



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ELZÉRIO DA SILVA JÚNIOR

NÚMEROS COMPLEXOS, HISTÓRIA E A RELAÇÃO COM A GEOMETRIA

CURITIBA

2020

ELZÉRIO DA SILVA JÚNIOR

NÚMEROS COMPLEXOS, HISTÓRIA E A RELAÇÃO COM A GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Educação em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

Coorientador: Prof. Dr. Willian Ribeiro Valência da Silva

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S586n

Silva Júnior, Elzério da  
Números complexos, história e a relação com a geometria [recurso eletrônico] / Elzério da Silva Júnior. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Orientador: Aldemir José da Silva Pinto – Coorientador: Willian Ribeiro Valencia da Silva

1. Números complexos. 2. Geometria analítica. 3. Geometria euclidiana. 4. Álgebra. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pinto, Aldemir José da Silva. III. Silva, Willian Ribeiro Valencia da. IV. Título.

CDD: 512

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - 31075010001P2

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ELZERIO DA SILVA JUNIOR** intitulada: **NÚMEROS COMPLEXOS, HISTÓRIA E A RELAÇÃO COM A GEOMETRIA**, sob orientação do Prof. Dr. ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 16 de Outubro de 2020.

Assinatura Eletrônica

24/11/2020 12:46:14.0

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

23/11/2020 15:58:27.0

GUILHERME AUGUSTO PIANEZZER

Avaliador Externo (CENTRO UNIVERSITÁRIO INTERNACIONAL UNINTER)

Assinatura Eletrônica

23/11/2020 12:05:15.0

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

---

CAMPUS CENTRO POLITECNICO - CURITIBA - Paraná - Brasil

CEP 81531-980 - Tel: (41) 3361-3041 - E-mail: aldemirsp@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.

Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 62927

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://www.prppg.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp> e insira o código 62927



Dedico este trabalho aos meus filhos Cristiano, Juliana e Leonardo, à Lilian, e à memória de Rita e de meus pais Elzério e Ana Maria, pessoas que sempre incentivaram meus estudos e minha carreira no magistério.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos professores da Universidade Federal do Paraná ligados ao programa Profmat. Agradeço especialmente aos professores Willian Ribeiro Valencia da Silva e Aldemir José da Silva Pinto que tanto se dedicaram na orientação deste trabalho. Não posso deixar de agradecer também ao meu amigo e companheiro de estudos Marcelo Gorges e a todos que de alguma forma me ajudaram a construir este trabalho.

## RESUMO

Iniciamos com um capítulo introdutório que identifica o objetivo do trabalho, contextualiza brevemente a problemática do estudo (geométrico) dos números complexos e torna explícita a questão norteadora da dissertação.

No capítulo 2 trazemos um pouco do contexto de cada época da história da Matemática. Mostramos as dificuldades que grandes matemáticos tiveram em aceitar os números complexos. Mesmo Cardano e Tartaglia, que elevaram o patamar do estudo dos números, tinham a opinião que os números complexos eram inúteis e que estudá-los era tortura mental com cálculos. Evidenciamos também a necessidade dos matemáticos de manipular esses “objetos”, apesar de não aceitá-los, para encontrar raízes complexas e equações cúbicas e quárticas. A instituição destes números só aconteceu com Gauss devido ao seu prestígio, considerado por muitos o maior matemático de todos os tempos. Como não havia como representar os números complexos geometricamente, Gauss teve a ideia de representá-los num plano com eixos ortogonais tal como o plano cartesiano.

No capítulo 3 definimos os números complexos, sua imagem no plano complexo e operações, módulo e a forma polar ou trigonométrica. Com base nesta última são trabalhadas as raízes de números complexos. Depois são apresentadas a forma exponencial e operações com números complexos nesta forma.

Depois disso, nos próximos capítulos apresentamos as aplicações dos números complexos na geometria. Se um número complexo é representado num plano como par de coordenadas e a partir daí pode-se estudar geometrias analíticas e planas e, nada mais natural que, construir retas, retas paralelas, perpendiculares, ponto médio, triângulos, polígonos, cálculo de áreas e outras aplicações. No capítulo 4 estudamos boa parte da geometria analítica, desde distância entre dois pontos até equação da circunferência no plano complexo. Finalmente no capítulo 5 abordamos alguns conceitos de geometria plana aplicada ao plano complexo, tais como áreas, triângulos e semelhança. Finalmente no capítulo 6 mostramos os resultados da intersecção de uma reta secante à esfera de Riemann e intercepto plano complexo.

Palavras-chave: Números Complexos. Geometria Analítica. Geometria Euclidiana. Álgebra. Equações Algébricas.

## ABSTRACT

We begin with an introductory chapter that identifies the objective of the work, briefly contextualizes the problem of the (geometric) study of complex numbers and makes the guiding question of the dissertation explicit.

In the chapter 2 we bring a little bit of the context of each epoch in the history of mathematics. We show the difficulties that great mathematicians had in accepting complex numbers. Even Cardano and Tartaglia, who raised the bar on number studies, were of the opinion that complex numbers were useless and that studying them was mental torture with calculations. We also highlight the need for mathematicians to manipulate these 'objects', despite not accepting them, to find complex roots and cubic and quartic equations. The institution of these numbers only happened to Gauss and his prestige, considered by many to be the greatest mathematician of all time. As there was no way to represent complex numbers geometrically, Gauss had the idea of representing them on a plane with orthogonal axes, like the Cartesian plane.

In the chapter 3 we define complex numbers, their image in the complex plane and operations, module and polar or trigonometric form. Based on the latter, the roots of complex numbers are worked on. Then the exponential form and operations with complex numbers in this form are presented.

After that, in the next chapters we present the applications of complex numbers in geometry. If a complex number is represented on a plane as a pair of coordinates and from there it is possible to study analytical and plane geometries and, nothing more natural, to construct lines, parallel lines, perpendiculars, midpoint, triangles, polygons, calculation of areas and other applications are explored. In the chapter 4 we studied a good part of analytical geometry, from distance between two points to equation of the circumference in the complex plane. Finally in the chapter 5 we cover some concepts of plane geometry applied to the complex plane, such as areas, triangles and similarity. Finally in the chapter 6 we show the results of the intersection of a secant line to the Riemann sphere and a complex plane intercept.

Keywords: Complex Numbers. Geometry. Algebra. Equations.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Christoph Rudolff . . . . .	2
2.2	Michael Stiffel . . . . .	3
2.3	Girolamo Cardano . . . . .	3
2.4	Niccolo Tartaglia . . . . .	4
2.5	Scipione del Ferro . . . . .	4
2.6	Rafael Bombeli . . . . .	6
2.7	Albert Girard . . . . .	6
2.8	Rene Descartes . . . . .	7
2.9	D'Alembert . . . . .	7
2.10	Leonard Euler . . . . .	7
2.11	Carl F. Gauss . . . . .	9
2.12	Caspar Wessel . . . . .	9
2.13	Rean Robert Argand . . . . .	9
3.1	Plano Argand-Gauss . . . . .	14
3.2	Soma de vetores . . . . .	16
3.3	soma de vetores . . . . .	17
3.4	diferença de vetores . . . . .	17
3.5	Ponto Médio . . . . .	18
3.6	Produto de número Real por vetor . . . . .	18
3.7	Exemplo: $c=3$ e $c'=-2$ , $z=2+i$ . . . . .	19
3.8	Produto dos números complexos $z$ e $w$ . . . . .	20
3.9	Quociente entre os números complexos $z$ e $w$ . . . . .	21
3.10	Plano Argand-Gauss . . . . .	30
3.11	Interpretação Geométrica do Produto . . . . .	32
3.12	Produto de $\sqrt{3} + i$ e $w = 2 + 2i$ . . . . .	33

3.13	Hexágono da raiz sexta de -64 . . . . .	37
3.14	Triângulo das raízes da equação $x^3 + 2i = 0$ . . . . .	39
4.1	Ponto Médio . . . . .	45
4.2	Ponto Médio entre $z_1$ e $z_2$ . . . . .	46
4.3	Distância entre pontos . . . . .	46
4.4	Distância entre $z_1 = -2 + 3i$ e $z_2 = 5 - 3i$ . . . . .	47
4.5	Pontos colineares . . . . .	48
4.6	Exemplo de pontos colineares . . . . .	49
4.7	Equação da reta . . . . .	49
4.8	Reta complexa que passa por $z_1$ e $z_2$ . . . . .	51
4.9	Reta Paramétrica . . . . .	51
4.10	Equação paramétrica . . . . .	51
4.11	Reta com parâmetro $t$ . . . . .	52
4.12	Teorema de Tales . . . . .	53
4.13	Divisão na razão $t=3$ . . . . .	53
4.14	Triângulo retângulo . . . . .	54
4.15	Retas Paralelas e retas perpendiculares . . . . .	56
4.16	Plano Complexo . . . . .	57
4.17	Retas Paralelas . . . . .	59
4.18	Retas perpendiculares . . . . .	60
4.19	Retas Paralelas . . . . .	60
4.20	Retas paralelas . . . . .	61
4.21	retas perpendiculares . . . . .	62
4.22	Retas perpendiculares . . . . .	63
4.23	Retas perpendiculares . . . . .	63
4.24	Retas perpendiculares . . . . .	65
4.25	Mediatriz de um segmento . . . . .	65

4.26	Mediatriz de um segmento . . . . .	66
4.27	Circunferência de centro C e raio R . . . . .	67
4.28	Circunferência dados três pontos . . . . .	67
4.29	Circunferência passando por (1, 1), (4, 2) e (-1, 4) . . . . .	69
5.1	Triângulo formado por $z_1, z_2$ e $z_1 - z_2$ . . . . .	73
5.2	Ângulo entre $z_1$ e $z_2$ . . . . .	73
5.3	Paralelogramo formado por $z_1$ e $z_2$ . . . . .	75
5.4	Triângulo dados três pontos . . . . .	76
5.5	Área= $5, 5u^2$ . . . . .	77
5.6	Rotação de $\sqrt{3} + i$ em $120^\circ$ . . . . .	78
5.7	Polígono convexo . . . . .	80
5.8	Distância entre ponto e reta . . . . .	82
5.9	Orientação dos triângulos . . . . .	83
5.10	Números complexos $z_1$ e $z_2$ . . . . .	84
5.11	Translação de vetores . . . . .	85
5.12	Triângulos simétricos em relação ao eixo real . . . . .	87
5.13	À esquerda temos as potências de $\zeta$ e à direita o produto de $\zeta$ por $z$ . . . . .	88
5.14	Raízes cúbicas de 1 . . . . .	89
5.15	Triângulos equiláteros . . . . .	90
5.16	Mediana . . . . .	91
5.17	Baricentro G do triângulo . . . . .	91
5.18	Baricentro . . . . .	93
5.19	Triângulo equilátero em retas paralelas . . . . .	94
5.20	Circuncentro . . . . .	96
5.21	Circuncentro . . . . .	97
5.22	Altura relativa ao vértice $z_2$ . . . . .	98
5.23	Ortocentro . . . . .	98

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>História dos números complexos</b> .....	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Os números complexos</b> .....	<b>11</b>
3.1	Propriedades de números reais .....	12
3.1.1	Adição .....	12
3.1.2	Multiplicação .....	12
3.1.3	Distributividade .....	13
3.2	Definição de números complexos .....	13
3.2.1	Imagem e a representação geométrica no plano complexo .....	13
3.2.2	Representação algébrica .....	14
3.3	Operações com números complexos .....	15
3.3.1	Adição .....	15
3.3.2	Diferença entre números complexos .....	16
3.3.3	Multiplicação de um número real por um vetor .....	18
3.3.4	Multiplicação entre dois números complexos .....	19
3.3.5	Divisão .....	20
3.3.6	Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ .....	21
3.3.7	Propriedades das operações no conjunto dos números complexos .....	22
3.3.8	O conjugado de um número complexo e suas propriedades .....	24
3.3.9	Norma de um número complexo .....	25
3.3.10	O módulo de um número complexo .....	25
3.3.11	Relação entre módulos .....	26
3.3.12	A Desigualdade Triangular .....	27
3.3.13	Potências da unidade imaginária .....	28
3.4	Forma trigonométrica ou forma polar .....	29
3.4.1	Fórmulas de passagem .....	30



3.4.2	Produto entre números complexos na forma polar.....	31
3.4.3	Divisão entre números complexos na forma polar.....	33
3.4.4	Potenciação na forma polar.....	34
3.4.5	Raízes de um número complexo na forma trigonométrica.....	36
3.5	Raízes da unidade.....	39
3.6	Forma exponencial.....	40
3.7	Número complexo na forma exponencial.....	40
3.8	Produto na forma exponencial.....	43
3.9	Divisão na forma exponencial.....	43
3.10	Potências na forma exponencial.....	44
<b>4</b>	<b>Aplicações à geometria.....</b>	<b>45</b>
4.1	Ponto médio de um segmento.....	45
4.2	Distância entre dois pontos.....	46
4.3	Condição de alinhamento de três pontos.....	48
4.4	Equação da reta.....	49
4.5	Equação paramétrica da reta.....	51
4.6	Divisão proporcional.....	53
4.7	Medida de um ângulo no plano complexo.....	53
4.8	Equação da reta com coordenadas cartesianas.....	54
4.9	Equação da reta dados os números complexos.....	56
4.10	Coefficientes angular e linear.....	57
4.11	Posição relativa entre duas retas.....	57
4.12	Equação da reta paralela.....	60
4.13	Equação da mediatriz de um segmento.....	61
4.14	Equação da circunferência.....	66
4.14.1	Equação da circunferência dados o centro e o raio.....	70

<b>5</b>	<b>Aplicação à Geometria plana .....</b>	<b>72</b>
5.1	Área de um triângulo .....	72
5.2	Classificação de triângulos .....	77
5.2.1	Em relação aos lados .....	77
5.2.2	Em relação aos ângulos .....	77
5.3	Rotação de ângulos .....	78
5.4	Área de triângulos .....	78
5.5	Área de polígonos convexos .....	80
5.6	Distância de um ponto a uma reta .....	81
5.7	Triângulos .....	83
5.7.1	Argumento de um ângulo .....	83
5.7.2	Translação de Eixos .....	84
5.7.3	Semelhança de triângulos .....	85
5.7.4	As raízes n-ésimas de 1 .....	87
5.7.5	Semelhança e triângulo equilátero .....	90
5.7.6	Baricentro de um triângulo .....	91
5.7.7	Determinação do Baricentro .....	92
5.7.8	Circuncentro de um triângulo .....	95
5.7.9	Determinação do Circuncentro .....	96
5.7.10	Ortocentro de um triângulo .....	98
5.7.11	Fórmula do ortocentro .....	99
<b>6</b>	<b>Plano Complexo e a Projeção Estereográfica .....</b>	<b>100</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão .....</b>	<b>102</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>103</b>

## 1. Introdução

O objetivo principal desta pesquisa é instrumentalizar o professor de ensino básico com argumentos teóricos sobre geometria plana e geometria analítica trabalhadas de forma unificada na perspectiva dos números complexos.

Neste trabalho observamos que resultados bastante razoáveis e lógicos eram encontrados desde os primeiros questionamentos. Mesmo quando as raízes de números negativos apareciam em equações quadráticas e seus resultados não eram possíveis. Desconsiderando a impossibilidade de raiz quadrada de número negativo esta impossibilidade e continuando os cálculos surgiam resultados interessantes, lógicos e inacreditáveis para a época. Deste prelúdio do século XV até a formalização dos números complexos por Gauss, houve muita resistência mesmo por parte dos grandes matemáticos. Mesmo atualmente em meios existe preconceito em relação aos números complexos. Frases como “Para que estudar números complexos?...”, “O nome já está dizendo: complexo..” são frequentemente ouvidas. Talvez tal preconceito deva-se ao fato dos cálculos com números complexos fugirem de nosso cotidiano.

Ao iniciar este trabalho sentimos certa dificuldade em desenvolver a questão norteadora, pois mesmo entre os professores de matemática há muita resistência em ensinar este conjunto numérico. Diante disso resolvemos iniciar com a história dos números complexos.

*Questão norteadora: Como e por que desenvolver os números complexos numa perspectiva geométrica?*

## 2. História dos números complexos

Segundo Boyer [1], as primeiras aparições dos números complexos foram na obra Triparty em *La science des nombres*, escrita por Nicolas Chuquet ( - 1500). O pouco que se sabe da vida de Chuquet é que nasceu em Paris e estudou em medicina em Lyon.

A primeira parte do Triparty explica a lógica dos números indo-arábicos e faz relações de operações aritméticas sobre números. Importante citação é sobre o zero: diz que décimo numeral é sem valor. A continuação mostra números com raízes do tipo  $\sqrt{20 - \sqrt{180}}$ . Esta expressão era escrita como  $R)^2 : 20 : \overline{m}.R)^2 180..$  Depois refere-se às regras da incógnita “Regle des premiers” ou álgebra atualmente.

Nas escolas e em muitos compêndios matemáticos é muito comum ensinar-se os números na seguinte sequência: números naturais, números inteiros, números fracionários ou decimais, números racionais, números irracionais, números reais e números complexos. Não estamos afirmando que tal sequência esteja errada. O que salientamos é pode ser explicitado para o estudante que não foi essa a sequência com que foram inventados ou sistematizados os números. Os números complexos só surgem sistematicamente no século XVI com matemáticos algebristas italianos, isto pouco depois da morte de Chuquet. Naquela época havia dúvidas sobre conceitos de números negativos e irracionais.

Desde o surgimento com Chuquet até a sistematização dos números complexos por Gauss foram aproximadamente 300 anos. Grandes matemáticos não aceitavam os números complexos como números, mesmo usando em citações, como salientaremos adiante.

Na Alemanha a álgebra foi desenvolvida de forma notável na primeira metade do século XVI. Como exemplo temos o *Coss* em que Christoph Rudolff utilizou frações decimais e símbolos de raízes como hoje conhecemos. Stifel trabalha com números negativos, radicais, potências e o triângulo de Pascal em *Arithmetica integra*.



Figura 2.1: Christoph Rudolff



A *Arithmetica integra* foi muito importante para a época, pois haviam vários tipos de equações e cada uma com um tipo de solução. Assim, por exemplo, foi reduzido a apenas um caso a grande quantidade de casos de equações quadráticas, pois utilizaram-se coeficientes negativos. Mesmo utilizando e estar muito além de seu tempo, Stifel recusa-se a admitir números complexos e negativos como raízes de equações.

Algebricamente *Arithmetica integra* era quase completo até 1544 e tinha muitos exemplos de equações quadráticas. O termo quase deve-se ao fato de que não haviam exemplos de soluções de equações cúbicas mistas.

Pode-se dizer que algebricamente o grande acontecimento inicia-se em 1545 com a publicação da *Ars Magna* por Girolamo Cardano, que continha não só a resolução da equação cúbica, mas a quártica também.

O grande trunfo de Cardano era pensar as equações cúbicas de forma geométrica e não como um simples número. Este fato constituiu-se uma grande vantagem. As resoluções de equações cúbicas e quárticas foram consideradas as mais importantes contribuições à álgebra desde os babilônios, quatro milênio antes.

Num dos problemas resolvidos em seu livro, Cardano propõe: Encontre dois números tais que seu produto seja 40 e sua soma seja 10. Na escrita atual seria

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

que substituindo  $y$  da primeira equação na segunda e aplicando a propriedade distributiva chega-se à equação quadrática  $x^2 - 10x + 40 = 0$ . Resolvendo pelo método de completar o quadrado, obtém-se  $(x - 5)^2 - 25 + 40 = 0$  e, na sequência,  $(x - 5)^2 = -15$ . As soluções desta equação são  $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ . Cardano afirmava que durante a resolução havia uma tortura mental, mas que ao final o resultado era tão refinado quanto inútil. Observe:

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40.$$



Figura 2.2: Michael Stifel



Figura 2.3: Girolamo Cardano

Pouco antes do surgimento da *Ars Magna* um fato importante que foi irrelevante para a Matemática, mas importante para a história. Os personagens foram Cardano, Tartaglia, Fior e Del Ferro.

A solução da equação cúbica publicada por Cardano foi dada por Niccolo Fontana, conhecido por Tartaglia, ou gago, devido ao problema que tinha desde criança em 1512 ao tomar um golpe de sabre na invasão de Brescia pelos franceses. Tartaglia, matemático com pouca expressão, pretendia firmar sua reputação com a tal descoberta. Porém, cometeu o erro de contar a Cardano. Niccolo fez Cardano jurar que não iria revelar o segredo.



Figura 2.4: Niccolo Tartaglia

Cardano supôs que nem a Tartaglia era devida a glória, pois é possível que tivesse recebido sugestão de uma fonte mais antiga. É possível que quem descobriu o método foi Scipione del Ferro (1465, 1526), matemático italiano da cidade de Bologna. Como não há publicação de Del Ferro a respeito das resoluções, não se sabe se foi mesmo ele quem descobriu. Conta-se que passou seu conhecimento a um estudante chamado Antonio Maria Fior.



Figura 2.5: Scipione del Ferro

Acredita-se também que apenas a possibilidade de se resolver uma equação cúbica qualquer tenha inspirado Tartaglia a criar seu método. Não se sabe se isso realmente aconteceu, porém é fato que Tartaglia tinha grande habilidade na manipulação da resolução.

Quando a notícia de tal habilidade de Tartaglia foi espalhada, houve curiosidade de quem era mais hábil: Tartaglia ou Fior. Assim, em 1541, foi organizada uma competição entre ambos para saber quem conseguia resolver mais equações cúbicas. Ficou estipulada como regras que os competidores deveriam propor trinta problemas envolvendo equações cúbicas para que seu adversário resolvesse em determinado tempo. Expirado o prazo, no dia da apresentação de suas resoluções, Tartaglia havia resolvido todos os trinta problemas, enquanto Fior não tinha resolvido nenhum, pois só sabia resolver equações do tipo  $x^3 + qx = p$ , ou seja, o cubo e o quadrado eram iguais a um número. Tartaglia sabia

resolver equações essas e também equações com termos quadráticos, que eram eliminados, chegando ao tipo da equação de Fior.

Com o estrondoso sucesso a notícia de que Tartaglia havia vencido de forma exuberante, muitas pessoas ficaram interessadas, entre eles Cardano.

Com a intenção de fazer Tartaglia revelar seu método, Cardano convida-o para uma reunião em sua casa dizendo que teria uma pessoa para financiar sua carreira. Ele sabia do passado de Tartaglia em que teria passado dificuldades financeiras e que não tivera sucesso devido à sua gagueira. Inocentemente Tartaglia revela o método sob a condição do juramento de que o segredo não seria revelado. Cardano aceitou a condição, porém não tinha menor intenção de honrá-la, pois acreditava que, segundo comentários, Tartaglia havia plagiado Arquimedes e Jordanus Nemorarius, sem dar a devida referência, achou que o método também era plágio. Portanto, Cardano revela tanto a fórmula quanto o método. Tendo Cardano razão ou não de suas suposições, é fato que o verdadeiro inventor, del Ferro, não teve o reconhecimento que lhe era devido.

Sobre à solução de equações quárticas, Cardano dá o devido reconhecimento a Luigi Ferrari, seu secretário, mas enfatizou que a descoberta deve-se a um pedido seu.

Segundo Boyer, desde que os babilônios, quase quatro milênio antes, aprenderam a completar o quadrado para equações quadráticas, nenhuma outra descoberta constituiu um estímulo para o desenvolvimento da álgebra comparável a essas reveladas na *Ars Magna*.

Desde a era de ouro os matemáticos gregos afirmavam que equações como  $x^2 - 2 = 0$   $x^2 + 2 = 0$  ou  $x + 2 = 0$  não tinham solução, pois negavam a existência dos números que hoje são conhecido como irracionais e negativos. E continuaram a ser negados até *Ars Magna*. Com a publicação deste documento, que possuía a solução da equação cúbica, a cômoda situação de negar tais números muda radicalmente. Mesmo que as três raízes de uma equação cúbica fossem reais, o método de Cardano levava a passagem de raiz quadrada de número negativo.

Rafael Bombeli (1526-1572), discípulo de Cardano, dizia que os números imaginários eram sofisticados, porém ele operava com eles naturalmente. Num exemplo ele deduz que  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$  e encontrou  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  como uma solução da equação  $x^3 = 15x + 4$ , mesmo sabendo que a única solução positiva da equação é  $x = 4$ . Por isso teve a ideia que poderia relacionar, o que hoje chamamos de números complexos conjugados, os radicais e radicandos.



Figura 2.6: Rafael Bombeli

O século XVI fica então marcado com o fato de matemáticos utilizarem os números complexos sem aceitá-los. Acreditavam também que se poderiam utilizar as mesmas regras usuais do cálculo com números reais. Leonard Euler, um dos maiores personagens das ciências de todos os tempos, afirma erroneamente que  $\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$ , pois pela regra  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ , era válida para os números reais.

Peter Roth (1580 - 1617) escreveu em 1600 que equações polinomiais de grau  $n$  possuem  $n$  raízes. Esta foi a primeira afirmação do Teorema Fundamental da Álgebra que diz: Toda equação da forma  $a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , com  $a_0, a_1, \dots, a_k$  números complexos tem exatamente  $k$  raízes complexas, se contarmos suas multiplicidades. Mais tarde em 1629 Albert Girard (1595-1632) no livro *L'Invention Nouvelle en Algebre*, fez a seguinte afirmação: “... uma equação algébrica completa de grau  $n$ , possui  $n$  raízes.”



Figura 2.7: Albert Girard

Foi nesta época que a atitude dos matemáticos começa a mudar em relação aos números complexos. Girard escreve: “Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis (raízes complexas). Eu respondo: para três coisas - para a validade das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções”.

Os números imaginários começam ter sua identidade. René Descartes (1595-1650) em seu *La Géométrie* enuncia: “nem as raízes verdadeiras nem as falsas (entendia as negativas como falsas) são sempre reais; por vezes são imaginárias”. Também afirma que uma equação de grau  $n$  tem  $n$  raízes se forem consideradas também as raízes imaginárias. Descreve tudo o que se sabia até então sobre equações polinomiais. Observou que um polinômio  $P(x)$ , com coeficientes reais e variável real  $x$ , que se anula em um número real  $\alpha$ , é divisível por  $(x - \alpha)$ .



Figura 2.8: Rene Descartes

Em 1749 há a primeira tentativa de se demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo, hoje conhecido como Teorema de D’Alembert, em homenagem a Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783). Ele consegue demonstrar a forma das raízes, porém não mostra que existem raízes. Seu maior mérito foi a divulgação dos números complexos como teoria e que tipos de números complexos são obtidos ao se resolver equações algébricas.



Figura 2.9: D’Alembert

Em 1749 Leonard Euler, em *Pesquisa sobre as Raízes Imaginárias de uma Equação*, demonstra que se  $a + \sqrt{-1}$  é raiz de uma equação, então o mesmo acontece com  $a - \sqrt{-1}$ . Assim, há uma elevação do nível de investigação sobre o Teorema Fundamental da Álgebra. No mesmo documento mostra que toda a equação de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, e que uma equação de grau possui um par de raízes reais (por vezes iguais) ou não possui raiz real. A seguir demonstra que todas as raízes não-reais são da forma  $a + b\sqrt{-1}$ .



Figura 2.10: Leonard Euler

A partir daí se faz necessário o estudo de operações com números complexos com a inclusão de potências imaginárias, logaritmos de números complexos e funções trigonométricas de argumento complexo. Apesar de todo este avanço, Euler mostrava seu ceticismo em relação aos números complexos: “Como todos os números concebíveis são ou maiores

ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis (números reais). E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação”. Para ele não havia solução o problema: dividir 10 em duas partes cujo produto é 40, obtendo  $5 + \sqrt{-15}$  e  $5 - \sqrt{-15}$ .

Atualmente quando se pensa em logaritmos pensa-se em Leonard Euler. É justa a homenagem, afinal foi ele quem definiu os termos dos logaritmos como são atualmente utilizados. O que poucos sabem é que também foi ele quem apresentou os logaritmos de números negativos. A ideia da igualdade  $\log(-x) = \log(x)$  era defendida por seu amigo D’Alembert. Apesar de um estar em Berlim e outro em Paris, compartilhavam descobertas. Em 1747 Euler escreveu a D’Alembert explicando a questão de igualdades como  $\log(-1)^2 = \log(+1)^2$  em termos da fórmula que ambos, juntamente com Jean Bernoulli, conheciam:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  pois a identidade vale para todos os ângulos e, em particular, para  $\theta = \pi$ . Portanto,  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i0 = -1$ , ou seja,  $\ln(-1) = \pi i$ . Assim, mostrava que logaritmos de números negativos são imaginários puros e não números reais como D’Alembert e Bernoulli acreditavam.

As discussões sobre a existência dos logaritmos de números negativos e complexos eram frequentes, até que Euler apresentou uma justificativa convincente de sua existência. Ele percebeu que se  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  é um número complexo qualquer, então  $\ln z = \ln r + i(2k\pi + \theta)$ , com  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Então há infinitas determinações para o logaritmo de um número complexo. Por isso pode-se afirmar que a forma atual dos números complexos deve-se a Euler.

No fim do século XVIII já haviam operações bem ousadas com números complexos. Mesmo assim, devido a um prudente silêncio sobre estes números na grande Enciclopédia organizada por D’Alembert e outros matemáticos franceses, deixava uma ambiguidade sobre sua existência.

Pierre Simon de Laplace (1749-1827), em 1795, tentou demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, sem contudo conseguir uma prova aceitável.

A primeira demonstração correta deve-se a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado por muitos o mais importante matemático de todos os tempos, na qual, em sua tese de doutoramento em 1799, utiliza propriedades topológicas da reta e do plano, que não tinham sido ainda explicitadas em sua época. Além da importante demonstração, estuda e critica as demonstrações de D'Alembert (1746), Euler (1749), de Foncenet (1759) e Lagrange (1772), todas elas consideradas insatisfatórias.



Figura 2.11: Carl F. Gauss

Anos depois ele ainda apresentou três novas demonstrações do Teorema. Mesmo que não tenha utilizado em sua demonstração, a ideia de representar geometricamente os complexos, provavelmente tenha ocorrido a Gauss ao demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. John Wallis (1616-1703) já tinha procurado uma tal representação, tentando representar os números complexos no plano, mas seus esforços não foram bem sucedidos.

A ideia de Wallis foi retomada independentemente por vários matemáticos como o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) cujos trabalhos ficaram desconhecidos até 1897. Trabalharam sobre o problema os franceses Lazare Carnot (1753-1823), em *Géométrie de Position*, em 1803, e Adrian Quentin Buéc (1748-1826) e o italiano Jean-Robert Argand (1768-1822), um contador suíço, que publicou o livro *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas* em 1806. No entanto, foi necessário o prestígio de Gauss para tornar conhecida e aceita a representação geométrica dos números complexos. Suas ideias foram publicadas em 1831, referindo-se “à verdadeira metafísica das quantidades imaginárias”.



Figura 2.12: Caspar Wessel



Figura 2.13: Jean Robert Argand

Como era impossível de associar um ponto da reta real à raiz quadrada de um número negativo, a questão foi resolvida associando-se aos números complexos pontos

sobre uma reta perpendicular à reta real, passando pelo ponto zero, dessa forma criando um sistema de coordenadas cartesianas. Nesse sistema, os números reais são colocados sobre o eixo horizontal, denominado eixo real, e todos os números imaginários sobre a reta perpendicular à reta real, passando pelo zero, da reta horizontal, denominado eixo imaginário. Assim, associou a cada número da forma  $a + bi$  um ponto  $P$  do plano, definido pelo par ordenado  $(a, b)$ . Desta forma foi criado um novo conjunto numérico denominado conjunto dos números complexos.



### 3. Os números complexos

Para compreendermos a necessidade de se aceitar, compreender e se aprender a manipular os números complexos, induziremos o leitor mostrando as necessidades de se aceitar outros conjuntos numéricos. Inicialmente suponhamos que temos apenas o conjunto dos números naturais. Pode-se resolver equações neste campo numérico desde que o resultado da equação seja também um número natural. Por exemplo: Na equação  $2 + x = 8$  o resultado será o número natural  $x = 6$  e na equação  $2x + 5 = 11$  o resultado será o número natural  $x = 3$ . Porém, nas equações  $2 + x = 1$  e  $2x + 5 = 10$  não há solução. Devemos estender o conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros e racionais, respectivamente. Suponha então, que tenhamos o conjunto dos números racionais. Pode-se, também, resolver equações neste campo numérico desde que o resultado da equação seja também um número racional. Por exemplo: Na equação  $2x + 11 = 4$  teremos como resultado o número racional  $x = -\frac{7}{2}$ . Porém, equação como  $x^2 = 11$  não teremos solução no campo dos números racionais. Da mesma forma devemos estender o conjunto para o conjunto dos números reais.

O conjunto dos números complexos foi pensado pelo mesmo tipo de necessidade. Equações do tipo  $x^2 + 1 = 0$  não eram possíveis no campo dos números reais. Assim, fez-se necessário estender o campo numérico. Como contamos no capítulo da história dos números, houve uma grande batalha intelectual até que Gauss estabelecesse identidade ao conjunto dos números complexos. Vamos então definir e detalhar os números complexos.

Inicialmente adotaremos a letra  $i$  (primeira letra da palavra imaginário) para representar  $\sqrt{-1}$ . Assim  $i^2 = -1$  ou  $i = \sqrt{-1}$ . Um número complexo é um número da forma  $a + bi$  sendo os coeficientes  $a$  e  $b$  números reais e que  $a$  represente a parte real do número complexo e  $bi$  represente a parte imaginária do número complexo. Os cálculos serão feitos com os números reais, lembrando que  $i^2 = -1$ . Por exemplo:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

A divisão de números complexos envolve encontrar números complexos  $x + iy$  de forma que  $a + bi = (c + di) \cdot (x + iy)$ . Pelos resultados anteriores temos  $a + bi =$

$(cx - dy) + i(dx + cy)$ . Temos então as seguintes igualdades:

$$cx - dy = a, \quad dx + cy = b.$$

resolvendo o sistema em  $x$  e  $y$  temos como resultado

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

sendo que  $c^2 + d^2 \neq 0$ .

Assim, a divisão de dois números complexos terá a forma

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

.

### 3.1. Propriedades de números reais

Antes de definirmos formalmente os números complexos, vamos relembrar as propriedades dos números reais. Nossa referência será o livro do professor Liang-shin Hahn [2].

#### 3.1.1. Adição

Dois números reais  $a$  e  $b$  quaisquer determinam um terceiro número denominado *soma*, denotado por  $a + b$  e gozando as seguintes propriedades:

$A_1$ : **Comutativa**:  $a + b = b + a$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$A_2$ : **Associativa**:  $(a + b) + c = a + (b + c)$  para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$A_3$ : **Elemento Neutro**: Existe um único número, denotado por  $0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $a + 0 = 0 + a = a$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

$A_4$ : **Elemento oposto**: Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , existe um único  $(-a) \in \mathbb{R}$  satisfazendo  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ .

#### 3.1.2. Multiplicação

Dados dois números reais  $a$  e  $b$  quaisquer determinam um terceiro número denominado *produto*, denotado por  $a \cdot b$  e gozando as seguintes propriedades:

$M_1$ : **Comutativa**:  $a \cdot b = b \cdot a$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$M_2$ : **Associativa**:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$M_3$ : **Elemento Neutro**: Existe um único número, denotado por  $1 \in \mathbb{R}$ , tal que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

$M_4$ : **Elemento oposto**: Para todo  $a \in \mathbb{R}$ , existe um único  $a^{-1}$  satisfazendo  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ .

### 3.1.3. Distributividade

Para todos  $a, b, c \in \mathbb{R}$  temos  $a(b + c) = ab + ac$ .

Qualquer conjunto numérico que satisfaça estas propriedades é um corpo. Assim, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais são corpos. Já os conjuntos dos números naturais e inteiros não são corpos.

## 3.2. Definição de números complexos

Um número complexo é um par ordenado  $(a, b)$  de números reais com as seguintes propriedades:

- Dois números complexos  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são iguais se, e somente se  $a = c$  e  $b = d$ . Aqui estão incluídas as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.
- A soma e o produto de dois números complexos  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são definidas por  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  e  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ , respectivamente.

**Exemplo 1.** *Explicita as coordenadas dos números complexos a seguir.*

$$1. (x, y) = (2, \sqrt{3}) \iff x = 2 \text{ e } y = \sqrt{3}$$

$$2. (-1, -1) + (5, -4) = (-4, -5) \iff x = -4 \text{ e } y = -5$$

$$3. (-1, -1) \cdot (5, -4) = (-9, -1) \iff x = -9 \text{ e } y = -1$$

$$4. (3, -1) : (2, -2) = \left(1, \frac{1}{2}\right) \iff x = 1 \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

### 3.2.1. Imagem e a representação geométrica no plano complexo

Considerando o número complexo  $z = (a, b)$  e o plano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , pode-se associar a cada  $z$  uma imagem  $M = (a, b)$  do plano.

O eixo das abscissas representará a parte real de  $z$  e será denotado por  $\Re(z)$ ; o eixo das ordenadas a parte imaginária de  $z$  e será denotado por  $\text{Im}(z)$ . Tal plano é chamado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss ou plano Gaussiano.

O número  $z = (x, 0)$ , correspondendo ao ponto  $(x, 0)$  no eixo  $\Re(z)$ , será um número real e o número  $w = (0, y)$ , correspondendo ao ponto  $(0, y)$  no eixo  $\text{Im}(z)$ , será um número dito *imaginário puro*.

**Definição 1.**

$M = (a, b)$  é a imagem de  $z = (a, b)$

$z = (a, b)$  é o afixo de  $M = (a, b)$

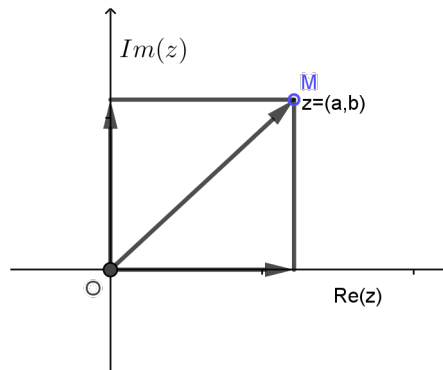


Figura 3.1: Plano Argand-Gauss

Portanto, sempre se pode associar um número complexo  $z = (a, b)$  ao segmento orientado  $\overrightarrow{OM}$  em  $\mathbb{R}^2$  com origem  $O = (0, 0)$  e extremidade  $M = (a, b)$ . Assim,  $\overrightarrow{OM}$  será um vetor de  $\mathbb{R}^2$  que será associado à imagem de  $z$ .

### 3.2.2. Representação algébrica

Para todo o desenvolvimento algébrico dos números complexos é fundamental definir sua forma algébrica e a unidade imaginária [3]. Considere o número complexo  $(0, 1)$ . Elevando este número ao quadrado tem-se

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \implies (0, 1) = \sqrt{-1} = i.$$

Em resumo, se  $\sqrt{-1} = i$  define-se  $(0, 1) = i$ . Foi a partir desta definição que os matemáticos no século XIX desenvolveram resultados notáveis. Para introduzirmos a forma

algébrica dos números complexos façamos  $z = (a, b)$  que pode ser escrito da forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Denotando  $(a, 0) = a$ ,  $(b, 0) = b$  e  $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$ , pode-se escrever

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

$$(a, b) = a + bi \tag{3.1}$$

que é a forma algébrica de um número complexo. Diz-se que se  $z = a + bi$  é um número complexo, o coeficiente  $a$  é a parte real de  $z$  e o coeficiente  $b$  é a parte imaginária de  $z$  e indica-se  $Re(z) = a$  e  $Im(z) = b$ .

### 3.3. Operações com números complexos

Nesta seção apresentaremos as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números complexos, além de suas propriedades, imersão de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}$ , norma, módulo, conjugado e desigualdade triangular [4].

#### 3.3.1. Adição

Na definição de número complexo como corpo vimos que a adição de dois pares de números reais foi definida como

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$

Como vetores do plano complexo considere os números complexos  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$  ( $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ), cujas projeções ortogonais no eixo real sejam  $x$  e  $u$  e no eixo imaginário sejam  $y$  e  $v$ . Portanto, a soma  $z + w$  será a diagonal do paralelogramo com origem no ponto  $(0, 0)$  e extremidade no ponto  $z + w = (x + u) + i(y + v)$  (figura 3.2).

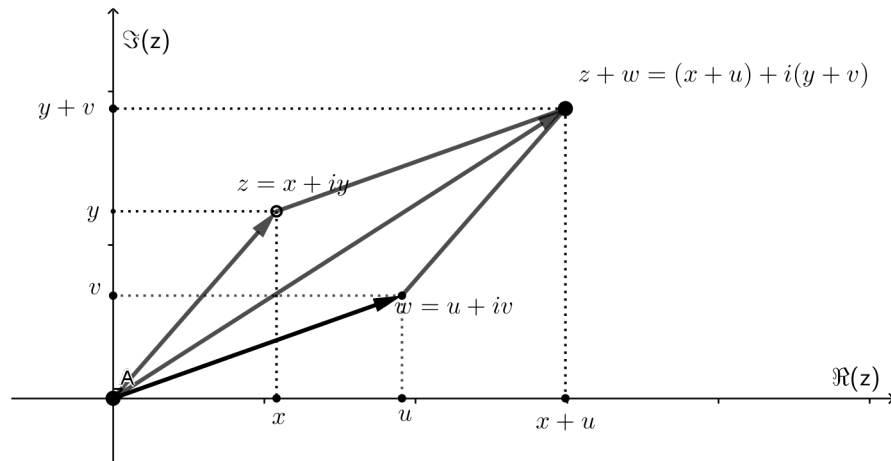


Figura 3.2: Soma de vetores

### 3.3.2. Diferença entre números complexos

Dados os números complexos  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ , chama-se diferença entre  $z_1$  e  $z_2$  o número complexo  $z = (e, f)$  tal que

$$z + z_2 = z_1 \implies (e, f) + (c, d) = (a, b) \text{ donde } (e + c, f + d) = (a, b)$$

Ou seja,

$$a = e + c \implies e = a - c$$

$$b = f + d \implies f = b - d$$

. Assim,

$$z = (e, f) = (a - c, b - d)$$

Indica-se

$$z = z_1 - z_2 = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d) \quad (3.2)$$

**Exemplo 2.** Dados os vetores  $z = 1 + 2i$  e  $w = -4 + 3i$  a soma  $z + w$  será  $(1 + 2i) + (-4 + 3i) = (1 - 4) + i(2 + 3) = -3 + 5i$  (figura 3.3) e a diferença será  $(1 + 2i) - (-4 + 3i) = (1 + 4) + i(2 - 3) = 5 - i$  (figura 3.4).

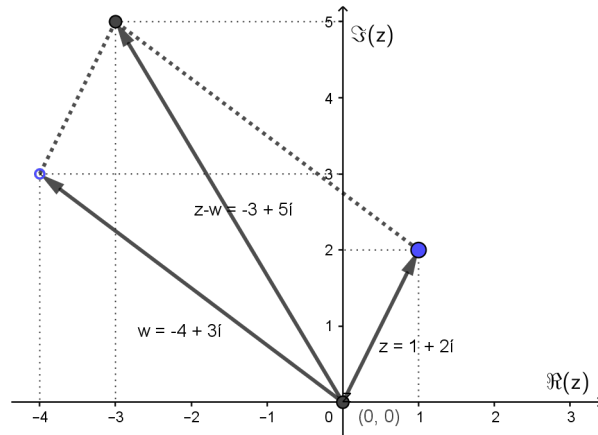


Figura 3.3: soma de vetores

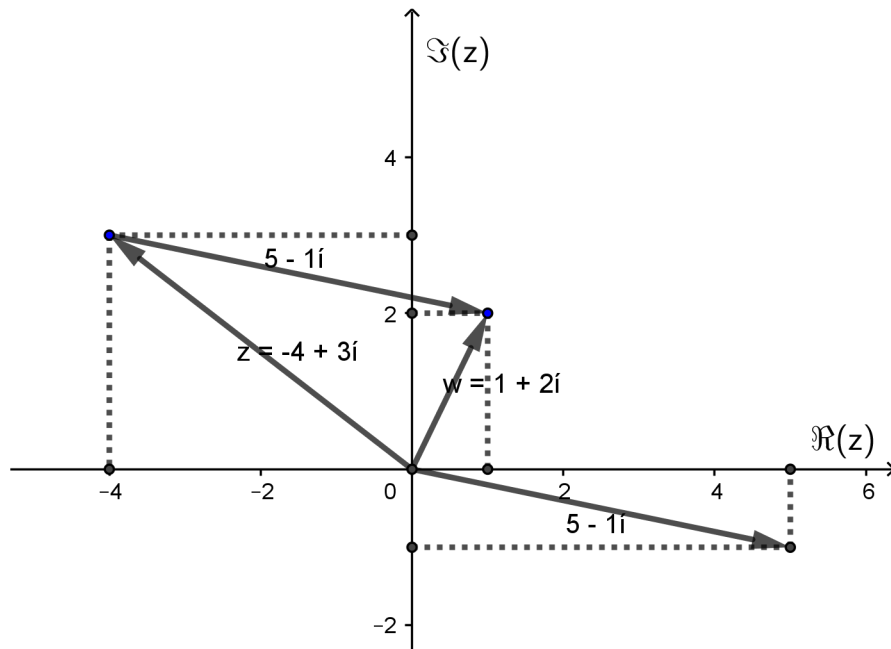


Figura 3.4: diferença de vetores

**Exemplo 3.** *Sejam  $z$  e  $w$  dois pontos no plano complexo. Então o ponto médio do segmento unindo  $z$  e  $w$  é*

$$w + \frac{1}{2}(z - w) = \frac{1}{2}(z + w)$$

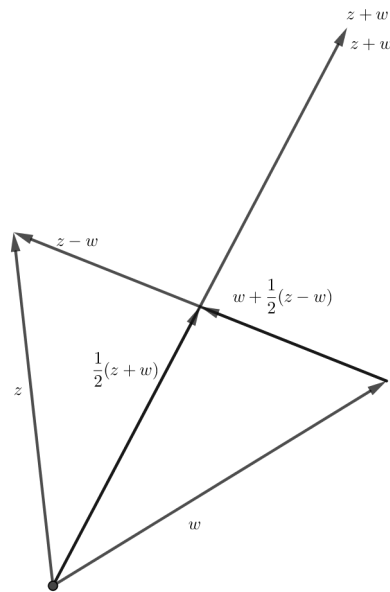


Figura 3.5: Ponto Médio

### 3.3.3. Multiplicação de um número real por um vetor

Considere agora o múltiplo real de um número complexo. Para  $z = x + iy$  e  $c \in \mathbb{R}$ , temos  $cz = cx + icy$ .

Assim, no plano complexo se  $c > 0$ , multiplique o comprimento do vetor por  $c$  (mantendo a mesma direção), enquanto se  $c < 0$ , multiplique o comprimento do vetor por  $|c|$  e mude para a direção oposta (figura 3.7).

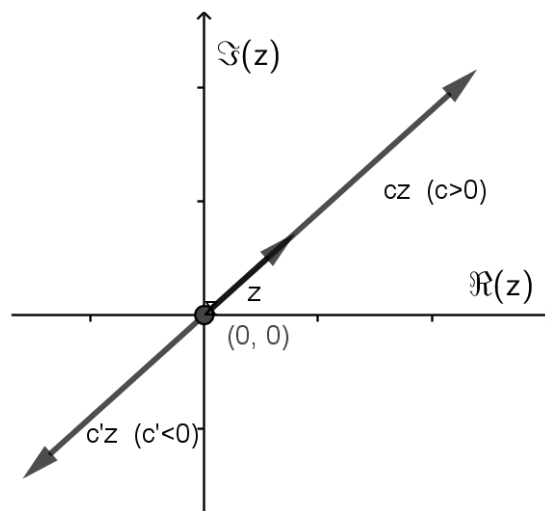


Figura 3.6: Produto de número Real por vetor

**Exemplo 4.** Seja o vetor do número complexo  $z = 2 + i$  e os números reais  $c = 3$  e  $c' = -2$ . Construa os vetores  $cz$  e  $c'z$ .



$$cz = 3(2 + i) = 6 + 3i \quad \text{e} \quad c'z = -2(2 + i) = -4 - 2i$$

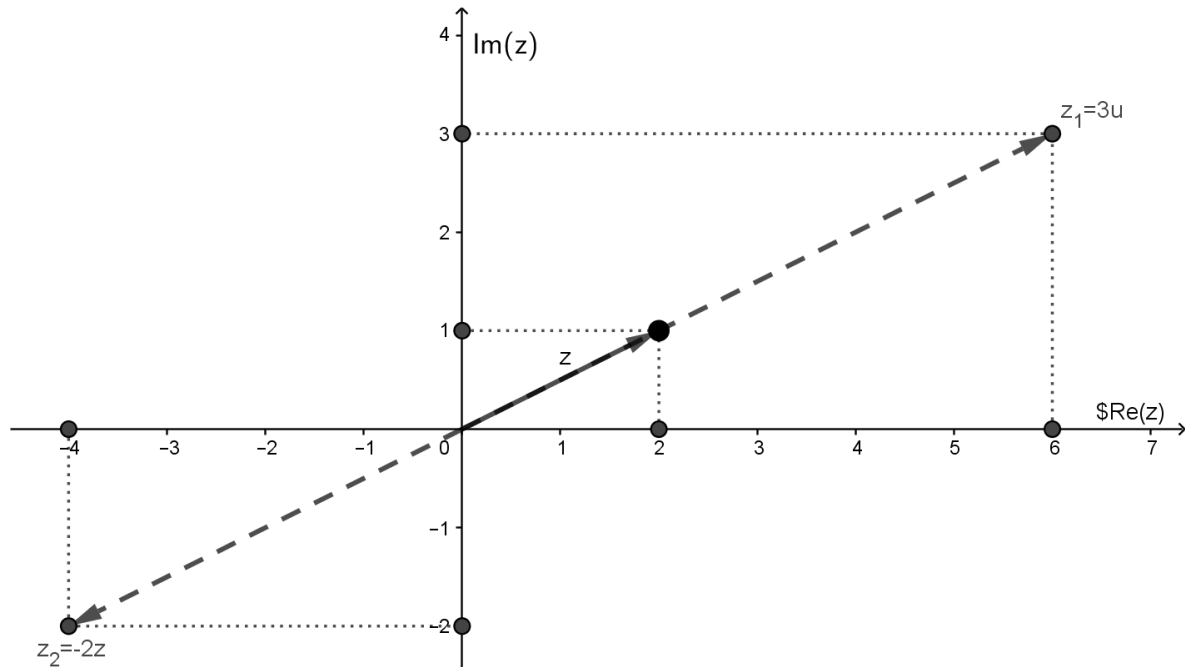


Figura 3.7: Exemplo:  $c=3$  e  $c'=-2$ ,  $z=2+i$

### 3.3.4. Multiplicação entre dois números complexos

Assim como foi definido em (3.8), a multiplicação de números complexos resulta em número complexo e é definida por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

**Exemplo 5.** *Sejam os números  $z = \sqrt{3} + i$  e  $w = -1 + i$ . Calcule o produto e represente geometricamente este resultado no software Geogebra.*

$$\begin{aligned} cz \cdot w &= (\sqrt{3}, 1) \cdot (-1, 1) = \\ &(\sqrt{3} \cdot (-1) - 1 \cdot 1; 1 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot 1) = \\ &(-\sqrt{3} - 1, -1 + \sqrt{3}) \approx (-2, 73; 0, 73) \end{aligned}$$

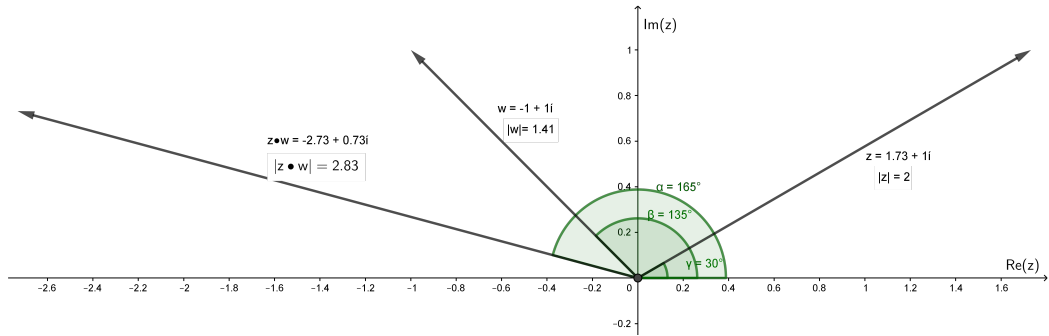


Figura 3.8: Produto dos números complexos  $z$  e  $w$

### 3.3.5. Divisão

Dados os números complexos  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ ,  $z_2 \neq (0, 0)$ , a divisão entre  $z_1$  e  $z_2$ , representada pelo número complexo  $z = (e, f)$ , é definida da seguinte forma:

$$z \cdot z_2 = z_1 \implies (e, f) \cdot (c, d) = (a, b)$$

$$(ec - fd, ed + fc) = (a, b)$$

Da definição de igualdade temos:

$$\begin{cases} ec - fd = a \\ ed + fc = b \end{cases}$$

A solução deste sistema será

$$e = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad e \quad f = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad (3.3)$$

que só terá solução determinada se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ou} \quad c^2 + d^2 \neq 0$$

o que equivale a afirmar que  $(c, d) \neq (0, 0)$ .

Indica-se  $\frac{z_1}{z_2} = z$  ou  $\frac{(a, b)}{(c, d)} = (e, f)$ . Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a, b)}{(c, d)} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \quad (3.4)$$

**Exemplo 6.** Sejam os números  $z = -1 + \sqrt{3}i$  e  $w = 1 + i$ . Calcule o quociente e represente geometricamente este resultado no software Geogebra.

$$\frac{z}{w} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \left( \frac{(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 1}{1^2 + (\sqrt{3})^2}; \frac{\sqrt{3} \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{1^2 + (\sqrt{3})^2} \right) = \left( \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}; \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right)$$

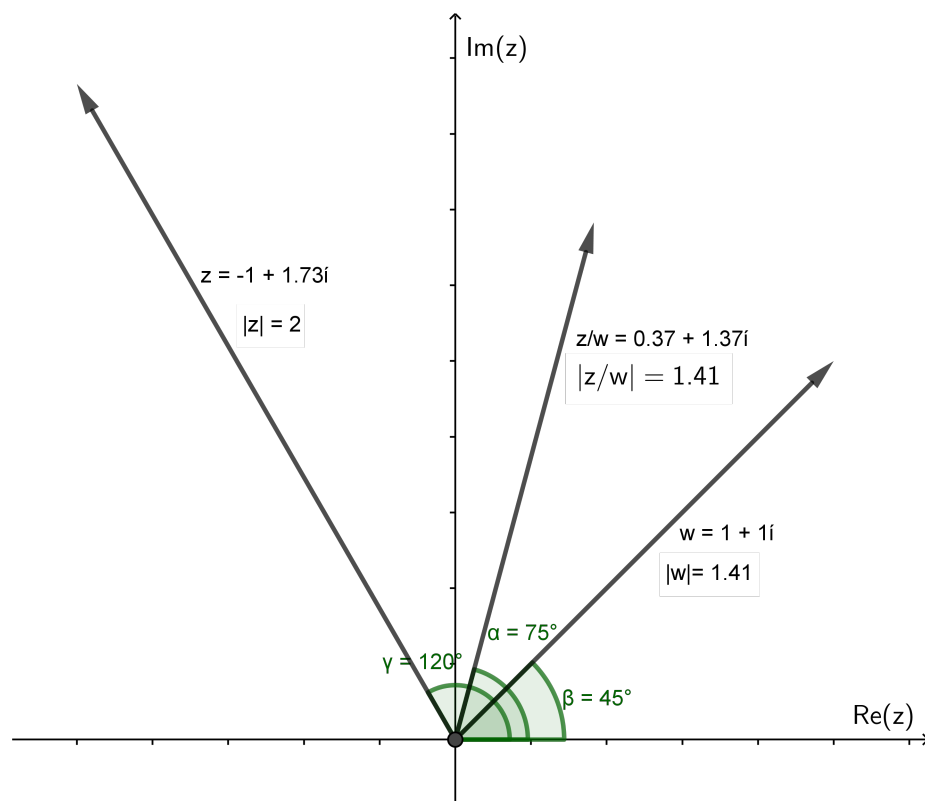


Figura 3.9: Quociente entre os números complexos  $z$  e  $w$

### 3.3.6. Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

Consideremos  $\mathbb{C}' \subset \mathbb{C}$ , isto é, o subconjunto dos complexos cujas ordenadas são nulas, ou seja,

$$\mathbb{C}' = \{z \in \mathbb{C} | z = (a, b) \text{ e } b = 0\}$$

e a aplicação

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}'$$

$$a \longmapsto (a, 0)$$

Dizemos que  $f$  é um isomorfismo de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{C}'$ , pois a aplicação é bijetiva.

Pode-se então, identificar o complexo  $(a, 0)$  com o real  $a$  e reciprocamente. Diz-se que o conjunto  $\mathbb{R}$  está contido em  $\mathbb{C}$  ou que  $\mathbb{R}$  está imerso em  $\mathbb{C}$ .

### 3.3.7. Propriedades das operações no conjunto dos números complexos

Sejam  $z, w$  e  $t$  números complexos. Então valem as seguintes propriedades:

#### Adição

- $A_1$ : Comutativa:  $z + w = w + z$
- $A_2$ : Associativa:  $z + (w + t) = (z + w) + t$
- $A_3$ : Elemento neutro:  $\exists e_a \in \mathbb{C} \mid z + e_a = e_a + z = z$

De fato, fazendo  $z = (a, b)$  e  $e_a = (e, f)$  teremos

$$(a, b) + (e, f) = (a + e, b + f) = (a, b)$$

$$a + e = a \text{ e } b + f = b \iff e = 0 \text{ e } f = 0$$

Assim  $e_a = (e, f) = (0, 0) = 0^*$  e é chamado de zero complexo.

- $A_4$ : Elemento inverso

$$\exists z_o \in \mathbb{C} \mid z + z_o = 0^*$$

De fato, para  $z = (a, b)$  e  $z_o = (x, y)$  teremos  $(a, b) + (x, y) = (0, 0) \implies$

$\implies (a + x, b + y) = (0, 0)$ , Portanto temos

$$a + x = 0 \iff x = -a$$

$$b + y = 0 \iff y = -b$$

Assim,  $z_o = (x, y) = (-a, -b) \iff z_o = -z$

#### Multiplicação

- $M_1$ : Comutativa:  $z \cdot w = w \cdot z$

- $M_2$ : Associativa  $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$
- $M_3$ : Elemento neutro:  $\exists e_m \in \mathbb{C} | z \cdot e_m = e_m \cdot z = z$

De fato, fazendo  $z = (a, b)$  e  $e_m = (e, f)$  teremos

$$(a, b) \cdot (e, f) = (ae - bf, af + be) = (a, b)$$

$$\begin{cases} ae - bf = a \\ af + be = b \end{cases} \implies e = 1 \text{ e } f = 0$$

Assim  $e_m = (1, 0) = 1^*$

- $M_4$ : Elemento inverso

$$\exists z_1 \in \mathbb{C} | z + z_1 = 1^*$$

De fato, para  $z = (a, b)$  e  $z_1 = (x, y)$

Se  $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$ , então

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ e } y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Portanto,  $z_1 = (x, y) = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \Leftrightarrow z_1 = \frac{1^*}{z}$

$$(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

### Distributiva da multiplicação em relação à adição

- $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$  distributiva à esquerda
- $(w + t) \cdot z = w \cdot z + t \cdot z$  distributiva à direita

Como a adição em  $\mathbb{C}$  e a multiplicação em  $\mathbb{C}^*$  gozam de tais propriedades, diz-se que a adição  $(\mathbb{C}, +)$  é Grupo Aditivo e a multiplicação  $(\mathbb{C}, \cdot)$  é Grupo Multiplicativo. Se acaso  $M_1$  não valesse, teríamos um Grupo Multiplicativo não comutativo.

Também devemos enfatizar que o conjunto dos números complexos por gozar das propriedades de adição, multiplicação e distributividade é um corpo.

### 3.3.8. O conjugado de um número complexo e suas propriedades

Seja  $z = (a, b) = a + bi$  um número complexo. Chama-se conjugado de  $z$  ao número complexo  $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$

Valem as seguintes propriedades em relação aos conjugados:

1.  $\overline{\bar{z}} = z$

*Demonstração.*  $\overline{\bar{z}} = \overline{(a, -b)} = (a, -(-b)) = (a, b) = z$  □

2.  $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$

*Demonstração.*  $\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{(a, b) \pm (c, d)} = \overline{(a \pm c, b \pm d)} = (a \pm c, -(b \pm d)) = (a \pm c, -b \mp d) = (a, -b) \pm (c, -d) = \overline{(a, b)} \pm \overline{(c, d)} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$  □

3.  $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$

*Demonstração.*  $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{(a, b) \cdot (c, d)} = \overline{(ac - bd, cb + ad)} = (ac - bd, -(cb + ad)) = (ac - bd, -cb - ad) = (ac - (-b)(-d), c(-b) + a(-d)) = (a, -b) \cdot (c, -d) = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$  □

4.  $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$  ( $\beta \neq 0$ )

*Demonstração.*  $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \overline{\left(\frac{(a, b)}{(c, d)}\right)} = \overline{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{cb - ad}{c^2 + d^2}\right)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, -\frac{cb - ad}{c^2 + d^2}\right) = \left(\frac{ac + (-b)(-d)}{c^2 + (-d)^2}, \frac{c(-b) + a(-d)}{c^2 + (-d)^2}\right) = \frac{(a, -b)}{(c, -d)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$  □

5.  $\Re(\alpha)$  (parte real de  $\alpha$ )

$$\Re(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$$

$$\Im(\alpha) \text{ (parte imaginária de } \alpha) \Im(\alpha) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}$$

*Demonstração.*  $\Re(\alpha) = a = a + 0i = a + (bi - bi) = \frac{2a + (bi - bi)}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$

$$\Im(\alpha) = bi = 0 + bi = (a - a) + bi = \frac{(a - a) + 2bi}{2} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2} = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}$$
 □

6.  $\forall \alpha \in \mathbb{C}; \alpha = a + ib; a, b \in \mathbb{R}$  temos

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = a^2 + b^2$$

*Demonstração.*  $\alpha \cdot \bar{\alpha} = (a, b)(a, -b) = (a^2 + b^2, ab - ab) = (a^2 + b^2, 0) = a^2 + b^2 \quad \square$

7.  $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = (\alpha \bar{\alpha})^{1/2}$

*Demonstração.*  $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}} = (\alpha \cdot \bar{\alpha})^{1/2} \quad \square$

8.  $|\alpha| = |\bar{\alpha}|$

*Demonstração.*  $|\alpha| = (\alpha \cdot \bar{\alpha})^{1/2} = (\bar{\alpha} \cdot \alpha)^{1/2} = (\bar{\alpha} \cdot \bar{\bar{\alpha}})^{1/2} = |\bar{\alpha}| \quad \square$

### 3.3.9. Norma de um número complexo

Chama-se norma de um número complexo  $z = (a, b)$  o número real  $a^2 + b^2$  e indica-se por:

$$N(z) = z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

$$N(z) = a^2 + b^2.$$

A divisão é facilitada se a norma for utilizada. Seja  $z = (a, b)$  e  $u = (c, d)$ ,

$$\frac{z}{u} = \frac{z \cdot \bar{u}}{u \cdot \bar{u}} = \frac{z \cdot \bar{u}}{N(u)}$$

ou

$$\frac{z}{u} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}$$

### 3.3.10. O módulo de um número complexo

Chama-se módulo ou valor absoluto de um número  $z = (a, b)$  a raiz quadrada da norma e indica-se por

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.5)$$

Na forma de coordenadas complexas indica-se módulo como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad (3.6)$$

Também pode-se escrever módulo como raiz quadrada da norma

$$|z| = \sqrt{N(z)} \quad (3.7)$$

### 3.3.11. Relação entre módulos

**Proposição 1.** *Dados  $z = (a, b)$  e  $w = (c, d)$ , valem as seguintes propriedades:*

1.  $|a| \leq |z|$  e  $|b| \leq |z|$
2.  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
3.  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ , se  $w \neq 0^*$

*Demonstração.*

$$1. |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad \text{e} \quad |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$\begin{aligned} 2. |z \cdot w| &= |(a, b)(c, d)| = |(ac - bd, bc + ad)| = |(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2| = \\ &|(ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (bc)^2 + 2acbd + (ad)^2| = |(ac)^2 + (bd)^2 + (bc)^2 + (ad)^2| = \\ &|a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2| = |a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2)| = \\ &|(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)| = |(a^2 + b^2)||c^2 + d^2| = |z||w| \end{aligned}$$

3. Sendo  $w \neq 0^*$  temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{z}{w}\right| &= \left|\frac{(a, b)}{(c, d)}\right| = \left|\frac{(ac + bd, bc - ad)}{c^2 + d^2}\right| = \left|\frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2}, \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}\right| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(ac)^2 + 2abcd + (bd)^2}{(c^2 + d^2)^2} + \frac{(bc)^2 - 2abcd + (ad)^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2}{(c^2 + d^2)^2} + \frac{b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}{(c^2 + d^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)}{(c^2 + d^2)}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \\ &\frac{|z|}{|w|} \end{aligned}$$

□



### 3.3.12. A Desigualdade Triangular

Anteriormente foi definido o valor absoluto de um número complexo  $\alpha = a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) como sendo

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Foram mencionadas algumas propriedades simples do valor absoluto. Agora será provada a *desigualdade triangular*.

**Teorema 1.** Para quaisquer  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + z_2\bar{z}_2 \end{aligned}$$

Como  $(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = 2\Re(z_1\bar{z}_2)$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$$

Mas  $2\Re(z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1\bar{z}_2|$ . Então

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2, \quad (\because |\bar{z}_2| = |z_2|) \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Como ambos os  $|z_1 + z_2|$  e  $|z_1| + |z_2|$  são não-negativos, obtemos

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Para provar a outra desigualdade, note que  $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$ .

$$\therefore |z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$$

$$= |z_1 + z_2| + |z_2|.$$

Segue que

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Trocando os papéis de  $z_1$  e  $z_2$ , obtemos

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|.$$

Portanto

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

Discutimos agora a situação em que a desigualdade triangular se torna uma igualdade. É trivial no caso de  $z_1 = 0$  ou  $z_2 = 0$ . Por isso, consideramos o caso  $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ . Vê-se que se torna uma igualdade se e somente se

$$\Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|.$$

Mas um número complexo  $\alpha$  satisfaz  $\Re(\alpha) = |\alpha|$  se e somente se  $\alpha$  é um número real não negativo. Portanto, a desigualdade acima se torna uma igualdade se, e somente se,

$$z_1 \bar{z}_2 \geq 0.$$

Como estamos assumindo  $z_2 \neq 0$ , dividindo ambos os lados por  $|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2 > 0$ , obtemos  $\frac{z_1}{z_2} > 0$ . Resumindo,  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  se e somente se

$$\frac{z_1}{z_2} > 0, \text{ a menos que } z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0$$

□

### 3.3.13. Potências da unidade imaginária

Na seção 3.2.2 foi definido a unidade imaginária como  $i = (0, 1)$ . Desta definição temos as seguintes consequências:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \implies i^2 = -1$$

$$i^3 = (0, 1)^2 \cdot (0, 1) = (0, -1) \implies i^3 = -i$$

$$i^4 = (0, 1)^3 \cdot (0, 1) = (1, 0) \implies i^3 = 1$$

Donde podemos deduzir,

$$i^{4k} = (1, 0) = 1$$

$$i^{4k+1} = (0, 1) = i$$

$$i^{4k+2} = (-1, 0) = -1$$

$$i^{4k+3} = (0, -1) = -i, \text{ com } k \in \mathbb{N}$$

### 3.4. Forma trigonométrica ou forma polar

Nesta seção apresentaremos a forma trigonométrica ou forma polar dos números complexos, a fórmula de passagem, produto, divisão, potenciação, raízes de um número complexo e raízes da unidade.

Uma outra forma de escrever um número complexo é na forma polar, em que as referências são o módulo do número complexo e o ângulo que o vetor forma com o eixo horizontal no sentido anti-horário. Para não haver confusão em que plano se está referindo, há algumas modificações em alguns nomes:

- o eixo das abscissas ou horizontal do plano cartesiano será o eixo real ( $\Re$ ) no plano complexo. Nele estarão os números representantes da parte real do número complexo.
- o eixo das ordenadas ou vertical do plano cartesiano será o eixo imaginário ( $\Im$ ) no plano complexo. Ali estarão os números representantes da parte imaginária do número complexo.

Seja um número complexo  $z = x + yi$ , afixo do ponto  $B$ , e o ângulo  $\theta$  compreendido entre o eixo real e o vetor  $\overrightarrow{OB}$  (figura 3.10). Esse ângulo chama-se *argumento de  $z$*  que é definido para todo complexo  $z = (x, y) \neq (0, 0)$  e está entre 0 e  $2\pi$  radianos.

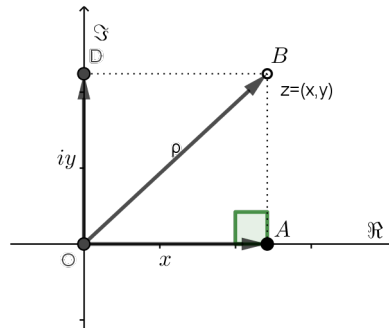


Figura 3.10: Plano Argand-Gauss

Observe na figura 3.10 que  $O = (0, 0)$  é a origem, o triângulo  $\triangle OAB$  é retângulo em  $A$ , com catetos  $\overline{OA}$  e  $\overline{AB}$  e hipotenusa  $\rho$ . Temos também as seguintes relações trigonométricas:

- $x = \rho \cos \theta$
- $y = \rho \operatorname{sen} \theta$
- $\rho^2 = x^2 + y^2$
- $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

A última relação decorre das duas primeiras, pois  $z = x + yi = \rho \cos \theta + i \rho \operatorname{sen} \theta$ . Ela também pode ser indicada por

$$z = \rho e^{i\theta}$$

#### 3.4.1. Fórmulas de passagem

Sejam  $x$  e  $y$  as coordenadas cartesianas e  $z$  a coordenada complexa, em relação a dois eixos perpendiculares  $Ox$  e  $Oy$ , de um ponto real  $Z$ . Então

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases}$$

Resolvendo o sistema em  $x$  e  $y$  encontra-se

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases}$$

que é a passagem de coordenadas cartesianas retangulares para as coordenadas complexas e vice-versa.

As coordenadas polares  $\theta$  e  $\rho$  de  $Z$ , relativas ao pólo  $O$  e ao eixo polar  $Ox$ , estão relacionadas com  $x$  e  $y$  pelas equações.  $x = \rho \cos \theta$ , e  $y = \rho \operatorname{sen} \theta$  de onde obtemos

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z\bar{z},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$$

Portanto, as fórmulas de passagem de coordenadas complexas para a coordenada polares são

$$\rho = (z\bar{z})^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \arctan \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}$$

### 3.4.2. Produto entre números complexos na forma polar

Sejam  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  e  $w = \sigma(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$  dois números complexos. O produto  $z$  por  $w$  é dado por

$$z \cdot w = \rho \cdot \sigma(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

$$z \cdot w = \rho \cdot \sigma(\cos \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot i \operatorname{sen} \varphi + i \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi + i \operatorname{sen} \theta \cdot i \operatorname{sen} \varphi)$$

$$z \cdot w = \rho \cdot \sigma((\cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \theta))$$

mas  $\cos \theta \cdot \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi = \cos(\theta + \varphi)$  e  $\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\theta + \varphi)$ ,

Então

$$z \cdot w = \rho \cdot \sigma[\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)] \quad (3.8)$$

Portanto, o módulo do produto é o produto dos módulos e o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores.

Vimos que a notação de um número complexo na forma polar  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  também pode ser  $z = \rho \angle \theta$ . Assim, sendo  $z = \rho \angle \theta$  e  $w = \sigma \angle \varphi$ , a notação do produto nesta forma será

$$z \cdot w = \rho \angle \theta \cdot \sigma \angle \varphi = (\rho \cdot \sigma) \angle \theta + \varphi.$$

No caso de mais de dois fatores aplicamos sucessivamente esta fórmula e obteremos

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \quad (3.9)$$

ou

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = (\rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n) \angle \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$$

### Interpretação geométrica do produto

Sejam os números complexos  $z = a + bi$  de imagem  $M$  e  $w = c + di$  de imagem  $N$ . Como pela definição (3.9) o módulo do produto é o produto dos módulos, façamos  $P$  a imagem do complexo deste produto. Assim

$$|\vec{OP}| = |\vec{OM}| \cdot |\vec{ON}| \implies \frac{|\vec{OP}|}{|\vec{ON}|} = |\vec{OM}| \implies \frac{|\vec{OP}|}{|\vec{ON}|} = \frac{|\vec{OM}|}{1}$$

Por este resultado podemos considerar o vetor Unitário  $\vec{OA}$  sobre o eixo real. Assim, teremos a seguinte semelhança  $\triangle P\hat{O}N \sim \triangle M\hat{O}A$ .

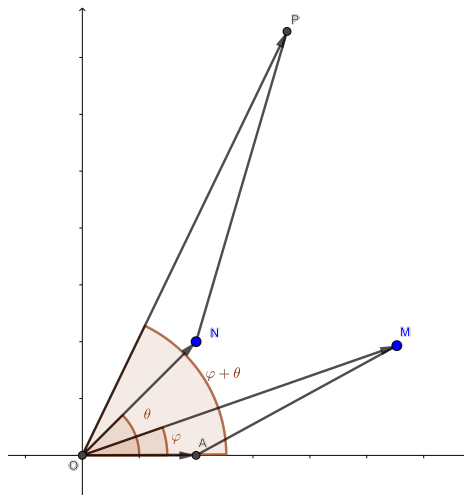


Figura 3.11: Interpretação Geométrica do Produto

Pode-se observar que o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores. Voltemos ao exemplo da seção 3.3.4

**Exemplo 7.** *Sejam os números  $z_1 = \sqrt{3} + i$  e  $z_2 = 2 + 2i$ . Calcule o produto e represente geometricamente este resultado no software Geogebra.*

$$\text{Argumentos: } \theta_1 = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ \quad \text{e} \quad \theta_2 = \arctan \frac{2}{2} = 45^\circ$$

$$\text{Módulos: } \rho_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{e} \quad \rho_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Produto: } z_3 = z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\sqrt{2}(\cos(30^\circ + 45^\circ) + i \text{sen}(30^\circ + 45^\circ)) = 4\sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \text{sen}75^\circ)$$

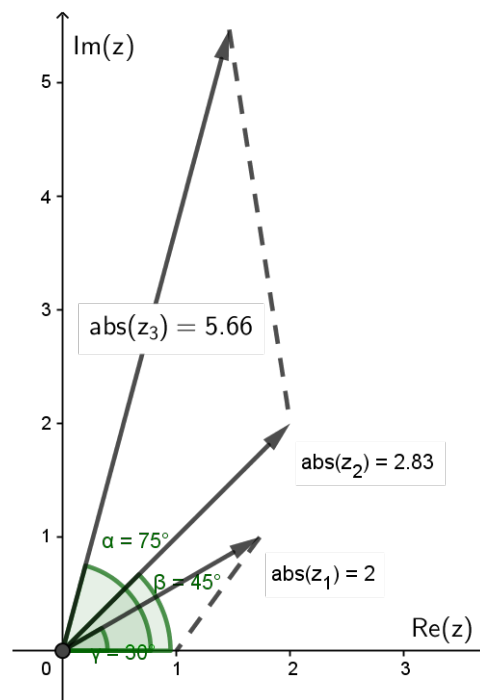


Figura 3.12: Produto de  $\sqrt{3} + i$  e  $w = 2 + 2i$

### 3.4.3. Divisão entre números complexos na forma polar

Sejam  $z = \rho(\cos \theta + i \text{sen} \theta)$  e  $w = \sigma(\cos \varphi + i \text{sen} \varphi)$ . A divisão de  $z$  por  $w$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{\cos \theta + i \text{sen} \theta}{\cos \varphi + i \text{sen} \varphi} = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{(\cos \theta + i \text{sen} \theta)(\cos \varphi - i \text{sen} \varphi)}{(\cos \varphi + i \text{sen} \varphi)(\cos \varphi - i \text{sen} \varphi)} = \\ &= \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{(\cos \theta \cos \varphi - \cos \theta i \text{sen} \varphi + i \text{sen} \theta \cos \varphi - i \text{sen} \theta i \text{sen} \varphi)}{\cos^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{(\cos \theta \cos \varphi - i^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \cos \varphi)}{1} \\
&= \frac{\rho}{\sigma} \cdot (\cos \theta \cos \varphi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi) + i(\operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \cos \varphi)
\end{aligned}$$

Como  $\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cdot \cos \varphi + \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} \varphi$  e  $\operatorname{sen}(\theta - \varphi) = \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} \theta$ ,

teremos

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\sigma} [\cos(\theta - \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta - \varphi)]$$

Portanto, a divisão de dois números complexos na forma trigonométrica será: *o módulo do quociente é o quociente dos módulos e o argumento do quociente é a diferença entre os argumentos do dividendo e do divisor.*

#### 3.4.4. Potenciação na forma polar

Seja  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ . Pela fórmula 3.8 teremos

$$z \cdot z = z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

e

$$z \cdot z \cdot z = z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

para provarmos que  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale a relação  $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ , basta usarmos a hipótese de indução finita,

$$\text{para } k = 1 \implies z^1 = z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \rho^1(\cos 1\theta + i \operatorname{sen} 1\theta)$$

Supor válida a hipótese para  $k = n-1 \implies z^{n-1} = \rho^{n-1}[(\cos(n-1)\theta + i \operatorname{sen}(n-1)\theta)]$

Observa-se que é válido também para  $k = n$ , pois multiplicando-se membro a membro por:  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  vem:

$$z^n = \rho^n[\cos(n-1)\theta + i \operatorname{sen}(n-1)\theta] \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z^n = \rho^n[\cos(n-1)\theta \cdot \cos \theta + i \operatorname{sen}(n-1)\theta \cdot \cos \theta + \cos(n-1)\theta \cdot i \operatorname{sen} \theta + i \operatorname{sen}(n-1)\theta \cdot i \operatorname{sen} \theta]$$



$$z^n = \rho^n [\cos((n-1)\theta) \cdot \cos \theta + i \operatorname{sen}((n-1)\theta) \cdot \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \cos((n-1)\theta) - \operatorname{sen}((n-1)\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta]$$

$$z^n = \rho^n [(\cos((n-1)\theta) \cdot \cos \theta - \operatorname{sen}((n-1)\theta) \cdot \operatorname{sen} \theta + i(\operatorname{sen}((n-1)\theta) \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos((n-1)\theta))]$$

$$z^n = \rho^n (\cos((n-1)\theta + \theta) + i \operatorname{sen}((n-1)\theta + \theta))$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \quad (3.10)$$

Esta fórmula estende-se  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} = \frac{1}{\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} \cdot \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{\rho(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}$$

$$z^{-1} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{\rho \cdot 1} = \rho^{-1} (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$$

Para  $z^{-2}$  teremos

$$z^{-2} = (z^{-1})^2 = [\rho^{-1} (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)]^2$$

$$z^{-2} = \rho^{-2} (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta - 2i \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta)$$

$$z^{-2} = \rho^{-2} (\cos 2\theta - i \operatorname{sen} 2\theta)$$

De forma análoga a 3.10 encontra-se a fórmula

$$z^{-n} = \rho^{-n} (\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta), \quad (3.11)$$

como  $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$  e  $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen}(n\theta)$  a fórmula (3.11) é equivalente à fórmula (3.10) e pode-se escrever:

$$[\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta), \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como  $[\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$  e

$\rho^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ , então

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \quad (3.12)$$

que é a fórmula de De Moivre.

**Exemplo 8.** Determine o valor do  $\cos 3\theta$  com o auxílio da fórmula de De Moivre.

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$$

Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade teremos

$$\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta)$$

Assim temos que

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta$$

e

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \cdot \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta$$

### 3.4.5. Raízes de um número complexo na forma trigonométrica

Sejam  $u = \sigma(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$  e  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ . As raízes  $n$ -ésimas de  $z$  são números complexos do tipo  $u$  tais que

$$u^n = z$$

ou seja

$$[\sigma(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^n = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Utilizando a fórmula de Moivre e desenvolvendo o lado esquerdo teremos

$$\sigma^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Esta igualdade é válida se, e somente se,

$$\sigma^n = \rho \quad e \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

que resulta em:

$$\sigma = \sqrt[n]{\rho} \quad e \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Portanto, as raízes  $n$ -ésimas de  $z$  são:

$$u = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

Assim obtêm-se  $n$  valores distintos para  $\varphi$ , pois  $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ , sendo  $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Pode-se então afirmar que existem  $n$  raízes distintas de um complexo não-nulo. Essas raízes têm o mesmo módulo e seus argumentos diferem de  $\frac{2\pi}{n}$  radianos.

**Exemplo 9.** Determinar as raízes sextas do número  $-64$ .

Solução

Na forma polar:  $\rho = 64$  e  $\theta = \pi$  radianos

Logo  $-64 = 64(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

Assim

$$u_k = \sqrt[6]{64} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right)$$

para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  e sendo  $\sqrt[6]{64} = 2$

$$k = 0 \implies u_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \implies u_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{6} \right) = 2(0 + i1) = 2i$$

$$k = 2 \implies u_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 3 \implies u_3 = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} - i$$

$$k = 4 \implies u_4 = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{9\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{6} \right) = 2(0 - i1) = -2i$$

$$k = 5 \implies u_5 = 2 \left( \cos \frac{\pi + 2 \cdot 5 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2 \cdot 5 \cdot \pi}{6} \right) = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} - i$$

Interpretação Geométrica

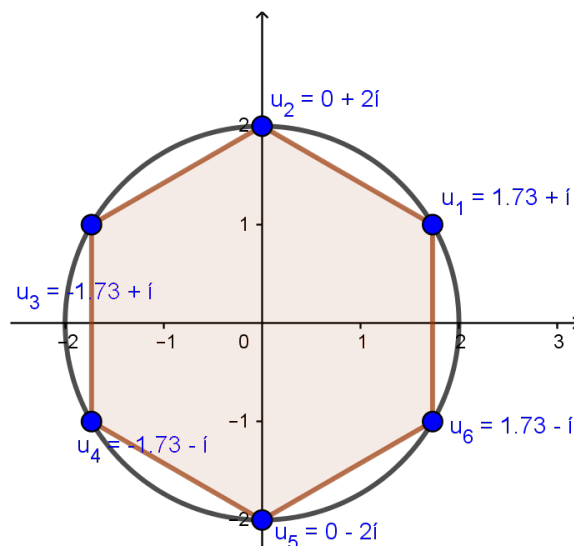


Figura 3.13: Hexágono da raiz sexta de -64

**Exemplo 10.** Determinar as raízes da equação  $x^3 + 2i = 0$ .

Solução:  $x^3 + 2i = 0 \iff x^3 = -2i \iff x = \sqrt[3]{-2i}$ , ou seja, quer se

encontrar as raízes cúbicas de  $-2i$

Na forma polar:  $\rho = 2$  e  $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\text{Logo } -2i = 2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$$

Calculando as raízes cúbicas

$$u_k = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi + 4k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi + 4k\pi}{6} \right)$$

$$\text{para } k = 0 \implies u_0 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi + 4 \cdot 0 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi + 4 \cdot 0 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt[3]{2} (0 + i1) = 0 + \sqrt[3]{2}i$$

$$\text{para } k = 1 \implies u_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi + 4 \cdot 1 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi + 4 \cdot 1 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

$$\text{para } k = 2 \implies u_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi + 4 \cdot 2 \cdot \pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi + 4 \cdot 2 \cdot \pi}{6} \right) =$$

$$= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

A interpretação Geométrica está na figura 3.14.

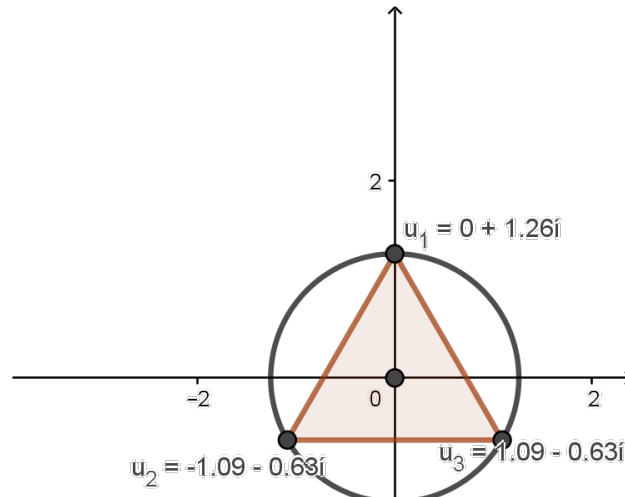


Figura 3.14: Triângulo das raízes da equação  $x^3 + 2i = 0$

### 3.5. Raízes da unidade

O número complexo  $(1, 0)$  tem módulo 1 e argumento zero, ou seja,  $1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ . As raízes  $n$ -ésimas de 1 são números complexos do tipo:

$$u = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{com } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

ou seja, são números complexos de módulo 1 e argumentos  $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ . Eles são vértices de um polígono regular de  $n$  lados onde o primeiro dos vértices é o ponto  $(1, 0)$ .

**Teorema 2.** Chamando-se de  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  as raízes da unidade e se  $w$  é uma qualquer das raízes  $n$ -ésimas do complexo  $z$ , então  $wu_0, wu_1, wu_2, \dots, wu_{n-1}$  são as  $n$  raízes do complexo  $z$ .

*Demonstração.* Seja  $w$  tal que  $w^n = z$ . Qualquer um dos complexos do tipo  $wu_i$  com  $i \in 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  obedece à condição

$$(wu_i)^n = w^n \cdot u_i^n = w^n (u_i^n)$$

Como  $u_i^n = 1$ , vem:

$$(wu_i)^n = w^n \cdot u_i^n = w^n = z \text{ ou } \boxed{(wu_i)^n = z} \text{ o que prova o teorema. } \quad \square$$

**Exemplo 11.** Determinar as raízes quartas do número 81.

Como  $3^4 = 81 \implies w_0 = 3$  é uma das raízes.

Também temos que  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = i$ ,  $u_2 = -1$  e  $u_3 = -i$  são as raízes quartas da unidade, vem:

$$w_0 = 3 \cdot u_0 = 3$$

$$w_1 = 3 \cdot u_1 = 3i$$

$$w_2 = 3 \cdot u_2 = -3$$

$$w_3 = 3 \cdot u_3 = -3i$$

**Exemplo 12.** *Demonstre que as raízes de  $x^2 + x + 1 = 0$  são também raízes sextas da unidade.*

Seja  $u$  uma raiz sexta da unidade. Então  $u^6 = 1$  e  $u^6 - 1 = 0$ .

Fatorando este produto notável temos  $u^6 - 1 = (u^3 - 1)(u^3 + 1)$

Dividindo  $u^3 - 1$  por  $u - 1$  e  $u^3 + 1$  por  $u + 1$  teremos:

$$u^3 - 1 = (u - 1)(u^2 + u + 1) \quad e \quad u^3 + 1 = (u + 1)(u^2 - u + 1)$$

Assim  $u^6 - 1 = (u^3 - 1)(u^3 + 1) = (u - 1)(u^2 + u + 1)(u + 1)(u^2 - u + 1)$  e se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes de  $u^2 + u + 1 = 0$ , e conseqüentemente de  $u^6 - 1 = 0$ , também são de  $x^2 + x + 1 = 0$ .

### 3.6. Forma exponencial

### 3.7. Número complexo na forma exponencial

Do Cálculo pode-se encontrar valores de funções polinomiais efetuando um número finito de adições e multiplicações. Porém, existem funções, tais como funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, que não podem ser calculadas com facilidade. Felizmente pode-se encontrar valores aproximados por polinômios quando a diferença entre o valor efetivo da função e a aproximação for suficientemente pequena. Um dos métodos mais utilizados é o que envolve a *fórmula de Taylor*.

**Teorema 3.** *Seja  $f$  uma função tal que  $f$  e suas  $n$  primeiras derivadas sejam contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ . Além disso,  $f^{(n+1)}(x)$  existe para todo  $x$  no intervalo aberto*

$(a, b)$ . Então, existe um número  $\xi$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \quad (3.13)$$

Omitiremos a demonstração do teorema por não ser o escopo neste trabalho.

Se  $b$  for substituído por  $x$ , obtemos a fórmula de Taylor.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (3.14)$$

onde  $\xi$  está entre  $a$  e  $x$ . A condição sob a qual (3.14) é válida é que  $f$  e suas  $n$  primeiras derivadas devem ser contínuas em um intervalo fechado contendo  $a$  e  $x$ , e a  $(n+1)$ -ésima derivada de  $f$  deve existir em todos os pontos do intervalo aberto correspondente. Tal fórmula pode ser escrita como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

onde  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$  é o *resto* e  $P_n$  é o chamado *polinômio de Taylor* de  $n$ -ésimo grau da função  $f$  no número  $a$ .

Um caso especial da fórmula de Taylor é obtido quando  $a = 0$  em (3.14) e teremos

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (3.15)$$

que é a chamada fórmula de MacLaurin.

**Exemplo 13.** *Explicite as séries  $e^x$ ,  $\operatorname{sen}x$  e  $\cos x$  através do polinômio de Taylor.*

Solução: Sendo  $f(x) = e^x$ , tem-se  $f'(x) = e^x$  e todas as derivadas seguintes também são  $f^{(n)}(x) = e^x$ . Logo

$$e^x = e^0 + \frac{e^0 x}{1!} + \frac{e^0 x^2}{2!} + \dots + \frac{e^0 x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (3.16)$$

Sendo  $f(x) = \operatorname{sen}x$ , tem-se que  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\operatorname{sen}x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,

$f^{iv}(x) = \text{sen}x$ . Tem-se também que  $\text{sen}0 = 0$  e  $\text{cos}0 = 1$ . Então

$$\begin{aligned}\text{sen}x &= \text{sen}0 + \frac{\text{cos}0x}{1!} + \frac{-\text{sen}0x^2}{2!} + \frac{-\text{cos}0x^3}{3!} + \frac{\text{sen}0x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{\text{sen}^{(n)}x^n}{n!} \\ \text{sen}x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

E sendo  $f(x) = \text{cos}x$ , tem-se que  $f'(x) = -\text{sen}x$ ,  $f''(x) = -\text{cos}x$ ,  $f'''(x) = \text{sen}x$ ,  $f^{iv}(x) = \text{cos}x$ . Tem-se também que  $\text{sen}0 = 0$  e  $\text{cos}0 = 1$ . Então

$$\begin{aligned}\text{cos}x &= \text{cos}0 + \frac{-\text{sen}0x}{1!} + \frac{-\text{cos}0x^2}{2!} + \frac{\text{sen}0x^3}{3!} + \frac{\text{cos}0x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{\text{cos}^n x^n}{n!} \\ \text{cos}x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots + \frac{x^8}{8!} \cdots + (-1)^n \frac{\text{cos}^{(n)}x^n}{n!}\end{aligned}\quad (3.18)$$

Estes resultados foram obtidos para se calcular  $e^{i\theta}$ , ou seja, trocar  $x$  por  $i\theta$  em  $e^x$ .

De (3.16), temos:

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + \frac{e^0 i\theta}{1!} + \frac{e^0 (i\theta)^2}{2!} + \frac{e^0 (i\theta)^3}{3!} + \frac{e^0 (i\theta)^4}{4!} + \cdots + \frac{e^0 (i\theta)^n}{n!} \\ e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots\end{aligned}$$

separando devidamente os valores reais e valores imaginários teremos

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

De (3.17) e (3.18) temos

$$e^{i\theta} = \text{cos}\theta + i \text{sen}\theta \quad (3.19)$$

Utilizando a Fórmula de De Moivre

$$(\text{cos}\theta + i \text{sen}\theta)^n = \text{cos}n\theta + i \text{sen}n\theta$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Assim, um número complexo  $z = x + iy$  pode ser escrito como  $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ , sendo  $\rho = |z|$ .



[5]

## 3.8. Produto na forma exponencial

Sendo  $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2}$  tem-se como produto  $z_1 \cdot z_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot e^{i\theta_1}) \cdot (\rho_2 \cdot e^{i\theta_2}) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i\theta_1+i\theta_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Da definição (3.9) pode-se escrever

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)} \quad (3.20)$$

**Exemplo 14.** Calcule o produto  $(\sqrt{3} + i) \cdot (1 + i\sqrt{3})$ .

Solução: Temos que  $\arctan \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies \theta_1 = 30^\circ$

$$\arctan \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \implies \theta_2 = 60^\circ$$

$$\rho_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\rho_2 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

Assim,  $(\sqrt{3} + i) \cdot (1 + i\sqrt{3}) = 2 \cdot 2 \cdot [\cos(30^\circ + 60^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + 60^\circ)] = 4 \cdot [\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ] = 4 \cdot (0 + i1) = 4i$

## 3.9. Divisão na forma exponencial

Sendo  $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\theta_2}$  tem-se como divisão  $z_1 : z_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i\theta_1-i\theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (3.21)$$

**Exemplo 15.** Calcule o quociente  $(\sqrt{3} + i) : (1 + i\sqrt{3})$ .

Solução: Do exercício anterior temos que  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$ ,  $\rho_1 = 2$  e  $\rho_2 = 2$ . Da trigonometria sabe-se que  $\cos(-\theta) = \cos \theta$  e  $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$

Assim,  $(\sqrt{3} + i) : (1 + i\sqrt{3}) = \frac{2}{2} \cdot [\cos(30^\circ - 60^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ - 60^\circ)] = 1 \cdot [\cos(-30^\circ) +$

$$i \operatorname{sen}(-30^\circ)] = 1 \cdot (\cos 30^\circ - i \operatorname{sen}30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

### 3.10. Potências na forma exponencial

Do resultado (3.20), da fórmula de De Moivre e se  $z_1 = z_n = \cdots = z_n = z$  teremos

$$z^n = \rho^n \cdot e^{in\theta} = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \operatorname{senn}\theta). \quad (3.22)$$

**Exemplo 16.** Calcule a potência  $(\sqrt{3} + i)^6$ .

Solução: Do exemplo 14 e do resultado (3.22) temos

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 [\cos(6 \cdot 30^\circ) + i \operatorname{sen}(6 \cdot 30^\circ)] = 64(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen}180^\circ) = 64(-1 + 0) = -64$$

. Compare este exercício com o exemplo 9.

#### 4. Aplicações à geometria

Se um ponto e uma reta podem ser representados no plano, podemos então representar nele toda a geometria plana e a analítica. Este será o escopo deste capítulo.

Consideremos as seguintes formas de se escrever um número complexo:

$$z = a + bi \quad \text{ou} \quad z = (a, b)$$

##### 4.1. Ponto médio de um segmento

**Proposição 2.** *Dado um segmento de reta no plano complexos formados pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$ , seu ponto médio é dado por  $z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$*

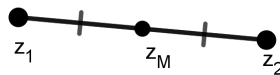


Figura 4.1: Ponto Médio

*Demonstração.* Como  $z_m$  é o ponto médio do segmento  $z_1z_2$  podemos escrever a seguinte igualdade  $\overrightarrow{z_1z_m} = \overrightarrow{z_mz_2}$ . Portanto

$$z_m - z_1 = z_2 - z_m \quad \iff \quad 2 \cdot z_m = z_1 + z_2 \quad \iff \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

□

**Exemplo 17.** *Considere os pontos  $z_1 = -2 + 3i$  e  $z_2 = 5 - 3i$ . O ponto médio entre  $z_1$  e  $z_2$  é o ponto  $z_m = 1,5 + 0i$  ou  $(1,5; 0)$  que está sobre o eixo real (figura 4.2), pois*

$$z_m = \frac{z_1 + z_2}{2} \iff z_m = \frac{(-2 + 3i) + (5 - 3i)}{2} \iff z_m = \frac{3 + 0i}{2} \iff z_m = 1,5 + 0i$$

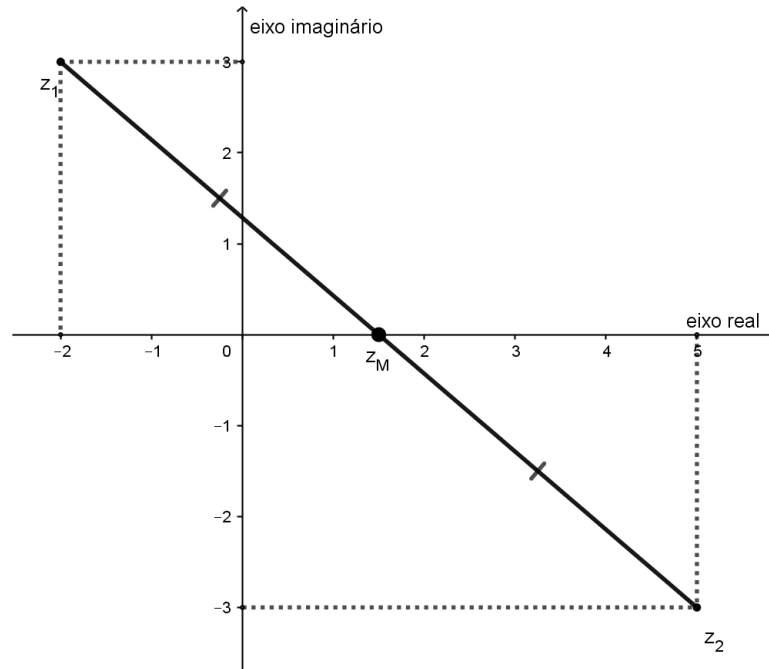


Figura 4.2: Ponto Médio entre  $z_1$  e  $z_2$

#### 4.2. Distância entre dois pontos

**Proposição 3.** *Dados dois pontos  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$  (figura 4.3) no plano complexo. Sua distância é*

$$d(z_1 z_2) = |z_2 - z_1| \quad (4.1)$$

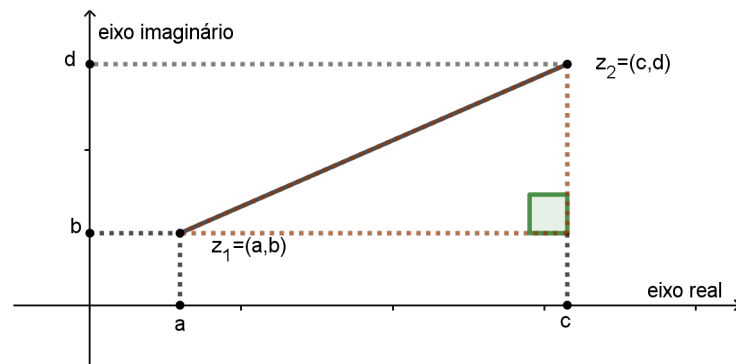


Figura 4.3: Distância entre pontos

*Demonstração.* Por definição a distância entre pontos no plano é  $d(z_1 z_2) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$  e a definição da diferença entre pontos complexos é  $z_2 - z_1 = (c + di) - (a + bi) = (c - a) + (d - b)i$ . Como a distância entre pontos complexos é o módulo da diferença entre estes pontos, temos

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

Assim  $d(z_1 z_2) = |z_2 - z_1|$  □

**Exemplo 18.** A distância entre os pontos da figura 4.2 é aproximadamente 9,22 unidades, pois

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85} \approx 9,22un$$

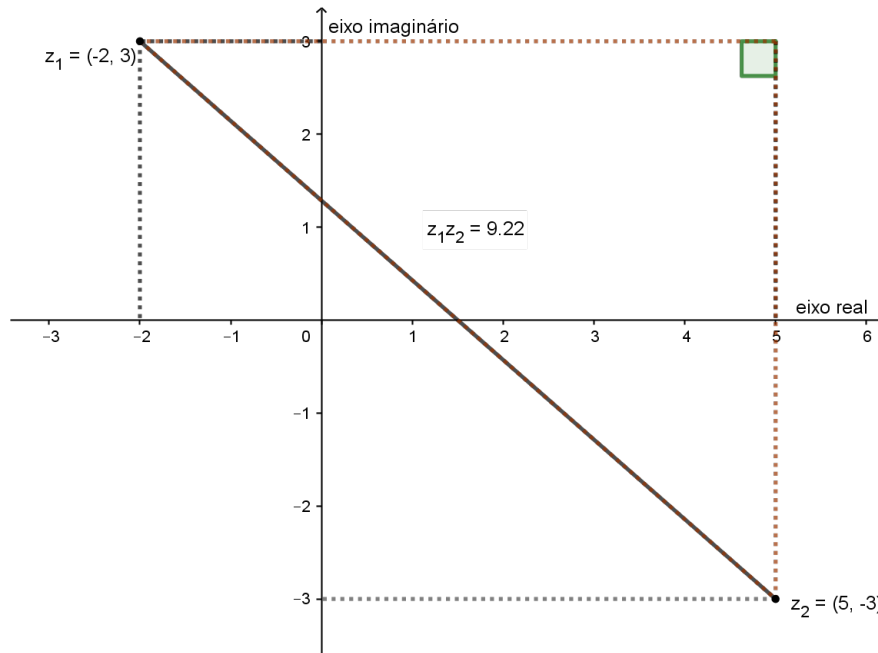


Figura 4.4: Distância entre  $z_1 = -2 + 3i$  e  $z_2 = 5 - 3i$

Mas a fórmula da distância entre dois pontos (equação 4.1) é a mesma que a fórmula do módulo de um número complexo (equação 3.5). Portanto, também podemos utilizar a outra fórmula de módulo (equação 3.6). Assim, se  $\alpha = (c - a, d - b)$  e  $\bar{\alpha} = (c - a, -(d - b))$  teremos as igualdades

$$d(z_1 z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} \quad (4.2)$$

**Proposição 4.** Dados os pontos  $z_1$  e  $z_2$  e seus respectivos conjugados  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$ . A distância entre  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$  é igual à distância entre  $z_1$  e  $z_2$ .

*Demonstração.* Seja  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ . Então  $\bar{z}_1 = (a, -b)$  e  $\bar{z}_2 = (c, -d)$ . Pela proposição anterior

$$\begin{aligned} d_{\bar{z}_1 \bar{z}_2} &= |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = \sqrt{(c - a)^2 + ((-d) - (-b))^2} = \sqrt{(c - a)^2 + (-d + b)^2} = \\ &= \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} = |z_2 - z_1| = d_{z_1 z_2} \end{aligned}$$

□

## 4.3. Condição de alinhamento de três pontos

**Proposição 5.** *Dois vetores não nulos do plano complexo  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$  são paralelos se, e só se, existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tal que  $z_1 = \lambda \cdot z_2$ .*

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Se os vetores são paralelos, as razões entre seus componentes é proporcional, ou seja,  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda \iff \frac{a}{c} = \lambda$  e  $\frac{b}{d} = \lambda \iff a = \lambda c$  e  $b = \lambda d$  com  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

$$\iff (a, b) = (\lambda c, \lambda d) \iff (a, b) = \lambda(c, d) \iff z_1 = \lambda z_2$$

( $\impliedby$ ) Se  $z_1 = \lambda z_2$  temos que  $(a, b) = \lambda(c, d) \iff (a, b) = (\lambda c, \lambda d) \iff a = \lambda c$  e  $b = \lambda d \iff \frac{a}{c} = \lambda$  e  $\frac{b}{d} = \lambda \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$ , ou seja, a razão entre seus componentes é proporcional e os vetores são paralelos. □

**Proposição 6.** *A colinearidade de três pontos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  acontece se, e só se,  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$ .*



Figura 4.5: Pontos colineares

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Por hipótese  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são colineares, ou seja, os vetores  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  e  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  são paralelos e, pela proposição 5,  $\overrightarrow{z_1 z_3} = \lambda \overrightarrow{z_1 z_2}$ . Então  $z_3 - z_1 = \lambda(z_2 - z_1)$  e  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \in \mathbb{R}^*$ .

( $\impliedby$ ) Se  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \in \mathbb{R}^*$  então os vetores são paralelos. Como  $z_1$  é a origem de ambos, os vetores são colineares. □

**Exemplo 19.** *Os pontos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  e  $z_3 = (7, 3)$  são colineares pois*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(7, 3) - (1, 1)}{(4, 2) - (1, 1)} = \frac{(6, 2)}{(3, 1)} = \left( \frac{20}{10}, 0 \right) = (2, 0) \in \mathbb{R}^*$$

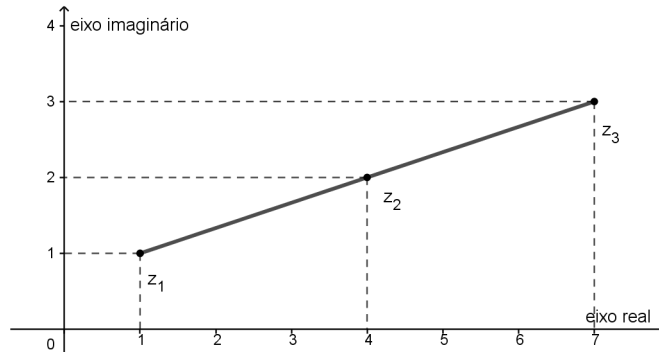


Figura 4.6: Exemplo de pontos colineares

#### 4.4. Equação da reta

**Proposição 7.** *Sejam dois pontos associados aos números complexos  $z_1$  e  $z_2$ . A equação da reta que passa por estes pontos é dada por*

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \quad (4.3)$$

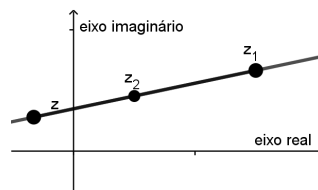


Figura 4.7: Equação da reta

*Demonstração.* Dados dois pontos fixos  $z_1$  e  $z_2$ . Se  $z$  é um ponto qualquer da reta  $\overline{z_1 z_2}$ , então  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z$  são pontos colineares e pela proposição 6, temos  $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$ . Ora, então ele é igual ao seu conjugado, pois o conjugado de um número real é igual a ele mesmo.

Então

$$\begin{aligned} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} &= \overline{\left( \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)} \iff \\ \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{\overline{z - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} \iff \\ \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \end{aligned}$$

□

Observação: Se desenvolvermos o resultado anterior teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \\
\iff z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) &= z_2(\bar{z} - \bar{z}_1) - z_1(\bar{z} - \bar{z}_1) \\
\iff z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_2(\bar{z} - \bar{z}_1) + z_1(\bar{z} - \bar{z}_1) &= 0 \\
\iff z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + z_1(-\bar{z}_2 + \bar{z}_1 + \bar{z} - \bar{z}_1) + z_2(-\bar{z} + \bar{z}_1) &= 0 \\
\iff z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + z_1(\bar{z} - \bar{z}_2) + z_2(\bar{z}_1 - \bar{z}) &= 0 \\
\iff z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}) + z_2(\bar{z} - \bar{z}_1) &= 0 \\
\iff z\bar{z}_1 - z\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z} + z_2\bar{z} - z_2\bar{z}_1 &= 0 \\
\iff z\bar{z}_1 + z_2\bar{z} + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z} - z\bar{z}_2 &= 0 \tag{4.4}
\end{aligned}$$

que pode ser colocada na forma do determinante

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

Continuando 4.4 teremos a equação

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_2 - z_1) + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0 \tag{4.6}$$

**Exemplo 20.** A equação da reta que passa pelos pontos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  é  $z(-3, 1) + \bar{z}(3, 1) + (0, 4) = 0$  pois

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_2 - z_1) + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0$$

$$z((1, -1) - (4, -2)) + \bar{z}((4, 2) - (1, 1)) + (1, 1)(4, -2) - (4, 2)(1, -1) = 0$$

$$z(-3, 1) + \bar{z}(3, 1) + (0, 4) = 0$$



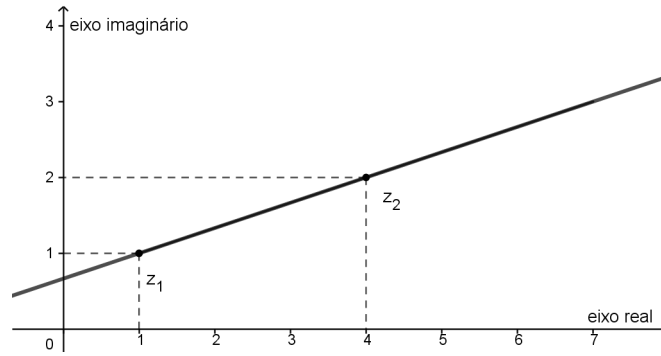


Figura 4.8: Retra complexa que passa por  $z_1$  e  $z_2$

#### 4.5. Equação paramétrica da reta

Sejam  $z_1 \neq z_2$  pontos distintos e

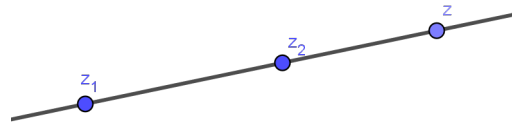


Figura 4.9: Retra Paramétrica

seja  $z$  um ponto qualquer da reta determinada por  $z_1$  e  $z_2$ . Então a igualdade  $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , pode ser escrita como a equação paramétrica da reta, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} &= \lambda \\ z - z_1 &= \lambda(z_2 - z_1) \\ z &= \lambda z_2 - \lambda z_1 + z_1 \\ z &= (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{aligned}$$

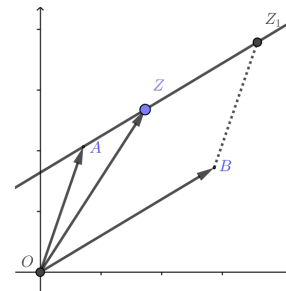


Figura 4.10: Equação paramétrica

**Exemplo 21.** A equação paramétrica da reta que passa pelos pontos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  é  $z = (1 - \lambda)(1, 1) + \lambda(4, 2)$ , isto é,  $z = (1, 1) + (3\lambda, \lambda)$

**Exemplo 22.** Considere os pontos representados pelos números complexos  $w_1$  e  $w_2$ . Definimos o vetor diferença  $w_2 - w_1$  e um número real  $t$ . Como  $t$  varia de  $-\infty$  até  $+\infty$ , o vetor  $t(w_2 - w_1)$  define a reta  $r$ .

$$r : w_1 + t(w_2 - w_1), \text{ com } t \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad r : w_2 + t(w_1 - w_2), \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

Observe a figura 4.11 construída através do software Geogebra. Temos os pontos  $w_1 = 1 + i$ ,  $w_2 = -1 + 2i$  e os pontos  $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$  e  $z_7$  referentes ao parâmetro  $t$ .

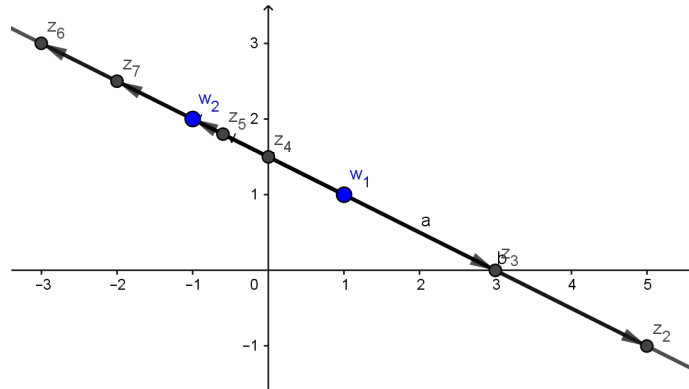


Figura 4.11: Reta com parâmetro  $t$

- Os pontos  $z_2 = 5 - i$  (para  $t = -2$ ) e  $z_3 = 3 + 0i$  (para  $t = -1$ ) são externos ao intervalo  $w_2 - w_1$  e o sentido do vetor é contrário ao do vetor  $\overrightarrow{W_1W_2}$ , pois  $t < 0$ .
- Os pontos  $z_4 = 0 + 1,5i$  (para  $t = 0,5$ ) e  $z_5 = 0,6 + 1,8i$  (para  $t = 0,8$ ) estão internos ao intervalo  $w_2 - w_1$  e têm o mesmo sentido do vetor  $\overrightarrow{W_1W_2}$ , pois  $0 < t < 1$ .
- Os pontos  $z_6 = -3 + 3i$  (para  $t = 2$ ) e  $z_7 = -2 + 2,5i$  (para  $t = 1,5$ ) são externos ao intervalo  $w_1 - w_2$  e têm o mesmo sentido do vetor  $\overrightarrow{W_1W_2}$ , pois  $t > 0$ .

De um modo geral, sendo  $z = w_1 + t(w_2 - w_1)$

- se  $t = 0$  o vetor estará sobre  $w_1$ ;
- se  $t = 1$  o vetor estará sobre  $w_2$ ;
- se  $t < 0$  o vetor será externo ao intervalo  $w_1 - w_2$  e o sentido será o contrário ao vetor  $w_2 - w_1$ ;
- se  $t > 0$  o vetor será externo ao intervalo  $w_1 - w_2$  e o sentido será o mesmo do vetor  $w_2 - w_1$ ;
- se  $0 < t < 1$  o vetor será interno ao intervalo  $w_1 - w_2$  e o sentido será o mesmo do vetor  $w_2 - w_1$ .
- $|t| > 1$  amplia o vetor;

- $|t| < 1$  contrai o vetor;

#### 4.6. Divisão proporcional

Considere  $t \in \mathbb{R}$ , os pontos fixos  $Z_1, Z_2$  e o ponto variável  $Z$ , representados respectivamente pelos números complexos  $z_1, z_2$  e  $z$ . Pela Proposição 6 os pontos são colineares e  $t$  divide o segmento  $\overline{Z_1 Z_2}$  na razão

$$t = \frac{Z_1 Z}{Z Z_2} \implies t = \frac{z - z_1}{z_2 - z} \implies z = \frac{z_1 + t z_2}{1 + t}$$

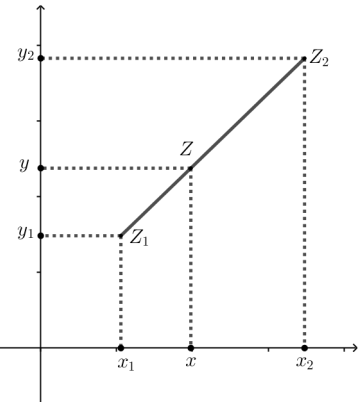


Figura 4.12: Teorema de Tales

Como  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)$  são as coordenadas cartesianas retangulares de  $Z_1, Z_2, Z$ , então, pelo teorema de Tales

$$z = \frac{z_1 + t z_2}{1 + t} \iff x = \frac{x_1 + t x_2}{1 + t}, \quad y = \frac{y_1 + t y_2}{1 + t} \quad (4.7)$$

ou seja, dada a razão  $t$  e os pontos  $z_1$  e  $z_2$ , as fórmulas 4.7 nos fornecem o ponto  $z$ .

**Exemplo 23.** Dados os pontos  $Z_1$  e  $Z_2$  de afi-

xos  $z_1 = 1 - i$  e  $z_2 = 5 + 4i$ , encontrar o ponto  $z$  de tal forma que  $t = 3$  divida o segmento  $\overline{Z_1 Z_2}$  em partes proporcionais.

Solução: Aplicando as fórmulas (4.7) temos

$$z = \frac{z_1 + t z_2}{1 + t} = \frac{(1 - i) + 3 \cdot (5 + 4i)}{1 + 3} = \frac{16 + 11i}{4}$$

$$z = 4 + 2,75i$$

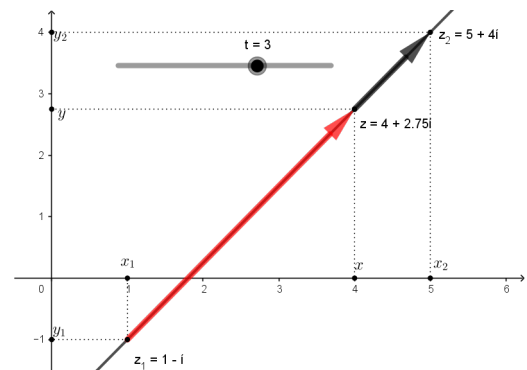


Figura 4.13: Divisão na razão  $t=3$

#### 4.7. Medida de um ângulo no plano complexo

Na seção anterior vimos todos os casos da equação paramétrica em que  $t \in \mathbb{R}$  dados  $z_1, z_2$  e  $z_3$ . Quando  $t \notin \mathbb{R}$  tais pontos formarão um triângulo. Para analisar os ângulos

deste triângulo, deve-se analisar os argumentos de  $t$ .

$$\arg t = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

O argumento de  $t$  é o ângulo formado pelos lados deste triângulo.

**Exemplo 24.** *Sejam os pontos  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ , representados pelos números complexos  $z_1 = 3 + 4i$ ,  $z_2 = 1 + i$  e  $z_3 = -2 + 3i$ . Determine o ângulo formado pelos lados  $\overline{Z_3Z_2}$  e  $\overline{Z_1Z_2}$  com vértice em  $Z_2$ .*

Solução: Cálculo do argumento de  $t$

$$\begin{aligned} \arg t_2 &= \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \arg \frac{(-2 + 3i) - (1 + i)}{(3 + 4i) - (1 + i)} = \arg \frac{-3 + 2i}{2 + 3i} = \\ &= \arg \frac{13i}{13} = \arg i = \arg (0 + i) = \arg \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo formado pelos lados  $\overline{Z_3Z_2}$  e  $\overline{Z_1Z_2}$  com vértice em  $Z_2$  é  $\frac{\pi}{2}$  ou  $90^\circ$ .

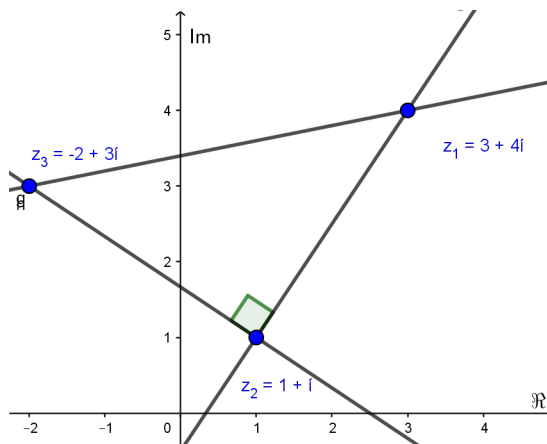


Figura 4.14: Triângulo retângulo

#### 4.8. Equação da reta com coordenadas cartesianas

Do postulado sabe-se que dois pontos determinam uma reta. Assim, dados os pontos  $A = (x_a, y_a)$  e  $B = (x_b, y_b)$  formando a reta  $r$ , se  $(x, y) \in r$ , temos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

O resultado do cálculo do determinante é

$$xy_a + yx_b + x_a y_b - y_a x_b - yx_a - xy_b = 0$$

$$x(y_a - y_b) + y(x_b - x_a) + (x_a y_b - y_a x_b) = 0$$

Fazendo  $\alpha = (y_a - y_b)$ ,  $\beta = (x_b - x_a)$  e  $\gamma = (x_a y_b - y_a x_b)$  a equação da reta será

$$x\alpha + y\beta + \gamma = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

O coeficiente angular será

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad \text{ou} \quad m = \operatorname{tg}\theta = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} \quad \text{ou} \quad m = \operatorname{tg}\theta = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (4.8)$$

$$\text{O coeficiente linear será } b = \frac{x_a y_b - y_a x_b}{x_a - x_b} \quad \text{ou} \quad b = -\frac{\gamma}{\beta}$$

A posição relativa entre duas retas depende de seus coeficientes angulares e lineares.

Supor duas retas  $r$  e  $s$  com seus respectivos coeficientes angulares  $m_r$ ,  $m_s$  e lineares  $b_r$ ,  $b_s$ .

Se  $m_r = m_s$  e  $b_r = b_s$  as retas são coincidentes;

Se  $m_r = m_s$  e  $b_r \neq b_s$  as retas são paralelas;

Se  $m_r \neq m_s$  as retas são concorrentes; e se ainda  $m_r \cdot m_s = -1$  as retas são perpendiculares.

**Exemplo 25.** As retas  $r : 2x + 3y + 9 = 0$  e  $s : 4x + 6y - 2 = 0$  são paralelas, pois  $m_r = -\frac{2}{3} = -0,\bar{6}$  e  $m_s = -\frac{4}{6} = -0,\bar{6}$  e  $b_r = -\frac{9}{3} = -3$  e  $b_s = \frac{2}{6} = 0,\bar{3}$ , ou seja,  $m_r = m_s$  e  $b_r \neq b_s$ . A reta  $t : 3x - 2y + 32 = 0$  é perpendicular às retas  $r$  e  $s$ , pois  $m_r = m_s = -\frac{2}{3}$  e  $m_t = \frac{3}{2}$ , ou seja,  $m_r \cdot m_t = m_s \cdot m_t = -1$  (figura 4.15).

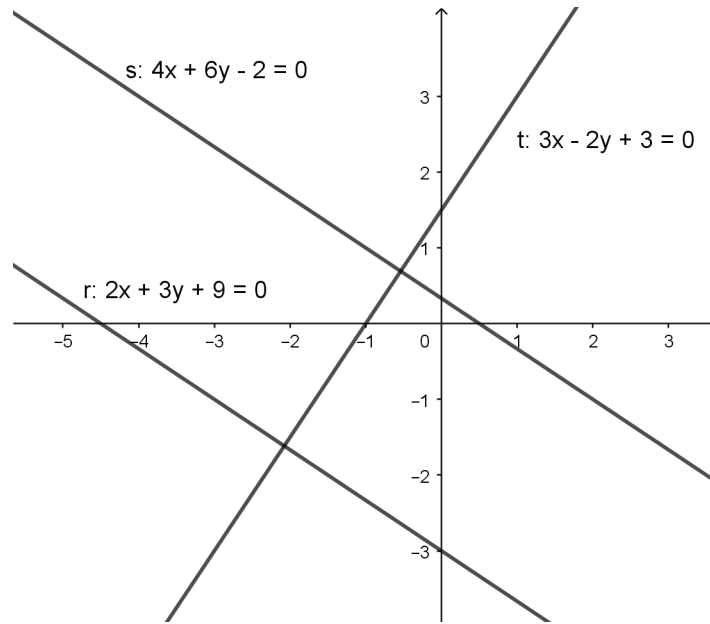


Figura 4.15: Retas Paralelas e retas perpendiculares

#### 4.9. Equação da reta dados os números complexos

Sejam os pontos  $Z_1$ ,  $Z_2$  e um ponto qualquer  $Z$  representados respectivamente pelos números complexos  $z_1 = x + iy_1$ ,  $z_2 = x + iy_2$  e  $z = x + iy$ , teremos como conjugados  $\bar{z}_1 = x - iy_1$ ,  $\bar{z}_2 = x - iy_2$  e  $\bar{z} = x - iy$ . O determinante para encontrar a equação da reta é

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ x_1 + iy_1 & x_1 - iy_1 & 1 \\ x_2 + iy_2 & x_2 - iy_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - iy_1)z + (x_2 + iy_2)\bar{z} + (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) - (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2)z - (x_1 + iy_1)\bar{z} = 0$$

$$[(x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2)]z + [(x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1)]\bar{z} + (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) - (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1) = 0$$

$$[(x_1 - x_2) - i(y_1 - iy_2)]z - [(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)]\bar{z} + 2i(x_2y_1 - x_1y_2) = 0$$

$$[(x_1 - x_2) - i(y_1 - iy_2)]z + [-(x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2)]\bar{z} + 2i(x_2y_1 - x_1y_2) = 0$$

Fazendo

$$A = x_1 - x_2, \quad B = y_1 - y_2, \quad C = x_2y_1 - x_1y_2 \quad (4.9)$$

Assim teremos

$$(A - iB)z - (A + iB)\bar{z} + 2iC = 0 \quad (4.10)$$

e se fizermos

$$\alpha = A + iB, \quad \bar{\alpha} = A - iB \quad \text{e} \quad \gamma = 2iC \quad \text{teremos} \quad (4.11)$$

$$r : \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \gamma = 0 \quad (4.12)$$

que é a equação geral da reta no plano complexo.

#### 4.10. Coeficientes angular e linear

O ângulo que a reta  $r$  (4.12) faz com o eixo  $\Re$  é o mesmo ângulo que o número complexo  $\alpha$  de (4.11) faz com este eixo. Portanto o coeficiente angular da reta (4.12) é o quociente

$$m_r = \frac{B}{A}. \quad (4.13)$$

O ponto em que a reta (4.12) intersecta o eixo  $\Im$ , ou coeficiente linear, é  $-\frac{\gamma}{\alpha + \bar{\alpha}}$  de (4.11).

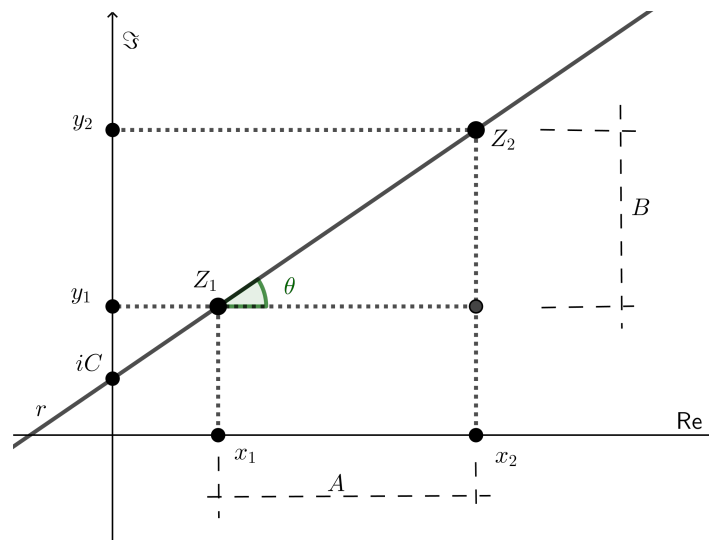


Figura 4.16: Plano Complexo

#### 4.11. Posição relativa entre duas retas

A posição relativa entre duas retas no plano complexo também dependerá de seus coeficientes angulares e lineares e as regras são as mesmas, ou seja,

Se  $m_r = m_s$  e  $cl_r = cl_s$  as retas são coincidentes;

Se  $m_r = m_s$  e  $cl_r \neq cl_s$  as retas são paralelas;

Se  $m_r \neq m_s$  as retas são concorrentes;

Se  $m_r \cdot m_s = -1$  as retas são perpendiculares.

Em relação às retas perpendiculares pode-se concluir, do fato que  $m_r \cdot m_s = -1$  e de (4.13) que  $m_s = -\frac{A}{B}$ . Portanto, o feixe de retas perpendiculares a  $r : (A - iB)z - (A + iB)\bar{z} - \gamma = 0$  será  $s : (B + iA)z - (B - iA)\bar{z} - t\gamma = 0$  em que  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 26.** *Sejam duas retas  $r$  formada pelos afixos  $3 + 4i$  e  $1 + i$  e  $s$  formadas pelos afixos  $3i$  e  $-4 - 3i$ . Vamos calcular seus coeficientes angulares  $m_r$ ,  $m_s$  e lineares  $b_r$ ,  $b_s$ .*

Inicialmente explicitemos as retas  $r$  e  $s$ .

$$r : \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ 3 + 4i & 3 - 4i & 1 \\ 1 + i & 1 - i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$r : [(3 - 1) - i(4 - 1)]z - [(3 - 1) + i(4 - 1)]\bar{z} + 2i(1 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 0$$

$$r : (2 - 3i)z - (2 + 3i)\bar{z} + 2i = 0$$

$$s : \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ 3i & -3i & 1 \\ -4 - 3i & -4 + 3i & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$s : [(0 - (-4)) - i(3 - (-3))]z - [(0 - (-4)) + i(3 - (-3))]\bar{z} + 2i((-4) \cdot 3 - 0 \cdot 3) = 0$$

$$s : (4 - 6i)z - (4 + 6i)\bar{z} - 24i = 0.$$

Temos

$$m_r = \frac{(2 + 3i) - (2 - 3i)}{[(2 + 3i) + (2 - 3i)]i} = \frac{6i}{4i} = \frac{3}{2} \text{ e}$$

$$m_s = \frac{(4 + 6i) - (4 - 6i)}{[(4 + 6i) + (4 - 6i)]i} = \frac{12i}{8i} = \frac{3}{2}$$



$$b_r = \frac{2i}{(2+3i) + (2-3i)} = \frac{2i}{4} = \frac{i}{2}$$

$$b_s = \frac{24i}{(4+6i) + (4-6i)} = \frac{24i}{8} = 3i$$

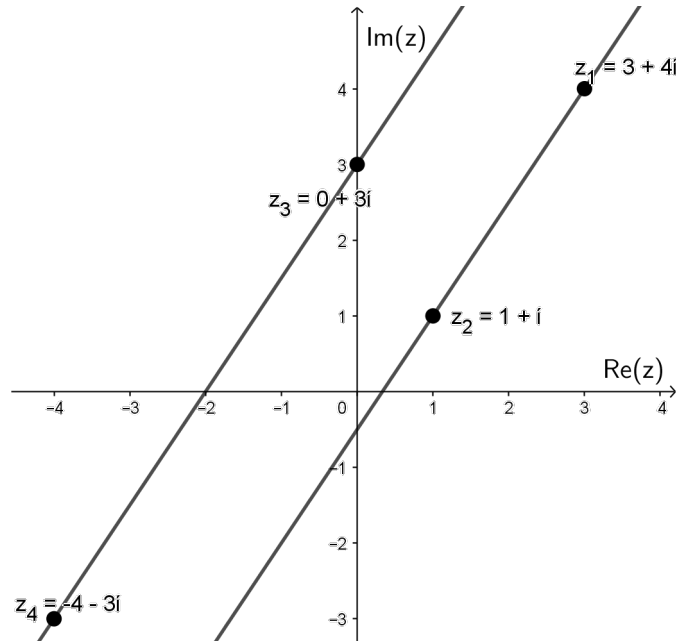


Figura 4.17: Retas Paralelas

Observe que  $m_r = m_s$  e  $b_r \neq b_s$ . Logo as retas são paralelas.

**Exemplo 27.** Vamos verificar a posição relativa das retas  $r$  e  $s$  formadas pelos pontos  $3 + 4i$  e  $1 + i$  e pelos pontos  $2 + i$  e  $-1 + 3i$ , respectivamente.

Solução:

Com (4.10) podemos calcular as retas  $r$  e  $s$ .

$$r : ((3-1) - i(4-1))z - ((3-1) + i(4-1))\bar{z} + 2i(1 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 0$$

$$(2-3i)z - (2+3i)\bar{z} + 2i(4-3) = 0$$

$$(2-3i)z - (2+3i)\bar{z} + 2i = 0$$

$$s : ((2-(-1)) - i(1-3))z - ((2-(-1)) + i(1-3))\bar{z} + 2i((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 3) = 0$$

$$(3+2i)z - (3-2i)\bar{z} + 2i(-1-6) = 0$$

$$(3+2i)z - (3-2i)\bar{z} - 14i = 0$$

Com (4.13) pode calcular os coeficientes angulares.

$$m_r = \frac{3}{2} \text{ e } m_s = \frac{-2}{3}$$

Como  $\frac{3}{2} \cdot \frac{-2}{3} = -1$  as retas são perpendiculares.

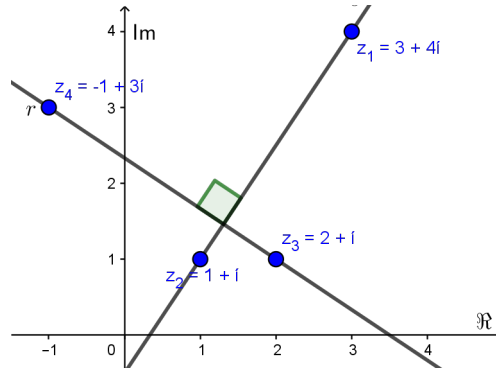


Figura 4.18: Retas perpendiculares

#### 4.12. Equação da reta paralela

**Proposição 8.** *Considere  $r$  a reta que passa pelos pontos  $z_1$  e  $z_2$ . Considere também os pontos  $z$  e  $z_3$ , pontos não pertencentes a  $r$ , e a reta  $s$  determinada por eles. Se  $s$  for paralela a  $r$  sua equação será determinada por:*

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \quad (4.14)$$

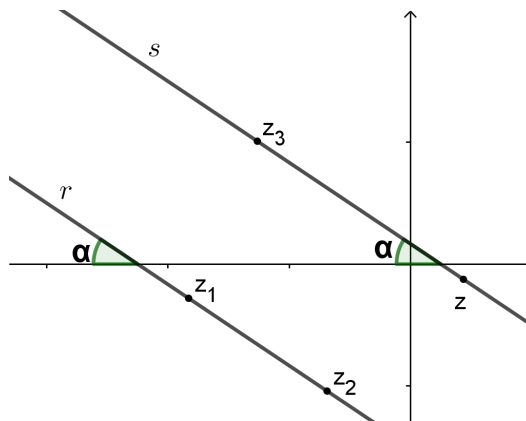


Figura 4.19: Retas Paralelas

*Demonstração.* Os vetores  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  e  $\overrightarrow{z_3 z}$  são paralelos, portanto tem-se  $z - z_3 = \lambda(z_2 - z_1)$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , ou seja,  $\lambda = \frac{z - z_3}{z_2 - z_1}$ . Outra informação importante é que o conjugado de um número real é o próprio número. Então

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = \overline{\left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} \right)} \iff \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$$

□

Continuando o desenvolvimento da equação ainda teremos

$$\iff z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) = \bar{z}(z_2 - z_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1)$$

$$\iff z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_1 - z_2) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_1 - z_2) = 0$$

Se  $A = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$  e  $B = -z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_1 - z_2)$  a equação pode ser escrita como

$$Az - \bar{A}\bar{z} + B = 0$$

**Exemplo 28.** A equação da reta  $s$  que passa pelo ponto  $z_3 = (-1, 4)$  e é paralela à reta  $r$  que passa pelos pontos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  é  $z(-3, 1) + \bar{z}(3, 1) + (0, -26) = 0$  pois

$$\begin{aligned} & z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_1 - z_2) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_1 - z_2) = 0 \iff \\ \iff & z((4, -2) - (1, -1)) + \bar{z}((1, 1) - (4, 2)) - (-1, 4)((4, -2) - (1, -1)) - (-1, -4)((1, 1) - \\ & (4, 2)) = 0 \iff \\ \iff & z(3, -1) - \bar{z}(3, 1) + (0, -26) = 0 \end{aligned}$$

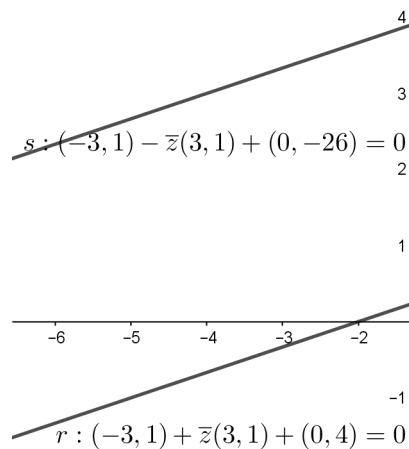


Figura 4.20: Retas paralelas

#### 4.13. Equação da mediatriz de um segmento

**Proposição 9.** Considere a reta  $r$  determinada por  $z_1$  e  $z_2$  e a reta  $s$  determinada por  $z_3$  e  $z_4$ . Elas são perpendiculares se, e somente se,  $\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$  tem parte real nula.

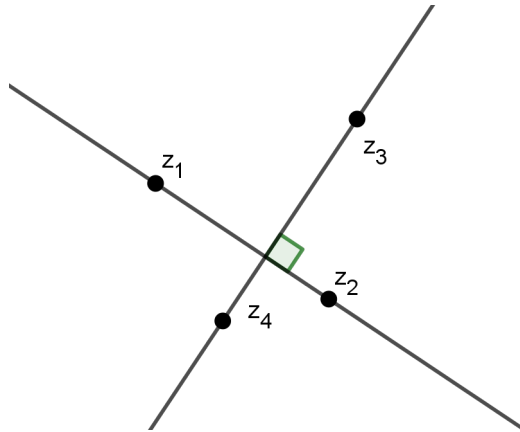


Figura 4.21: retas perpendiculares

Façamos inicialmente os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} &= \frac{(z_4 - z_3)}{(z_2 - z_1)} \cdot \frac{(\overline{z_2 - z_1})}{(\overline{z_2 - z_1})} = \frac{(x_4 - x_3, y_4 - y_3) \cdot (x_2 - x_1, y_1 - y_2)}{|z_2 - z_1|^2} = \\ &= \frac{((x_4 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_4 - y_3)(y_2 - y_1); (x_2 - x_1)(y_4 - y_3) + (x_4 - x_3)(y_1 - y_2))}{|z_2 - z_1|^2} \\ &= \left( \frac{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_4 - y_3)(y_2 - y_1)}{|z_2 - z_1|^2}; \frac{(y_4 - y_3)(x_2 - x_1) - (x_4 - x_3)(y_1 - y_2)}{|z_2 - z_1|^2} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Chamando de  $u$  a reta que passa por  $z_1$  e  $z_2$  e  $v$  a retas que passa por  $z_3$  e  $z_4$ . Pela geometria analítica se as retas são perpendiculares  $\langle u, v \rangle = 0$ . Então  $\langle (x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_4 - x_3, y_4 - y_3) \rangle = 0$  e

$$(x_2 - x_1) \cdot (x_4 - x_3) + (y_2 - y_1) \cdot (y_4 - y_3) = 0 \quad (4.16)$$

Comparando 4.16, e a parte real de 4.15 observa-se que os resultados são iguais.

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ )

O resultado de 4.16 implica que o numerador da parte real de 4.15 é nula.

( $\Rightarrow$ )

O fato do resultado de 4.15 ser nulo implica que em 4.16 o produto interno dos vetores é nulo e, portanto, pela geometria analítica, as retas são perpendiculares.  $\square$

**Exemplo 29.** Mostre que se verifica a Proposição 9 para os pontos  $A = (1, 4)$ ,  $B = (6, 1)$ ,  $c = (4, 4)$  e  $A = (1, -1)$ , respectivamente.

Solução:

Devemos verificar apenas se verifica o resultado  $(x_d - x_c)(x_b - x_a) + (y_d - y_c)(y_b - y_a) = 0$ .

Temos

$$(1 - 4)(6 - 1) + (-1 - 4)(1 - 4) = 0$$

$$(-3)(5) + (-5)(-3) = 0$$

$$-15 + 15 = 0$$

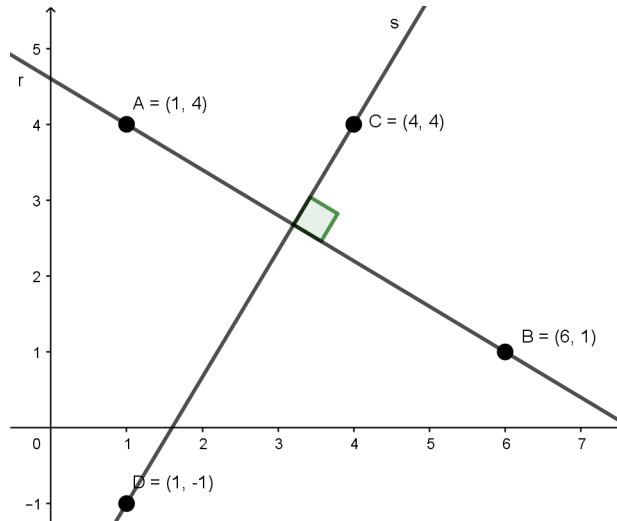


Figura 4.22: Retas perpendiculares

Portanto, as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares.

**Proposição 10.** *Sejam as retas  $r$ , formada pelos pontos fixos  $z_1$  e  $z_2$ , e  $s$  formada pelo ponto fixo  $z_3$  e pelo ponto qualquer  $z$ . As retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares se*

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0$$

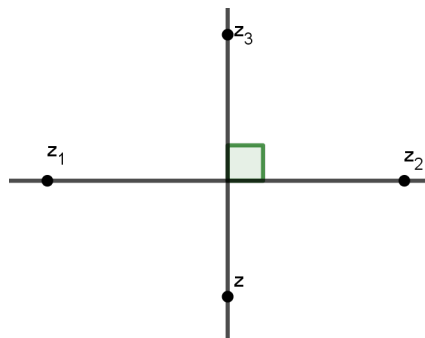


Figura 4.23: Retas perpendiculares

*Demonstração.* Se as retas são perpendiculares, então  $\overrightarrow{z_1 z_2} \perp \overrightarrow{z_3 z}$ . Pela Proposição 9 o número complexo  $\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}$  e seu conjugado têm parte real nula. Mas o conjugado de um número complexo cuja parte real é nula é o oposto desse número. Portanto temos:

$$\begin{aligned} \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} &= -\overline{\left(\frac{z - z_3}{z_2 - z_1}\right)} \iff \\ \iff \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} &= -\left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}\right) \iff \\ \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

Observação:

$$\begin{aligned} \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} &= 0 \\ \iff \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} &= \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} \\ \iff z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1) &= 0 \end{aligned}$$

Se fizermos  $A = \bar{z}_2 - \bar{z}_1$  e  $B = -z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1)$  esta equação pode ser escrita como

$$Az + \bar{A}\bar{z} + B = 0$$

**Exemplo 30.** Dados os números complexos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  e  $z_3 = (-1, 4)$  e as retas  $r$ , formada por  $z_1$  e  $z_2$ , e  $s$  formada por  $z_3$  e  $z$ , determinar  $z = (x, y)$  de forma que as retas sejam perpendiculares.

Pela Proposição 10 temos  $\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{(x, y) - (-1, 4)}{(4, 2) - (1, 1)} + \frac{(x, -y) - (-1, -4)}{(4, -2) - (1, -1)} &= 0 \iff \frac{(x + 1, y - 4)}{(3, 1)} + \frac{(x + 1, -y + 4)}{(3, -1)} = 0 \\ \left(\frac{(x + 1)3 + (y - 4)1, (x + 1)1 - 3(y - 4)}{3^2 + 1^2}\right) + \left(\frac{(x + 1)3 + (-y + 4)(-1), (x + 1)(-1) - 3(-y + 4)}{3^2 + (-1)^2}\right) &= 0 \\ \left(\frac{3x + y - 1, x - 3y + 13}{10}\right) + \left(\frac{3x + y - 1, -x + 3y - 13}{10}\right) &= 0 \\ \left(\frac{6x + 2y - 2, 0}{10}\right) &= 0 \end{aligned}$$

se isolarmos o  $y$  e atribuindo o parâmetro  $\lambda$  para  $x$  teremos um sistema de equações indeterminado com a solução  $z = (x, y) = (\lambda, -3\lambda + 1) = (0, 1) + \lambda(1, -3)$

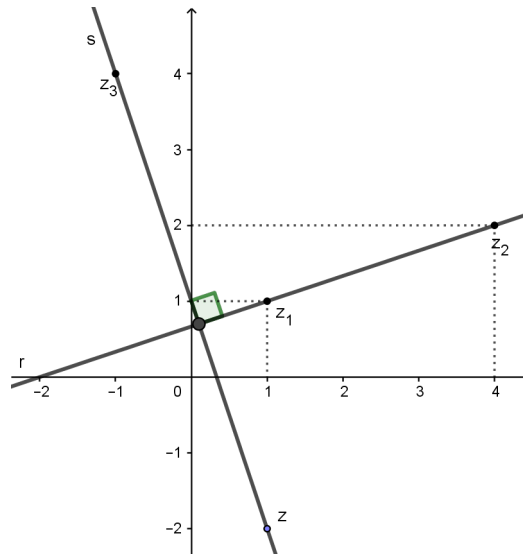


Figura 4.24: Retas perpendiculares

**Definição 2.** *Mediatriz do segmento é a reta que passa pelo seu ponto médio.*

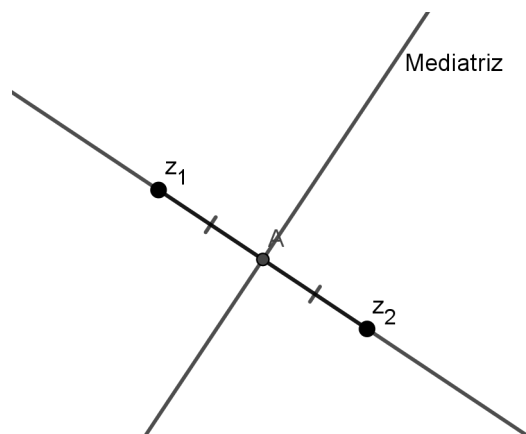


Figura 4.25: Mediatriz de um segmento

**Proposição 11.** *Dados os pontos  $z_1$  e  $z_2$  e o segmento formado por eles. A equação de sua mediatriz é:*

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2$$

*Demonstração.* A equação  $z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)$  é da reta que passa por  $z_3$  e é perpendicular à reta determinada por  $z_1$  e  $z_2$ . Como a mediatriz de um segmento é perpendicular a ele em seu ponto médio podemos fazer  $z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2}$  como o ponto médio do segmento determinado por  $z_1$  e  $z_2$ . Substituindo esta equação anterior, tem-se:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{2}\right)(z_2 - z_1) \iff$$

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = \frac{z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + \bar{z}_1z_2 - \bar{z}_1z_1 + \bar{z}_2z_2 - \bar{z}_2z_1}{2} \iff$$

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 \iff$$

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 \quad \square$$

**Exemplo 31.** Determine a equação da mediatriz do segmento de extremos  $z_1 = (1, 1)$  e  $z_2 = (4, 2)$ .

Pela proposição 11 temos

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2$$

$$z((4, -2) - (1, -1)) + \bar{z}((4, 2) - (1, 1)) = (4^2 + 2^2) - (1^2 + 1^2)$$

$$z(3, -1) + \bar{z}(3, 1) - 18 = 0$$

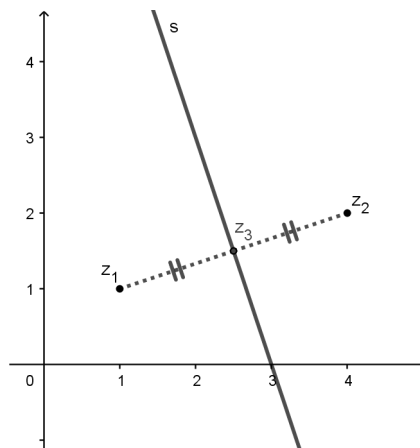


Figura 4.26: Mediatriz de um segmento

#### 4.14. Equação da circunferência

**Definição 3.** Seja  $C$  um ponto do plano  $\alpha$  e  $R$  certa distância. Define-se como circunferência de centro  $C$  e raio  $R$  o lugar geométrico dos pontos que estão à distância  $R$  de  $C$ .



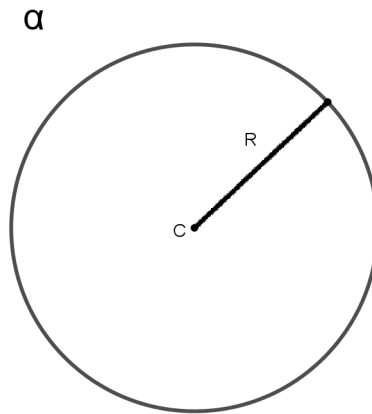


Figura 4.27: Circunferência de centro C e raio R

**Proposição 12.** *Considerando três pontos não-colineares  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , a a circunferência que passa por estes pontos tem como equação*

$$A(z - z_1) + \bar{A}(\bar{z} - \bar{z}_1) = B \cdot (|z|^2 - |z_1|^2)$$

sendo  $A = (|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)$  e  $B = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)$ .

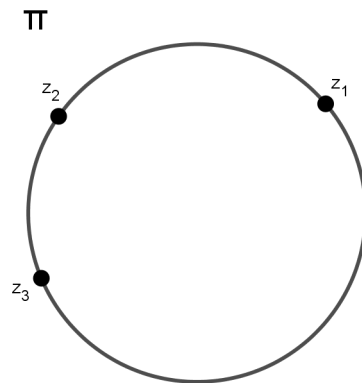


Figura 4.28: Circunferência dados três pontos

*Demonstração.* Seja a circunferência com centro  $z_0$  e raio  $R$ .

$$|z_1 - z_0| = R \Rightarrow |z_1 - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = (z_1 - z_0) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)$$

$$|z_2 - z_0| = R \Rightarrow |z_2 - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = (z_2 - z_0) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_0)$$

$$|z_3 - z_0| = R \Rightarrow |z_3 - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow R^2 = (z_3 - z_0) \cdot (\bar{z}_3 - \bar{z}_0)$$

Partindo de tais igualdades teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (z_1 - z_0) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = (z_2 - z_0) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_0) \\ (z_1 - z_0) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_0) = (z_3 - z_0) \cdot (\bar{z}_3 - \bar{z}_0) \\ z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_1 + z_0 \bar{z}_0 = z_2 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_2 + z_0 \bar{z}_0 \\ z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_1 + z_0 \bar{z}_0 = z_3 \bar{z}_3 - z_3 \bar{z}_0 - z_0 \bar{z}_3 + z_0 \bar{z}_0 \\ (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z_0 + (z_2 - z_1)\bar{z}_0 = |z_2|^2 - |z_1|^2 \\ (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)z_0 + (z_3 - z_1)\bar{z}_0 = |z_3|^2 - |z_1|^2 \end{cases}$$

Considerando que os pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  não são colineares e desenvolvendo os devidos cálculos chega-se à seguinte solução:

$$z_0 = \frac{(|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)} \quad (4.17)$$

$$\bar{z}_0 = \frac{(|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)} \quad (4.18)$$

Seja  $z$  um ponto qualquer da circunferência. Então

$$\begin{aligned} |z - z_0| = |z_1 - z_0| &\iff |z - z_0|^2 = |z_1 - z_0|^2 \iff (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = (z_1 - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) \\ &\iff z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_0 - z_0\bar{z}_1 + z_0\bar{z}_0 \iff \\ &\iff (\bar{z}_1 - \bar{z})z_0 + (z_1 - z)\bar{z}_0 = z_1\bar{z}_1 - z\bar{z} \end{aligned}$$

Substituindo 4.17 e 4.18 na equação anterior teremos

$$\begin{aligned} &(\bar{z}_1 - \bar{z}) \frac{(|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)} + \\ &(z_1 - z) \frac{(|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)} = z_1\bar{z}_1 - z\bar{z} \iff \\ &\iff (\bar{z}_1 - \bar{z}) [ (|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1) ] + \\ &(z_1 - z) [ (|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) ] = \\ &(z_1\bar{z}_1 - z\bar{z}) [ (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) ] \iff \\ &\iff [ (|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) ] (z - z_1) - \\ &[ (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) ] (\bar{z} - \bar{z}_1) = \\ &[ (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) ] (|z|^2 - |z_1|^2) \end{aligned}$$

Assim, a equação da circunferência passando pelos pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  é determinada por  $A(z - z_1) - \bar{A}(\bar{z} - \bar{z}_1) = B(|z|^2 - |z_1|^2)$ , com:

$$A = (|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)$$

$$B = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) \quad \square$$

A equação também pode ser escrita em função do centro  $z_0$  e da medida de seu do raio  $R$ . Assim, sendo  $z$  um ponto qualquer da circunferência, temos:

$$|z - z_0| = R \iff |z - z_0|^2 = R^2 \iff (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2$$

**Exemplo 32.** *Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos  $(1, 1)$ ,  $(4, 2)$  e  $(-1, 4)$ .*

Utilizando 12, calculamos

$$A = (|z_3|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)$$

$$A = (|(-1, 4)|^2 - |(1, 1)|^2)((4, -2) - (1, -1)) - (|(4, 2)|^2 - |(1, 1)|^2)((-1, -4) - (1, -1)) = (84, 38)$$

$$B = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1)$$

$$B = ((4, -2) - (1, -1))((-1, 4) - (1, 1)) - ((-1, -4) - (1, -1))((4, 2) - (1, 1)) = (0, 22)$$

Substituindo os valores de  $A, B$ , temos

$$(84, 38)(z - (1, 1)) + (84, -38)(\bar{z} - (1, -1)) = (0, 22)(|z|^2 - 2)$$

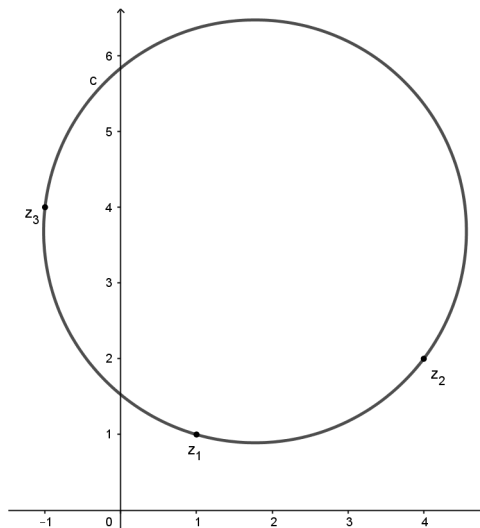


Figura 4.29: Circunferência passando por  $(1, 1)$ ,  $(4, 2)$  e  $(-1, 4)$

**Proposição 13.** *Na equação  $Az + \bar{A}\bar{z} + B + \gamma|z|^2 = 0$ , dependendo dos valores de  $\gamma$ , poderemos ter uma reta ou uma circunferência. Se  $\gamma = 0$  temos uma reta e se  $\gamma \neq 0$  temos uma circunferência. Como observação, temos  $B\gamma < |A|^2$ .*

*Demonstração.* Da equação da mediatriz do segmento  $z_0z_1$  temos

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + \bar{z}(z_1 - z_0) = |z_1|^2 - |z_0|^2$$

Se  $A = \bar{z}_1 - \bar{z}_0$  e  $B = |z_0|^2 - |z_1|^2$  a equação anterior pode ser escrita como:

$$Az + \bar{A}\bar{z} + B = 0$$

Na equação da circunferência sendo  $z_0$  seu centro temos

$$\begin{aligned} (z - z_0) \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 &\iff z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2 \iff \\ \iff -\bar{z}_0z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - R^2 + |z|^2 = 0 \end{aligned}$$

Sendo  $\alpha = -\bar{z}_0$  e  $\beta = z_0\bar{z}_0 - R^2$ , temos:

$$\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta + |z|^2 = 0, \text{ com } \beta = z_0\bar{z}_0 - R^2 = |z_0|^2 - R^2 = |\alpha|^2 - R^2 \implies \beta < |\alpha|^2$$

Multiplicando  $\gamma \neq 0$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  teremos:

$$\alpha\gamma z + \bar{\alpha}\gamma\bar{z} + \beta\gamma + \gamma|z|^2 = 0$$

Fazendo  $\alpha\gamma = A$ ,  $\bar{\alpha}\gamma = \bar{A}$  e  $\beta\gamma = B$ , obtemos:

$$Az + \bar{A}\bar{z} + B + \gamma|z|^2 = 0$$

Assim:

- Se  $\gamma = 0$ , é equação de uma reta.
- Se  $\gamma \neq 0$ , é equação de uma circunferência e deve-se dividir por  $\gamma$ .

Como  $\frac{A}{\gamma} = \alpha$ ,  $\frac{\bar{A}}{\gamma} = \bar{\alpha}$  e  $\frac{B}{\gamma} = \beta$ , temos o seguinte

$$\beta < |\alpha|^2 \implies \frac{B}{\gamma} < \left|\frac{A}{\gamma}\right|^2 \implies \frac{B}{\gamma} < \frac{|A|^2}{\gamma} \implies B\gamma < |A|^2 \quad \square$$

#### 4.14.1. Equação da circunferência dados o centro e o raio

Dados um ponto fixo  $C(a, b)$  representado pelo número complexo  $c = a + bi$  e uma distância  $\rho$  no plano complexo. O lugar geométrico dos pontos  $Z(x, y)$  representados pelo número complexo  $z = x + iy$  que estão à distância  $\rho$  de  $C$  é uma circunferência. Em coordenadas cartesianas a equação é caracterizada por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2.$$

Pela definição de módulo, e como a distância entre  $Z$  e  $C$  é sempre a mesmo, o lado esquerdo da igualdade pode ser escrito como  $|z - c|^2 = (z - c)(\bar{z} - \bar{c})$ [6]. Assim, obtemos a equação da circunferência

$$z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + c\bar{c} - \rho^2 = 0. \quad (4.19)$$

Observação: Se o ponto  $C$  estiver na origem, a equação (4.19) será

$$z\bar{z} - \rho^2 = 0 \quad \iff \quad z\bar{z} = \rho^2.$$

**Exemplo 33.** *Determine a equação da circunferência de centro  $c = 2 - i$  e raio  $\rho = 5$ .*

Solução: Pela equação (4.19) teremos

$$z\bar{z} - (2 + i)z - (2 - i)\bar{z} + (2 - i)(2 + i) - 5^2 = 0$$

$$z\bar{z} - (2 + i)z - (2 - i)\bar{z} + 5 - 25 = 0$$

$$z\bar{z} - (2 + i)z - (2 - i)\bar{z} - 20 = 0.$$

## 5. Aplicação à Geometria plana

### 5.1. Área de um triângulo

**Definição 4.** Dados os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , o **produto escalar** de  $z_1$  por  $z_2$  é  $\langle z_1, z_2 \rangle = \Re(\bar{z}_1 \cdot z_2)$  [7].

Em termos de coordenadas cartesianas fazemos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  e teremos:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \Re(\bar{z}_1 \cdot z_2)$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \Re \left[ \overline{(x_1, y_1)} \cdot (x_2, y_2) \right]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \Re [(x_1, -y_1) \cdot (x_2, y_2)]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \Re [(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

**Proposição 14.** Sejam os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ . Seu produto escalar é:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2}(z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

*Demonstração.* Fazendo  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , tem-se:

$$\frac{1}{2}(z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2) = \frac{1}{2}((x_2, y_2) \cdot (x_1, -y_1) + (x_1, y_1) \cdot (x_2, -y_2)) =$$

$$\frac{1}{2}(x_2 \cdot x_1 - y_2 \cdot (-y_1), x_2 \cdot (-y_1) + x_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot (-y_2), x_1 \cdot (-y_2) + x_2 \cdot y_1) =$$

$$\frac{1}{2}(x_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot y_1, -x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, -x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) =$$

$$\frac{1}{2}(2(x_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot y_1), 0) = \Re R(\bar{z}_1 \cdot z_2) = \langle z_1, z_2 \rangle \quad \square$$

**Proposição 15.** Sejam os vetores  $z_1$  e  $z_2$  e  $\alpha$ , com  $0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ , o menor dos ângulos formado por estes vetores. O produto escalar de  $z_1$  e  $z_2$  é:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha$$

*Demonstração.* Da lei dos cossenos, temos

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \iff$$

$$(z_2 - z_1) \cdot (\overline{z_2 - z_1}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \iff$$

$$(z_2 - z_1) \cdot (\overline{z_2} - \overline{z_1}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \iff$$

$$z_2 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \iff$$

$$|z_2|^2 - z_2 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} + |z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \iff$$

$$-z_2 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} = -2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \iff$$

$$\frac{1}{2}(z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha \iff$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha. \quad \square$$

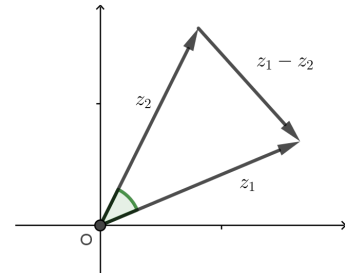


Figura 5.1: Triângulo formado por  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_1 - z_2$

**Exemplo 34.** Calcule o ângulo formado pelos vetores  $z_1 = (1, 1)$  e  $z_2 = (4, 2)$ .

Pelas proposições 14 e 15 temos

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2}(z_2 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2})$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha$$

Cálculos de  $\langle z_1, z_2 \rangle$ :

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2} [(4, 2) \cdot (1, -1) + (1, 1) \cdot (4, -2)]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2} [(4, 2) \cdot (1, -1) + (1, 1) \cdot (4, -2)]$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = (6, 0) = 6$$

Cálculos de  $|z_1|$  e  $|z_2|$ :

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|z_2| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

Cálculos do ângulo  $\alpha$ :

$$\alpha = \arccos \frac{6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20}} \approx 18,43^\circ$$

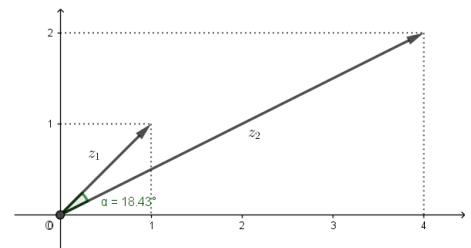


Figura 5.2: Ângulo entre  $z_1$  e  $z_2$

**Proposição 16.** Os vetores relacionados aos números complexos não nulos  $z_1$  e  $z_2$  são ortogonais se, e somente se,  $\langle z_1, z_2 \rangle = 0$ .

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Os números complexos são ortogonais, então  $\alpha = 90^\circ \implies \cos \alpha = 0 \implies \langle z_1, z_2 \rangle = 0$ .

( $\impliedby$ )  $\langle z_1, z_2 \rangle = 0 \implies |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos \alpha = 0$ . Como  $|z_1| \neq 0$  e  $|z_2| \neq 0$  (pois  $z_1$  e  $z_2$  são não nulos)  $\implies \cos \alpha = 0 \implies \alpha = 90^\circ \quad \square$

**Definição 5.** O *produto vetorial* entre os vetores associados aos números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , indicado por  $z_1 \times z_2$ , é definido por

$$z_1 \times z_2 = \Im(\bar{z}_1 \cdot z_2)$$

Se  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ , temos:

$$z_1 \times z_2 = \Im(\bar{z}_1 \cdot z_2)$$

$$z_1 \times z_2 = \Im[(\overline{x_1, y_1}) \cdot (x_2, y_2)]$$

$$z_1 \times z_2 = \Im[(x_1, -y_1) \cdot (x_2, y_2)]$$

$$z_1 \times z_2 = \Im[(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)]$$

$$z_1 \times z_2 = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$$

**Proposição 17.** O *produto vetorial* entre os vetores associados aos números complexos  $z_1$  e  $z_2$  é:

$$z_1 \times z_2 = \frac{1}{2i} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

*Demonstração.* Fazendo  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2) &= \frac{1}{2i} \cdot [(x_2, y_2) \cdot (x_1, -y_1) - (x_1, y_1) \cdot (x_2, -y_2)] = \\ \frac{1}{2i} \cdot [(x_2 \cdot x_1 + y_2 \cdot y_1, -x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, -x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)] &= \\ \frac{1}{2i} \cdot [2(0, -x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2)] &= x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot (-y_1) = \Im(\bar{z}_1 \cdot z_2) = z_1 \times z_2 \quad \square \end{aligned}$$

**Proposição 18.** Considere  $\alpha$  o menor dos ângulos ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) formado pelos vetores  $z_1$  e  $z_2$ . O módulo de  $z_1 \times z_2$  é dado por

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha$$

*Demonstração.* Considere  $|z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha$ . Este número será não negativo, pois é produto de dois módulos e do seno de um ângulo no primeiro ou no segundo quadrante ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ). Então

$|z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha \geq 0 \iff |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha \geq 0$ . Logo podemos desenvolver o seguinte cálculo:

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \cos^2 \alpha$$



$$\begin{aligned}
&= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - \langle z_1, z_2 \rangle^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - \left( \frac{1}{2}(z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2) \right)^2 \\
&= |z_1 \cdot z_2|^2 - \left( \frac{1}{4}(z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 + \frac{1}{4} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 \right) \\
&= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) - \frac{1}{4} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 - \frac{1}{4} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 \\
&= z_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 - \frac{1}{4} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 - \frac{1}{4} \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 \\
&= -\frac{1}{4} \cdot [(z_2 \cdot \bar{z}_1)^2 - 2 \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1)(z_1 \cdot \bar{z}_2) + (z_1 \cdot \bar{z}_2)^2] = \frac{1}{4i^2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2)^2
\end{aligned}$$

Portanto:

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{4i^2} \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2)^2 \iff (|z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha)^2 = (z_1 \times z_2)^2 \iff$$

$$\iff |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha = |z_1 \times z_2| \iff |z_1 \times z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha. \quad \square$$

**Proposição 19.** *O módulo do produto vetorial de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  corresponde à área do paralelogramo cujos lados são determinados por estes números complexos (figura 5.3).*

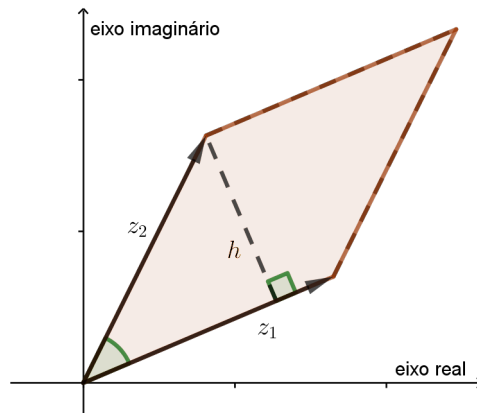


Figura 5.3: Paralelogramo formado por  $z_1$  e  $z_2$

*Demonstração.* Consideremos  $\text{sen} \alpha = \frac{h}{|z_2|} \iff h = |z_2| \cdot \text{sen} \alpha$ .

A área do paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura. Se  $S$  for sua área,  $z_1$  for a base e  $h$  altura temos:

$$S = |z_1| \cdot h = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen} \alpha = |z_1 \times z_2|. \quad \square$$

**Proposição 20.** *Sejam os números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  vértices de um triângulo. A área  $S$  é dada por:*

$$S = \frac{1}{4} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{array} \right\| \quad (5.1)$$

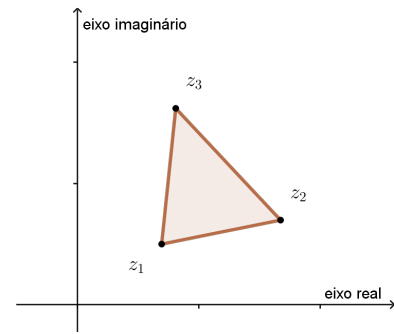


Figura 5.4: Triângulo dados três pontos

*Demonstração.* Considere o paralelogramo determinado pelos vetores  $z_1 - z_2$  e  $z_1 - z_3$ . Considere o fato da área do triângulo ser a metade da área do paralelogramo e a proposições 17 e 19.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(z_2 - z_1) \times (z_3 - z_1)| \\ S &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{2i} \cdot \left[ (z_3 - z_1) \cdot \overline{(z_2 - z_1)} - (z_2 - z_1) \cdot \overline{(z_3 - z_1)} \right] \right| \\ S &= \frac{1}{4i} \cdot \left| [(z_3 - z_1) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - (z_2 - z_1) \cdot (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)] \right| \\ S &= \frac{1}{4i} \cdot \left| [(z_1 - z_3) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)] \right| \\ S &= \frac{1}{4i} \cdot |z_1 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_2 - z_3 \cdot \bar{z}_1 + z_3 \cdot \bar{z}_2 - z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_3 + z_2 \cdot \bar{z}_1 - z_2 \cdot \bar{z}_3| \\ S &= \frac{1}{4i} \cdot |-z_1 \cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot \bar{z}_3 + \bar{z}_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot \bar{z}_3 + \bar{z}_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot \bar{z}_1 - z_1 \cdot \bar{z}_1| \\ S &= \frac{1}{4} \cdot |z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot \bar{z}_3 - \bar{z}_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot \bar{z}_3 - \bar{z}_2 \cdot z_3| \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{4} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{array} \right\|$$

□

**Exemplo 35.** Determine a área do triângulo determinado pelos números complexos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  e  $z_3 = (-1, 4)$  utilizando a equação 5.1.

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} |(1, 1)(4, -2) + (1, -1)(-1, 4) + (4, 2)(-1, -4) - (1, -1)(4, 2) - (1, 1)(-1, -4) - \\ & (4, -2)(-1, 4)| \\ S &= \frac{1}{4} |(6, 2) + (3, 5) + (4, -18) - (6, -2) - (3, -5) - (4, 18)| \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{4}|(0, 22)| = \frac{1}{4}\sqrt{0^2 + 22^2} = \frac{1}{4}\sqrt{22^2} = \frac{22}{4} = 5,5u^2$$

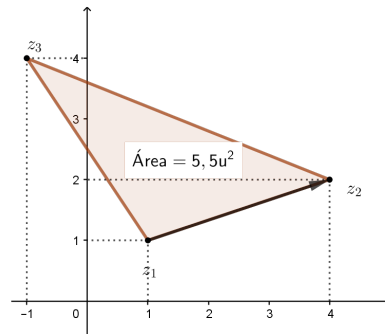


Figura 5.5: Área=5,5u<sup>2</sup>

## 5.2. Classificação de triângulos

A classificação dos triângulos pode ser em relação aos lados e em relação aos ângulos.

### 5.2.1. Em relação aos lados

Para classificar em relação aos lados, deve-se calcular as distâncias  $\overline{Z_1Z_2}$ ,  $\overline{Z_1Z_3}$  e  $\overline{Z_2Z_3}$ .

- Se as três distâncias forem iguais, o triângulo é equilátero.
- Se duas distâncias forem iguais, o triângulo é isósceles.
- Se as três distâncias forem distintas, o triângulo é escaleno.

### 5.2.2. Em relação aos ângulos

Para classificar em relação aos ângulos, deve-se calcular os argumentos formados pelos lados  $\overline{Z_1Z_2}$ ,  $\overline{Z_1Z_3}$  e  $\overline{Z_2Z_3}$ .

- Se os três valores forem  $t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  os três ângulos são 60° e o triângulo é equilátero.
- Se dois argumentos forem iguais, o triângulo é isósceles.
- Se os três argumentos forem distintos, o triângulo é escaleno.
- Se um dos valores for  $t = i$ , o triângulo é retângulo neste vértice.

### 5.3. Rotação de ângulos

Vimos em (3.9) que no produto de dois números complexos *o módulo do produto é o produto dos módulos dos fatores e o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores*. Se um dos fatores for o complexo unitário  $w = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$  o módulo do produto será o mesmo e o ângulo será rotacionado pelo ângulo  $\theta$ . Assim, para rotacionar um vetor  $\vec{OA}$  por um ângulo  $\theta$  até o vetor  $\vec{OB}$  basta aplicar

$$\vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

**Exemplo 36.** *Rotacione o ponto  $z_1 = \sqrt{3} + i$  em  $120^\circ$  no sentido anti-horário.*

$$\theta = 120^\circ \implies \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \quad e \quad \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \varphi = 30^\circ \\ \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \end{cases}$$

Então  $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \implies z_2 = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$

$$z_2 = 2(\cos(30^\circ + 120^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + 120^\circ)) = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$$

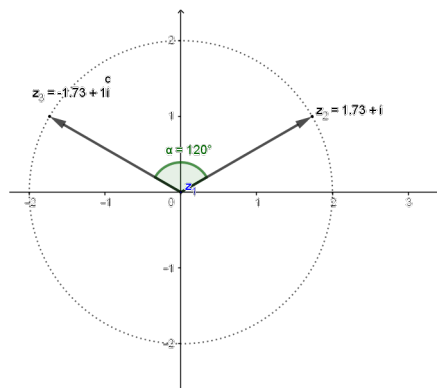


Figura 5.6: Rotação de  $\sqrt{3} + i$  em  $120^\circ$

### 5.4. Área de triângulos

Da geometria analítica no plano cartesiano sabe-se que a área de um triângulo formado por três pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  e  $P_3 = (x_3, y_3)$ , é o cálculo da metade

do resultado determinante formado por estes pontos.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Para calcular a área do triângulo no plano complexo, escreve-se as coordenadas cartesianas em termos de números complexos  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  e seus respectivos afijos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ .

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} & \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} & \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \frac{z_3 + \bar{z}_3}{2} & \frac{z_3 - \bar{z}_3}{2i} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} + \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \frac{z_3 + \bar{z}_3}{2} + \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \frac{z_3 - \bar{z}_3}{2i} \right) - \left( \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} \frac{z_3 + \bar{z}_3}{2} + \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} \frac{z_3 - \bar{z}_3}{2i} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} \right) \right] \\ S_{\Delta} &= \frac{1}{8i} ((z_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_1 \bar{z}_2) + (z_1 z_3 + z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3 - \bar{z}_1 \bar{z}_3) + (z_2 z_3 - z_2 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3 - \bar{z}_2 \bar{z}_3) \\ &\quad - (z_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 - \bar{z}_1 \bar{z}_2) - (z_1 z_3 + \bar{z}_1 z_3 - z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 \bar{z}_3) - (z_2 z_3 + z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3 - \bar{z}_2 \bar{z}_3) \\ S_{\Delta} &= \frac{1}{8i} (2(-z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + 2(z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_3) + 2(-z_2 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3)) \\ S_{\Delta} &= \frac{1}{4i} (\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_3 - z_2 \bar{z}_3) \\ S_{\Delta} &= \frac{i}{4} (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_3 + z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3), \end{aligned}$$

ou seja, este resultado é o mesmo que

$$S_{\Delta} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Este determinante também pode ser colocado na forma

$$S_{\Delta} = \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \right).$$

**Exemplo 37.** Calcule a área do triângulo formado pelos pontos  $z_1 = -2 + 3i$ ,  $z_2 = 1 + i$  e  $z_3 = 3 + 4i$ .

$$S_{\Delta} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} -2 + 3i & -2 - 3i & 1 \\ 1 + i & 1 - i & 1 \\ 3 + 4i & 3 - 4i & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_{\Delta} = \frac{i}{4} \cdot ((-2 + 3i)(1 - i) + (1 + i)(3 - 4i) + (3 + 4i)(-2 - 3i) - (1 - i)(3 + 4i) - (-2 + 3i)(3 - 4i) - (1 + i)(-2 - 3i))$$

$$S_{\Delta} = \frac{i}{4} \cdot ((1 + 5i) + (7 - i) + (6 - 17i) - (1 - 5i) - (7 + i) - (6 + 17i))$$

$$S_{\Delta} = \frac{i}{4} \cdot (5i - i - 17i + 5i - i - 17i) = \frac{i}{4}(-26i) = \frac{13}{2}.$$

### 5.5. Área de polígonos convexos

Um polígono convexo de  $n$  lados pode ser dividido em  $n - 2$  triângulos (figura 5.7).

A soma das áreas destes triângulos é a área do polígono.

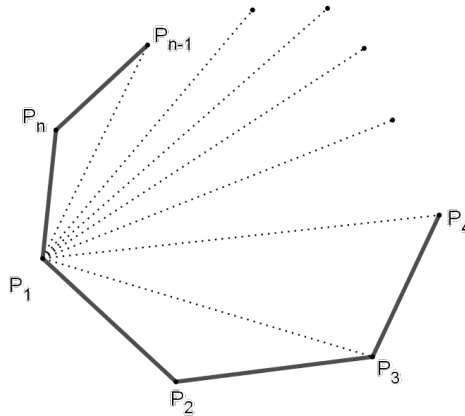


Figura 5.7: Polígono convexo

Assim, sendo um polígono de  $n$  lados formados pelos afixos  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ , dividimos nos triângulos  $\Delta_{1,2,3}, \Delta_{1,3,4}, \dots, \Delta_{1,n-1,n}$  e a fórmula da área será

$$S_{1,2,\dots,n-1,n} = \frac{i}{4} \left( \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & \bar{z}_2 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{4} \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_3 & \bar{z}_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_4 & \bar{z}_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_3 & \bar{z}_3 \\ z_4 & \bar{z}_4 \end{array} \right| \right) + \dots + \\
& + \frac{i}{4} \left( \left| \begin{array}{cc} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_{n-1} & \bar{z}_{n-1} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} z_1 & \bar{z}_1 \\ z_n & \bar{z}_n \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} z_{n-1} & \bar{z}_{n-1} \\ z_n & \bar{z}_n \end{array} \right| \right).
\end{aligned}$$

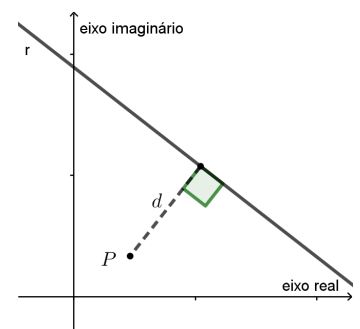
### 5.6. Distância de um ponto a uma reta

**Proposição 21.** *Dados uma reta formada pelos pontos  $z_1$ ,  $z_2$  e o ponto  $z_3$  fora de  $r$ . A distância de  $z_3$  à reta  $r$  é determinada por*

$$d = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{array} \right\|}{2 \cdot |z_1 - z_2|} \quad (5.2)$$

*Demonstração.* A área do triângulo cujos vértices são  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  pode ser calculada por  $\frac{1}{2} \cdot |z_1 - z_2| \cdot d$ , em que  $d$  é a distância de  $z_3$  à reta determinada por  $z_1$  e  $z_2$ .

$$\begin{aligned}
\text{Portanto: } \frac{1}{2} \cdot |z_1 - z_2| \cdot d &= \frac{i}{4} \left| \begin{array}{ccc} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{array} \right| \iff \\
\iff d &= \frac{1}{2|z_1 - z_2|} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{array} \right\| \iff d = \\
\frac{\left\| \begin{array}{ccc} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{array} \right\|}{2|z_1 - z_2|}
\end{aligned}$$



□

**Exemplo 38.** *Determinar a distância do ponto  $z_3 = (-1, 4)$  à reta determinada pelos pontos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$ . Utilizando o resultado do exemplo 35 e da proposição 5.2 temos:*

$$d = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}}{2|z_1 - z_2|} = \frac{22}{2|(1, 1) - (4, 2)|} = \frac{11}{\sqrt{10}}.$$

Outra forma de encontrar a distância de um ponto e uma reta é a seguinte:

Considere uma reta  $r : \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \gamma = 0$  e o ponto  $P_0$  fora dela. A reta  $s$  é perpendicular à reta  $r$  e se intersectam no ponto  $P$  conforme a figura 5.8. A distância de  $P$  à reta  $r$  é a mesma distância de  $P$  à  $P_0$ . Seja  $z$  o número complexo representante de  $P$ . Como o coeficiente angular de  $s$  é  $m_s = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$  temos

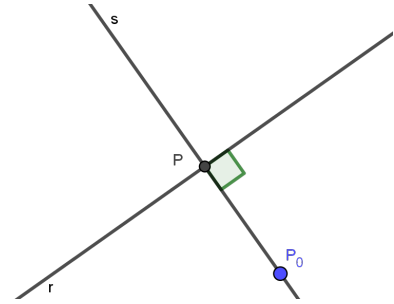


Figura 5.8: Distância entre ponto e reta

$$\begin{cases} \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \gamma = 0 & \iff \bar{z} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}z + \frac{\gamma}{\alpha} & (I) \\ z - z_0 = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(\bar{z} - \bar{z}_0) & & (II) \end{cases}$$

Vamos encontrar o ponto de intersecção  $z$  relacionado com a reta  $s$  e o ponto  $z_0$ .

Substituindo (I) em (II)

$$z - z_0 = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}z + \frac{\gamma}{\alpha} - \bar{z}_0\right) \iff z - z_0 = -z - \frac{\gamma}{\bar{\alpha}} + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{z}_0 \iff$$

$$2z = -\frac{\gamma}{\bar{\alpha}} + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\bar{z}_0 + z_0 \iff z = \frac{-\gamma + \alpha\bar{z}_0 + \bar{\alpha}z_0}{2\bar{\alpha}}$$

Então a distância da reta  $r$  ao ponto  $P_0$  é

$$D_{r,z_0} = \left| \frac{-\gamma + \alpha\bar{z}_0 + \bar{\alpha}z_0}{2\bar{\alpha}} - z_0 \right| = \left| \frac{-\gamma + \alpha\bar{z}_0 + \bar{\alpha}z_0 - 2\bar{\alpha}z_0}{2\bar{\alpha}} \right| = \left| \frac{-\gamma + \alpha\bar{z}_0 - \bar{\alpha}z_0}{2\bar{\alpha}} \right| \iff$$

$$D_{r,z_0} = \left| \frac{(-1)(\gamma - \alpha\bar{z}_0 + \bar{\alpha}z_0)}{2\bar{\alpha}} \right| = |-1| \frac{|\gamma - \alpha\bar{z}_0 + \bar{\alpha}z_0|}{|2||\bar{\alpha}|}$$

Como  $|\bar{\alpha}| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$  a fórmula da distância da reta  $r$  a um ponto  $z_0$  é

$$D_{r,z_0} = \frac{|\bar{\alpha}z_0 - \alpha\bar{z}_0 + \gamma|}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}}.$$



**Exemplo 39.** Dados o ponto  $z_0 = (5 + 2i)$  e a reta  $r$  determinada pelos pontos  $z_1 = (1 + i)$  e  $z_2 = (3 + 2i)$ , determinar a distância entre  $r$  e  $z_0$ , os coeficientes linear e angular.

Solução: Inicialmente deve-se calcular  $\alpha$ ,  $\gamma$  e a reta  $r$ .

$$\alpha = (1 - 3) + i(1 - 2) = -2 - i \implies \bar{\alpha} = -2 + i$$

$$\gamma = 2i(3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 2i$$

$$r : (-2 + i)\bar{z} - (-2 - i)z + 2i = 0$$

Aplica-se a fórmula da distância

$$D_{r,z_0} = \frac{|(-2 + i)(5 + 2i) - (-2 - i)(5 - 2i) + 2i|}{2\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-12 + i - (12 - i) + 2i|}{2\sqrt{5}}$$

$$D_{r,z_0} = \frac{|4i|}{2\sqrt{5}} = \frac{|2i|}{\sqrt{5}}.$$

O coeficiente angular é  $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ . O coeficiente linear é  $-\frac{2i}{-2 - 2} = \frac{i}{2}$ .

## 5.7. Triângulos

**Definição 6.** Um triângulo é orientado quando a ordem de seus vértices é especificada. O sentido pode ser horário ou anti-horário.

Na figura 5.9, a orientação dos triângulos com vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  é anti-horária e a orientação do triângulo com vértices são  $D$ ,  $E$  e  $F$  é horária.

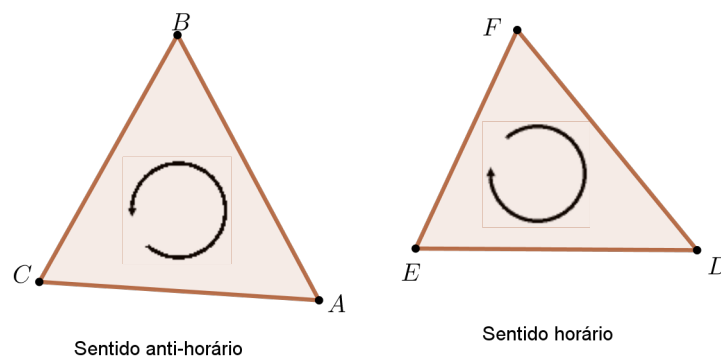


Figura 5.9: Orientação dos triângulos

### 5.7.1. Argumento de um ângulo

Considere os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , representados na figura 5.10

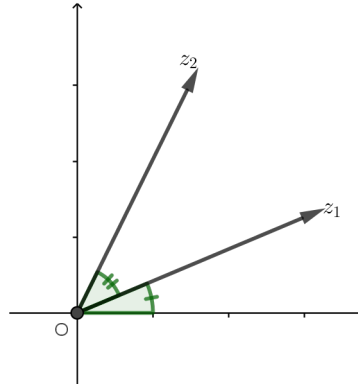


Figura 5.10: Números complexos  $z_1$  e  $z_2$

O ângulo  $\alpha = \widehat{z_1 O z_2}$  (orientado no sentido anti-horário) é dado por

$$\alpha = \arg(z_2) - \arg(z_1) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

### 5.7.2. Translação de Eixos

**Definição 7.** *Isometria de um polígono é uma transformação geométrica que preserva as distâncias entre pontos e as amplitudes de ângulos transformando este polígono em outro com todos os lados e ângulos correspondentes congruentes.*

Na figura transformada através da isometria pode haver variação na direção e no sentido, mas cada ângulo transformado mantém a sua amplitude inicial. Assim, uma isometria pode mudar somente a posição da figura.

**Definição 8.** *Translação é uma isometria que desloca a figura original segundo um vetor, ou seja, o deslocamento tem direção, sentido e comprimento.*

Observe a translação do ângulo  $\alpha = \widehat{z_2 \hat{z}_1 z_3}$  para a origem  $O$ .

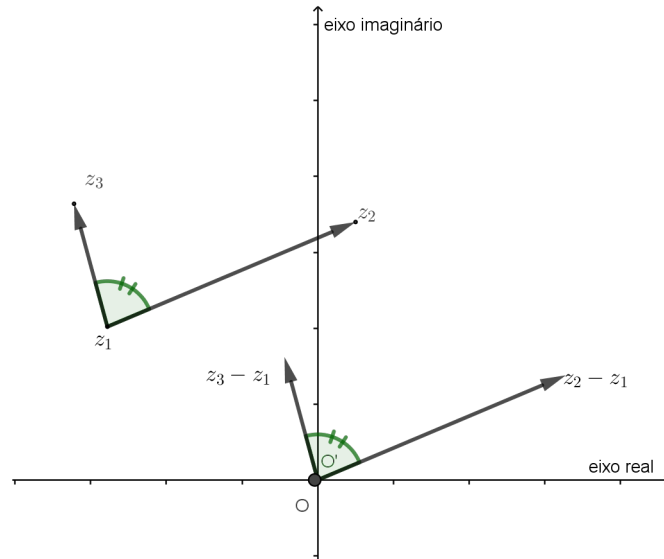


Figura 5.11: Translação de vetores

Assim

$$\alpha = z_2 \hat{z}_1 z_3 = (z_2 - z_1) \hat{O} (z_3 - z_1) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right)$$

**Definição 9.** Dados dois triângulos orientados  $v_1v_2v_3$  e  $w_1w_2w_3$ , se o ângulo em  $v_k$  for congruente ao ângulo em  $w_k$ , com  $k \in \{1, 2, 3\}$  e os respectivos lados forem proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

### 5.7.3. Semelhança de triângulos

**Proposição 22.** Dados dois triângulos com a mesma orientação  $v_1v_2v_3$  e  $w_1w_2w_3$ , haverá

semelhança entre eles se, e somente se,  $\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$ , ou seja,  $\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & 1 \\ v_2 & w_2 & 1 \\ v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

*Demonstração.* Pelo caso de Lado-Ângulo-Lado, haverá semelhança entre dois triângulos se houver proporção entre as medidas de dois pares de lados correspondentes e os ângulos formados por estes lados forem congruentes.

Assim:

$$\begin{aligned} \Delta v_1v_2v_3 &\sim \Delta w_1w_2w_3 \\ \frac{|v_2 - v_1|}{|w_2 - w_1|} &= \frac{|v_3 - v_1|}{|w_3 - w_1|} \quad e \quad v_2 \hat{v}_1 v_3 \equiv w_2 \hat{w}_1 w_3 \iff \\ \iff \left| \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} \right| &= \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \quad e \quad \arg\left(\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1}\right) = \arg\left(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right) \iff \end{aligned}$$

$$\iff \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & 1 \\ v_2 & w_2 & 1 \\ v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

**Exemplo 40.** Dados os triângulos  $\Delta z_1 z_2 z_3$  e  $\Delta w_1 w_2 w_3$  determinados pelos números complexos  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (3, 5)$ ,  $z_3 = (3, -3)$ ,  $w_1 = (-2, 2)$ ,  $w_2 = (-1, 4)$ ,  $w_3 = (-1, 0)$ , verifique se são semelhantes utilizando a Proposição 22.

$$\begin{vmatrix} (1, 1) & (-2, 2) & 1 \\ (3, 5) & (-1, 4) & 1 \\ (3, -3) & (-1, 0) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= |(1, 1)(-1, 4) + (-2, 2)(3, -3) + (3, 5)(-1, 0) - (-1, 4)(3, -3) - (-2, 2)(3, 5) - (1, 1)(-1, 0)| =$$

$$= |(-5, 3) + (0, 12) + (-3, -5) - (9, 15) - (-16, -4) - (-1, -1)| =$$

$$= |(-5 + 0 - 3 - 9 + 16 + 1, 3 + 12 - 5 - 15 + 4 + 1)| = |(0, 0)| = 0.$$

Portanto, os triângulos são semelhantes.

**Proposição 23.** Dados dois triângulos com orientações contrárias  $v_1 v_2 v_3$  e  $w_1 w_2 w_3$ . Haverá semelhança entre eles se, e somente se,  $\frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}$ , ou seja,

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Demonstração.* Observe na Figura 5.12 que houve reflexão de cada ponto  $v_1 v_2 v_3$  e  $\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3$  em relação ao eixo real em de cada ponto dos triângulos, pois os pontos são conjugados.

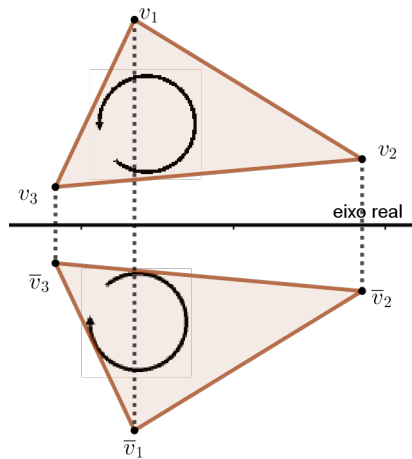


Figura 5.12: Triângulos simétricos em relação ao eixo real

Se os triângulos são semelhantes e têm orientações contrárias, temos:

$$\begin{cases} \Delta v_1 v_2 v_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \text{ (hipóteses)} \\ \Delta w_1 w_2 w_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \text{ (reverso)} \end{cases} \iff \Delta v_1 v_2 v_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3.$$

E pela Proposição 22, temos:

$$\Delta v_1 v_2 v_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3 \text{ (reverso)} \iff \frac{v_2 - v_1}{v_3 - v_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}$$

$$\iff \begin{vmatrix} v_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ v_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ v_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

□

#### 5.7.4. As raízes n-ésimas de 1

O círculo unitário pode ser expresso como

$$|\zeta| = 1 \quad \text{com } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Em representação polar escreve-se

$$\zeta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Seja  $z \in \mathbb{C}$ . Como  $\zeta = 1$ , temos:

$$|\zeta z| = |\zeta| \cdot |z| = |z| \quad \text{e portanto} \quad \arg(\zeta z) = \arg(\zeta) + \arg(z).$$

Assim, o significado de multiplicar um número complexo por  $\zeta$  é o mesmo que rotacionar o vetor  $z$ , em relação à origem, num ângulo  $\theta$ .

Façamos agora  $z = x + iy$  e  $\zeta z = x' + iy'$ .

$$x' + iy' = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(x + iy)$$

$$x' + iy' = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta) + i(x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta)$$

Temos então:

$$x' = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta$$

$$y' = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta$$

**Exemplo 41.** A representação de  $\zeta$ ,  $\zeta^2$ ,  $\zeta^3$ ,  $\zeta^4$ ,  $\zeta^5$  está na figura 5.13. Observe os ângulos  $\arg(\zeta^2) = 2 \arg(\zeta)$ ,  $\arg(\zeta^3) = 3 \arg(\zeta)$  e assim por diante.

**Exemplo 42.** Considere  $z = 1,5 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right)$  e  $\zeta = \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$ . O produto  $z\zeta$ , que está na figura 5.13 será

$$z\zeta = 1,5 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] =$$

$$z\zeta = 1,5 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

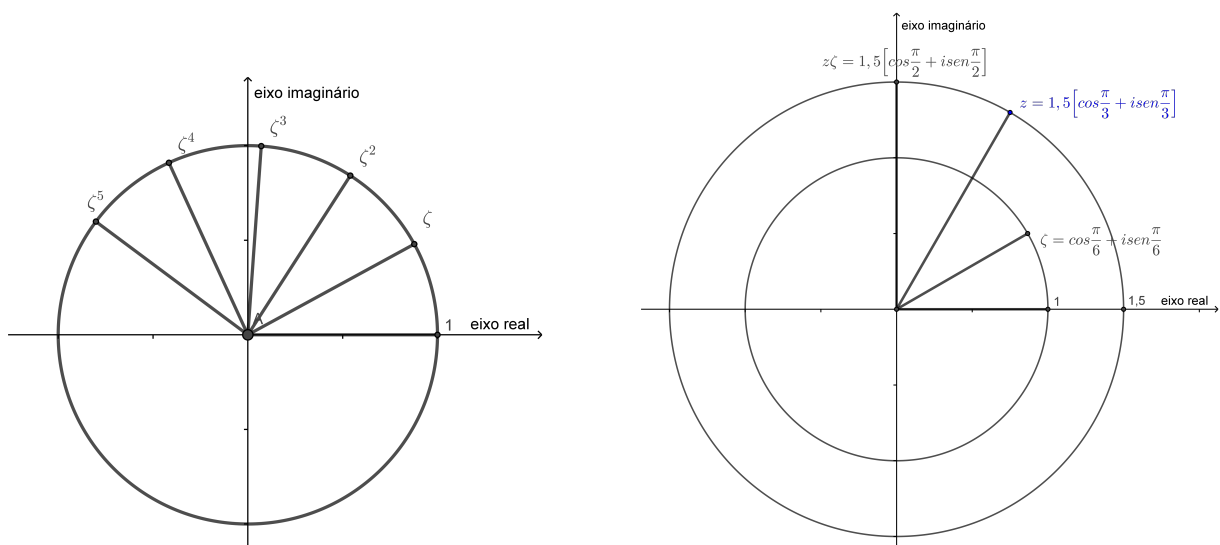


Figura 5.13: À esquerda temos as potências de  $\zeta$  e à direita o produto de  $\zeta$  por  $z$

Utilizando a fórmula de De Moivre pode-se calcular as raízes n-ésimas da unidade.

**Exemplo 43.** Considerando o número complexo  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , calcule as raízes cúbicas de 1, ou seja,  $z^3 = 1$ , utilizando a fórmula de De Moivre.

Solução:

$$z^3 = 1 \iff (\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta))^3 = 1 \iff \rho^3(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = 1 \iff \rho^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) = 1$$

Devemos considerar que  $\rho = 1$ , pois é raio do círculo unitário. Então

$$\rho^3 = 1 \quad e \quad \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta = 1$$

Temos então  $\rho = 1$ ,  $\cos 3\theta = 1$  e  $\operatorname{sen} 3\theta = 0$ . Portanto,

$$3\theta = 2k\pi, \quad \text{ou seja,} \quad \theta = \frac{2k\pi}{3}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Deve-se considerar, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, que um polinômio cúbico tem exatamente três raízes. Mas, se  $k \in \mathbb{Z}$ , poderia haver mais do que três raízes. Porém, a periodicidade das funções seno e cosseno nos garantem que haverá apenas três raízes. De fato,

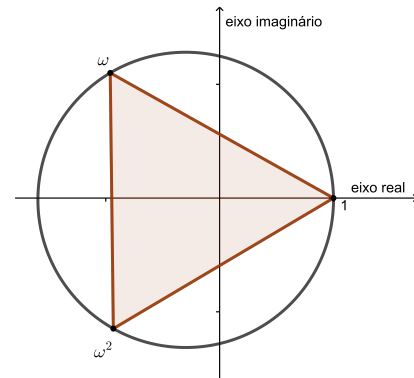


Figura 5.14: Raízes cúbicas de 1

Para  $k = 0, 3, 6, \dots \implies \omega_k = \omega_0 = 1 + i0 = 1$

Para  $k = 1, 4, 7, \dots \implies \omega_k = \omega_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

Para  $k = 2, 5, 8, \dots \implies \omega_k = \omega_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Esses três pontos são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo de raio unitário com um dos vértices no ponto  $(1, 0)$  (figura 5.14). Observando também que  $\omega_2 = \bar{\omega}_1 = \omega_1^2$  temos a expressão

$$1 + \omega + \omega^2 = 0 \tag{5.3}$$

Com esta mesma linha de raciocínio podemos calcular as raízes n-ésimas da unidade, ou seja, resolver  $z^n = 1$ .

Consideremos então uma circunferência unitária com centro na origem e raio  $\rho$ , um ponto

$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$  da circunferência e a fórmula de DeMoivre  $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$ .

Então,

$$\rho = 1, \quad \text{e} \quad \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = 1$$

Desta forma

$$n\theta = 2k\pi \implies \theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

É fácil verificar que  $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , satisfaz a equação  $z^n = 1$ . Pela periodicidade das funções seno e cosseno pode-se afirmar que se  $k' \equiv k \pmod{n}$  então  $z_{k'} = z_k$  é a raiz  $n$ -ésima que procuramos. De fato, sendo  $k' = k + hn$  ( $h \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$ ), então

$$z_{k'} = \cos\left(\frac{2k'\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k'\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2kn}{n} + 2h\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2kn}{n} + 2h\pi\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = z_k.$$

#### 5.7.5. Semelhança e triângulo equilátero

**Proposição 24.** *Se num triângulo houver a semelhança  $\Delta_{z_1 z_2 z_3} \sim \Delta_{z_2 z_3 z_1}$ , então ele é equilátero.*

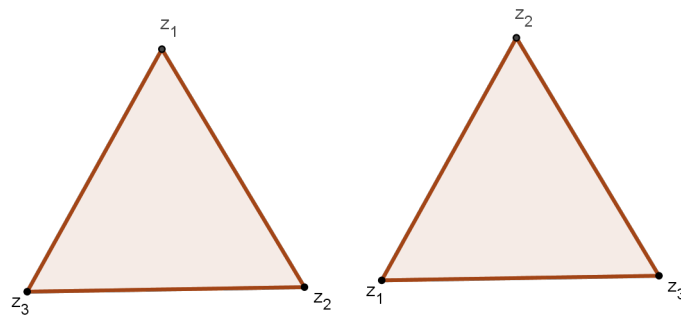


Figura 5.15: Triângulos equiláteros

$$\begin{aligned} \text{Demonstração. } \Delta_{z_1 z_2 z_3} \sim \Delta_{z_2 z_3 z_1} &\iff \begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \\ &\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0 \iff \\ &\iff 1 \cdot z_1^2 + 1 \cdot (z_2^2 + z_3^2) + (-1) \cdot (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2) = 0 \iff \\ &\iff 1 \cdot z_1^2 + (\omega^2 \cdot \omega) \cdot (z_2^2 + z_3^2) + (\omega^2 + \omega) \cdot (z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2) = 0 \iff \\ &\iff z_1^2 + z_1 z_2 (\omega^2 + \omega) + z_1 z_3 (\omega^2 + \omega) + z_2 z_3 (\omega^2 + \omega) + (z_1^2 + z_3^2) (\omega^2 \cdot \omega) = 0 \\ &\iff z_1 \cdot z_1 + z_1 \cdot \omega^2 z_2 + z_1 \cdot \omega z_3 + \omega z_2 \cdot z_1 + \omega z_2 \cdot \omega^2 z_2 + \omega z_2 \cdot \omega z_3 + \omega^2 z_3 \cdot z_1 + \omega^2 z_3 \omega^2 z_2 + \omega^2 z_3 \omega z_3 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \cdot (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0, \text{ com } \omega^2 + \omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0. \\ &\Leftrightarrow \Delta_{z_1 z_2 z_3} \sim \Delta_{1\omega\omega^2} \quad \text{ou} \quad \Delta_{z_1 z_2 z_3} \sim \Delta_{1\omega^2\omega}. \end{aligned}$$

□

### 5.7.6. Baricentro de um triângulo

**Definição 10.** *Denomina-se mediana de um triângulo o segmento com uma das extremidades num dos três vértice e a outra extremidade no ponto médio do lado oposto a este vértice.*

Observação: Qualquer triângulo tem três vértices, três lados e, conseqüentemente, três medianas.

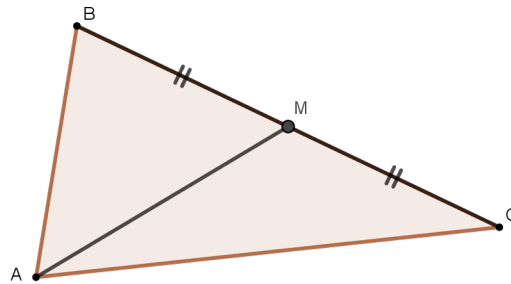


Figura 5.16: Mediana

**Proposição 25.** *Três medianas de um triângulo se interceptam num único ponto G denominado baricentro.*

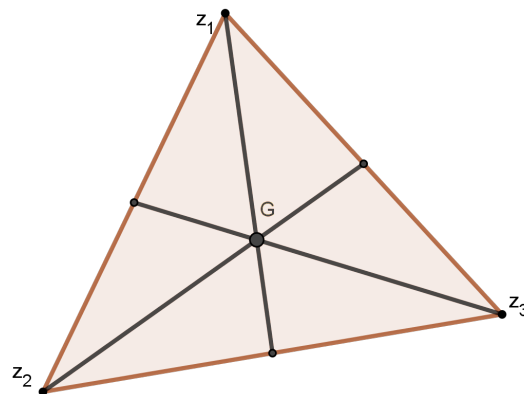


Figura 5.17: Baricentro G do triângulo

*Demonstração.* Considerando um triângulo qualquer com vértice representados pelos números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , vamos determinar as equações das retas suportes das três medianas.

Os cálculos da equação da reta suporte da mediana relativa ao lado  $z_2z_3$  são:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ \frac{z_2 + z_3}{2} & \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como resultado deste determinante, temos:

$$\begin{aligned} z\bar{z}_1 + \bar{z}\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) + z_1\left(\frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) - \bar{z}_1\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) - \bar{z}z_1 - z\left(\frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) &= 0 \\ z\left(\bar{z}_1 - \frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) + \bar{z}\left(\frac{z_2 + z_3}{2} - z_1\right) + z_1\left(\frac{\bar{z}_2 + \bar{z}_3}{2}\right) - \bar{z}_1\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) &= 0 \\ z(2\bar{z}_1 - \bar{z}_2 - \bar{z}_3) + \bar{z}(z_2 + z_3 - 2z_1) + z_1(\bar{z}_2 + \bar{z}_3) - \bar{z}_1(z_2 + z_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Os cálculos das equações das retas relativas aos lados  $z_1z_3$  e  $z_1z_2$  são análogos e têm os resultados.

$$z(2\bar{z}_2 - \bar{z}_1 - \bar{z}_3) + \bar{z}(z_1 + z_3 - 2z_2) + z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_3) - \bar{z}_2(z_1 + z_3) = 0 \quad (5.5)$$

$$z(2\bar{z}_3 - \bar{z}_1 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_1 + z_2 - 2z_3) + z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) - \bar{z}_3(z_1 + z_2) = 0. \quad (5.6)$$

Pode-se facilmente provar que as três equações são combinação linear uma das outras. Isto mostra que o ponto  $G$  é o mesmo.  $\square$

### 5.7.7. Determinação do Baricentro

Para calcular a fórmula do baricentro é interessante escrever na forma paramétrica as equações 5.4, 5.5 e 5.6:

$$z = (1 - \lambda_1)z_1 + \lambda_1\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right) = (1 - \lambda_1)z_1 + \frac{\lambda_1}{2}z_2 + \frac{\lambda_1}{2}z_3 \quad (\text{equação 5.4})$$

$$z = (1 - \lambda_2)z_2 + \lambda_2\left(\frac{z_1 + z_3}{2}\right) = \frac{\lambda_2}{2}z_1 + (1 - \lambda_2)z_2 + \frac{\lambda_2}{2}z_3 \quad (\text{equação 5.5})$$

$$z = (1 - \lambda_3)z_3 + \lambda_3\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = \frac{\lambda_3}{2}z_1 + \frac{\lambda_3}{2}z_2 + (1 - \lambda_3)z_3 \quad (\text{equação 5.6}).$$

Como o baricentro é o mesmo, podemos comparar as equações e determinar os valores dos parâmetros. Comparando as equações 5.4 e 5.5:

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1}{2} = 1 - \lambda_2 \\ \frac{\lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2}{2}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Assim  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$  e da mesma forma obtém-se  $\lambda_3 = \frac{2}{3}$ .

Substituindo  $\lambda_k$ , com  $k \in 1, 2, 3$  por  $\frac{2}{3}$  em qualquer uma das equações, tem-se que:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \quad \text{que é a fórmula do baricentro.}$$

**Exemplo 44.** Determinar o baricentro do triângulo formado pelos vértices  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  e  $z_3 = (-1, 4)$ , utilizando a equação do baricentro.

$$\text{SOLUÇÃO } G = \frac{(1, 1) + (4, 2) + (-1, 4)}{3} = \frac{(1 + 4 - 1, 1 + 2 + 4)}{3} = \frac{(4, 7)}{3} = (1, 33; 2, 33)$$

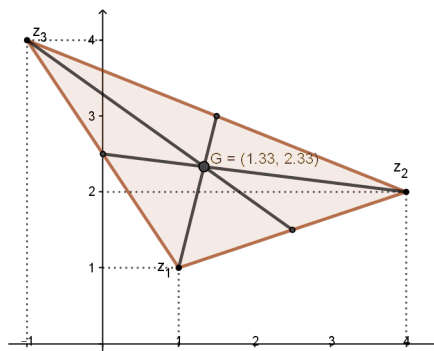


Figura 5.18: Baricentro

**Exemplo 45.** (Teorema de Napoleão) - Sobre cada lado de um triângulo qualquer, desenha um triângulo equilátero (exterior). Então, os baricentros destes novos triângulos são vértices de um triângulo equilátero.

*Demonstração.* Seja o  $\triangle z_1 z_2 z_3$  dado e os triângulos equiláteros  $\triangle \omega_1 z_1 z_2$ ,  $\triangle z_3 \omega_2 z_1$ ,  $\triangle z_2 z_1 \omega_3$ ,

construídos sobre seus lados, com baricentros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Observa-se que todos os triângulos equiláteros têm a mesma orientação do  $\triangle 1\omega\omega^2$  (onde  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ). Temos então:

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega z_3 + \omega^2 z = 0 \\ z_3 + \omega \cdot \omega_2 + \omega^2 \cdot z_1 = 0 \\ z_2 + \omega z_1 + \omega^2 \omega_3 = 0 \end{cases}$$

Usando o proposição 24, temos:

$$\triangle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \text{ é equilátero} \iff \alpha_1 + \omega \alpha_2 + \omega^2 \alpha_3 = 0$$

Também temos:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \cdot (w_1 + z_3 + z_2)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} \cdot (z_3 + w_2 + z_1)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot (z_2 + z_1 + w_3)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot (w_1 + z_3 + z_2) + \frac{1}{3} \cdot (z_3 + w_2 + z_1) + \frac{1}{3} \cdot (z_2 + z_1 + w_3).$$

Mas, como os triângulos construídos são equiláteros, logo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot \{(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3)\}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{3} \cdot (0 + 0 + 0) = 0$$

Portanto, o triângulo  $\triangle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  é equilátero.  $\square$

**Exemplo 46.** *Sejam as retas paralelas  $l_1, l_2$  e  $l_3$ . A distância entre  $l_3$  e  $l_2$  é  $b$  e a distância entre  $l_1$  e  $l_2$  é  $a$ . Expresse a área de um triângulo equilátero que possui cada vértice nas retas paralelas  $l_1, l_2$  e  $l_3$ .*

Solução:

Podemos escolher um sistema de coordenadas de modo que a reta  $l_1$  seja o eixo real e fixamos um vértice na intersecção do eixo imaginário com a reta  $l_2$ ; um vértice  $B = t$  no eixo real e um vértice  $A = z$  na reta

$l_3$ .

Portanto temos:

$$z + ai\omega + t \cdot \omega^2 = 0, \text{ onde } \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

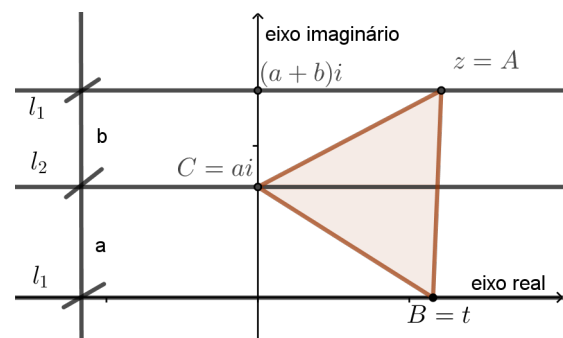


Figura 5.19: Triângulo equilátero em retas paralelas

Primeiro devemos calcular as raízes de  $\omega$ .

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$$\omega' = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega'' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Continuando o cálculo,  $z = -ai\omega - t \cdot \omega^2$ . Substituindo com as raízes  $\omega'$ ,

$$z = -ai \cdot \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) - t \cdot \left( \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$z = \frac{ai}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{t}{4} \left( (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot i\sqrt{3} + (i)^2 3 \right)$$

$$z = \frac{ai}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{t}{4} + \frac{2t}{4}i\sqrt{3} + \frac{3t}{4}$$

$$z = \frac{1}{2} \left( (a\sqrt{3} + t) + i(a + t\sqrt{3}) \right)$$

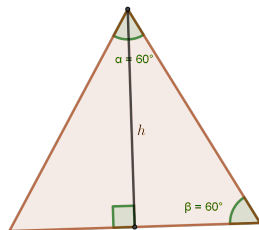
Como  $\Im(z) = a + b$ , temos

$$\frac{1}{2}(a + t\sqrt{3}) = a + b$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b)$$

Considerando a base BC, temos:

$$|t - ai|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b) - ai \right|^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2)$$



$$\text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{h}{AC}$$

$$h = AC \cdot \text{sen} \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2) \cdot AC \cdot \text{sen} \frac{\pi}{3}$$

$$AC = |z - ai|$$

$$|t - ai|^2 = \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

$$|t - ai| = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

Portanto, a área do  $\Delta$  é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a^2 + ab + b^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a^2 + ab + b^2} \cdot \text{sen} \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

### 5.7.8. Circuncentro de um triângulo

**Proposição 26.** *As três mediatrizes de um triângulo intersectam-se em um único ponto, denominado **circuncentro**.*

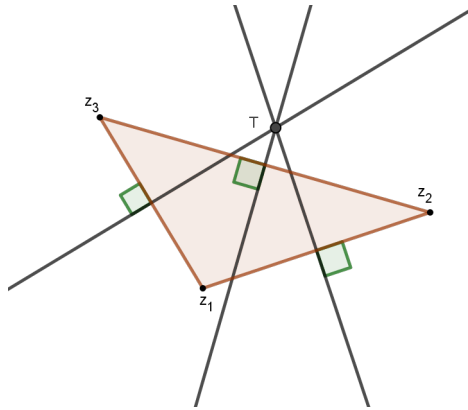


Figura 5.20: Circuncentro

*Demonstração.* Dado o triângulo com vértices  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  (Figura 5.20), pela Proposição 11, a equação da mediatriz dos lados  $z_1z_2$ ,  $z_1z_3$  e  $z_2z_3$  são dadas respectivamente por:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 \quad (5.7)$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) = |z_3|^2 - |z_1|^2 \quad (5.8)$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) = |z_3|^2 - |z_2|^2 \quad (5.9)$$

Pode-se facilmente mostrar que as três equações acima são combinações lineares uma das outras. Assim, o ponto  $z$  é o mesmo e é denominado circuncentro do triângulo.  $\square$

### 5.7.9. Determinação do Circuncentro

Para determinar o circuncentro basta resolver o sistema formado pelas equações 5.7, 5.8 e 5.9.

$$\begin{cases} z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) = |z_3|^2 - |z_1|^2 \end{cases}$$

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2$$

$$\bar{z}(z_2 - z_1) = |z_2|^2 - |z_1|^2 - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)$$

$$\bar{z} = \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2 - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{z_2 - z_1}$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \left[ \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2 - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{z_2 - z_1} \right] (z_3 - z_1) = |z_3|^2 - |z_1|^2$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) + (|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1) = (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 -$$

$z_1)$

$$z [(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(z_3 - z_1)] = (|z_3|^2 - |z_1|^2)(z_2 - z_1) - (|z_2|^2 - |z_1|^2)(z_3 - z_1)$$

$$z = \frac{|z_3|^2(z_2 - z_1) - |z_1|^2(z_2 - z_1) - |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_1|^2(z_3 - z_1)}{\bar{z}_3 z_2 - \bar{z}_3 z_1 - \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_1 z_1 - \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_2 z_1 + \bar{z}_1 z_3 - \bar{z}_1 z_1}$$

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\bar{z}_1(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_1 - z_3) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)}$$

Portanto, o circuncentro do triângulo formado pelos números complexos  $z_1 z_2 z_3$  é

$$z = \frac{|z_1|^2(z_3 - z_2) + |z_2|^2(z_1 - z_3) + |z_3|^2(z_2 - z_1)}{\bar{z}_1(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_1 - z_3) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)} \quad (5.10)$$

**Exemplo 47.** Determinar o circuncentro do triângulo formado pelos vértices  $z_1 = (1, 1)$ ,  $z_2 = (4, 2)$  e  $z_3 = (-1, 4)$ , utilizando a equação 5.10.

SOLUÇÃO

$$z = \frac{|(1, 1)|^2((-1, 4) - (4, 2)) + |(4, 2)|^2((1, 1) - (-1, 4)) + |(-1, 4)|^2((4, 2) - (1, 1))}{(1, -1)((-1, 4) - (4, 2)) + (4, -2)((1, 1) - (-1, 4)) + (-1, -4)((4, 2) - (1, 1))}$$

$$z = \frac{2(-5, 2) + 20(2, -3) + 17(3, 1)}{(1, -1)(-5, 2) + (4, -2)(2, -3) + (-1, -4)(3, 1)} = \frac{(-10, 4) + (40, -60) + (51, 17)}{(1, -1)(-5, 2) + (4, -2)(2, -3) + (-1, -4)(3, 1)}$$

$$z = \frac{(-10, 4) + (40, -60) + (51, 17)}{(-3, 7) + (2, -16) + (1, -13)} = \frac{(81, -39)}{(0, -22)} = (1, 773; 3, 682)$$

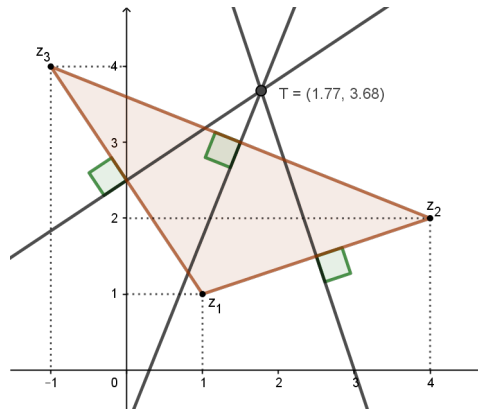


Figura 5.21: Circuncentro

## 5.7.10. Ortocentro de um triângulo

**Definição 11.** *Altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado base da altura, e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura.*

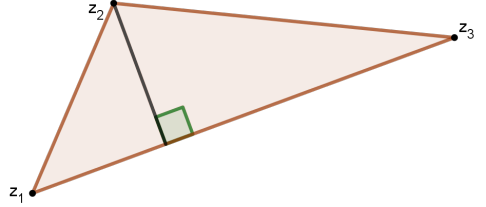


Figura 5.22: Altura relativa ao vértice  $z_2$

**Proposição 27.** *As retas suportes das três alturas de um triângulo intersectam-se em um único ponto, denominado **Ortocentro**.*

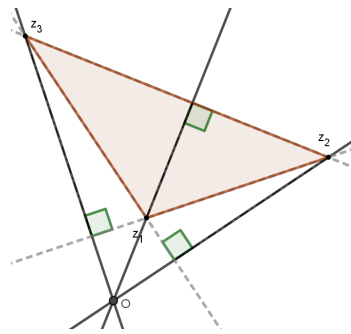


Figura 5.23: Ortocentro

*Demonstração.* Seja dado o triângulo com vértices  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ . As equações das retas suportes das alturas relativas aos lados  $z_1z_2$ ,  $z_1z_3$  e  $z_2z_3$  são, respectivamente:

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) - z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}_3(z_2 - z_1) = 0 \quad (5.11)$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) - z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - \bar{z}_2(z_3 - z_1) = 0 \quad (5.12)$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) - z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) - \bar{z}_1(z_3 - z_2) = 0 \quad (5.13)$$

Pode-se facilmente mostrar que as três equações são combinações lineares uma das outras, basta, por exemplo, subtrair duas equações quaisquer e encontra-se a terceira. Isto prova que o ponto  $z$  é o mesmo e denominado ortocentro.  $\square$



## 5.7.11. Fórmula do ortocentro

Para obter a fórmula do ortocentro, basta resolver o sistema com as equações 5.12 e 5.13 em  $z$ :

$$\begin{cases} z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) - z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - \bar{z}_2(z_3 - z_1) = 0 \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}(z_3 - z_2) - z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) - \bar{z}_1(z_3 - z_2) = 0 \\ z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_3 - z_1) - z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) - \bar{z}_2(z_3 - z_1) = 0 \end{cases}$$

$$\bar{z} = \frac{z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(z_3 - z_1)}$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \left[ \frac{z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(z_3 - z_1)} \right] (z_3 - z_2) = z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + \bar{z}_1(z_3 - z_2)$$

$$z(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) + [z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) - z(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)](z_3 - z_2) = z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) + \bar{z}_1(z_3 - z_2)(z_3 - z_1)$$

$$z[(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2)] + \bar{z}_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = z_1(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)(z_3 - z_1) + \bar{z}_1(z_3 - z_2)(z_3 - z_1)$$

$$z = \frac{|z_1|^2(z_2 - z_3) + |z_2|^2(z_3 - z_1) + |z_3|^2(z_1 - z_2) + z_1^2(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + z_2^2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + z_3^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{\bar{z}(z_3 - z_2) + \bar{z}_2(z_1 - z_3) + \bar{z}_3(z_2 - z_1)} \quad (5.14)$$

## 6. Plano Complexo e a Projção Estereográfica

Até agora consideramos os números complexos no plano complexo. Em algumas circunstâncias é interessante considerar um número complexo no espaço.

Vamos considerar então  $\mathbb{C} = \{(x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$  o plano complexo. Consideremos também a esfera  $S$  de raio unitário com origem em  $O = (0, 0, 0)$  denominada esfera de Riemann. Na forma de coordenadas retangulares  $(x_1, x_2, x_3)$  a equação da esfera  $S$  é

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Sejam também um ponto  $P = z = x + iy$  no plano complexo e  $N = (0, 0, 1)$  o polo norte da esfera. Façamos agora uma reta  $r$  passando pelos pontos  $N$  e  $P$ . O segmento  $\overline{NP}$  encontra a esfera em um ponto único  $Z$  (diferente do polo norte). Assim, através da relação deste ponto de interseção temos uma correspondência unívoca entre o plano complexo e a esfera de Riemann exceto polo norte. Para que a correspondência seja biunívoca devemos retirar esta exceção adicionando ao plano complexo  $\mathbb{C}$  um ponto no infinito, definido como ponto ideal e denotado como  $\infty$ . Assim, haverá também correspondência do plano complexo e o polo norte  $N$ . Após a extensão deste plano complexo denotaremos o novo plano por  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

A reta  $r$  tem, portanto, a forma  $r : (0, 0, 1)t + (1 - t)z$  passando pelos pontos  $P$  e  $N$ . Podemos também escrever a reta  $r$  como  $r : z + (N - z)t$ . Substituindo por suas respectivas coordenadas teremos

$$r : (x, y, 0) + ((0, 0, 1) - (x, y, 0))t$$

$$r : (x, y, 0) + (-xt, -yt, t)$$

$$r : (x - xt, y - yt, 0 + t)$$

$$r : (1 - t)x, (1 - t)y, t); t \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora calcular a interseção da reta  $r$  com a esfera  $S$ . Devemos substituir as coordenadas da reta encontradas na linha anterior na equação da esfera. Assim,

$$((1 - t)x)^2 + ((1 - t)y)^2 + t^2 = 1$$

$$(1 - t)^2 x^2 + (1 - t)^2 y^2 + t^2 = 1$$

$$(1 - t)^2 (x^2 + y^2) + t^2 = 1$$

$$(1 - t)^2 \cdot |z|^2 + t^2 = 1$$

$$|z|^2 \cdot (1 - t)^2 = 1 - t^2 \quad \text{com} \quad t \neq 1.$$

Calculando o parâmetro  $t$  em função de  $z$ , temos

$$|z|^2 \cdot (1 - 2t + t^2) = 1 - t^2$$

$$|z|^2 - 2t|z|^2 + t^2|z|^2 = 1 - t^2$$

$(|z|^2 + 1)t^2 + (-2|z|^2)t + (|z|^2 - 1) = 0$  O discriminante da equação quadrática será:

$$\Delta = (-2|z|^2)^2 - 4(|z|^2 + 1)(|z|^2 - 1)$$

$$\Delta = 4|z|^4 - 4(|z|^4 - 1)$$

$$\Delta = 4.$$

Assim, o parâmetro  $t$  será

$$t = \frac{2|z|^2 \pm 2}{2(|z|^2 + 1)} = \frac{|z|^2 \pm 1}{|z|^2 + 1}$$

$$t' = 1$$

$$t'' = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Se  $t = 1$  a interseção será o próprio ponto  $N$ .

Se  $t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$  substituiremos este valor na equação da reta  $r : (1 - t)x, (1 - t)y, t$ :

$$x_1 = (1 - t)x = \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) x = \left(\frac{|z|^2 + 1|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) x = \frac{2x}{|x|^2 + 1}$$

$$x_2 = (1 - t)y = \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) y = \left(\frac{|z|^2 + 1|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) y = \frac{2y}{|x|^2 + 1}$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Como  $2x = z + \bar{z}$  e  $2y = z - \bar{z}$  teremos

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, x_2 = \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} \text{ e } x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Se  $Z = (x_1, x_2, x_3)$  e se queira determinar  $z = x + iy$ , deve-se isolar  $x$  e  $y$ .

Como  $r : ((1 - t)x, (1 - t)y, t)$  e  $Z$  é dado, teremos que  $t = x_3$ .

Então

$$x_1 = (1 - t)x = (1 - x_3)x \implies x = \frac{x_1}{1 - x_3}$$

$$x_2 = (1 - t)y = (1 - x_3)y \implies y = \frac{x_2}{1 - x_3}$$

$$\text{Assim, } z = x + iy = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3} = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

## 7. Conclusão

Respondendo à questão norteadora: Como e por que desenvolver os números complexos numa perspectiva geométrica?

Desenvolver os números complexos numa perspectiva geométrica é uma estratégia muito interessante, pois obriga a desenvolver de forma satisfatória o corpo dos números complexos com aplicações para que possa ser desenvolvida as geometrias planas e analítica.

Alguns softwares como o Geogebra e Wolphamalpha podem ser utilizados juntamente com este assunto.

Como pesquisas futuras sugerimos que toda a pesquisa matemática seja iniciada com a história, pois a grande maioria dos assuntos matemáticos tem menos mais de um século. É necessário que se mostre ao estudante a importância da matemática em todas as épocas da história da humanidade. Também sugerimos que sejam inseridas aplicações de números complexos como resoluções de equações algébricas e equações diferenciais, na Engenharia Elétrica, Engenharia de Controle, na Física com eletromagnetismo, na Física Quântica e na Teoria do Caos.

## REFERÊNCIAS

- 1 BOYER, C. B. *História da Matemática*. [S.l.]: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- 2 HAHN, L. shin. *Complex Numbers and Geometry*. [S.l.]: The Mathematical Association of America, 1979.
- 3 GÓES, S. D. P. N. C. C. *Matemática na Escola Renovada*. [S.l.]: Editora Saraiva, 2011.
- 4 CONWAY, J. B. *Estudio de las geometrias - Tomo II*. [S.l.]: Indiana University, Departament of Mathematics, Swain Hall East, Bloomington, Indiana, 1969.
- 5 DEAUX, R. *Geometry of complex Numbers*. [S.l.]: Frederick Ungar Publishing Company, New York, 2008.
- 6 SCHEWERDTFEGER, H. *Geometry of complex Numbers*. [S.l.]: General Publishing Company, Ltd, 1979.
- 7 NEMITZ, V. *A Geometria dos Números Complexos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná - UFPR, 2014.