



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ADAILSON RAMON PINHEIRO DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA NA ESFERA: UMA PROPOSTA DE ENSINO E
APRENDIZAGEM

QUIXADÁ-CEARÁ

2020

ADAILSON RAMON PINHEIRO DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA NA ESFERA: UMA PROPOSTA DE ENSINO E
APRENDIZAGEM

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues.

QUIXADÁ-CEARÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Oliveira, Adailson Ramon Pinheiro de .

Trigonometria na esfera: uma proposta de ensino e aprendizagem [recurso eletrônico] / Adailson Ramon Pinheiro de Oliveira. - 2020

Um arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 50 folhas.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2020.

Área de concentração: Geometria..

Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues..

1. Trigonometria esférica. 2. Ensino de matemática. 3. Interdisciplinaridade. I. Título.

ADAILSON RAMON PINHEIRO DE OLIVEIRA

TRIGONOMETRIA NA ESFERA: UMA PROPOSTA DE ENSINO E
APRENDIZAGEM.

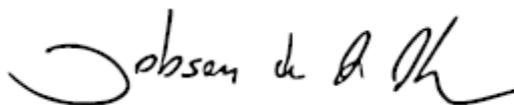
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Aprovada em: 4 de dezembro de 2020

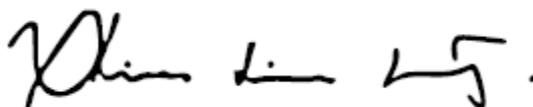
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE



Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Ulisses Lima Parente
Universidade Estadual do Ceará – UECE

À **Deus**, pela coragem e o discernimento, por ser minha fortaleza, por estabelecer minha saúde e por ser meu guia neste período de formação. À minha família: Adailton Nascimento de Oliveira (pai), Antônia Rojanes Dantas Pinheiro (mãe) , Adailma Rayane Pinheiro de Oliveira (irmã), Adayrton Ramires Pinheiro de Olivera (irmão), Bruno Pinheiro (Irmão), Alana Mara de Souza Barros (esposa), Anne Ketlyn Barros Oliveira (filha), Suziane Oliveira Rodrigues (sobrinha) e Sávio Vinícius Oliveira Rodrigues (sobrinho).

AGRADECIMENTOS

À Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central-FECLESC, campus de extensão da Universidade Estadual do Ceará, por me oportunizar uma formação acadêmica de pós-graduação com ensino de qualidade.

Aos professores, Dr. Jobson de Queiroz Oliveira e Dr. Ulisses Lima Parente, pela compreensão e empatia ao compartilhar seus conhecimentos ao decorrer desses anos. Ao professor Me. Antonio Jose Melo de Queiroz, pela colaboração e os conhecimentos compartilhados.

Ao meu professor orientador, Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues, pela partilha de saberes, por me incentivar nos períodos de intempéries, por todas as orientações, sua paciência admirável e por todo o apoio necessário para que hoje eu tivesse a honra de comemorar este momento glorioso da minha vida.

Aos meus pais, o senhor Adailton e a dona Rojanês; aos meus irmãos, Adailma e Adayrton; à minha esposa, Alana Mara Barros; à minha filha, Anne Ketlyn; aos meus sobrinhos, Suzyane Oliveira e Sávio Vinicius, todos estes, por estabelecerem a base da minha existência.

Aos meus colegas da turma de Mestrado (2018 - 2019) pela partilha dos bons momentos, pelas risadas e conversas jogadas fora. Pelas pesquisas, trabalhos produzidos e por todas as experiências vivenciadas na academia.

Todos estes que de maneira extraordinária e excepcional colaboraram direta e indiretamente para a minha formação, os meus mais sinceros agradecimentos.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas beleza suprema...”

(Bertrand Russell)

RESUMO

O presente trabalho, trata de uma proposta de como abordar trigonometria esférica no ensino médio, relacionando – a com trigonometria e geometria de uma maneira geral, já ensinada na referida etapa da educação básica. Na introdução (capítulo 1), o leitor poderá se apropriar de algumas discussões a respeito do que diz a BNCC, documento que direciona as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelo aluno do ensino médio. Além disso, sobre o ponto de vista do processo de ensino aprendizagem, inclui-se citações sobre aprendizagem significativa e interdisciplinaridade, não ficando de fora, aspectos históricos que levaram ao desenvolvimento da trigonometria esférica. No capítulo 2, é feita uma breve apresentação do modelo esférico e em particular, demonstrações de teoremas sobre trigonometria esférica. No capítulo 3, algumas aplicações, que podem ser discutidas com os alunos, são propostas, com ilustrações que podem ser facilmente reproduzidas no google maps, e no 4 capítulo, temos uma breve reflexão sobre os assuntos abordados nos três primeiros capítulos.

Palavras-chave: Trigonometria esférica. Ensino de matemática. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

The present work deals with a proposal on how to approach spherical trigonometry in high school, relating it to trigonometry and geometry in a general way, already taught in the referred stage of basic education. In the introduction (chapter 1), the reader will be able to appropriate some discussions about what the BNCC says, a document that directs the competences and skills that should be developed by the high school student. In addition, from the point of view of the teaching-learning process, quotes about significant learning and interdisciplinarity are included, not being left out, historical aspects that led to the development of spherical trigonometry. In chapter 2, a brief presentation of the spherical model is made and, in particular, demonstrations of theorems about spherical trigonometry. In chapter 3, some applications, which can be discussed with students, are proposed, with illustrations that can be easily reproduced on google maps, and in chapter 4, we have a brief reflection on the subjects covered in the first three chapters.

Keywords: Spherical trigonometry. Mathematics teaching. Interdeidiplinarity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Representação da fração formada pelas cidades de Alexandria e Siena.....	12
Figura 2 –	Melancia	15
Figura 3 –	Esfera e elementos	16
Figura 4 –	Representação da interseção da superfície esférica S com o plano β passando pelo seu centro.....	17
Figura 5 –	Elemento do globo terrestre.....	17
Figura 6 –	Fuso esférico	18
Figura 7 –	Triângulo esférico	19
Figura 8 –	Triângulo esférico ABC e as semirretas Ab e Ac tangentes respectivamente a aos lados AB e AC.....	20
Figura 9 –	Triângulo esférico	21
Figura 10 –	Triângulo esférico (demonstração da lei dos cossenos para triângulos esféricos)	23
Figura 11 –	Triângulo esférico retângulo	28
Figura 12 –	Sistema de Coordenadas Geográficas	30
Figura 13 –	Triângulo esférico que auxilia na resolução do problema....	30
Figura 14 –	Distância entre Breeder River DC e Golfo de Bótnia.....	33
Figura 15 –	Ilustração geométrica do problema	34
Figura 16 –	Ilustração da trajetória AB entre as cidades de Cuenca na Espanha e Daşoguz no Turcomenistão.....	34
Figura 17 –	Rota de avião no Emirates 225.....	35
Figura 18 –	Trajectoria no mapa da distância entre Dubai e São Francisco	36
Figura 19 –	Trajectoria entre Dubai e São Francisco no Globo terrestre	36
Figura 20 –	Esfera celeste e seus elementos.....	38
Figura 21 –	Elementos do sistema de coordenadas horizontais.	39
Figura 22 –	Sistema equatorial de coordenadas	40
Figura 23 –	Sistema de coordenadas horário	41
Figura 24 –	Triângulo de posição.....	42
Figura 25 –	Declividade de acordo com as estações do ano.	44
Figura 26 –	Posições da Terra em relação ao Sol.	45
Figura 27 –	Previsão do tempo para a cidade de Quixadá – CE.....	46

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	TRIGONOMETRIA NA ESFERA	15
2.1	Lei dos cossenos para triângulos esféricos.....	22
2.2	Lei dos senos para triângulos esféricos.....	25
2.3	Teorema de Pitágoras para triângulos esféricos.	28
3	APLICAÇÕES.....	29
3.1	Coordenadas Geográficas.....	29
3.2	Coordenadas Astronômicas	37
4	CONCLUSÕES.....	48
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

Ainda no ensino médio, alunos do 2º ano desta etapa, estudam conceitos como: circunferências máximas (quando no estudo da esfera), comprimentos e medidas de arcos. Além disso, é proposto para estudo o significado e como calcular o seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante de ângulos. Um estudo desses temas é abordado por Alves (2017).

Porém, mesmo com essa bagagem, a primeira impressão de alunos de um curso de licenciatura em matemática sobre geometrias não euclidianas não foi tão positiva segundo Bagio et al (2014). Este estudo foi realizado no Paraná logo após a inserção de tópicos de geometrias não euclidianas no currículo das escolas de ensino médio. Ainda citado por Bagio et al (2014) tem-se Santos (2009) e Caldatto (2011), que comentam sobre o despreparo dos professores da rede estadual de ensino para ensinar tais conteúdos.

Diante dos estudos feitos, é possível ver que esse despreparo é generalizado, uma vez que a discussão sobre geometrias não euclidianas não é proposta na Base Nacional Curricular Comum – BNCC, tão pouco pela maioria das diretrizes curriculares dos estados. No intuito de facilitar a compreensão de tais temas, o presente trabalho tem por objetivo mostrar uma possível maneira de estabelecer uma relação entre a trigonometria estudada no ensino médio e a trigonometria esférica. Desse modo, as aplicações da geometria esférica ficarão mais claras para o estudante.

Neste contexto, faz-se o uso da aprendizagem significativa, segundo AUSUBEL et al (1980), ocorre quando o aluno consegue associar o desconhecido a algo que o mesmo já tenha conhecimento. Associação esta que facilita não só a compreensão do aluno, mas também o diálogo do professor, neste reforça-se o quão necessário é se pensar nos saberes que o indivíduo precisa ter, de modo que auxilie na construção de novos saberes para desenvolver novas habilidades.

Outra reflexão interessante citada por Jesus et al (2004) é:

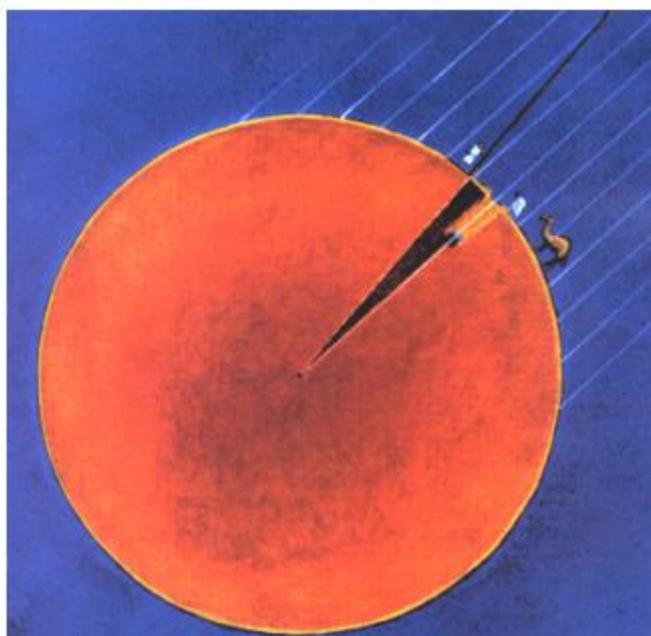
Porque estudar matemática?

– Aonde que eu vou usar isto? É uma pergunta que não raras vezes escutamos em sala de aula, e também não raras vezes nos faltam exemplos concretos que permitam convencê-los de que vale a pena aprender, mesmo que o material não seja de imediata utilidade e aplicabilidade (JESUS, 2004, p.1).

Daí, nota-se o quão importante é ter sempre em mente, ou até mesmo quando for organizar o material de ensino, um exercício ou situação problema que envolva aplicações cotidianas relacionadas ao assunto em estudo.

Há mais de dois mil anos, o matemático grego Erastóstenes utilizou varetas e conhecimentos trigonométricos para descobrir medidas da Terra. Para mais detalhes de como isso aconteceu o leitor pode consultar Vinagre (2002). Na figura 1, é ilustrada a fração da Terra correspondente à distância entre Alexandria e Siene, vale a pena ressaltar que nessa época já se sabia que a forma da Terra era de uma esfera.

Figura 1 - Representação da fração formada pelas cidades de Alexandria e Siene



Fonte: VINAGRE (2017)

Segundo Pereira (2017), a trigonometria surge na antiguidade com as experiências voltadas à astronomia, agrimensuras e navegações. É importante ressaltar que, embora tenha levado muito tempo para se tornar uma área de estudo da matemática e independente da astronomia, a trigonometria surge de necessidades do cotidiano. A partir daí, a busca por aplicações motivou o desenvolvimento da geometria.

Em 1533, Johann Muller Regiomontanus publicou de forma organizada uma Trigonometria Plana e Esférica emancipada da Astronomia, segundo PEREIRA (2017, p.2). Porém, discussões de geometrias não euclidianas realizados por ABREU et al (2015), mostram que tais geometrias só tiveram o seu desenvolvimento depois

de 1777 por Gauss que não publicou nenhum trabalho sobre, Bolayi e Lobachevski que desenvolveram a geometria hiperbólica e Riemann que desenvolveu a geometria elíptica (esférica), a partir da negação do quinto postulado de Euclides. A saber, o quinto postulado de Euclides diz que:

Se uma secante a duas outras formam ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado (ABREU et al, 2015, p.4).

É perceptível na leitura do quinto postulado que para o plano o mesmo vai ser sempre válido, mas como levar um aluno de ensino médio a compreender a forma como está escrito, pode ser algo não tão simples. Daí, sugere-se trabalhar com a versão do postulado que foi apresentado em 1795 por John Playfair, o conhecido postulado das paralelas equivale ao quinto postulado de Euclides, e pode ser enunciada da seguinte forma: Por um ponto P exterior a uma reta, passa uma única reta paralela à reta dada (ABREU et al, 2015, p.4).

É possível verificar que na superfície esférica o quinto postulado não vale, ou seja, dados dois círculos máximos sobre a superfície esférica, eles irão sempre se interceptar em dois pontos. Além disso, serão abordadas algumas propriedades voltadas para triângulos esféricos, que são os objetos de estudo principal deste trabalho.

Segundo Lima (2001), citado por ZANELLA (2013, p.14), não há evidências, em coleções observadas pelo autor, que se estude na educação básica geometrias não euclidianas, acrescentando que isto não ocorre pelo fato de não figurar nas diretrizes curriculares do estado.

Temas como esses podem se encaixar em três das competências gerais da educação básica propostas pela BNCC:

- “1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das

linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.” (BRASIL, 2017, p. 9)

Como se sabe, a BNCC não é um documento que limita o currículo escolar a determinados assuntos, ela apenas determina parte dos assuntos que devem integrar o currículo de cada escola, como mostra o texto de apresentação citado por Pinto (2017, p.1050):

A BNCC é constituída pelos conhecimentos fundamentais aos quais todo/toda estudante brasileiro deve ter acesso para que seus direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento sejam assegurados. Esses conhecimentos devem constituir a base comum do currículo de todas as escolas brasileiras, embora não sejam, eles próprios, a totalidade do currículo, mas parte dele. Deve-se acrescentar à parte comum, a diversificada, a ser construída em diálogo com a primeira e com a realidade de cada sistema educacional sobre as experiências e conhecimentos que devem ser oferecidos aos estudantes e às estudantes ao longo de seu processo de escolarização (BRASIL, 2015, p. 13).

Assim, neste trabalho, seguiremos as competências propostas pela BNCC a serem desenvolvidas nos alunos do ensino médio. Neste sentido, no capítulo 2, apresentaremos o modelo esférico, propriedades e relações métricas dos triângulos esféricos. No capítulo 3, serão expostas aplicações que podem ser abordadas nesta etapa do ensino e, por fim, no capítulo 4, discussões acerca do modelo apresentado.

2 TRIGONOMETRIA NA ESFERA

Iniciaremos com algumas definições básicas de geometria esférica. Em seguida demonstraremos alguns resultados essenciais para o restante do trabalho.

Definição 1: Ponto é aquilo que não tem “partes”. Em geometria euclidiana o que caracteriza um ponto é sua posição no espaço. Quando estudamos geometria analítica, o mesmo já passa a ser identificado por coordenadas cartesianas. Aqui, um ponto continua com o mesmo significado, porém, usaremos uma abordagem via coordenadas geográficas: latitude e longitude.

Definição 2: Dados um ponto O no espaço e um número real positivo r , chama-se **superfície esférica**, o conjunto dos pontos cuja distância ao ponto O é igual r . Por outro lado, aqueles em que a distância a O é menor que r , são ditos **pontos interiores**. E a união desses pontos interiores com a superfície esférica é chamada **esfera**. Por exemplo, há algumas melancias que, tem a forma muito próxima de uma esfera, assim, a superfície é a parte verde, e a esfera é a união da casca (parte verde) com o seu interior (parte vermelha), ver na figura 2.

Figura 2 - Melancia



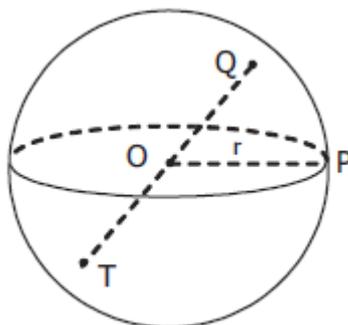
Fonte: CCM Saúde¹.

Definição 3: O segmento de comprimento r que une o centro O da esfera a um ponto qualquer da superfície, é dito raio da esfera. O segmento de reta que une dois pontos quaisquer da superfície esférica é chamado de **corda**, e a corda que passa pelo centro da esfera é chamada de diâmetro da esfera. Daí, dados os pontos P , Q e T sobre a superfície da esfera de raio r e centro O , temos que os segmentos OQ , OT e OP representam o raio, e QT é uma corda, que por passar pelo centro da esfera, é

¹ Disponível em: <https://saude.ccm.net/faq/14660-beneficios-da-melancia>. Acessado em: 14/04/2020.

chamada também de diâmetro. As extremidades do diâmetro de uma esfera, são ditos **pontos antípodas**, por exemplo, Q e T são pontos antípodas na figura 3.

Figura 3 - Esfera e elementos



Fonte: Alves (2009)

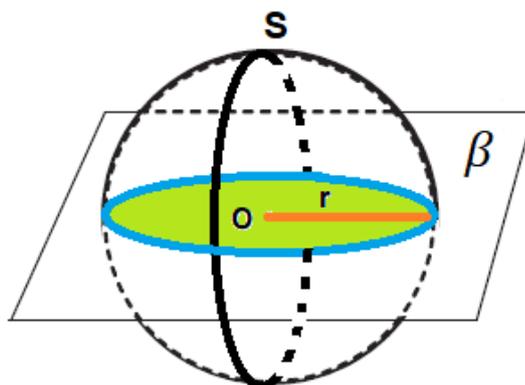
Definição 4: Circunferência máxima é uma circunferência obtida da interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo centro da esfera. Para verificar a existência da circunferência máxima, será demonstrado a seguir um teorema discutido em ALVES (2009), ABREU (2015) e SOUZA (2019). Observando ainda a figura 3 é possível notar que a circunferência de raio OP, divide a esfera em duas partes congruentes, chamadas de hemisférios.

Teorema 1: A interseção da superfície esférica com um plano que passa pelo seu centro, é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.

Demonstração:

Dada a superfície esférica S e o plano β , conforme a figura 4, temos que a região de interseção são os pontos do plano à uma distância r do centro O, por serem pontos também da superfície esférica. O que é exatamente a definição de uma circunferência. Além disso, a interseção é uma figura plana.

Figura 4 - Representação da interseção da superfície esférica S com o plano β passando pelo seu centro

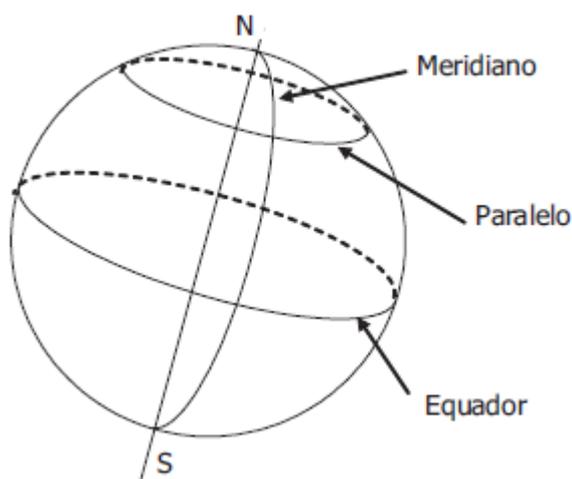


Fonte: elaborada pelo autor

Definição 5: Em uma esfera de eixo **e** (qualquer reta passando pelo centro da esfera), conforme a figura 5, temos alguns elementos importantes, sendo eles:

- Polos: pontos obtidos pela intersecção da superfície esférica com o eixo **e**. Sendo estes relativos à uma seção da esfera, quando são extremidade do diâmetro perpendicular ao plano da seção dada;
- Meridiano: é a seção, cujo plano passa pelo eixo;
- Paralelo: é uma seção perpendicular ao eixo **e** (paralelo ao equador);
- Equador: é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície.

Figura 5 - Elemento do globo terrestre

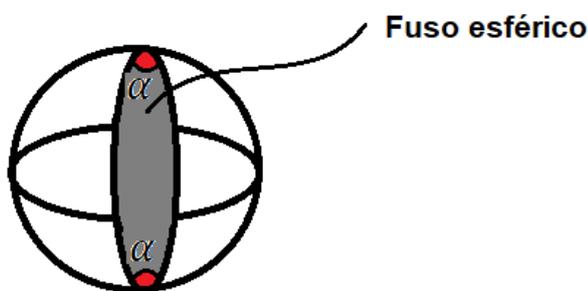


Fonte: ALVES (2009)

Definição 6: Chama-se **fuso esférico**, a parte da superfície esférica que é obtida através do giro de uma semicircunferência de um ângulo entre 0° e 180° conforme figura 6. Além disso, temos que o **fuso completo**, é a união de um fuso com todos os seus pontos antípodas. A área de um fuso esférico é dada por $A = 2\alpha r^2$. De fato, quando $\alpha = 2\pi$, temos $A = 4\pi r^2$. Assim,

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{4\pi r^2}{A} \rightarrow A = \frac{4\pi\alpha r^2}{2\pi} = 2\alpha r^2.$$

Figura 6 - Fuso esférico



Fonte: Elaborada pelo Autor

Proposição 1: Dados dois pontos A e B sobre a superfície esférica, então uma, e somente uma das condições é válida:

1. Existe um único círculo máximo contendo os pontos A e B;
2. Existem infinitos círculos máximos passando por A e B. Neste caso, A e B são pontos antípodas.

Demonstração: Seja \mathbb{S}^2 a superfície esférica, consideremos dois casos:

CASO 1: A e B não são pontos antípodas.

(Existência) Considere o centro O da esfera, como A e B não são antípodas, então O, A e B são não colineares. Portanto, existe um único plano π que passa pela origem e pelos pontos A e B. O círculo máximo \mathcal{C} gerado pela interseção do plano π e a superfície esférica é tal que $A, B \in \mathcal{C}$.

(Unicidade) Se \mathcal{C}' for outro círculo máximo que contém A e B, então da definição de círculo máximo, existe um plano π' tal que $\mathcal{C}' = \pi' \cap \mathbb{S}^2$ e O, A e B $\in \pi'$. Mas, três pontos não colineares, determinam um único plano, portanto $\pi \equiv \pi'$. Logo, $\mathcal{C}' = \pi' \cap \mathbb{S}^2 \equiv \pi \cap \mathbb{S}^2 = \mathcal{C}$. Portanto, o círculo máximo que passa por A e B é único.

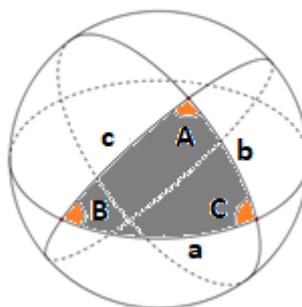
CASO 2: A e B são antípodas.

Considere a reta \overline{AB} , note que $O \in \overline{AB}$, por outro lado, existem infinitos planos contendo a reta \overline{AB} . De fato, basta considerar um ponto $C \in \mathbb{S}^2$, $C \neq A, B$, daí existirá um plano contendo \overline{AB} e o ponto C. Por outro lado, para cada um dos planos gerados, existe um círculo máximo associado, tais círculos sempre contém A e B, logo, existem infinitos círculos máximos passando por A e B.

Definição 7: O menor caminho entre dois pontos sobre a superfície de uma esfera é o menor arco de circunferência máxima definido pelos dois pontos dados e é chamado de **geodésica**.

Definição 8: Chama-se **Triângulo esférico**, a região da superfície esférica delimitada por três arcos de circunferência, como ilustrado na figura 7 em cinza.

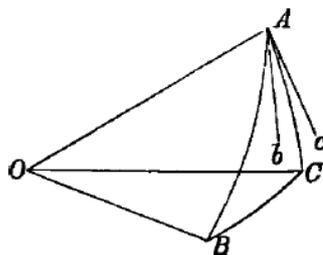
Figura 7 - Triângulo esférico



Fonte: Elaborada pelo autor

Definição 9: Ainda na figura 7, identificados por A, B e C tem-se os ângulos do triângulo esférico representado. Um ângulo sobre uma superfície esférica, é a medida da “abertura” entre dois arcos de circunferência máxima, que é obtida através da medida do ângulo plano entre as duas retas tangentes aos dois arcos dados. Por exemplo o ângulo, na figura 8.

Figura 8 - Triângulo esférico ABC e as semirretas Ab e Ac tangentes respectivamente a aos lados AB e AC



Fonte: TODHUNTER (2006)

Conforme a Figura 8, para se obter a medida do ângulo A, por exemplo, basta calcular a medida do ângulo entre os planos que contém os arcos de comprimento **b** e **c**, ou das retas planas tangentes as duas circunferências. Outra observação a ser feita, é que a medida dos lados de um triângulo esférico, é a medida do arco de circunferência determinado pelos seus dois vértices. Na sequência, temos alguns teoremas referentes a triângulos esféricos.

Teorema de Girard: A área de um triângulo esférico é igual a $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$, onde α, β e γ são amplitudes, em radianos, dos ângulos internos do triângulo e r o raio da esfera.

Demonstração: Seja ABC o triângulo esférico de lados a, b e c e ângulos α, β e γ . Prolongando os lados conforme a figura 9, obtemos três fusos completos. Assim,

- F_1 é o fuso completo determinado por AB e AC, com área igual a $4\alpha r^2$.
- F_2 é o fuso completo determinado por AB e BC, com área igual a $4\beta r^2$.
- F_3 é o fuso completo determinado por AC e BC, com área igual a $4\gamma r^2$.

Por outro lado, $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = \mathbb{S}^2(r)$, onde $\mathbb{S}^2(r)$ é a esfera de raio r . Portanto, denotando por $|F_i|$ a medida da área do fuso F_i , temos pelo principio da inclusão e exclusão que

$$|F_1 \cup F_2 \cup F_3| = |F_1| + |F_2| + |F_3| - |F_1 \cap F_2| - |F_1 \cap F_3| - |F_2 \cap F_3| + |F_1 \cap F_2 \cap F_3| \quad (*)$$

Denotando por \mathcal{A} a área do triângulo ABC, da figura 9, temos que $|F_1 \cap F_2 \cap F_3| = |F_i \cap F_j| = 2\mathcal{A}, i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Logo, de (*), temos

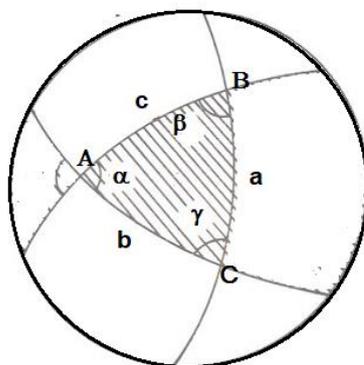
$$4\pi r^2 = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 2\mathcal{A} - 2\mathcal{A} - 2\mathcal{A} + 2\mathcal{A}$$

$$4\pi r^2 = 4r^2(\alpha + \beta + 4\gamma) - 4\mathcal{A}$$

Finalmente,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}}{r^2}.$$

Figura 9 - Triângulo esférico



Fonte: Elaboração do autor

Teorema 2: A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, é maior que π e menor que 3π .

Demonstração:

Seja ABC o triângulo esférico de lados a,b e c e ângulos α, β e γ . Prolongando os lados conforme a figura 9, obtemos 3 fusos completos. Note que a área do fuso completo determinado por AB e BC é $4\beta r^2$; a área do fuso completo determinado por AC e AB é $4\alpha r^2$ e a área do fuso completo determinado por CA e CB é $4\gamma r^2$. Daí, temos que

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 4\mathcal{A} \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}}{r^2} \quad (1)$$

Esta última mostra que a soma é maior que π , resta agora mostrar que é a mesma é menor que 3π . De fato, o ângulo de cada fuso é menor ou igual a π , assim $\alpha + \beta + \gamma \leq 3\pi$. Desta forma, $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. Como queríamos demonstrar.

Como notamos no teorema 2, alguns resultados da geometria euclidiana não são válidos na geometria esférica, por exemplo, a soma dos ângulos internos varia de triângulo para triângulo. Outra observação a ser exposta é que não existe semelhança de triângulos na geometria esférica, apenas congruência, este fato pode ser consultado em TODHUNTER (2006).

Outra observação extraída da demonstração, é o fato do raio terrestre ser muito grande, aproximadamente 6400 km, e quando elevado ao quadrado obtém-se 40960000 km², é possível ver na equação (1) que, quando observamos triângulos com áreas menores que o quadrado do raio, a soma dos ângulos internos será muito próxima de 180°. O que mostra, que em alguns casos, as coisas podem parecer planas.

Por exemplo, o território Brasileiro², tem uma área de aproximadamente 8.516.000 km². Cobrindo esta região por um triângulo esférico com área aproximada a dada, verificamos, que ainda, não é possível ver a geometria esférica em uma só região. Para isto, as aplicações exploradas, serão feitas, estudando pontos intercontinentais.

2.1 Lei dos cossenos para triângulos esféricos

Assim como na geometria euclidiana, podemos tratar de relações métricas nos triângulos, abaixo temos a chamada **Lei dos Cossenos para triângulos esféricos** sobre uma superfície esférica de raio 1, sendo apresentado depois, como aplicar o resultado para uma esfera de raio R. Daí, considerando sobre a superfície de uma esfera de raio 1, o triângulo esférico ABC de lados a,b e c e ângulos A, B e C, valem as igualdades:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos A \quad (2)$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos B \quad (3)$$

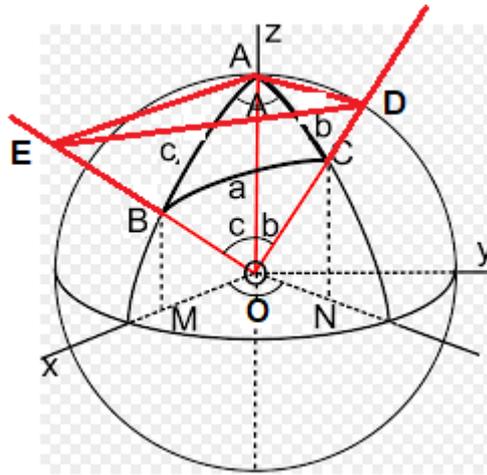
$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C \quad (4)$$

Demonstração:

²Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/brasil/area-brasil.htm>. Acessado em:15/06/2020.

Considere os pontos A, B, C sobre a superfície da esfera de uma esfera de centro O e Raio $\overline{OA} = 1$, como na figura 10, trace semirretas \overline{OB} , \overline{OC} , e \overline{OA} . Além disso, trace os segmentos \overline{AE} e \overline{AD} , tangentes respectivamente aos arcos \widehat{AB} e \widehat{AC} no ponto A.

Figura 10 - Triângulo esférico (demonstração da lei dos cossenos para triângulos esféricos)



Fonte: elaborada pelo autor

Como AE e AD são tangentes a esfera, os triângulos AOE e AOD são retângulos em A. Assim, a partir do triângulo AOE,

$$\cos c = \frac{AO}{EO} \rightarrow EO = \frac{AO}{\cos c} \quad (5)$$

$$\cos b = \frac{AO}{DO} \rightarrow DO = \frac{AO}{\cos b} \quad (6)$$

$$\cotg c = \frac{AO}{AE} \rightarrow AE = \frac{AO}{\cotg c} \quad (7)$$

$$\cotg b = \frac{AD}{AO} \rightarrow AD = \frac{AO}{\cotg b} \quad (8)$$

Além disso, tem-se do triângulo DOE que

$$ED^2 = EO^2 + DO^2 - 2 \cdot EO \cdot DO \cdot \cos a \quad (9)$$

Substituindo (5) e (6) em (9), obtém-se

$$ED^2 = \frac{AO^2}{\cos^2 c} + \frac{AO^2}{\cos^2 b} - 2 \cdot \frac{AO}{\cos c} \cdot \frac{AO}{\cos b} \cdot \cos a \rightarrow$$

$$\left(\frac{ED}{AO}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} \quad (10)$$

Por outro lado, do triângulo ADE,

$$ED^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cdot \cos A \quad (11)$$

Que mais uma vez, das (7) e (8) em (11), segue-se que

$$ED^2 = \frac{AO^2}{\cotg c} + \frac{AO^2}{\cotg b} - 2 \frac{AO}{\cotg c} \cdot \frac{AO}{\cotg b} \cdot \cos A \rightarrow$$

$$\left(\frac{ED}{AO}\right)^2 = \frac{1}{\cotg^2 c} + \frac{1}{\cotg^2 b} - \frac{2 \cos A}{\cotg b \cdot \cotg c} \quad (12)$$

De (10) e (11), tem-se que

$$\frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} = \frac{1}{\cotg^2 c} + \frac{1}{\cotg^2 b} - \frac{2 \cos A}{\cotg b \cdot \cotg c} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 c} +$$

$$\frac{1}{\cos^2 b} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} = \frac{\text{sen}^2 c}{\cos^2 c} + \frac{\text{sen}^2 b}{\cos^2 b} - \frac{2 \text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A}{\cos b \cdot \cos c} \rightarrow \frac{1}{\cos^2 c} - \frac{\text{sen}^2 c}{\cos^2 c} +$$

$$\frac{1}{\cos^2 b} - \frac{\text{sen}^2 b}{\cos^2 b} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} = - \frac{2 \text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A}{\cos b \cdot \cos c} \rightarrow \frac{1 - \text{sen}^2 c}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} -$$

$$\frac{\text{sen}^2 b}{\cos^2 b} - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} = - \frac{2 \text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A}{\cos b \cdot \cos c} \rightarrow 1 + 1 - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c}$$

$$= - \frac{2 \text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A}{\cos b \cdot \cos c} \rightarrow 2 - \frac{2 \cos a}{\cos b \cdot \cos c} = - \frac{2 \text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A}{\cos b \cdot \cos c} \rightarrow 2 \cos b.$$

$$\cos c - 2 \cos a = -2 \text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A$$

Logo, $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen } c \cdot \text{sen } b \cdot \cos A$, o que prova (2). De modo análogo, pode-se demonstrar (3) e (4).

Observação 1 (Lei dos cossenos sobre esferas de raio R): Se ABC é um triângulo esférico de lados a, b e c sobre uma esfera de raio R, então a Lei dos Cossenos assume a seguinte forma:

$$\cos \hat{a} = \cos \hat{b} \cdot \cos \hat{c} + \operatorname{sen} \hat{c} \cdot \operatorname{sen} \hat{b} \cdot \cos A$$

$$\cos \hat{b} = \cos \hat{a} \cdot \cos \hat{c} + \operatorname{sen} \hat{c} \cdot \operatorname{sen} \hat{a} \cdot \cos B$$

$$\cos \hat{c} = \cos \hat{b} \cdot \cos \hat{a} + \operatorname{sen} \hat{a} \cdot \operatorname{sen} \hat{b} \cdot \cos C$$

$$\text{onde } \hat{a} = \frac{a}{R}, \hat{b} = \frac{b}{R} \text{ e } \hat{c} = \frac{c}{R}.$$

De fato, dado um arco de comprimento a , e medida \hat{a} , temos a relação $a = \hat{a}R$. Como demonstramos o caso quando a medida do arco é igual ao comprimento, para o caso geral, basta ver que, a medida de cada arco, pode ser obtida, dividindo seu comprimento pelo raio.

2.2 Lei dos senos para triângulos esféricos

Dado o triângulo esférico ABC de lados a, b e c e ângulos A, B e C da figura 10, valem as igualdades:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} \quad (13)$$

Demonstração:

Da lei dos cossenos para triângulos esféricos demonstrado na seção 2.1, temos que

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos A \rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b} \rightarrow \operatorname{sen}^2 A$$

$$= 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b} \right)^2 \rightarrow \operatorname{sen}^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b} -$$

$$\frac{2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b} \rightarrow \operatorname{sen}^2 A = \frac{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b} +$$

$$\frac{2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b} \rightarrow \operatorname{sen}^2 A = \frac{\varphi(b, c) - \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b} +$$

$$\frac{2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b}, \text{ onde } \varphi(b, c) = (1 - \cos^2 c) \cdot (1 - \cos^2 b), \text{ daí}$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 b} \quad (14)$$

Da mesma forma, tem-se

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos B \rightarrow \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a} \rightarrow \operatorname{sen}^2 B$$

$$= 1 - \cos^2 B = 1 - \left(\frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a} \right)^2 \rightarrow \operatorname{sen}^2 B = \frac{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 a - \cos^2 b}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 a} +$$

$$\frac{2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c - \cos^2 a \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 a} \rightarrow \operatorname{sen}^2 B = \frac{\delta(a, c) - \cos^2 b}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 a} +$$

$$\frac{2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c - \cos^2 a \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 a}, \text{ onde } \delta(a, c) = (1 - \cos^2 c) \cdot (1 - \cos^2 a) \text{ daí,}$$

$$\operatorname{sen}^2 B = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 c - \cos^2 b + 2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c}{\operatorname{sen}^2 c \cdot \operatorname{sen}^2 a} \quad (15)$$

De modo análogo, tem-se também que

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C \rightarrow \cos C = \frac{\cos c - \cos b \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b} \rightarrow \operatorname{sen}^2 C$$

$$= 1 - \cos^2 C = 1 - \left(\frac{\cos c - \cos b \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b} \right)^2 \rightarrow \operatorname{sen}^2 C = \frac{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b} +$$

$$\frac{2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b} \rightarrow \operatorname{sen}^2 C = \frac{\gamma(a, b) - \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b} +$$

$$\frac{2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b}, \text{ onde } \gamma(a, b) = (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b), \text{ daí}$$

$$\operatorname{sen}^2 C = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b} \quad (16)$$

Analisando a razão entre (14) e (15), segue-se que

$$\frac{\frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 B} = \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\frac{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 b}{1 - \cos^2 a - \cos^2 c - \cos^2 b + 2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c}}{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 a}}$$

Sendo $f(a, b, c) = 1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c$,
obtem-se

$$\frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 B} = \frac{f(a, b, c)}{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 b} \cdot \frac{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 a}{f(a, b, c)} \rightarrow \frac{\text{sen}^2 A}{\text{sen}^2 B} = \frac{\text{sen}^2 a}{\text{sen}^2 b} \rightarrow \frac{\text{sen} A}{\text{sen} B} = \frac{\text{sen} a}{\text{sen} b} \rightarrow$$

$$\frac{\text{sen} a}{\text{sen} A} = \frac{\text{sen} b}{\text{sen} B} \quad (17)$$

Por fim, calculando a razão entre (15) e (16), tem-se

$$\frac{\frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 C} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 c - \cos^2 b + 2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c}{\frac{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 a}{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos b \cdot \cos a \cdot \cos c}}}{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b} \rightarrow$$

$$\frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 C} = \frac{f(a, b, c)}{\text{sen}^2 c \cdot \text{sen}^2 a} \cdot \frac{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b}{f(a, b, c)} \rightarrow \frac{\text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 C} = \frac{\text{sen}^2 b}{\text{sen}^2 c} \rightarrow \frac{\text{sen} B}{\text{sen} C} = \frac{\text{sen} b}{\text{sen} c} \rightarrow$$

$$\frac{\text{sen} b}{\text{sen} B} = \frac{\text{sen} c}{\text{sen} C} \quad (18)$$

Logo, de (17) e (18), segue-se que

$$\frac{\text{sen} a}{\text{sen} A} = \frac{\text{sen} b}{\text{sen} B} = \frac{\text{sen} c}{\text{sen} C}$$

Observação 2 (Lei dos Senos sobre esferas de raio R): Se ABC é um triângulo esférico de lados a, b e c sobre uma esfera de raio R, então a Lei dos Senos assume a seguinte forma:

$$\frac{\text{sen} \hat{a}}{\text{sen} A} = \frac{\text{sen} \hat{b}}{\text{sen} B} = \frac{\text{sen} \hat{c}}{\text{sen} C}$$

onde $\hat{a} = \frac{a}{R}$, $\hat{b} = \frac{b}{R}$ e $\hat{c} = \frac{c}{R}$.

2.3 Teorema de Pitágoras para triângulos esféricos

O teorema a seguir é um resultado válido para triângulos esféricos que possuem um ângulo reto. Uma outra demonstração deste resultado pode ser consultada em JOHNSON (2017), no artigo em que trata de trigonometria esférica, em particular, as relações métricas que podem ser encontradas no triângulo retângulo.

Teorema 3: Dado um triângulo com catetos α e β , e hipotenusa γ , temos a relação

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta \quad (19)$$

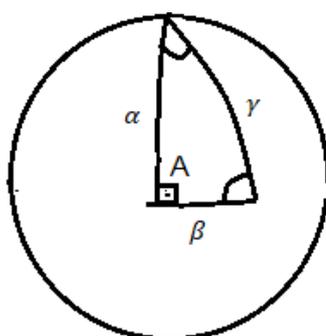
Demonstração:

Observando o triângulo da figura 11, notamos que $A = \frac{\pi}{2}$. Substituindo na equação (2), obtemos

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot 0$$

Daí, temos que $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$. O que prova o resultado.

Figura 11 - Triângulo esférico retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

3 APLICAÇÕES

Nesta seção, serão expostas aplicações com base em OLIVEIRA FILHO (2004), ALVES (2009), CARVALHO (2009) e MILIES (2009). Elas abordam situações que podem ser tratadas de forma interdisciplinar com as disciplinas de geografia (com um estudo sobre o globo terrestre e coordenadas geográficas) e física (abordando como a trigonometria esféricas se aplica à astronomia e coordenadas astronômicas). Nesta parte, implementaremos o uso das tecnologias da informação em situações semelhantes aos citados nas referências, no intuito, de sugerir atividades mais atrativas e dinâmicas.

3.1 Coordenadas Geográficas

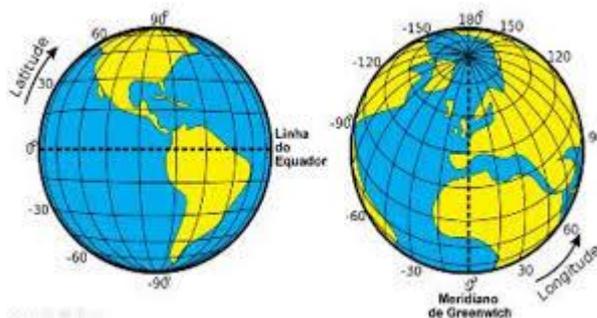
Apresentaremos uma aplicação matemática muito interessante, que pode ser facilmente trabalhada com alunos do ensino médio, uma vez que os mesmos estudam na disciplina de geografia, as ideias de latitude e longitude. No capítulo 2, apresentamos os elementos da esfera, sendo eles: Polo, Meridianos, Equador e Paralelos. Com bases nestes elementos, atribuiremos a cada ponto sobre a superfície esférica um par ordenado (φ, λ) , onde φ é latitude, e λ é a longitude. Temos ainda que, para cada ponto sobre a superfície esférica, podemos associar um único paralelo e um único meridiano (uma vez fixado os polos norte e sul, e o equador perpendicular ao eixo que passa por estes pontos).

Na figura 12, temos uma ilustração do **sistema de coordenadas geográficas**. Neste sistema de coordenadas, o centro é a intersecção do meridiano de Greenwich com o equador e em cada par ordenado (φ, λ) , a latitude φ varia na direção Norte (N) e Sul(S), sendo N a direção positiva e S a direção negativa em relação ao equador. Já a longitude λ , varia na Leste (L) e Oeste (O), Sendo L a direção positiva e O a direção negativa em relação ao meridiano de Greenwich. Os valores atribuídos a φ e λ são dados em graus ($^{\circ}$), subdivididos em minutos ($'$), subdivididos em segundos ($''$). Por exemplo, o par ordenado $(-20^{\circ}, 10^{\circ})$ significa 20° S e 10° L.

Uma observação com relação aos valores que φ e λ assumem é o seguinte fato: Como a Terra dá uma volta completa em torno do seu eixo em aproximadamente 24h, temos que a cada hora, a terra gira 15° (lembrando que uma volta completa são

360°). Por isso, usamos $1h = 15^\circ$, e quando duas cidades possuem diferença de longitudes igual a 15° , os relógios das mesmas devem marcar uma hora de diferença. No mais, a relação $1h = 60'$ e $1' = 60''$, é importante também, para que se faça possíveis convenções de uma unidade de medida para outra, quando necessário.

Figura 12 - Sistema de Coordenadas Geográficas



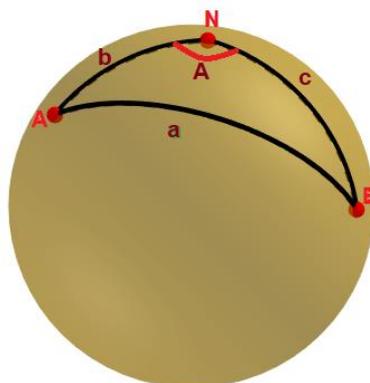
Fonte: GALENO³ (2017)

Teorema 4 (Distância entre duas coordenadas geográficas): Sejam A e B pontos sobre o globo terrestre com coordenadas iguais a (φ_A, λ_A) e (φ_B, λ_B) , respectivamente, então

$$d(A, B) = \left(\frac{320\pi}{9}\right) \arccos [\sen \varphi_A \cdot \sen \varphi_B + \cos \varphi_A \cdot \cos \varphi_B \cdot \cos(\lambda_A - \lambda_B)]$$

Demonstração:

Figura 13 - Triângulo esférico que auxilia na resolução do problema



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja ABN, um triângulo esférico, em que N represente o polo norte, conforme figura 13. Consideremos ainda, os lados com comprimentos a, b e c. Daí,

³ Disponível em: <https://youtu.be/0jrQq1fAVmw>. Acessado em 10/09/2020.

teremos os lados com arcos de medidas: $\hat{b} = 90^\circ - \varphi_A$, $\hat{c} = 90^\circ - \varphi_B$ e o ângulo interno $\widehat{ANB} = \lambda_A - \lambda_B$. Aplicando estas informações na lei dos cossenos para triângulos esféricos, teremos

$$\cos \hat{a} = \cos(90^\circ - \varphi_A) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_B) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_A) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_B) \cdot \cos \lambda$$

Em que $\lambda = \lambda_A - \lambda_B$, e daí, segue que

$$\hat{a} = \arccos[\operatorname{sen} \varphi_A \cdot \operatorname{sen} \varphi_B + \cos \varphi_A \cdot \cos \varphi_B \cdot \cos(\lambda_A - \lambda_B)].$$

Logo, teremos que

$$d(A, B) = \frac{\pi \cdot r \cdot \hat{a}}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot r \cdot \arccos[\operatorname{sen} \varphi_A \cdot \operatorname{sen} \varphi_B + \cos \varphi_A \cdot \cos \varphi_B \cdot \cos(\lambda_A - \lambda_B)]}{180^\circ}$$

Como r é próximo de 6400 km, teremos, que

$$d(A, B) = \frac{6400\pi \arccos[\operatorname{sen} \varphi_A \cdot \operatorname{sen} \varphi_B + \cos \varphi_A \cdot \cos \varphi_B \cdot \cos(\lambda_A - \lambda_B)]}{180^\circ}$$

$$d(A, B) = \frac{320\pi \arccos[\operatorname{sen} \varphi_A \cdot \operatorname{sen} \varphi_B + \cos \varphi_A \cdot \cos \varphi_B \cdot \cos(\lambda_A - \lambda_B)]}{9}$$

Assim, provamos o teorema.

Com este resultado que acabamos de demonstrar, podemos calcular distâncias entre dois pontos quaisquer sobre a esfera terrestre, conhecendo apenas suas coordenadas geográficas. Em alguns casos, o uso do teorema 4 não é o mais indicado. Por exemplo, quando os dois pontos estiverem sobre o mesmo paralelo ou sobre o mesmo meridiano, a fórmula para comprimento de arcos, pode ser facilmente aplicada. Agora, quando os pontos não estiverem sobre o mesmo paralelo ou sobre o mesmo meridiano, a fórmula dada, nos poupa de uma série de contas.

Para analisarmos uma situação concreta, observaremos que através da geodésica traçada sobre o globo terrestre no Google Maps⁴, o discente terá a oportunidade de verificar na prática que a menor distância entre dois pontos sobre a

⁴ Disponível em: <https://www.google.com.br/maps/@-4.5586842,-34.3270153,3z>. Acessado em: 23/04/2020.

superfície de uma esfera é o comprimento de um arco. Para reforçar e justificar tal afirmação, verificaremos a rota de um avião disponível na página Emirates 225⁵.

Dados dois pontos A e B sobre a superfície esférica de raio r e centro O, a fim de calcular a distância entre os mesmos, basta conhecer a medida do ângulo $\angle AOB$ e o raio r da esfera. Uma fórmula para obter tal distância, pode ser facilmente encontrada, usando regra de três simples, quando os pontos estão sobre o mesmo meridiano, do contrário, convém usar o Teorema 4. Com efeito, sendo $\angle AOB = \alpha$, teremos,

$$\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi r}{d(A,B)} \rightarrow d(A,B) = \frac{2\pi r \alpha}{360^\circ} \leftrightarrow d(A,B) = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \quad (20)$$

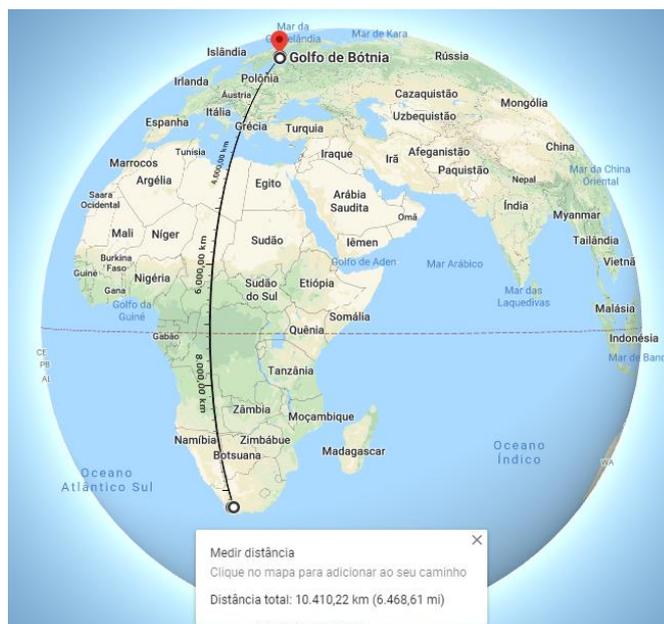
Uma aplicação prática da equação (20) é quando temos pontos sobre o mesmo meridiano. Por exemplo, as coordenadas geográficas de Breeder River DC, África do Sul é $(-33^\circ, 20^\circ)$ e as do Golfo de Bótnia $(61^\circ, 20^\circ)$. Assim, a medida do arco corresponde a distância entre os dois locais citados é $\alpha = 61^\circ - (-33^\circ) = 94^\circ$. E, portanto, a distância é de aproximadamente

$$d(A,B) = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = \frac{3,14.6400.94^\circ}{180^\circ} = \frac{1889024^\circ}{180^\circ} \approx 10494,6 \text{ km}$$

O resultado pode também ser verificado no Maps. Vale ressaltar que, para encontrar duas cidades sobre o mesmo meridiano no Maps, é mais complicado, pois não aparece no globo as linhas demarcando latitude e longitude. Desta forma, convém, observando o mapa, estimar latitudes, e fixar uma longitude, sendo possível, usar coordenadas inteiras. Veja figura 14 a seguir.

⁵ Disponível em: <https://pt.flightaware.com/live/flight/UAE225>. Acessado em: 23/04/2020.

Figura 14 - Distância entre Breder River DC e Golfo de Bótnia



Fonte: Elaborada pelo autor

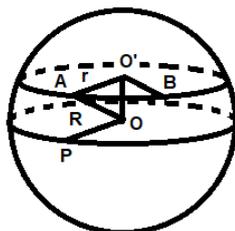
Quando quisermos calcular distâncias entre regiões sobre o mesmo paralelo (diferente do equador), é necessário a aplicação de relações métricas em triângulos planos. Por exemplo, as cidades de Cuenca na Espanha e Daşoguz no Turcomenistão tem coordenadas, respectivamente, $A(40^\circ, -2^\circ)$ e $B(40^\circ, 61^\circ)$. Na figura 15, é proposta a ilustração na esfera. Nesta, verificaremos que o comprimento do arco $AO'B$, de medida 63° , não é a menor distância entre os dois pontos dados. Com efeito, vejamos que o triângulo $AO'O$ é retângulo em O' , e que o ângulo \hat{A} é 40° , uma vez que a latitude é 40° e $AO' \parallel OP$. Daí, segue que

$$r = R \cdot \cos 40^\circ \cong 6400 \cdot \cos 40^\circ \cong 4902,68 \text{ km}$$

E, portanto, a trajetória AB em questão, é

$$d(A, B) = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} = \frac{3,14 \cdot 4902,68 \cdot 63^\circ}{180^\circ} \approx 5388,04 \text{ km}$$

Figura 15 - Ilustração geométrica do problema



Fonte: Elaborada pelo autor

Quando observado no mapa⁶, essa distância é de aproximadamente 5137,66 km, segue a imagem na figura 16. Esse “erro”, se dá devido ao comprimento da trajetória dada não estar sobre uma circunferência máxima.

Figura 16 - Ilustração da trajetória AB entre as cidades de Cuenca na Espanha e Daşoguz no Turcomenistão

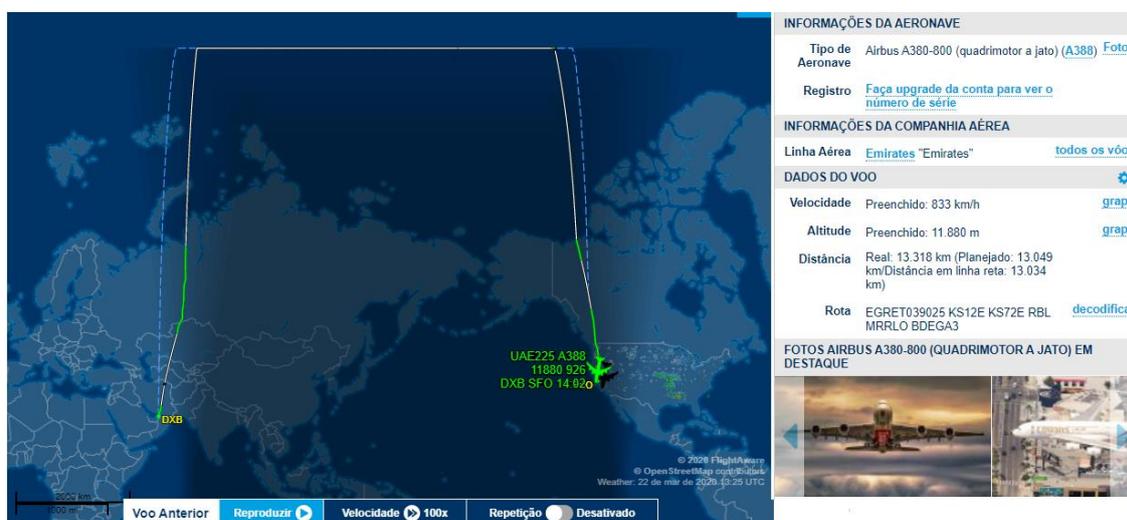


Fonte: Elaborada pelo autor

⁶ Disponível em: <https://www.google.com/maps/dir/Da%20C5%9Foguz,+Turcomenist%C3%A3o/40,-2/@39.5647979,10.880281,4z/data=!3m1!4b1!4m9!4m8!1m5!1m1!1s0x41de6896264d2475:0x8314c6ef35c7a218!2m2!1d59.9651904!2d41.8368737!1m0!3e4>. Acessado em: 15/06/2020.

Para pontos que não estão sobre o mesmo meridiano podemos citar, por exemplo, como calcular a distância entre Dubai e São Francisco. As coordenadas geográficas da cidade de Dubai (cidade localizada no Emirados Árabes Unidos – EAU) são (25° 16' 11", 55° 18' 34"). Já as coordenadas de São Francisco, cidade da Califórnia no Estados Unidos, são (37° 43' 38", - 123° 1' 55"). Com as coordenadas dadas, podemos calcular a distância entre as duas cidades usando o teorema 4. A rota pode ser facilmente verificada no Emirates 225, como na figura 17.

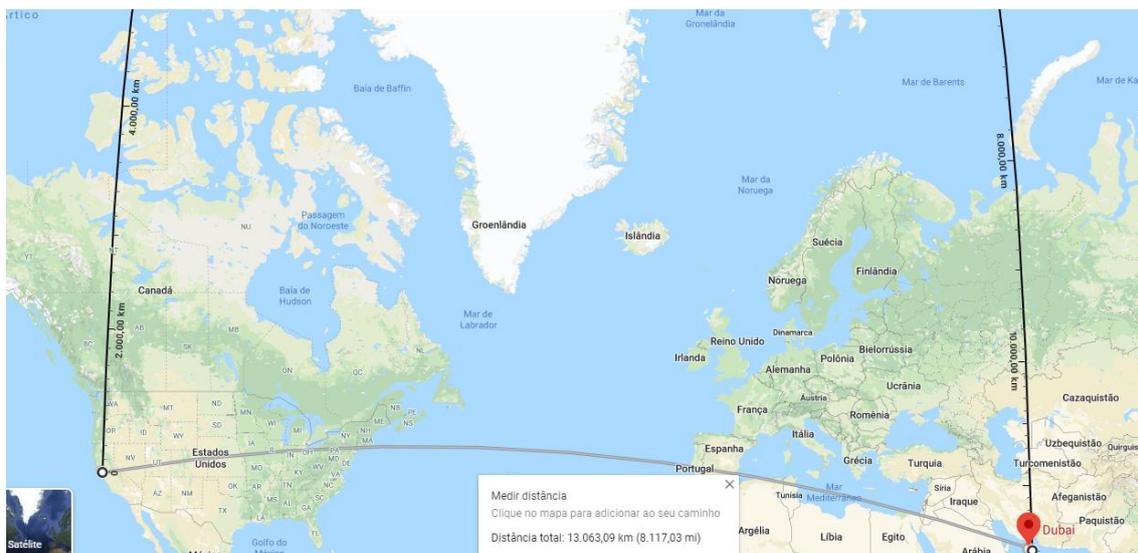
Figura 17 - Rota de avião no Emirates 225



Fonte: Elaborada pelo autor

Com a observação dessa rota, é possível notar que a trajetória descrita pelo avião, se assemelha a um arco de circunferência. Porém, para uma visualização melhor, e verificação dos cálculos, sugere-se o Google Maps, uma vez que pode ser observado o trajeto no mapa ou até mesmo no globo terrestre conforme na figura 18.

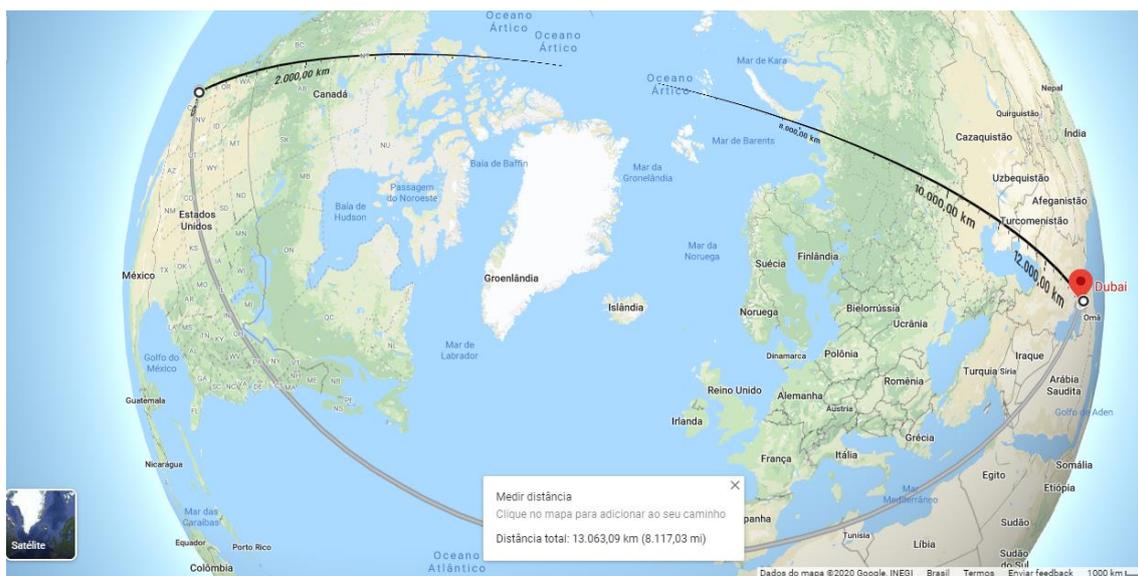
Figura 18 -Trajetória no mapa da distância entre Dubai e São Francisco



Fonte: Elaborada pelo autor

É possível notar nesta imagem a distância entre as duas cidades, além de perceber que a distância entre as duas cidades não é medida por uma reta, mais sim, por uma curva. O que mostra, que, conhecendo a medida do raio da terra, e a medida do arco compreendido entre as duas cidades, é possível encontrar o comprimento do arco, que corresponde a distância entre as cidades, descrita na figura 19.

Figura 19 - Trajetória entre Dubai e São Francisco no Globo terrestre



Fonte: Elaborada pelo autor

Usaremos o teorema 4 para descobrir a distância entre as duas cidades. Com efeito, temos que as coordenadas geográficas de Dubai em graus é $A(25,2697^\circ, 55,3094^\circ)$ e as coordenadas geográficas de São Francisco, em graus, é $B(37,7272^\circ, -123,0319^\circ)$. Daí, $\varphi_A = 25,2697^\circ$; $\varphi_B = 37,7272^\circ$, $\lambda_A = 55,3094^\circ$ e $\lambda_B = -123,0319^\circ$. Aplicando teorema 4, obteremos:

$$d(A, B) = \frac{320\pi \arccos(-0,4537)}{9} = \frac{320 \cdot 3,14116,98}{9} = 13060,17 \text{ km}$$

pois,

$$[\text{sen } 25,2697^\circ \cdot \text{sen } 37,7272^\circ + \text{cos } 25,2697^\circ \cdot \text{cos } 37,7272^\circ \cdot \text{cos}(178,3413^\circ)]$$

$$= -0,4537.$$

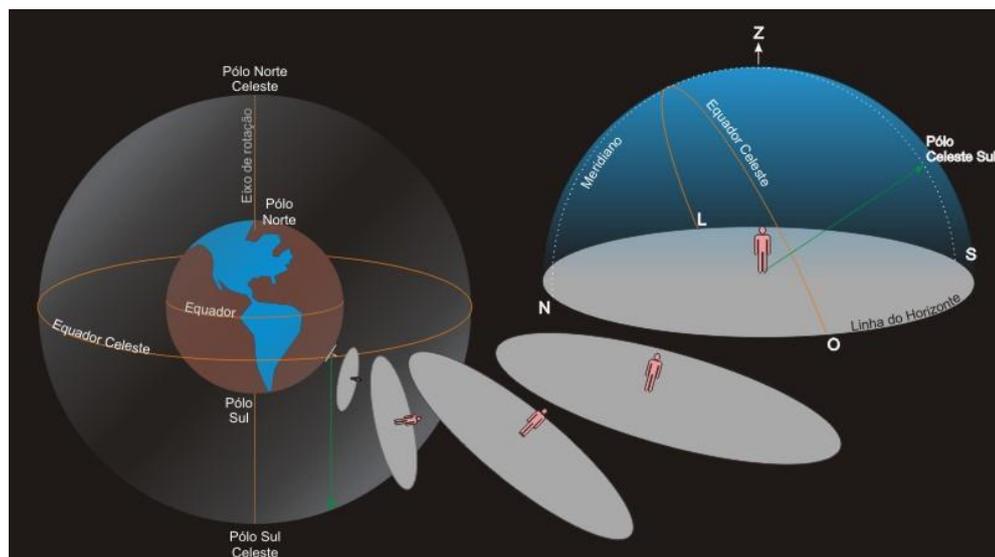
Portanto, a distância entre as duas cidades é de aproximadamente 13060,17 km. Observando no Maps, é possível ver que o resultado é bem próximo do esperado, e pode se justificar a aproximação pelo fato da posição dentro da cidade ter sido uma aproximação, porém, movendo o cursor com a régua do mapa dentro da própria cidade, pode-se chegar a esse valor.

3.2 Coordenadas Astronômicas

Nesta seção, concluiremos o capítulo de aplicações, com uma situação baseada em BORGES (sem ano de publicação) e OLIVEIRA FILHO (2004). Iremos conferir através das fórmulas que serão apresentadas a seguir, como saber a hora em que o sol nascerá em um determinado dia, e em que hora, ele irá se pôr. Mas, antes disto, iremos conhecer elementos importantes da esfera celeste, coordenadas horizontais, coordenadas equatoriais, coordenadas horárias e a mudança entre coordenadas horárias e horizontais, com base em R. BOCZKO (1984).

Definição 10: Chama-se de **esfera celeste**, a superfície esférica que contém algum astro e está centrada na Terra. Na figura 20, temos uma ilustração da esfera celeste, e seus elementos que serão definidos a seguir.

Figura 20 Esfera celeste e seus elementos.



Fonte: FILHO⁷ et al (2010).

Definição 11: Polo celeste sul, é o ponto de intersecção obtido pelo prolongamento do eixo de rotação pelo hemisfério sul.

Definição 12: Polo celeste norte, é o ponto de intersecção obtido pelo prolongamento do eixo de rotação pelo hemisfério norte.

Definição 13: Equador celeste, é o círculo máximo da esfera celeste e que contém o círculo máximo do equador.

Definição 14: Zênite, é ponto da esfera celeste obtido da intersecção da esfera celeste com o segmento normal a superfície terrestre no ponto em que o observador se encontra.

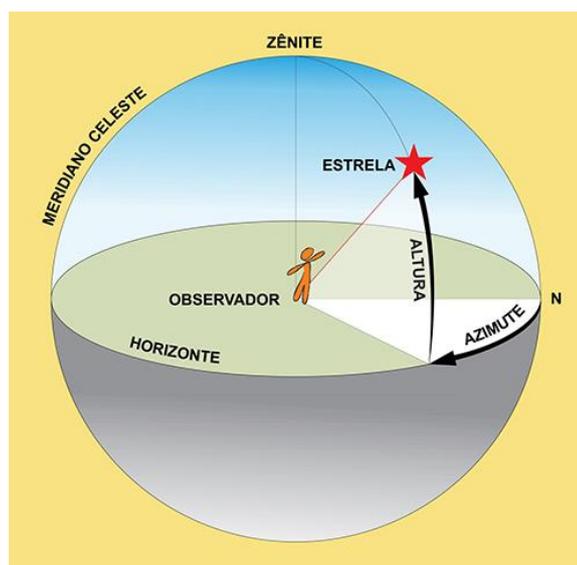
Definição 15: Nadir, é o ponto da esfera celeste, pertencente a reta que liga o zênite ao centro da terra.

Definição 16: Plano do Horizonte, é o plano que contém a linha do horizonte, ou seja, a linha que liga o ponto de nascimento ao ponto de ocaso (ponto onde o astro irá se pôr) de um astro, sendo este plano, perpendicular ao eixo zenital. Considerando o sistema composto pelo plano do horizonte e o eixo zenital, definimos o **sistema de coordenadas horizontais**, onde cada ponto da esfera celeste passa a ser

⁷ Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/esf.htm>. Acessado em: 25/08/2020.

identificado, com o par ordenado (altura, azimute). Neste sistema, **altura**, é a medida angular do arco contido o plano zenital, que contém o astro e o plano do horizonte, enquanto **azimute**, é a medida angular entre o plano que contém o eixo zenital e a estrela, e o plano que contém o eixo zenital e o polo norte. Veja a figura 21.

Figura 21 - Elementos do sistema de coordenadas horizontais.



Fonte: Museu de astronomia⁸

Proposição 2: Se um observador tem latitude φ , então a distância esférica do polo norte celeste para o Zênite do observador é $90^\circ - \varphi$.

Demonstração: De fato, como o zênite é um ponto da esfera celeste, deve pertencer a algum meridiano. Além disso, os polos celestes e o equador celeste, são prolongamentos dos polos e do equador terrestre. O que garante que, um ponto da esfera celeste, tem a mesma latitude, tanto no globo terrestre, quanto na esfera terrestre. Como a latitude varia de 0° a 90° , a medida do arco entre o polo norte celeste e o zênite do observador, é $90^\circ - \varphi$.

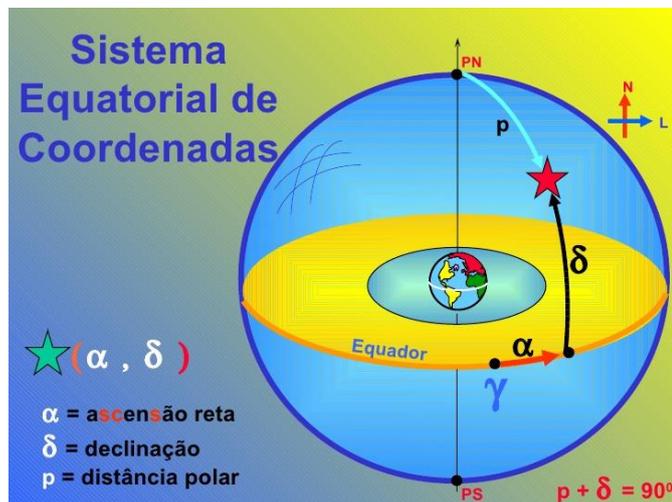
Definição 17: O **sistema equatorial de coordenadas**, é um sistema referenciado na linha do equador através da ascensão reta α , e da declinação δ (medida angular entre a elíptica que contém o astro e o plano do equador). Conforme figura 22.

⁸ Disponível em:

http://site.mast.br/exposicoes_hotsites/exposicao_observacoes_do_recife_holandes/quadrante.html.
Acessado em: 25/08/2020.

Definição 18: **Ascensão reta**, é medida partindo de um ponto vernal, ou seja, da intersecção da elíptica do astro, até a intersecção do meridiano que passa pela estrela com o equador.

Figura 22 - Sistema equatorial de coordenadas

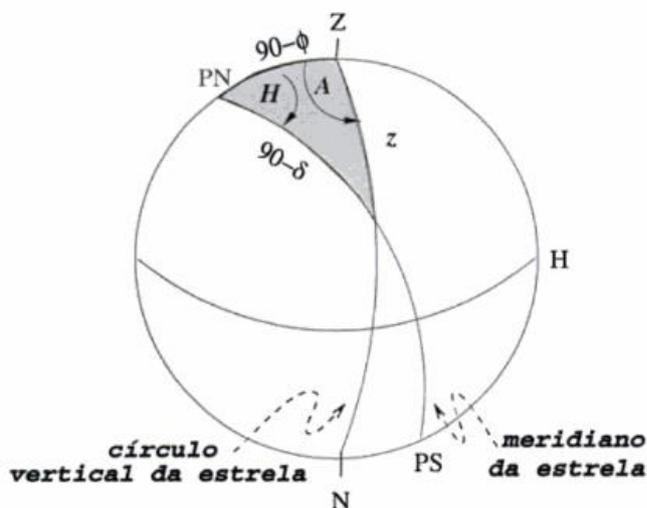


Fonte⁹: R. BOCZKO (1984)

Definição 19: No **sistema de coordenadas horário**, é possível posicionar um astro em relação a esfera celeste e o equador celeste e estabelecer uma relação do com meridiano de um dado observador. Em tal sistema, as coordenadas são: **Ângulo horário (H)**, que é a medida entre o meridiano do observador e o meridiano do astro, e a **declinação (δ)**, indica o afastamento angular do astro, com relação ao equador. Ver figura 23.

⁹ Disponível em: <https://pt.slideshare.net/plantaofisica/9-sis-equato>. Acessado em: 25/08/2020

Figura 24 - Triângulo de posição



Fonte: OLIVEIRA FILHO (2004)

Relações entre distancia zenital (z), azimute (A), ângulo horário (H), e declinação (δ).

Usando a lei dos cossenos para triângulos esféricos, podemos estabelecer relações entre z, A, H, φ e δ . Sendo elas expressas nas equações (21), (22), (23) e (24).

$$\cos z = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen}(90^\circ - \delta) \cos H \rightarrow$$

$$\cos z = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \quad (21)$$

$$\cos H = \cos z \sec \varphi \sec \delta - \tan \varphi \tan \delta \quad (22)$$

Além disso, temos

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos z + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen} z \cos A \rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} z + \cos \varphi \operatorname{sen} z \cos A \quad (23)$$

$$\cos A = \operatorname{sen} \delta \operatorname{csc} z \sec \varphi - \tan \varphi \cot z \quad (24)$$

Proposição 3: Sejam φ a latitude de um observador e δ a declinação de um ponto no céu no momento do "nascente" ou do "poente", respectivamente. Suponha que a refração da atmosfera não possui efeitos na posição do ponto a partir da perspectiva do observador. Sejam H e A o ângulo horário e o Azimute deste mesmo ponto. Então,

$$\cos(H) = -\operatorname{tg}(\varphi) \cdot \operatorname{tg}(\delta) \quad (25)$$

$$\cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\cos(\varphi)} \quad (26)$$

Demonstração: No nascer e no por do Sol, $z = 90^\circ$. Substituindo na equação (21), teremos

$$\cos 90^\circ = \text{sen } \varphi \text{sen } \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \rightarrow \cos(H) = -\text{tg}(\varphi) \cdot \text{tg}(\delta).$$

Substituindo na equação (24), teremos

$$\cos A = \text{sen} \delta \csc 90^\circ \sec \varphi - \tan \varphi \cot 90^\circ \rightarrow \cos(A) = \frac{\text{sen}(\delta)}{\cos(\varphi)}.$$

Isso, finaliza a demonstração.

No sistema de coordenadas horárias, $1 \text{ h} = 15^\circ$, assim, se um astro tem um ângulo horário $\frac{T_d}{2}$, ele cruzou o meridiano local a $15 \cdot \frac{T_d}{2}$. Daí, temos que

$$\frac{15}{2} T_d = H \rightarrow T_d = \frac{2}{15} H.$$

De (25), temos que $H = \arccos(-\text{tg}(\varphi) \cdot \text{tg}(\delta))$, substituindo, encontraremos

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos[-\text{tg}(\varphi) \cdot \text{tg}(\delta)]$$

Outro fato que deve ser notado, é que a declinação é conhecida nas quatro estações do ano. Para auxiliar no entendimento, vejamos a figura 25. Nos dois equinócios, essa declinação é zero, e nos solstícios, ela vale aproximadamente $23,45^\circ$ e $-23,45^\circ$. Como δ , varia periodicamente e com amplitude $23,45^\circ$, podemos escrever

$$\delta = 23,45 \cdot \text{sen } x,$$

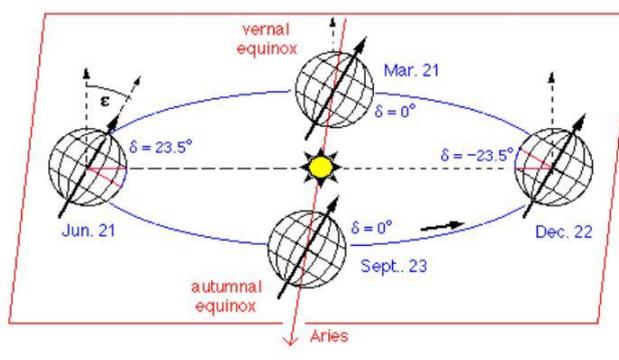
onde x é a porção angular, percorrida pela terra, após o algum dos equinócios, ou seja, nesse dia $\text{sen } x = 0$, daí, teremos que $x = 0$ ou $x = 360^\circ$. Dividindo 360° correspondentes a volta que a terra dá em torno sol, pelo total de dias do ano, 365, teremos que a tal porção angular em função do número de dias decorridos após o 1º de Janeiro é da forma

$$x(n) = \frac{360}{365} f(n).$$

De acordo com a figura 25, os equinócios ocorrem em 21 de março (que são 81 dias a partir o início do ano) e 23 de setembro (que são 267 dias a partir o início do ano), como nessas datas a declinação é zero, temos que: $x(81) = x(267) = 0^\circ$. O solstício de inverno, ocorre no dia 21 de junho, ou seja, aos 173 dias do ano, como nesta data a declinação é $23,45^\circ$, devemos ter e $x(173) = 90^\circ + 360^\circ k$. Por fim, o solstício de verão ocorre em 22 de dezembro, que corresponde ao dia de número 357 do ano em que a declinação neste dia é de $-23,45$. Logo $x(357) = 270^\circ + 360^\circ k$. Uma aproximação para f , é $f(n) = 284 + n$. E daí, teremos que

$$\delta = 23,45 \cdot \sin \left[\frac{360}{365} \cdot (284 + n) \right]$$

Figura 25 - Declividade de acordo com as estações do ano.



Fonte¹¹: GIESEN (2008)

É possível notar no dia a dia, em certo período do ano, que o “dia” (período em que o Sol está aparente no céu) parece ser mais longo que a noite, ou vice-versa. Isto se dá devido ao movimento de translação da terra em torno do sol e o eixo de rotação da terra ser inclinado. Segue uma ilustração na figura 26.

¹¹ Disponível em: <http://www.jgiesen.de/astro/solarday.htm#top>. Acessado em: 25/08/2020.

Figura 26 - Posições da Terra em relação ao Sol.



Fonte: Grupo Evolução¹².

Embora os satélites já nos forneçam informações relacionadas a previsão do tempo, assim com o nascer e pôr do Sol, é interessante que as pessoas possam compreender, também, como funciona a matemática envolvida neste processo. A verificação dos resultados pode ser facilmente verificada no site de centro de previsão de tempo e estudos climáticos¹³, disponível na página do governo federal. Na figura 27, temos a previsão para nascimento e pôr do sol, nos dias 24 e 25 de julho de 2020 para a cidade de Quixadá.

¹² Disponível em:

https://www.google.com/url?sa=i&url=http%3A%2F%2Fgrupoevolucao.com.br%2Flivro%2FGeografia1%2Fposies_da_terra.html&psig=AOvVaw22T0l62cAPSxSZuDdeey6Z&ust=1595715703223000&source=images&cd=vfe&ved=0CAMQjB1qFwoTCOIY-7L25uoCFQAAAAAdAAAAABAD. Acessado em 24/07/2020.

¹³ Disponível em: <https://tempo.cptec.inpe.br/ce/quixada>. Acessado em: 24/07/2020.

Figura 27 - Previsão do tempo para a cidade de Quixadá – CE.



Fonte: Elaboração do autor

Na imagem, é possível ver que nos dias 24 e 25 de julho de 2020, o Sol nasce às 05:46 e se põe às 17:39. Então, para verificar tais informações, utilizaremos a função trigonométrica

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan \varphi \cdot \tan \delta).$$

Nesta fórmula, T_d é o tempo de duração do dia, φ é a latitude da cidade e δ é a declinação da terra, que é dada pela fórmula

$$\delta = 23,45 \cdot \sin \left[\frac{360}{365} \cdot (284 + n) \right],$$

onde n é o número de dias decorridos a partir de 1º de janeiro do referido ano.

Quixadá é uma cidade do sertão central cearense, cuja latitude é $-4,97813^\circ$ e a longitude é $-39,0188^\circ$. Assim, para descobrir a duração do dia 24/07/2020, notamos que $n = 206$, daí

$$\delta = 23,45 \cdot \sin \left[\frac{360}{365} \cdot (284 + 206) \right] \cong 19,6025^\circ,$$

E portanto,

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos[-\tan(-4,97813^\circ) \cdot \tan(19,6025^\circ)] \cong 11,76 = 11h45min36s$$

Pode-se constatar na figura 27, que o resultado encontrado, é um número bem próximo do desejado, que transformando os tempos dados, dá 11,88 h, a duração

do dia. Qual o motivo dessa diferença x ? Esta diferença ocorre devido a longitude do local ser diferente da longitude do fuso. Este é um problema fácil de resolver, uma vez que uma hora corresponde à 15° . Por regra de três simples, facilmente, encontraremos o resultado. Fazendo a correção de longitude, temos que $-39,0188^\circ - (-45^\circ) = 5,9812^\circ$. Daí, teremos

$$\frac{1 \text{ h}}{x} = \frac{15^\circ}{5,9812^\circ} \rightarrow x \cong 0,3987 \text{ h} \cong 23\text{min}55\text{s}$$

Portanto, o Nascer do Sol será aproximadamente $12\text{h} - 5\text{h}52\text{min.} - 23\text{min.} = 5\text{h}45\text{min.}$ E o pôr do Sol será aproximadamente $12\text{h} + 5\text{h}52\text{min.} - 23\text{min.} = 17:29$.

É importante ressaltar que aproximações dos resultados encontrados são exibidos na figura 27. É verdade que os arredondamentos, contribuem para esta diferença. A proposta, é mostrar como que a matemática está completamente relacionada com outras áreas do conhecimento, em particular, a geografia, e também despertar no estudante a curiosidade pela matemática de um modo geral.

4 CONCLUSÕES

Podemos notar que é possível ensinar trigonometria esférica no ensino médio, sem sair das propostas da BNCC, que estão ligadas a interdisciplinaridade e aprendizagem significativa. Além disso, podemos ver que é um tema que pode ser facilmente discutido com a disciplina de geografia, como também com a disciplina de física, quando se estuda astronomia.

Partindo pra matemática, em particular, a aplicação 3.2, fundamenta com fatos reais, uma aplicação do estudo de funções trigonométricas, que geralmente no segundo ano do ensino médio, é abordado apenas definição e gráficos. Vemos, portanto, neste exemplo, a oportunidade de tornar o estudo da trigonometria mais significativo e atraente.

É importante salientar também, que do ponto de vista da BNCC, não há nada que impeça que discussões como essas, sejam trabalhadas dentro do currículo escolar, uma vez que o entendimento de grandes ideias como as usadas para desenvolver as aplicações propostas, pode estimular o desenvolvimento de outras semelhantes e deixar o aluno mais por dentro da necessidade de se estudar matemática para si mesmo e para a sociedade.

Por fim, ao passo que a trigonometria já é abordada nos livros didáticos, a trigonometria esférica, pode ser trabalhada dentro do currículo escolar, juntamente com esse conteúdo, tendo oportunidade também de se planejar trabalhar com geografia e física, mostrando pra os alunos, a forte relação que existe não só entre áreas de estudo da matemática, mas, também, entre áreas as diversas áreas de estudo do currículo escolar.

REFERÊNCIAS

- ABREU, Shyrlene Martins de; OTTONI, Jose Eloy. **Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à astronomia de posição**. 2015. 123f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba, 2015.
- ALVES, Diego. **A trigonometria do ensino fundamental para o ensino médio: uma proposta didática**. 2017. 68f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.
- ALVES, Sérgio. **A geometria do globo terrestre**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
- BAGIO, Viviane Aparecida; ROLKOUSKI, Emerson. Geometrias não Euclidianas: Impressões de estudantes em um primeiro contato. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2014. Curitiba. **Anais...** Curitiba: [s.n.], 2014.
- BORGES, Roberto Cabral de Mello. **Cálculo do Nascer e Pôr do Sol**. Disponível em: https://www.inf.ufrgs.br/~cabral/Nascer_Por_Sol.html. Acesso em: 24 jul. 2020.
- CARVALHO, João Pitombeira de. **Os três problemas Clássicos da Matemática grega**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. 2009.
- DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- JESUS, Marcos Antonio Santos de; SILVA, Romeu Carlos Oliveira. A teoria de David Ausubel – o uso dos organizadores prévios no ensino contextualizado de funções. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004. Recife, **Anais...** Recife: [s.n.], 2004.
- JOHNSON, Rob. **Spherical Trigonometry**. Disponível em: <https://www.math.ucla.edu/~robjohn/math/spheretrig.pdf>. Acesso em: 31 mar. 2020.
- LIMA, Davi Dantas. **Desvendando a matemática do GPS**. 2013. 123f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2013.
- MACIEL, Jiulliana Gonçalves; RIOS, Tamiris de Aguiar; GODINHO, Darlan da Silva. GPS: a antiga matemática na atual tecnologia. **Revista Modelos**, v. 2, p.15 – 28, 2012.
- MILIES, Francisco César Polcino. **A matemática dos códigos de barras**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
- OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza. **Astronomia e astrofísica**. 2.ed. São Paulo: Livraria da física, 2004.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; MOREY, Bernadete Barbosa. Revisitando a lei dos cossenos para triângulos esféricos: um aporte histórico do século XV. **Revista história da Ciências e Ensino**, São Paulo, v. 15, p.81-95, 2017.

PINTO, Antonio Henrique. A base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar. **Bolema**, Rio Claro, v.31, n.59, p. 1045-1060, dez 2017.

R. BOCZKO. **Conceitos de Astronomia**. São Paulo: Edgard Blücher, 1984.

SILVA, Eduard Luini de. **A contextualização da geometria esférica pelo estudo do globo terrestre e suas representações com o uso do software geogebra**. 2017. 145f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.

SOUZA, Marcelo Ricardo de. **Geometria Esférica e o Relógio de Sol**. 2019. 98f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

TODHUNTER, I. **Spherical Trigonometry For the use of colleges and schools**. London: MACMILLAN AND CO, 2006.

VINAGRE, André Luiz Mendes. **Erastóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra**. São Paulo: [s.n], 2002.

ZANELLA, Idelmar André. **Geometria Esférica: Uma proposta de atividades com aplicações**. 2013. 98f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.