



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
FACULDADE DE EDUCAÇÃO CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PRISCILA PEREIRA

TEOREMA BINOMIAL, FUNÇÕES GERADORAS E APLICAÇÕES

FORTALEZA – CEARÁ

2020

PRISCILA PEREIRA

TEOREMA BINOMIAL, FUNÇÕES GERADORAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues.

FORTALEZA – CEARÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Pereira, Priscila .

Teorema binomial, funções geradoras e aplicações
[recurso eletrônico] / Priscila Pereira. - 2020

Um arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico
com 56 folhas.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Estadual do Ceará, Faculdade de Educação, Ciências e
Letras do Sertão Central, Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2020.

Área de concentração: Ensino de Matemática..

Orientação: Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues..

1. Teorema Binomial. 2. Funções Geradoras. 3.
Contagem. 4. Recorrências. I. Título.

PRISCILA PEREIRA

TEOREMA BINOMIAL, FUNÇÕES GERADORAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

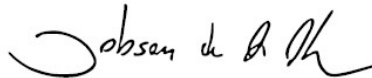
Aprovada em: 04 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues (Orientador)

Instituto Federal do Ceará – IFCE



Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira

Universidade Estadual do Ceará/Quixadá – UECE



Prof. Dr. Ulisses Lima Parente

Universidade Estadual do Ceará/Quixadá - UECE

Dedico este trabalho ao meu (Filho) e ao meu (Esposo), em especial, à minha (Mãe) e a todos que me apoiaram e me incentivaram nessa jornada.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por estar sempre presente na minha vida, me guiando nas escolhas e me dando força para seguir em frente com alegria e esperança.

À minha mãe Anete, que sempre me incentivou nos estudos, que sempre me colocou em suas orações e está presente na minha vida com muito amor.

Ao meu esposo Márcio, por estar sempre do meu lado, pelo carinho, pelo imenso apoio na concretização dessa etapa e pela paciência nos momentos mais difíceis.

Ao meu filho Caio, pelo enorme carinho, pelas palavras de incentivo e pelo amor.

Aos meus irmãos, Rodrigo e Mariane, que sempre torceram pela realização desse sonho.

Ao meu Orientador, que esteve dedicado no seu papel, pelas dicas generosas dadas para a construção deste trabalho e pelo seu auxílio e prontidão.

Aos meus professores, Ulisses e Jobson, pelo aprendizado proporcionado e pela dedicação durante todo o curso.

Aos meus colegas de curso, pelo apoio no dia a dia, pelos ótimos e engraçados momentos vividos durante nossas aulas.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros
de gigantes”.

(Isaac Newton).

RESUMO

A Análise Combinatória dispõe de diversas técnicas que permitem resolver vários tipos de problemas. Algumas dessas técnicas são mais simples e de uso mais amplo, permitindo resolver uma grande quantidade de problemas. Por outro lado, a aprendizagem dessas técnicas se faz de maneira mecânica, limitando o seu emprego apenas em situações padronizadas, sem habituar o aluno a fazer uma análise mais cuidadosa de cada problema. Entretanto, a solução de alguns desses problemas quase sempre exige certa dose de criatividade e conhecimentos de outros métodos combinatórios. Portanto, este trabalho tem por finalidade apresentar as funções geradoras como uma ferramenta alternativa de resolução de problemas combinatórios que requer uma maior compreensão e engenhosidade para a sua solução, como é o caso dos problemas que envolvem certas restrições, além de demonstrar a sua aplicabilidade na resolução de recorrências lineares homogêneas ou não e de outros problemas relacionados. É utilizado, neste trabalho, o Teorema Binomial na sua forma generalizada a fim de facilitar o entendimento desse instrumento tão eficiente e amplo, que não é aproveitado no ensino da Análise Combinatória.

Palavras-chave: Teorema Binomial. Funções Geradoras. Contagem. Recorrências.

ABSTRACT

Combinatorial Analysis has several techniques that allow us to solve many types of problems. Some of these techniques are more simple and widely used, allowing to solve a large number of problems. By other hand, the learning process of these techniques is mechanical, and restricts its usage to standardized situations, without allowing the student a deeper analysis of each problem. However, solving some of these problems often requires creativity and knowledge of other combinatorial methods. Therefore, the aim of this work is to present the generating functions as an alternative approach for solving combinatorial problems, such requires more comprehension and ingenious than others simpler problems, as in restrictions problems, besides presenting its applicability for the resolution of homogeneous linear recurrence and others related problems. In order to become the learning of the generating function more effective, we introduce the Generalized Binomial Theorem, that is not used in Combinatorial Analysis.

Keywords: Binomial Theorem. Generating functions. Counting Problems. Recurrence Problems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	TEOREMA BINOMIAL GENERALIZADO.....	13
2.1	Teorema binomial e equações lineares.....	13
2.2	Generalização do teorema binomial.....	16
2.2.1	Convergência de séries infinitas.....	16
2.2.2	Séries de potências.....	18
3	FUNÇÕES GERADORAS.....	27
3.1	Propriedades das funções geradoras.....	28
3.1.1	Escalonamento (Dimensionamento)	28
3.1.2	29
3.1.3	Adição.....	30
3.1.4	Deslocamento à Direita.....	31
3.1.5	Diferenciação.....	32
3.1.6	Produto.....	33
4	Soma.....	35
4.1	APLICAÇÕES.....	35
4.2	Recorrências lineares.....	37
4.3	A torre de hanoi.....	39
4.4	Números de Fibonacci.....	41
4.5	Problemas de contagem.....	45
5	Problemas relacionados.....	50
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
	REFERÊNCIAS.....	
	APÊNDICE A – CONCEITOS COMPLEMENTARES DE	52
	CÁLCULO.....	
	APÊNDICE B – CONCEITOS COMPLEMENTARES DE	56
	BINOMIAL.....	

1 INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa frequentemente a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e conta ou classifica os mesmos satisfazendo certas condições. Embora disponha de técnicas gerais que permitem resolver certos tipos de problemas, a solução de alguns problemas exige quase sempre uma criatividade e a compreensão plena do problema, pois problemas fáceis de enunciar revelam-se por muitas vezes difíceis para a sua solução, o que a torna bastante encantadora.

O estudo de combinações, arranjos e permutações é de uso amplo nas soluções de uma grande quantidade de problemas de contagem. No entanto, essa parte da Matemática trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, também, de outras técnicas para solucioná-los. Dentre elas, as funções geradoras, que são da Análise Combinatória.

Primeiramente, faremos um breve histórico no que se refere ao avanço da Análise Combinatória no decorrer do tempo para que possamos entender a sua grande importância na resolução de problemas. Estudos sobre o desenvolvimento de binômios já aparecem em *Elementos* de Euclides.

O desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ já está entre os primeiros problemas estudados ligados à Análise Combinatória. O caso $n = 2$ já pode ser encontrado nos *Elementos* de Euclides, em torno de 300 a. C. (MORGADO, 1991, p. 2)

Além disso, o triângulo de Pascal já era conhecido pelo árabe Al-Kajari, no século XI, e pelo chinês Chu Shī-kié, em torno de 1300. Embora Pascal, em 1654, tenha construído triângulos numéricos de uma forma diferente da que conhecemos hoje, em seu *Traité Du Triangle Arithmétique*.

Em 2003, o jornal americano *The New York Times* publicou um artigo intitulado *In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment*, sobre os resultados de uma pesquisa do historiador de Matemática Reviel Netz, em que ele afirma que o *Stomachion*, um jogo constituído de quatorze peças que devem ser encaixadas para formar um quadrado, foi feito por Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) para fins de combinatórios. O fato é que a origem dessa parte da Matemática não se encontra no estudo do binômio como se acreditava (BRITO; TAVARES, 2004).

Voltando ao binômio $(1 + x)^n$, ele está ligado diretamente ao triângulo de Pascal. Em seu tratado, já citado anteriormente, mostrou como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$. O nome coeficiente binomial foi introduzido por Michael Stifel (1486-1567), que mostrou, em torno de 1550, como calcular $(1 + x)^n$ a partir do

desenvolvimento de $(1 + x)^{n-1}$. A grande contribuição de Isaac Newton (1646-1727) ao binômio foi ter mostrado com calcular $(1 + x)^n$ diretamente sem antes calcular $(1 + x)^{n-1}$ e ainda generalizou o desenvolvimento para $(a + b)^q$, onde q é um número racional, obtendo neste caso uma série infinita. A fórmula obtida para a sua expansão é conhecida como Binômio de Newton devido à sua contribuição.

Segundo Morgado (1991), foi devido à curiosidade de um jogador apaixonado, o Chevalier de Méré, de calcular o número de possibilidades existentes de resultados dos jogos de cartas que incentivou o estudo dos métodos de contagem. Com isso, diz-se que Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) impulsionaram essa área.

Mais tarde, em 1713, Jaime Bernoulli demonstrou que $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$ usando a interpretação de Pascal em sua obra *Ars Conjectandi*, além de dedicar-se também, à Teoria das combinações e permutações (MORGADO, et al, 2016) .

Outros matemáticos se interessaram pela teoria das probabilidades, responsável também pelo desenvolvimento da Análise Combinatória. Mas foi Leonhard Euler (1707-1783) que teve um papel destacado, representou pelo símbolo $\binom{n}{p}$ o coeficiente binomial, além de dar contribuições valiosas no teorema das partições e Teoria dos Grafos.

O conceito de Função Geradora originou-se a partir dos trabalhos de Abraham de Moivre (1667-1754), que mostrou como achar diretamente os números de Fibonacci e, por sua vez, Euler (1707-1783), usou essa técnica em problemas de teoria aditiva de números, especialmente na teoria de partições.

Como vimos, a Análise Combinatória tem se desenvolvido bastante e muitos problemas relevantes podem ser modelados matematicamente graças a ela. Portanto, essa é uma importante área de pesquisa com aplicações diversas, inclusive na Computação.

Além disso, ferramentas como funções geradoras e o teorema binomial, entre outros, embora sejam pouco utilizados pelos educadores no ensino básico, são muito importantes para o entendimento e resolução dos problemas de contagem, e com isso, podem ser ensinados em turmas de ensino médio, como por exemplo, em turmas olímpicas.

O objetivo deste trabalho é explorar uma dessas ferramentas da Análise Combinatória e que apresenta uma enorme versatilidade na resolução de problemas: as funções geradoras. A sua utilidade está na interpretação combinatória dada aos coeficientes e aos expoentes da sua expansão em série formal. O foco principal será apresentar as funções geradoras ordinárias na resolução de alguns tipos de problemas de contagem, bem como, a sua

aplicação em recorrências lineares. Para facilitar a compreensão, utilizaremos o Teorema Binomial e a sua generalização.

Primeiramente, trataremos como certos problemas de contagem, mais especificamente problemas que se apresentam na forma de equações lineares, podem ser solucionados com o auxílio de métodos binomiais, chegando à generalização do Teorema Binomial. Em seguida, apresentaremos as funções geradoras como séries formais, demonstrando as suas propriedades. Por sua vez, apresentaremos a aplicação dessa ferramenta versátil em recorrências lineares homogêneas e não-homogêneas. Mostraremos, também, a sua aplicabilidade em problemas clássicos como Números de Fibonacci e Torre de Hanoi. E por fim, utilizaremos na resolução de alguns problemas de contagem com e sem restrições, além de outros problemas.

2 TEOREMA BINOMIAL GENERALIZADO

2.1 Teorema binomial e equações lineares

Neste capítulo, inicialmente abordaremos um problema de contagem que podem ser resolvidos com o auxílio de métodos binomiais.

Problema 2.1 Para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, considere a equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad (2.1)$$

onde $x_i = 0$ ou 1 para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sabendo disso,

- A) Para quais valores de k a equação (2.1) possui solução?
- B) Suponha que (2.1) possui solução. Quantas soluções existem?

Observe que a cada x_i da equação, com $i = 1, 2, \dots, n$, podemos associar uma função polinomial $f_i(x)$ cujos expoentes pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$. Logo,

$$f_1(x) = x^0 + x^1 = 1 + x$$

$$f_2(x) = x^0 + x^1 = 1 + x$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = x^0 + x^1 = 1 + x.$$

O produto dessas funções será

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) = \underbrace{(1+x)(1+x) \cdots (1+x)}_{n \text{ termos}}.$$

Considere agora a função

$$F(x) = \underbrace{(1+x)(1+x) \cdots (1+x)}_{n \text{ termos}}.$$

Podemos multiplicar os termos na expressão anterior e depois verificar que o coeficiente de x^k será o número de maneiras de escolher um termo de cada fator, de modo que a soma dos expoentes dos termos totalizem k (sendo x^0 se for escolhido 1 e x^1 se for escolhido x). Isso é exatamente o número de soluções de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$.

Assim,

$$F(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^n F(n, k)x^k.$$

Podemos concluir que os valores para os quais (2.1) possui solução são $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, pois a função possui todos os expoentes entre 0 e n . Note que o número de soluções de (2.1) é exatamente $F(n, k)$. Vejamos algumas propriedades de $F(n, k)$:

- I. $F(n, 0) = F(n, n) = 1$;
- II. $F(n, k) = F(n - 1, k - 1) + F(n - 1, k)$;
- III. $F(n, k) = F(n, n - k)$;
- IV. $F(n, k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

Denotando por (a_1, a_2, \dots, a_n) a solução quando $x_i = a_i$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ temos que item (I) é imediato, pois $(0, 0, \dots, 0)$ e $(1, 1, \dots, 1)$ são, respectivamente, as únicas soluções para as equações $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ e $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

Para mostrar o item (II), basta observar que as soluções de

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k, \quad (2.2)$$

podem ser classificadas em dois tipos: As soluções tais que $x_n = 0$ e aquelas em que $x_n = 1$, assim:

$$x_n = 0: x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = k \Rightarrow \text{possui } F(n - 1, k) \text{ soluções}$$

$$x_n = 1: x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = k - 1 \Rightarrow \text{possui } F(n - 1, k - 1) \text{ soluções.}$$

Logo, o número total de soluções de (2.2) será

$$F(n, k) = F(n - 1, k - 1) + F(n - 1, k).$$

Agora, uma solução para (2.1) consiste em uma escolha de k variáveis iguais a 1 e $(n-k)$ variáveis iguais a 0. Observe que, ao escolher as k variáveis iguais a 1, a escolha das variáveis iguais a 0 já está definida, desse modo, a quantidade de soluções $F(n, k)$ deverá ser igual a $F(n, k - 1)$, justificando o item (III). Por fim, como foi mencionado anteriormente, uma solução de (2.1) consiste em uma escolha de k variáveis dentre n possibilidades para serem iguais a 1. (Aqui pode-se usar o princípio fundamental da contagem ou permutação com repetição para mostrar a fórmula (IV)).

Usaremos a notação

$$\binom{n}{k} = F(n, k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Teorema 2.1 (Teorema Binomial Clássico). *Para qualquer inteiro não-negativo n e todo x real, vale*

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Demonstração. Segue-se imediatamente do fato que $(1 + x)^n = F(x)$ e das propriedades (I)-(IV).

Observação 2.1. Por conta de estarem presentes no Teorema Binomial, os termos $\binom{n}{k}$ são chamados de coeficientes binomiais. Note ainda que, $\binom{n}{k} = 0, \forall k > n$. Isso é imediato, pois $\binom{n}{k}$ representa o número de soluções de (2.1) cuja soma supera n , o que é impossível, pois temos apenas n variáveis que são no máximo iguais a 1 e a soma é no máximo igual a n . Desse modo, podemos expressar o Teorema Binomial como uma soma infinita:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k. \quad (2.3)$$

Corolário 2.1 *Para qualquer n , inteiro não-negativo, e quaisquer x, y , números reais não-nulos, vale*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Demonstração. Colocando o fator y^n em evidência e usando o Teorema 2.1, temos

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= y^n \left(1 + \frac{x}{y}\right)^n \\ &= y^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{y}\right)^k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^n \frac{1}{y^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^n \frac{1}{y^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \end{aligned}$$

2.2 Generalização do teorema binomial

Pergunta 2.2 *A expressão (2.3) é verdadeira quando n é um real qualquer?*

Antes de responder a essa pergunta, precisamos entender o que é uma série infinita e quando ela é convergente. O conhecimento desses temas se faz necessário para darmos prosseguimento aos estudos.

2.2.1 Convergência de séries infinitas

Definição 2.1 *Se $\{a_n\}$ for uma sequência infinita e $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, então a sequência $\{S_n\}$ será chamada de série infinita, a qual é denotada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Os números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ são chamados de termos da série infinita. Os números $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ são chamados de somas parciais da série infinita.

Observe que essa definição estabelece que uma série infinita é uma sequência de somas parciais. Em geral, para garantir que a soma de uma série infinita seja um número real é necessário que a série seja convergente. Para isso, vejamos a definição a seguir.

Definição 2.2 *Sejam $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ uma série infinita e $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ sua n -ésima soma parcial. Se o $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existir e for igual a s , dizemos que a série dada será convergente, e escrevemos*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s.$$

*O número s é chamado soma da série. Caso contrário, a série será **divergente**.*

Desse modo, a soma de uma série convergente é o limite de uma sequência de somas parciais, ou seja, somando um número suficientemente grande de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s . A definição de limite pode vista no Apêndice A.

Um exemplo importante de uma série infinita é a série geométrica

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}; a \neq 0. \quad (2.4)$$

Teorema 2.2 A série geométrica converge para a soma $\frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

Demonstração. A n -ésima soma parcial de série geométrica (2.4) é dada por

$$S_n = a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1}). \quad (2.5)$$

Da identidade

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots + r^{n-1})$$

podemos escrever (2.5) como

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ se } r \neq 1.$$

Primeiramente, mostraremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, se $|r| < 1$. Com efeito, se $r = 0$, a sequência é $\{0\}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Logo, a sequência é convergente e o n -ésimo elemento converge para zero.

Se $0 < |r| < 1$, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe um número $N > 0$, tal que se n for inteiro e se $n > N$, então $|r^n - 0| < \epsilon$.

Assim,

$$|r^n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow |r|^n < \epsilon \Leftrightarrow \ln|r|^n < \ln \epsilon \Leftrightarrow n \ln|r| < \ln \epsilon.$$

Como $0 < |r| < 1$, $\ln|r| < 0$. Logo, a afirmação acima é equivalente a se $n > N$, então $n > \frac{\ln \epsilon}{\ln|r|}$. Assim, basta escolher $N > \frac{\ln \epsilon}{\ln|r|}$. Dessa forma, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, $|r| < 1$.

Consequentemente, a série geométrica converge e, a sua soma é $\frac{a}{1-r}$.

Se $r = 1$, $S_n = na$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, se $a > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$, se $a < 0$.

Se $r = -1$, então a série geométrica torna-se

$$a - a + a - \dots + (-1)^{n-1}a + \dots.$$

Assim, $S_n = 0$, se n for par, e $S_n = a$, se n for ímpar. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ não existe.

Então, a série geométrica diverge quando $|r| = 1$.

Considere agora o caso $|r| > 1$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1}$, e por outro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} \neq 0$ pois $|r^{n-1}|$ pode se tornar tão grande quanto se queira, tomando n suficientemente grande, então a série geométrica é divergente. Isso completa a demonstração.

As séries infinitas definidas acima envolvem termos constantes. Agora, discutiremos um tipo de séries de termos variáveis chamado de *séries de potências*, que podem ser consideradas como uma generalização da função polinomial.

2.2.2 Séries de potências

Definição 2.3 *Uma série de potências em $x - a$ é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - a)^n = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + \dots \quad (2.6)$$

Por conveniência, $(x - a)^0 = 1$ mesmo quando $x = a$. Se x for um determinado número, a série de potências (2.6) tornar-se-á uma série infinita de termos constantes. Um caso especial de (2.6) ocorre quando $a = 0$, e a série torna-se uma série de potências em x , que é

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots \quad (2.7)$$

Pergunta 2.3 *Para que valores de x a série de potências converge?*

Observe que, em (2.7), para cada valor de x para o qual a série converge, ela representa um número que é a sua soma. Assim, uma série de potências define uma função que tem como domínio todos os valores de x para os quais a série de potências converge. É notório que, quando $x = 0$, todos os termos são 0 para $n \geq 1$ e, portanto, a série sempre converge.

Uma série $\sum a_n$ é **absolutamente convergente** se a série dos módulos $\sum |a_n|$ é convergente. Para nos aprofundarmos nesse tema, enunciaremos o importante teorema a seguir:

Teorema 2.3 *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ uma dada série de potências. Então uma, e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

- (i) *a série converge para $x = 0$;*
- (ii) *a série é absolutamente convergente para todos os valores de x ;*
- (iii) *existe um número $R > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para todos os valores de x para os quais $|x| < R$ e é divergente para todos os valores de x para os quais $|x| > R$.*

O leitor pode encontrar uma demonstração para o teorema acima em (LIMA, 2006).

O **intervalo de convergência** de uma dada série de potências é o conjunto de todos os valores de x para os quais a série é convergente. O número R da afirmação (iii) é chamado de raio de convergência da série de potências. Na afirmação (i) o intervalo consiste em apenas

um único ponto 0, logo $R = 0$. Na afirmação (ii) o intervalo é $(-\infty, +\infty)$, portanto $R = \infty$. Já na afirmação (iii), temos $|x| < R$, ou seja, $-R < x < R$. Quando x é extremidade do intervalo, isto é, $x = \pm R$, a série de potências pode convergir em uma ou ambas as extremidades ou divergir em ambas as extremidades. Assim na afirmação (iii), o intervalo de convergência será um dos seguintes: $(-R, +R)$, $[-R, +R]$, $(-R, +R]$ ou $[-R, +R)$.

Suponhamos agora que f seja uma função representada por uma série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + \dots, \quad (2.8)$$

para $|x| < R$.

A partir dessa função, podemos determinar os coeficientes C_n nos termos de f . Perceba que se $x = 0$, obtemos $f(0) = C_0$.

Pelo Teorema de Derivação de Séries de Potências (ver Teorema 6 Apêndice A), a função f tem derivadas de todas as ordens em $(-R, +R)$. Logo, após sucessivas derivações da função em (2.8)

$$f'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots + nC_n x^{n-1} + \dots \quad (2.8.1)$$

$$f''(x) = 2C_2 + 2.3C_3 x + \dots + (n-1)nC_n x^{n-2} + \dots \quad (2.8.2)$$

$$f'''(x) = 2.3C_3 + 2.3.4C_4 \dots + (n-2)(n-1)nC_n x^{n-3} + \dots \quad (2.8.3)$$

e assim por diante.

Se $x = 0$ em (2.8.1), (2.8.2) e (2.8.3),

$$f'(0) = C_1,$$

$$f''(0) = 2C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$f'''(0) = 2.3C_3 \Leftrightarrow C_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

Em geral,

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

para todo n inteiro positivo.

Essa fórmula é válida para $n = 0$, se adotarmos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$. Assim, dessa fórmula e de (2.8), a série de potências de f em x pode ser escrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (2.9)$$

Em um sentido mais geral, consideremos a função f com uma série de potências em $x - a$, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - a)^n = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \dots + C_n(x - a)^n + \dots \quad (2.10)$$

para $|x - a| < R$. Após sucessivas derivações da função f em (2.10) e tomando $x = a$ em f , f' , f'' , f''' , ..., $f^{(n)}$, obtemos

$$C_0 = f(a) \quad C_1 = f'(a) \quad C_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

e, em geral

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Dessa fórmula e de (2.10) podemos escrever a série de potências de f em $x - a$ como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \dots$$

Essa série é chamada de **série de Taylor** de f em a . E a série de (2.9) é o caso especial da série de Taylor quando $a = 0$, mais conhecida por **série de Maclaurin**.

Com o conhecimento obtido, podemos agora determinar a série de Maclaurin de

$$f(x) = (1 + x)^u$$

onde u não é inteiro positivo.

Aplicando sucessivas derivações em f e substituindo $x = 0$ nas representações de f , bem como nas de suas derivadas, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^u &\Rightarrow f(0) &= 1 \\ f'(x) &= u(1 + x)^{u-1} &\Rightarrow f'(0) &= u \\ f''(x) &= u(u-1)(1 + x)^{u-2} &\Rightarrow f''(0) &= u(u-1) \\ f'''(x) &= u(u-1)(u-2)(1 + x)^{u-3} &\Rightarrow f'''(0) &= u(u-1)(u-2) \\ &&&\vdots \\ f^{(n)}(x) &= u(u-1) \dots (u-n+1)(1 + x)^{u-n} &\Rightarrow f^{(n)}(0) &= u(u-1) \dots (u-n+1) \end{aligned}$$

Desse modo, a série de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^u$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2!} x^2 + \frac{u(u-1)(u-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{u(u-1) \dots (u-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (2.11)$$

Ela é também chamada de *série binomial*. Para determinar o raio de convergência da série (2.11), escrevemos $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ e aplicaremos o teste da razão (veja no Apêndice A),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{u(u-1) \dots (u-n+1)(u-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{u(u-1) \dots (u-n+1)}{n!} x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u-n}{n+1} \right| |x| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{u}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} \right| |x| \\ &= |x|. \end{aligned}$$

Portanto, a série de (2.11) é convergente se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$.

Agora, temos conhecimento suficiente para enunciar o teorema binomial generalizado.

Considerando k um número inteiro não-negativo e r um número real, definimos o *coeficiente binomial generalizado* por

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1) \dots (r-k+1)}{k!}, k \geq 1 \text{ e } \binom{r}{0} = 1. \quad (2.12)$$

Por exemplo,

$$\binom{-4}{3} = \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!} = -20 \text{ e } \binom{3/2}{4} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{4!} = \frac{3}{128}.$$

Até o momento o coeficiente binomial generalizado se trata somente de uma função e sem nenhuma relação com o Teorema Binomial. Porém, podemos verificar que os coeficientes binomiais generalizados possuem propriedades semelhantes aos coeficientes binomiais.

Proposição 2.1 *Sejam k um inteiro não-negativo, n um número real não-negativo e r um real qualquer, temos*

$$(a) \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}.$$

$$(b) \binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}.$$

Demonstração. No caso (a), podemos aplicar a definição (2.12) do coeficiente binomial generalizado logo,

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}$$

e, em seguida, colocando (-1) em evidência obtemos

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= (-1)^k \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(n+k-1)\dots(n+2)(n+1)n}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Já no caso (b), desenvolvendo os segundo membro, temos,

$$\begin{aligned} \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k} &= \frac{(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(r-1)(r-2)\dots(r-k)}{k!} \\ &= \frac{(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{(k-1)!} \left(1 + \frac{r-k}{k}\right) \\ &= \frac{(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{(k-1)!} \cdot \frac{r}{k} \\ &= \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!} \\ &= \binom{r}{k} \end{aligned}$$

Teorema 2.4 (Teorema Binomial para expoentes inteiros negativos). *Dado n inteiro positivo e $|x| < 1$, temos que*

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k.$$

Demonstração. Faremos uma prova por indução.

Para $n = 1$, pelo caso (a) da Proposição 2.1, temos que

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \binom{1+k-1}{1-1} = (-1)^k \binom{k}{0} = (-1)^k.$$

Por outro lado, temos

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k.$$

Agora, suponha que seja válido para $n = N$, provaremos que também é válido para $n = N + 1$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} (1+x)^{-(N+1)} &= (1+x)^{-1}(1+x)^{-N} \\ &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \binom{-1}{p} x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \binom{-N}{q} x^q \right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Justificativa: O produto em (2.13) corresponde a um produto de duas séries de potências denominada de **produto de Cauchy**, que é definida por uma convolução discreta onde

$$c_s = \sum_{l=0}^s \binom{-1}{s-l} \binom{-N}{l}.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}
 c_s &= \sum_{l=0}^s (-1)^{s-l} \binom{s-l}{0} (-1)^l \binom{N-1+l}{N-1} \\
 &= \sum_{l=0}^s (-1)^s \binom{N-1+l}{N-1} \\
 &= (-1)^s \left[\binom{N-1}{N-1} + \binom{N}{N-1} + \binom{N+1}{N-1} + \cdots + \binom{N-1+s}{N-1} \right] \\
 &= (-1)^s \binom{N+s}{N} \\
 &= (-1)^s \binom{N+s}{s}
 \end{aligned}$$

Pelo caso (a) da Proposição 2.1, obtemos,

$$c_s = \binom{-(N+1)}{s}.$$

Assim,

$$(1+x)^{-(N+1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-(N+1)}{s} x^s.$$

Portanto,

$$(1+x)^{-n} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-n}{s} x^s.$$

O Teorema Binomial para coeficientes negativos não depende da teoria das séries de funções e sua demonstração é acessível à ementa de Matemática do Ensino Médio. O Teorema a seguir apresenta a extensão do Teorema Binomial para expoentes reais e sua demonstração utiliza a teoria de séries de funções.

Teorema 2.5 (Teorema Binomial Generalizado). *Seja r real, então se umas das hipóteses for verdadeira*

(a) *Se r é inteiro não negativo,*

(b) *Se $|x| < 1$,*

então

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k.$$

Demonstração. O caso (a) é o Teorema Binomial Clássico já demonstrado anteriormente. No caso (b), seja

$$g(x) = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

com $|x| < 1$. Podemos expressar g como,

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n, |x| < 1. \quad (2.14)$$

Queremos mostrar que $g(x) = (1+x)^r$, onde $|x| < 1$. Temos que

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}, |x| < 1. \quad (2.15)$$

Ou seja,

$$g'(x) = r + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}. \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os membros de (2.15) por x , obtemos,

$$xg'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!}x^n, |x| < 1. \quad (2.17)$$

Reescrevendo (2.16) com o extremo inferior subtraído de 1 e n substituído por $n+1$, obtemos,

$$g'(x) = r + \sum_{n=1}^{\infty} (r-n) \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n.$$

Multiplicando o numerador e o denominador de (2.17) por n , temos

$$xg'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n.$$

As séries $g'(x)$ e $xg'(x)$ são absolutamente convergentes para $|x| < 1$. Logo, elas podem ser somadas termo a termo, e a série resultante continuará absolutamente convergente, para $|x| < 1$. Portanto, da adição resulta,

$$\begin{aligned} g'(x) + xg'(x) &= \left[r + \sum_{n=1}^{\infty} (r-n) \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n \right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n \right] \\ \Leftrightarrow (1+x)g'(x) &= r + r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (1+x)g'(x) = r \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} x^n \right].$$

De (2.14),

$$(1+x)g'(x) = rg(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{r}{1+x}.$$

O primeiro membro da equação acima é $D_x[\ln g(x)]$, assim,

$$\frac{d}{dx} [\ln g(x)] = \frac{r}{1+x}.$$

E,

$$\frac{d}{dx} [\ln(1+x)^r] = \frac{r}{1+x}.$$

Como $\ln g(x)$ e $\ln(1+x)^r$ têm a mesma derivada, logo o que difere entre eles é a constante.

Assim,

$$\ln g(x) = \ln(1+x)^r + C.$$

De (2.14), $g(0) = 1$, segue que $C = 0$. Portanto, $g(x) = (1+x)^r$, com $|x| < 1$.

■

3 FUNÇÕES GERADORAS

As funções geradoras possuem inúmeras aplicações em diversas áreas da matemática, tais como: combinatória, teoria da probabilidade, estatística e teoria dos números. Na combinatória, quanto mais um problema de contagem impõe restrições, mais complexa se torna a sua resolução, logo, estudaremos aqui essa ferramenta que é bastante eficiente na resolução de problemas que envolvem equações lineares como no Problema 2.1, mostrado no início do Capítulo 2. Definiremos aqui a função geradora ordinária, bem como as suas propriedades.

Definição 3.1 *Uma função geradora (ordinária) de uma sequência $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ é uma série de potências formal*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Se $\{a_n\}$ for uma sequência finita, então a sua função geradora é um polinômio de uma variável. O coeficiente de x^n será denotado por $[x^n]F(x)$.

A definição acima não é a única maneira de uma função geradora. No entanto, as funções geradoras ordinárias são o tipo mais comumente usados. Portanto, deste ponto em diante, serão mencionados simplesmente como funções geradoras. Uma função geradora é uma série de potência formal que nos permite ignorar problemas de convergência e manipular do mesmo modo como fazemos com polinômios.

Ao longo deste capítulo, indicaremos a correspondência entre uma sequência e sua respectiva função geradora com uma seta dupla da seguinte maneira:

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots\} \quad \leftrightarrow \quad f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$$

Exemplo 3.1 A sequência finita $\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}\}$ tem a função geradora

$$F(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n = (1 + x)^n.$$

Exemplo 3.2 A sequência infinita $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$ tem a função geradora

$$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Observação 3.1 Em algumas situações é conveniente ter uma expressão fechada para a função geradora. No exemplo 3.2, a série formal em questão é uma série geométrica que, quando $|x| < 1$, converge para $\frac{1}{1-x}$ se $n \rightarrow \infty$. Assim, $G(x) = \frac{1}{1-x}$. Nem sempre é fácil encontrar a função geradora de uma sequência como no exemplo anterior. Nesse caso, podemos manipular as sequências já conhecidas para que se obtenha a função geradora desejada. De maneira semelhante, também é possível manipular as funções geradoras de uma sequência para que se tenha a sequência desejada.

Exemplo 3.3 Vamos determinar a sequência gerada pela função $F(x) = \frac{1}{1-3x}$.

Observe que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (3.1)$$

Substituindo x por $3x$, obtemos,

$$F(x) = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots.$$

Logo, a função gera a sequência $\{1, 3, 9, 27, \dots\}$.

De maneira geral, podemos usar a expressão (3.1) para obter uma forma fechada para as funções geradoras de diversas sequências:

$$\begin{aligned} \{1, -1, 1, -1, \dots\} &\leftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \\ \{1, k, k^2, k^3, \dots\} &\leftrightarrow 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \dots = \frac{1}{1-kx} \\ \{1, 0, 1, 0, \dots\} &\leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

3.1 Propriedades das funções geradoras

3.1.1 Escalonamento (Dimensionamento)

A multiplicação de uma função geradora por uma constante escala todos os termos na sequência associada pela mesma constante. Por exemplo,

$$\{1, 0, 1, 0, \dots\} \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Multiplicando a função geradora por 2 obtemos

$$\frac{2}{1 - x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \dots$$

que gera a sequência $\{2, 0, 2, 0, \dots\}$.

Regra 3.1.1 (Regra de Dimensionamento). *Se*

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots\} \leftrightarrow F(x),$$

então

$$\{kf_0, kf_1, kf_2, \dots\} \leftrightarrow k.F(x).$$

De forma mais detalhada, a ideia dessa regra é que

$$\begin{aligned} \{kf_0, kf_1, kf_2, \dots\} &\leftrightarrow kf_0 + kf_1x + kf_2x^2 + \dots \\ &= k.(f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots) \\ &= k.F(x). \end{aligned}$$

3.1.2 Adição

A adição de funções geradoras corresponde à adição das duas sequências, termo a termo. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \{1, 1, 1, 1, \dots\} &\leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x} \\ + \{1, -1, 1, -1, \dots\} &\leftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1 + x} \\ \hline \{2, 0, 2, 0, \dots\} &\leftrightarrow \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \end{aligned}$$

Observe que temos duas expressões distintas que geram a mesma sequência. Na verdade, se efetuarmos a soma, obtemos exatamente a expressão fechada da sequência $\{2, 0, 2, 0, \dots\}$,

$$\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} = \frac{(1 + x) + (1 - x)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{2}{1 - x^2}.$$

Regra 3.1.2 (Regra da Adição). Se

$$\begin{aligned} \{f_0, f_1, f_2, \dots\} &\leftrightarrow F(x) \text{ e} \\ \{g_0, g_1, g_2, \dots\} &\leftrightarrow G(x), \end{aligned}$$

então

$$\{f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots\} \leftrightarrow F(x) + G(x).$$

De forma mais detalhada, a ideia dessa regra é

$$\begin{aligned} \{f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots\} &\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) \\ &= F(x) + G(x). \end{aligned}$$

3.1.3 Deslocamento à Direita

Considere a sequência e a sua função geradora

$$\{1, 1, 1, 1, \dots\} \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Agora, vamos deslocar à direita acrescentando k zeros à esquerda na sequência:

$$\begin{aligned} \left\{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ zeros}}, 1, 1, 1, \dots \right\} &\leftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^{k-1} + x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} + \dots \\ &= x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + x^{k+3} \dots \\ &= x^k \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \\ &= \frac{x^k}{1-x}. \end{aligned}$$

Logo, acrescentar k zeros à sequência corresponde à multiplicação da função geradora por x^k . Isso é válido em geral.

Regra 3.1.3 (Regra do Deslocamento à Direita). Se

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots\} \leftrightarrow F(x),$$

então

$$\left\{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ zeros}}, f_0, f_1, f_2, \dots \right\} \leftrightarrow x^k \cdot F(x).$$

De uma forma mais detalhada, a ideia da regra é

$$\begin{aligned} \underbrace{\{0, 0, \dots, 0, f_0, f_1, f_2, \dots\}}_{k \text{ zeros}} &\leftrightarrow 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^{k-1} + f_0x^k + f_1x^{k+1} + f_2x^{k+2} + \dots \\ &= f_0x^k + f_1x^{k+1} + f_2x^{k+2} + \dots \\ &= x^k \cdot (f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots) \\ &= x^k \cdot F(x). \end{aligned}$$

3.1.4 Diferenciação

Vamos derivar a função geradora da sequência $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots &= \frac{1}{1-x}. \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ \Rightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \dots &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow \{1, 2, 3, \dots\} &\leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Em geral, diferenciando uma função geradora tem dois efeitos sobre a sequência correspondente: cada termo é multiplicado pelo seu índice e toda a sequência é deslocada à esquerda em um termo.

Regra 3.1.4 (Regra da Diferenciação). *Se*

$$\{f_0, f_1, f_2, \dots\} \leftrightarrow F(x),$$

então

$$\{f_1, 2f_2, 3f_3, \dots\} \leftrightarrow F'(x).$$

De maneira mais precisa, a regra é

$$\begin{aligned} \{f_1, 2f_2, 3f_3, \dots\} &\leftrightarrow f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2 + \dots \\ &= \frac{d}{dx}(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots) \\ &= \frac{d}{dx}F(x). \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.4 Encontrar uma função geradora para a sequência dos quadrados $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$.

Para isso, usaremos a sequência $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$ e sua respectiva função geradora.

$$\{1, 1, 1, 1, \dots\} \leftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

Aplicando a regra da diferenciação e em seguida, a regra do deslocamento à direita na expressão acima por duas vezes, obtemos

$$\text{Regra de derivação: } \{1, 2, 3, 4, \dots\} \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\text{Regra do deslocamento à direita: } \{0, 1, 2, 3, \dots\} \leftrightarrow x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\text{Regra de derivação: } \{1, 4, 9, \dots\} \leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\text{Regra do deslocamento à direita: } \{0, 1, 4, 9, \dots\} \leftrightarrow x \cdot \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Portanto, a função geradora dos quadrados é

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

3.1.5 Produto

Regra 3.1.5 (Regra do Produto). Se

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \leftrightarrow A(x) \quad e \quad \{b_0, b_1, b_2, \dots\} \leftrightarrow B(x),$$

então

$$\{c_0, c_1, c_2, \dots\} \leftrightarrow A(x) \cdot B(x),$$

onde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Podemos mostrar o produto $A(x) \cdot B(x)$ através da tabela abaixo para identificar todos os termos:

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2	b_3x^3	...
a_0x^0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$...
a_1x^1	$a_1b_0x^1$	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$...	
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$...		
a_3x^3	$a_3b_0x^3$...			
\vdots	...				

Observe que os termos que envolvem a mesma variável x estão na diagonal. Logo, reunindo esses termos, obtemos o coeficiente de x^n no produto é a soma de todos os termos $(n+1)$ ésima diagonal. Assim,

$$c_0 = a_0b_0$$

$$c_1 = a_1b_0 + a_0b_1$$

$$c_2 = a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$$

A sequência $\{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ é chamada de *convolução* das sequências $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ e $\{b_0, b_1, b_2, \dots\}$.

3.1.6 Soma

Para mostrar essa propriedade, faremos o uso de uma aplicação da regra do produto, estudada em 3.1.5. Considerem

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \leftrightarrow A(x) \quad \text{e} \quad B(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Então, $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = 1$ e o n -ésimo coeficiente de $A(x)B(x)$ é

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1 = \sum_{i=0}^n a_i.$$

Em outras palavras, dada qualquer sequência $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, podemos calcular

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

para todo n apenas multiplicando a função geradora da sequência por $\frac{1}{1-x}$.

Regra 3.1.6 (Regra da Soma). *Se*

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots\} \leftrightarrow A(x),$$

então

$$\{s_0, s_1, s_2, \dots\} \leftrightarrow \frac{A(x)}{1-x},$$

onde

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i \text{ para todo } n \geq 0.$$

4 APLICAÇÕES

Este capítulo tem por objetivo mostrar algumas aplicações das funções geradoras. Começaremos por recorrências lineares homogêneas e não-homogêneas, em seguida mostraremos sua aplicação na sequência de Fibonacci e na Torre de Hanoi. E por fim, mostraremos o seu uso na resolução de alguns problemas de contagem.

4.1 Recorrências lineares

Muitas sequências são definidas recursivamente, isto é, por recorrência. Nessa perspectiva, consiste em se determinar uma regra que permite calcular qualquer termo em função do antecessor imediato, como é o caso das recorrências de primeira ordem, ou dos termos dos dois termos antecessores imediatos, como é o caso das recorrências de segunda ordem. As recorrências podem ser ainda lineares ou não, ou seja, podem ser na forma de uma função do primeiro grau ou não, respectivamente.

Exemplo 4.1.1 (*Recorrência Homogênea*). Encontre a_n explicitamente, onde

$$a_n - 3a_{n-2} - 2a_{n-3} = 0, \quad \text{para } n \geq 3$$

$$\text{e } a_2 = 12, a_1 = 5, a_0 = 5.$$

Solução. Considere a função geradora da sequência $\{a_n\}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Reescrevendo a recorrência do problema temos,

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}, \quad n \geq 3. \quad (4.1)$$

Multiplicando ambos os lados da equação 4.1 por x^n e somando os termos para $n \geq 3$,

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} 3a_{n-2} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3} x^n \quad (4.2)$$

Logo,

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} 3a_{n-2} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} 2a_{n-3} x^n$$

$$\begin{aligned}
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + 3x^2 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + 2x^3 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-3} \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + 3x^2(A(x) - a_0) + 2x^3A(x).
\end{aligned}$$

Substituindo $a_2 = 12, a_1 = 5, a_0 = 5$ na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
A(x) &= 5 + 5x - 3x^2 + 3x^2A(x) + 2x^3A(x) \\
&= \frac{5 + 5x - 3x^2}{1 - 3x^2 - 2x^3}.
\end{aligned}$$

Separando a expressão $A(x)$ em frações parciais, temos

$$A(x) = \frac{3}{1-2x} + \frac{3}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

Assim,

$$A(x) = 3(1-2x)^{-1} + 3(1+x)^{-1} - (1+x)^{-2}.$$

Usando o Teorema Binomial para expoentes negativos,

$$\begin{aligned}
A(x) &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-2x)^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [3 \cdot 2^n + 3 \cdot (-1)^n - (n+1) \cdot (-1)^n] x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [3 \cdot 2^n + (-1)^n \cdot (2-n)] x^n.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n = 3 \cdot 2^n + (-1)^n \cdot (2-n).$$

Exemplo 4.1.2 (Recorrência Não-homogênea) Encontrar a expressão geral para c_n , onde

$$c_n - 3c_{n-1} = 3^n, \quad \text{com } c_0 = 2.$$

Solução. Seja

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

a função geradora da sequência $\{c_n\}$. Reescrevendo a recorrência do problema, temos,

$$c_n = 3c_{n-1} + 3^n. \quad (4.3)$$

Multiplicando ambos os membros da equação 4.3 por x^n e somando os termos para $n \geq 1$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3c_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} C(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3c_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n \\ &= c_0 + 3x \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n \\ &= c_0 + 3xC(x) + \left[\frac{1}{1-3x} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{(1-3x)^2} + \frac{1}{1-3x} \\ &= (1-3x)^{-2} + (1-3x)^{-1}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Binomial para expoentes negativos na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-3x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-3x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) \cdot 3^n + 3^n] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2) \cdot 3^n] x^n. \end{aligned}$$

Logo, $c_n = (n+2) \cdot 3^n$.

4.2 A torre de hanoi

Este problema foi inventado por Edouard Lucas¹ em 1883. A versão original das Torres de Hanoi consiste em três postes e oito discos de diferentes tamanhos, inicialmente

¹Edouard Lucas, matemático que inventou o jogo, inspirado da lenda Hindu em 1883, na cidade de Hanoi, no Vietnã.

dispostos no primeiro poste em ordem decrescente como mostra a figura 1, cujo objetivo é transferir todos os discos para outro poste, um de cada vez, não sendo permitido colocar um disco maior sobre um menor. No caso de n discos, qual o número mínimo de movimentos necessários para resolver este problema?

Figura 1 - A configuração inicial das Torres de Hanoi com 8 discos



Fonte: elaborado pela autora

A relação de recorrência para solução deste problema é dada por

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad \text{para } n \geq 1$$

com $T_0 = 0$ e o nosso objetivo é encontrar uma expressão fechada para T_n usando as funções geradoras.

Seja a função geradora da sequência T_n definida por

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n.$$

Como $T_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2T_{n-1} + 1)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2T_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

Mas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} x^{n-1} = T(x)$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x) &= 2xT(x) + \left[\frac{1}{1-x} - 1 \right] \\ &= 2xT(x) + \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Assim,

$$T(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}.$$

Usando as frações parciais, obtemos

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\ &= (1-2x)^{-1} - (1-x)^{-1}. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Binomial para expoentes negativos, segue que

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [2^n - 1] x^n. \end{aligned}$$

Portanto, $T_n = 2^n - 1$.

4.3 Números de fibonacci

No ano de 1202, Fibonacci² investigou a criação de coelhos em circunstâncias ideais. Um casal de coelhos recém-nascidos foi deixado numa ilha para se reproduzirem, sabendo que eles precisariam de 2 meses de idade para filhotes e, a partir daí, cada casal de coelhos gera exatamente um outro casal por mês. Após n meses, qual seria a população de coelhos, supondo não haver mortes e nem migrações?

A sequência resultante da situação descrita acima é conhecida como *sequência de Fibonacci*. Se denotarmos F_n a população de coelhos no n -ésimo mês, obtemos a recorrência

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{para } n \geq 2$$

onde $F_0 = 0, F_1 = 1$. Vamos expressar F_n em função de n usando as funções geradoras.

Seja a função geradora para $\{F_n\}$ dada por

² Fibonacci, também conhecido por Leonardo de Pisa.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Como $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, segue que

$$\begin{aligned} F(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\ &= x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= x + xF(x) + x^2F(x) \\ &= \frac{x}{1-x-x^2}. \end{aligned}$$

Fatorando o polinômio $1 - x - x^2$ teremos

$$1 - x - x^2 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x\right) \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x\right)$$

Logo,

$$F(x) = \frac{x}{\left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x\right) \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x\right)}.$$

Usando as frações parciais, obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x\right)^{-1} - \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x\right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

Aplicando, agora, o Teorema Binomial para expoentes negativos,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}x\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \left(-\frac{1 - \sqrt{5}}{2}x\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right] x^n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

4.4 Problemas de contagem

Podemos utilizar funções geradoras nos problemas de contagem, em particular, o problema de escolher itens de um conjunto sempre nos fornece vários tipos de funções geradoras, onde o coeficiente de x^n representa o modo de escolher n itens desse conjunto.

Considere a sequência $\left\{ \binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots, \binom{k}{k}, 0, 0, \dots \right\}$. Pelo capítulo anterior, podemos associar a seguinte função geradora a esta sequência:

$$A(x) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \dots + \binom{k}{k}x^n = (1+x)^k.$$

Podemos ver então que o coeficiente de x^n é igual a $\binom{k}{n}$ e representa a quantidade de maneiras de escolher n itens distintos de um conjunto de tamanho k .

Definição. Seja $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ uma função geradora. O operador coeficiente $[x^n]$ atua em $A(x)$ exibindo o coeficiente do termo x^n , assim

$$[x^n]A(x) = a_n.$$

Observação. Um fato útil é que $[x^{n-m}]A(x) = [x^n]x^m A(x)$. De fato,

$$[x^n]x^m A(x) = [x^n]x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = [x^n] \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m} = a_{n-m}.$$

Exemplo 4.4.1 Encontrar uma expressão para o número de maneiras de se distribuir i objetos indistinguíveis em j caixas distintas.

Solução. Neste exemplo, sempre assumimos que os objetos são idênticos. Consideramos o problema de encontrar o número de distribuição de i objetos para j caixas sem nenhuma restrição usando a função geradora. Isso significa que toda caixa pode ter qualquer número de objetos, é claro que até i , incluindo nenhum, nesse caso a função geradora para uma caixa se torna

$$1 + x + x^2 + \dots + x^i = \frac{1 - x^{i+1}}{1 - x}. \quad (4.4)$$

Além disso, como existem j caixas, precisamos elevar a expressão 4.4 a j ,

$$\left(\frac{1 - x^{i+1}}{1 - x} \right)^j.$$

Determinar o coeficiente de x^i na expansão da função geradora é suficiente para resolver o problema acima.

Mas, podemos ainda resolver esse problema de outra maneira e obter o mesmo coeficiente em questão. Observe que a função geradora de uma caixa pode ser tomada como

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad (4.5)$$

sem nenhuma restrição. A função geradora em 4.5 após elevarmos a j será

$$\frac{1}{(1 - x)^j} = (1 - x)^{-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-j}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j + n - 1}{n} x^n$$

Se calcularmos o coeficiente de x^i na expressão acima, obteremos o mesmo resultado.

Exemplo 4.4.2 *Encontrar uma expressão para o exemplo anterior agora com a restrição de que cada caixa contenha pelo menos k objetos.*

Solução. Nesse caso, cada caixa precisa conter pelo menos k objetos, logo a função geradora desse problema é dado por

$$x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots = x^k(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^k}{1 - x}.$$

Levando em conta agora que são j caixas, temos,

$$\left(\frac{x^k}{1 - x} \right)^j = x^{kj} \frac{1}{(1 - x)^j} = x^{kj} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{j + n - 1}{n} x^n. \quad (4.6)$$

Para resolver o problema no exemplo 4.4.2, basta considerar o coeficiente x^i em 4.6, ou ainda, x^{i-kj} em

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{j + n - 1}{n} x^n$$

que é

$$\binom{j + i - kj - 1}{i - kj}.$$

Exemplo 4.4.3 Ainda no mesmo exemplo, encontrar uma expressão com a restrição de que cada caixa contenha pelos menos k objetos e, no máximo $k+l-1$ objetos.

Solução. Como cada caixa deve ter pelo menos k objetos e no máximo $k+l-1$ objetos, a função geradora para a escolha é

$$x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots + x^{k+l-1} = x^k(1 + x + x^2 + \dots + x^{l-1}) = x^k \left(\frac{1-x^l}{1-x} \right). \quad (4.7)$$

Sendo j caixas, elevamos o polinômio em 4.7 a j ,

$$\left(x^k \left(\frac{1-x^l}{1-x} \right) \right)^j = x^{kj} \left(\frac{1-x^l}{1-x} \right)^j.$$

Mas o que queremos é o coeficiente de x^i , que é o mesmo coeficiente de x^{i-kj} em

$$\left(\frac{1-x^l}{1-x} \right)^j = (1-x^l)^j (1-x)^{-j}.$$

Os próximos exemplos ilustram o que foi mencionado acima.

Exemplo 4.4.4 De quantas maneiras podemos fazer uma salada com n frutas com as seguintes restrições?

- O número de maçãs deve ser par;
- O número de bananas deve ser múltiplo de 5.
- Pode-se usar no máximo 4 laranjas.
- Pode-se usar no máximo 1 pera.

Solução. A ideia aqui é usar uma função geradora para cada fruta. Como o número de maçãs deve ser par, temos como opções 0, 2, 4, 6, ..., assim

$$M(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Já o número de bananas deve ser múltiplo de 5, temos como opções 0, 5, 10, 15, ..., assim

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \dots = \frac{1}{1-x^5}.$$

Se o número de laranjas deve ser no máximo 4, então temos

$$L(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}.$$

E por último, o número de peras é no máximo 1, logo

$$P(x) = 1 + x.$$

Assim, a função geradora para o problema é

$$\begin{aligned}
 S(x) &= M(x)B(x)L(x)P(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)(1+x) \\
 &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
 &= (1-x)^{-2} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} x^k.
 \end{aligned}$$

Portanto, o que nos interessa é o coeficiente de x^n , ou seja,

$$[x^n]S(x) = \binom{n+1}{n} = n+1.$$

Exemplo 4.4.5 *Quantos dos inteiros compreendidos entre 1 e 100000 têm soma dos algarismos iguais a 17?*

Solução. Os números em questão estão entre 0 e 99999, já que 100000 não possui algarismos cuja a soma seja igual a 17. Com isso, sabemos que esses números escritos na base 10 são da forma

$$x_1x_2x_3x_4x_5$$

tal que $0 \leq x_i \leq 9$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Assim, o problema consiste em encontrar o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$$

com a restrição $0 \leq x_i \leq 9$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Agora, o nosso objetivo é encontrar o coeficiente de x^{17} na expansão da função geradora que segue

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^5 = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^5 = (1-x^{10})^5(1-x)^{-5}.$$

Como

$$(1-x^{10})^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-x^{10})^k = 1 - 5x^{10} + 10x^{20} - 10x^{30} + 5x^{40} - x^{50},$$

precisamos determinar agora os coeficientes de x^7 e x^{17} em

$$(1-x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-5}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{k} x^k$$

que são, respectivamente,

$$\binom{7+4}{7} = 330 \quad \text{e} \quad \binom{17+4}{17} = 5985.$$

Portanto, $[x^{17}]F(x) = (-5) \cdot 330 + 1 \cdot 5985 = 4335$, que é solução do nosso problema.

4.5 Problemas relacionados

Podemos usar as funções geradoras em problemas aparentemente difíceis, tornando os mesmos mais simples. Vejamos aqui alguns exemplos.

Exemplo 4.5.1 Encontrar o coeficiente de x^{18} em $(1+x+x^2+\dots+x^9)^3$.

Solução. Temos que a função geradora

$$1+x+x^2+\dots+x^9 = \frac{1-x^{10}}{1-x}.$$

Elevando a expressão a 3, obtemos

$$\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3 &= (1-x^{10})^3(1-x)^{-3} \\ &= (1-3x^{10}+3x^{20}-x^{30}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-x)^n \\ &= (1-3x^{10}+3x^{20}-x^{30}) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n \end{aligned}$$

Portanto,

$$[x^{18}](1+x+x^2+\dots+x^9)^3 = \binom{20}{2} - 3\binom{10}{2} = 55.$$

Exemplo 4.5.2 Utilizar as funções geradoras para mostrar que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Solução. Note que, pelo Teorema Binomial Clássico, $\binom{2n}{n}$ é coeficiente de x^n em $(1+x)^{2n}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= [(1+x)^n]^2 \\ &= \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right]^2 \\ &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n \right]^2.\end{aligned}$$

O coeficiente de x^n na expressão acima é

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Pela Propriedade III vista no Capítulo 2, temos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Logo, substituindo convenientemente, obtemos

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

■

Exemplo 4.5.3 Determinar a fórmula para a soma dos n primeiros quadrados

$$S_n = \sum_{i=0}^n i^2.$$

Solução. Como já visto anteriormente, a função geradora da sequência dos quadrados é dada por

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Pela regra de soma vista no Capítulo 3, para obter a função geradora para $\{S_0, S_1, S_2, \dots\}$, basta multiplicar a expressão acima por $1/(1-x)$. Assim, a função geradora resultante será

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Isso significa que $\sum_{i=0}^n i^2$ é o coeficiente de x^n em

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \\ &= (x+x^2)(1-x)^{-4}. \end{aligned}$$

Note que, o $[x^n]F(x)$ é obtido pela soma dos coeficientes de x^{n-1} e x^{n-2} em $(1-x)^{-4}$.

Aplicando o Teorema binomial com expoentes negativos, temos

$$\begin{aligned} (1-x)^{-4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{n} x^n. \end{aligned}$$

Assim, os coeficientes procurados são

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} e \binom{n+1}{n-2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

Somando os valores obtemos

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

Exemplo 4.5.4 (*Regiões do Plano*) Uma reta divide o plano em duas regiões, duas retas em posição geral³ divide o plano em quatro regiões, três retas em sete regiões e assim sucessivamente. Em quantas regiões o plano é dividido usando n retas em posição geral?

Solução. Seja P_n o número de regiões que n retas em posição geral delimita no plano. Considere agora uma reta r_1 , é fácil ver que o plano é dividido em duas regiões, ou seja, $P_1 = 2$. Quando outra reta r_2 é desenhada, ela intersecta r_1 e o ponto de intersecção divide r_2 em duas partes, onde cada parte divide uma das regiões anteriores em duas, logo $P_2 = 4$. Por sua vez, uma reta r_3 desenhada, intersecta r_1 e r_2 em dois pontos, o que a divide em três partes, onde cada parte novamente dividirá uma das regiões anteriores em duas, daí $P_3 = 7$. Assim, obtemos

$$P_1 = 2$$

$$P_2 = P_1 + 2$$

$$P_3 = P_2 + 3$$

³ Não há duas retas paralelas ou coincidentes.

⋮

$$P_n = P_{n-1} + n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Expressando P_n em função de n usando as funções geradoras, teremos

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n.$$

Assim,

$$P(x) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n.$$

Como $P_0 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n-1} + n) x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \\ &= 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1} x^{n-1} + (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) \\ &= 1 + xP(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3} \\ &= (1-x)^{-1} - (1-x)^{-2} + (1-x)^{-3} \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema Binomial de Expoentes Negativos, teremos,

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - (n+1) + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \right] x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+1)n}{2} + 1 \right] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{n+1}{2} + 1 \right] x^n. \end{aligned}$$

Portanto, $P_n = \binom{n+1}{2} + 1$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As funções geradoras são ferramentas bastante eficientes e a sua utilização como método de solução de problemas se mostrou vantajoso e simples, principalmente nos diferentes problemas combinatórios, seguindo um mesmo padrão, algo que usualmente não ocorre nesses tipos de problemas. Além disso, o uso dessas ferramentas se mostrou poderoso para resolver problemas de recorrência de modo simples, sem a necessidade de avaliar a sua linearidade, homogeneidade e ordem. Entretanto, o uso das funções geradoras exigiu uma maior habilidade na manipulação algébrica, além de ter um bom estoque de funções conhecidas.

Apesar de o Teorema Binomial Generalizado utilizado nas funções geradoras necessitar de ferramentas de Análise Real, ele pode ser acessível para os alunos de ensino médio. Uma prova disso é caso dos expoentes negativos, que pode ser ensinado de modo a promover um aprofundamento nos estudos.

Contudo, pode-se afirmar que o estudo das funções geradoras tem uma relevância, não só como um método alternativo na resolução de problemas diante dos métodos tradicionais, mas também como uma ferramenta capaz de desenvolver um método generalizado de resolução de problemas de Matemática Discreta.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para futuras pesquisas e possibilitar o uso de novos métodos para o ensino da Matemática na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BILGIN, Begül. **Generating Functions and Their Applications**. Turquia: Ancara, 2010.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001

ELECTRICAL engineering and computer Science. Disponível em:
[HTTPS://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2010/readings/MIT6_042JF10_chap12.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-042j-mathematics-for-computer-science-fall-2010/readings/MIT6_042JF10_chap12.pdf). Acesso em: 25 abr. 2020.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda.,

LIMA, Elon Lages. **Análise Real: funções de uma Variável**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

MORGADO, Augusto C., CARVALHO, J. B. Pitombeira de; CARVALHO, P. C. Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10. ed. [S.l.]: SBM, 2016.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT)

RODRIGUES, Júlio César Prado Souza. **Introdução ao Estudo de Funções Geradoras**. 2018. 123f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018.

ROSEN, Kenneth H. **Matemática Discreta e suas Aplicações**. Tradução de Helena Castro, João Guilherme Giudice, 6. ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2010.

SÁ, Lucas Santos Cardozo; SPREAFICO, Elen Viviani Pereira. Funções Geradoras em Recorrências Lineares. **Revista de Divulgação Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 3, n. 1, 2019.

SILVA, Myrian Pastore da. **Uma Extensão para o Coeficiente Binomial: O Coeficiente Trinomial**. 2016. 124f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2016.

TAVARES, Cláudia S., BRITO, Frederico R. M. Contando a História da Contagem. **Revista do Professor de Matemática**, v. 57, 2004. Disponível em: www.rpm.org.br/cdrpm/57/7.htm. Acesso em: 06 out. 2020.

APÊNDICE A – CONCEITOS COMPLEMENTARES DE CÁLCULO

1. DEFINIÇÃO DE LIMITES

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X . Diz-se que o número real L é *limite de f* quando x tende a a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2. DEFINIÇÃO DE LIMITES NO INFINITO

Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente. Dada $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

quando o número real L satisfaz à seguinte condição:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0; x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Define-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, quando o domínio de f é ilimitado inferiormente, se para todo $\varepsilon > 0$ dado, deve existir $A > 0$ tal que $x < -A$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

3. DERIVADAS

Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

O limite acima pode ou não existir. Se existir, diz-se que f é *derivável no ponto a* . Quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$, diz-se que f é *derivável no conjunto X* e temos a função $f: X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$, chamada a *função derivada* de f .

Vejam agora o seguinte teorema.

Teorema A Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a , com

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \text{ e}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demonstração. Veja (GUIDORIZZI, 2001).

4. CONVERGÊNCIA ABSOLUTA DE SÉRIES INFINITAS

Se todos os termos de uma dada série infinita forem substituídos pelos seus valores absolutos e a série resultante for convergente, então dizemos que a série dada é *absolutamente convergente*.

Um das formas de testar se uma série infinita será convergente ou não, é conhecido como o Teste da Razão.

Teorema B Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série infinita dada com $a_n \neq 0$, para todo n . Então,

(i) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, a série dada é absolutamente convergente;

(ii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, ou se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, a série dada é divergente;

(iii) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, nenhuma conclusão quanto à convergência pode ser tirada do teste.

Demonstração. Veja (LEITHOLD, 1994).

5. SOMA DE SÉRIES INFINITAS CONVERGENTES

Teorema C Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries infinitas convergentes com somas S e R , respectivamente, então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n)$$

é uma série convergente e sua soma é $S \pm R$.

Demonstração. Veja (LEITHOLD, 1994).

6. DERIVAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ define uma função cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

Teorema D *Seja R o raio da convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. A função $f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ e a série de potências de $f'(x)$ ainda tem raio de convergência R .*

Demonstração. Veja (LIMA, 2006).

7. DECOMPOSIÇÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS

A decomposição em frações parciais é um método que permite decompor expressões racionais em uma soma mais simples.

Teorema E *Sejam α , β , m e n reais dados, com $\alpha \neq \beta$. Então existem constantes A e B tais que*

$$i) \frac{mx + n}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}.$$

$$ii) \frac{mx + n}{(x - \alpha)^2} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2}.$$

Demonstração. Veja (GUIDORIZZI, 2001).

Teorema F Sejam $\alpha, \beta, \gamma, m, n, p$ reais dados com α, β, γ distintos entre si. Então existem constantes A, B, C tais que

$$i) \frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}.$$

$$ii) \frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(x - \beta)^2} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{(x - \beta)^2}.$$

Demonstração. Veja (GUIDORIZZI, 2001).

Teorema G Sejam m, n, p, a, b, c e α números reais dados tais que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então existem constantes A, B, D tais que

$$\frac{mx^2 + nx + p}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + D}{ax^2 + bx + c}.$$

Demonstração. Veja (GUIDORIZZI, 2001).

APÊNDICE B – CONCEITOS COMPLEMENTARES DE BINOMIAL

Proposição A (*Relação de Stifel*) Para todo n e k inteiros positivos com $n \geq k$, vale

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n}{k}.$$

Demonstração. Veja (MORGADO, 2016).

Proposição B (*Teorema das Colunas*) Para todo n e k inteiros positivos com $n \geq k$, vale

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}.$$

Demonstração. Veja (MORGADO, 2016).