conseguir soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações, fazendo uso da dedução de propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras.

Na orientação da BNCC (BRASIL, 2018) relativo a Resolução de Problemas são estabelecidas as seguintes concepções, nas competências específicas de linguagens para o Ensino Fundamental, no item 6, quando aborda-se do letramento matemático os estudantes deste referido ano escolar ao trabalharem com a Resolução de Problemas devem:

> Compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares), para se comunicar por meio das diferentes linguagens e mídias, produzir conhecimentos, resolver problemas e desenvolver projetos autorais e coletivos. (BRASIL, 2018, p. 65)

Agora, na competência específica 3 do Ensino Médio que refere-se a Resolução de Problemas no ensino da matemática a BNCC (BRASIL, 2018) espera que os educandos tenham competência de

> [...] identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada, no entanto, a Resolução de Problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação. (BRASIL, 2018, p. 535)

Contudo, para Polya (1995) e Onuchic (2013) a MRP possibilita que os estudantes utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. Deste modo, proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico, enfrentamento de novas situações e conhecimento de aplicações da matemática.

Agora, pensando no ensinar matemática, Pozo e Echeverría (1988) indica que uma das formas de promover o ensino aos estudantes é por intermédio da utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino. A metodologia de ensino pode ser entendida, como um "conjunto de procedimentos didáticos, representados por seus métodos e técnicas de ensino"(NÉRICE, 1987, p. 284), esse conjunto de métodos são utilizados com o intuito de alcançar objetivos do ensino, e deve ser trabalhada com a

> [...] apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes.(POZO; ECHEVERRÍA, 1988, p. 09)

Adotaremos que a MRP desenvolvida na prática educativa da matemática, definida por Pinto e Soares (2011), e é a partir deles que o estudante é envolvido em situações da vida real, motivando-o para o desenvolvimento do modo de pensar matemático. O uso da MRP como ensino requer dos docentes e dos discentes novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula, dentre essas características destacam-se que:

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir. (ONUCHUC; ALLEVATO, 2004, p. 82)

Algumas orientações de Dante (1991) a respeito do desenvolvimento de atividades em relação a MRP, uma delas é trabalhar com todos os estudantes de uma mesma turma, apresentando um problema desafiador, real e que não seja resolvido diretamente por um algoritmos. O autor recomenda que deva ser dado um tempo razoável para que os educandos leiam e compreendam o problema. Agora, supondo que a maioria dos estudantes solucionaram o problema, o passo seguinte do docente é organizar a apresentação do processo obtido, explicando o que fizeram e como fizeram, e por que a sua estratégia funcionou ou não. O docente deverá registrar as sugestões dos educandos, pois pode aparece diferentes forma de resolver o mesmo problema, e é interessante explorar cada raciocínio, dado que é uma maneira de incentivar os discentes a sempre tentar vários métodos.

A BNCC (BRASIL, 2018) destaca que as atividades com aplicativos computacionais dinâmicos que inter-relacionem movimento e posição podem também promover o desenvolvimento dessas ideias. Por vivermos em um mundo conectado com celulares às mãos, aparelhos de geolocalização, TVs a cabo, câmeras de vigilância, o estudo do movimento e posição tem muitas finalidades em diversas áreas. Considerando isto, levantaremos na próxima seção abordagens e conceitos relacionadas ao aplicativo computacional GeoGebra como ferramenta de ensino de matemática.

2.2 As TIC e o ensino de matemática

O PCN (BRASIL, 1998, p. 41) alertava que o impacto da tecnologia na vida de cada individuo iria exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação dos saberes e das formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matematicamente que devem ser desenvolvidas ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequações das tecnologias em diferentes situações. Neste sentido, a BNCC (BRASIL, 2018) apregoa a importância do recurso tecnológico digital e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa do Ensino Fundamental.

Concebendo as TIC no ensino da matemática, perante as concepções de Giraldo et al. (2012) vemos a existência de aplicativos, recursos ou ferramentas computacionais nos quais os estudantes podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matematicamente", ou seja, os estudantes fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. São características desses aplicativos: Conter um certo domínio de saber matemático; oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático (numérica, algébrica, geométrica) e permitir a manipulação dos objetos que estão na tela.

A BNCC (BRASIL, 2018) ao assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, propõe ações como:

> Selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender; criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem. (BRASIL, 2018, p. 9)

Para o estudo das funções existe uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o discente a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução. Referente as TIC temos que:

> [...] À medida que a tecnologia informática se desenvolve, nos deparamos com a necessidade de atualização de nossos conhecimentos sobre o conteúdo ao qual ela está sendo integrada. Ao utilizar uma calculadora ou um computador, um professor de matemática pode se deparar com a necessidade de expandir muitas de suas ideias matemáticas e também buscar novas opções de trabalho com os alunos. Além disso, a inserção de TI no ambiente escolar tem sido vista como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade. (BORBA; PENTEADO, 2003, p. 64 – 65)

Certamente, o uso das TIC como ferramenta de ensino podem ser estimulante, proporcionando ao estudante argumentações e conjecturas sobre as atividades que podem realizar, pois o trabalho com mídias tecnológicas proporcionam alternativas de ensinar. Costa e Gomes (2006) já alertavam que o emprego das tecnologias no ambiente escolar propiciavam aos docentes e discentes a oportunidade de conhecerem e viajarem por intermédio das plataformas tecnológicas remota ou ambientes virtualizados por espaços e situações desconhecidas, de trocarem ideias e experiências, aumentando assim o desempenho do estudante.

O mundo está em processo de modernização, antes a escola caminhava a passos lentos no desenvolvimento do ensino mediado por tecnologia, no entanto, o momento atual contrária este cenário, pois a comunidade escolar necessita efetivamente da utilização das TIC como ferramenta de ensino, diante dos desafios e imprevistos impostos pela pandemia causada pelo novo coronavírus. Assim, as TIC está sendo uma alternativa imediata para enfrentamento do quadro, deste modo podemos considerar que estamos numa crescente evolução do uso desta intercorrência no processo educacional.

Na utilização das TIC para o ensino da matemática, a escolha de um aplicativo torna um fator que determina a qualidade do ensino. É com o aproveitamento de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está fazendo com que o uso da tecnologia como alternativa do ensino de matemática torne-se interessante.

2.3 GeoGebra como ferramenta de ensino

Conforme, Brandt e Montorfano (2008) o GeoGebra (conjunção das palavras Geometria e Álgebra), foi criado nos Estados Unidos em 2001 por Markus Hohenwarter da Flórida Atlantic University. O aplicativo computacional é livre e oferece uma abordagem dinâmica para o ensino de vários temas matemáticos, desenvolvendo interações que propiciam o ensino em diversos níveis, partindo do básico até o avançado. É escrito no ambiente computacional JAVA e disponível em português, o GeoGebra é uma multiplataforma e, portanto, pode ser instalado em computadores com sistemas operacionais *Windows*, *Linux* e *Mac OS* ou manipulado de modo direto na internet pelo link <*https://www.geogebra.org/m/h7Vq2G4g*>. Além disto, encontramos disponível para download o aplicativo do programa para Smartphones e tablets.

Acerca dos representações gráficas dinâmicos que articula geometria e funções, Giraldo et al. (2012) defende que o GeoGebra abrange recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos e cálculos simbólicos em um único ambiente, permitindo que aconteça construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos entre outros, nele é possível introduzir funções e modificar todos esses objetos dinamicamente mesmo após a conclusão da construção. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas na sua forma explícita.

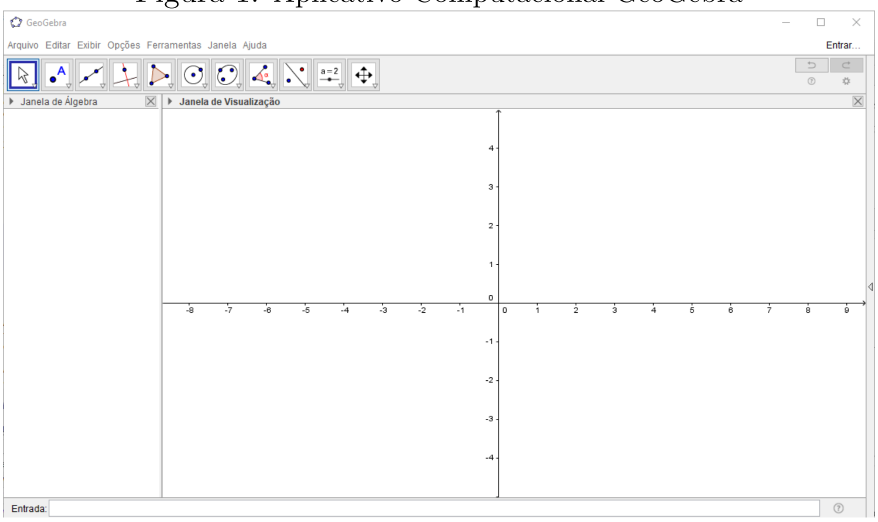
Com GeoGebra podemos construir representações gráficas das funções e figuras geométricas com grande facilidade e rapidez. A respeito do uso do GeoGebra, temos que é proveito selecioná-lo para:

> [...] O estudo das funções afim, exponencial e logarítmica, visto possuir as ferramentas necessárias para a exploração destes conteúdos programáticos, e de uma forma geral os alunos gostaram de trabalhar com este programa. Com esta ferramenta, os alunos tiveram oportunidade de construir o seu próprio conhecimento de uma forma agradável e enriquecedora. (CARIDADE, 2012, p. 957 – 958)

Visto que Giraldo et al. (2012) declara que o GeoGebra reúne recursos de geometria dinâmica, álgebra e cálculo em um mesmo programa, e com o mesmo grau de importância.

Do ponto de vista da geometria, ícones em uma barra de ferramentas localizada na parte superior do aplicativo permitem a construção dinâmica de diversos objetos geométricos por meio da manipulação do mouse do computador. Do ponto de vista da álgebra, um campo de entrada localizado na parte inferior do aplicativo permite a digitação de equações e coordenadas para a construção desses mesmos objetos geométricos. No GeoGebra, uma expressão na janela de álgebra a esquerda do aplicativo corresponde a um objeto na janela de visualização geométrica a direita do aplicativo, e vice-versa, conforme a Figura 1.

Figura 1: Aplicativo Computacional GeoGebra



Fonte: Própria (2020)

Além das construções via campo de entrada ou barra de ferramentas, o GeoGebra permite a manipulação e formatação dos objetos construídos. Considerando os aspectos de manipulação abordados, ainda podemos destacar que a ferramenta tem a utilidade didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, os atributos geométricos e algébricas de um mesmo objeto, o estudante pode ver, tocar e experimentar a matemática, em vista disto, é uma ferramenta que pode contribuir de forma eficaz ao ensino de diversos tópicos matemáticos. Um dos propósitos do recurso computacional é conceder maior incentivo aos estudantes proporcionando a conquista da aprendizagem.

Podemos concluir que o GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que pode ser utilizado como ferramenta que apresenta aos estudantes possibilidades de vivenciarem os processos criativos, estabelecer aproximações, juntar significados anteriormente desconexos e ampliar a capacidade de interlocução por meio das diferentes linguagens que tais recursos propiciam. Pensando desta forma que utilizaremos o GeoGebra como ferramenta de ensino para desenvolver as abordagens e os conceitos matemáticos nos capítulos seguintes.

Com esse arcabouço referencial apresentaremos a Funções Exponencial e Logarítmica, e proporemos atividades didáticas utilizando MRP, ambas mediada pela ferramenta GeoGebra, com isto temos a possibilidade de propor ideias de representação, comunicação, investigação e compreensão. Para o desenvolvimento dessa proposta consideramos as concepções de Polya (1987) no qual apregoa que a base de um bom ensino, ganha forma na estrutura do tríade “tenha interesse por sua matéria”; “conheça sua matéria”; “procure ler o semblante dos seus alunos, procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades, ponha-se no lugar dele”.

Agora, no capítulo a seguir, descreveremos fatos da história, definições, exemplos, características e aplicações referente a Funções Exponenciais e Logarítmicas.

3 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Neste capítulo descreveremos um breve contexto histórico referente as funções, exponencial e logaritmo, definições, propriedades, exemplos e características das funções, Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas mediadas pela ferramenta GeoGebra.

3.1 Um breve contexto histórico

Nesta seção descreveremos um breve contexto histórico referente as funções, exponencial e logaritmo segundo Ávila (2001), Vázquez et al. (2008), Eves (2011), Carvalho e Roque (2012), Boyer e Merzbach (2012), Roque (2012).

As necessidades do homem, com os mais variados propósitos, fizeram dele, no decorrer dos tempos, um estudioso dos problemas naturais, das suas causas e dos seus efeitos. Essa busca nos fez perceber que tudo e todos estão relacionados de tal forma que nenhum efeito tem origem numa única causa. Na antiguidade a noção de função aparece como uma dependência de valores de forma intuitiva, pois segundo Boyer e Merzbach (2012) ainda na Idade da Pedra, os homens a partir de suas experiências cotidianas, começaram a perceber a possibilidade de realizar analogias e relações de semelhanças entre conjuntos de objetos variados, estabelecendo uma correspondência entre eles, geram o processo de contagem.

Já num período posterior, podemos destacar os povos gregos e babilônios como precursores da dependência funcional. E Vázquez et al. (2008) declaram que ambos os povos utilizavam tabelas de funções relacionais, todavia, pela maneira peculiar com a qual os gregos expressavam seus pensamentos. Os babilônios, na compilação de tabelas expressavam a ideia de dependência de quantidades que associavam valores por meio de operações de multiplicações, divisões, potenciações e radiciações, demonstrando que o conceito de função já estava implicitamente surgindo.

Agora, para entendermos a evolução do conceito de função até a caracterização atual, devemos nos apoiar ao fato de que o início de sua elaboração precede a própria invenção do cálculo. Da Antiguidade à Idade Média, os estudos das associações entre as grandezas físicas e os fenômenos naturais constituíram, de fato, a força que impulsiona diversas discussões matemáticas que levaram ao que hoje se tem como conceito de função.

Nicolau Oresme ($1323 - 1382$), no século XIV, propõe em sua chamada Teoria de Latitude de Formas, segundo Boyer e Merzbach (2012) desenvolve o que hoje é considerada a representação gráfica de uma função: começou a questionar sobre a possibilidade de traçar uma figura da maneira como as coisas variam e foi o descobridor da curvatura da luz por meio da refração atmosférica, muito embora o crédito a esse feito não tenha sido dado a ele.

A respeito das bases da representação gráfica que usamos hoje nomeada de Geometria Analítica foram desenvolvidas por outros grandes nomes da matemática como René Descartes ($1596 - 1650$) e Pierre de Fermat ($1601 - 1665$). Estes, utilizando das descobertas do século XVI e aplicando recursos da nova álgebra à geometria, segundo Boyer e Merzbach (2012) foram quem apresentaram o método analítico para ser introduzido no trabalho das funções. A partir deles, para analisar as relações entre as variáveis conectadas com uma curva, foram utilizadas equações. Foi Descartes quem primeiro afirma essa descrição e desde então o método analítico de tratar as funções jamais deixou de ser utilizado.

Segundo Eves (2011), Isaac Newton ($1642 - 1727$) introduziu o termo "variável independente", e mostrou que uma função poderia ser descrita como uma série de potência. Com seu método de fluxos, em que uma curva é gerada pelo movimento contínuo de um ponto, possibilitou que a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passassem a serem quantidades variáveis. Acerca das contribuições para o conceito atual da função, temos que:

> A palavra "função"foi introduzida por Leibniz ($1646 - 1716$) em 1673, justamente para designar qualquer das várias variáveis geométricas associadas com uma dada curva. Só aos poucos é que o conceito foi-se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos de outras. Mas, mesmo assim, por todo o século XVIII, o conceito de função permaneceu quase só restrito à idéia de uma variável (dependente) expressa por alguma fórmula em termos de outra ou outras variáveis (independentes). (ÁVILA, 2001, p. $99 - 100$)

Muito embora todos os nomes citados até aqui tenham trazido importantes e significativas contribuições para o conceito de função e para a história da evolução da própria matemática enquanto ciência, segundo as concepções de Carvalho e Roque (2012) podemos assegurar que um dos matemáticos que mais contribuiu para essa evolução foi Leonhard Euler (1707 − 1793). Visto que a noção de função já havia deixado as representações geométricas e mecânicas típicas da idade média, para serem representadas por expressões analíticas, característica principal da fase moderna. A Euler também atribui a distinção entre função algébrica e transcendente, e apresentou pela primeira vez a notação $f(x)$ usada para uma "dependência"da variável x.

Segundo Roque (2012), a definição formal de função, atualmente oferecida na escola, segue o padrão bourbakista, sendo Bourbaki um pseudônimo adotado por uma coligação de matemáticos franceses dos anos 1930 cujo objetivo era elaborar livros contemporâneos sobre todos os ramos da matemática. Ainda segundo Roque (2012), podemos conceber funções de outras formas, ao longo da história, sejam por exemplos físicos, curvas ou expressões analíticas. Mostrando assim que, isoladamente de seu contexto histórico, durante nosso aprendizado de matemática, a definição de função e as funções que conhecemos não convergem.

Considerando esta evolução apresentada é que nos permite chegar ao que hoje é conhecido como função. Concluir que inúmeras são as formas de conceituar, mas sem perder a essência de que a função é uma regra que indica como associar cada elemento de um conjunto, chamado domínio, a um único elemento de outro conjunto, chamado contradomínio.

Como observamos pelo trajeto histórico apresentado até aqui, principalmente entre a antiguidade e a idade média, a matemática teve sua evolução mesclada à evolução de outras ciências. Em verdade, também nos séculos XVI e XVII, já na idade moderna, houve uma grande expansão do conhecimento científico e tecnológico de diversas áreas como Geografia, Cartografia, Astronomia e Física, que muito contribuiu para que conceitos e teorias matemáticas surgissem e fossem então estabelecidos.

Já Carvalho e Roque (2012) aponta que os povos babilônicos e gregos destacaram por sua excelsa sabedoria nas ciências exatas em tempos tão primitivos. Em verdade, diante dos mínimos artifício que tinham fizeram grandes e importantíssimas descobertas que influenciaram a construção de inúmeros trabalhos em diversas áreas de conhecimentos nos séculos que se seguiram. Uma das grandes constatações de suas descobertas que aqui citamos como colaborativas a posterior conceituação da Função Exponencial foi a utilização de um sistema sexagesimal, cuja origem é incerta.

Considerando este cenário pode-se dizer que nas tabelas exponenciais babilônicas existiam algumas lacunas entre valores, que era resolvido por eles a intermédio do chamado método de interpolação linear, por meio do qual interpolavam partes proporcionais para conseguir valores intermediários aproximados. Naturalmente a denominação dada aos seus cálculos só ocorreu séculos depois, embora isso não diminua a importância da existência deles para a evolução da matemática.

Segundo Boyer e Merzbach (2012), o conceito de Função Exponencial é dependente também do conceito de potência, está intimamente ligado, portanto, ao conceito de logaritmo. Nesse quesito, Boyer e Merzbach (2012) destaca que foi apenas no século XVI e XVII, a partir dos trabalhos de John Napier ($1550 - 1617$), o nome logaritmo começou a fazer parte do universo dos estudiosos e cientistas. O desenvolvimento científico e tecnológico da época fazia surgir uma problemática de cunho prático relacionado às grandes quantidades de dados numéricos e os cálculos envolvendo números grandes. Dessa maneira, era necessário uma resolutiva que facilitasse tal atividade. Foi nessa motivação que Napier começou seus estudos sobre logaritmos, que, segundo consta as bibliografias a respeito, duraram cerca de 20 anos.

Contudo, Napier obteve inspiração em trabalhos anteriores a ele, como nas tabelas da antiguidade já citadas e sobretudo de Arquimedes (287 a.c-212 a.c), e nos trabalhos de Stifel ($1487-1567$). Ambos, Arquimedes e Stifel trabalhavam com potências sucessivas de um dado número. Sobretudo Stifel estabeleceu uma relação entre a progressão geométrica e os expoentes dos respectivos termos. Boyer e Merzbach (2012) afirma que Napier fez foi aproveitar-se dessas e outras ideias da época para criar algo que pudesse transformar operações mais complicadas em operações mais simples. E para isso, bastava possui tabelas com valores já calculados de referência.

Considerando este cenário, Napier monta suas tabelas pensando nos logaritmos como valores de uma sequência geométrica, escrevendo os expoentes de maneira a formar uma faixa contínua de valores. Todavia, Napier não tinha em mente o conceito de base de logaritmo que hoje temos, o que faz com que seus estudos sejam substancialmente diferentes dos logaritmos com os quais hoje trabalha-se habitualmente. Segundo Boyer e Merzbach (2012) o conceito de Função Logarítmica está implícito na definição de Napier assim como em todo seu trabalho sobre logaritmos, mas a falta de simetria com os modelos atuais de logaritmos não diminui em nada a importância dos estudos desse teórico para a evolução desse conceito, pois foi com as invenções de Napier, especialmente na publicação de um trabalho intitulado *"Mirifici logarithmorum canonis descripitio"*, que o termo foi difundido e rapidamente aceito e utilizado.

Obviamente que após Napier inúmeros matemáticos se debruçaram aos estudos dos logaritmos e, com a evolução do conceito de função, das Funções Exponenciais. Todavia pelo caráter histórico e original de sua criação, Napier tornou-se o mais notável e importante nome na origem dos logaritmos. Paralelo e posteriormente, o conceito de logaritmo na própria evolução do conceito de função fez com que se chegasse ao que hoje conhecemos como Função Exponencial, já citada ao longo desse trabalho e tema principal de sua abordagem.

Considerando estes diversos contextos históricos acerca das funções, proporemos na próxima seção abordagens e conceitos relacionadas a elas juntamente com suas representações gráficas atrelada ao GeoGebra.

3.2 Funções

Nesta seção abordaremos definições, propriedades, exemplos e características sobre funções, Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas segundo Ávila (2001), Lima et al. (2006), Iezzi et al. (2013) e Lima (2017) mediadas pelo GeoGebra.

A BNCC (BRASIL, 2018) compreende que o conceito de função é essencial no estudo da matemática, principalmente no Ensino Médio, quando ao estudante é apresentado as situações que podem ser modeladas por funções afins, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas e polinomiais, em que algumas delas, tem aplicação na Antropologia, Ciências Biológicas, Física, Geografia, Matemática Financeira, ou Química.

Não podemos deixar de mencionar que em temas da matemática, encontramos o uso das funções de forma direta ou indireta, por exemplo, na matemática financeira e na geometria. Visto que, estabelecidos o capital e a taxa de juros de uma aplicação, montante será obtido em dependência do tempo de investimento, agora, na geometria temos também que a área de um quadrado será determinada em dependência do comprimento de um lado.

Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer diferentes de vazios, uma função é uma lei de correspondência (relação) $f : X \longrightarrow Y$ que, a cada elemento $x \in X$, associa um, e apenas um, elemento $y \in Y$. E também,

i) Os conjuntos X e Y são chamados *domínio* de f representado por D_f e *contradomínio* de f representado por CD_f, respectivamente, nos quais os elementos do domínio estão associados aos do contradomínio;

ii) O conjunto $f(X) = \{y \in Y \; ; \; \exists \; x \in X, f(x) = y\}$ contido em Y, é chamado *imagem* de f representado por Im_f;

iii) Dado $x \in X$, o único elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado imagem de x.

Uma função na forma $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma função real de variável real (pois $CD_f \subset \mathbb{R}$ e $D_f \subset \mathbb{R}$). Para que uma relação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uma função real, deve satisfazer as seguintes condições: *Existência,* definida em todo elemento do domínio; *unicidade,* cada elemento do domínio, corresponde apenas a um único elemento do contradomínio. A representação gráfica de uma função desta forma é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \; x \in D_f, \; y = f(x)\right\}.$$

Assim, um ponto (x, y) pertence a representação gráfica de f se, e somente se, $x \in D_f$ e os números reais x e y satisfazem a lei de associação de f. Em outras palavras, representação gráfica de uma função f é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de associação. E nem sempre é claramente entendido pelos estudantes no Ensino Médio.

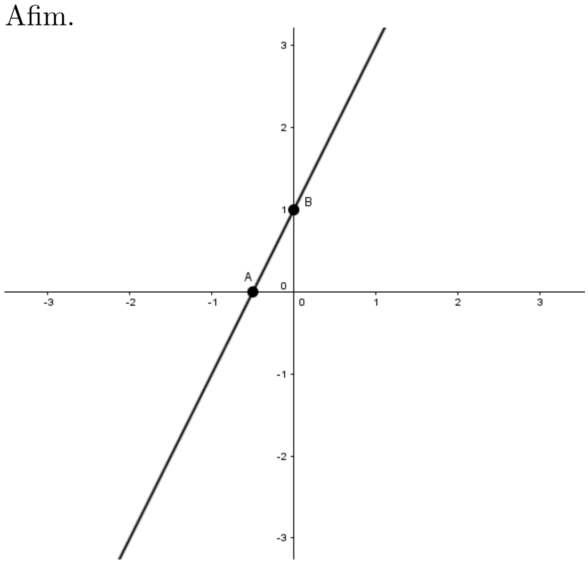
Segundo Lima (2017) uma função está *bem definida* se conhecermos o seu domínio, o seu contradomínio e a lei que permite determinar a imagem de qualquer elemento do seu domínio.

Para fazer as representações gráficas via campo de entradas algébricas, basta digitar no campo de Entrada (na parte inferior da tela de visualização do aplicativo GeoGebra) a sequência de comandos destacados após as figuras, ao digitar o comando no campo de Entrada, pressione a tecla ENTER para a visualização da representação gráfica, ou seja, ao digitar cada comando, pressione a tecla ENTER.

Exemplo 1. Algumas funções que estão bem definidas, seguidas da sua representação gráfica:

a) *Função Afim:* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 2: Representação Gráfica da Função Afim.



Fonte: Própria (2020)

Comandos:

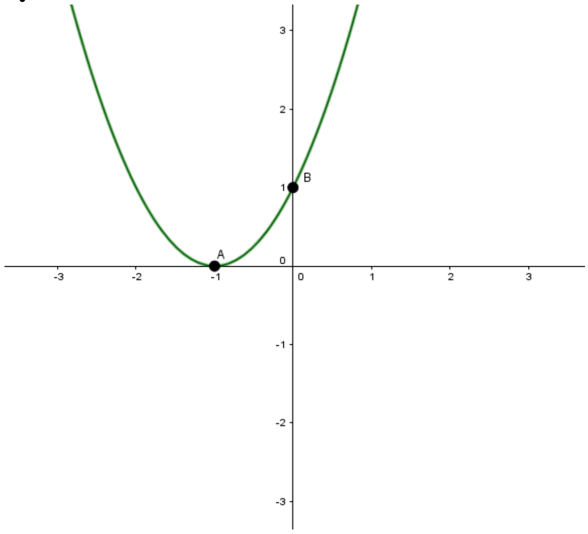
1. f(x) = 2*x + 1 ;
2. A=(- 1/2, 0) ;
3. B=(0, 1) .

b) *Função Quadrática:* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 2x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 3: Representação Gráfica da Função Quadrática.

Comandos:

1. g(x) = x^2 + 2*x + 1 ;
2. A=(-1, 0) ;
3. B=(0, 1) .



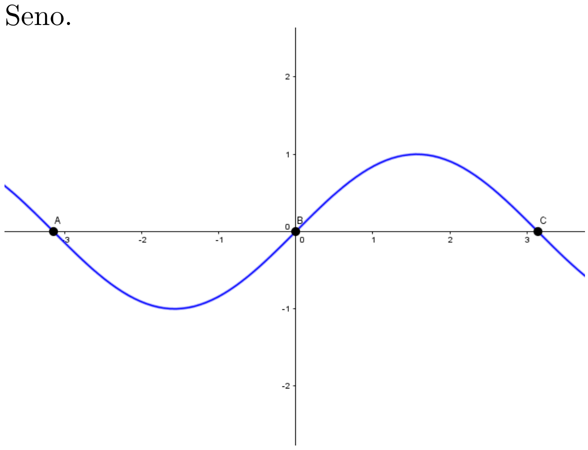
Fonte: Própria (2020)

c) *Função Seno:* $r : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ definida por $r(x) = \sin(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 4: Representação Gráfica da Função Seno.

Comandos:

1. r(x) = sinx ;
2. A=(- pi, 0) ;
3. B=(0, 0) ;
4. C=(pi, 0) .



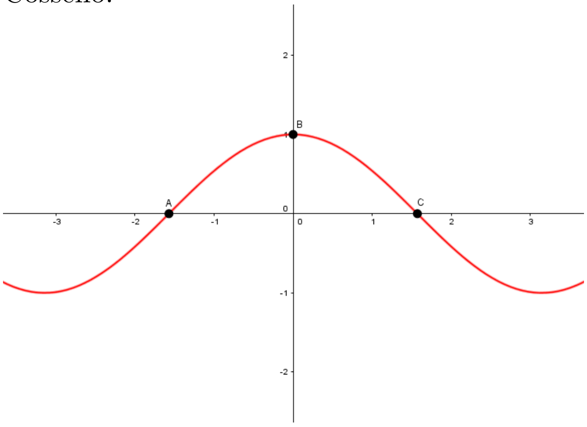
Fonte: Própria (2020)

d) *Função Cosseno:* $s : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ definida por $s(x) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 5: Representação Gráfica da Função Cosseno.

Comandos:

1. s(x) = cosx ;
2. A=(- pi/2, 0) ;
3. B=(0, 1) ;
4. C=(pi/2, 0) .



Fonte: Própria (2020)

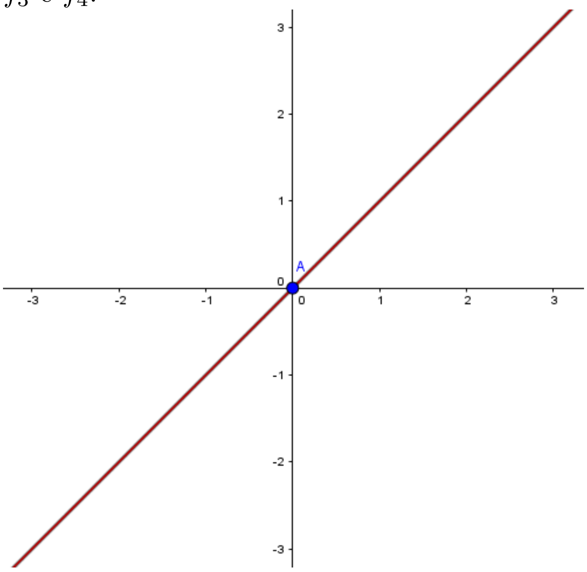
Sabemos que as funções f_1 e f_2, reais de variável real, são iguais se, $D_{f_1} = D_{f_2}$ e $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall\ x \in D_{f_1}$.

Exemplo 2. As funções $f_3(x) = x$ e $f_4(x) = \frac{x^2}{x}$ são aparentementes iguais, porém, ao analisarmos com cuidado percebemos que são diferentes, pois não possuem o mesmo domínio. Enquanto $D_{f_3} = \mathbb{R}$ temos em $D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo $D_{f_3} \neq D_{f_4}$.

Figura 6: Representação Gráfica das Funções f_3 e f_4.

Comandos:

1. f_{3}(x) = x ;
2. f_{4}(x) = x^2 / x ;
3. A=(0, 0) .



Fonte: Própria (2020)

Sejam f e g funções tais que $D_f \cap D_g \neq \emptyset$, assim é possível definimos **operações com funções**, como função adição, diferença, multiplicação e quociente.

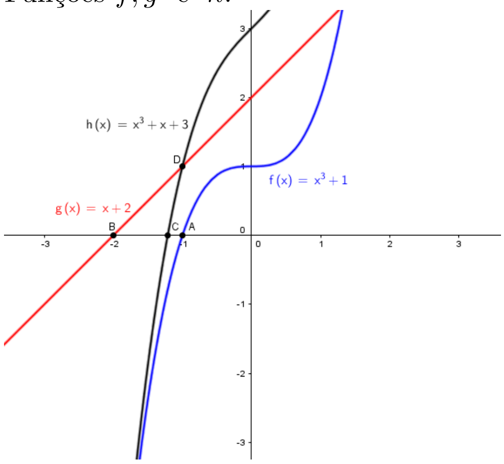
Definição 1. *Para todo* $x \in D_f \cap D_g$ *definimos a adição de função como* $h = f + g : D_{f+g} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que* $h(x) = f(x) + g(x)$.

Exemplo 3. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x + 2$, temos $h(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 1 + x + 2 = x^3 + x + 3$, assim $h(x) = x^3 + x + 3$.

Comandos:

1. f(x)= x^3 + 1 ;
2. g(x) = x + 2 ;
3. h(x) = x^3 + x + 3 ;
4. Raízes[f(x)] ;
5. Raízes[g(x)] ;
6. Raízes[h(x)] ;
7. Interseção[g, h] .

Figura 7: Representação Gráfica das Funções f, g e h.



Fonte: Própria (2020)

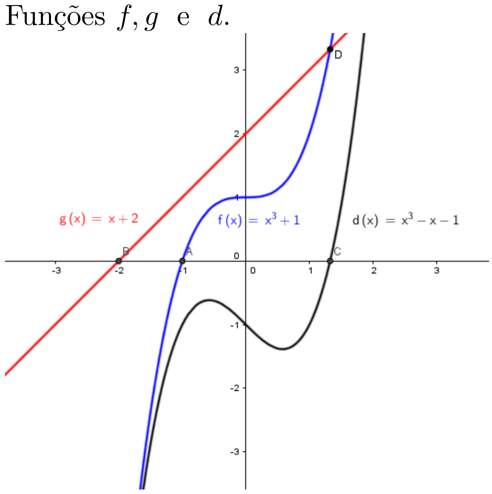
Definição 2. *Para todo* $x \in D_f \cap D_g$ *definimos a diferença de função como* $d = f - g : D_{f-g} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que* $d(x) = f(x) - g(x)$.

Exemplo 4. Sejam as funções f e g como no Exemplo 3 , $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 1 - (x + 2) = x^3 - x - 1$, assim $d(x) = x^3 - x - 1$.

Comandos:

1. f(x)= x^3 + 1 ;
2. g(x) = x + 2 ;
3. d(x) = x^3 - x - 1 ;
4. Raízes[f(x)] ;
5. Raízes[g(x)] ;
6. Raízes[d(x)] ;
7. Interseção[f, g] .

Figura 8: Representação Gráfica das Funções f, g e d.



Fonte: Própria (2020)

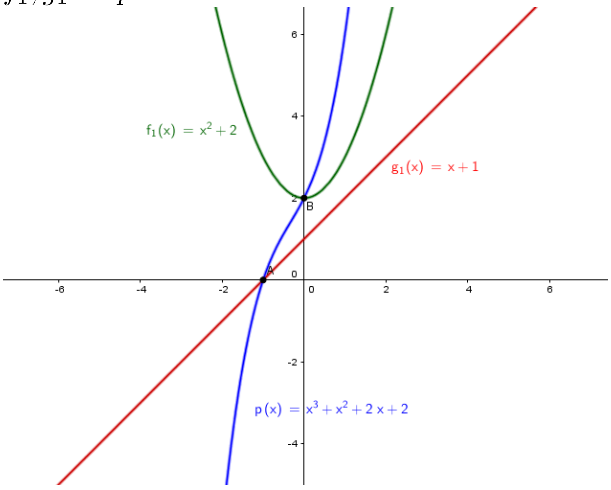
Definição 3. *Para todo $x \in D_f \cap D_g$ definimos a multiplicação de função como $p = f \cdot g : D_{f \cdot g} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.*

Exemplo 5. Sejam as funções $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_1(x) = x^2 + 2$ e $g_1(x) = x + 1$, temos $p(x) = f_1(x) \cdot g_1(x) = (x^2 + 2) \cdot (x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, assim $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

Comandos:

1. f_1(x)= x^2 + 2 ;
2. g_1(x) = x + 1 ;
3. p(x) = x^3 + x^2 + 2*x +2 ;
4. Raízes[g_1(x)] ;
5. Interseção[f_1, p] .

Figura 9: Representação Gráfica das Funções f_1, g_1 e p.



Fonte: Própria (2020)

Definição 4. *Para todo $x \in D_f \cap D_g$, com $g(x)$ não nulo, definimos o quociente de função como $q = (f/g) : D_{f/g} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.*

Exemplo 6. Sejam as funções $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$ e $g_1(x) = x + 1$, temos $q(x) = \dfrac{p(x)}{g_1(x)} = \dfrac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ com $x \neq -1$, logo $q(x) = \dfrac{(x^2 + 2)(x + 1)}{x + 1} = x^2 + 2$, assim $q(x) = x^2 + 2$. A Figura 9 é a representação gráfica deste Exemplo, considerando $q(x) = f_1(x)$ com $x \neq -1$, ou seja $D_{q(x)} = D_{f_1(x)} \setminus \{-1\}$.

Observação 1. Verificamos pelas definições que para cada valor da variável independente x para o qual existem $f(x)$ e $g(x)$, o valor de $h(x)$ é a soma, $d(x)$ é a diferença, o valor de $p(x)$ é o produto e $q(x)$ é o quociente dos valores das imagens das funções f e g separadamente consideradas. E isto podemos confirmar ao observamos as respectivas representações gráficas das Figuras 7, 8 e 9. Temos ainda que só existem as funções h, d e p para aqueles valores nos quais as funções f, g, f_1 e g_1 estão definidas simultaneamente. Ou seja, $D_h = D_f \cap D_g$, $D_d = D_f \cap D_g$ e $D_p = D_{f_1} \cap D_{g_1}$. Agora já o domínio da função

q é a intersecção dos domínios das funções p e g_1 retirando o conjunto dos valores que anulam o denominador.

A composição das funções é o caso em que duas funções dadas f e g determinam uma **função composta** h, ou seja, fazemos o seu uso em situações que possibilitam relacionar mais de duas grandezas por intermédio de uma mesma função. O Exemplo 7 a seguir é uma adaptação das situações propostas pelo Oliveira (2013).

Exemplo 7. A altura que a lava e o vapor atingem em um vulcão em erupção é obtida em função da pressão dos gases no interior do Vulcão e da Terra. Contudo, essa pressão depende da temperatura atingida pela atividade vulcânica. Podemos relacionar diretamente a altura da lava e do vapor com a temperatura interna do vulcão. Isso remete à ideia geral de função composta.

Definição 5. *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ e $g : U \longrightarrow V$ funções com $Y \subset U$ função composta de g com f é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em X e contradomínio em V, que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder um único elemento $y = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \in V$. Assim,*

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f & : X & \longrightarrow & Y \subset U & \longrightarrow & V \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g\left(f(x)\right) \end{array}$$

A definição faz sentido pois dado $x \in X$ temos que $f(x) \in f(X)$ e como $f(X) \subset U$, temos $f(x) \in U$. Neste caso, podemos aplicar g e encontrar $g\left(f(x)\right) \in V$. Observamos ainda que a operação de composição de funções é associativa, se $f : X \longrightarrow Y$, $g : U \longrightarrow V$ e $h : R \longrightarrow S$ com $f(X) \subset U$ e $g(U) \subset R$, então, para qualquer $x \in X$ temos:

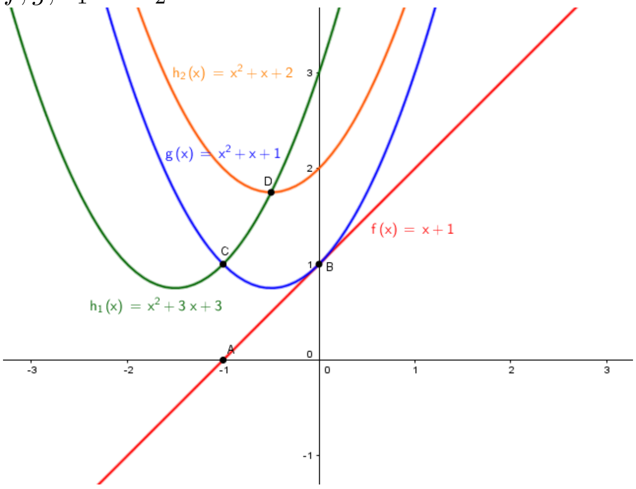
$$\left((h \circ g) \circ f\right)(x) = \left(h \circ (g \circ f)\right)(x) = h\left(g\left(f(x)\right)\right).$$

Exemplo 8. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, temos $h_1(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = [f(x)]^2 + f(x) + 1 = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3$, assim $h_1(x) = x^2 + 3x + 3$ e $h_2(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = g(x) + 1 = x^2 + x + 1 + 1 = x^2 + x + 2$, então $h_2(x) = x^2 + x + 2$.

Comandos:

1. f(x) = x + 1 ;
2. g(x) = x^2 + x + 1 ;
3. h_1(x) = x^2 + 3*x + 3 ;
4. h_2(x) = x^2 + x + 2 ;
5. Raízes[f(x)] ;
6. Interseção[f, g] ;
7. Interseção[g, h] ;
8. Interseção[h_1, h_2] .

Figura 10: Representação Gráfica das Funções f, g, h_1 e h_2.



Fonte: Própria (2020)

Para determinar se uma função possui inversa é preciso verificar se ela é **bijetiva**, pois os pares ordenados da função f devem pertencer à **função inversa** f^{-1} de modo que cada elemento do domínio deve está associado a um elemento diferente no conjunto da imagem. Portanto, para uma melhor compreensão da inversibilidade de uma função, falaremos dos casos de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.

Seja a função $f : X \longrightarrow Y$ dizemos que f é **injetiva** se para todo $x_1, x_2 \in X$ com $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Em outras palavras, podemos dizer também que, essa função será injetiva quando elementos diferentes de X forem associados por f em elementos diferentes de Y. As funções afins, exponenciais e logarítmicas por exemplo, apresentam tais características de injetividade.

Exemplo 9. A função $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = 3x - \frac{1}{2}$ é injetiva. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f_1(x_1) = f_1(x_2)$, assim $3x_1 - \frac{1}{2} = 3x_2 - \frac{1}{2}$, daí $3x_1 = 3x_2$, logo $x_1 = x_2$.

Seja a função $f : X \longrightarrow Y$ dizemos que f é **sobrejetiva** se para todo $y \in Y$, pode-se encontrar pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

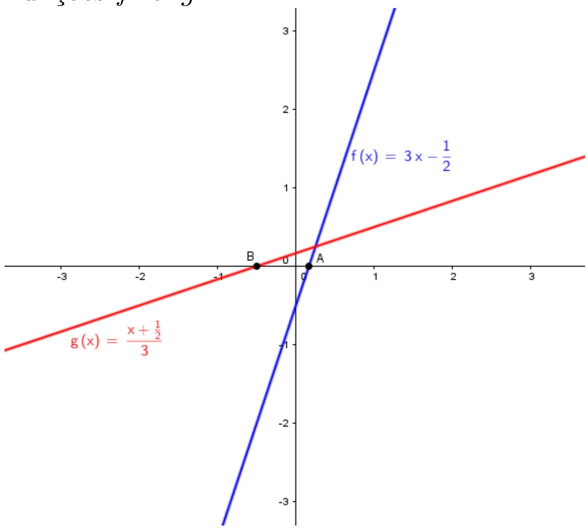
Exemplo 10. A função $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = 3x - \frac{1}{2}$ é sobrejetiva. Seja $y = f_1(x) \in \mathbb{R}$. Como $y = f_1(x) = 3x - \frac{1}{2}$, temos que $x = \dfrac{y + \frac{1}{2}}{3}$. Assim, $x = \dfrac{y + \frac{1}{2}}{3} \in \mathbb{R}$ é tal que $f_1(x) = y$. Então, $f_1(x)$ é uma função **bijetiva** (sobrejetiva e injetiva, simultaneamente).

Na Figura 11 a seguir temos a representação gráfica da função $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ e sua inversa $f^{-1}(x) = g(x) = \dfrac{x + \frac{1}{2}}{3}$. Para encontramos uma função inversa fazemos $y = f(x)$ e fazemos x em função de y. Observe que as representações gráficas de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$.

Figura 11: Representação Gráfica das Funções f e g.

Comandos:

1. f(x)= 3*x - 1/2 ;
2. g(x)= (x+1/2)/3 ;
3. Raízes[f(x)] ;
4. Raízes[g(x)] .



Fonte: Própria (2020)

Observação 2. Ao tratarmos o estudo de funções inversas no Ensino Médio, deixaremos claro para os estudantes que $f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x, enquanto $f(x^{-1})$ é a função de f calculada em $x^{-1} = \frac{1}{x}$, e que ainda $(f(x))^{-1}$ é a inversa da função de f calculada em x, ou seja, $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

As Funções Exponenciais e Logarítmicas, assim como as afins e as quadráticas, são comuns em problemas que fazem parte da descrição de diversos fenômenos. Para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido. Para podemos reconhecer a função adequada a determinados fenômenos, precisamos obter o conhecimento prévio das propriedades específicas das funções. Na seção a seguir destacaremos definições, exemplos, características e aplicações das Funções Exponenciais.

3.3 Funções exponenciais

Segundo as concepções de Eves (2011), o conceito de Função Exponencial que hoje utilizamos passou por inúmeros processos de testagens, formulações e reformulações estabelecidos por diversos e importantes nomes da matemática, como já apresentados na Seção 3.1. Vimos que foi no estudo da relação entre quantidades variáveis, ainda no século XVII, que o conceito de função teve sua origem e que apesar disso gradativamente saiu desse âmbito do cálculo para habitar o âmbito da Teoria dos Conjuntos, já no século XX.

A função denominada como exponencial possui essa relação de dependência e sua principal característica é que a parte variável representada por x se encontra no expoente: $f(x) = a^x$, daí sua denominação exponencial. Sabemos que o conceito de Função Exponencial está atrelado intimamente o conceito de logaritmo, já que esse é sua representação inversa. E cronologicamente, a ideia de logaritmo antecede ao próprio conceito de função, como já contextualizamos na Seção 3.1.

Definição 6. *Sejam* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $b \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$, *então, conforme Lima et al.* (2006) *e Lima* (2017) *segue que*:

i) (*Potência de Expoente Inteiro Positivo*) *Seja* $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. *A* ***potência*** *de* ***base*** a *e* ***expoente*** n *é o número* a^n *tal que:*

$$\begin{cases} a^0 = 1, \\ a^1 = a \ . \end{cases}$$

De modo geral, para $n \geq 2$, *temos que* a^n *é o produto de* n *fatores iguais a* a. *Assim,*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n} \ ;$$

ii) (*Potência de Expoente Inteiro Negativo*) *Seja* $n \in \mathbb{Z}^+$, *temos que* $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;

iii) (*Potência de Expoente Racional*) *Seja* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *com* $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *temos que* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, *em particular para* $m = 1$ *obtemos* $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$;

iv) (*Potência de Expoente Real*) *Temos que a potência* a^x *está definida para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Propriedades: Se $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x, y \in \mathbb{R}$, então:

i) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

ii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

iii) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;

iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$;

v) $(a^x)^y = a^{x.y}$.

Demonstração. Encontra-se em Iezzi et al. (2013, p.3 − 23). □

Exemplo 11. Definido a operação $a \star m$ como sendo a^m. Por exemplo, $2 \star 3 = 8$, pois $2 \star 3 = 2^3 = 8$. Assim,

$$\frac{2 \star (2 \star (2 \star 2))}{((2 \star 2) \star 2) \star 2} = \frac{2 \star (2 \star 4)}{(4 \star 2) \star 2}.$$

Daí segue que

$$\frac{2 \star (2 \star 4)}{(4 \star 2) \star 2} = \frac{2 \star 16}{16 \star 2}.$$

Logo, $\dfrac{2 \star 16}{16 \star 2} = \dfrac{2^{16}}{16^2} = 2^8$. Então,

$$\frac{2 \star (2 \star (2 \star 2))}{((2 \star 2) \star 2) \star 2} = 2^8.$$

Lema 1. Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. Encontra-se em Lima (2017, p.153). □

Exemplo 12. Sejam $m, n \in \mathbb{R}$ com $m \neq 0$ e $n > 0$ quaisquer. Considerando $a^m = n$, temos que $(a^m)^{\frac{1}{m}} = (n)^{\frac{1}{m}}$, logo $a^{\frac{m}{m}} = n^{\frac{1}{m}}$, daí segue que $a = n^{\frac{1}{m}}$, sabendo que $n > 0$, existe $a > 0$ tal que $a^m = n$.

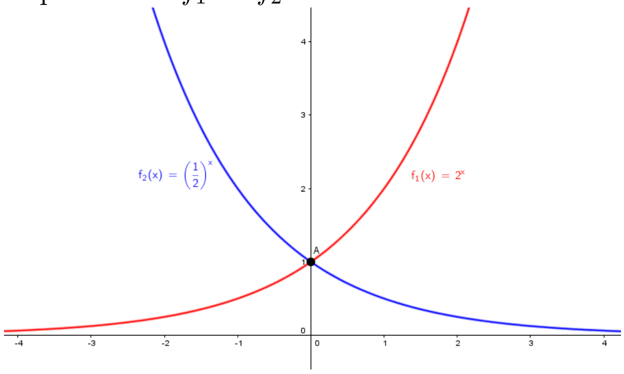
Definição 7. *Sejam a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$ é chamada* ***Função Exponencial*** *de base a.*

Exemplo 13. As Funções Exponenciais $f_1(x) = 2^x$ e $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ são, respectivamente, de base 2 e $\frac{1}{2}$.

Figura 12: Representação Gráfica das Funções Exponenciais f_1 e f_2.

Comandos:

1. f_1(x) = 2^x ;
2. f_2(x) = (1/2)^x ;
3. A=(0,1) .



Fonte: Própria (2020)

Segundo Lima et al. (2006) dada uma Função Exponencial $f(x) = a^x$ dizemos que é **crescente** se, e somente se, $a > 1$. E é **decrescente** se, e somente se, $0 < a < 1$.

Teorema 3.1. *(Caracterização da Função Exponencial) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função injetiva. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$f(n \cdot x) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;*
2. *$f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $a = f(1)$;*
3. *$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Encontra-se em Lima (2017, p.158 – 159). □

Exemplo 14. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função crescente, considerando o item 3. do Teorema 3.1 temos que $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$, daí segue que $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$, logo $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Agora, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) = [f(0)]^2$, ou seja, $f(0) = [f(0)]^2$, logo $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, como $f(x) > 0$ temos que $f(0) = 1$. Sabendo que $1 > 0$ e que f é crescente obtemos que $f(1) > f(0)$, como $f(0) = 1$ segue que $f(1) > 1$. Portanto, $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $f(1) > 1$.

Observe que no Exemplo 13 a função $f_1(x)$ é crescente e pela Figura 12 podemos verificar que $f_1(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $f_1(1) > 1$.

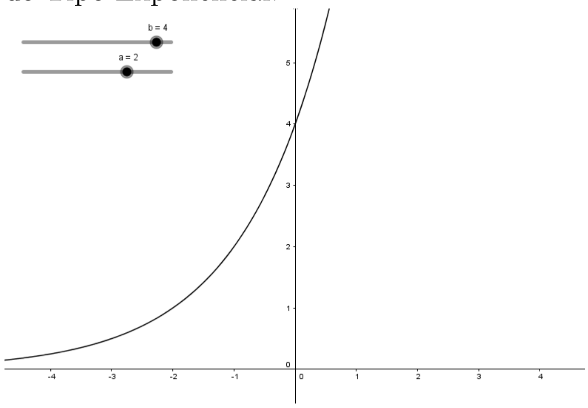
Uma Função do Tipo Exponencial fica determinada quando se conhecem dois dos seus valores. Na Figura 13 a seguir temos a representação gráfica que representa

$f(x) = b \cdot a^x$ quando, por exemplo, $a = 2$ e $b = 4$, caso queira outros valores para a e b na construção, basta nos comandos 3 e 4 escolhe os valores desejados quantas vezes quiserem, a partir de cada escolha a representação gráfica modificará de forma dinâmica e automática. Para ativar a funcionalidade "Criar Controle(s) Deslizante(s)", basta pressionar a tecla ENTER.

Figura 13: Representação Gráfica da Função do Tipo Exponencial.

Comandos:

1. f(x) = b*a^x ;
2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a, b (Tecla ENTER) ;
3. a=2 ;
4. b=4 .



Fonte: Própria (2020)

Teorema 3.2. *(Caracterização das Funções do Tipo Exponencial) Seja* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *uma função injetiva tal que, para* $x, h \in \mathbb{R}$ *quaisquer, o acréscimo relativo*

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)},$$

dependa apenas de h*, mas não de* x*. Então, se* $b = g(0)$ *e* $a = \frac{g(1)}{g(0)}$*, tem-se* $g(x) = b \cdot a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Encontra-se em Lima et al. (2006, p.185). □

O Exemplo 15 a seguir é a resolução de um exercício proposto pelo Lima (2017, p. 183).

Exemplo 15. Se $f(x) = b \cdot a^x$ e $F(x) = B \cdot A^x$, com $a, A \notin \{0, 1\}$, $b \neq 0$ e $B \neq 0$, são tais que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$. Então,

$$b \cdot a^{x_1} = B \cdot A^{x_1} \tag{1}$$

$$b \cdot a^{x_2} = B \cdot A^{x_2} \tag{2}$$

De (1) e (2) temos que

$$\left(\frac{A}{a}\right)^{x_1} = \left(\frac{A}{a}\right)^{x_2} \tag{3}$$

Por hipótese, $a, A \notin \{0, 1\}$, mas para que (3) seja válido, $\left(\frac{A}{a}\right)^{x_1} = 1^{x_1} = 1^{x_2} = \left(\frac{A}{a}\right)^{x_2}$, logo $\frac{A}{a} = 1$, assim $A = a$. Com isso, $\frac{b}{B} = \left(\frac{A}{a}\right)^{x_1}$, logo $\frac{b}{B} = 1^{x_1} = 1$, daí segue que $b = B$.

Teorema 3.3. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função injetiva que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, em que $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = b\dot{a}^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Encontra-se em Lima (2017, p.161 − 162). □

O Exemplo 16 a seguir é uma adaptação de Lima (2017, p. 161).

Exemplo 16. Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma Função do Tipo Exponencial, ou seja, $f(x) = b\dot{a}^x$ com $b \neq 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Agora, seja $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ uma progressão aritmética de razão r. Logo,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + r \\ &= x_{n-1} + 2 \cdot r \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= x_1 + n \cdot r \end{aligned}$$

Assim, a sequência $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ é uma progressão geométrica de razão a^r.

Levando-se em consideração sua evolução histórica, bem como as aplicações que utilizam de Funções Exponenciais, não poderíamos nos abster de utilizar recursos atuais, ditado pela tecnológica, para visualização e compreensão das características inerentes às funções do tipo $f(x) = a^x$.

Dada uma função $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, temos:

a) A curva do gráfico está toda acima do eixo x, pois $f(x) = a^x > 0$, para todo $x \in R$;

b) A curva corta o eixo y no ponto de ordenada 1, pois $f(0) = 1$;

c) Se $a > 1$, f é uma função crescente;

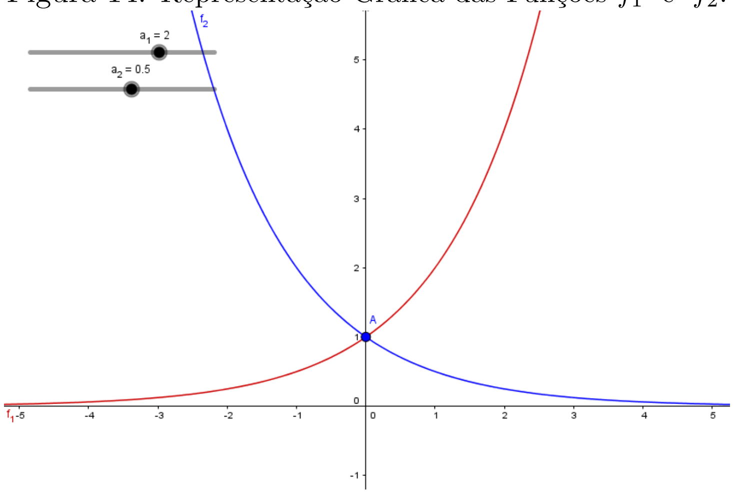
d) Se $0 < a < 1$, f é uma função decrescente.

Para verificar graficamente estes itens, basta observa as funções $f_1(x) = a_1^x$ e $f_2(x) = a_2^x$ da Figura 14 a seguir, sendo que $a_1 > 1$ e $0 < a_2 < 1$.

Comandos:

1. f_1(x) = a_1^x ;
2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a_1 (Tecla ENTER) ;
3. a_1=2 ;
4. f_2(x) = a_2^x ;
5. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a_2 (Tecla ENTER) ;
6. a_2=1/2 ;
7. A=(0,1) .

Figura 14: Representação Gráfica das Funções f_1 e f_2.



Fonte: Própria (2020)

Por outro lado, podemos alterar verticalmente e horizontalmente a representação gráfica da Função Exponencial por intermédio do acréscimo de valores, ou seja, dado uma função $f(x) = a^{x+c} + b$ com $b, c \in \mathbb{R}$. Temos que o valor de b define o deslocamento vertical e o valor de c o deslocamento horizontal. As representações gráficas da Figura 15 e da Figura 16, são respectivamente, a variação da curva de acordo com a mudanças da variável b e a variação da curva de acordo com a mudança da variável c.

Comandos:

1. f_1(x) = a^(x+c) +b_1 ;

2. Criar Controle(s) Deslizante(s)

para: a, c, b_1 (Tecla ENTER) ;

3. a=2 ;

4. c=0 ;

5. b_1=-2 ;

6. f_2(x) = a^(x+c) +b_2 ;

7. Criar Controle(s) Deslizante(s)

para: b_2 (Tecla ENTER) ;

8. b_2=-1 ;

9. f_3(x) = a^(x+c) +b_3 ;

10. Criar Controle(s) Deslizante(s)

para: b_3 (Tecla ENTER) ;

11. b_3=0 ;

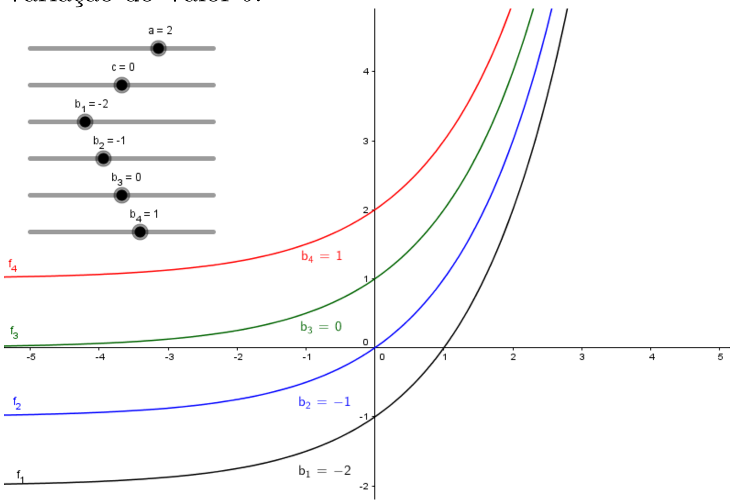
12. f_4(x) = a^(x+c) +b_4 ;

13. Criar Controle(s) Deslizante(s)

para: b_4 (Tecla ENTER) ;

14. b_4=1 .

Figura 15: Representação Gráfica de $f(x) = a^{x+c} + b$, Variação do Valor b.

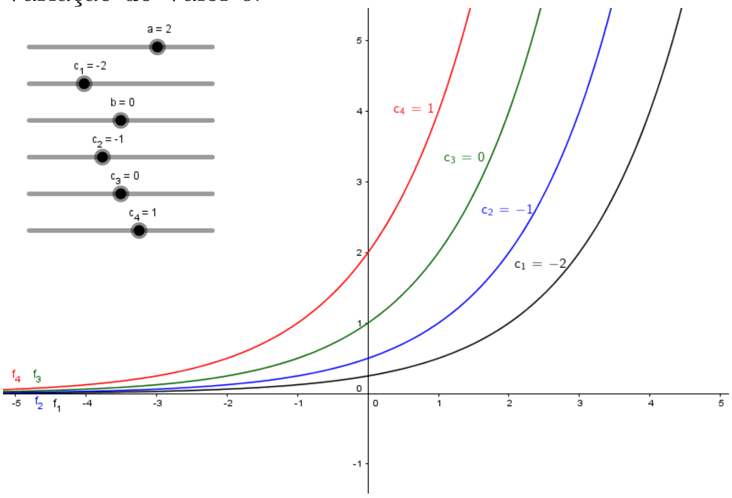


Fonte: Própria (2020)

Comandos:

1. f_1(x) = a^(x+c_1) +b ;
2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a, c_1, b (Tecla ENTER) ;
3. a=2 ;
4. b=0 ;
5. c_1=-2 ;
6. f_2(x) = a^(x+c_2) +b ;
7. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: c_2 (Tecla ENTER) ;
8. c_2=-1 ;
9. f_3(x) = a^(x+c_3) +b ;
10. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: c_3 (Tecla ENTER) ;
11. c_3=0 ;
12. f_4(x) = a^(x+c_4) +b ;
13. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: c_4 (Tecla ENTER) ;
14. c_4=1 .

Figura 16: Representação Gráfica de $f(x) = a^{x+c} + b$, Variação do Valor c.



Fonte: Própria (2020)

[3] Vamos considerar a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quando n aumenta indefinidamente, a sequência tende muito lentamente para o número irracional, logo seu desenvolvimento decimal não termina e nem é periódico, é definido como número de Euler e representado pela letra e. Um valor aproximado de e com 10 algarismos decimais é 2,7182818284.

Exemplo 17. A questão teve grande ênfase nos séculos passados com relação ao comportamento de um depósito bancário, como cresceria o montante ao longo do tempo se os juros seriam creditados em intervalos de tempo cada vez menor, até que o acréscimo seja considerado instantâneos e sobre eles as mesmas taxas de juros. Suponha que um banco pague 100% ao ano. Após um ano, teria um montante de R\$ $200,00$ para cada R\$ $100,00$ aplicado. Se o juros fossem creditados semestralmente, após um ano terá um montante de R\$ $225,00$ para cada R\$ $100,00$ aplicado. Se fosse trimestralmente após um

[3] Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais que são dispostos em uma ordem.

ano teria R\$ 244, 14 para cada R\$ 100, 00 aplicado. Note que o modelo matemático para esse cálculo é dada pela fórmula:

$$M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

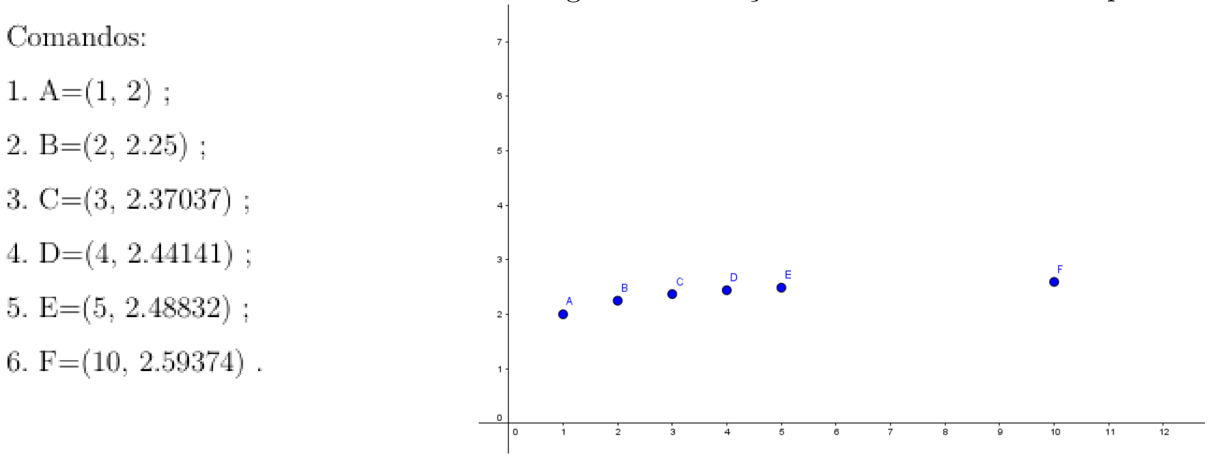
Observe a relação de alguns valores n na Tabela 1.

Com base na Tabela 1 conseguimos intuitivamente observar que a montante está aproximando de um número cada vez que o valor de n vai aumentando, mas que número seria esse, se o valor de n fosse grande tanto quanto se queira? Esse número é conhecido como número de Euler (representado pela letra e.)

Tabela 1: Relação entre Montante e Tempo.

Valor de n	Valor de M
1	2
2	$2,25$
3	$2,37037$
4	$2,44141$
5	$2,48832$
10	$2,59374$
100	$2,70481$
1000	$2,71692$
10000	$2,71815$

Figura 17: Relação entre Montante e o Tempo.



Fonte: Própria (2020)

Uma Função Exponencial importante em matemática é aquela cuja base é e. De fato, funções que envolvem potências de e são utilizadas em matemática aplicada, pois servem para modelar situações de crescimento ou decrescimento contínuo. Para mostrar características das Funções Exponenciais de base e, como $f(x) = be^{ax}$, tomemos de Lima et al. $(2006, \text{p. } 204 - 205)$ o Exemplo 18 a seguir.

Exemplo 18. Um investidor aplica um capital c_0 a uma taxa de k por cento ao ano. Se escrevermos, por simplicidade, $a = \frac{k}{100}$, por cada real aplicado, o investidor receberá, no final de um ano, $1 + a$ reais, de modo que o total a ser resgatado será $c_0(1 + a)$ reais. O acréscimo $c_0 \cdot a$ (juro) é uma espécie de aluguel do dinheiro.

Sendo assim, raciocina o investidor, se eu resgatar meu capital depois de um semestre, terei direito a metade do juro (aluguel) anual, logo receberei $c_0(1 + \frac{a}{2})$ reais. Então reinvestirei esta soma por mais um semestre e, no final do ano, em vez de $c_0(1+a)$, vou receber $c_0(1+\frac{a}{2})^2$, que é uma quantia maior. Pensando melhor, diz o investidor, posso resgatar e reinvestir meu capital mensalmente recebendo, no final de um ano, o total de $c_0(1 + \frac{a}{12})^{12}$.

Como o número $a = \frac{k}{100}$ lhe é conhecido, o investidor, com auxílio da calculadora, verifica imediatamente que

$$\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{a}{12}\right)^{12}.$$

Animado com o resultado, nosso ambicioso investidor imagina que, resgatando e reaplicando seu dinheiro num número n cada vez maior de intervalos de tempo iguais, poderá aumentar ilimitadamente seu capital. Na verdade, fazendo o que imagina, no final do ano o investidor receberá o total acumulado igual a $c_0\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ fazendo n aumentar indefinidamente, temos que

$$c_0\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = c_0 \cdot e^a.$$

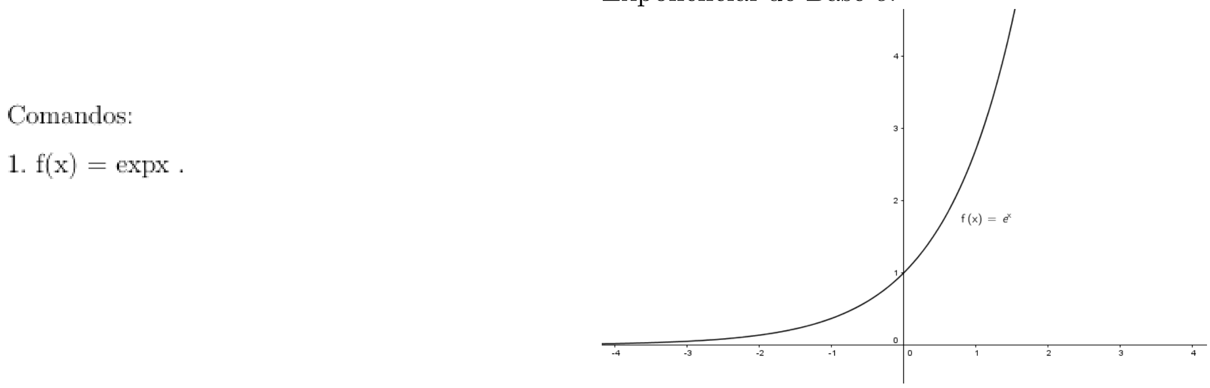
Nosso personagem estava certo ao pensar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $a > 0$, se tem

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Mas, infelizmente, se enganou ao acreditar que a sequência de termo geral $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ é ilimitada. Com efeito, todos esses termos são menores do que e^a. Ao conceber esse processo imaginário de resgatar e reinvestir a cada instante seu capital, nosso investidor foi conduzido à noção de juros compostos, acumulados continuamente.

Apresentamos a seguir Figura 18 para visualizar e compreender as características inerentes às funções do tipo $f(x) = e^x$.

Figura 18: Representação Gráfica da Função Exponencial de Base e.



Fonte: Própria (2020)

Na seção a seguir destacaremos definições, exemplos, características e aplicações das Funções Logarítmicas.

3.4 Funções logarítmicas

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, chama-se **logaritmo** de a na base b, sendo o logaritmo que se deve obter na base b de a, ou escrevendo em forma de potência seria qual o expoente que aplicado sobre a base b seja igual a a, ou seja:

$$\log_a b = x \iff b^x = a.$$

Para o $\log_a b = x$ dizemos que b é a **base do logaritmo**, a é o **logaritmando** e x é o logaritmo.

Exemplo 19. A seguir temos alguns logaritmos associados a escrita na forma de potência.

a) $\log_{22} 22 = 1$, pois $22^1 = 22$;

b) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$;

c) $\log_6 1 = 0$, pois $6^0 = 1$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$, pois $\frac{1}{3}^3 = \frac{1}{27}$.

Definição 8. *Sejam* a, b *e* $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, *temos que:*

i) $\log_a 1 = 0$;

ii) $\log_a a = 1$;

iii) $a^{\log_a b} = b$;

iv) $\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow b = c$.

Algumas propriedades dos logaritmos;

Proposição: Se a, b e $c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, então:

i) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;

ii) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

iii) $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$;

iv) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, com $c \neq 1$.

Demonstração. Encontra-se em Iezzi et al. (2013, p.63 − 73). □

Exemplo 20. Se $\log a = 2, \log b = 3$ e $\log c = 4$, determinaremos o valor de $\log \left(\dfrac{c^2 \cdot b}{a^4}\right)$. Considerando $\log \left(\dfrac{c^2 \cdot b}{a^4}\right) = t$, Temos que $t = \log c^2 + \log b - \log a^4$, daí segue que $t = 2 \cdot \log c + \log b - 4 \cdot \log a$, logo $t = 2 \cdot 4 + 3 - 4 \cdot 2$, então $t = 3$. Portanto, $\log \left(\dfrac{c^2 \cdot b}{a^4}\right) = 3$.

Exemplo 21. Se o crescimento de uma população é de 20% ao ano, determinaremos em quanto tempo essa população dobrará de tamanho. Considerando que $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$ e seja P a população em um momento $t = 0$, como ela aumenta à taxa de 20% ao ano, então temos que $2P = P \cdot (1,2)^t$, dividindo por P e aplicando logaritmo em ambos os membros da igualdade, obtemos $\log 2 = \log(1,2)^t$, daí $\log 2 = t \cdot \log \frac{12}{10}$, logo $\log 2 = t \cdot (\log 12 - \log 10)$, assim $\log 2 = t \cdot (2 \cdot \log 2 + \log 3 - 1)$, então

$$t = \frac{\log 2}{(2 \cdot \log 2 + \log 3 - 1)}.$$

Portanto,

$$t = \frac{0,3}{(0,6 + 0,48 - 1)} = 3,75.$$

Concluímos que a população dobrará de tamanho depois de 3 anos e 9 meses.

Definição 9. *Sejam a função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$ é chamada* ***Função Logarítmica*** *de base a.*

Exemplo 22. As Funções Logarítmicas $f_1(x) = \log_3 x$ e $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ são, respectivamente, de base 3 e $\frac{1}{3}$.

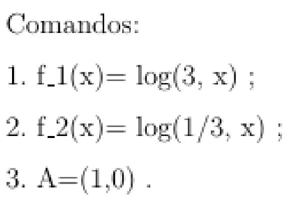
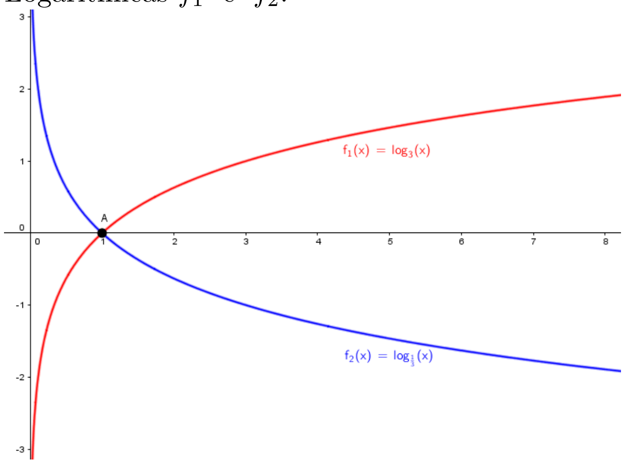


Figura 19: Representação Gráfica das Funções Logarítmicas f_1 e f_2.



Fonte: Própria (2020)

Teorema 3.4. (*Caracterização da Funções Logarítmicas*) *Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função injetiva tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Encontra-se em Lima (2017, p.168 − 169). □

Exemplo 23. Em uma colônia de bactérias, a cada meia hora, o número de bactérias sêxtupla. Se no início existe 700 bactérias, no estudo de Funções Exponenciais obtemos a expressão $f(x) = 700 \cdot 6^{\frac{x}{30}}$, após quanto tempo haverá 700000 bactérias, aproximadamente, ou seja, para que valor de x temos $f(x) = 700000$? Precisamos transformar as informações dadas em uma expressão algébrica para poder ser utilizado os conteúdos abordados. Então temos que $700 \cdot 6^{\frac{x}{30}} = 700000$, daí $6^{\frac{x}{30}} = 1000$, logo $\log 6^{\frac{x}{30}} = \log 1000$, assim $\frac{x}{30} \cdot \log 6 = \log 1000$, sabendo que $6 = 2 \cdot 3$ e $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10$, temos que $\frac{x}{30} \cdot \log(2 \cdot 3) =$

$\log(10 \cdot 10 \cdot 10)$, pelo Teorema 3.4 $\frac{x}{30} \cdot (\log 2 + \log 3) = \log 10 + \log 10 + \log 10$, considerando $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$ obtemos $\frac{x}{30} \cdot (0,3 + 0,48) = 3$, então $x = 116$. Portanto, temos que após 116 minutos haverão 700000 bactérias.

Entre a infinidade de valores que pode assumir a base, existem dois tipos de bases de logaritmos particularmente importantes nos estudos dos logaritmos:

a) (Logaritmos Decimais) É o logaritmo de base 10, também chamado sistema de logaritmos de Briggs, referência a Henry Briggs $(1556 - 1630)$, matemático inglês, quem primeiro destacou a vantagem dos logaritmos de base 10, tendo publicado a primeira tábua (tabela) dos logaritmos de 1 a 1000 em 1617. Indicaremos o logaritmo decimal pela notação $\log x$;

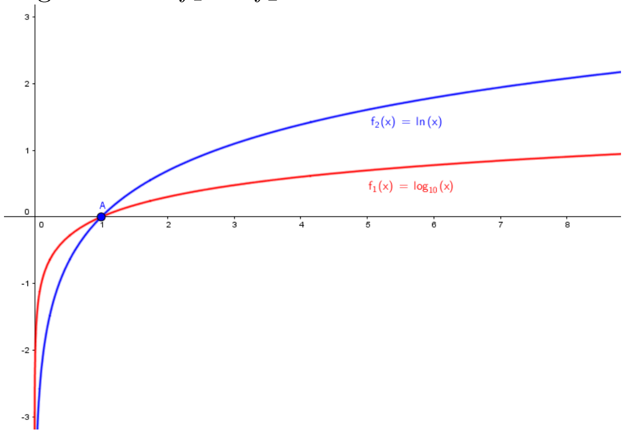
b) (Logaritmos Naturais) É o logaritmo de base e, o nome natural se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base e. Indicaremos o logaritmo natural pela notação $\ln x$.

Apresentamos a Figura 20 a seguir para visualiza e compreende as características gráficas inerentes da Função Logarítmica Decimal f_1 e a Função Logarítmica Natural f_2.

Figura 20: Representação Gráfica das Funções Logarítmicas f_1 e f_2.

Comandos:

1. f_1(x)= log10(x) ;
2. f_2(x)= ln(x) ;
3. A=(1,0) .



Fonte: Própria (2020)

Reconhecer a representação gráfica da Função Logarítmica é de fundamental importância no trato com as grandezas físicas cuja medida é feita com o uso de logaritmos, como por exemplo a intensidade de som, a força de um terremoto, entre outras. Para nos ajudar a visualizar e compreender melhor as características inerentes às funções do tipo $f(x) = \log_a x$ usaremos o GeoGebra que permite ampla utilização no ato do estudo da matemática em geral, apresentaremos na Figura 21 representação e comportamento gráfico da função f.

Dada uma função $f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, temos:

a) A curva do gráfico está toda a direita do eixo y, pois $x > 0$;

b) A curva corta o eixo x no ponto de abscissa 1, pois $\log_a 1 = 0$;

c) Se $a > 1$, f é uma função crescente;

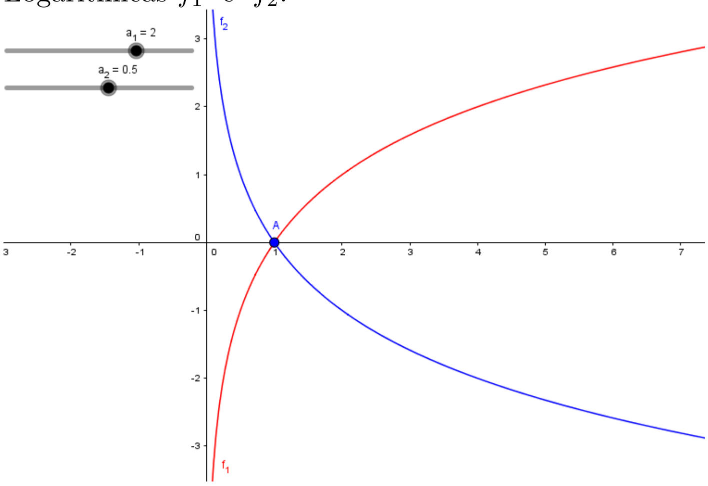
d) Se $0 < a < 1$, f é uma função decrescente.

Para verificar graficamente estes itens, basta observa as funções $f_1(x) = \log_{a_1} x$ e $f_2(x) = \log_{a_2} x$ da Figura 21 a seguir, sendo que $a_1 > 1$ e $0 < a_2 < 1$.

Comandos:

1. f_1(x) = log(a_1, x) ;
2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a_1 (Tecla ENTER) ;
3. a_1=2 ;
4. f_2(x) = log(a_2, x) ;
5. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a_2 (Tecla ENTER) ;
6. a_2=1/2 ;
7. A=(1,0) .

Figura 21: Representação Gráfica das Funções Logarítmicas f_1 e f_2.



Fonte: Própria (2020)

Por outro lado, podemos alterar verticalmente e horizontalmente a representação gráfica da Função Logarítmica ao variamos valores da função, ou seja, dado uma função $f(x) = \log_a(bx + c)$ com $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}$. Temos que o valor de b define o deslocamento vertical e o valor de c o deslocamento horizontal. As representações gráficas da Figura 22 e da Figura 23, são respectivamente, a variação da curva de acordo com a mudanças da variável b e a variação da curva de acordo com a mudança da variável c.

Comandos:

1. f_1(x) = log(a, b_1*x+c) ;

2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a, b_1, c (Tecla ENTER) ;

3. a=2 ;

4. c=0 ;

5. b_1=-2 ;

6. f_2(x) = log(a, b_2*x+c) ;

7. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: b_2 (Tecla ENTER) ;

8. b_2=-1 ;

9. f_3(x) = log(a, b_3*x+c) ;

10. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: b_3 (Tecla ENTER) ;

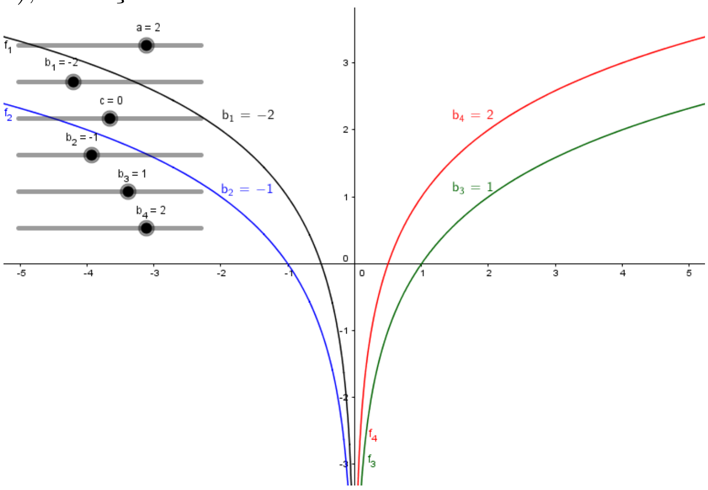
11. b_3=1 ;

12. f_4(x) = log(a, b_4*x+c) ;

13. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: b_4 (Tecla ENTER) ;

14. b_4=2 .

Figura 22: Representação Gráfica de $f(x) = \log_a(bx + c)$, Variação do Valor b.



Fonte: Própria (2020)

Comandos:

1. f_1(x) = log(a, b*x+c_1) ;

2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a, b, c_1 (Tecla ENTER) ;

3. a=2 ;

4. b=1 ;

5. c_1=-2 ;

6. f_2(x) = log(a, b*x+c_2) ;

7. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: c_2 (Tecla ENTER) ;

8. c_2=-1 ;

9. f_3(x) = log(a, b*x+c_3) ;

10. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: c_3 (Tecla ENTER) ;

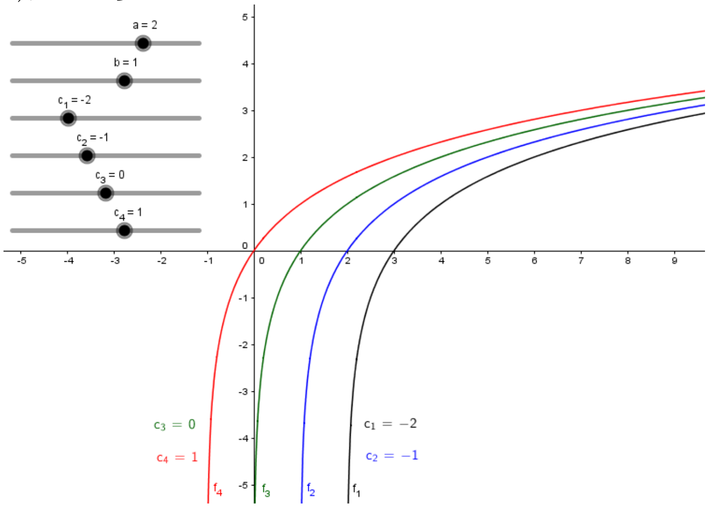
11. c_3=0 ;

12. f_4(x) = log(a, b*x+c_4) ;

13. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: c_4 (Tecla ENTER) ;

14. c_4=1 .

Figura 23: Representação Gráfica de $f(x) = \log_a(bx + c)$, Variação do Valor c.



Fonte: Própria (2020)

Observação 3. Usando a representação gráfica com o qual se define geometricamente o logaritmo natural representado pela Figura 20. Temos que $\ln(1+x)$ é a área de uma faixa de hipérbole, contida no retângulo de altura 1 e base igual ao intervalo $[1, 1+x]$ de eixos das abscissas. Daí $\ln(1+x) < x$, pois x é a área desse retângulo. Como $\ln x$ é uma função crescente de x, temos que $\ln x < \ln(1+x) < x$, logo $\ln x < x$.

Com esse arcabouço referencial temos a possibilidade de propor atividades didáticas utilizando MRP mediada pela ferramenta GeoGebra. Considerando isto, no próximo capítulo elaboraremos atividades relacionadas ao ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas utilizando a MRP mediada pelo GeoGebra.

4 ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Nesse capítulo destacaremos algumas competências e habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) e desenvolveremos as atividades didáticas, orientadas pelas concepções de Polya (1995) no tocante a MRP mediada pelo GeoGebra. Estas, estarão direcionadas para auxiliarem os docentes no ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas para 1º ano do Ensino Médio.

O ensino encontra-se diante de um desafio, como usar os recursos tecnológicos disponíveis, a mobilidade, armazenamento de informações e meios de comunicação. Sob esse ponto de vista BNCC (BRASIL, 2018) enfatiza que as escolas tenham o papel de nortear os estudantes para que não fiquem submergidos e perdidos nesses novos meios de informação e comunicação.

Os modelos de crescimento e decrescimento exponencial apresentam uma importante característica que é a taxa de variação que depende do valor da função em cada instante. Situações reais de crescimento populacional podem ilustrar o modelo exponencial e logarítmico. O trabalho de resolver problemas exponenciais e logarítmicos é pertinente quando associado a problema de aplicação em outras áreas do conhecimento. As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas, respectivamente, por Funções Exponenciais e Logarítmicas, em que o domínio é o conjunto dos números naturais.

As Funções Exponenciais e Logarítmicas na BNCC (BRASIL, 2018) é associada a competência específica 1 do Ensino Médio que é a utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. Nesta competência específica 1 salientamos as habilidades:

> 1. Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> 2. Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatística apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
> 3. Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.
> 4. Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de infração, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.
> 5. Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras. (BRASIL, 2018, p. 532 – 534)

Agora, destacamos também a competência específica 5 do Ensino Médio que consiste em investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. Nesta salientamos, em particular, a habilidade de investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Contudo, ao levamos em conta estas competências e habilidades podemos observar que ensinar matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados, ou seja, propor construções do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber pensar matemático, levando sempre em consideração o modo de pensar do estudante e as ferramentas que possui, motivando-o, mediante a MRP, como Costa e Gomes (2006) defende.

O uso de alguns materiais básicos que poderão contribuir durante as atividades a seguir são caderno, régua, lápis, borracha, caneta e computadores. As atividades poderão contribuir no ensino, tendo em vista a necessidade de se utilizar diversas abordagens interdisciplinares no ensino da matemática, direcionado pela MRP mediada pelo GeoGebra.

Um direcionamento para os docentes refente a avaliação das atividades é observar o envolvimento dos estudantes, de forma individual e coletivamente, acerca dos processos solicitados, analisar o trabalho executado, comparar esse resultado com outros e, ainda, tentar prever o potencial de crescimento de cada estudante. Motivação e empenho na execução das atividades e no desenvolvimento de atitudes na interação, cooperação e organização. E com isto verificar se foi alcançado os objetivos estabelecidos.

Para criar as representações gráficas via campo de entradas algébricas, basta digitar no campo de Entrada (na parte inferior da tela de visualização do aplicativo computacional GeoGebra) a sequência de comandos destacados após as figuras, ao digitar o comando no campo de Entrada, pressione a tecla ENTER para a visualização da representação gráfica.

4.1 Atividade 1

Esta atividade relaciona conceitos da Função Exponencial à resolução de um problema que envolve as Ciências Biológicas. Tendo como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; manipular expressões inerentes ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; montar e representar graficamente as tabelas; aprender acerca do tratamento de dados com a montagem de tabelas e construção gráfica.

SITUAÇÃO-PROBLEMA: O novo Coronavírus, que provoca a COVID-19, pode ser transmitido de uma pessoa para outra. A Organização Mundial da Saúde (OMS) afirma que a transmissão pode ocorrer através de gotículas de saliva ou muco, expelidos pela boca ou narinas quando uma pessoa infectada tosse ou espirra. Digamos que temos um crescimento no número de infectados de uma cidade que possui 19 mil e 683 habitantes em que, a cada três dias, a quantidade de pessoas doentes triplique. No primeiro dia, descobre-se um infectado, quantos dias serão necessários para que um terço da população desta cidade esteja infectada? Considere que nenhuma medida seja adotada para o controle do crescimento dos infectados. Estas são apenas estipulações grosseiras a fim de contextualizar como se dá o crescimento do novo Coronavírus.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Quantos dias serão necessários para que um terço da população esteja infectada? Quais são as condições? Há 19683 habitantes, e a cada três dias a quantidade de pessoas doente triplica e no primeiro dia descobre-se um infectado. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? “Sim”. Faltam dados? “Não”.

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento do educando desenvolver um plano para encontrar a quantidade de dias, encontrar a sequência de crescimento de infectados, organizar os dados para encontrar a expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que façam uma representação gráfica da situação. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre quantos dias ou ciclos serão necessários para a transmissão atingir um terço da população.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução apresentada. Sejam I os números de infectados e c a quantidade de ciclos, sabemos que 1 ciclo equivale a 3 dias.

Tabela 2: Relação entre Infectados e Ciclos.

Quantidade de Ciclos	Números de Infectados	I	I
1	1	1	3^0
2	3	3	3^1
3	9	$3 \cdot 3$	3^2
4	27	$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3}$	3^3
5	81	$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4}$	3^4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c		$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 3}_{c-1}$	3^{c-1}

Assim, considerando Tabela 2 e suas sucessões de valores, podemos generalizar a situação e obter a expressão que representa o número de infectados que é $I(c) = 3^{c-1}$, sendo c a quantidade de ciclos.

Como um terço de 19683 é $\frac{1}{3} \cdot 19683 = 6561$. Agora, queremos encontrar a quantidade de ciclos que serão necessários para 6561 pessoas da cidade serem infectadas, ou seja, $I(c) = 6561$. De $I(c) = 3^{c-1}$ temos que $6561 = 3^{c-1}$, como $6561 = 3^8$, segue que $3^{c-1} = 3^8$, daí $c - 1 = 8$, logo $c = 9$. Então, sabendo que cada ciclo possui 3 dias, temos que $3 \cdot 9 = 27$. Portanto são necessários 27 dias para que um terço da população esteja infectada.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para identificar o número de infectados em função dos ciclos. Na Figura 24 temos a representação gráfica de uma Função do Tipo Exponencial, $I(c) = b \cdot 3^{c-1}$ com $b = 1$ é a quantidade inicial de infectados, enquanto c indica a quantidade de ciclos para o qual os números de infectados sofrem variações. Caso queira outros valores para b, basta no comando 3 escolhe o valor desejado quantas vezes quiserem, a partir de cada escolha a representação gráfica modificará de forma dinâmica e automática. E pela representação gráfica podemos identificar o crescimento da função que corresponde a situação-problema.

Para ativar a funcionalidade "Criar Controle(s) Deslizante(s)", basta pressionar a tecla ENTER. Antes de inserir os comandos a seguir, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do mouse na opção EixoX : EixoY e após Clique o botão esquerdo do mouse na opção 1 : 1000. Lembrando que ao digitar cada comando, pressione a tecla ENTER.

Comandos:

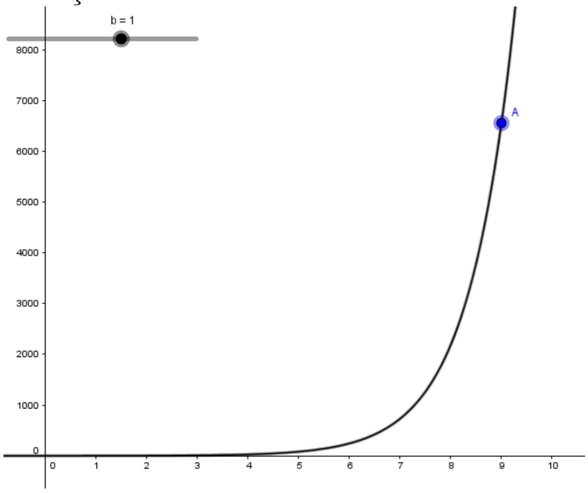
1. I(c) = b*3^{c-1} ;

2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: *b* (Tecla ENTER) ;

3. b=1 ;

4. A=(9, 6561) .

Figura 24: Representação Gráfica da Situação-Problema.



Fonte: Própria (2020)

4.2 Atividade 2

Esta atividade relaciona conceitos de Potenciação e Função Logarítmicas à resolução de um problema de aplicação que envolve outras áreas do conhecimento como a Física e Geologia. Tendo como objetivo fazer com que os discentes consigam: valorizar a leitura e interpretação; reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; identificar a necessidade do uso de logaritmos na resolução de equações inerentes ao problema; utilizar conceitos de Função Logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (UPE – 2012) : Terremotos são eventos naturais que não têm relação com eventos climáticos extremos, mas podem ter consequências ambientais devastadoras, especialmente quando seu epicentro ocorre no mar, provocando tsunamis. Uma das expressões para se calcular a violência de um terremoto na escala Richter é:

$$M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

onde M é a magnitude do terremoto, E é a energia liberada (em joules) e $E_0 = 10^{4,5}$ joules é a energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência. Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão de 11 de março de 2011, que atingiu magnitude 9 na Escala Richter.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual foi a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto? Quais são as condições? Este terremoto atingiu magnitude 9 na Escala Richter e é dado a grandeza da energia liberada E_0 que usado como referência. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? "Sim". Faltam dados? "Não".

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento do educando desenvolver um plano para encontrar a grandeza da energia liberada, adquirir o discernimento de como substituir os valores disponíveis e aplicar na expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem a representação gráfica da situação, juntamente com análise das consequências de alteração dos valores. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre qual a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto do Japão que atingiu magnitude 9.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução apresentada. Queremos o valor de E, sabemos que $M(E) = 9$. De $M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ temos que $9 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$. Como $E_0 = 10^{4,5}$, obtemos $9 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)$, logo $\frac{27}{2} = \log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)$, usando propriedades de potência temos que

$$10^{\frac{27}{2}} = 10^{\log\left(\frac{E}{10^{4,5}}\right)},$$

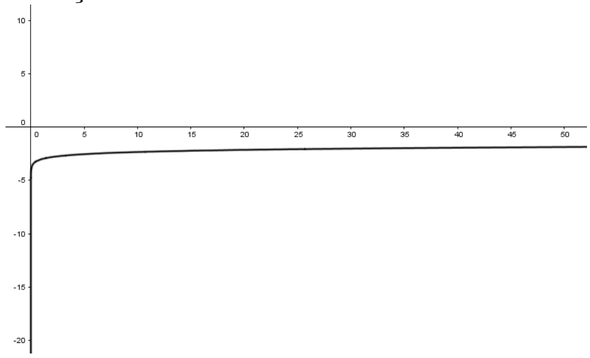
assim $10^{\frac{27}{2}} = \frac{E}{10^{4,5}}$, então $10^{\frac{27}{2}+4,5} = E$. Portanto, $E = 10^{18}$. Concluímos que a ordem de grandeza da energia liberada pelo terremoto 10^{18} joules.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para visualização da representação gráfica da função. Na Figura 25 temos a representação gráfica de uma Função Logarítmica, $M(E) = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ com $E_0 = 10^{4,5}$ que é energia liberada por um pequeno terremoto usado como referência, enquanto E indica a ordem de grandeza da energia liberada por um terremoto para o qual a quantidade dos elementos sofrem variações. Pela Figura 25 podemos visualizar que E precisa de valores extremamente grandes para que $M(E)$ atinja valores positivos, ou seja, acima do eixo x. E também que a função M é crescente.

Comandos:

1. M(E) = 2/3* log10(E/10^{4.5}) .

Figura 25: Representação Gráfica da Situação-Problema.



Fonte: Própria (2020)

4.3 Atividade 3

Esta atividade relaciona conceitos da Função do Tipo Exponencial à resolução de um problema de aplicação que envolve outras áreas do conhecimento como a Química e Antropologia. Tendo como objetivo fazer com que os discentes consigam: valorizar a leitura e interpretação; manipular expressões inerentes ao problema; utilizar conceitos de Função Exponencial e logaritmos para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (ENEM$-$2013) : Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{k \cdot t}$, sendo A a massa inicial e k é uma constante negativa. Considere $\log 2 = 0,3$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 reduza-se a 10% da quantidade inicial?

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual o tempo, em anos, para que a massa do césio-137 reduza-se a 10% da quantidade inicial? Quais são as condições? A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão dada. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? “Sim”. Faltam dados? “Não”.

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento do educando desenvolver um plano para encontrar o tempo para que a massa reduza-se a 10%, adquirir o discernimento de como substituir os valores disponíveis, aplicar na expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem a representação gráfica da situação, juntamente com análise das consequências de alteração dos valores. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre quanto tempo (em anos) para que a massa reduza-se a 10% da quantidade inicial.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução apresentada. Sabemos que a meia-vida do césio-137 é de 30 anos. Aplicando esse valor à expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{k \cdot t}$, podemos substituir o tempo t por 30 e a massa A, quando $t = 30$, por $\frac{A}{2}$. Desde modo $\frac{A}{2} = A \cdot (2,7)^{k \cdot 30}$, logo $(2,7)^{30 \cdot k} = \frac{1}{2}$, que equivale a $(2,7)^{30 \cdot k} = 2^{-1}$. Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros, obtemos que $\log (2,7)^{30 \cdot k} = \log 2^{-1}$, segue que $30 \cdot k \cdot \log(2,7) = -1 \cdot \log 2$. Como $\log 2 = 0,3$, temos que $30 \cdot k \cdot \log(2,7) = -0,3$, então $\log(2,7) = -\frac{0,01}{k}$.

Agora, precisamos descobrir em quanto tempo a massa será apenas 10% da massa inicial, ou seja, $0,1 \cdot A$. Deste modo, temos que $0,1 \cdot A = A \cdot (2,7)^{k \cdot t}$, logo $(2,7)^{k \cdot t} = 0,1$. Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros, obtemos que $\log(2,7)^{k \cdot t} = \log 10^{-1}$, segue que $k \cdot t \cdot \log(2,7) = -1$. Sabendo que $\log(2,7) = -\frac{0,01}{k}$, temos que $k \cdot t \cdot \left(-\frac{0,01}{k}\right) = -1$, logo $t \cdot 0,01 = 1$, então $t = \frac{1}{0,01} = 100$. Portanto, em 100 anos, a massa do césio-137 será reduzida para 10% da quantidade inicial.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para verificar a variação da massa no decorrer do tempo. Na Figura 26 temos a representação gráfica de uma Função do Tipo Exponencial, $M(t) = a \cdot (2,7)^{k \cdot t}$, sendo $k = -\frac{0,01}{\log(2,7)}$, considerando $\log(2,7) = 0,431363764$, temos que k é aproximadamente $-0,02318229$, e a massa inicial consideramos $a = 1$ unidade (u), enquanto t indica o tempo (em anos) para o qual, a quantidade dos elementos sofrem variações. Caso queira outros valores para a, basta no comando 3 escolhe o valor desejado quantas vezes quiserem, a partir de cada escolha a representação gráfica modificará de forma dinâmica e automática. E pela representação também podemos verificar o decrescimento da função que corresponde a situação-problema.

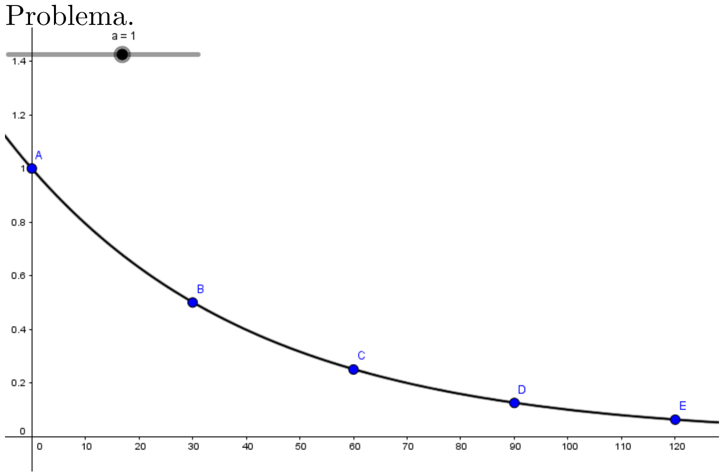
Por intermédio dos pontos destacados na Figura 26 podemos visualizar que quando t está variando (de 30 a 30 anos) a massa do material radioativo $M(t)$ reduz-se à metade da massa anterior.

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do mouse na opção EixoX : EixoY e após Clique o botão esquerdo do mouse na opção 50 : 1.

Comandos:

1. M(t) = a*(2.7)^{-0.02318229*t} ;
2. Criar Controle(s) Deslizante(s) para: a (Tecla ENTER) ;
3. a=1 ;
4. A=(0, 1) ;
5. B=(30, 0.5) ;
6. C=(60, 0.25) ;
7. D=(90, 0.125) ;
8. E=(120, 0.0625) .

Figura 26: Representação Gráfica da Situação-Problema.



Fonte: Própria (2020)

4.4 Atividade 4

Esta atividade relaciona conceitos da Função Exponencial e logaritmos à resolução de um problema na Matemática Financeira. Tendo como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; manipular expressões inerentes ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; formalizar a lei que descreve um determinado fenômeno; aprender acerca do tratamento de dados com a montagem de tabelas e construção gráfica.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (MIRANDA; ASSIS, [s.d.]) : O Senhor Francisco possui um capital de 10000 reais e deseja investi-lo em um Banco que detém rendimentos a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Qual é a quantidade mínima de anos para que o montante de Francisco seja maior que o dobro do capital inicial. Considere $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual é a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital inicial? Quais são as condições? Capital de 10000 reais aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? “Sim”. Faltam dados? “Não”.

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento do educando desenvolver um plano para encontrar a quantidade mínima de anos, encontrar a sequência de crescimento dos juros, organizar os dados para encontrar a expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que faça uma representação gráfica da situação. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital inicial.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos. Sejam $M(t)$ o montante desta aplicação após t anos e C o capital aplicado. Se $t = 1$ teremos $M(1) = C \cdot 1,08$, se $t = 2$ disporemos $M(2) = C \cdot (1,08) \cdot (1,08) = C \cdot (1,08)^2$, se $t = 3$ possuiremos $M(3) = C \cdot (1,08) \cdot (1,08) \cdot (1,08) = C \cdot (1,08)^3$, e se $t = 4$ teremos $M(4) = C \cdot (1,08) \cdot (1,08) \cdot (1,08) \cdot (1,08) = C \cdot (1,08)^4$, generalizando para t anos temos que

$$M(t) = C \cdot \underbrace{(1,08) \cdot (1,08) \cdot \cdots \cdot (1,08)}_{t} = C \cdot (1,08)^t.$$

Então, $M(t) = C \cdot (1,08)^t$.

Deste modo, como queremos que $M(t) = 2 \cdot C$, temos que $2 \cdot C = C \cdot (1,08)^t$, assim

$2 = (1,08)^t$. Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros obtemos que $\log 2 = \log(1,08)^t$. Podemos reescrever $1,08$ como $\dfrac{2^2 \cdot 3^3}{100}$, desta forma

$$\log 2 = \log\left(\frac{2^2 \cdot 3^3}{100}\right)^t,$$

assim $\log 2 = t \cdot (\log 2^2 + \log 3^3 - \log 100)$, daí $\log 2 = t \cdot (2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 - \log 100)$. Como $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$. Segue que $0,3 = t \cdot (2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,48 - 2)$, logo $0,3 = t \cdot (0,6 + 1,44 - 2)$. Então, $t = \dfrac{30}{4} = 7,5$. Portanto, a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital aplicado é 8 anos.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para testes práticos alternativos na identificar a variação do montante no decorrer do tempo de aplicação e analisar quais os valores de t que aproxima de $M(t) = 20000$. Na Figura 27 obtemos a representação gráfica de uma Função do Tipo Exponencial, $M(t) = 10000 \cdot (1,08)^t$, temos que t indica a variação de tempo (em anos) da aplicação do C para o qual, a quantidade dos elementos sofrem variações. E pela representação gráfica podemos verificar o crescimento da função que corresponde a situação-problema

Por intermédio dos pontos destacados na Figura 26 podemos visualizar que quando $t = 9$ temos que $M(t) = 10000 \cdot (1.08)^9 = 19990,05$, e já quando $t = 10$ temos que

$$M(t) = 10000 \cdot (1.08)^{10} = 21589,25.$$

Ao analisamos a representação gráfica verificamos que a quantidade mínima de anos para que o montante seja maior que o dobro do capital aplicado é 10 anos. Com isto, ao sabemos que a nossa solução para o problema estar utilizando aproximações para $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$, obtivemos um valor para $M(t)$ menor que o dobro do capital aplicado, pois com $t = 8$ temos que

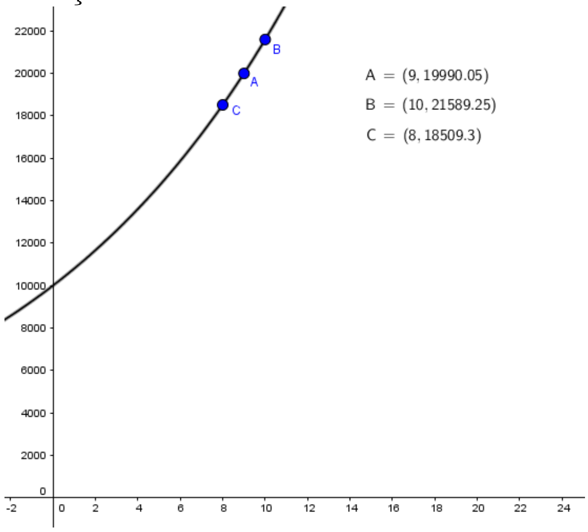
$$M(t) = 10000 \cdot (1.08)^8 = 18509,3.$$

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do mouse na opção EixoX : EixoY e após Clique o botão esquerdo do mouse na opção 1 : 1000.

Comandos:

1. M(t) = 10000*(1.08)^t ;
2. A=(9, 10000*(1.08)^9) ;
3. B=(10, 10000*(1.08)^10) ;
4. C=(8, 10000*(1.08)^8) .

Figura 27: Representação Gráfica da Situação-Problema.



Fonte: Própria (2020)

4.5 Atividade 5

Esta atividade relaciona conceitos da Função Exponencial à resolução de um problema a respeito do jogo de xadrez. Tendo como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; representar graficamente os valores de uma tabela; aprender acerca do tratamento de dados com a montagem de tabelas e construção gráfica.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (MIRANDA; ASSIS, [s.d.]) : Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma côrte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de trigo da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente.

a) De acordo com a lenda, qual é quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 10 do tabuleiro?

b) Escreva uma função que expresse a quantidade de grãos de trigo em função do número de casas do tabuleiro.

c) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual é quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 10, expressão que representa a situação e quantos grãos devem ser colocados na última casa? Quais são as condições? Colocar 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? "Sim". Faltam dados? "Não".

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento do educando desenvolver um plano para encontrar as soluções, encontrar a sequência de crescimento dos grãos de trigos, organizar os dados na forma de tabela para daí identificar a expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem a representação gráfica da situação, juntamente com alguns pontos inteiros em destaque. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre as interrogações dos itens a), b) e c).

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução apresentada. Sejam $G(c)$ os números de grãos de trigo e c os números de casas.

Tabela 3: Relação entre Grãos e Casas.

Quantidade de Casas	Números de Grãos	$G(c)$	$G(c)$
1	1	1	2^0
2	2	2	2^1
3	4	$2 \cdot 2$	2^2
4	8	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3}$	2^3
5	16	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4}$	2^4
6	32	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5}$	2^5
7	64	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6}$	2^6
8	128	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7}$	2^7
9	256	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8}$	2^8
10	512	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{9}$	2^9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c		$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{c-1}$	2^{c-1}

Assim, considerando Tabela 3 e suas sucessões de valores, podemos generaliza a situação e obter a expressão que representa a quantidade de grãos é $G(c) = 2^{c-1}$ com onde c é os números naturais de casas que pertence de 1 a 64. Agora, verifique a linha 11 da Tabela 3, observa-se que na casa 10, há 512 grãos de trigo. A quantidade de grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez na forma de potência 2^{63}, pois $c = 64$.

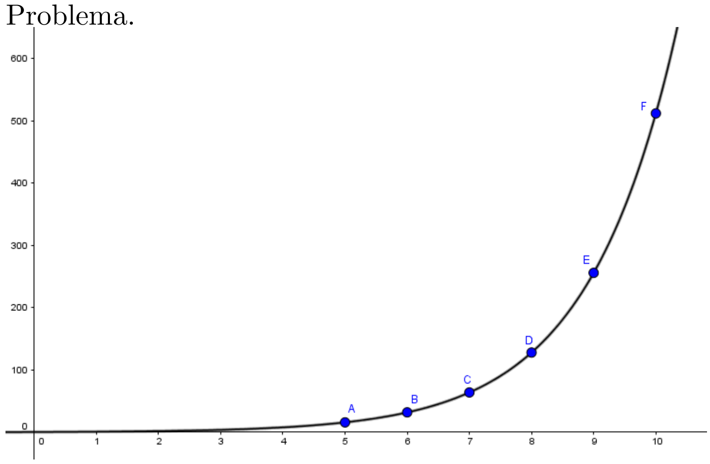
Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para testes práticos para identificar a quantidade de grãos em função do número de casas no tabuleiro. Na Figura 28 temos a representação gráfica de uma Função Exponencial, $G(c) = 2^{c-1}$, temos que c indica a quantidade de casas para o qual os números de grãos sofrem variações. E com os pontos em destaque na representação gráfica podemos verificar o crescimento da função que corresponde a situação-problema.

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do mouse na opção EixoX : EixoY e após Clique o botão esquerdo do mouse na opção 1 : 100.

Comandos:

1. G(c) = 2^{c-1} ;
2. A=(5, 16) ;
3. B=(6, 32) ;
4. C=(7, 64) ;
5. D=(8, 128) ;
6. E=(9, 256) ;
7. F=(10, 512) ;

Figura 28: Representação Gráfica da Situação-Problema.



Fonte: Própria (2020)

4.6 Atividade 6

Essa atividade relaciona conceitos da Função Logarítmica à resolução de um problema de Intensidade Sonora que está intimamente relacionado à Física. Tendo como objetivo fazer com que os discentes consigam: reconhecer e interpretar informações relativas ao problema; manipular expressões inerentes ao problema; identificar graficamente as variáveis e a situação de seu crescimento; utilizar conceitos de Função Logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.

SITUAÇÃO-PROBLEMA - Adaptado (UEPA – 2007) : Os carnavais conseguem reunir uma grande quantidade de pessoas que se divertem ao som dos famosos Trios Elétricos. Os frequentadores desses eventos ficam submetidos a uma excessiva exposição sonora, que podem causar dores e lesões auditivas. A expressão utilizada para medir o Nível de Intensidade Sonora (NIS), em decibel (dB), é dada por:

$$NIS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

onde I é a intensidade de energia qualquer e I_0 é a intensidade de energia do limiar de audição. A nocividade auditiva começa a partir de 80 dB. Se num desses eventos descritos acima a intensidade de energia for quadruplicada, qual será o Nível de Intensidade Sonora. Considere $\log 4 = 0,6$.

Compreensão do problema: O que é solicitado? Qual o Nível de Intensidade Sonora? Quais são as condições? Se intensidade de energia for quadruplicada. É possível satisfazer as condições e elas são suficientes ou não para determinar a solução? “Sim”. Faltam dados? “Não”.

Construção de uma resolução: Após a descoberta dos dados e das relações, o docente volta a desafiar os estudantes a buscarem conexões entre os dados e o que é solicitado. Momento do educando desenvolver um plano para encontrar o nível de intensidade sonora, adquirir o discernimento de como substituir os valores disponíveis, aplicar na expressão que representa a situação e pensar na estratégia para execução do plano. Solicitar aos educandos que desenhem a representação gráfica da situação. Finalizada a discussão, o docente deve desafiar os discentes a refletirem sobre qual será o novo Nível de Intensidade Sonora.

Execução escolhida: Após ter o plano em mãos, o docente poderá observar as concepções dos educandos frente à resolução. Queremos quadruplicar a intensidade de energia, temos que

$$NIS = 10 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot I}{I_0}\right),$$

logo $NIS = 10 \cdot (\log 4 + \log I - \log I_0)$, assim $NIS = 10 \cdot \log 4 + 10 \cdot (\log I - \log I_0)$. Como $\log 4 = 0,6$, segue que $NIS = 10 \cdot 0,6 + 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, daí $NIS = 6 + 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Sabemos que $NIS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Então, $NIS = 6 + NIS$. Portanto, quando a intensidade de energia for quadruplicada o Nível de Intensidade Sonora aumentará 6 dB.

Revisão da solução: Utilizaremos o GeoGebra como ferramenta para identificar a intensidade sonora em função das intensidade de energia. Na Figura 29 temos a representação gráfica das Funções Logarítmicas que mede o NIS,

$$N(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

e

$$N_0(I) = 10 \cdot \log\left(\frac{4 \cdot I}{I_0}\right)$$

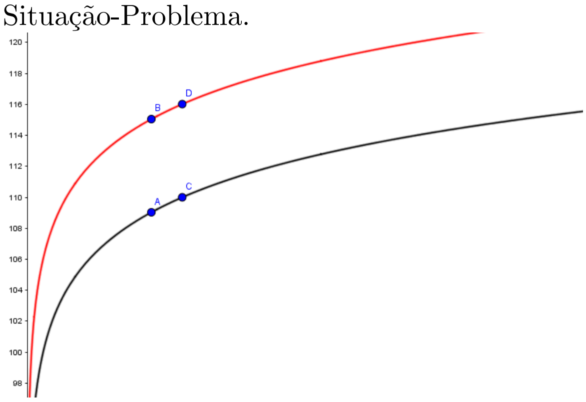
com $I_0 = 10^{-12}$ que é intensidade sonora de referência, correspondente ao limiar da audição, enquanto I indica a intensidade de energia qualquer para o qual a quantidade dos elementos sofrem variações. Pela Figura 29 podemos visualizar que ao quadruplicamos o valor de I obtemos a diferença de 6 unidade (no nosso caso de dB) em relação a $N(I)$ e $N_0(I)$. Pois ao analisamos os pontos A e B temos que possuem o mesmo valor de I e uma diferença de 6 dB entre $N(I)$ e $N_0(I)$, isto também acontece ao analisamos os pontos C e D. Outro fato que podemos verificar é que as funções são crescentes.

Antes de inserir os comandos, primeiro altere a escala da representação gráfica: Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização; Clique com o botão esquerdo do mouse na opção EixoX : EixoY e após Clique o botão esquerdo do mouse na opção 1 : 100.

Comandos:

1. N(I) = 10* log10(I* 10ˆ12) ;
2. N_{0}(I) = 10* log10(4*I* 10ˆ12) ;
3. A=(0.08, 10* log10(0.08* 10ˆ12)) ;
4. B=(0.08, 10* log10(4*0,08* 10ˆ12)) ;
5. C=(0.1, 10* log10(0.1* 10ˆ12)) ;
6. D=(0.1, 10* log10(4*0.1* 10ˆ12))

Figura 29: Representação Gráfica da Situação-Problema.



Fonte: Própria (2020)

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho, utilizamos a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, tendo como objetivos elaborar uma revisão bibliográfica sobre MRP e TIC e realizar um estudo referente as Funções Exponenciais e Logarítmicas, fizemos caracterizações, trouxemos teoremas e propriedades associadas a estes conceitos. Além disso, desenvolvemos uma proposta para o ensino que contemplou a temática por intermédio da MRP mediada pela ferramenta Geogebra, orientadas pelas concepções de Polya (1995).

Ao atingimos tais objetivos conseguimos obter a resposta da problemática inicial, como elaborar as atividades didáticas para ensinar funções exponenciais e logarítmicas utilizando a MRP atrelada ao GeoGebra. Destacamos que Costa et al. (2020) é alguns resultados deste estudo que foi apresentado no formato de anais online, no I Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia na modalidade resumo simples, encontrado no Apêndice deste trabalho de forma detalhada.

A possibilidade de propor atividades relacionadas com funções utilizando MRP permite que este conteúdo não seja estudado apenas seguindo sua definição. Apresentamos uma proposta em que tais funções podem ser estudados por meio de um recurso digital fácil de ser encontrado e instalado, que é o GeoGebra, para que os professores reflitam sobre as diversas formas de ensinar determinados conteúdos por meio de situações dinâmicas, em que os estudantes podem fazer verificações e assim estimular o envolvimento com a disciplina.

Outra situação que gostaríamos de deixar como ponto de reflexão aos professores que ensinam matemática na Educação Básica é a oportunidade de vincular os conteúdos estudados com aspectos do cotidiano ou interdisciplinares. A exposição sobre as funções permite aos discentes pensarem em situações que podem representarem informações, expressar modelos ou elaborar conjecturas. Deste forma não se pode mecanizar o ensino da MRP e que a condução do estudante, por intermédio de perguntas podem torná-los independentes para a Resolução de Problemas.

Este modo de ensinar poderá aguçar as habilidades dos educandos, proporcionando a explicação e o entendimento de lidar com a realidade dos problemas, assim colocá-los em desafios que exigem dedicação. Ao trabalhamos com este tipo de atividade estamos possibilitando o ampliamento do conhecimento, por meio do desenvolvimento do raciocínio lógico. Portanto, esta proposta poderá sanar as dificuldades encontradas em sala de aula, oferecendo aos professores soluções didáticas para ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas.

Contudo, foi satisfatório elaboramos esta proposta de ensino para professores que primem pela participação efetiva dos discentes na construção do conhecimento, podendo proporcionar um ambiente que desperta o gosto pelo raciocínio independente, em contraposição a visão do docente como transmissor do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. de S. **Análise Matemática para Licenciatura**. São Paulo: Blucher, 2001. 155p.

BORBA, M.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autênticos, 2003. 100p.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 508p.

BRANDT, S. T. J.; MONTORFANO, C. O software geogebra como alternativa no ensino da geometria em um mini curso para professores. **Dia a Dia Educação**, 2008. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf>. Acesso em: 19 ago. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio. Brasília, DF, 1998.

______. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília, DF, 2018.

CARIDADE, C. M. R. Tecnologias de informação e comunicação para o enriquecimento no ensino/aprendizagem. **II Congresso Internacional TIC e Educação - TicEDUCA2012**, p. 945-960, 2012. Disponível em: <http://ticeduca.ie.ul.pt/atas/pdf/8.pdf>. Acesso em: 29 maio 2020.

CARVALHO, J. B. P. de; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática.** Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2012. 269p.

COSTA, E. A. da; GOMES, A. R. A Influência do uso de Tecnologias no Ensino da Matemática. **Tecnologia Educacional - ANO XXXIV**, n. 172/173, p. 35-43, jan./jun. 2006.

COSTA, E. A. da.; SILVA, J. da C.; SILVA, V. C. Resolução de problemas, tecnologia e o lúdico: ensino de funções exponenciais e logarítmicas. **Anais do I Congresso Brasileiro

Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, p. 6635, Diamantina(MG) Online, 2020. Disponível em: <www.even3.com.br/anais/icobicet2020>. Acesso em: 10 set. 2020.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1991. 176p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingos. 5. ed. Campinas, SP: UNICAMP, 2011. 848p.

FIORENTINI, D. **Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática**: o caso da produção científica em cursos de Pós-Graduação. 1994. 414 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1994.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projeto de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 175p.

GIRALDO, V. et al. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 423p.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Logaritmos. vol.2. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013. 218p.

LIMA, E.L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. vol.1. 9. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 238p.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1. ed. 3. reimpressão. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2017. 289p.

MIRANDA, T.; ASSIS, C. **Portal da Matemática OBMEP:** Módulos de Ensino. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/index?a=1#5>. Acesso em: 15 mar. 2020.

MONTEIRO, Sara Mourão. **Glossário Ceala:** Atividade didática. Disponível em: <http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/atividade-didatica>. Acesso em: 25 set. 2020.

OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. **Função Composta**. 2013. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/funcao-composta.htm>. Acesso em: 25 set. 2020.

ONUCHIC, L. de la R. **A Resolução de Problemas na Educação Matemática**: Onde estamos e para onde iremos? Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, jan./jun. 2013. Disponivel em: <www.upf.br/seer/index.php/rep>. Acesso em: 26 maio 2020.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: Pesquisa em Movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

PINTO, N. B.; SOARES, M. T. C. **Metodologia da Resolução de Problemas.** ANPED - GT19, 2011. Disponivel em: <http://www.ufrrj.br/emanped/>. Acesso em: 22 maio 2020.

POLYA, G. Dez mandamentos para professores. **Revista do Professor de Matemática**, v. 10, p. 2–10, 1987. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/10/2. htm>. Acesso em: 15 set. 2020.

______. **A Arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p. Tradução de: How to solve it.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A Solução de Problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 13-42.

ROQUE, T. M. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512p.

TENENTE, Luiza. Ideb: desde 2013, ensino médio brasileiro não atinge nível esperado de qualidade. **G1**, 15 set. 2020. Disponível em: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2020/09/15/desde-2013-ensino-medio-brasileiro-nao-atinge-nivel-esperado-de-qualidade-no-ideb.ghtml>. Acesso em: 15 nov. 2020.

VÁZQUEZ, S. et al. El concepto de función através de la historia. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 4, n. 16, p. 141–151, 2008.

APÊNDICE

Alguns resultados deste estudo foi apresentado no formato de anais online, no I Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia - Um Mundo em Constante Transformação na modalidade resumo simples, área temática ENSI - Ensino em Ciência e Tecnologia, evento online, de 31 de agosto a 04 de setembro de 2020, conforme a Figura 30.

Figura 30: Apresentação dos Resultados de Pesquisa.

*Anais do I CoBICET – **Resumo simples***
Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia
Evento online – 31 de agosto a 04 de setembro de 2020

I CoBICET
I Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, TECNOLOGIA E O LÚDICO: ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS.

Vilmar Costa Silva[1], Eudes Antonio da Costa[2], Jabson da Cunha Silva[3]

[1] Universidade Federal do Tocantins-UFT, Arraias, Brasil (vilmar.costa@mail.uft.edu.br)
[2] Universidade Federal do Tocantins-UFT, Arraias, Brasil
[3] Centro Universitário Católica do Tocantins-Unicatolica, Palmas, Brasil

Resumo: Nesta pesquisa abordaremos as relações qualitativas entre as propriedades da expressão algébrica, o comportamento do gráfico e os valores da função exponencial. Estas representações devem ser exploradas pelo (a) docente de forma articulada, quando uma delas for focada, é importante, sempre que possível, fazer referência às demais e explicitar as relações entre elas. As tecnologias e o lúdico serão aliados importantes para estabelecer estas articulações. Em geral, as noções de função são frequentemente abordadas por meio de procedimentos algébricos rotineiros, levando os estudantes a desenvolverem uma concepção confusa, simplesmente conhece a expressão algébrica. É importante relacionar e articular: valor numérico, representação algébrica e representação gráfica nas resoluções. A Base Nacional Comum Curricular (2018) apregoa a utilização de tecnologias digitais e aplicativos computacionais, tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, e deve ser iniciado no Ensino Fundamental, assim buscaremos as competências e as habilidades nela declarada, para isto temos como objetivo propor atividades didáticas para professores ensinarem o conteúdo matemático de funções exponenciais e logarítmicas aos estudantes do 1º Ano do Ensino Médio da Educação Básica, utilizando a resolução de problema como metodologia de ensino atrelada com as ferramentas de ensino: Tecnologias da Informação e Comunicação (Aplicativo Computacional Geogebra) e os Jogos e Materiais Manipuláveis. Além disso, é fundamental observarmos que a ideia não é simplesmente usar o Geogebra para verificar o que está certo ou errado nos gráficos das funções. Em lugar disso, a visualização no Geogebra deve ser explorada para motivar reflexões e conjecturas sobre as funções, relações e propriedades devem ser verificadas posteriormente por meio de argumentos e resultados matemáticos. Esta pesquisa é desenvolvida por meio de uma revisão bibliográfica, sob as lentes da abordagem qualitativa que mostra aspectos subjetivos e atingem motivações não explicitas, ou mesmo conscientes de maneira espontânea, amparada nos eixos categorizados sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática desenvolvido pelo pesquisador Polya (1995). No final faremos uma revisão de forma crítica e analítica das atividades propostas.

Palavras-chave: Ensino; Resolução de Problemas; Tecnologias; Lúdico.

Fonte: Própria (2020)