

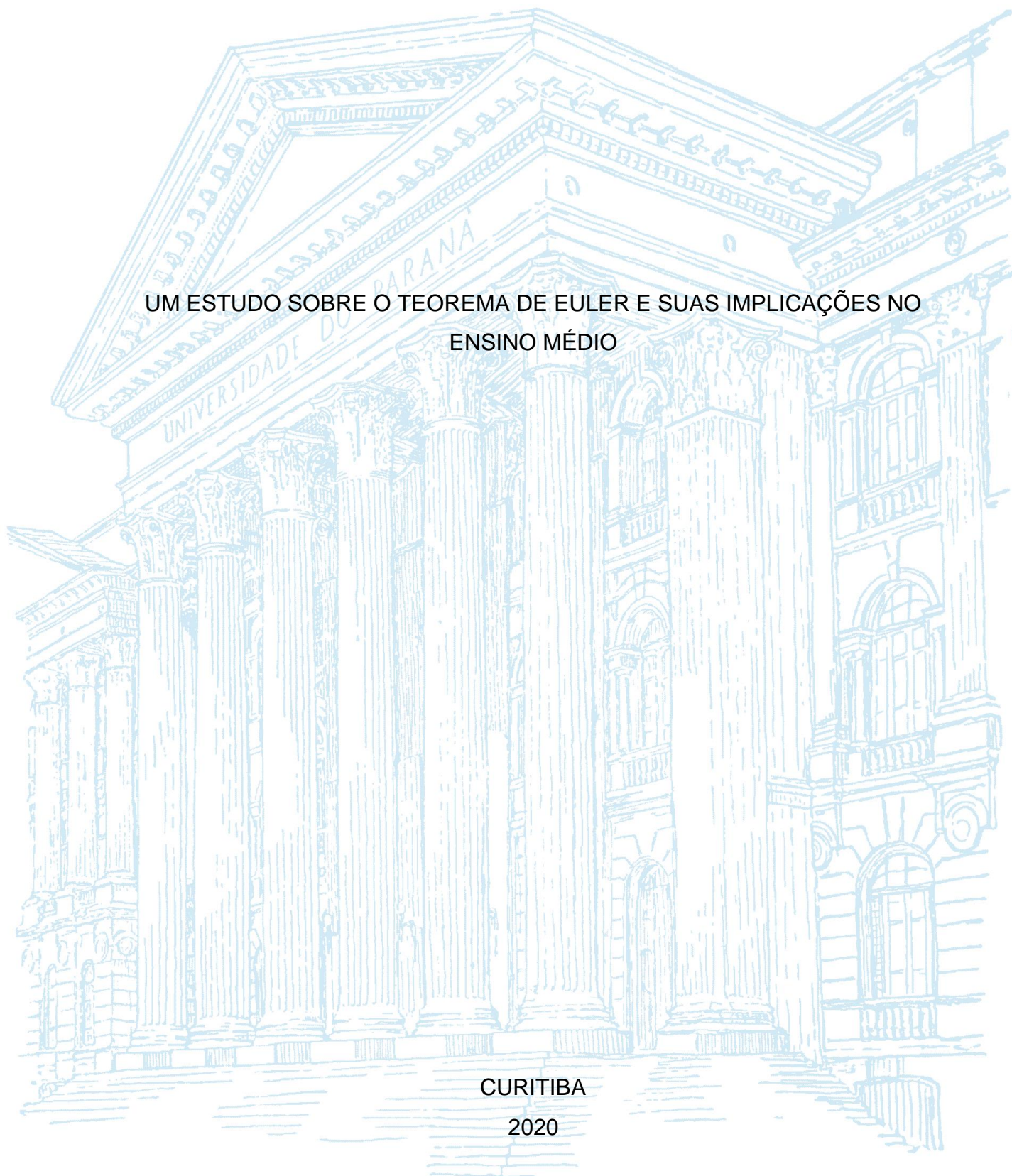
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ROBERTO HIDEO SEIMA

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE EULER E SUAS IMPLICAÇÕES NO
ENSINO MÉDIO

CURITIBA

2020



ROBERTO HIDEO SEIMA

UM ESTUDO SOBRE O TEOREMA DE EULER E SUAS IMPLICAÇÕES NO
ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

CURITIBA

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE – SIBI/UFPR

S461e Seima, Roberto Hideo

Um estudo sobre o Teorema de Euler e suas implicações no ensino médio [recurso eletrônico]/ Roberto Hideo Seima - Curitiba, 2020.

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto

1. Matemática. 2. Teoria de Euler. I. Pinto, Aldemir José da Silva. II. Título. III. Universidade Federal do Paraná.

CDD 514

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ROBERTO HIDEO SEIMA** intitulada: **Um estudo sobre o Teorema de Euler e suas implicações no Ensino Médio.**, sob orientação do Prof. Dr. ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Outubro de 2020.

Assinatura Eletrônica

27/10/2020 11:06:44.0

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

25/10/2020 09:46:11.0

WILLIAN RIBEIRO VALENCIA DA SILVA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE COIMBRA - PORTUGAL)

Assinatura Eletrônica

23/10/2020 21:58:57.0

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho à minha família, principalmente aos meus filhos Milena e Henrique e minha esposa Maristela que são corresponsáveis por essa conquista.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida.

Agradeço à minha família por todo apoio para que este trabalho fosse realizado.

Agradeço aos meus filhos, razão do meu viver.

Agradeço à minha esposa pela motivação para que eu concluísse este mestrado e pela paciência por não estar tão presente em alguns momentos.

Agradeço a todos os Professores Doutores que ministraram aulas no PROFMAT, principalmente ao Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto, que aceitou o desafio de me orientar e contribuir para que este trabalho fosse concluído.

Agradeço aos componentes da banca examinadora Prof. Dr. Willian Ribeiro Valencia da Silva e Prof.^a Dr.^a Adriana Luiza do Prado pelas contribuições.

O verdadeiro objetivo da educação científica deve ser o de habituar gradativamente os alunos a pensar por si próprios, de maneira lógica dedutiva. (GARBI, 2010, p.10).

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar demonstrações do Teorema de Euler para poliedros. Serão apresentados grandes responsáveis pela construção de conceitos e teoremas que caracterizam a geometria que conhecemos hoje. Dar-se-á algumas possibilidades didáticas envolvendo a relação de Euler $V - A + F$, de modo a incentivar os estudantes a conjecturar e generalizar conceitos que são perceptíveis com esta relação envolvendo os elementos de um poliedro. Discorrerá sobre algumas demonstrações do Teorema de Euler, algumas simples, outras nem tanto, mas todas compreensíveis para professores do Ensino Médio. Para os poliedros convexos onde o Teorema de Euler é $V - A + F = 2$, serão apresentadas e analisadas demonstrações deste teorema, algumas possuem incorreções, e outras são consideradas acessíveis aos professores e alunos do Ensino Médio. Em relação aos poliedros homeomorfos à esfera, temos a apresentação da demonstração de Cauchy.

Palavras-chave: Teorema de Euler. Demonstrações. Poliedros.

ABSTRACT

The goal of this work is to present proofs of Euler's Theorem for polyhedra. There will be presented great people responsible for the construction of concepts and theorems which characterize geometry as known today. Some didactic possibilities involving Euler's relation $V - A + F$ will be given, so as to encourage students to conjecture and generalize concepts that are observable with this relationship among the elements of a polyhedron. We will discourse upon some proofs of Euler's Theorem, some simple, others not so much, but all of them understandable by high school teachers. For the convex polyhedra, where Euler's Theorem is $V - A + F = 2$, proofs of this theorem will be presented and analyzed; some have inaccuracies, and others are considered accessible to high school teachers and students. Regarding to the polyhedra which are homeomorphic to the sphere, we present the proof due to Cauchy.

Keywords: Euler's Theorem. Proofs. Polyhedra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – TALES DE MILETO.....	16
FIGURA 2 – PITÁGORAS DE SAMOS.....	17
FIGURA 3 – BUSTO DE PLATÃO	18
FIGURA 4 – EUCLIDES DE ALEXANDRIA	19
FIGURA 5 – LEONHARD EULER.....	20
FIGURA 6 – SÓLIDO NÃO POLIÉDRICO.....	21
FIGURA 7 – POLIEDRO COM UM FURO	21
FIGURA 8 – POINCARÉ	22
FIGURA 9 – POLIEDROS E A CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ	23
FIGURA 10 – POLIEDROS CONVEXOS EM ACRÍLICO	25
FIGURA 11 – SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA COM UM BURACO	25
FIGURA 12 – FIGURAS DIMENSIONAIS E A RELAÇÃO $V - A + F$	26
FIGURA 13 – FIGURAS TRIDIMENSIONAIS E A RELAÇÃO $V - A + F$	26
FIGURA 14 – POLIEDROS E A RELAÇÃO $V - A + F$	27
FIGURA 15 – POLÍGONO CONVEXO FORMADO POR CINCO PONTOS	31
FIGURA 16 – POLÍGONO NÃO CONVEXO FORMADO POR CINCO PONTOS.....	32
FIGURA 17 – REGIÃO POLIGONAL COM CINCO PONTOS	32
FIGURA 18 – EXEMPLOS DE POLIEDROS	33
FIGURA 19 – EXEMPLO DE NÃO POLIEDRO	33
FIGURA 20 – POLIEDROS CONVEXOS.....	34
FIGURA 21 – OS CINCO POLIEDROS REGULARES	35
FIGURA 22 – TRIÂNGULOS A SEREM RETIRADOS (1)	41
FIGURA 23 – EXEMPLO DE POLIEDRO COM $\chi=3$	42
FIGURA 24 – TRIÂNGULOS A SEREM RETIRADOS (2)	43
FIGURA 25 – O PONTO x DA ESFERA E É A PROJEÇÃO RADIAL DO PONTO X DO POLIEDRO P	46
FIGURA 26 – O TRIÂNGULO ESFÉRICO t , SOBRE A ESFERA E , É A PROJEÇÃO RADIAL DO TRIÂNGULO T	46
FIGURA 27 – PROJEÇÃO RADIAL DE UM SEGMENTO DE RETA AB E ÂNGULO α FORMADO POR ARCOS.....	47
FIGURA 28 – POLIEDRO SIMPLES.....	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	POLIEDROS E A RELAÇÃO $V - A + F$.....	15
2.1	ASPECTOS HISTÓRICOS.....	15
2.2	IDEIAS DE ATIVIDADES ENVOLVENDO A RELAÇÃO $V - A + F$	23
2.2.1	Uma Experiência da 2ª série do Ensino Médio.....	27
3	DEFINIÇÕES E NOMENCLATURA.....	31
3.1	POLÍGONO CONVEXO.....	31
3.2	POLÍGONO NÃO CONVEXO.....	32
3.3	POLIEDRO.....	33
3.4	CONJUNTO CONVEXO.....	33
3.5	SUPERFÍCIE POLIÉDRICA LIMITADA CONVEXA.....	34
3.6	POLIEDRO CONVEXO	34
3.7	POLIEDRO REGULAR.....	35
3.8	POLIEDRO DE PLATÃO.....	35
3.9	SUBPOLIEDRO.....	35
3.10	ARESTA LIVRE.....	35
3.11	VÉRTICE LIVRE.....	36
3.12	POLIEDROS CONEXOS.....	36
3.13	BORDO DA SUPERFÍCIE POLIÉDRICA	36
3.14	CICLO NUM POLIEDRO.....	36
3.15	POLÍGONO SIMPLES	36
3.16	POLIEDRO SIMPLES.....	36
3.17	POLIEDROS EULERIANOS.....	37
4	O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS.....	38
4.1	TEOREMA DE EULER APLICADO A DEMONSTRAÇÕES ENVOLVENDO POLIEDROS	38
4.2	DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS.....	40
4.2.1	Análise da Demonstração de Cauchy.....	40
4.2.2	A Demonstração de Zoroastro.....	43
4.2.3	As Demonstrações Simples.....	47
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52

REFERÊNCIAS.....	54
------------------	----

1 INTRODUÇÃO

A geometria está presente em toda a parte. Percebemos a geometria na natureza, na construção civil, na fabricação de embalagens e materiais utilizados no dia a dia. A base de toda a geometria utilizada hoje é fruto do desenvolvimento de grandes povos. As civilizações da Antiguidade como a egípcia e a grega, entre outras, perceberam as propriedades das figuras e suas utilidades. Podem-se encontrar vários registros e construções feitos pelos povos da Antiguidade que, até os dias atuais, permanecem sendo admirados e reconhecidos como importantes feitos para o progresso e desenvolvimento da população mundial. Sendo assim, ao longo da história, a geometria foi se desenvolvendo e se transformou em um dos ramos mais importantes da Matemática.

Neste trabalho será apresentado um estudo voltado aos poliedros, por ser um tema importante, tanto pelo interesse histórico e teórico, quanto pelas aplicações no cotidiano. Muitos objetos têm a forma de prismas ou de pirâmides, quais sejam: caixas para embalagens, reservatórios, monumentos, móveis e utensílios. Assim, fazem-se necessários os estudos das formas e suas propriedades para a própria construção desses objetos: é a parte funcional do estudo, que tem sido valorizado nos programas escolares. “O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.” (Parâmetros Curriculares Nacionais, 1997, p. 39).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000) é através de um trabalho adequado de geometria que os alunos são estimulados a desenvolver as habilidades de visualização, desenho e argumentação lógica no sentido de aplicar e utilizar as formas e propriedades geométricas na representação e solução de situações-problema que os cercam.

Por outro lado, há um tipo de estudo que se faz com o objetivo de obter um conhecimento que vai além da aplicação imediata e concreta. É o caso de certas propriedades geométricas não aplicáveis para a construção de qualquer objeto, mas que descrevem particularidades de um conjunto de formas. Um exemplo desse tipo de propriedade é o conhecido Teorema de Euler para poliedros, que relaciona os números de vértices, faces e arestas de um poliedro. O estudo de teoremas e das suas demonstrações ajuda o estudante a desenvolver a capacidade de argumentar

logicamente e a compreender as bases da Geometria. Pensando desta forma, as situações envolvendo o Teorema de Euler devem ser aproveitadas e utilizadas com os alunos do Ensino Médio, visando incentivar os mesmos a conjecturar e generalizar conceitos que são perceptíveis com este teorema.

Serão apresentados no capítulo 2 aspectos históricos sobre os Poliedros e o Teorema de Euler; ainda neste capítulo serão apresentadas algumas ideias de atividades que podem ser aplicadas no Ensino Médio de modo a desenvolver as habilidades destacadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

Existem demonstrações para este teorema que são simples e outras nem tanto, porém em qualquer caso, é importante lembrar que as definições dos objetos e conceitos utilizados são primordiais para o desenvolvimento e verificação da validade de um teorema. Por isso é necessário apresentar, definir e nomear os objetos que serão abordados; isso será feito no capítulo 3.

O último capítulo do trabalho apresenta as várias demonstrações do Teorema de Euler. São explanadas algumas demonstrações desse teorema para poliedros convexos, sendo que algumas são consideradas simples, porém com incorreções que serão identificadas e analisadas. Outras são corretas e acessíveis aos professores e alunos do Ensino Médio. A demonstração de Cauchy é apresentada e analisada de acordo com o exposto no livro *Meu Professor de Matemática* de Elon Lages Lima. Uma consequência da análise da demonstração de Cauchy é que ela fornece a solução para as incorreções e falhas encontradas nas demonstrações elementares.

2 POLIEDROS E A RELAÇÃO $V = A + F$

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Uma tarefa bastante difícil é verificar quando a Geometria originou-se pois, como escreve Boyer (1996, p. 4) “foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita.”

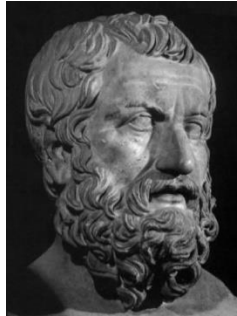
Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, porém é certo que a geometria utilizada e apresentada pelos egípcios possuía raízes mais antigas. Os dois tinham opiniões diferentes sobre a origem da geometria. Aristóteles acreditava que a geometria teve origem na classe sacerdotal do Egito onde eles buscavam lazer e ritual. Heródoto acreditava que a necessidade em medir terras após cada inundação anual no vale do rio, teria motivado a origem da geometria. Não se pode contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a geometria, porém é claro que ambos subestimaram, por exemplo, o homem neolítico que pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade em medir terras, porém os seus desenhos, figuras, potes, tecidos e cestas mostram preocupação com as relações espaciais e mostram exemplos de simetria e congruência. (BOYER, 1996)

A geometria, é claro, foi sendo desenvolvida continuamente por grandes civilizações da Antiguidade como a egípcia já mencionada, a mesopotâmica, a babilônica, a chinesa, entre outras. Porém, a civilização que contribuiu para uma geometria dedutiva foi a civilização grega, iniciando, mais precisamente, com Tales de Mileto. De acordo com Garbi (2009, p. 22) “Jamais saberemos como ocorreu a Tales a revolucionária ideia que deu rumos definitivos ao pensamento matemático, ou seja, a de que suas verdades devem ser justificadas, demonstradas e provadas por meio do raciocínio.”

Muitos autores consideram que Tales de Mileto foi o primeiro filósofo e o primeiro matemático grego. No entanto, dizem também que não há registros; por exemplo, Garbi (2005) relata em *A Rainha das Ciências*, que a data de seu nascimento e morte é incerta, porém é provável que tenha vivido entre 640 a.C e 564 a.C.; não se sabe em que circunstâncias Tales começou a se interessar pela geometria, porém é provável que em viagem ao Egito, tenha obtido conhecimentos

sobre geometria onde conheceu as pirâmides em companhia do faraó Amasis e ficou encantado com as construções e monumentos. Ali, Tales teria protagonizado um dos acontecimentos máximos da história da geometria: calculou a altura da pirâmide de Quéops através de triângulos semelhantes, que foram obtidos pelas sombras da pirâmide e de um bastão que plantara verticalmente no chão.

FIGURA 1 – TALES DE MILETO



FONTE: <http://scientia.educacionalplenus.com.br/tales-de-mileto/>

Acesso em: 03 out. 2019

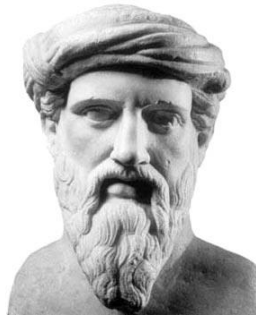
Certamente, Tales de Mileto foi um grande matemático, e um dos motivos para isso foi a sua preocupação em provar e demonstrar as verdades matemáticas, tendo desta forma contribuído significativamente para o desenvolvimento da Matemática que conhecemos hoje. Tales de Mileto inspirou vários outros matemáticos ao longo da história, um deles foi Pitágoras de Samos. De acordo com Garbi (2005, p. 25) “Alguns historiadores antigos afirmam que houve contato pessoal entre Pitágoras e Tales, mas outros historiadores têm dúvidas sobre isso. Entretanto é certo que Pitágoras foi fortemente influenciado pelas ideias de Tales.”

As datas de nascimento e de morte de Pitágoras de Samos, são incertas; Garbi (2005, p. 25) registra: “O período em que transcorreu sua vida não é conhecido com exatidão, mas conjectura-se que tenha sido de 586 a.C. a 500 a.C.”, e também a respeito da escola pitagórica:

[...] Pitágoras fundou, por volta de 540 a.C., uma escola voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática. Tal escola reuniu muitos discípulos interessados naqueles temas e acabou por se transformar em uma sociedade secreta [...] Embora Tales tenha sido o primeiro a declarar que as verdades matemáticas devem ser provadas pelo raciocínio, acredita-se que foram os pitagóricos os primeiros a produzir demonstrações razoavelmente rigorosas. (GARBI, 2005, p. 26).

A Geometria tem dois grandes tesouros e um deles é o chamado Teorema de Pitágoras. Este teorema apresenta a propriedade geral dos triângulos retângulos e, muito provavelmente, veio dos babilônios, porém de acordo com as fontes históricas da Geometria ele passou a ser chamado de Teorema de Pitágoras, pois foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele. (BOYER, 1996).

FIGURA 2: PITÁGORAS DE SAMOS



FONTE: <https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pitagoras.htm>

Acesso em: 03 out. 2019

Os pitagóricos tiveram uma participação importante na história da Geometria. “Na geometria espacial os pitagóricos já conheciam três dos cinco poliedros regulares, tetraedro, cubo e dodecaedro. O octaedro e o icosaedro foram descobertos mais tarde, por Teeteto, discípulo de Platão.” (GARBI, 2005, p. 33)

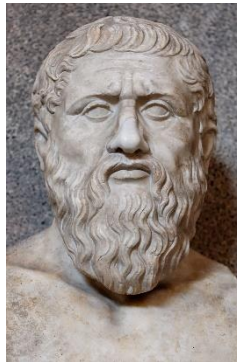
Os poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), fascinam os homens desde a Antiguidade por serem exemplos de formas esteticamente harmônicas, e apresentam na história certo misticismo. De acordo com Boyer (1996) os poliedros regulares ou sólidos platônicos eram relacionados aos quatro elementos, sendo o tetraedro fogo, o hexaedro terra, o octaedro o ar, o icosaedro a água e o dodecaedro o símbolo do universo.

Os poliedros regulares frequentemente foram chamados de ‘corpos cósmicos’ ou ‘sólidos platônicos’ devido à maneira pela qual Platão no *Timaeus* os aplicou à explicação de fenômenos científicos. Embora esse diálogo, escrito provavelmente quando Platão estava perto dos setenta anos, seja a mais antiga evidência definida da associação dos quatro elementos com os sólidos regulares, muito desta fantasia deve-se aos pitagóricos. [...] Ao dodecaedro Platão tinha atribuído papel especial como representante do universo, dizendo enigmaticamente que ‘Deus usou-o para o todo’ (*Timaeus*, 55C). Platão considerava o dodecaedro como composto de 360 triângulos retângulos escalenos, pois, quando em cada uma das faces pentagonais são traçadas as cinco diagonais e as cinco medianas, cada uma das doze faces conterá trinta triângulos retângulos. A associação dos quatro primeiros sólidos regulares com os tradicionais quatro elementos

universais, forneceu a Platão, no *Timaeus*, uma teoria da matéria harmoniosamente unificada, de acordo com a qual tudo era constituído de triângulos retângulos ideais. Toda a fisiologia, bem como as ciências da matéria inerte, está baseada, no *Timaeus*, nesses triângulos. (BOYER, 1996).

“Platão (427 a.C.-347 a.C), [...],soube reconhecer o valor da Matemática não apenas por ser indispensável à compreensão do mundo físico mas, também, por habituar seus praticantes a conduzir o raciocínio de maneira lógica.”(GARBI, 2009, p. 46).

FIGURA 3: BUSTO DE PLATÃO



FONTE: <http://www.acervofilosofico.com/platao-e-o-mundo-das-ideias/>

Acesso em: 03 out. 2019

Platão foi um grande inspirador de matemáticos e tinha vários discípulos, um deles era Teeteto, que descobriu os poliedros regulares octaedro e icosaedro.

Boyer (1996, p. 59) afirma que “Parece provável que, em qualquer caso, Teeteto tenha feito um dos estudos mais extensos dos cinco sólidos regulares e a ele provavelmente se deve o teorema que diz que há somente cinco poliedros regulares.”

Os poliedros aparecem também mencionados e estudados por Euclides de Alexandria.

Euclides de Alexandria foi um grande geômetra, porém não se sabe onde e quando nasceu ou morreu. O que se sabe é que ele foi o autor da obra *Os elementos*, e que Euclides escreveu este e outros livros quando foi diretor da área de Matemática do Museu de Alexandria. A obra *Os elementos*, é o livro de Matemática mais antigo ainda em vigor nos dias de hoje e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos. (GARBI, 2009).

FIGURA 4: EUCLIDES DE ALEXANDRIA



FONTE: <https://www.ebiografia.com/euclides/>

Acesso em: 03 out. 2019

Na obra *Os Elementos*, os poliedros regulares tiveram um destaque especial no livro XIII, último da obra. Boyer (1996, p. 81) relata que “O último livro é inteiramente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares, fato que levou alguns historiadores a dizer que *Os elementos* foram compostos como uma glorificação das figuras cósmicas ou platônicas.”

Euclides termina os *Elementos* com estas célebres palavras: 'Eu digo agora que nenhuma outra figura (poliedro regular) além das cinco mencionadas pode ser construída, delimitada por polígonos regulares iguais entre si. Porque um ângulo sólido não pode ser construído com dois triângulos ou dois planos. Com três triângulos constrói-se o ângulo do tetraedro, com quatro o do octaedro e com cinco o do icosaedro. Mas um ângulo sólido não pode ser construído com seis triângulos equiláteros iguais colocados juntos em um ponto porque, sendo o ângulo do triângulo equilátero igual a dois terços do ângulo reto, seis deles são iguais a quatro retos o que é impossível porque qualquer ângulo sólido é contido por ângulos planos que somam menos do que quatro retos. Pela mesma razão, nenhum ângulo sólido pode ser construído com mais de seis triângulos. Com três quadrados iguais constrói-se o ângulo do cubo mas com quatro (ou mais) é impossível porque, novamente, sua soma seria quatro retos (ou mais). Com três pentágonos regulares iguais constrói-se o ângulo do dodecaedro mas é impossível conter um ângulo com quatro pentágonos porque, como o ângulo do pentágono regular é um reto e um quinto, a soma dos quatro ângulos seria maior do que quatro retos, o que é impossível. Novamente, nenhum ângulo sólido pode ser contido por outros polígonos regulares iguais, em razão do mesmo absurdo'. (GARBI, 2009, p. 77).

Será feito neste momento um salto cronológico, da época a.C para o século XVIII d.C, quando viveu um dos mais importantes matemáticos, Leonhard Euler que foi responsável pelo teorema que relaciona os números de faces, arestas e vértices de um poliedro, conhecido como Teorema de Euler.

“Parece que meu lápis me supera em inteligência.” Essa frase teria sido dita pelo suíço Leonhard Euler sobre sua capacidade de produzir e criar em Matemática.

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basileia e com apoio e instrução de seu pai estudou matemática e somou estudos em Teologia, Medicina, Astronomia, Física e línguas orientais. Em 1730 ocupou a cadeira de Filosofia Natural na Academia de S. Petersburgo e logo se tornou o principal matemático da Academia. Casou-se e fixou-se a sério na pesquisa matemática e na fundação de uma família que veio a incluir treze filhos. Euler passou os últimos dezessete anos de sua vida em total cegueira, porém esse problema não foi grande o bastante para que Euler desistisse das suas pesquisas e publicações. Sua pesquisa matemática chegava em média a 800 páginas por ano durante toda a sua vida; nenhum matemático jamais superou a produção desse homem que viveu até 1783. (BOYER, 1996).

FIGURA 5: LEONHARD EULER



FONTE: <http://clubes.obmep.org.br/blog/leonhard-euler/>

Acesso em: 03 out. 2019

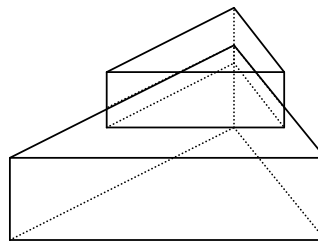
Em *A Rainha das Ciências*, G. G. Garbi (2009) escreve que Euler contribuiu grandemente para o desenvolvimento da Teoria dos Números, porém teve também grande influência quando se trata da Geometria. Ele escreveu cerca de 1600 páginas dedicadas à Geometria na obra *Opera Omnia*, mostrando o seu interesse pelo tema que parecia ter sido esgotado na Antiguidade. O primeiro teorema que nos é ensinado relacionado a Euler refere-se à relação existente entre os vértices, as faces e as arestas de um poliedro ou, mais precisamente: se ao número de vértices for somado o número de faces e então subtraído o número de arestas o resultado será sempre igual a dois ($V + F - A = 2$).

O Teorema de Euler foi descoberto em 1758 e diz que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces então $V - A + F = 2$. Antes de Euler, Descartes pode ter chegado à relação, pois há um manuscrito dele, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contém resultados a partir dos quais se

poderia obter a fórmula $V - A + F = 2$ como consequência imediata. Não se sabe se Descartes observou isso. (LIMA, 1991).

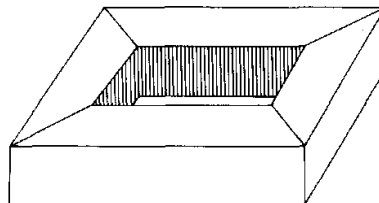
É verdade que todo poliedro convexo satisfaz a relação de Euler, mas é fácil achar exemplos de poliedros não convexos para os quais ela ainda vale. É importante chamar a atenção do leitor para o fato de existirem sólidos de faces planas onde não vale a relação de Euler. Um exemplo pode ser visto na FIGURA 6: ali, $V - A + F = 3$, mas tal sólido não é um poliedro (uma de suas faces não é um polígono e sim um triângulo furado). Por outro lado, em poliedros com um furo, como mostra a FIGURA 7, tem-se $V - A + F = 0$.

FIGURA 6: SÓLIDO NÃO POLIÉDRICO



FONTE: Próprio Autor

FIGURA 7: POLIEDRO COM UM FURO



FONTE: Lima (1991)

Pode-se perceber que o Teorema de Euler não vale para o poliedro da FIGURA 7, desta forma é muito provável que Euler não considerava esta figura um poliedro pois, para figuras como esta o seu teorema é falso. De acordo com Lima (1991), Euler nunca se deu o trabalho em definir precisamente poliedro.

A controvérsia de encontrar uma forma de generalizar o Teorema de Euler perdurou durante mais de um século. A solução definitiva do problema deve-se a Poincaré, primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia e não de Geometria, ao notar que o número $V - A + F$ é um invariante topológico do poliedro P . (LIMA, 1991).

Poincaré nasceu em Nancy, cidade que iria abrigar bom número de grandes matemáticos no século vinte. [...] Tinha vista fraca e era muito distraído, mas, como Euler, tinha notável capacidade para exercícios mentais em todos os aspectos do pensamento matemático. Após graduar-se na École Polytechnique em 1875 ele obteve um diploma em engenharia de minas, em 1879, e ficou ligado ao Departamento de Minas pelo resto de sua vida. Em 1879 ele obteve também um doutorado em ciência na Universidade de Paris, onde, até sua morte em 1912, teve vários postos de professor de matemática e ciência. (BOYER, 1996, p. 418).

FIGURA 8: POINCARÉ



FONTE: <https://www.somatematica.com.br/biograf/poincare.php>

Acesso em: 03 out. 2019

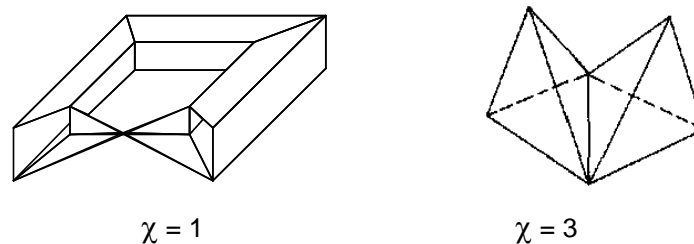
A Topologia onde está inserida o Teorema de Euler, com frequência é chamada, popularmente, de geometria de borracha, pois deformações de um balão, por exemplo, sem furá-lo ou rasgá-lo, são exemplos de transformações topológicas. De acordo com Courant e Robbins (2000, p. 285) “A Topologia tem como objeto o estudo das propriedades de figuras geométricas que persistem mesmo quando as figuras são submetidas a deformações tão drásticas que todas suas propriedades métricas e projetivas são perdidas.” Um círculo, por exemplo, é topologicamente equivalente a uma elipse; a dimensão de um espaço é um invariante topológico, como também o número de Euler $V - A + F$ para poliedros.

Lima (1991) explica que $V - A + F$ é um invariante topológico do poliedro P , recorrendo à definição de homeomorfismo: Dizemos que duas figuras P e Q são homeomorfas quando existe uma transformação contínua $f: P \rightarrow Q$ cuja inversa $f^{-1}: Q \rightarrow P$ também é contínua. (Neste caso, f chama-se um homeomorfismo de P sobre Q).

Lima (1991) explica que atualmente se usa a letra χ para designar o número $V - A + F$, que é chamado a característica de Euler-Poincaré do poliedro, e que a afirmação de que poliedros homeomorfos têm a mesma característica de Euler-Poincaré se exprime dizendo que $\chi(P)$ é um invariante topológico do poliedro P .

Informa, ainda, que para todo número inteiro n positivo, negativo ou zero, existe um poliedro cuja característica de Euler-Poincaré é n . A FIGURA 9 mostra dois poliedros, um deles com χ igual a 1 e outro com χ igual a 3. O poliedro da esquerda apresenta na vista frontal 4 faces triangulares, sendo que os quadriláteros não são faces e sim buracos; o da direita é como se fossem dois tetraedros com uma aresta comum.

FIGURA 9: POLIEDROS E A CARACTERÍSTICA DE EULER-POINCARÉ



FONTE: Lima (1991)

O Teorema de Euler apresenta grandes possibilidades de intervenções pedagógicas e didáticas em sala de aula, principalmente no Ensino Médio. As possibilidades passam desde a importância de definir os objetos estudados para que sejam verificadas as propriedades e relações existentes entre eles, até as demonstrações e verificações de regularidades que cercam os poliedros. Assim, nos próximos capítulos serão abordadas as definições e preliminares para o estudo dos poliedros, de modo que alguns teoremas possam ser demonstrados sem que haja incorreções ou dúvidas sobre o que se está provando.

2.2 IDEIAS DE ATIVIDADES ENVOLVENDO A RELAÇÃO DE EULER

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000, p.40) “A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana”.

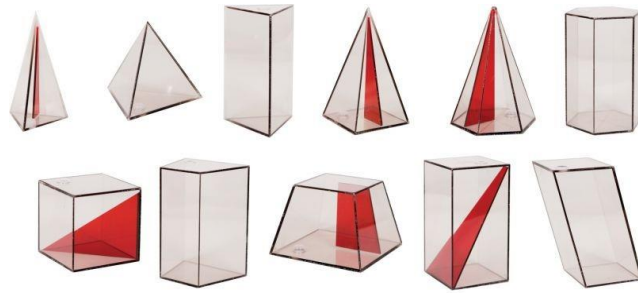
A geometria é um dos ramos da matemática que apresenta grandes possibilidades para o desenvolvimento do ensino aprendizagem, desde o estudo nas relações com o cotidiano até um tipo de estudo que se faz com o objetivo de obter um conhecimento que vai além da aplicação imediata e concreta. É o caso de certas

propriedades geométricas não aplicáveis para a construção de qualquer objeto, mas que descrevem particularidades de um conjunto de formas. Um exemplo desse tipo de propriedade é o conhecido Teorema de Euler para poliedros, que relaciona os números de vértices, faces e arestas de um poliedro. O estudo de teoremas e das suas demonstrações ajuda o estudante a desenvolver a capacidade de argumentar logicamente e a compreender as bases da Geometria. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000): é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Pensando desta forma, as situações envolvendo o Teorema de Euler devem ser aproveitadas e utilizadas com os alunos do Ensino Médio, visando incentivar os mesmos a conjecturar e generalizar conceitos que são perceptíveis com este teorema.

Sobre o ensino dos Poliedros no Ensino Médio o foco é dado aos Poliedros Convexos. De modo geral são apresentados os cinco poliedros regulares, os prismas e as pirâmides. Desenvolver atividades envolvendo as relações entre os vértices, arestas e faces de um poliedro convexo passa a ser uma boa estratégia para que os estudantes possam perceber relações e regularidades entre as figuras. Uma atividade que pode ser aplicada aos estudantes do Ensino Médio pode ser intitulada como: Do Espaço para o Plano. Uma ideia para o desenvolvimento desta atividade está descrita a seguir:

- a) Uma forma de trabalhar com a relação $V - A + F$ é utilizar uma superfície poliédrica fechada, por exemplo, apresentar aos alunos as superfícies poliédricas representadas na FIGURA 10 onde os mesmos podem verificar com facilidade que $V - A + F = 2$. A seguir, o professor pode solicitar aos alunos que analisem o que acontece com o número $V - A + F$ quando são retiradas uma a uma as faces desses poliedros.

FIGURA 10: POLIEDROS CONVEXOS EM ACRÍLICO



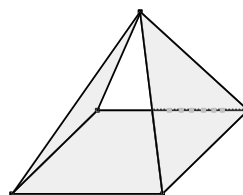
FONTE: <https://mmpmateriaispedagogicos.com.br/produto/solidos-geometricos-em-acrilico/>

Acesso em: 24 out. 2019

Antes da retirada de faces os alunos verificam que $(V - A + F = 2)$, que é o Teorema de Euler. O professor pode explicar aos alunos em linguagem informal que o Teorema de Euler é verificado quando o objeto estudado aprisiona uma porção do espaço. Sendo assim, o professor pode lançar uma questão para instigar os alunos. O que acontece quando retiramos uma face de cada poliedro? ou seja, o que acontece com o número $V - A + F$ quando o objeto analisado não mais aprisiona uma porção do espaço?

Ao retirar uma face de cada um dos poliedros apresentados os alunos calculam novamente o número $V - A + F$ e percebem que o resultado encontrado é 1, eles anotam o resultado e calculam o número $V - A + F$ quando é retirada as faces seguintes uma a uma, até que fique somente uma face. Com a retirada sucessiva das faces os estudantes devem anotar os resultados. Pode acontecer duas situações: a primeira é o resultado $V - A + F = 1$, a segunda é o resultado $V - A + F = 0$. A segunda acontece quando a figura resultante apresenta um buraco como na FIGURA 11. Com a retirada de duas faces laterais não consecutivas de uma pirâmide quadrangular pode-se perceber que a figura apresenta um buraco, e o número $V - A + F$ encontrado é zero.

FIGURA 11: SUPERFÍCIE POLIÉDRICA ABERTA COM UM BURACO

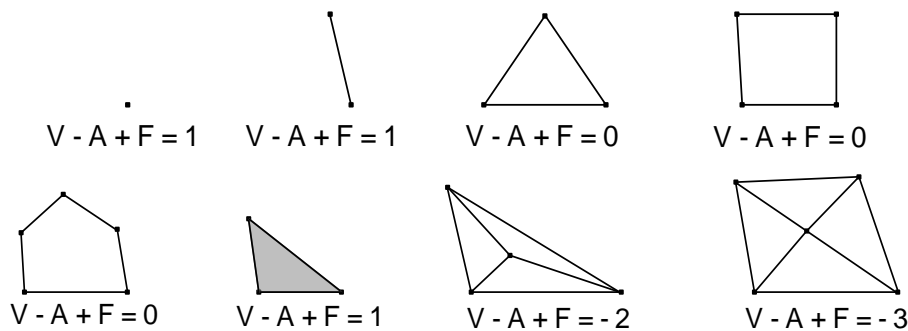


FONTE: Próprio Autor

Com o exercício de verificar o que acontece com o número $V - A + F$, quando se retira ou não as faces de um poliedro, os alunos têm a oportunidade de conjecturar e generalizar. Percebem que, quando é retirada uma face de uma superfície poliédrica o número $V - A + F$ é igual a 1; uma superfície poliédrica com um furo apresenta o número $V - A + F = 0$ e uma superfície poliédrica fechada que aprisiona uma porção do espaço apresenta o número $V - A + F = 2$.

b) Outra forma de instigar os alunos a pensarem no número $V - A + F$ é apresentar várias figuras; pode-se utilizar figuras bidimensionais e tridimensionais e solicitar que os alunos determinem o valor de $V - A + F$ em cada caso. Por exemplo, na FIGURA 12 são apresentados objetos bidimensionais, com os respectivos valores que os caracterizam pela relação $V - A + F$.

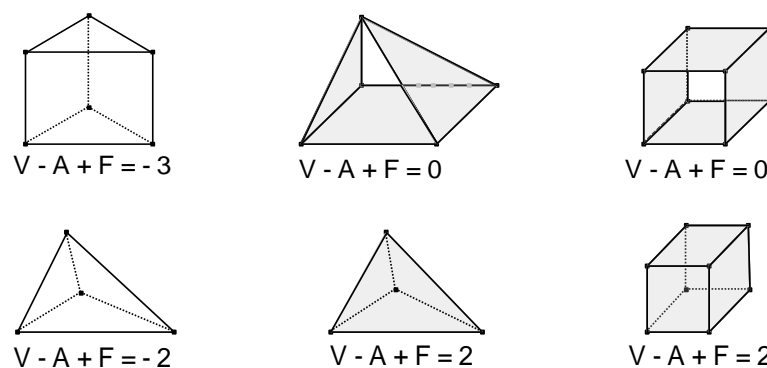
FIGURA 12: FIGURAS BIDIMENSIONAIS E A RELAÇÃO $V - A + F$



FONTE: Próprio Autor

Na FIGURA 13, são apresentados objetos tridimensionais, com os respectivos valores que os caracterizam pela relação $V - A + F$.

FIGURA 13: FIGURAS TRIDIMENSIONAIS E A RELAÇÃO $V - A + F$



FONTE: Próprio Autor

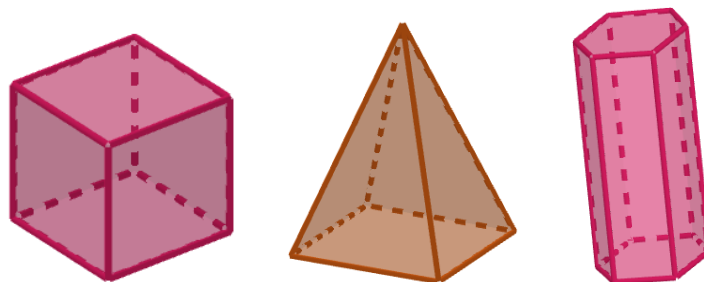
A seguir, o professor pode solicitar aos alunos que organizem as figuras agrupando-as de acordo com o valor encontrado para a relação $V - A + F$. Depois disso pode ser realizada uma discussão na qual o objetivo principal deve ser encontrar justificativas ou relações que podem ser observadas pelos objetos que possuem mesma característica de Euler, que é encontrada pela relação $V - A + F$. Exemplos de questionamentos:

- Qual a relação entre os objetos que possuem características de Euler -3, -2, 0, 1 e 2? Relacione os objetos que apresentam a mesma característica de Euler.
- Os poliedros que apresentam $V - A + F = 2$, são chamados de poliedros eulerianos. O que acontece com a característica desses poliedros quando é retirado deles uma face qualquer?

2.2.1 Uma experiência na 2ª série do Ensino Médio

No Colégio Estadual Monteiro Lobato na cidade de Araucária/PR foi realizada uma atividade para introduzir o conhecido Teorema de Euler para Poliedros Convexos que relaciona seus vértices, arestas e faces. A atividade se deu com três poliedros convexos: Cubo, Pirâmide de base quadrangular e Prisma de base hexagonal, como mostra a FIGURA 14. Nesta atividade os estudantes foram questionados sobre o número $V - A + F$ para os poliedros convexos já citados; sobre o número $V - A + F$ para a superfície poliédrica quando retira-se uma das faces e, por último, sobre a superfície poliédrica quando retira-se as faces uma a uma, até que fique somente uma face.

FIGURA 14: POLIEDROS E A RELAÇÃO $V - A + F$



FONTE: Próprio Autor

Para os poliedros convexos apresentados os alunos contaram o número de vértices, faces e arestas, registraram essas quantidades e, em seguida, determinaram o número $V - A + F$. A grande maioria encontrou o resultado 2. Alguns estudantes contaram equivocadamente o número de faces, arestas ou vértices, apresentando assim incorreções no número $V - A + F$, com esses estudantes foi realizada a intervenção de forma individualizada, de modo a fazer com que o próprio estudante identificasse a incorreção e pudesse perceber que o número $V - A + F$ para os poliedros convexos apresentados era 2.

Algumas respostas para o questionamento: O que você observou com os resultados obtidos com $V - A + F$? foram:

- a) O resultado sempre será equivalente a dois;
- b) Observei que mesmo com os poliedros acima sendo diferentes o número da resposta não muda;
- c) Pude observar que todos os resultados foram iguais a 2.

Sobre o questionamento: O que acontece quando retiramos uma face de cada poliedro? Ou seja, o que acontece com o número $V - A + F$ quando o objeto analisado não mais aprisiona uma porção do espaço? Algumas respostas foram:

- a) Tirando uma face o $V - A + F$ vai ser igual a 1;
- b) Que tirando uma face o número de arestas e de vértices não muda e o resultado será sempre 1;
- c) Tirando uma face será retirada uma unidade da conta, tornando o resultado igualmente "1".

Percebe-se a dificuldade em registrar os resultados obtidos e argumentar sobre as situações, porém, os argumentos verbais em sala foram muito significativos. Um dos estudantes argumentou que era óbvio que o resultado sempre seria 1 pois, já sabemos que o resultado é 2 para os poliedros dados inicialmente, se tirar uma face, o resultado será diminuído de 1, pois com a retirada de uma face não altera o número de arestas e vértices, assim, o resultado de $V - A + F$ será 1.

Sobre o questionamento: Retire as faces uma a uma até que fique somente uma face. O que você pôde observar cada vez que retirou uma face? Percebe-se que muitos estudantes apresentam dificuldades em imaginar as faces sendo retiradas e enxergar a superfície poliédrica aberta resultante. Assim, foi necessário realizar uma intervenção para o cubo, apresentando no quadro de giz, a superfície poliédrica aberta resultante após cada retirada. Com a participação dos estudantes

foram escolhidas as faces a serem retiradas uma a uma. Tirando a base superior (teto do cubo) já calculamos que o resultado para o número $V - A + F$ é igual a 1, pois diminui uma face e o número de arestas e vértices permanecem inalteradas. Tirando na sequência a face lateral direita, percebe-se que o resultado para $V - A + F$ continua 1, pois o número de faces diminui em duas unidades, o número de arestas diminui em uma unidade e o número de vértices permanece inalterado. Tirando agora a base do cubo o resultado para $V - A + F$ continua 1, pois o número de faces diminui em três unidades, o número de arestas diminui em duas unidades e o número de vértices permanece inalterado. Na sequência tirando a face frontal, o resultado para $V - A + F$ continua 1, pois o número de faces diminui em quatro unidades, o número de arestas diminui em 5 unidades e o número de vértices diminui em duas unidades. Por fim, retirando a face lateral esquerda, sobra uma face do cubo e o número $V - A + F$ é igual a 1, pois o número de faces diminui em cinco unidades, o número de arestas diminui em oito unidades e o número de vértices diminui em 4 unidades. Assim, tirando as faces sucessivas uma a uma, selecionando faces que façam fronteira com o orifício aberto com a primeira retirada, podemos concluir que nesta superfície poliédrica aberta o número $V - A + F = 1$.

Utilizando o mesmo processo de retiradas das faces sucessivas do cubo com a pirâmide de base quadrangular e com o prisma de base hexagonal, verificou-se que o resultado de $V - A + F$ é igual a 1.

Como no questionamento não foi definido qual das faces deveriam ser retiradas, um grupo de alunos, retirou as faces de forma aleatória e, no cubo, perceberam que retirando a face lateral frontal, o resultado de $V - A + F$ é igual a 1, porém, na sequência retirando a face lateral oposta à anterior, o número $V - A + F$ é igual a zero, pois o número de faces diminui em duas unidades e o número de arestas e vértices permanecem inalterados. Na sequência tiraram a base do cubo, assim o número $V - A + F$ resultou em 1, pois o número de faces diminuiu em três unidades, o número de arestas diminuiu em duas unidades e o número de vértices permaneceu inalterado. A próxima face retirada foi a outra base do cubo, mas as faces que sobraram não mais formavam uma superfície poliédrica aberta, e sim dois quadrados. Calcularam o número $V - A + F$ e verificaram que o resultado foi igual a 2. Por fim retiraram a penúltima face, e o resultado de $V - A + F$ foi igual a 1, pois o número de faces diminui em cinco unidades, o número de arestas diminui em oito unidades e o número de vértices diminui em 4 unidades.

As retiradas aleatórias das faces realizadas por esse grupo de estudantes leva a uma reflexão sobre a importância de definir os objetos que serão estudados, bem como repensar sobre a maneira que se elabora uma questão, de modo a evitar situações que podem gerar dúvidas sobre o que se quer verificar.

3 DEFINIÇÕES E NOMENCLATURA

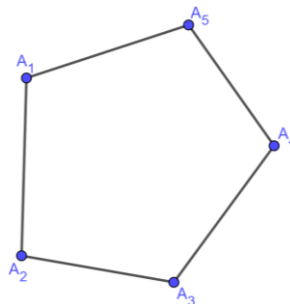
Neste capítulo serão apresentadas as definições utilizadas ao longo deste trabalho. As definições são importantes na Matemática porque é a partir delas que se reconhecem objetos pelo nome e se organizam os argumentos para demonstrar as propriedades e relacionar os objetos entre si. Frequentemente encontram-se diferenças nas definições que os autores enunciam. Essas diferenças se devem, em geral, à abrangência que o autor pretende em determinada obra. Inclusive, na Seção 4.2.1 será comentado um artigo cuja tônica é a definição de poliedro, ou melhor, a definição do objeto para o qual se adapta a demonstração de Cauchy.

O primeiro passo será apresentar a nomenclatura relacionada a poliedros utilizada pelos autores dos livros e artigos que serão comentados.

3.1 POLÍGONO CONVEXO

Com base em (BARBOSA, 1999) podemos definir *polígono convexo* da forma que segue. Seja $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2A_3 \dots A_n$ é um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n-1$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ e $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano dentre os que a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ determina.

FIGURA 15: POLÍGONO CONVEXO FORMADO POR CINCO PONTOS



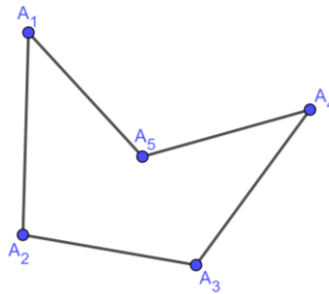
FONTE: Próprio Autor

No polígono da FIGURA 15, os pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são chamados de *vértices* e os segmentos de reta $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \overline{A_5A_1}$ são chamados de *lados*.

3.2 POLÍGONO NÃO CONVEXO

Com base em (BARBOSA, 1999) podemos definir *polígono não convexo* da forma que segue. Seja $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2A_3 \dots A_n$ é um polígono não convexo, ou côncavo se, para $1 \leq i \leq n-1$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ e $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa pelo menos um ponto fora do semiplano que a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ determina com os demais pontos.

FIGURA 16: POLÍGONO NÃO CONVEXO FORMADO POR CINCO PONTOS

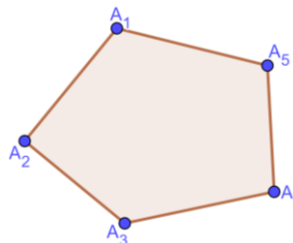


FONTE: Próprio Autor

A FIGURA 16 ilustra um polígono não convexo, onde o ponto A_4 não está no mesmo semiplano formado pela reta $\overleftrightarrow{A_5A_1}$ com os demais pontos.

Chama-se região poligonal, tanto de um polígono convexo quanto de um não convexo, à região do plano delimitada pelos lados de um polígono, um exemplo está na FIGURA 17.

FIGURA 17: REGIÃO POLIGONAL COM CINCO PONTOS



FONTE: Próprio Autor

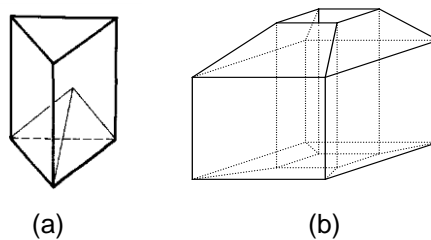
Neste trabalho será considerado polígono e região poligonal com o mesmo significado, visto que em algumas definições e demonstrações o termo polígono será usado como face de um poliedro.

3.3 POLIEDRO

Um *poliedro* P é a reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as faces de P . Os lados desses polígonos são chamados as arestas de P . Os vértices do poliedro são os vértices de suas faces. Exige-se ainda de um poliedro P que suas faces estejam “regularmente dispostas”, isto é, que a interseção $F \cap G$ de duas faces F e G distintas de P seja uma aresta comum, um vértice comum a F e G , ou seja vazia. (LIMA, 1991, p. 76).

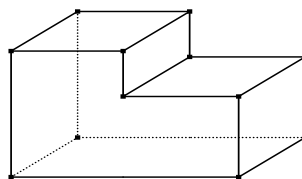
Exemplo: a FIGURA 18 apresenta dois objetos que se adaptam à definição de poliedro sendo o poliedro (b) vasado, ou seja, com um furo, sendo sua base composta por quatro trapézios. A FIGURA 19 apresenta um objeto que não se adapta à definição de poliedro.

FIGURA 18: EXEMPLOS DE POLIEDROS



FONTE: Próprio Autor

FIGURA 19: EXEMPLO DE NÃO POLIEDRO



FONTE: Próprio Autor

3.4 Conjunto Convexo

Um conjunto C , do plano ou do espaço, diz-se *convexo*, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C . (LIMA, 1998, p. 233).

3.5 Superfície poliédrica limitada convexa

Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos, tais que:

- dois polígonos não estão num mesmo plano;
- cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
- havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada *contorno*;
- o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço.

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas *abertas*. As que não têm contorno são chamadas *fechadas*. Uma superfície poliédrica limitada convexa tem como elementos: as *faces* que são os polígonos; as *arestas* que são os lados dos polígonos; os *vértices* que são os vértices dos polígonos e os *ângulos* que são os ângulos dos polígonos. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 123).

3.6 Poliedro Convexo

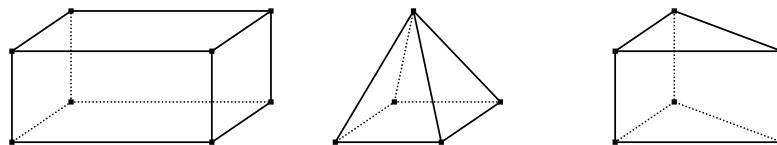
Definição de Dolce, Pompeo (2005, p. 124).

Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos tais que:

- dois polígonos não estão num mesmo plano;
- cada lado do polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Alguns poliedros convexas são apresentados na FIGURA 20 a seguir.

FIGURA 20: POLIEDROS CONVEXOS



FONTE: Próprio Autor

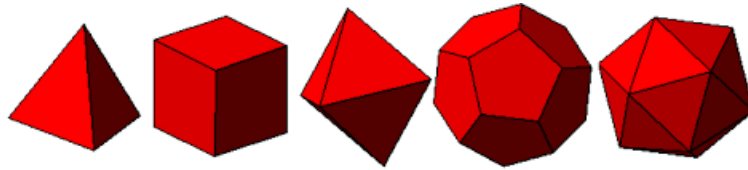
3.7 Poliedro Regular

Definição de Dolce e Pompeo (2005, p. 132): um poliedro convexo é *regular* quando:

- a) suas faces são polígonos regulares e congruentes;
- b) seus ângulos poliédricos são congruentes.

Na FIGURA 21 a seguir são apresentados os cinco poliedros regulares.

FIGURA 21 – OS CINCO POLIEDROS REGULARES



FONTE: <https://docente.ifrn.edu.br/julianaschivani/informatematica/atividade-usando-o-poly>

Acesso em: 05 de dez. 2019

3.8 Poliedro de Platão

Definição de Dolce e Pompeo (2005, p. 130). Um poliedro é chamado *poliedro de Platão* se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

- a) todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas,
- b) todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas;
- c) vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$)

3.9 Subpoliedro

Um subconjunto Q de um poliedro P chama-se um *subpoliedro* de P quando é reunião de algumas das faces de P . (LIMA, 1991, p. 78).

3.10 Aresta livre

Uma aresta diz-se *livre* quando é lado de apenas uma face do poliedro. (LIMA, 1991, p. 77).

3.11 Vértice livre

Um vértice diz-se *livre* quando é vértice de apenas uma face do poliedro. (LIMA, 1991, p. 78)

3.12 Poliedros conexos

Diz-se que um poliedro P é *conexo* quando não é possível escrevê-lo como reunião $P = P_1 \cup P_2$, onde P_1 e P_2 são subpoliedros de P com $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, salvo no caso trivial em que P_1 ou P_2 é vazio. (LIMA, 1991, p. 78-79).

3.13 Bordo da superfície poliédrica

Chama-se *bordo* de um poliedro à reunião de suas arestas livres. (LIMA, 1991, p. 76).

3.14 Ciclo num poliedro

Um *ciclo* num poliedro P é uma linha poligonal fechada, cujos lados são arestas de P . (LIMA, 1991, p. 79).

3.15 Polígono simples

Um polígono chama-se *simples* quando seu bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem que passe duas vezes pelo mesmo vértice. (LIMA, 1991, P. 78).

3.16 Poliedro simples

Os poliedros são chamados de *poliedros simples* quando não contiverem furos atravessando-os. (GARBI, 2009, p. 259).

3.17 Poliedros eulerianos

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados *poliedros eulerianos*. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 127)

Estabelecidas as definições, é importante fazer uma observação, relativa às denominações “poliedro” e “superfície poliédrica”. O presente trabalho trata do Teorema de Euler, que relaciona os números de vértices, faces e arestas de um poliedro, logo diz respeito à forma do poliedro, não tendo relevância se ele é oco ou sólido. Nas demonstrações apresentadas a seguir, o significado de poliedro será o mesmo que o de superfície poliédrica.

As definições têm grande importância ao se demonstrar teoremas, pois é a partir da definição que sabemos identificar os objetos pelo nome; assim, se a definição não está clara pode-se, em algum momento da demonstração, realizar procedimentos que tornem a demonstração duvidosa. Pode-se perceber no caso do Teorema de Euler para poliedros, que a falta de precisão na definição de poliedro faz com que algumas demonstrações fiquem incompletas, como a de Cauchy, que será apresentada e analisada.

4 O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

De acordo com Lima et al (1998), no Ensino Médio, em primeiro estudo, deve-se dirigir a atenção aos poliedros convexos, pois existem poliedros que seriam, em uma primeira apresentação, incompreendidos pelos alunos.

Neste capítulo serão apresentadas algumas demonstrações do Teorema de Euler para poliedros convexos.

No caso particular dos poliedros convexos, há demonstrações elementares e corretas do Teorema de Euler. A primeira e mais elegante delas, foi obtida por A.M. Legendre com base na fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Ainda no caso de poliedros convexos, a demonstração de Legendre pode ser adaptada de modo a evitar a Geometria Esférica, tornando-se mais elementar. (LIMA, 1997, p. 68).

Alguns livros como: *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 10, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, e *A Rainha das Ciências* de Gilberto Geraldo Garbi, trazem demonstrações do Teorema de Euler para poliedros convexos e poliedros simples, respectivamente, que possuem falhas. As falhas se devem a uma indução que não ficou bem definida e à própria definição de poliedro simples.

O Teorema de Euler para poliedros convexos, além de ter a sua própria importância dentro da Geometria, é utilizado na demonstração de algumas propriedades e teoremas que fazem parte do estudo dos poliedros. A seguir, são apresentados dois exemplos.

4.1 TEOREMA DE EULER APLICADO A DEMONSTRAÇÕES ENVOLVENDO POLIEDROS

Teorema 1: Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Demonstração (LIMA et al., 1998, p.241-242):

Consideremos um poliedro regular em que n é o número de lados de cada face e p é o número de arestas que concorrem em cada vértice. Assim, temos:

$$2A = nF = pV$$

O que acarreta:

$$A = \frac{nF}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p}$$

Substituindo esses valores na relação de Euler, $V - A + F = 2$, temos:

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2 \Rightarrow \frac{2nF - npF + 2pF}{2p} = \frac{4p}{2p} \Rightarrow F(2n + 2p - np) = 4p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{4p}{2n + 2p - np}$$

Precisamos ter $2n + 2p - np > 0$, isto é:

$$2n > np - 2p \Rightarrow 2n > p(n - 2) \Rightarrow \frac{2n}{n - 2} > p. \text{ Como } p \geq 3, \text{ temos que:}$$

$$\frac{2n}{n - 2} > p \geq 3 \Rightarrow 2n > 3n - 6 \Rightarrow -n > -6 \Rightarrow n < 6. \text{ Portanto temos as}$$

seguintes possibilidades: $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$.

- Para $n = 3$:

$$F = \frac{4p}{6 - p} \rightarrow \begin{array}{l} p = 3 \rightarrow F = 4(\text{tetraedro}) \\ p = 4 \rightarrow F = 8(\text{octaedro}) \\ p = 5 \rightarrow F = 20(\text{icosaedro}) \end{array}$$

- Para $n = 4$:

$$F = \frac{4p}{8 - 2p} = \frac{2p}{4 - p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6(\text{Cubo})$$

- Para $n = 5$:

$$F = \frac{4p}{10 - 3p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 12(\text{dodecaedro}).$$

Teorema 2: A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é $S = (V - 2).4r$, em que V é o número de vértices e r é um ângulo reto.

Demonstração (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 129-130):

V , A e F são, nessa ordem, os números de vértices, arestas e faces do poliedro. Sejam $n_1, n_2, n_3, \dots, n_F$ os números de lados das faces $1, 2, 3, \dots, F$, ordenadamente. A soma dos ângulos de uma face é $(n - 2).2r$.

Para todas as faces, temos:

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2).2r + (n_2 - 2).2r + (n_3 - 2).2r + \dots + (n_F - 2).2r = \\ &= n_1.2r - 4r + n_2.2r - 4r + n_3.2r - 4r + \dots + n_F.2r - 4r = \\ &= (n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F).2r - (4r + 4r + 4r + \dots + 4r) \end{aligned}$$

Sendo

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F = 2A \text{ (pois cada aresta foi contada duas vezes em } n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_F),$$

substituindo, vem:

$$S = 2A.2r - F.4r \rightarrow S = (A - F).4r \quad (1)$$

Como vale a relação de Euler,

$$V - A + F = 2 \rightarrow V - 2 = A - F \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$S = (V - 2).4r.$$

4.2 DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS CONVEXOS

O convívio com colegas professores de Matemática revela que, em geral, há uma dificuldade com demonstrações de teoremas. Tanto no aspecto didático, sobre se devem ou não fazer algumas demonstrações em aula, como também no conhecimento do próprio professor. O caso do *Teorema de Euler para poliedros* é notável. No livro *Meu professor de Matemática*, do professor Elon L. Lima, encontra-se dois artigos já publicados anteriormente em revistas da Sociedade Brasileira de Matemática que esclarecem a situação, e trazem uma demonstração “ao mesmo tempo correta e acessível aos professores e alunos de nossas escolas”. (LIMA, 1991, p. 85).

Serão comentadas a seguir a análise que o professor Elon faz sobre a demonstração de Cauchy e a demonstração feita pelo professor Zoroastro Azambuja Filho. Depois, serão apresentadas duas demonstrações do Teorema de Euler muito divulgadas, porém com incorreções.

4.2.1 Análise da Demonstração de Cauchy

Nesta seção será feito um resumo do artigo *O Teorema de Euler para Poliedros*, inserido no livro *Meu Professor de Matemática*, páginas 68 a 83, professor Elon L. Lima.

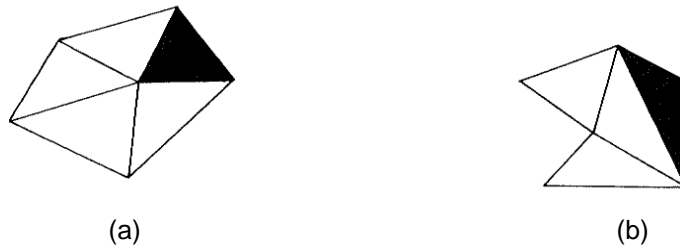
A demonstração de Cauchy

A demonstração de Cauchy é baseada inicialmente na retirada de uma das faces do poliedro, com isso temos o número de faces do poliedro diminuído em uma unidade, porém o número de vértices e arestas não se altera. Desta forma, basta provar que o poliedro modificado satisfaz a condição $V - A + F = 1$.

O poliedro modificado possui arestas livres, com isso pode-se esticá-lo a partir destas arestas, transformando-o em uma figura plana. Após isso devem se traçar diagonais que não se cortam a fim de decompor as faces em triângulos. A seguir, as faces serão retiradas uma a uma num processo chamado de despetalação. No momento de despetalar o poliedro, tem-se duas possibilidades: (a)

o triângulo a ser retirado possui uma aresta livre ou (b) o triângulo a ser retirado possui duas arestas livres. Independente do triângulo retirado a expressão $V - A + F$ não se altera. Dessa forma, retirando-se as faces uma a uma, finalmente, chega-se à última que é um triângulo, onde vale a relação $V - A + F = 1$. Isso completa a demonstração.

FIGURA 22: TRIÂNGULOS A SEREM RETIRADOS (1)



FONTE: Lima (1991)

Análise da demonstração de Cauchy

Lima afirma que a demonstração de Cauchy deve provar alguma proposição relacionada a poliedros, porém é necessário saber o quê. Pensando desta forma, é importante realizar uma análise dos argumentos utilizados na demonstração de Cauchy. A íntegra da análise a seguir pode ser encontrada no livro *Meu Professor de Matemática*. (LIMA, 1991, p.76-82)

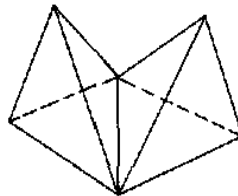
Analisando o primeiro passo da demonstração de Cauchy, tem-se que: para que seja feita a retirada de uma face do poliedro, é preciso supor: que o poliedro P possua pelo menos uma face sem arestas livres. Desta forma a retirada não alterará o número de vértices e arestas, mas será diminuído em uma unidade o número de faces, sendo assim cumpre a relação $V - A + F = 1$.

Retirando uma face do poliedro P e esticando-o a partir das arestas livres, o poliedro se transforma em um poliedro planar, desde que o poliedro seja homeomorfo a uma esfera, pois retirando um ponto da esfera tem-se a condição suficiente para que a mesma se torne homeomorfa ao plano. Transformar o poliedro P em um poliedro planar é interessante, pois a fronteira do conjunto $P \subset \mathbb{R}^2$ é a reunião de suas arestas livres.

Contudo faz-se necessário supor que todo subpoliedro próprio de P tenha arestas livres, pois no poliedro apresentado na FIGURA 23, qualquer dos tetraedros

são subpoliedros próprios de P sem arestas livres. Então aplicando a ele o processo de despetação, teremos no meio da operação a retirada de mais uma face sem arestas livres, o que alterará χ novamente.

FIGURA 23: EXEMPLO DE POLIEDRO COM $\chi = 3$



FONTE: Lima (1991)

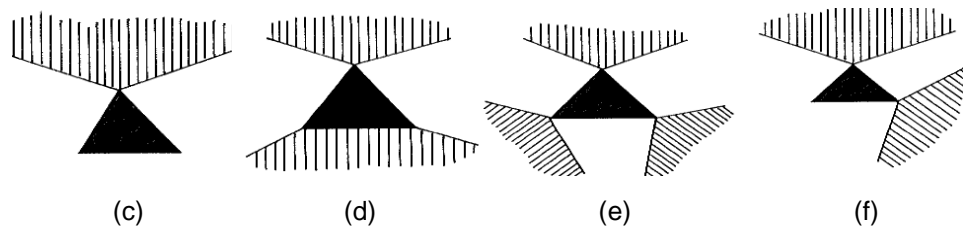
O Teorema de Euler continua válido no caso de admitirmos uma noção mais geral de poliedro, no qual as faces não precisam ser polígonos convexos: basta que sejam polígonos simples, pois independente de as faces serem polígonos convexos ou simples é possível triangular as faces utilizando diagonais.

Feita a triangulação das faces do poliedro, deve ser considerado que:

- a) O triângulo a ser retirado tem uma aresta livre e nenhum de seus vértices é livre.
- b) O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres e um de seus vértices é livre.
- c) O triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres.
- d) O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres, mas nenhum dos seus vértices é livre.
- e) O triângulo a ser retirado tem as três arestas livres e nenhum de seus vértices é livre.
- f) O triângulo a ser retirado tem três arestas e um vértice livres.

Pode-se perceber que na demonstração de Cauchy foram consideradas somente as possibilidades (a) e (b), porém percebe-se que há mais quatro possibilidades de retirada de um triângulo. O caso (c) é óbvio como o caso (a) e (b), pois retirando um triângulo com três arestas livres e dois vértices livres, a relação $V - A + F = 1$, não se altera, pois V diminui em duas unidades, A diminui em três unidades e F diminui em uma.

FIGURA 24: TRIÂNGULOS A SEREM RETIRADOS (2)



FONTE: Lima (1991)

Considerando as possibilidades (d), (e) e (f), apresentadas na FIGURA 24 é necessário supor algumas condições necessárias para demonstrar o Teorema de Euler. Desta forma, é necessário supor que:

- A) o poliedro P seja conexo;
- B) todo ciclo em P seja um bordo;
- C) toda aresta de P seja lado de exatamente duas faces de P . Diante desta última condição, percebe-se, na demonstração completa encontrada no livro *Meu Professor de Matemática*, que é dispensada a necessidade de supor que o poliedro P possua pelo menos uma face sem arestas livres, bem como a condição: que todo subpoliedro próprio de P tenha arestas livres, equivale dizer: que duas faces quaisquer de P sejam encadeadas.

Sendo verificadas as condições acima descritas, a proposição provada pela demonstração de Cauchy é a seguinte: A relação de Euler $V - A + F = 2$ é válida para qualquer poliedro que satisfaz as seguintes três condições:

- (1^a) Toda aresta está contida exatamente em duas faces;
- (2^a) Duas faces quaisquer são encadeadas;
- (3^a) Todo ciclo é um bordo.

Lima observa ainda que se o poliedro é homeomorfo à esfera então essas três condições acima são satisfeitas, mas isto é um resultado profundo de Topologia, não se pode, portanto, esperar obter uma demonstração elementar do Teorema de Euler com a hipótese de que o poliedro seja homeomorfo a uma esfera.

4.2.2 A Demonstração de Zoroastro

Zoroastro Azambuja Filho escreveu uma demonstração do Teorema de Euler correta e simples. Elon Lages Lima considera esta demonstração acessível aos professores e alunos do Ensino Médio. De fato, a demonstração proposta é

realizada utilizando-se de conceitos que os alunos têm no currículo de Matemática do Ensino Médio. Os conceitos básicos utilizados na demonstração de Zoroastro foram: a soma dos ângulos internos de um triângulo e a soma dos ângulos internos de um polígono. Segue a demonstração que pode ser encontrada no livro *Meu Professor de Matemática*, p. 87 – 90 (LIMA, 1991).

Teorema: Seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente $V - A + F = 2$.

Para demonstrar o Teorema de Euler é necessário organizar algumas condições:

1ª) Considere uma reta r não paralela a qualquer face do poliedro convexo P ;

2ª) Considere também um plano H que não intercepta P e seja perpendicular à reta r . O plano H divide o espaço em dois semi-espacos, sendo o poliedro P localizado no semi-espaço superior;

3ª) O plano H será chamado plano horizontal e as retas paralelas à reta r serão chamadas de retas verticais.

Imagine o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior, de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto x do semi-espaço superior corresponde um ponto x' em H , chamado a sombra de x , obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por x . Dessa forma, cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou dois pontos de P , a sombra P' é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno y' é sombra de uma poligonal fechada y (contorno aparente do poliedro P) formada por arestas de P . Cada ponto de y' é sombra de um único ponto de P e cada ponto interior de P' é sombra de dois pontos do poliedro P . Dos dois pontos considere o mais alto como ponto iluminado e o mais baixo como ponto sombrio.

Com isso percebe-se que o poliedro P se decompõe em três partes disjuntas, sendo elas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente y . Seja P_1 o conjunto dos pontos iluminados de P mais o contorno y , dessa forma cada ponto de P' é a sombra de um único ponto de P_1 . Da mesma forma pode-se considerar P_2 como o conjunto dos pontos sombrios de P mais o contorno aparente, sendo assim cada ponto de P' é sombra de um único ponto de P_2 . Vamos usar a notação P_1' para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces

contidas em P_1 ; e P_2' para indicar a sombra de P_2 expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P , isto é, contidas em P_2 .

Vamos considerar ainda que todas as faces do poliedro P sejam triangulares, com isso poderemos utilizar a seguinte relação: $3F = 2A$. Agora podemos calcular de duas maneiras distintas a soma dos ângulos internos dos triângulos que formam o poliedro P . Em primeiro lugar, há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a π radianos. Portanto a soma dos ângulos internos do poliedro P é $S = \pi.F$. Como $F = 3F - 2F = 2A - 2F$, podemos escrever:

$$S = 2\pi A - 2\pi F \quad (1)$$

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios. Para calcularmos esta última soma, vamos considerar o cálculo vértice a vértice ao invés de triângulo por triângulo. Dessa forma, consideremos V_0 o número de vértices do contorno aparente y , V_1 o número de vértices iluminados e V_2 o número de vértices sombrios. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$.

Podemos perceber que em P_1' temos V_1 vértices interiores mais V_0 vértices do contorno y' e em P_2' temos V_2 vértices interiores mais V_0 vértices do contorno y' . A soma dos ângulos que tem como vértices um dado vértice interior é igual a 2π radianos e a soma de todos os ângulos que tem vértice sobre o contorno y' é igual a $\pi(V_0 - 2)$, sendo V_0 o número de lados do polígono. Temos então que:

$$S_1 = 2\pi.V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

e

$$S_2 = 2\pi.V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando as duas igualdades, temos:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi.V - 4\pi.$$

$$S = 2\pi.V - 4\pi \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos:

$$2\pi A - 2\pi F = 2\pi.V - 4\pi,$$

dividindo todos os termos por 2π , temos:

$$A - F = V - 2,$$

ou ainda,

$$V - A + F = 2$$

A ideia central da prova de Zoroastro, baseado na soma dos ângulos internos de um polígono, foi utilizada pela primeira vez na demonstração do Teorema de Euler, apresentada por Adrien Marie Legendre. A seguir será transcrita a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos feita por Legendre, apresentada por Lima (1991, p. 92-95).

Demonstração de Adrien Marie Legendre

Seja P um poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces.

Por conveniência, suporemos que as faces de P são triângulos. (Se isto não for verdade, por meio de diagonais decomponemos cada face em triângulos, sem alterar o número $V - A + F$. Com efeito, cada vez que traçamos uma diagonal numa face, o número V não se altera, enquanto cada um dos números A e F aumenta de uma unidade, esses aumentos se cancelam na expressão $V - A + F$).

Consideremos uma esfera E , de raio r , cujo centro O é um ponto situado no interior do poliedro P . Projetando radialmente o poliedro P sobre a esfera E , obtemos uma decomposição de E em triângulos esféricos, dispostos de modo semelhante à situação das faces de P . Em particular, a esfera E fica recoberta por F triângulos esféricos, com um total de A lados e V vértices.

Esclareçamos que uma figura sobre a esfera E chama-se triângulo esférico quando está contida propriamente em algum hemisfério e é limitado por três arcos de círculos máximos, chamados de seus lados. (Todos menores do que uma semi-circunferência).

Note que a intersecção $E \cap L$ de uma esfera E com qualquer plano L que a encontre, é um círculo (ou um ponto, no caso excepcional em que o plano L é tangente à esfera). Quando o plano L passa pelo centro da esfera E , a intersecção $E \cap L$ chama-se círculo máximo.

A projeção radial de um segmento da reta AB é um arco de círculo máximo ab sobre a esfera E (salvo no caso em que A , B e o centro O da esfera estão na mesma reta). Com efeito, A , B e O determinam um plano, que corta a esfera segundo um círculo máximo do qual ab é um arco.

Quando dois arcos de círculos máximos têm extremidade comum, o ângulo α formado por esses arcos é, por definição, o ângulo entre as semi-retas tangentes a esses arcos.

FIGURA 25. O PONTO x DA ESFERA E É A PROJEÇÃO RADIAL DO PONTO X DO POLIEDRO P .

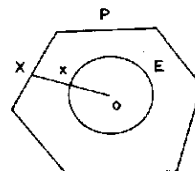


FIGURA 26. O TRIÂNGULO ESFÉRICO t , SOBRE A ESFERA E , É A PROJEÇÃO RADIAL DO TRIÂNGULO T

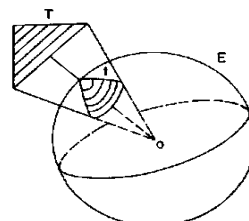
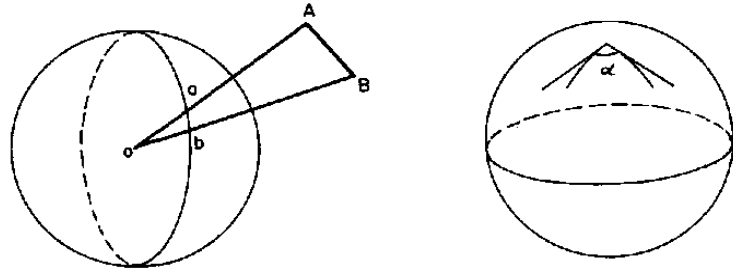


FIGURA 27: PROJEÇÃO RADIAL DE UM SEGMENTO DE RETA AB E ÂNGULO α FORMADO POR ARCOS



O geômetra francês Albert Girard demonstrou (em 1629) que se os ângulos α, β, δ de um triângulo esférico forem medidos em radianos, a soma $\alpha + \beta + \delta$ é dada pela fórmula

$$\alpha + \beta + \delta = \pi + \frac{a}{r^2},$$

Onde a é área do triângulo e r é o raio da esfera.

Esta fórmula é o fato básico no qual se fundamentou Legendre para demonstrar o Teorema de Euler.

Para cada um desses triângulos t , vale a fórmula de Girard

$$S_t = \pi + \frac{a_t}{r^2},$$

Onde S_t é a soma dos ângulos e a_t é a área do triângulo esférico t .

Temos ao todo F igualdades como esta acima. Somando-as todas vem:

$$\sum S_t = \pi.F + \frac{\sum a_t}{r^2}.$$

Ora, $\sum S_t = 2\pi.V$ porque a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a 2π . Além disso, $\sum a_t = 4\pi.r^2 =$ área da superfície esférica E .

Portanto a igualdade acima se escreve $2\pi.V = \pi.F + \frac{4\pi.r^2}{r^2}$. Simplificando temos $2V = F + 4$, isto é:

$$2V - F = 4.$$

Para obter uma relação entre F (número de triângulos esféricos) e A (número total de lados desses triângulos), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulos, logo $3F = 2A$, ou seja,

$$F = 2A - 2F.$$

Substituindo F por este valor na igualdade $2V - F = 4$, vem $2V - 2A + 2F = 4$, donde

$$V - A + F = 2$$

que é a relação de Euler.

4.2.3 As Demonstrações Simples

Existem demonstrações bastante conhecidas do Teorema de Euler que possuem problemas na indução utilizada ou problemas com a própria definição de poliedro. Nesta seção serão apresentados dois enunciados que serão chamados de Teorema A e Teorema B, cujas demonstrações contêm incorreções. A

demonstração do Teorema A, encontrada no volume 10 da Coleção *Fundamentos da Matemática Elementar*, de autoria de Dolce e Pompeo, era comumente utilizada nos livros didáticos quando estes apresentavam demonstrações de teoremas. Atualmente, os livros didáticos não trazem a demonstração do Teorema de Euler, mas se ela voltasse a figurar nas páginas dos livros do Ensino Médio, poderia ser aquela de Zoroastro apresentada na seção anterior. Vale lembrar aqui o relato do próprio professor Zoroastro Azambuja Filho (citado por LIMA, 1991, p.86) no artigo em que apresenta a sua demonstração: ficara chocado ao saber que a demonstração que se encontrava nos livros-texto e que sempre usara era incorreta e, após se convencer de que conseguira uma argumentação adequada, “havia decidido que prestaria um serviço aos meus colegas divulgando a minha maneira de ver a prova do teorema de Euler”.

Teorema A: Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação $V - A + F = 2$ em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração

a) Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar, em caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação:

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

em que

V_a é o número de vértices,

A_a é o número de arestas e

F_a é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta.

1) Para $F_a = 1$.

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_a = n$, $A_a = n$. Temos:

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \rightarrow V_a - A_a + F_a = 1.$$

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1$.

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F' faces (que possui V' vértices e A' arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Por hipótese, para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vértices vale:

$$V' - A' + F' = 1.$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de p arestas (lados) e considerando que q dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$$F_a = F' + 1$$

$$A_a = A' + p - q \quad (q \text{ arestas coincidiram})$$

$$V_a = V' + p - (q + 1) \quad (q \text{ arestas coincidindo, } q + 1 \text{ vértices coincidem})$$

Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima, vem

$$V_a - A_a + F_a = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + (F' + 1) =$$

$$= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1 = V' - A' + F'$$

Com $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ provamos que essa expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma face da superfície.

Como, por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

O que prova a relação preliminar.

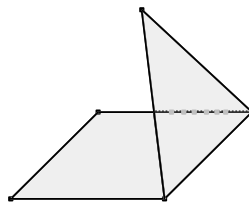
b) Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces) e dela retiraremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para o qual vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

Como $V_a = V$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, vem $V - A + (F - 1) = 1$, ou seja:
 $V - A + F = 2$. (DOLCE; POMPEO, 2005, p. 124-126).

A falha dessa demonstração está no passo 2. A ideia da demonstração é começar com uma face e ir acrescentando as outras, uma a uma, e analisar o valor da expressão $V - A + F$ depois de cada acréscimo.

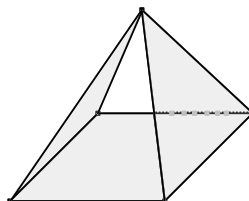
Pode-se verificar em um exemplo que esse argumento não é válido. Considere que o poliedro seja uma pirâmide de base quadrada, e que o processo da demonstração se inicie com a base sendo a primeira face. Quando se acrescenta uma face lateral, tem-se a representação a seguir:



Neste caso, tem-se: $V' = 5$; $F' = 2$; $A' = 6$.

Logo: $V' - A' + F' = 5 - 6 + 2 = 1$.

Na continuação do processo, como ele não estabelece condição para a escolha da face seguinte, pode-se acrescentar uma face lateral não consecutiva à face lateral existente, conforme a ilustração abaixo.



Nessa etapa, tem-se: $V_a = 5$; $A_a = 8$; $F_a = 3$.

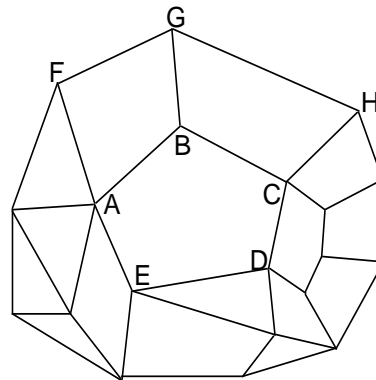
Portanto: $V_a - A_a + F_a = 5 - 8 + 3 = 0$.

Logo, há uma contradição, pois esse número deveria ser igual a 1, segundo a argumentação dos autores. Assim, a demonstração em questão não é válida no caso geral de acréscimos de faces com o objetivo de fechar a superfície poliédrica.

Teorema B: Em todo poliedro simples o número de vértices somado ao número de faces e subtraído do número de arestas é sempre igual a dois ($V - A + F = 2$).

Existem várias maneiras de demonstrar o teorema de Euler dos poliedros, mas uma das mais simples consiste em analisar o que acontece com a relação $V - A + F$ quando desmontamos a superfície de um deles. Seja, por exemplo, um poliedro simples qualquer, como mostrado na FIGURA 28, e chamemos de X o resultado da expressão $V - A + F$ para aquele poliedro. Imaginemos que seja retirada uma face qualquer dele, por exemplo, o polígono $ABCDE$ (a partir daqui, inclusive, estaremos supondo que o poliedro não tenha “buracos”, ou seja, que ele seja simples, caso contrário algumas afirmações poderiam deixar de ser válidas).

FIGURA 28: POLIEDRO SIMPLES



Nesta primeira operação de desmonte o número de faces será diminuído de 1 enquanto os números de arestas e de vértices continuarão os mesmos. Portanto, se no poliedro original $V - A + F$ era igual a X , nesta superfície poliédrica aberta $V - A + F = X - 1$. Imaginemos em seguida que, sempre selecionando faces que façam fronteira com o orifício aberto com a primeira retirada e que vai ser ampliado, sejam retiradas outras faces. Duas situações podem acontecer: a nova face a ser retirada tem somente uma aresta em comum com o orifício ou tem mais do que uma aresta em comum com ele. Se tiver apenas uma aresta em comum (como é o caso de $ABGF$), sua retirada não alterará o número de vértices, mas diminuirá em 1 tanto o número de faces quanto o número de arestas. Neste caso, $V - A + F$ da nova superfície aberta continuará a ser $X - 1$, pois tanto A quanto F foram reduzidos de 1 e V não se alterou. O que ocorreria se fosse retirado uma face contendo mais do que uma aresta em comum com o orifício, com seria o caso de $BCHG$ depois da retirada de $ABGF$? Seja p o número de arestas, fazendo fronteira com o orifício, que seriam eliminadas com a retirada daquela face. Sua eliminação redundaria na exclusão de $p - 1$ vértices, pois p arestas são geradas por $p + 1$ vértices, dos quais 2, as extremidades da linha de p arestas, não seriam retirados (esta afirmação pode não ser válida se o poliedro tiver buracos). Também neste caso, $V - A + F$ na nova superfície aberta continuará a ser $X - 1$, pois V teria sido reduzido em $p - 1$, A em p e F em 1. Vemos, então, que podemos ir retirando faces (sempre a partir do orifício original) sem que, em cada etapa, se altere a relação $V - A$

$+ F = X - 1$ obtida na primeira superfície aberta. Consequentemente, $X - 1$ será também igual à relação $V - A + F$ da superfície que tem n vértices, n arestas (lados) e uma face. Logo

$$X - 1 = n - n + 1 = 1, \text{ ou seja, } X = 2$$

Como o poliedro do qual partimos era genérico, está provado que em qualquer poliedro simples $V - A + F = 2$. (GARBI, 2009, p. 259-261).

A demonstração apresentada no livro *A Rainha das Ciências* estabelece um critério para a retirada das faces, e por isso não apresenta o problema detectado na demonstração do teorema A. No entanto, a ideia da demonstração é a de Cauchy, logo, cabe a mesma análise feita por Lima, em relação a todas as possibilidades de configuração do poliedro para a retirada das faces. Além disso, há uma incorreção no enunciado (ou na definição de poliedro simples), pois o poliedro da FIGURA 23 se enquadra na definição de poliedro simples, mas não satisfaz o teorema, visto que $V - A + F$ é igual a 3.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado um breve estudo dos poliedros, buscando na história alguns fatos que fizeram com que esses sólidos tivessem espaço no ensino da Matemática atual. Os poliedros mais conhecidos representam a classe de poliedros regulares, pois eles possuem propriedades que podem ser explicadas devido às faces que são todas iguais; na Antiguidade eles foram considerados objetos mágicos e Platão em seu diálogo *Timaeus*, relacionou esses sólidos com a natureza e o universo.

Outra propriedade importante que foi apresentada sobre os poliedros é a relação existente entre os números de faces, arestas e vértices. Esta relação chamada de Teorema de Euler, apresentou historicamente algumas controvérsias, devido à sua validade restrita. Como visto, este Teorema vale para todos os poliedros convexos, contudo continua sendo válido para certa quantidade de poliedros não convexos. Para generalizá-lo, Poincaré mostrou que o Teorema de Euler vale para todos os poliedros homeomorfos à esfera, e a demonstração do mesmo para poliedros homeomorfos à esfera pode ser obtida utilizando os argumentos apresentados por Cauchy.

Em geral, nos livros didáticos atuais não aparece a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos, porém se aparecesse não deveria ser a demonstração analisada do livro de Dolce e Pompeo. Embora este livro não seja indicado como texto em escolas, é dirigido para alunos “mais interessados em adquirir uma formação mais consistente na área de Matemática” e por isso é bastante sério o fato de conter incorreção em uma demonstração de teorema.

A princípio as incorreções não são perceptíveis, porém fazendo uma análise detalhada conseguem-se contraexemplos em que a demonstração apresenta problemas. Uma solução para este problema, seria utilizar nos livros didáticos a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos, apresentada por Zoroastro Azambuja Filho, que é bastante acessível a professores e alunos do Ensino Médio, por utilizar conceitos e propriedades básicas, como por exemplo, a da soma dos ângulos internos de um triângulo, que estão no currículo de Matemática.

Foram apresentadas algumas demonstrações do Teorema de Euler, algumas simples e outras nem tanto, mas todas com o intuito de proporcionar aos professores e estudantes a assimilação das propriedades enunciadas. É importante

que demonstrações sejam realizadas em sala para que o estudante tenha contato com o modo como se estrutura a Matemática no sistema dedutivo.

Foram apresentadas neste trabalho a demonstração de Cauchy e a análise da mesma feita pelo professor Elon L. Lima. Observou-se que a demonstração de Cauchy não abrange todos os poliedros e que tal contestação ocorreu pela falta de explicitar determinadas condições sobre os poliedros ou, talvez, pela falta de uma definição do próprio poliedro. Depois da análise feita por Elon Lages Lima, percebe-se que a proposição obtida a partir da demonstração de Cauchy abrange os poliedros homeomorfos à esfera, ou seja, aqueles para os quais vale a relação de Euler. Quando se trata da Topologia na qual está inserido o Teorema de Euler e o número $(V - A + F)$, é interessante que o professor realize atividades com os seus alunos de modo a instiga-los a perceberem as propriedades topológicas existentes e possam através da observação e manipulação das formas geométricas, conjecturar e generalizar propriedades existentes entre objetos que possuem mesmas características.

No trabalho os dois pontos mais importantes foram: 1) a constatação da importância de definir os objetos de modo que os teoremas e propriedades possam ser demonstrados e verificados sem que tenham restrições indesejáveis; 2) a percepção da necessidade de o professor compreender o significado das propriedades em sua plenitude, para que seja capaz de explicar os conteúdos em linguagem não técnica para os alunos, assim facilitando para estes a consolidação do conhecimento.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 4 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

BOYER, C.B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>
Acesso em: 24 out. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais/ matemática**. Brasília: MEC. SEF. 1997.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Poliedros Convexos. In: _____. **Fundamentos de Matemática Elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

GARBI, G.G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática** e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 1998.