Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Eliane dos Santos Ferreira

# Educação Financeira no ensino da Matemática

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2020

**ELIANE DOS SANTOS FERREIRA**

# EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Mehran Sabeti

Coorientador: Luiz Gustavo Perona Araújo

**FLORESTAL – MINAS GERAIS**
**2020**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal**

T

Ferreira, Eliane dos Santos, 1985-

F383e
2020

Educação Financeira no Ensino da Matemática / Eliane dos Santos Ferreira. – Florestal, MG, 2020.

96 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui anexo.

Orientador: Mehran Sabeti.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.94-96.

1. Matemática financeira. 2. Ensino-aprendizagem. 3. Educação financeira. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

510

ELIANE DOS SANTOS FERREIRA

# EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de setembro de 2020.

Assentimento:

Eliane dos Santos Ferreira

Eliane dos Santos Ferreira
Autora

Mehran Sabeti

Mehran Sabeti
Orientador

# Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que de alguma forma me ajudaram nessa trajetória. Em especial aos meus pais, minha irmã e meu namorado.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado sabedoria e perseverança para realizar mais um sonho.

Aos meus pais, Antônio Lúcio e Maria Adeli; a minha irmã, Ângela, pelo apoio e compreensão; ao meu namorado, Bruno, pelo companheirismo e dedicação ao meu sonho; aos meus sogros, Reginaldo e Danuza, pelas orações. Nos momentos mais angustiantes, sempre estiveram ao meu lado de braços abertos.

Aos meus amigos, que mesmo eu estando ausente, mantiveram-se presentes.

Aos professores da UFV, especialmente aos professores Mehran e Luiz Gustavo, pela dedicação e paciência.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

FERREIRA, Eliane dos Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, setembro de 2020. **Educação Financeira no ensino da Matemática**. Orientador: Mehran Sabeti. Coorientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.

O presente trabalho visa expor os conteúdos de Matemática Financeira com a finalidade de melhorar a compreensão da Educação Financeira. Em um primeiro momento, aborda-se a história do dinheiro. Em seguida, apresentam-se os conteúdos da Matemática Financeira básica e comercial. Posteriormente, trata-se o conceito da Educação Financeira e como as políticas públicas educacionais propõem o desenvolvimento das competências e habilidades pelas escolas. Continuando, apresenta-se uma pesquisa com alunos do ensino médio de uma escola pública, com abordagem qualitativa e objetivo exploratório, que busca analisar o conhecimento prévio dos discentes sobre Educação Financeira. Por fim, a partir da análise do questionário e da revisão bibliográfica, elaborou-se uma sequência didática com a finalidade de auxiliar os docentes para o ensino-aprendizagem de Educação Financeira no ensino médio.

Palavras-chave: Matemática financeira. Ensino-aprendizagem. Educação financeira.

# Abstract

FERREIRA, Eliane dos Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, September, 2020. **Financial education in mathematics teaching**. Adviser: Mehran Sabeti. Co-adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo.

The present work aims to expose the contents of Financial Mathematics with the improvement of the understanding of Financial Education. At first, the history of money is addressed. Then, present the contents of basic and commercial Financial Mathematics. Subsequently, it deals with the concept of Financial Education and how public educational policies propose the development of competences and skills by schools. Continuing, a research is presented with high school students from a public school, with a qualitative approach and exploratory objective, which seeks to analyze the students' previous knowledge about Financial Education. Finally, based on the analysis of the questionnaire and the bibliographic review, a didactic sequence was elaborated with the appropriate to assist teachers for teaching and learning of Financial Education in high school.

Keywords: Financial math. Teaching-learning. Financial education.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Sumário

# 1 Introdução

A Educação Financeira é um tema relevante no contexto atual de facilidade de crédito e de grande quantidade de transações comerciais. Em uma sociedade consumista, as pessoas usam de financiamentos e empréstimos para manterem um alto nível de consumo. Assim, muitas se encontram inadimplentes, o que demonstra a importância do conhecimento sobre o assunto.

> *"A educação financeira pode trazer diversos benefícios, entre os quais, possibilitar o equilíbrio das finanças pessoais, preparar para o enfrentamento de imprevistos financeiros e para a aposentadoria, qualificar para o bom uso do sistema financeiro, reduzir a possibilidade de o indivíduo cair em fraudes, preparar o caminho para a realização de sonhos, enfim, tornar a vida melhor". [11][P.09]*

Haja vista isso, a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) fez um artigo [31] com recomendações sobre os princípios e boas práticas de educação e conscientização financeira a serem seguidas pelos países-membros. Entre as justificativas enumeradas, pautam-se as principais:

> *"Considerando que a educação financeira sempre foi importante para ajudar consumidores a orçar e administrar suas receitas, poupar e investir de forma eficiente, e evitar tornarem-se vítimas de fraude;*
>
> *Considerando que à medida que o mercado financeiro fica cada vez mais sofisticado e as famílias assumem mais responsabilidades e risco por decisões financeiras, especialmente na área de previdência, é preciso haver indivíduos financeiramente educados para assegurar níveis suficientes de proteção do investidor e do consumidor, bem como o bom funcionamento não só do mercado financeiro, mas também da economia.*
>
> *Considerando que as enquetes de alfabetização financeira feitas nos últimos anos nos países da OCDE mostram que os consumidores possuem baixos níveis de alfabetização financeira e carecem de conscientização sobre a necessidade de serem financeiramente educados."[31][p.3]*

Percebe-se a inegável importância dessa disciplina para qualquer cidadão. Entretanto, não existe nas escolas brasileiras o ensino da Educação Financeira como grade curricular obrigatória [22]. Aprende-se, no ensino fundamental e médio, o cálculo de juros simples e de juros compostos como uma complementação ao estudo da regra de três e da porcentagem, o que é a mera introdução da Matemática Financeira. Isso conduz o estudante a buscar, na prática, o aprendizado necessário para o bom uso das linhas de crédito. Todavia, isso não é o suficiente para o controle de suas finanças.

Diante disso, o presente trabalho almeja apresentar fatos históricos sobre a evolução do uso do dinheiro; nortear docentes e discentes sobre conteúdos da Matemática Financeira Básica e Comercial; citar sobre as políticas públicas que o governo realiza para amenizar a falta de conhecimento da sociedade, inclusive retratando a BNCC - Base Nacional Comum Curricular; analisar uma pesquisa qualitativa realizada junto a alunos do ensino médio de uma escola pública; e, por fim, propor uma sequência didática de plano de ação com a finalidade de ajudar os professores no ensino-aprendizagem.

Para cumprir o objetivo, o trabalho está organizado em oito capítulos, sendo o primeiro, a introdução.

No Capítulo 2, será abordada a história do dinheiro, fundamentada com alguns fatos históricos que marcaram a transformação do dinheiro e o modo como a população vivia.

No Capítulo 3, é referida a Matemática Financeira Básica, que apresenta conceitos básicos essenciais para a compreensão da disciplina.

No Capítulo 4, é exposta a Matemática Financeira Comercial, que é o aprofundamento do conteúdo através de cálculos de empréstimos, de financiamentos, de investimentos e de orçamentos.

No Capítulo 5, é relatada a Educação Financeira no Brasil. O Brasil avança alguns passos importantes para que a população em geral tenha uma melhor administração do dinheiro. A criação da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) contribui nessa caminhada e também será apresentada nessa capítulo. Ainda será denotada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e como deve ser seguida pelos professores de Matemática em sala de aula.

No Capítulo 6, são analisados dados de uma pesquisa qualitativa com característica exploratória realizada com alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola estadual.

No Capítulo 7, uma sequência didática é proposta para que o professor possa trabalhar dentro da sala de aula.

Já no Capítulo 8, apresentam-se as considerações finais.

# 2

# História do dinheiro

"Grana, ervanário, tutu, numerário, espécie, ganho, proveito, meios, erva, din-din, recursos; chame-o como quiser, o dinheiro tem importância, faz diferença". [28][p.09]

## 2.1 O dinheiro como mercadoria

Apesar de atualmente ser muito difícil pensar em uma sociedade sem a circulação de alguma forma de dinheiro, os homens primitivos não tinham a noção do que esse seria[34]. Inicialmente, eles adquiriam as coisas através de lutas corporais. Entretanto, eles perceberam que ao invés de lutar para adquirir bens, poderiam realizar trocas e se beneficiarem mutuamente [28].

As transações foram aumentando e as experiências comerciais também, entre elas, a especialização da produção das mercadorias. As tribos que possuíam bons ferreiros e maus agricultores produziam mais armas e trocavam por alimentos, suprindo suas ineficiências e se concentrando na produção de mercadorias conforme suas habilidades. A realização dessas trocas de mercadorias é conhecida hoje como escambo [34], [28].

> *"Escambo: no sentido estrito, negociação e troca direta de mercadorias, sem mediação de moeda física ou escritural. É uma prática excepcional, encontrada apenas no contato entre culturas que não têm um sistema monetário comum, nem confiança mútua. Não se confunde com permuta, que é troca de mercadorias (avaliadas e contabilizadas em moeda corrente), dentro de uma cultura monetária, nem com uso de moeda-mercadoria, que pressupõe uma cultura comum com praxes comerciais pelas quais certas mercadorias servem de referência aos preços e são geralmente aceitas como meio de pagamento". [30][p.24]*

Pela definição da palavra escambo é fundamental notar que as trocas eram feitas entre mercadorias sem a referência de papel-moeda. Um bom exemplo seria a negociação de uma peça de couro por um saco de frutas. Não havia o que comumente é chamado de troco, nem a quantificação do valor monetário do bem, apenas a necessidade de se obter um objeto e a condição de se dispor de outro.

Com o aumento das operações comerciais, manifestou a necessidade de se avaliar a diferença do valor de um bem em relação a outro, surgindo as *commodities* [34]. Essa foi uma maneira usada no início para converter os diferentes bens no valor da mercadoria que a população local utilizava com mais finalidade ou mais vezes. O incrível é que isso ocorreu em diferentes culturas e em diferentes regiões do globo simultaneamente.

> *"O dinheiro commodity tem a enorme vantagem de ser um item de consumo, bem como um meio de troca. Os astecas moíam facilmente os grãos de cacau que eram dinheiro, transformando-os em uma pasta de chocolate, depois agitavam vigorosamente em um recipiente com água para fazer uma bebida deliciosa que adoravam. Diferente do papel-moeda e de moedas baratas que podem perder facilmente o valor nominal, a commodity tem um valor em si mesmo e assim sempre pode ser consumido – não importando qual a situação do mercado. [34][p.22]*

Entende-se que *commodity* era um bem que, por ser muito utilizado na região, passava a ser visto como o conversor natural de preços de todos os outros produtos. Por exemplo, ao invés de fazer um escambo entre uma peça de couro por um saco de frutas, passava a se avaliar a peça de couro e o saco de frutas em termos da *commodity*. A diferença entre o valor dos dois era dada em forma da mercadoria *commodity*. Seria basicamente a ideia do troco em papel-moeda na atualidade.

Como o tipo de *commodity* dependia do costume da região, o número de produtos que serviram como medidas de seu valor são extensos. Na China e no norte da África era o sal; na Índia, as amêndoas; há outros exemplos como o tabaco, o arroz, o tecido, o milho.

## 2.2 O surgimento da moeda

> *"Já no final do terceiro milênio a.C, as pessoas da Mesopotâmia começaram a usar lingotes de metais preciosos em troca de produtos. Tabletes de argila da Mesopotâmia com escrita cuneiforme em 2500 a.C. mencionam o uso de prata como forma de pagamento. As pessoas chamavam esses pesos padrões de ouro e prata de shekels ou talentos. Depósitos inteiros de azeite, cerveja ou trigo poderiam ter seu valor transformado em uma quantidade facilmente transportável de lingotes de ouro ou prata. Esse sistema provou-se eficiente para os mercadores acostumados a transacionar com carregamentos e grandes quantidades de um produto, mas o ouro manteve-se escasso e muito valioso para as pessoas comuns que queriam vender uma cesta de trigo ou comprar um pouco de vinho. Essas pessoas não tinham acesso aos lingotes de ouro e prata". [34][p.29]*

Após séculos de utilização das *commodities*, o homem percebeu que a transação comercial seria mais fácil caso, ao invés de usá-las, utilizasse alguma coisa que fosse pequena e fácil de transportar. Foi o início da cunhagem das moedas primitivas. Essa foi a primeira das três revoluções monetárias da história.

> *"Para desempenhar todas essas funções da melhor maneira, o dinheiro tem que estar disponível, e ser durável, fungível, portátil e confiável. Como preenchem a maioria desses critérios, ao longo dos milênios os metais, como ouro, prata e bronze foram considerados como a matéria-prima monetária ideal". [28][p.28]*

> *"Algo semelhante ao dinheiro e aos mercados podia-se encontrar na Mesopotânia, China, Egito e muitas outras partes do mundo, mas na verdade, eles não eram moedas até a ascensão da Lídia e subsequente cunhagem das primeiras moedas, que ocorreu entre 640 e 630 a.C. A genialidade dos reis lídios pode ser vista no reconhecimento da necessidade de lingotes bastante pequenos e de fácil transporte que valessem menos do que alguns dias de trabalho ou uma pequena parte da colheita de um agricultor". [34][p.33]*

O salto revolucionário monetário foi a capacidade de substituir a valoração das mercadorias por um objeto pequeno e que representasse facilmente todos os produtos, podendo ser transportado nos bolsos e que todos entendessem o seu significado em diversos locais diferentes. A moeda ajudou a eliminar as ineficiências das trocas e aperfeiçoar os cálculos das transações.

Um fato curioso é que a forma atual do papel-moeda se deve aos reis medievais que desejavam que fossem cunhadas nas moedas suas faces, dando início as duas faces da moeda: um lado era a cara, que representava a face do Rei e o outro lado era a coroa, que representava o valor da moeda[28].

A criação da moeda fez com que a corrida por minerais fosse acentuada por séculos. Diversas guerras foram feitas em busca de minas de ouro e prata, que poderiam dar aos povos dominantes um grande diferencial em termos de riqueza [28].

Um grande exemplo foi a queda das civilizações da América do Sul no século XVI. Uma das sociedades que sucumbiu à expansão marítima europeia foi a dos Incas. Eles eram uma sociedade muito sofisticada, mas que ainda utilizavam *commodities*. Eles apreciavam os metais pela sua beleza e consideravam o ouro como o suor do sol e a prata como a lágrima da lua [28].

Em 1532, Francisco Pizarro e seus colegas conquistadores vieram da Espanha para o local que eles chamavam de alto Peru, inspirados pela lenda do Eldorado, o reino do rei coberto de ouro. Com um grupo de 27 cavalos e 180 homens, ele conseguiu dominar por completo o Império Inca, um feito marcante [28].

> *"Os Incas não conseguiam compreender o desejo insaciável por ouro e prata que parecia dominar os europeus. "Mesmo se toda a neve nos Andes se transformasse em ouro, ainda assim eles não estariam satisfeitos", reclamou Manco Capac. Os Incas não podiam avaliar que, para Pizarro e seus homens, a prata era mais do que um metal brilhante, decorativo.*

> *Que ela podia ser transformada em dinheiro: uma unidade de valor, um recipiente de valor - poder portátil". [28][p.25]*

Os espanhóis extraíram tanta prata das minas da América do Sul que pensaram que não poderiam ter declínio econômico ou político de seu império. A quantidade de prata usada para financiar suas guerras de conquista foi tanta que o metal começou a sofrer uma queda extraordinária de valor. As enormes quantidades de moedas de prata não fizeram a Espanha mais rica, pois elas simplesmente elevaram os preços dos produtos, o que ocasionou o fim do império que possuía a maior quantidade de ouro e prata [28].

O que ocorreu com o Império Espanhol é a demonstração que ouro e prata por si só não importam para a definição do que seja uma moeda. Na verdade, o dinheiro não é o metal, podendo ser qualquer coisa, desde o ouro a até mesmo um mero cartão de plástico com chip magnético; ou talvez uma conta na nuvem, que é um local que não existe no mundo físico. Entender que dinheiro não é papel-moeda é a base da compreensão da evolução histórica do que significa dinheiro.

> *"O dinheiro é uma questão de confiança, talvez de fé: confiança na pessoa que está nos pagando, confiança na pessoa que emite o dinheiro que ele usa, ou na instituição que honra os seus cheques ou as suas transferências". [28][p.32]*

## 2.3 O início dos empréstimos e dos bancos

A utilização da moeda deu um salto enorme nas negociações e permitiu que as relações comerciais fossem muito aprimoradas. Era a facilitação da relação de compra e venda de produtos. Todavia o dinheiro não englobava todas as hipóteses. E se o comprador não tivesse dinheiro em mãos e quisesse pagar em outra oportunidade? Ou se ele precisasse da mercadoria a ser comprada, mas o vendedor só aceitasse a transação a vista?

Essas situações são normais atualmente; para isso se utiliza notas promissórias ou empréstimos bancários. Porém, tiveram início há muito tempo.

Os primeiros empréstimos são da Mesopotâmia, quando as transações eram registradas em tábuas de argilas e já ditavam o credor, o devedor, a data de reembolso, o valor e, até mesmo, os juros.

> *"O sistema de empréstimo da antiga Babilônia era evidentemente bastante sofisticado. Os débitos eram transferidos e, por conseguinte, o "pagamento ao portador"e não a um credor nomeado. Os recibos de argila, ou encargos, eram emitidos para aqueles que depositavam o grão ou outras commodities nos palácios reais ou nos templos. Esperava-se que os que tomavam empréstimos pagassem juros (um conceito que provavelmente se originou no crescimento natural de um rebanho de animais), em taxas que com frequência chegavam a 20%. Os exercícios matemáticos do reinado de Hammurabi (1792-1750 a.C.) sugerem que algo como juros compostos podiam ser cobrados em empréstimos de longo prazo". [28][p.34]*

Esses empréstimos que ocorriam na Mesopotâmia são importantes para o desenvolvimento das transações, contudo os historiadores os consideram simples adiantamentos de dinheiro. A segunda revolução monetária pela implementação do moderno empréstimo bancário somente ocorreu na Renascença. Muito se deve ao matemático Leonardo de Pisa, ou Fibonacci.

Por volta de 1200 d.C., várias cidades-Estado Italianas ainda possuíam vestígios do extinto Império Romano. Essas cidades possuíam um sistema numérico extremamente inadequado para o círculo matemático financeiro, pois era complexo demais para as necessidades do comércio. Em Pisa, esse sistema arcaico ficava mais evidente, pois os comerciantes lutavam para fazer negócios com sete diferentes moedas em circulação. Mesmo uma simples transação poderia ser uma enorme dor de cabeça.

O jovem Fibonacci, filho de um funcionário da alfândega de Pisa, percebeu que as transações do oriente eram muito mais avançadas que as europeias. Com essa percepção, ele provou que a utilização dos algarismos indo-arábicos era mais eficiente para conversões de valores, solucionando o problema da época: existiam várias moedas sendo cunhadas e a conversão era feita por algarismos romanos. A alteração dos números romanos pelo indo-arábicos gerou tamanha evolução que passou a ser possível calcular lucro de maneira rápida e precisa.

Essa simples importação dos números orientais foi capaz de alavancar o comércio e dar mais um salto comercial, pois as cidades-Estado Italianas passaram a ser vistas na Europa como as mais eficientes nessa questão, concentrando uma grande parte das transações monetárias europeias, e, em muito, porque eram capazes de fazer contas muito mais eficientemente.

Como a religião Católica, predominante na época, não permitia o aferimento de lucro por empréstimo, pois era considerado pecado capital a agiotagem, foram os Judeus que se tornaram os primeiros credores. Eles sofriam enorme preconceito cultural e, por causa disso, ficavam confinados em uma área especial que se tornou conhecida como Gueto. Na verdade, os Judeus eram tolerados em Veneza somente pelo fato que podiam fornecer um serviço que mercadores cristãos foram proibidos de prover pela religião [28].

> *"Supostamente, os judeus também não deveriam emprestar dinheiro a juros. Mas havia uma brecha conveniente na cláusula no livro do Deuteronômio, do Velho Testamento: "Para um estrangeiro, vós podeis emprestar sob a usura; mas não emprestarás sob a usura ao vosso irmão". Em outras palavras, um judeu podia emprestar legitimamente a um cristão, embora não a outro judeu. O preço de fazer isso foi a exclusão social". [28] [p.39]*

Foram nos bancos que os judeus sentavam para fazer negociações com os cristãos que surgiu a segunda revolução monetária. Isso resultou na criação do sistema capitalista em que se vive atualmente.

> *"A segunda geração do dinheiro dominou desde o início da Renascença até a revolução industrial e resultou na criação do moderno sistema*

> *capitalista mundial. Nasceu nos bancos da Itália e acabou dando origem ao sistema de bancos nacionais e ao papel-moeda que emitiram para uso no comércio diário. A invenção do sistema de operações bancárias e do papel-moeda destruiu o feudalismo, mudou a base da organização, passando de hereditariedade para posse de dinheiro, e alterou também a base do poder econômico, passando de posse de terras para posse de ações, títulos e corporações". [34][p.xiii]*

## 2.4 O dinheiro virtual

Atualmente, o mundo se encontra na segunda geração do dinheiro, mas os estudiosos estão concordando que de fato uma nova geração está surgindo. É a era do cartão magnético, do dinheiro virtual e das Criptomoedas.

> *"Agora, no início do século XXI, o mundo está entrando na terceira etapa de sua história monetária - a era do dinheiro eletrônico e da economia virtual. O nascimento do dinheiro eletrônico produzirá mudanças na sociedade tão radicais e amplas quanto as duas revoluções monetárias anteriores causaram em suas próprias eras. O novo dinheiro fará mudanças radicais nos sistemas políticos, na organização das empresas e na natureza da organização de classes. O dinheiro virtual promete criar sua própria versão de civilização que será tão diferente do mundo moderno quanto este é do mundo dos astecas ou dos víquingues". [34][p.xiii]*

A evolução começou de uma maneira inusitada. O milionário Frank McNamara estava em um restaurante, em 1950, quando, ao pagar a conta, percebeu que havia esquecido sua carteira. Sem opção, teve que solicitar alguém para ir a sua casa buscar o dinheiro com sua esposa. A partir daí, notou que precisava de uma forma diferente para efetuar pagamentos. Surgiu então, a ideia do cartão de crédito.

Os primeiros eram de papelão, sendo que em 1955 já se tornaram de plástico. Tanto a expansão dos usuários quanto das empresas ofertantes foi rápida.

> *"O cartão de crédito expandiu o crédito, mas também eliminou o elemento pessoal. Por meio do pagamento de uma taxa, a empresa de cartão de crédito agora assumia a responsabilidade e o risco de julgar a validade do crédito de um consumidor. A difusão dos cartões de crédito que teve início nos anos 60 provocou importantes mudanças nos padrões de compras e pagamento dos consumidores. O cartão de crédito isentou seu dinheiro de restrições temporárias permitindo que as pessoas usassem o dinheiro que elas ainda não haviam ganho ou recebido, mas que esperavam receber em uma data posterior". [34][p.232]*

O avanço da tecnologia e a alta concorrência impediu uma zona de conforto dos bancos, que continuaram perseguindo novas maneiras de ganharem mercado. Foi então, que, em 1971, o banco *Burbank*, da Califórnia, desenvolveu a primeira máquina automática de dinheiro. Nada menos que um caixa automático de sacar e depositar papel-moeda durante 24 horas.

O progresso não parou. A internet propagou-se mundialmente a partir dos anos 90. A necessidade pelas notas de papel começou a ser substituída pela facilidade e comodidade do dinheiro virtual. Tudo ficou ao alcance pelo computador e, posteriormente, pelo celular.

Os cartões de crédito se transformaram em *smartcards*. Basta inseri-los em máquinas especializadas para que a pessoa passe a dever o banco, que por sua vez pagará o estabelecimento.

Atualmente, surgiram as criptomoedas, que são um meio de troca similar ao papel-moeda, mas não lastreado em outra mercadoria, como, por exemplo, o ouro.[26]

> *"Criptomoeda: (quase-)moeda digital (q.v.) baseada em rede descentralizada, na qual cada nó da rede é um "cartório" com uma cópia do mesmo livro contábil (blockchain) no qual, um bloco (block) é uma de suas "páginas" e toda transação da rede é um registro criptografado nesse livro (por isso, "criptomoeda"). A criação de unidades monetárias é limitada por um algoritmo inalterável e não por uma autoridade central, de modo a supostamente evitar a inflação, mas isso também significa que não pode ser manejada para atender às necessidades da economia". [30][p.22]*

As criptomoedas não possuem forma física nem são apoiadas por qualquer governo ou organização internacional. Ademais, sua cunhagem não é determinada por um banco central, mas por um código de criptografias alfanumérico único 100% virtual, que se diz capaz de evitar a inflação e eventual falta de demanda.

As três principais criptomoedas são bitcoin, ethereum e tether. Elas surgiram da vontade de se criar transações independentes das instituições financeiras e mais rápidas e baratas. As principais vantagens são a simplicidade nas operações; segurança dos dados, pois não vincula informações pessoais do usuário ao processo; e a transparência, já que tudo fica disponível no mesmo livro contábil (*blockchain*). As desvantagens são a aceitação da moeda, devido à pequena quantidade de pessoas que a conhecem e a utilização; variação dos preços, grandes alterações de preços ocorrem com frequência; segurança dos dados, se o usuário não for cuidadoso pode apagar ou perder suas moedas virtuais.

Todo esse desenvolvimento tecnológico é o motivo de se falar que a sociedade está vivendo a terceira revolução monetária. Como ainda está acontecendo, não se sabe ao certo o que está por vir.

# 3

# Matemática Financeira Básica

O presente capítulo trata de conceitos básicos da Matemática Financeira. Primeiramente, são abordadas as progressões finitas, pois são pré-requisitos para o estudo do regime de capitalização. Posteriormente, explica-se os regimes de capitalização e taxas.

## 3.1 Progressões

No dia a dia, é muito comum as grandezas sofrerem aumentos ou decréscimos em intervalos de tempos iguais. Essas sequências podem ser finitas ou infinitas, decrescentes ou crescentes.

### 3.1.1 Progressões Aritméticas

As progressões aritméticas ocorrem quando os valores crescem ou decrescem de forma constante, obedecendo a uma determinada lógica, com intervalos de tempos iguais.

**Definição 3.1:** Uma progressão aritmética ($P.A.$) é uma sequência de números na qual a diferença entre cada termo com seu termo antecedente é sempre uma constante numérica, denominada razão.

Cada termo de uma progressão aritmética é denominado $a_n$ e a razão é representada pela letra $r$.

**Teorema 3.2:** Dado uma Progressão Aritmética ($P.A.$) de razão $r$, tem-se

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

para todo $n$ inteiro natural.

*Demonstração.* Pela definição de progressão aritmética, tem-se:

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= r \\
a_3 - a_2 &= r \\
a_4 - a_3 &= r \\
&\vdots \\
a_n - a_{n-1} &= r.
\end{aligned}
$$

Ao adicionar todas as igualdades, tem-se:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = \underbrace{r + \cdots + r}_{(n-1)\ \text{vezes}}$$

$$
\begin{aligned}
a_n - a_1 &= (n-1)r \\
a_n &= a_1 + (n-1)r.
\end{aligned}
$$

□

**Exemplo 3.1.1:** Ana pretende guardar um dinheiro durante um tempo, e para realizar isso quer poupar R\$ 200,00 no mês de janeiro, R\$ 210,00 no mês de fevereiro, R\$ 220,00 no mês de março, assim por diante até o mês de dezembro do mesmo ano. Qual valor será poupado no mês de dezembro?

Para descobrir o valor que será poupado nesse mês é preciso aplicar o Teorema 3.2. Sabe-se que o primeiro termo é R\$ 200,00, pois é o valor inicial da aplicação. A razão é R\$ 10,00 e o período é de 12 meses.

$$
\begin{aligned}
a_{12} &= 200 + (12 - 1) \cdot 10 \\
&= 200 + 11 \cdot 10 \\
&= 200 + 110 \\
&= 310.
\end{aligned}
$$

Então, Ana irá depositar R\$ 310,00 no mês de dezembro.

**Teorema 3.3:** A soma dos $n$ primeiros termos da progressão aritmética $(a_1 + a_2 + ... + a_n)$ é igual a

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

*Demonstração.* Tem-se que a soma de uma progressão aritmética é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Escrevendo a soma na ordem inversa do último para o primeiro termo,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Ao adicionar as duas formas de escrever a essas somas, obtêm-se:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

Observe que cada parênteses na soma acima é igual ao parênteses $(a_1 + a_n)$, já que, por exemplo, $a_2 = a_1 + r$ e $a_{n-1} = a_n - r$. Assim, $(a_2 + a_{n-1}) = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n$. Da mesma forma, temos que $a_3 = a_1 + 2r$ e $a_{n-2} = a_n - 2r$. Logo, $(a_3 + a_{n-2}) = a_1 + a_n$ e assim por diante.

$$\begin{aligned} 2S_n &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}} \\ 2S_n &= (a_1 + a_n) \cdot n \\ S_n &= \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.1.2:** Ana poupou dinheiro durante um ano em progressão aritmética, sendo que no mês de janeiro ela guardou R\$ 200,00 e a cada mês seguinte economizou R\$ 10,00 a mais que no mês anterior. No mês de dezembro do mesmo ano ela guardou R\$ 310,00. Ao finalizar o ano, Ana decide fazer o resgate do valor poupado. Qual o valor a ser resgatado?

Para saber o valor que Ana irá resgatar é preciso aplicar o Teorema 3.3, com o primeiro termo igual a R\$ 200,00 e o último termo igual a R\$ 310,00, em um período de 12 meses. Dessa forma:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{(200 + 310) \cdot 12}{2} \\ &= \frac{510 \cdot 12}{2} \\ &= \frac{6120}{2} \\ &= 3060. \end{aligned}$$

Logo, Ana terá guardado R\$ 3.060,00.

### 3.1.2 Progressões Geométricas

As progressões geométricas possuem uma variação exponencial ordenada e são relevantes no cotidiano por terem uma gama de aplicações práticas como, por exemplo, em juros compostos, no crescimento populacional, entre outros.

**Definição 3.4:** Progressão geométrica $(P.G.)$ é uma sequência em que, a partir do primeiro termo, os termos consecutivos da sequência são construídos pela multiplicação de uma constante, denominada razão, pelo termo antecessor.

O termo geral de uma $P.G.$ é denominado $a_n$ e a razão é representada pela letra $q$.

**Teorema 3.5:** Dada uma Progressão Geométrica ($P.G.$) de razão $q$ tem-se

$$a_n = a_1.q^{n-1},$$

para todo $n$ natural.

*Demonstração.* Pela definição de progressão geométrica, tem-se:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Ao multiplicar todas as igualdades têm-se:

$$a_2 \times a_3 \cdot a_4 \times \cdots \times a_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_{n-1} \times \underbrace{q \times \cdots \times q}_{(n-1)\ \text{vezes}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

□

Se os termos fossem numerados a partir de $a_0$, obter-se-ia $a_n = a_0 \cdot q^n$.

**Exemplo 3.1.3:** Antônio possui uma dívida de R\$ 200,00 no banco, porém ele não consegue pagá-la na data do vencimento. Sabendo que o banco cobra 1% ao dia sobre o saldo devedor, qual o valor a ser pago no 10º dia de atraso?

Para saber o valor que Antônio irá pagar no 10º dia, é necessário encontrar qual é o valor da razão dessa sequência. Observe que ao analisar pelo menos os dois primeiros dias após o vencimento, tem-se:

1º dia: $200 + 1\% \cdot 200 = 200 + 0{,}01 \cdot 200 = 200 \cdot (1 + 0{,}01) = 200 \cdot (1{,}01)$.

2º dia: $200 \cdot (1{,}01) + 1\% \cdot 200 \cdot (1{,}01) = 200 \cdot (1{,}01) + 0{,}01 \cdot 200 \cdot (1{,}01) = 200 \cdot (1{,}01) \cdot (1 + 0{,}01) = 200 \cdot (1{,}01) \cdot (1{,}01) = 200 \cdot (1{,}01)^2$.

Assim, é possível determinar que a razão da progressão é (1,01).

A quantidade de termos da ($P.G.$) é 10, pois o tempo é de 10 dias e o primeiro termo é o valor inicial da dívida que é R\$ 200,00. Ao aplicar o Teorema 3.5 tem-se:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 200 \cdot (1{,}01)^{(10-1)} \\ &= 200 \cdot (1{,}01)^9 \\ &= 200 \cdot 1{,}0936 \\ &= 218{,}74. \end{aligned}$$

Antônio irá pagar pela dívida o valor de R$ 218,74.

**Teorema 3.6:** A soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão geométrica ($P.G.$) de razão $q \neq 1$ é igual a

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

*Demonstração.* A soma dos $n$ primeiros termos da progressão geométrica é igual a

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \tag{3.1}$$

e ao multiplicar ambos os lados por $q$, obtém-se:

$$qS_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q. \tag{3.2}$$

Ao realizar a subtração das igualdades 3.2 e 3.1, tem-se:

$$S_n - qS_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q)$$

$$S_n - qS_n = a_1 - a_n q$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n).$$

Já que $q \neq 1$, tem-se:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

□

**Exemplo 3.1.4:** Antônio realizou um empréstimo que deverá pagar em 10 prestações, sendo que a primeira é no valor de R$ 200,00 e que cada prestação seguinte terá um acréscimo de 5% sobre o valor da prestação anterior. Qual o valor que Antônio pagará no total?

Para descobrir o valor total que Antônio irá pagar no final das 10 prestações, observe que a primeira prestação é de R$ 200,00 e que cada parcela é aumentada em 5%, logo, tem-se:

1ª prestação: 200.

2ª prestação: $200 + 0{,}05 \cdot 200 = 200 \cdot (1 + 0{,}05) = 200 \cdot (1{,}05)$.

3ª prestação: $200 \cdot (1{,}05) + 0{,}05 \cdot 200(1{,}05) = 200 \cdot (1{,}05) \cdot (1{,}05) = 200 \cdot (1{,}05)^2$.

Assim sucessivamente até a 10ª prestação, com isso, a razão será de 1,05 e prazo de 10 meses. Aplicando o Teorema 3.6:

$$
\begin{aligned}
S_{12} &= 200 \cdot \frac{1-1{,}05^{10}}{1-1{,}05} \\
&= 200 \cdot \frac{1-1{,}63}{1-1{,}05} \\
&= 200 \cdot \frac{-0{,}63}{-0{,}05} \\
&= 200 \cdot 12{,}6 \\
&= 2520.
\end{aligned}
$$

Antônio irá pagar um total de R$ 2.520,00.

## 3.2 Conceitos Financeiros Básicos

Quando é realizada uma análise financeira, pode-se perceber que o montante do dinheiro possui valores diferenciados ao se tratar de épocas diferentes.

Para compreender essa análise de comparação do dinheiro em relação ao tempo, é necessária a compreensão de alguns conceitos básicos da Matemática Financeira.

**Definição 3.7:** Capital ou principal, representado pela letra ($C$), é o valor que é aplicado ou emprestado, considerando uma data "zero"(inicial).

**Definição 3.8:** Período, representado pela letra ($n$), é o tempo que se gasta para resgatar o dinheiro aplicado ou liquidar um empréstimo. O período pode ser dias, meses, bimestres, trimestres, semestres, anos.

**Definição 3.9:** Juros, representado pela letra ($J$), é o valor obtido sobre o capital aplicado em um determinado período, sendo o custo pago pelo uso do dinheiro em um determinado período de tempo. Também pode ser considerado como um "aluguel" pago por utilizar o dinheiro intemporal. [14]

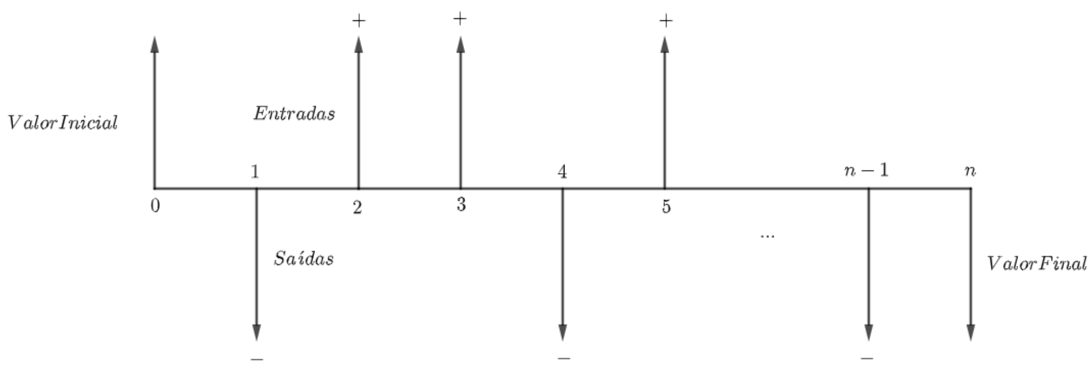
**Definição 3.10:** Taxa de juros é a razão entre os juros e o capital ($i = \frac{J}{C}$). A taxa deve ser indicada na unidade de tempo em que se encontra o período e pode ser apresentada de duas maneiras: taxa percentual ou unitária.

- **Taxa percentual:** Refere-se à taxa em forma de porcentagem do capital. Exemplo: 5% a.m..
- **Taxa unitária:** Refere-se à taxa retratada em unidades do capital em um determinado período. Exemplo: 0,05 a.m..

**Definição 3.11:** Montante, representado pela letra ($M$), é a quantia total resgatada no final do período da aplicação ou empréstimo.

**Definição 3.12:** O fluxo de caixa é a entrada e saída financeira ao longo do período. É representado por uma linha horizontal, que marca a escala do período e o momento do início da movimentação. As entradas são representadas por setas verticais para cima. Já as saídas por setas verticais para baixo. Por ser uma ilustração gráfica, o tamanho das setas não importa.

**Figura 3.1:** Fluxo de Caixa.




# 3.3 Regime de Capitalização

O regime de capitalização é como os juros são incorporados em determinados capitais ao longo do tempo. Os regimes de capitalização podem ser simples ou compostos.

## 3.3.1 Capitalização Simples

No regime de capitalização simples ocorre um acréscimo constante sobre o valor principal. Como o acréscimo é sempre constante, uma progressão aritmética, a razão do aumento dos juros simples é sempre a mesma.

Considera-se o capital $(C)$, a taxa unitária $(i)$, os juros representados por $(C \cdot i)$, sendo esses juros aplicados durante $(n)$ períodos e o montante por $(M)$.

Os juros no $1^{\text{o}}$ período são de $(C \cdot i)$ e em cada período seguinte será o mesmo. O capital após o primeiro período será $(C + C \cdot i)$. Utilizando o Teorema 3.2 e substituindo o termo inicial por $(C + C \cdot i)$, a razão por $(C \cdot i)$ e o termo geral por $(M)$, tem-se:

$$M = C + C \cdot i + (n - 1) \cdot (C \cdot i)$$

$$M = C + C \cdot i + n \cdot (C \cdot i) - C \cdot i$$

$$M = C + n \cdot C \cdot i$$

$$M = C(1 + n \cdot i). \tag{3.3}$$

**Exemplo 3.3.1:** Durante uma crise financeira que um país atravessa, uma instituição financeira oferece empréstimos cobrando juros simples. Se uma pessoa adquirir emprestado R$ 10.000,00, com juros de 20% ao mês, para ser quitado após 3 meses, qual o valor a ser pago?

Para saber o valor que deve ser pago para a financeira, verifica-se que o valor capital é igual a 10.000, a taxa de juros é 0,2 e o tempo é igual a 3, ao ser aplicada a Equação 3.3, tem-se.

$$\begin{aligned} M &= 10000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}20) \\ &= 10000 \cdot (1 + 0{,}6) \\ &= 10000 \cdot 1{,}6 \\ &= 16000. \end{aligned}$$

O valor a ser quitado para a financeira será de R$ 16.000,00.

### 3.3.2 Capitalização Composta

O regime de capitalização composta exige que, a cada um dos períodos, os juros sejam calculados e incorporados ao valor principal. Os juros compostos são uma das aplicações de progressões geométricas, incrementando juros que incidem sobre si mesmos e causam o aumento exponencial do capital.

**Teorema 3.13:** No regime de juros compostos de taxa $i$, um principal $C$ transforma-se, em $n$ períodos, em um montante $M$ igual a

$$M = C \cdot (1 + i)^n.$$

*Demonstração.* Utilizando o Teorema 3.5 e substituindo o termo inicial por $C \cdot (1 + i)$, a razão por $(1 + i)$ e o termo geral por $M$, tem-se:

$$M = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)^{n-1}$$

$$M = C \cdot (1 + i)^n.$$

□

**Exemplo 3.3.2:** Se a financeira do Exemplo 3.3.1 emprestar o dinheiro a juros compostos, qual será o valor que a pessoa pagará após 3 meses?

Para saber o valor que a pessoa pagará, deverá ser utilizado o Teorema 3.13.

$$\begin{aligned} M &= 10000 \cdot (1 + 0{,}20)^3 \\ &= 10000 \cdot (1{,}2)^3 \\ &= 10000 \cdot 1{,}728 \\ &= 17280. \end{aligned}$$

O valor a pagar no final dos 3 meses é de R$ 17.280,00.

### 3.3.3 Comparação entre Juros Simples e Juros Compostos

Ao realizar a comparação entre os juros simples e os juros compostos, pode-se perceber que o montante dos juros compostos será maior ou igual que o montante dos juros simples, desde que o período $n$ seja maior ou igual a 1.

A comparação entre juros simples e juros compostos pode ser demonstrada através da desigualdade de Bernoulli.

**Teorema 3.14 (Desigualdade de Bernoulli):** Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que h>-1. Então

$$(1+h)^n \geq (1+h\cdot n),$$

para todo $n$ natural.

*Demonstração.* A demonstração será desenvolvida pelo método da indução sobre o valor de $n$. Seja $P(n) : (1+h)^n \geq (1+h\cdot n)$.

**i)** $P(1)$ é verdadeira.

**ii)** Suponha-se que $P(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, seja verdadeira, ou seja, $(1+h)^n \geq (1+h\cdot n)$. Multiplicando ambos os lados por $(1+h)$, isto é permitido porque $(1+h>0)$, obtém-se:

$$(1+h)^n \geq (1+hn)$$

$$(1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+hn)\cdot(1+h)$$

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+h\cdot n+h+nh^2$$

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+h(1+n)+nh^2 \geq 1+h(1+n) \text{ já que } nh^2 \geq 0.$$

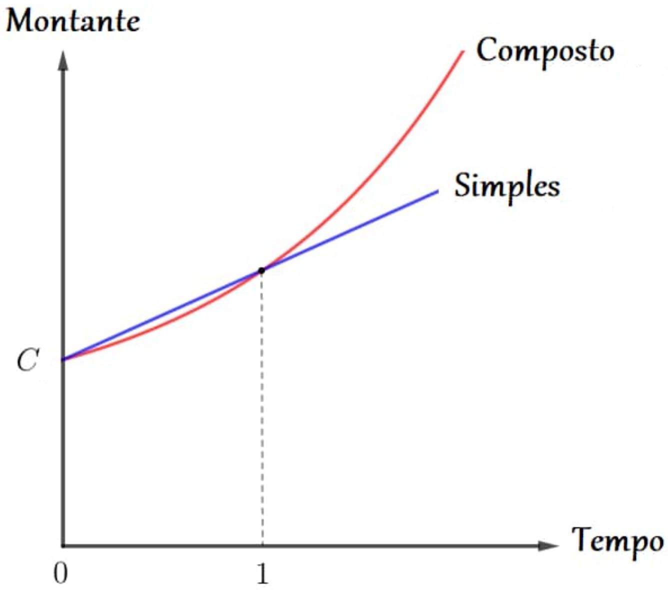
Desta forma, fica demonstrado que $(1+h)^{n+1} \geq 1+h(n+1)$, ou seja, que $P(n)$ implica $P(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Assim, a desigualdade de Bernoulli prova que os juros compostos serão maiores ou iguais aos juros simples, desde que $n$ seja natural.

$$\underbrace{(1+h)^n}_{\text{função exponencial}} \geq \underbrace{(1+h\cdot n)}_{\text{função afim}} \Longleftrightarrow \underbrace{(1+i)^n}_{\text{juros compostos}} \geq \underbrace{(1+i\cdot n)}_{\text{juros simples}}.$$

**Figura 3.2:** Compração dos Juros Simples e Compostos.



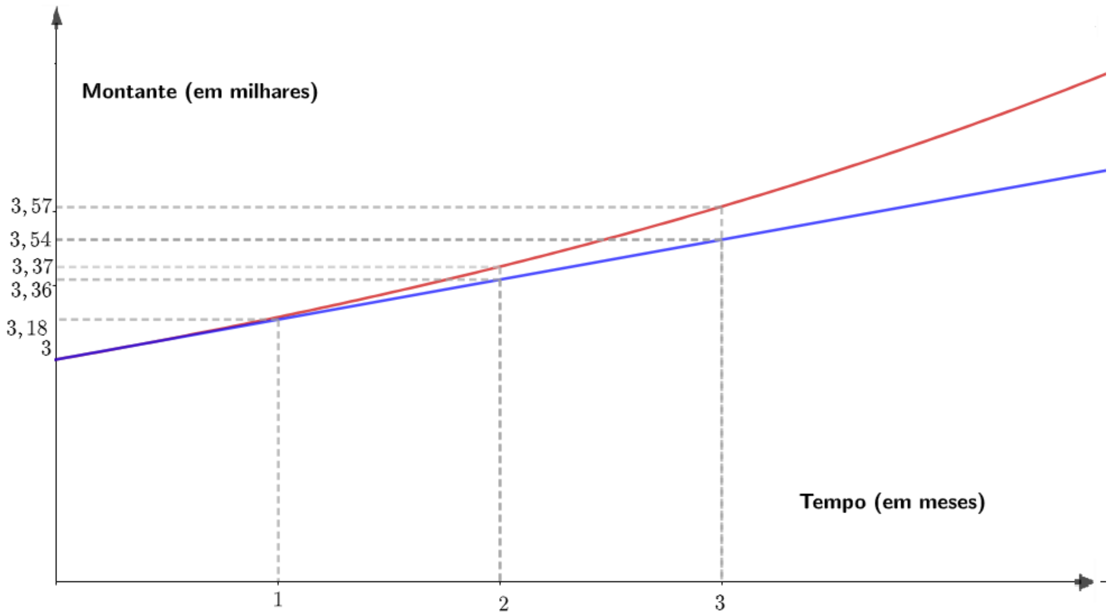

**Exemplo 3.3.3:** Pedro pretende realizar um depósito único de R$ 3.000,00 e resgatá-lo após três meses. Para isso, ele visitou o Banco A e o Banco B para analisar as propostas. O Banco A efetuou a seguinte proposta: taxa de 6% ao mês com juros simples. Já o banco B propôs uma taxa de 6% ao mês com juros compostos. Qual o Banco que propôs o melhor rendimento?

Pedro ao chegar à sua casa, construiu uma tabela para melhor visualizar as propostas que ele possuía.

A tabela a seguir representa a evolução do principal que Pedro queria depositar.

| **Tempo (meses)** | **Montante Banco A Juros Simples (R$)** | **Montante Banco B Juros Compostos (R$)** |
|---|---|---|
| 0 | 3.000,00 | 3.000,00 |
| 1 | $3.000{,}00 + 180{,}00 = 3.180{,}00$ | $3.000{,}00 \cdot 1.06 = 3.180{,}00$ |
| 2 | $3.180{,}00 + 180{,}00 = 3.360{,}00$ | $3180{,}00 \cdot 1.06 = 3.370{,}80$ |
| 3 | $3.360 + 180{,}00 = 3.540{,}00$ | $3.370{,}80 \cdot 1.06 = 3.573{,}04$ |

**Figura 3.3:** Gráfico sobre o aplicação de Pedro.




Após a construção da tabela, Pedro analisou que a melhor proposta de rendimento foi do Banco $B$, pois iria lhe render um montante maior no final.

## 3.4 Taxas

As taxas têm como objetivo realizar correções monetárias intertemporais.

### 3.4.1 Taxas Proporcionais

São taxas que ao serem comparadas na mesma unidade de tempo possuem um comportamento linear, sendo possível escrevê-las em forma de uma proporção. São utilizadas para comparar taxas de juros simples.

Na taxa proporcional, algumas comparações podem ser realizadas ao se considerar: $i_a$ a taxa anual e $i_s$, $i_t$, $i_m$ e $i_d$ as taxas semestral, trimestral, mensal e diária, respectivamente. Assim, tem-se:

$$i_s = \frac{i_a}{2}; \qquad i_t = \frac{i_a}{4}; \qquad i_b = \frac{i_a}{6}; \qquad i_m = \frac{i_a}{12}; \qquad i_d = \frac{i_a}{360}.$$

### 3.4.2 Taxas Equivalentes:

São taxas que fazem dois capitais iguais chegarem a um mesmo montante em um mesmo intervalo de tempo, apesar de possuírem periodicidades de capitalização diferentes.

**Teorema 3.15:** Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a $i$, a taxa de juros relativamente a $n$ períodos de tempo é $I$ tal que

$$1 + I = (1 + i)^n.$$

*Demonstração.* Ao se considerar $G_o$ o valor inicial da grandeza, após um determinado período de tempo igual a 1, o valor será $G_o(1 + I)^1$. O seu valor em $n$

períodos será $G_o(1+i)^n$. Logo, $G_o(1+I)^1 = G_o(1+i)^n$. Daí, $1+I = (1+i)^n$.

Como um tempo total equivale a $n$ períodos iguais, o valor será igual a $G_o(1+i)^n$. Logo, $G_o(1+I)^1 = G_o(1+i)^n$. Daí, $1+I = (1+i)^n$.

□

**Exemplo 3.4.1:** Na taxa equivalente, algumas comparações podem ser realizadas ao se considerar: $i_a$ a taxa anual e $i_s$, $i_t$, $i_m$ e $i_d$ as taxas semestral, trimestral, mensal e diária, respectivamente. Assim, tem-se:

$$(1+i_a)^1 = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_m)^{12} = (1+i_d)^{360}.$$

**Exemplo 3.4.2:** Uma pessoa realizou um empréstimo em uma instituição financeira que cobra uma taxa de 6% ao mês. Qual a taxa equivalente anual que essa pessoa irá pagar?

Como a taxa já se encontra na unidade de capitalização, então pode-se utilizar o Teorema 3.15.

$$\begin{aligned}
1+I &= (1+i)^n \\
1+I &= (1+0{,}06)^{12} \\
1+I &= 1{,}06^{12} \\
1+I &= 2{,}012 \\
I &= 2{,}012-1 \\
I &= 2{,}012-1 \\
I &= 2{,}012-1 \\
I &= 1{,}012 = 101{,}2\%.
\end{aligned}$$

Logo, a taxa equivalente é 101,2%.

### 3.4.3 Taxa Efetiva:

A taxa efetiva é a formação dos juros no regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização, sendo apurada durante todo o período. É obtida pela seguinte equação [1]:

$$i_f = (1+i)^n - 1. \tag{3.4}$$

**Exemplo 3.4.3:** Determine as taxas efetivas anuais que correspondem a 30% ao ano com capitalização mensal.

Uma vez que a taxa de 30% ao ano está com capitalização mensal, será necessário dividir 30 por 12, o que retorna 2,5% ao mês. Para descobrir qual a taxa anual é preciso aplicar a Equação (3.4).

$$\begin{aligned}
i_f &= (1+0{,}025)^{12} - 1 \\
&= (1{,}025)^{12} - 1 \\
&= 1{,}3448 - 1 \\
&= 0{,}3448 = 34{,}48\%.
\end{aligned}$$

Logo, a taxa será de 34,48%.

### 3.4.4 Taxa Nominal

Ocorre quando a taxa cobrada não coincide com o período de capitalização. Dada uma taxa nominal, a taxa efetiva é proporcional ao período de capitalização. Para realizar os cálculos da operação financeira, é necessário transformar a taxa nominal em taxa efetiva, que é a taxa propriamente utilizada na operação para o cálculo dos juros.

Por exemplo, uma taxa de 24% ao ano com capitalização mensal, observe que o prazo é diferente da capitalização, pois a taxa encontra-se anualmente (12 meses), mas é capitalizada mensalmente.

### 3.4.5 Taxa Exata

É a taxa que considera os dias exatos entre as aplicações ou resgates de um empréstimo ou pagamento, conforme o calendário anual. Neste caso, considera-se o ano com 365 dias e quando for um ano bissexto, 366 dias.

**Exemplo 3.4.4:** Determine a taxa exata que equivalente a 146% ao ano com capitalização diária.

Uma vez que a taxa é de 146% ao ano, para transformar em taxa diária é preciso dividir 146 por 365, em anos não bissextos, o que retorna 0,4% ao dia.

### 3.4.6 Taxa Real

A taxa é calculada a partir da taxa efetiva e considera os efeitos inflacionários do período. Assim, ela indica o valor da transação após a depreciação monetária, o que permite saber quanto realmente houve de rendimento no período de tempo. Por conseguinte, pode ser negativa.

### 3.4.7 Taxa de Inflação

A taxa de inflação é a taxa que determina a variação média dos preços de bens e serviços em um determinado período. "O termo foi criado em 1838 pelo congressista estadunidense Daniel Barnard para denominar o aumento da quantidade de papel-moeda em relação ao lastro em metal precioso" [30].

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) [21], para a inflação não acarretar grandes distorções na economia de mercado, o governo utiliza o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O IPCA tem como objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços referentes ao consumo pessoal das famílias. Esse índice de preços tem como unidades de coleta estabelecimentos comerciais e de prestação de serviços, durante todos os dias do mês de referência.

Conforme Crespo [25] a inflação pode ser caracterizada como "contínua, persistente e generalizada expansão dos preços". Já "a inflação rastejante é caracterizada por uma leve e quase imperceptível expansão dos preços". "A inflação galopante ou hiperinflação é caracterizada por uma violenta e incontrolável expansão do nível geral dos preços".

> *"A hiperinflação se caracteriza quando a inflação se torna alta a ponto de fazer as pessoas evitarem possuir dinheiro e procurarem aplicá-lo em mercadorias ou comprar moeda estrangeira tão rapidamente quanto possível. Na maioria das vezes, resulta de um governo não conseguir*

*cobrir um deficit público elevado com impostos e recorrer à emissão excessiva e crescente de papel-moeda fiduciário para pagar suas despesas". [30][p.25]*

### 3.4.8 Taxa Selic

A taxa de juros do Sistema Especial de Liquidação e de Custódia (Selic) é utilizada nas operações relacionadas com títulos públicos federais. Por isso, é considerada a taxa básica da economia, sendo a menor taxa de juros possível de se operar no sistema.

A taxa Selic geralmente é utilizada por quem faz vultuosas transações, sendo de grande importância, pois é a partir dessa taxa que vão se formar as demais taxas de juros na economia brasileira.

> *"Taxa de juro básica: é a taxa paga pelo Tesouro Nacional a seus credores, geralmente arbitrada pela autoridade monetária (Banco Central ou equivalente) e chamada no Brasil de taxa Selic (Sistema de liquidação e de Custódia). Essa taxa serve de referência aos empréstimos entre bancos e, portanto, de base a todas as demais taxas de juros bancárias e comerciais, pois ao buscar lucro todas embutem uma margem (spread) maior ou menor em relação à taxa básica, ou seja, são maiores que esta. Ao baixar ou elevar a taxa básica, o Banco Central influi em todas as taxas de juros cobradas no mercado e assim estimula ou desestimula os empréstimos e, portanto os investimentos e toda a atividade econômica.*
>
> *Normalmente, a taxa de juro básica é a mais baixa do sistema financeiro, mas é positiva em termos reais. Entretanto, quando o governo ou o Banco Central querem estimular mais intensamente a economia, pode fixar a taxa básica em nível inferior à taxa de inflação. Enquanto os títulos do Tesouro Nacional forem considerados seguros, os credores (principalmente bancos) tendem a aplicar neles mesmo quando oferecem juro real negativo, pois são preferíveis a manter o dinheiro sem aplicação, com rendimento zero". [30][p.60]*

# 4 Matemática Financeira Comercial

Este capítulo trata de conceitos mais aprofundados da Matemática Financeira e aborda o estudo de financiamentos, empréstimos, sistemas de amortização e investimentos

## 4.1 Financiamento

Os financiamentos são créditos que uma pessoa obtém para comprar um bem ou um serviço como, por exemplo, uma casa, um carro, um eletrodoméstico ou um curso de graduação. Eles podem incluir tarifas, impostos e outros encargos. Seu pagamento é conforme a negociação pré-fixada, podendo ser por boletos, débitos em conta corrente, entre outros [14].

### 4.1.1 Categorias de Financiamentos

O governo federal do Brasil disponibiliza alguns programas de financiamento.

- **FIES:** O Fundo de Financiamento Estudantil (FIES) é um programa do Ministério da Educação para conceder um financiamento para estudantes de instituições particulares.

  De acordo com a **LEI Nº 13.530**, de 07 de dezembro de 2017.

  > *"**Art.1º** O financiamento de que trata o caput deste artigo poderá beneficiar estudantes matriculados em cursos da educação profissional, técnica e tecnológica, e em programas de mestrado e doutorado com avaliação positiva, desde que haja disponibilidade de recursos, nos termos do que for aprovado pelo Comitê Gestor do Fundo de Financiamento Estudantil (CG-Fies)".[3][p.1]*

- **SFI:** O Sistema Financeiro Imobiliário tem como finalidade o financiamento imobiliário em geral. As instituições financeiras abrangidas pela **LEI Nº 9.514**, de 20 de novembro de 1997 são:

  > *"**Art. 2º** Poderão operar no SFI as caixas econômicas, os bancos comerciais, os bancos de investimento, os bancos com carteira de crédito imobiliário, as sociedades de crédito imobiliário, as associações de poupança e empréstimo, as companhias hipotecárias e, a critério do Conselho Monetário Nacional - CMN, outras entidades".[4][p.1]*

## 4.2 Empréstimo

Os empréstimos são créditos que ficam disponíveis imediatamente para uma pessoa, que somente conseguiria alcançar esse valor no futuro. No empréstimo, o valor adquirido não possui destinação especifica, ou seja, a pessoa pode utilizar o dinheiro da forma que achar mais conveniente. O valor emprestado é acrescido de juros e encargos cobrados pela instituição financeira e deverá ser pago na forma e prazos pré-fixados [14].

### 4.2.1 Categorias de Empréstimos

Algumas categorias de empréstimos que são utilizadas com mais periodicidade.

- **Empréstimo consignado da folha de pagamento:** O empréstimo consignado é realizado quando uma pessoa quer que suas prestações sejam debitadas diretamente em sua folha de pagamento. Para realização do mesmo é necessário possuir uma fonte de renda comprovada, assim o interessado que adquirir o empréstimo consignado terá o seu pagamento (salário, aposentadoria, pensão e outros) descontado do valor das parcelas. O teto máximo das prestações é de 30% do salário.

- **Empréstimo pessoal:** O empréstimo pessoal também é chamado de crédito pessoal. É oferecido por bancos e outras instituições financeiras aos seus clientes, sem que os mesmos tenham a necessidade de comprovar sua finalidade. É uma opção disponível no mercado para quem precisa de dinheiro com rapidez. Esse pode ser pago por débito em conta corrente do cliente ou até mesmo por boletos. Caso o cliente opte em pagar com desconto na sua folha de pagamento, será na verdade um empréstimo consignado.

- **Cheque especial:** É uma categoria de empréstimo pré-aprovada em que o valor está a disposição dos clientes das instituições financeiras. É um crédito disponível na conta corrente para utilização em situações emergenciais, por períodos curtos. O cheque especial pode ser utilizado sempre que não houver dinheiro suficiente na conta para cobrir uma despesa inesperada. Quando se usa o cheque especial, o cliente fica devendo não só o valor utilizado, mas também os altos juros cobrados.

### 4.2.2 Consórcio

O consórcio é quando pessoas ou empresas se reúnem em grupos organizados por uma administradora com o objetivo de adquirir recursos financeiros para financiar os próprios membros, para futuramente conquistar bens ou serviços. [14]

O grupo de pessoas ou empresas que se unem recebem o nome de consorciados. Cada um pode participar com uma ou mais cotas. Essas são uma identificação numérica que representam a participação de cada consorciado. As contribuições são realizadas mensalmente em razão da cota que cada um possui. O valor pago é formado pela contribuição ao fundo comum e à taxa de administração. É possível que um contrato preveja a inclusão de valores relativos a seguros e fundos de reservas.

O fundo comum "é a soma dos valores pagos pelos consorciados que se destinam às contemplações ou, no caso de consorciados excluídos, à restituição".[14]. Já o fundo de reserva "é a soma dos valores pagos pelos consorciados, que se destinam a socorrer o grupo de consórcio nas situações definidas no contrato, como a eventual insuficiência de recursos do fundo comum para uma contemplação, provocada pelo aumento do preço do bem ou serviço".[14]

A taxa de administração é a remuneração cobrada pela administradora pelos seus serviços, que geralmente corresponde a um percentual do bem ou serviço. O valor cobrado referente à taxa de administração pode ser antecipado ou juntamente com as parcelas mensais do consórcio. [14]

## 4.3 Séries Uniformes de Pagamentos

As séries de pagamentos são prestações ou recebimentos que possuem valores constantes e são divididas igualmente em um período de tempo.

> *"Um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamento ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade (apesar do nome, nada a ver com ano) ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme". [23][p.100]*

**Teorema 4.1:** O valor $A$ de uma série uniforme de $n$ pagamentos iguais a $P$, um tempo antes do primeiro pagamento, sendo $i$ a taxa de juros, é igual a

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

*Demonstração.* A parcela de amortização é igual ao valor da prestação dividido pelos juros aplicados no mês. A soma de todas as prestações na época "zero" é:

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$A = P(1+i)^{-1} + P(1+i)^{-2} + P(1+i)^{-3} + \cdots + P(1+i)^{-n}.$$

Ao aplicar a soma das $n$ parcelas no Teorema 3.6, tem-se:

$$A = P(1+i)^{-1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$A = P \cdot \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1-i)^{-1}}$$

$$A = P \cdot \frac{(1+i)^{-n}}{(1+i)-(1-i)^{(1-1)}}$$

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)-(1-i)^{0}}$$

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

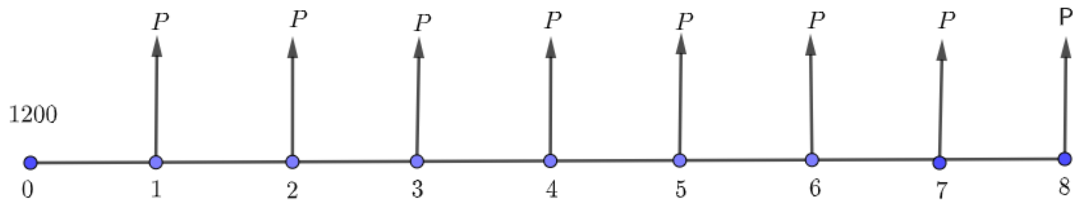
$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

□

**Exemplo 4.3.1:** Uma geladeira, cujo preço à vista é R$ 1.200,00, é vendida em 8 prestações mensais e iguais. A primeira é paga um mês após a compra. Se os juros são de 10% ao mês, qual o valor das parcelas?

Para saber o valor de cada prestação, é preciso aplicar o Teorema 4.1.

**Figura 4.1:** Série uniforme de pagamentos.




$$
\begin{aligned}
1200 &= P \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-8}}{0{,}1} \\
1200 &= P \cdot \frac{1-(1{,}1)^{-8}}{0{,}1} \\
1200 &= P \cdot \frac{1-0{,}4665}{0{,}1} \\
1200 &= P \cdot \frac{0{,}5335}{0{,}1} \\
1200 &= 5{,}335 \cdot P \\
P &= \frac{1200}{5{,}335} \\
P &\approx 224{,}93.
\end{aligned}
$$

O valor de cada prestação será de R$ 224,93.

## 4.4 Sistema de Amortização

Uma dívida na maioria das vezes possui duas partes, o capital e os juros. A amortização em suas prestações tem por objetivo reduzir o valor do capital e também realizar o pagamento dos juros e encargos [14].

Quando uma pessoa realiza um empréstimo ou um financiamento, o devedor possui três formas de realizar o pagamento da dívida:

- Realizar o pagamento no vencimento do montante total do capital acrescido de juros.

- Realizar o pagamento periodicamente somente dos juros e no vencimento pagar o capital.

- Realizar o pagamento periodicamente dos juros e uma quota de amortização do capital.

> *Nos sistemas de amortização de empréstimos a longo prazo, regra geral, os juros são sempre cobrados sobre o valor do saldo devedor, o que significa considerar apenas o regime de juro composto. Desse modo, o não-pagamento de uma prestação, isto é, o não-pagamento do juro em um dado período redunda em um saldo devedor maior, já que está sendo calculado juro sobre juro.* [25][p.156]

### 4.4.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

No caso do Sistema de Amortização Constante (SAC), o valor da amortização é constante e o valor referente a cada parcela a ser paga dependerá dos juros correspondentes. Assim, o custo de cada prestação será cada vez menor.

**Teorema 4.2:** No Sistema SAC, ao se considerar que $n$ é o número de pagamentos, $i$ a taxa de juros, $A_k$ a parcela de amortização (o valor da amortização não depende do tempo, pois ele é constante ao longo das parcelas), $J_k$ a parcela de juros, $P_k$ a prestação, $D_k$ o estado da dívida (valor da dívida após paga) e $k$ o tempo, tem-se:

$$A_k = \frac{D_0}{n}, \tag{4.1}$$

$$D_k = \frac{n-k}{n} \cdot D_0, \tag{4.2}$$

$$J_k = i \cdot D_{k-1}, \tag{4.3}$$

$$P_k = A_k + J_k. \tag{4.4}$$

*Demonstração.* Se a dívida $D_o$ é amortizada em $n$ quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_K = \frac{D_0}{n}.$$

O estado da dívida, após $k$ amortizações, é

$$\begin{aligned} D_k &= D_0 - k \cdot \frac{D_0}{n} \\ &= \frac{(n-k)}{n} \cdot D_0. \end{aligned}$$

Já as Equações (4.3) e (4.4) são diretas das definições, a equação (4.3) é a realização do juro mensal do saldo devedor, ou seja, o produto da taxa de juros pelo estado da dívida e a equação (4.4) é a soma da amortização com o juro mensal.

$\square$

**Construção da tabela do modelo SAC**

Para construir uma tabela no Sistema SAC é utilizado o Teorema 4.2.

- **Amortização**

  Como no Sistema SAC a amortização é constante, então para determiná-la, é preciso dividir o valor do empréstimo ou financiamento pela quantidade de prestações.

  $$A_k = \frac{D_o}{n}.$$

- **Juros**

  Para calcular os juros de cada mês, é preciso utilizar a dívida do mês anterior e multiplicá-la pela taxa de juros.

  $$J_k = D_{k-1} \cdot i.$$

- **Prestação**

  Para saber o valor de cada prestação, é necessário realizar a adição da amortização com os juros do mês.

  $$P_k = A_k + J_k.$$

- **Dívida**

  Para saber o valor do saldo da dívida, deve-se realizar a diferença entre o saldo do mês anterior com a amortização do mês atual.

  $$D_k = \frac{n-k}{n} \cdot D_0.$$

**Tabela 4.1:** Tabela modelo do Sistema de Amortização Constante (SAC).

| **Tempo** ($k$) | **Amortização** ( $A_k$) | **Juros** ( $J_k$) | **Prestação** ($P_k$) | **Dívida** ($D_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | $D_0$ |
| 1 | $A$ | $J_1 = D_0 \cdot i$ | $P_1 = J_1 + A$ | $D_1 = D_0 - A$ |
| 2 | $A$ | $J_2 = D_1 \cdot i$ | $P_2 = J_2 + A$ | $D_2 = D_1 - A$ |
| 3 | $A$ | $J_3 = D_2 \cdot i$ | $P_3 = J_3 + A$ | $D_3 = D_2 - A$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $k$ | $A$ | $J_k = D_{k-1} \cdot i$ | $P_n = J_{k-1} + A$ | $D_k = D_{k-1} - A = 0$ |

**Exemplo 4.4.1:** Para realizar um empréstimo, Ana quer saber qual o valor das prestações no Sistema SAC. Sabe-se que o valor do empréstimo é de R$ 10.000,00 e que irá pagar em 12 prestações mensais, com juros de 3% ao mês.

Para determinar o valor de cada amortização, é preciso realizar a divisão da dívida pela quantidade de parcelas, então utiliza-se a equação (4.1).

$$\begin{aligned} A_K &= \frac{D_0}{n} \\ &= \frac{10.000}{12} \\ &= 833{,}34. \end{aligned}$$

Para calcular os juros de cada mês, utiliza-se a equação (4.3) e para realizar o cálculo de cada prestação é preciso usar a equação (4.4).

Para determinar o valor das prestações que Ana irá pagar, é necessário construir a Tabela do Sistema SAC.

**Tabela 4.2:** Tabela do Sistema SAC para o empréstimo de Ana.

| **Tempo** | **Amortização** | **Juros** | **Prestação** | **Dívida** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 10.000,00 |
| 1 | 833,34 | 300,00 | 1.133,34 | 9.166,66 |
| 2 | 833,34 | 275,00 | 1.108,34 | 8.333,32 |
| 3 | 833,34 | 250,00 | 1.083,34 | 7.499,98 |
| 4 | 833,34 | 225,00 | 1.058,33 | 6.666,64 |
| 5 | 833,34 | 200,00 | 1.033,34 | 5.833,30 |
| 6 | 833,34 | 175,00 | 1.008,34 | 4.999,96 |
| 7 | 833,34 | 150,00 | 983,34 | 4.166,62 |
| 8 | 833,34 | 125,00 | 958,34 | 3333,28 |
| 9 | 833,34 | 100,00 | 933,34 | 2499,94 |
| 10 | 833,34 | 75,00 | 908,34 | 1666,60 |
| 11 | 833,34 | 50,00 | 883,34 | 833,34 |
| 12 | 833,34 | 25,00 | 858,34 | 0,00 |
| Total | 10.000,00 | 1.950,00 | 11.950,00 | |

O valor de cada uma das 12 parcelas que Ana pagará está descrito na coluna prestação.

### 4.4.2 Sistema Francês de Amortização (Price)

O sistema Francês de Amortização também é conhecido como Sistema Price, devido ao fato de Richard Price, filósofo inglês, tê-lo inventado. Ele possui a característica das prestações serem constantes.

Como as prestações são iguais, à medida que o devedor paga as prestações, os juros diminuem e a amortização aumenta.

**Teorema 4.3:** No Sistema Price, ao se considerar que $n$ é o número de pagamentos, $i$ a taxa de juros, $A_k$ a parcela de amortização, $J_k$ a parcela de juros, $P_k$ a prestação (o valor da prestação não depende do tempo, pois é constante), $D_k$ o estado da dívida (valor da dívida após paga) e $k$ o tempo, tem-se:

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}, \tag{4.5}$$

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}, \tag{4.6}$$

$$J_k = i \cdot D_{k-1}, \tag{4.7}$$

$$A_k = P_k - J_k. \tag{4.8}$$

*Demonstração.* A equação (4.5) utiliza o Teorema 4.1, pois o valor das prestações é constante, o que indica ser uma série uniforme de pagamentos.

$$\begin{aligned} D_o &= P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\ i \cdot D_0 &= P_k \cdot 1-(1+i)^{-n} \\ P_k \cdot 1-(1+i)^{-n} &= i \cdot D_0 \\ P_k &= D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}. \end{aligned}$$

Observe que $D_k$ é a dívida que será liquidada, postecipadamente, por $(n-k)$ pagamentos sucessivos a $P_k$. Portanto, ao se desenvolver o Teorema 4.1, chega-se à equação (4.6).

$$D_k = P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Ao substituir o valor de $P_k$,

$$D_k = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$
$$D_k = D_0 \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Já as equações (4.7) e (4.8) são diretas: a equação (4.7) é o cálculo do juro mensal do saldo devedor e a equação (4.8) é a diferença do valor da prestação pelo juro mensal.

□

### Construção da tabela do modelo Price

Para construir uma tabela no Sistema Price é utilizado o Teorema 4.3.

- **Prestação**

  Como no Sistema Price as prestações são constantes, então é preciso aplicar a equação (4.5):

$$P_k = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- **Juros**

  Para calcular os juros de cada mês, é necessário utilizar a dívida do mês anterior e multiplicar pela taxa de juros conforme a equação (4.7):

$$J_k = D_{k-1} \cdot i.$$

- **Amortização**

  Para saber o valor de cada amortização, deve-se obter a diferença entre o valor da prestação e o juro mensal de acordo com a equação (4.5)

$$A_k = P_k - J_k.$$

- **Dívida**

  Para saber o valor do saldo da dívida, é preciso realizar a diferença entre o saldo do mês anterior e a amortização do mês atual conforme a equação (4.6):

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

**Tabela 4.3:** Tabela do Sistema Francês de Amortização (Price).

| **Tempo** ($k$) | **Prestação** ( $P_k$) | **Juros** ( $J_k$) | **Amortização** ($A_k$) | **Dívida** ($D_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | $D_0$ |
| 1 | $P$ | $J_1 = D_0 \cdot i$ | $A_1 = P - J_1$ | $D_1 = D_0 - A$ |
| 2 | $P$ | $J_2 = D_1 \cdot i$ | $A_2 = P - J_2$ | $D_2 = D_1 - A$ |
| 3 | $P$ | $J_3 = D_2 \cdot i$ | $A_3 = P - J_3$ | $D_3 = D_2 - A$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $k$ | $P$ | $J_k = D_{k-1} \cdot i$ | $A_k = P - J_{k-1}$ | $D_k = D_{k-1} - A = 0$ |

**Exemplo 4.4.2:** Para realizar um empréstimo, Ana quer saber qual o valor das amortizações no Sistema Price. Sabe-se que o valor do empréstimo é de R$ 10.000,00 e que irá pagar em 12 prestações mensais, com juros de 3% ao mês.

Para determinar o valor das amortizações, é necessário descobrir primeiro o valor das prestações através da equação (4.5).

$$\begin{aligned} P_k &= 10000 \cdot \frac{0{,}03}{1-(1+0{,}03)^{-12}} \\ &= 10000 \cdot \frac{0{,}03}{1-0{,}7013} \\ &= 10000 \cdot \frac{0{,}03}{0{,}2986} \\ &= \frac{300}{0{,}2986} \\ &= 1004{,}69. \end{aligned}$$

As prestações serão de R$ 1.004,69.

Agora que se sabe o valor das prestações, é possível construir a tabela do Sistema Price para determinar o valor de cada amortização.

**Tabela 4.4:** Tabela no Sistema Price para o empréstimo de Ana.

| Tempo | Prestação | Juros | Amortização | Dívida |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 10.000,00 |
| 1 | 1.004,69 | 300,00 | 704,69 | 9295,31 |
| 2 | 1.004,69 | 278,86 | 725,83 | 8.569,48 |
| 3 | 1.004,69 | 257,08 | 747,61 | 7.821,87 |
| 4 | 1.004,69 | 234,66 | 770,03 | 7.051,83 |
| 5 | 1.004,69 | 211,55 | 793,14 | 6.258,69 |
| 6 | 1.004,69 | 187,76 | 816,93 | 5.441,76 |
| 7 | 1.004,69 | 163,25 | 841,44 | 4.600,32 |
| 8 | 1.004,69 | 138,01 | 866,68 | 3.733,64 |
| 9 | 1.004,69 | 112,01 | 892,68 | 2.840,96 |
| 10 | 1.004,69 | 85,23 | 919,47 | 121,49 |
| 11 | 1.004,69 | 57,65 | 947,04 | 974,45 |
| 12 | 1.004,69 | 29,23 | 975,45 | 0,00 |
| Total | 12.056,28 | 2.0551,29 | 10.000,00 | |

### 4.4.3 Sistema de Amortização Misto (SAM)

O Sistema de Amortização Misto é a média aritmética do Sistema SAC e do Sistema Price e, com isso, ele concilia as vantagens e as desvantagens de ambos os sistemas.

**Construção da tabela do modelo SAM**

Para construir uma tabela no Sistema SAM, os passos abaixo devem ser seguidos.

- **Prestação**

  Para realizar o cálculo das prestações no Sistema SAM, é preciso encontrar a média aritmética das prestações do Sistema Price e do Sistema SAC.

  $$P_k = \frac{P_{k(PRICE)} + P_{k(SAC)}}{2}.$$

- **Juros**

  Para calcular os juros $J_k$ de cada mês, é necessário utilizar a dívida do mês anterior $D_{k-1}$ e multiplicar pela taxa de juros $i$:

  $$J_k = D_{k-1} \cdot i.$$

- **Amortização**

  Para saber o valor de cada amortização $A_k$, deve-se obter a diferença entre o valor da prestação $P_k$ e o juro mensal $J_k$:

$$A_k = P_k - J_k.$$

- **Dívida**

  Para saber o valor do saldo da dívida $D_k$, é preciso calcular a diferença entre o saldo do mês anterior $D_{k-1}$ e a amortização do mês atual $A_k$

$$D_k = D_{k-1} - A_k.$$

**Tabela 4.5:** Tabela do Sistema de Amortização Misto (SAM).

| **Tempo** ($k$) | **Prestação** ($P_k$) | **Juros** ($J_k$) | **Amortização** ($A_k$) | **Dívida** ($D_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | $D_0$ |
| 1 | $P_1 = \frac{P_{1(PRICE)}+P_{1(SAC)}}{2}$ | $J_1 = D_0 \cdot i$ | $A_1 = P_1 - J_1$ | $D_1 = D_0 - A_1$ |
| 2 | $P_2 = \frac{P_{2(PRICE)}+P_{2(SAC)}}{2}$ | $J_2 = D_1 \cdot i$ | $A_2 = P_2 - J_2$ | $D_2 = D1 - A2$ |
| 3 | $P_3 = \frac{P_{3(PRICE)}+P_{3(SAC)}}{2}$ | $J_2 = D_1 \cdot i$ | $A_3 = P_3 - J_3$ | $D_3 = D2 - A3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| k | $P_k = \frac{P_{K(PRICE)}+P_{K(SAC)}}{2}$ | $J_k = Dk - 1 \cdots$ | $A_k = P_k - J_k$ | $D_k = D_{k-1} - A_k = 0$ |

**Exemplo 4.4.3:** Para realizar um empréstimo, Ana quer saber qual o valor das amortizações no Sistema SAM. Sabe-se que o valor do empréstimo é de R$ 10.000,00 e que irá pagar em 12 prestações mensais, com juros de 3% ao mês.

Pra saber o valor das amortizações, é necessário descobrir primeiro o valor das prestações. Haja vista os Exemplos (4.4.1) e (4.4.2), já se conhece o valor das parcelas. Pelo Sistema SAM deve-se calcular a média aritmética de cada uma, o que indica a variabilidade delas.

Também não são constantes as amortizações, pois para determiná-las, é preciso realizar a diferença entre as prestações e o juro mensal.

**Tabela 4.6:** Tabela no Sistema SAM para o empréstimo de Ana.

| Tempo | Prestação | Juros | Amortização | Dívida |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 10.000,00 |
| 1 | 1.069,01 | 300,00 | 769,01 | 9.230,99 |
| 2 | 1.056,51 | 276,92 | 779,58 | 8.451,40 |
| 3 | 1.044,51 | 253,54 | 790,47 | 7.660,92 |
| 4 | 1.031,51 | 229,82 | 801,68 | 6.859,24 |
| 5 | 1.019,01 | 205,82 | 813,23 | 6.046,00 |
| 6 | 1.006,51 | 181,38 | 825,13 | 5.220,86 |
| 7 | 994,01 | 156,62 | 837,38 | 4.383,48 |
| 8 | 981,50 | 131,50 | 850,01 | 3.533,47 |
| 9 | 969,01 | 106,00 | 863,01 | 2.670,46 |
| 10 | 956,51 | 80,11 | 876,40 | 1.794,06 |
| 11 | 944,01 | 53,82 | 890,19 | 903,86 |
| 12 | 931,51 | 27,11 | 904,39 | 0 |
| TOTAL | 12.003,18 | 2.002,54 | 10.000,00 | |

### 4.4.4 Sistema de Amortização Americano (SAA)

No Sistema de Amortização Americano o devedor irá pagar, durante o tempo estabelecido pelo empréstimo ou financiamento, somente os juros e apenas no final do prazo que pagará integralmente o valor emprestado. Sendo assim, os juros sempre irão incidir sobre o valor total da dívida.

> *"Com isso o devedor pode quitar sua dívida quando quiser. Este sistema tem como desvantagem que o pagamento de juros pode, em tese, ser perpétuo mesmo quando já se pagou o equivalente à dívida em si". [33][p.114]*

**Construção da tabela do modelo SAA**

Para construir uma tabela no Sistema SAA, os passos abaixo devem ser seguidos.

- **Amortização**

  As amortizações serão nulas no Sistema SAA, pois há uma única amortização ao final do período.

$$A = \underbrace{A_1 = A_2 = \cdots = A_{k-1}}_{(k-1)\ \text{vezes}} = 0.$$

$$A_k = D_0.$$

- **Juros**

  Para calcular os juros $J_k$ de cada mês, é preciso utilizar a dívida inicial $D_0$ e multiplicar pela taxa de juros $i$,

  $$J_k = D_0 \cdot i.$$

- **Prestação**

  O valor da prestação $P_m$ no Sistema SAA será igual ao valor dos juros mensal $J_m$. A única exceção ocorre na última parcela que é acrescida do valor total da dívida.

  $$P_m = J_m, \forall m = 1, 2, \cdots, k-1$$
  $$P_k = J_k. + D_0$$

- **Dívida**

  O saldo da dívida será sempre o valor inicial, pois não há amortização.

  $$D_k = D_0.$$

**Tabela 4.7:** Tabela do Sistema de Amortização Americano (SAA).

| **Tempo** ($k$) | **Amortização** ($A_k$) | **Juros** ($J_k$) | **Prestação** ($P_k$) | **Dívida** ($D_k$) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | $D_0$ |
| 1 | 0 | $J_1 = D_0 \cdot i$ | $P_1 = J_1$ | $D_0$ |
| 2 | 0 | $J_2 = D_0 \cdot i$ | $P_2 = J_2$ | $D_0$ |
| 3 | 0 | $J_3 = D_0 \cdot i$ | $P_3 = J_3$ | $D_0$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $k$ | $D_0$ | $J_k = D_0 \cdot i$ | $P_K = J_k + D_0$ | 0 |

**Exemplo 4.4.4:** Para realizar um empréstimo, Ana quer saber qual o valor total que irá pagar no Sistema SAA. Sabe-se que o valor do empréstimo é de R$ 10.000,00 e que irá pagar em 12 prestações mensais, com juros de 3% ao mês.

Para descobrir o valor total que Ana pagará no final do empréstimo, será construída a tabela do Sistema SAA.

Como as amortizações são nulas, os juros serão constantes e o valor das prestações será o mesmo que os juros.

**Tabela 4.8:** Tabela no Sistema SAA do empréstimo de Ana.

| Tempo | Amortização | Juros | Prestação | Dívida |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 10.000,00 |
| 1 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 2 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 3 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 4 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 5 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 6 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 7 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 8 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 9 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 10 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 11 | 0 | 300,00 | 300,00 | 10.000,00 |
| 12 | 10.000,00 | 300,00 | 10.300,00 | 0 |
| Toral | 10.000,00 | 3.600,00 | 13.600,00 | |

O valor total que Ana irá pagar será de $R\$13.600,00$.

## 4.5 Investimentos

Os investimentos de renda fixa são aplicações que possam trazer algum ganho financeiro, e podem ser realizados através de instituições financeiras. Considera-se que investir é como realizar um empréstimo para essas instituições. O investidor recebe a remuneração, que são os juros ganhos.

Na renda fixa, as condições de rentabilidade são determinadas no momento da aplicação. "O investimento pode ser prefixado ou pós-fixado, quando o retorno depende do indexador a que estiver atrelado."[29]

Pode-se definir indexador da seguinte maneira:

> *"Vem da palavra "index", que significa índice. Serve de base para nortear a correção de valores nas aplicações. O mercado financeiro utiliza uma série de índices para atualizar e projetar os resultados dos investimentos, sendo os mais utilizados: DI (taxa de juros interbancária), IPCA (índice de preços ou inflação), IGP-M (índice de inflação) e Selic (taxa básica de juros)."[29][p.03]*

Alguns investimentos de renda fixa possuem um benefício dado pelo governo brasileiro para garantir que as aplicações até determinado valor sejam cobertas por um seguro que evita a perda do dinheiro pelo investidor, chamado de fundo garantidor de crédito-FGC.

O FGC foi criado para garantir o pagamento ao credor em situações em que a instituição financeira decrete intervenção ou liquidação extrajudicial.

O valor determinado para a proteção dos investimentos é de R$ 250.000,00 por CPF ou CNPJ e por instituição financeira. Assim, é recomendável que o investidor aplique somente até esse valor por instituição. Entretanto, existe um teto de R$ 1.000.000,00, a cada período de 4 anos, como proteção máxima, ou seja, a partir do quinto banco que o credor investir seu dinheiro, não estará coberto.

Os investimentos de renda variável não possibilitam ao investidor saber o valor que seu dinheiro irá render. O seu lucro é definido pela variação do preço de compra e venda de ações, o que pode ser maior, igual ou menor em relação ao capital inicial. Assim, as aplicações em renda variáveis são consideradas de alto risco e fogem do proposto pelo trabalho, pois não seguem as rendas pré-fixadas nem pós-fixadas.

## 4.6 Investimentos em renda fixa

### 4.6.1 Poupança

A poupança é uma das aplicações financeiras mais tradicionais e abrange todos que querem investir, do pequeno ao grande investidor. Ela possui como vantagem ser isenta do Imposto de Renda de Pessoas Físicas (IRPF) e do Imposto sobre Operações Financeiras (IOF). Ela possui 28 datas de aniversário e um sistema de resgate automático inteligente, que analisa a data mais vantajosa.

> *De acordo com a legislação atual, a remuneração dos depósitos de poupança é composta de duas parcelas: (I) a remuneração básica, dada pela Taxa Referencial - TR, e (II) a remuneração adicional, correspondente a:*
>
> *a) 0,5% ao mês, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for superior a 8,5%; ou*
>
> *b) 70% da meta da taxa Selic ao ano, mensalidade, vigente na data de início do período de rendimento, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for igual ou inferior a 8,5%. [29][p.27]*

### 4.6.2 Certificado de Depósito Bancário (CDB) e Certificado de Depósito Interbancário (CDI)

O Certificado de Depósito Interbancário (CDI) é uma forma de empréstimo entre as próprias instituições financeiras. O prazo é pré-determinado em 1 dia, ou seja, sua função é permitir uma alta circulação monetária interbancária, o que garante aos bancos uma maior flexibilidade sobre o montante de dinheiro guardado.

Os juros definidos pela CDI exercem influência sobre as taxas do certificado de depósito bancário (CDB) e das letras de crédito imobiliário (LCI), e, ao mesmo tempo, estão atrelados a taxa Selic.

Já o Certificado de Depósito Bancário (CDB) ocorre quando o cliente empresta dinheiro ao banco por um período pré-determinado com a instituição financeira. Os juros são acrescidos ao valor total no fim desse tempo.

> *O CDB possui três tipos:*
> *1. Prefixados: possuem a remuneração atrelada a um percentual do CDI, e, por isso, é possível estimar o valor que será resgatado no seu vencimento;*
> *2. Pós-fixados: acompanham a variação no período de aplicação da taxa de juros do país (Selic) e costuma ser o mais comum entre os investidores;*
> *3. E os que remuneram a uma taxa prefixada somada a algum índice de inflação, como IPCA ou IGP-M;*
> *O CDB é mais indicado quando os juros estão em tendência de alta, porque a rentabilidade acompanha a elevação da taxa e é necessário se atentar ao % do CDI que está sendo oferecido pela instituição financeira, que pode variar de cerca de 80% a 120% do CDI. [29][p.06]*

Portanto, um cliente do banco não consegue investir em CDI, pois essa é uma operação exclusiva interbancária. Porém, ela serve como parâmetro da taxa de juros do CDB, o que indica sua importância para o mercado de títulos brasileiro.

### 4.6.3 Tesouro Direto

O Tesouro Direto é um empréstimo ao governo brasileiro. O Estado busca esses valores no mercado para conseguir investir nas áreas de interesse público, como saúde, educação. O credor adquire o título com a segurança do Tesouro Nacional, que é um órgão do governo federal.

Para a realização do investimento, é necessário possuir CPF, conta bancária e um agente de custódia, que pode ser um banco ou uma corretora de valores. O valor investido no Tesouro Direto pode ser a partir de R$ 30,00.

Os títulos públicos são classificados de acordo com a sua rentabilidade. Existem os prefixados e os pós-fixados. Os títulos "prefixados possuem rentabilidade definida no momento do investimento. Ou seja, o investidor sabe exatamente o valor que irá receber se ficar com o título até a data do vencimento". [5] E os "títulos pós-fixados possuem seu valor corrigido por um indexador. Assim, a rentabilidade da aplicação depende do desempenho deste indexador (inflação ou juros, por exemplo), e da taxa contratada no momento da compra". [5].

Os investimentos no tesouro direto podem ser divididos conforme a tabela abaixo.

**Tabela 4.9:** Tipos de títulos do Tesouro Direto

| Nome do título* | Rendimento |
|---|---|
| Tesouro Prefixado 20XX (LTN) | Prefixado, com rentabilidade definida no momento da compra. |
| Tesouro Prefixado com Juros Semestrais 20XX (NTN-F) | Prefixado, com rentabilidade definida no momento da compra e com pagamento de juros semestrais. |
| Tesouro Selic 20XX (LFT) | Pós-fixado, com rentabilidade vinculada à variação da Taxa de Juro Selic. |
| Tesouro IPCA+ Juros Semestrais 20XX (NTN-B) | Pós-fixado, com rentabilidade vinculada à variação da inflação medida pelo IPCA, acrescida dos juros definidos no momento da compra e com pagamento de juros semestrais. |
| Tesouro IPCA+ 20XX (NTN-B Principal) | Pós-fixado, com rentabilidade vinculada à variação da inflação medida pelo IPCA, acrescida dos juros definidos no momento da compra, sem pagamento de juros periódico. |

* O XX indica o ano de vencimento de cada título.
Além dos títulos citados, há também a Nota do Tesouro Nacional Série C (NTN-C), pós-fixada, vinculada à variação da inflação medida pelo IGP-M. No entanto, não está autorizada para investimento, apenas para resgate de quem já as possui como aplicação.

Fonte: Bovespa [5]

### 4.6.4 Letras de Crédito do Agronegócio (LCA)e Letras de Crédito Imobiliário (LCI)

Letras de Crédito do Agronegócio (LCA) e Letras de Crédito Imobiliário (LCI) são títulos emitidos por instituições financeiras com o objetivo de conseguir recursos para realização de operações voltadas para o agronegócio ou o mercado imobiliário.

As LCA possibilitam o financiamento da produção, beneficiamento e comercialização de bens da cadeia do agronegócio e só podem ser emitidas até o limite de créditos que os bancos oferecem.

As LCI visam recursos para o setor imobiliário e estão condicionadas à carteira de crédito imobiliário do banco.

Quando o investidor escolhe aplicar na LCI ou na LCA, a instituição financeira repassa o recurso a um agente do setor escolhido. O credor irá receber, em data pré-definida, os valores investidos acrescidos de juros, já descontados dos tributos e das taxas aplicáveis. Os juros sofrem influência da CDI ou da inflação.

Ambos títulos possuem data de vencimento prefixada e só podem ser resgatados nesse dia. Porém, o investidor pode vendê-los antes, desde que considere o risco de liquidez.

As duas modalidades são isentas do Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF), são cobertas pelo Fundo Garantidor de Crédito (FGC) e possuem alíquota zero para o Imposto sobre Operações Financeiras (IOF).

### 4.6.5 Certificados de Recebíveis do Agronegócio (CRA) e Certificados de Recebíveis Imobiliários (CRI)

Os Certificados de Recebíveis do Agronegócio (CRA) e os Certificados de Recebíveis Imobiliários (CRI) são títulos emitidos por companhias securitizadoras. Essas são empresas que transformam ativos em valores mobiliários, ou seja, fazem com que esses possam ser livremente negociados.

As securitizadoras reúnem os recebíveis e estruturam os certificados que estão atrelados aos recursos emprestados aos participantes do negócio, sejam eles do agronegócio - no caso do CRA - ou do mercado imobiliário - no caso do CRI.

A remuneração dos certificados sofre influência da CDI ou da inflação. Além disso, é isenta do Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF) e tem alíquota zero do Imposto sobre Operações Financeiras (IOF). Ambos não possuem cobertura do Fundo Garantidor de Crédito (FGC).

Ambos títulos possuem data de vencimento prefixada e só podem ser resgatados nesse dia. Porém, o investidor pode vendê-los antes, desde que considere o risco de liquidez.

### 4.6.6 Comparativo entre os Investimentos

**Tabela 4.10:** Investimentos.

| **Investimento** | **FGC** | **IOF** | **IR** | **Resgate** |
|---|---|---|---|---|
| Poupança | Coberto. | Isento. | Isento. | Automático. |
| CDB | Coberto. | Há cobranças para aplicações com menos de 30 dias.<br><br>Após 30 dias é isento. | Somente sobre lucro.<br><br>Alíquota de 22,5% para aplicações de até 180 dias.<br><br>Alíquota de 20% para aplicações entre 181 e 360 dias.<br><br>Alíquota de 17,5% para aplicações entre 361 e 720 dias.<br><br>Alíquota de 15% para aplicações acima 721 dias. | Na data de vencimento ou na venda antecipada.<br><br>A venda ocorre para o próprio Banco. |
| Tesouro Direto | Coberto. | Há cobrança apenas nas aplicações menores que 30 dias. | Somente sobre o rendimento.<br><br>Alíquota de 22,5% para aplicações de até 180 dias.<br><br>Alíquota de 20% para aplicações entre 181 e 360 dias.<br><br>Alíquota de 17,5% para aplicações entre 361 e 720 dias.<br><br>Alíquota de 15% para aplicações acima 721 dias. | No dia do vencimento ou na venda antecipada.<br><br>A venda pode ocorrer a qualquer momento.<br>A recompensa é realizada pelo próprio governo.<br>Ao solicitar o resgate a a liquidação ocorrerá no próximo dia útil. |
| LCA ou LCI | Coberto. | Isento. | Isento. | Pré-fixado. |
| CRA ou CRI | Não é coberto. | Isento. | Isento. | Pré-fixado. |

# 5
# Educação Financeira

Neste capitulo serão apresentados a criação da Estratégia Nacional de Educação financeira como uma política pública de Educação Financeira e alguns projetos de órgãos e entidades governamentais que incentivam o aprendizado do tema.

Atualmente, as empresas usam da publicidade para tentar fazer com que as pessoas comprem seus produtos e, com isso, vão desenvolvendo diversas maneiras para cativar seu público alvo e causar um interesse que, às vezes, chega a ser irracional. Os consumidores são persuadidos ora pelas facilidades existentes para pagamento, ora pelo desconto, ou por comprar algo que simploriamente está "na moda". Assim, alguns acabam adquirindo itens desnecessários, criando um ciclo vicioso que se tornam cada vez mais endividados, sem saber como solucionar a situação. Esses são um dos motivos para a importância da compreensão do tema Educação Financeira.

## 5.1 O que é Educação Financeira?

A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) é uma organização internacional que produz estudos, publicações e recomendações para os países-associados. Os campos de atuação são variados, pois a proposta é promover o crescimento econômico do mundo, principalmente dos seus participantes.

Dentre os trabalhos realizados, a OCDE recomendou princípios e boas práticas de educação e conscientização financeira. A importância do tema é enfatizada na justificativa apresentada pela organização ao escolher o assunto. Os pontos mais significativos são o de evitar vítimas de fraude e o de assegurar níveis suficientes de proteção do investidor e do consumidor.

Depois da fundamentação, a OCDE definiu o que seria educação financeira.

> *"o processo pelo qual consumidores/investidores financeiros aprimoram sua compreensão sobre produtos, conceitos e riscos financeiros e, por meio de informação, instrução e/ou aconselhamento objetivo, desenvolvem as habilidades e a confiança para se tornarem mais conscientes de riscos e oportunidades financeiras, a fazer escolhas informadas, a saber onde buscar ajuda, e a tomar outras medidas efetivas para melhorar seu bem estar financeiro". Educação financeira, portanto, vai além do fornecimento de informações e aconselhamento financeiro, o que deve ser regulado, como geralmente já é o caso, especialmente para a proteção de clientes financeiros (por exemplo, consumidores em relações contratuais). [31] [p.05]*

Após a definição, foram apontados princípios a serem seguidos pelos países, tais como:

- A educação financeira deve ser promovida e oferecida a toda população de forma justa e imparcial.
- Devem-se propor programas de educação financeira sobre os aspectos importantes do planejamento da vida financeira. Além de estimular a conscientização das pessoas que irão se aposentar no futuro sobre a necessidade de avaliar a adequação financeira dos seus regimes atuais de previdência pública e privada.
- Deve-se considerar a educação financeira um instrumento regulador e administrativo. Além disso, é uma ferramenta para o desenvolvimento econômico.
- As políticas públicas devem considerar a proteção do consumidor e a regulação das instituições financeiras, a fim de corrigir deficiências identificadas no conhecimento do povo.
- As instituições financeiras devem ajudar na educação financeira de seus clientes financeiros. Ademais, devem expor situações em que uma parcela substancial da renda atual e futura deles possa ser comprometida.
- O ensino da educação financeira deve ser intensificado e deve ser visto como um processo contínuo, permanente e vitalício.

## 5.2 Educação Financeira nas Escolas

A educação financeira escolar é formada por um conjunto de informações das quais os alunos são conduzidos ao universo do dinheiro e visa uma compreensão sobre finanças e economia. No processo de ensino-aprendizagem, os estudantes devem tomar decisões e ter posições críticas sobre questões financeiras do seu cotidiano.

De acordo com Silva [32] o estudante precisa ter três características para ter um pensamento financeiro ou uma educação financeira. A primeira é analisar e avaliar de maneira fundamentada cada situação para que suas decisões sejam através de seus conhecimentos de finanças, economia e matemática. A segunda é orientar suas ações e tomadas de decisões sobre um planejamento financeiro. Já a terceira é desenvolver uma leitura crítica sobre as informações financeiras difundas na sociedade.

Tais características deveriam ser desenvolvidas dentro do âmbito escolar para que o estudante conseguisse entender o pensamento financeiro da melhor forma possível. Apesar disso, a política nacional da Educação Básica, que atualmente é orientada pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular), não as englobam. As instituições escolares brasileiras são direcionadas por essa política, sendo que devem a seguir como o princípio do mínimo a ser realizado, podendo ensinar mais, mas não menos.

As propostas pedagógicas das instituições escolares de educação básica brasileira eram baseadas nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais). A partir de dezembro de 2017, foi homologada a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) para o ensino infantil e ensino fundamental, que foi objeto de estudo durante os anos de 2018 e 2019. Nela, cada estado possuiu o direito de realizar algumas modificações para melhor adaptação a sua realidade, criando seu currículo de referência. Já para o ensino médio, a BNCC foi homologada em dezembro de 2018 e ainda se encontra em análise em cada Estado para construção do currículo a ser adotado.

Para um melhor entendimento do que a BNCC propõe para ser desenvolvido em sala de aula sobre educação financeira no ensino fundamental, será apresentada uma tabela com as unidades temáticas, objetivos de conhecimentos e habilidades.

**Tabela 5.1:** Conteúdos de Educação Financeira de acordo com BNCC para o ensino fundamental.

| **Ano** | **Unidade Temática** | **Objetivo do Conhecimento** | **Habilidades** |
|---|---|---|---|
| 1º | Grandezas e medidas | Sistema monetário brasileiro: reconhecimento de cédulas e moedas. | Reconhecer e relacionar valores de moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações simples do cotidiano do estudante. |
| 2º | Grandezas e medidas | Reconhecimento de cédulas e moedas e equivalência de valores. | Estabelecer uma equivalência de valores entre moedas e cédulas do sistema monetário brasileiro para resolver situações cotidianas. |
| 3º | Grandezas e medidas | Estabelecimento de equivalências de um mesmo valor na utilização de diferentes cédulas e moedas | Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e a equivalência de valores monetários do sistema brasileiro em situações de compra, venda e troca. |
| 4º | Grandezas e medidas | Problemas utilizando o sistema monetário brasileiro | Resolver e elaborar problemas que envolvem situações de compra e venda e formas de pagamento, usando termos como troco e desconto, enfatizando o consumo ético, consciente e responsável. |
| 5º | Grandezas e medidas | Cálculo de porcentagens e representação fracionária | Associado como representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100%, respectivamente, décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um número inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. |

| **Ano** | **Unidade Temática** | **Objetivo do Conhecimento** | **Habilidades** |
|---|---|---|---|
| 6º | Números | Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da ”regra de três” | Resolver e elaborar problemas que envolvem porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, usando informações pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. |
| 7º | Números | Cálculo de porcentagens e acréscimos e decréscimos simples | Resolvendo e elaborando problemas que envolvem porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, usando ferramentas pessoais, cálculo mental e calculadora, em contexto de educação financeira, entre outros. |
| 8º | Números | Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos | Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente como uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira. |
| 9º | Números | Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de porcentagens sucessivas | Resolver e elaborar problemas que envolvem porcentagens, com uma ideia de aplicação de porcentagens sucessivas e a verificação de taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, em contexto de educação financeira. |

Fonte: BNCC,[22]

No ensino médio, em que os currículos referências dos Estados ainda estão em discussão, a BNCC dividiu os conteúdos em competências e habilidades, ao invés de separá-los por ano escolar. São cinco competências específicas que servem de parâmetro para o desenvolvimento do estudante. As habilidades são os caminhos a serem percorridos para favorecer a interpretação e a compreensão das competências. Em resumo, as competências são amplas e as habilidades são tópicos delas a serem seguidos.

**Tabela 5.2:** Conteúdos de Educação Financeira de acordo com BNCC para o ensino Médio.

| | **Competências** | **Habilidades** |
|---|---|---|
| **1** | Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. | Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. |
| **2** | Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. | Aplicar Conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. |
| **3** | Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. | Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.<br><br>Resolver e elaborar problemas com funções exponencias nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.<br><br>Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. |

| | | |
|---|---|---|
| **4** | Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. | Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabelas do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. |
| **5** | Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de um demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. | Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. |

Fonte: BNCC,[22]

## 5.3 Educação Financeira como Política Pública

A Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) transforma a Educação Financeira em uma política de Estado e envolve instituições públicas e privadas com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento da cidadania ao prover e incentivar ações que ajudem as pessoas a tomarem decisões financeiras mais racionais e independentes. Para prevenir a má administração das finanças, foi criado o **decreto federal 7.397/2010**.

> *"**Art. 1º** Fica instituída a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF com a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores".*
>
> *"**Art. 2º** A ENEF será implementada em conformidade com as seguintes diretrizes:*
>
> *I - Atuação permanente e em âmbito nacional;*
>
> *II - Gratuidade das ações de educação financeira;*
>
> *III - Prevalência do interesse público;*
>
> *IV - Atuação por meio de informação, formação e orientação;*
>
> *V - Centralização da gestão e descentralização da execução das atividades;*
>
> *VI - Formação de parcerias com órgãos e entidades públicas e instituições privadas; e*
>
> *VII - Avaliação e revisão periódicas e permanentes".*

*[2][p.1]*

A ENEF[20] foi criada através da articulação dos seguintes órgãos e entidades governamentais e organizações da sociedade civil:

- Banco Central do Brasil
- Comissão de Valores Mobiliários
- Superintendência Nacional de Previdência Complementar
- Superintendência da Justiça e Cidadania
- Ministério da Educação
- Ministério da Economia
- SEBRAE (Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas)
- Consed (Conselho Nacional de Secretários de Educação)
- $[B]^3$ Bolsa, Brasil, Balcão
- CNseg (Confederação Nacional das Empresas de Seguros Gerais, Previdência Privada e Vida, Saúde Suplementar e Capitalização)
- FEBRABAN (Federação Brasileira de Banco)

Juntos, eles integram o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF.

Segundo o plano diretor da ENEF [20], foi realizada uma pesquisa para analisar o comportamento do brasileiro em relação ao dinheiro. Chegou-se à conclusão que ele o vê como forma de pagamento, o que é diferente do fato dele representar um capital.

> *"Ainda nesse paralelo, se para alguns especialistas investir é alocar recursos com o propósito de aumentar a capacidade produtiva da economia, para a população investir é sinônimo de comprar bens: imóveis, carros eletroeletrônicos, educação em especial dos filhos, roupas e outras coisas. Excluindo juízos de valor a propósito dessas questões (imóveis e educação podem ser vistos como investimentos), o fato é que existe distância entre o entendimento desses conceitos por parte dos técnicos e da população, que os enxerga sob lógica e da experiência cotidiana, sem preocupação de fazer reserva financeira." [20][p.13]*

A mesma pesquisa também revelou que a noção de dinheiro entra na vida de uma criança aos cinco anos de idade com alguns gastos superficiais. Quando atingem os nove anos de idade, começam a despertar o interesse em lidar com o dinheiro, devido sua utilização em despesas ligadas ao lazer.

## 5.4 Projetos de Educação Financeira

Alguns órgãos e entidades governamentais possuem projetos de educação financeira, que estão disponíveis para a população.

### 5.4.1 Projetos do Banco Central do Brasil

O Banco Central do Brasil (Bacen)[6] possui o projeto Cidadania Financeira, que oferece instruções e dois cursos totalmente *online* e gratuitos. Esses com o objetivo de prestar informações e ferramentas para gerir as finanças das pessoas, além de buscar sensibilizar a população sobre a importância do estudo e a criar grupos de discussão sobre o tema. Também são disponibilizados vídeos educativos, que são alterados de tempos em tempos.

Esse projeto se encontra disponível no link: [7]

- **Gestão de Finanças Pessoais (GFP)**

  O GFP é um curso voltado para toda a sociedade com vinte horas de carga horária e trinta dias de duração. O objetivo é abordar a organização das finanças. Os temas abrangidos são: Nossa relação com o dinheiro; Orçamento pessoal ou familiar; Crédito e endividamento; Consumo planejado e consciente; Poupança e investimento; Prevenção e proteção; e Consumindo serviços financeiros.

  **Figura 5.1:** Imagem do curso gestão Pessoais

  Fonte: Banco Central do Brasil, [7]

- **Formação de Multiplicadores da série "Eu e meu dinheiro"**

  Assim como GFP, esse curso também é voltado para toda a sociedade e possui trinta dias de duração, sendo que a carga horária é de dez horas. Os temas abordados pelo curso são: Necessidades e desejos; Orçamento familiar; Uso de crédito; A importância de poupar; Riscos e imprevistos; Consumo consciente.

**Figura 5.2:** Imagem da Série "Eu e meu dinheiro".


Fonte: Banco Central do Brasil, [7].

No site do Bacen [6] também se encontra três temas relevantes para o aprendizado.

- Quero me planejar.

  Leciona pessoas que desejam realizar um planejamento financeiro.

  Disponível no link: [8]

- Estou endividado.

  Sugere ações para que seja possível sair de uma situação de endividamento.

  Disponível no link: [9]

- Quero aprender a poupar e investir.

  Ensina o participante a poupar e a investir o seu dinheiro.

  Disponível no link: [10]

### 5.4.2 Projetos da Estratégia Nacional de Educação Financeira

Para realizar seu plano estratégico sobre a educação financeira, a ENEF envolveu instituições de ensino e entidades representativas do setor educacional e financeiro com o objetivo de desenvolver um projeto de educação a ser utilizado na rede de ensino. Esse estudo se encontra disponível em forma de livros que podem ser baixados diretamente do site da ENEF. A coleção Educação Financeira nas Escolas possui a versão do aluno e do professor.

**Figura 5.3:** Livros do projeto Educação financeira nas Escolas.


Fonte: Estratégia Nacional de Educação Fiannceira[17].

> *"O modelo pedagógico foi concebido para oferecer ao aluno informações e orientações que favoreçam a construção de um pensamento financeiro consistente e o desenvolvimento de comportamentos autônomos e saudáveis, para que ele possa, como protagonista de sua história, planejar e fazer acontecer a vida que deseja para si próprio, em conexão com o grupo familiar e social a que pertence. Nesse sentido, o foco do trabalho recai sobre as situações cotidianas da vida do aluno, porque é nelas que se encontram os dilemas financeiros que ele precisará para resolver".[24][p.1]*

O site da Enef [27] também possui dois programas EAD.

- **EAD - Finanças Sem Segredos.**

  É um programa com vários cursos que possuem como objetivo ajudar as pessoas no cotidiano, norteando a educação financeira de modo coletivo e consciente.

  Possui os seguintes cursos disponíveis: Viver o agora e planejar o futuro; O futuro em suas mãos; Viver o coletivo; e O Brasil e a Globalização.

  Disponível no link: [18]

- **Educação Financeira nas Escolas.**

  É um programa de formação do professor para se tornar um agente de propagação da educação financeira. Tem duração de 40 horas. O curso possui atividades com conceitos financeiros possibilitando uma troca de conhecimentos e reflexão.

  Disponível no link: [19]

# 6 Análise de dados da entrevista

A presente pesquisa desempenha característica exploratória e de campo com uma abordagem qualitativa e descritiva, sendo realizada com 82 alunos do 3º ano do ensino médio da escola pública Estadual Ilídio da Costa Pereira da cidade de Divinópolis-MG.

A escolha dessa amostra baseia-se na idade, são jovens de 17 e 18 anos, por estarem no último ano do ensino médio regular e por serem consumidores, mesmo que com menores condições financeiras.

Nesse estudo, foi analisado como os alunos lidam com as finanças, como adquirem rendas, o que consideram como investimento e outras questões relacionadas ao tema.

## 6.1 Análise das Respostas

O questionário foi realizado na Escola Estadual Ilídio da Costa Pereira da cidade de Divinópolis-MG, nos dias 02 e 03 de setembro de 2019, com 82 alunos de três turmas diferentes do 3º ano do ensino médio regular. Ele foi proposto durante a aula de matemática antes de se iniciar o conteúdo de matemática financeira, como análise do conhecimento prévio para o desenvolvimento de atividades da disciplina.

Houve uma boa interatividade dos alunos e autorização da escola para sua aplicação. Os participantes responderam na maior parte do tempo com concentração, havendo apenas algumas dúvidas e pequenas dispersões. A distribuição por sexo de quem respondeu ficou em metade para cada gênero, devido à composição das salas.

Ao analisar a pesquisa, o primeiro ponto é a quantidade de alunos que exercem algum tipo de atividade remunerada, são 44 que trabalham, o que demonstra um elevado número de estudantes que já entraram no mercado de trabalho antes dos 18 anos de idade. Por sua vez são 38 que não exercem nenhum tipo de atividade remunerada. Interessante lembrar que a Constituição Federal de 1988 permite que jovens acima de 16 anos possam trabalhar e que maiores de 14 anos podem ser jovens aprendizes.

Acerca do recebimento de mesada, realizou-se a pergunta 03.Dos que não trabalham, 32 responderam que recebem dinheiro dos pais conforme a necessidade. Apenas 6 alunos afirmaram receber mesada, sendo distribuído em 1 quinzenalmente, 1 semanalmente e 4 mensalmente. Dos que trabalham, 2 também recebem mesada. Os outros alunos que exercem atividade remunerada não ganham dinheiro dos pais.

Sobre a capacidade de economizar dinheiro foi feita a questão 4. Nas respostas, 35 estudantes conseguem economizar dinheiro, 7 não, e 40 às vezes. A quantidade que não consegue é até pequena em relação ao total de alunos.

A pergunta 05 é sobre o controle financeiro dos participantes. Nas respostas, 39 simplesmente não controlam o dinheiro, sendo desses 19 que trabalham. Já 21 dizem controlar da maneira adequada conforme alternativa a, sendo 12 que trabalham. São 22 que marcaram a letra b ou c, ou seja, fazem algum tipo de controle, mesmo que incompleto, desses 13 trabalham. Percebe-se que o fato de trabalhar não fez diferença nas respostas, pois ficaram mais ou menos em 50% em cada. Isso já é reflexo da falta da educação financeira. Os jovens não foram ensinados em como fazer. Imagina-se que, em casa, os pais também não o façam, mas isso é extrapolação e seria objeto de novas perguntas que necessitariam de mais análises.

A questão 06 é sobre compras programadas ou por impulso. 48 dizem pensar antes de sair para não gastarem com o que não precisam, sendo que 24 trabalham. Os outros 34 alunos assumem que se acharem algo interessante ou com desconto irão levar, ou seja, são mais flexíveis com promoções ou publicidades, desses 20 trabalham. Mais uma vez, o fato de trabalhar não aumenta a capacidade de entender sobre questões financeiras.

A pergunta 07 não é sobre os hábitos dos alunos, mas acerca do que eles acham ser a melhor forma de se organizarem financeiramente. Não existe uma forma ideal, desde que haja uma organização que seja plausível. A grande maioria acha que criar uma planilha e anotar os gastos é a maneira mais eficiente, sendo 63 alunos e desses 36 trabalham. 15 já imaginam que o simples fato de anotar em um caderno qualquer ou colocar as notas fiscais em um armário é o suficiente, sendo que 6 trabalham. Apenas 4 alunos marcaram as alternativas d ou e, sendo que 2 trabalham.

Repare que as perguntas 05 e 07 mostram a diferença entre o que eles imaginam ser a melhor maneira e a forma que eles controlam o dinheiro. Dos 39 que disseram que não controlam o dinheiro, 32 afirmaram que criar uma planilha e anotar os gastos é a maneira mais eficiente de se organizar. Talvez por comodidade, ou por desleixo, ou por falta de conhecimento, eles não fazem o que citam ser o ideal.

Sobre o orçamento familiar na pergunta 08,tem que 52 afirmam não entender sobre o item, sendo que 26 trabalham. É uma quantidade relevante, já que isso está ligado ao aprendizado na família. Apenas 30 responderam saber o que é o orçamento familiar e desses 18 trabalham. O que se percebe é que as famílias não estão conversando sobre o tema nas suas casas.

Por último, foi questionado sobre o que seria investimento. Várias respostas não estão ligadas a um retorno financeiro, mas, ao contrário, a uma despesa. As alternativas que são investimento financeiro são as de letra b, c, g. As letras d, h podem ser uma forma de investimento, mas não são financeiros. Já as opções a, e, f, i, j, k, l são despesas. Foram 309 itens selecionados pelos alunos, pois era possível escolher mais de uma opção.

A maioria dos participantes entendeu que as letras b, c, d, g, h são investimentos e as marcaram como opção. O que chamou atenção foi o fato de 24 alunos marcarem alimentação como uma forma de investimento, desses 10 trabalham. Foi levantada uma hipótese de que os alunos que trabalham que marcariam essa opção, como uma forma de ajudar a sustentar a família, mas isso não ficou provado, pois apenas 10 dos 24 trabalham.

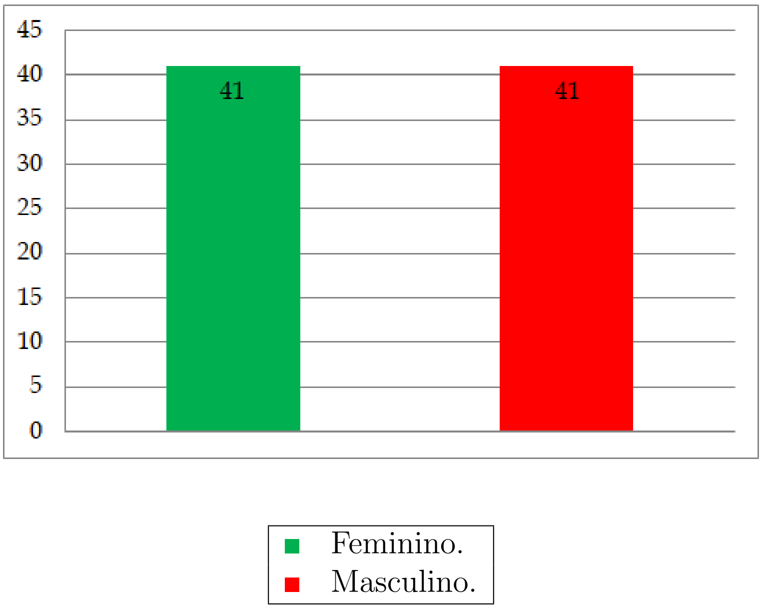
Apesar de ser uma pesquisa realizada em uma escola específica, já mostra que pelo menos nessa amostra, a falta de base é grande. Além disso, ficou provado que o fato de trabalhar não diferenciou nas respostas de maneira significativa. Assim, a Educação Financeira nas escolas é mais importante do que a vivência na prática.

## 6.2 Perguntas e Respostas do Questionário

O questionário se encontra no apêndice. Abaixo seguem os gráficos das respostas das perguntas da pesquisa.

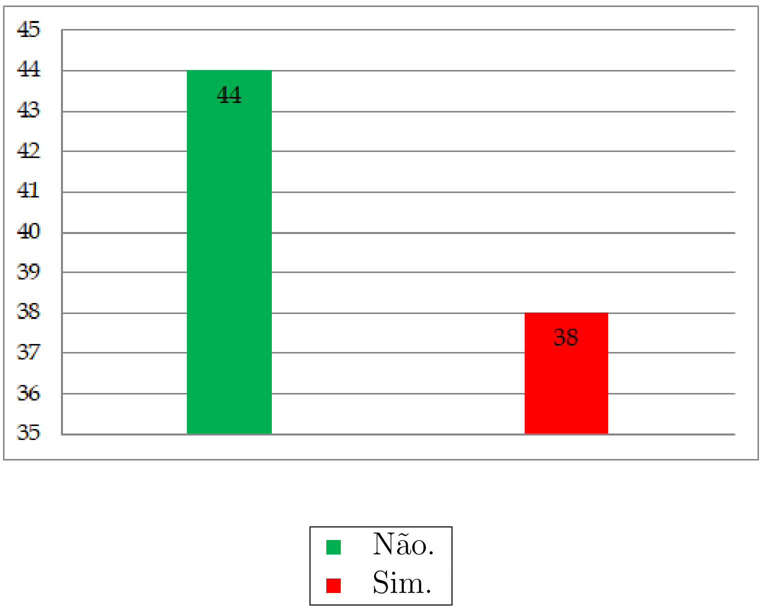
**Pergunta 01**: Sexo:

**Figura 6.1:** Gráfico 01: Sexo.



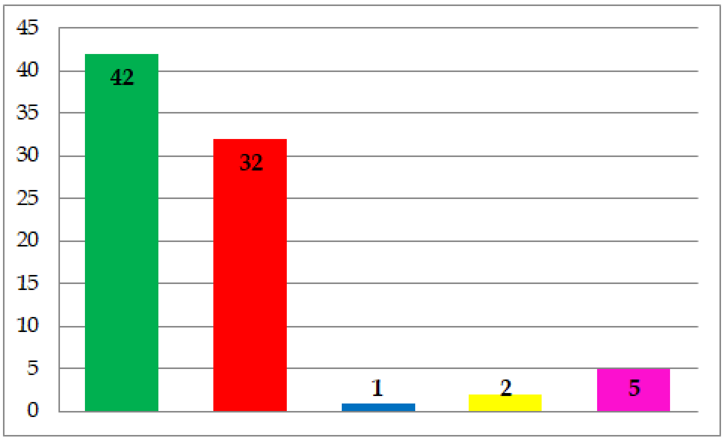

**Pergunta 02**: Você exerce alguma atividade remunerada (trabalho/estágio)?

**Figura 6.2:** Gráfico 02: Alunos que exercem atividade remunerada.



**Pergunta 03**: Você recebe mesada?

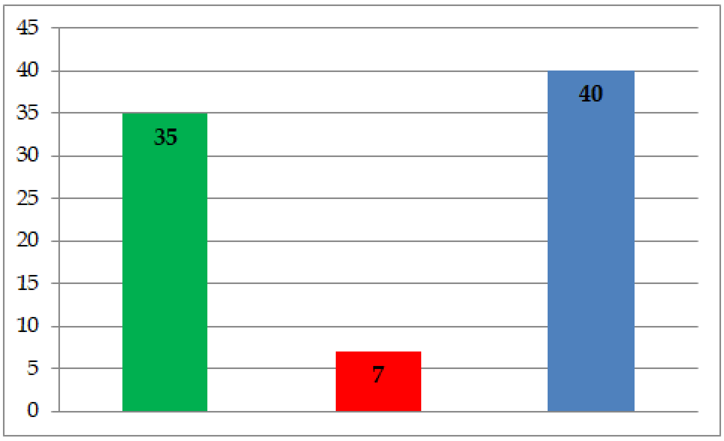
**Figura 6.3:** Gráfico 03: Alunos que recebem mesada.




| | |
|---|---|
| ■ | Não. |
| ■ | Não. Recebo dinheiro dos meus pais conforme necessidade. |
| ■ | Sim. Semanalmente. |
| ■ | Sim. Mensalmente. |
| ■ | Sim. Recebo a cada 15 dias. |

**Pergunta 04**: Você consegue economizar o dinheiro que ganha?

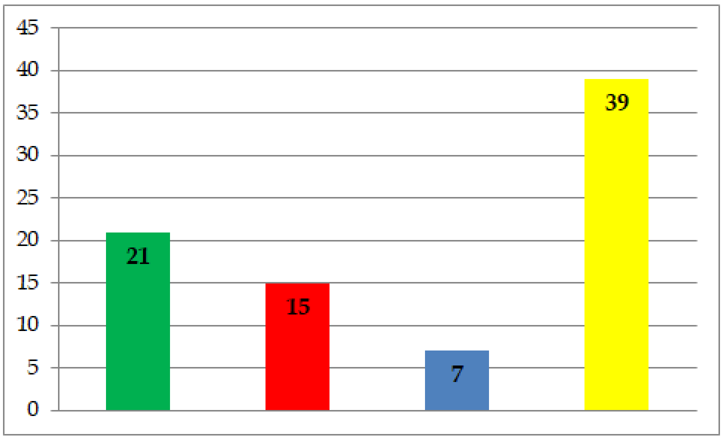
**Figura 6.4:** Gráfico 04: Alunos que conseguem ecomonizar dinheiro.




| | |
|---|---|
| ■ | Sim. |
| ■ | Não. |
| ■ | Ás vezes. |

**Pergunta 05**: Como você controla os seus ganhos e gastos?

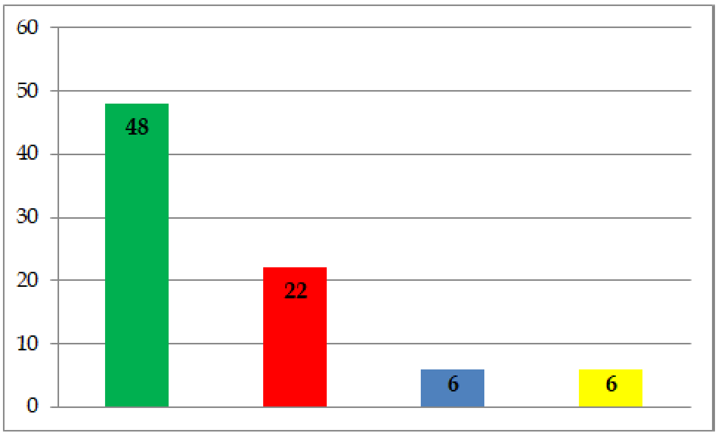
**Figura 6.5:** Gráfico 05: Formas que controla seus ganhos.




- Registro periodicamente por tipo de despesa e ganho, inclusive os itens de menor valor, como chocolate, sorvete, cinema, etc, e depois analiso mensalmente.
- Registro as despesas e os ganhos, mas não totalizo mensalmente.
- Começo a registrar as despesas e ganhos, mas não consigo anotar durante os 30 dias do mês.
- Não controlo meu dinheiro.

**Pergunta 06**: Ao sair para passear ou fazer compras, como você se comporta?

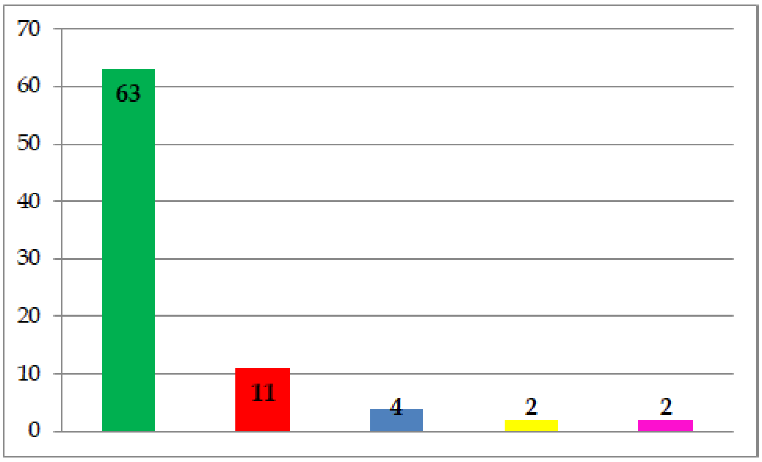
**Figura 6.6:** Gráfico 06: Conduta ao sair para passear ou fazer compras.




- Procuro saber aonde vou e o que fazer, para não comprar por impulso.
- Gosto de passear e fazer compras e quando há promoções, geralmente compro.
- Ao sair não me preocupo em saber se vou ou não comprar, mas se vejo algo interessante compro independente se tenho ou não dinheiro.
- Adoro sair e ir as compras, o importante é viver o momento.

**Pergunta 07**: Qual a melhor forma de organizar os gastos?

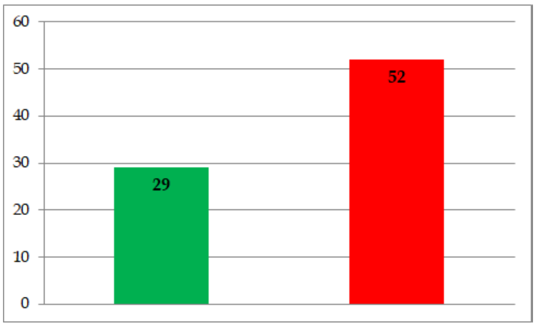
**Figura 6.7:** Gráfico 07: Melhor forma de organizar os gastos.




- Criar uma planilha e anotar todos os gastos
- Anotar os gastos mais importantes em um caderno qualquer.
- Guardar todos as notas fiscais em um armário.
- Comprar apenas no cartão.
- Nenhuma das alternativas.

**Pergunta 08** Você sabe o que significa orçamento familiar?

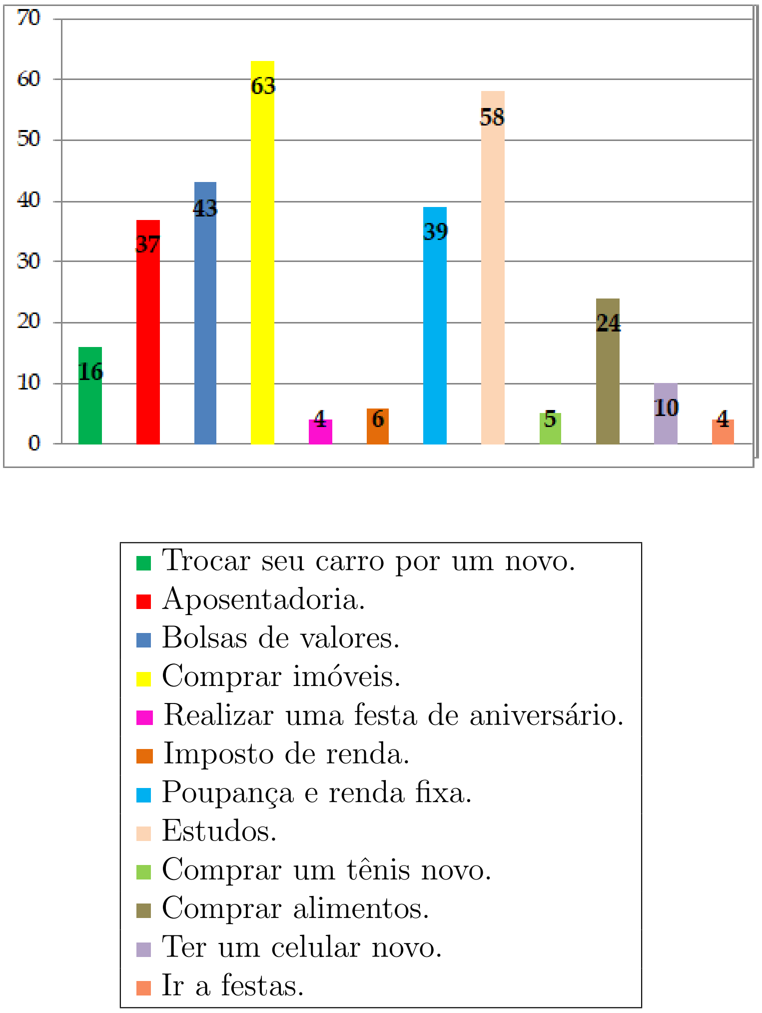
**Figura 6.8:** Gráfico 08: Orçamento familiar.




- Sim.
- Não.

**Pergunta 09**: Quais dos itens abaixo você considera como investimento? (Marque quantas quiser)

**Figura 6.9:** Gráfico 09: Itens considerados investimentos pelos alunos.



# 7 Sequência Didática

Neste capítulo, planos de ação serão propostos para os docentes executarem em suas aulas no ensino médio. São cinco temas a serem abordados, um em cada plano: História do dinheiro; compra à vista e compra a prazo; empréstimo; poupar e investir; orçamento.

## 7.1 Plano de ação 01

**Tema: História do dinheiro**

**Objetivo**
O objetivo é possibilitar ao aluno um conhecimento histórico da evolução do dinheiro. Já o objetivo específico é a compreensão das transformações do dinheiro ao longo da história e a necessidade humana por essas mudanças.

**Procedimento Metodológico**
Iniciar apresentando aos alunos o tema de forma lúdica. Pode ser através de vídeo e *slides*. Após a apresentação do assunto, realizar um diálogo que apresente a relevância e a necessidade dos fatos históricos para o desenvolvimento dos recursos financeiros.

**Público-alvo**: 1º, 2º e 3º ano do ensino médio.

**Tempo estimado:**1h:40 min.

**Atividade 01**
Para a apresentação da história do dinheiro, divida a turma em pequenos grupos de maneira que cada um fique responsável por uma parte da explanação. Após os alunos pesquisarem sobre o assunto, propõe-se a exposição em sala do que eles descobriram sobre a evolução do dinheiro, permitindo o uso da criatividade.

## 7.2 Plano de ação 02

**Tema: Compra à vista e compra a prazo (juros)**

**Objetivo**
O objetivo é compreender os conceitos de juros simples e compostos. O objetivo específico é desenvolver estratégias de resolução de situações que envolvam os dois regimes de juros e identificar a diferença entre cada um deles.

**Procedimento Metodológico**
Apresentar aos alunos a situação de compra à vista e a prazo, através do vídeo: Eu vou levar, e realizar uma reflexão sobre a diferença entre elas. Em seguida, conceituar os regimes de capitalização. Também propor a atividade de pesquisa de panfletos que seja realizada em grupo para analisar a compra à vista e a prazo. Por fim, para fixação dos conteúdos explicados pelo professor, os alunos devem realizar exercícios pré-definidos. A correção desses deve ser feita de forma que os alunos consigam compreender a diferença entre os regimes de juros, suas vantagens e desvantagens.

**Público-alvo**: 1º, 2º e 3º ano do ensino médio.

**Tempo estimado:** 2h: 30min.

**Atividade 01**
Assistir ao vídeo: Eu vou levar. Disponível no link[12].

**Figura 7.1:** Imagem do vídeo: Eu vou levar.

Fonte: Banco central do Brasil,[12]

O vídeo apresenta dois amigos, um deles precisa adquirir um tênis e convida o outro para ir junto. Ao chegar à loja, os dois realizam a compra. Aquele que precisava do tênis, já havia realizado um planejamento prévio para pagamento à vista. O outro, que estava apenas de companhia, leva o tênis que não precisava e que não havia se programado, realizando a compra a prazo. Ao saírem da loja, os dois seguem seus diferentes caminhos. O que não havia se organizado antes, chega à sua casa e percebe que não deveria ter realizado a aquisição. O vídeo mostra a diferença entre a compra à vista e a prazo e o ato de planejar uma compra ou de realizá-la por impulso.

**Atividade 02**
Realizar uma roda de conversa com os alunos para que possam refletir a maneira que estão gastando o dinheiro.

Sugestões de perguntas para discussão:

- Eu controlo meu dinheiro ou ele me controla?
- Eu sempre fecho o mês devendo?
- Qual dos dois personagens que mais pareço?
- Qual a situação foi mais vantajosa nesse caso: a compra à vista ou a prazo?

**Atividade 03**
Material necessário: Panfletos de propagandas de lojas que possuem preços à vista e preços a prazo.

Desenvolvimento: Os alunos deverão escolher três produtos para realizarem uma pequena análise.

Perguntas para a análise:

- Qual o valor do preço à vista?
- Qual o preço a prazo?
- Houve alguma diferença no valor? Se a resposta for sim, qual é essa diferença?
- Com a inflação atual, qual é mais vantajoso comprar: a vista ou a prazo?
- Houve juros nessas mercadorias?

Após a análise de cada aluno, realize uma roda de conversa para que todos possam interagir e compreender a melhor maneira de realizar uma compra.

**Atividade 04**
Sugestão de exercícios de Vestibulares:

1. (**Ufu 2018**) Um comerciante está negociando o valor $V$ da venda à vista de uma mercadoria que foi adquirida com seu fornecedor um mês antes por R$ 1.000,00 com 4 meses de prazo para pagamento (sem pagar juros). Sabe-se que o comerciante aplica esse valor $V$ à taxa de 2% de juros (compostos) ao mês para viabilizar o pagamento futuro da mercadoria. Para que a atualização do valor associado à venda dessa mercadoria forneça, na data do pagamento do fornecedor, um lucro líquido de R$ 200,00 a venda à vista deve ser de:

**Observação:** use a aproximação para 1,0612 para $(1{,}02)^3$ e, ao expressar um valor monetário, faça o arredondamento na segunda casa decimal, considerando unidades inteiras de centavos.
**a)** R$ 943,33.

**b)** R$ 1.130,80.
**c)** R$ 1.232,89.
**d)** R$ 1.108,62.

2. (**Fac. Albert Einstein - Medicin 2018**) Um produto foi comprado em 2 parcelas, a primeira à vista e a segunda após 3 meses, de maneira que, sobre o saldo devedor, incidiram juros simples de 2% ao mês. Se o valor das 2 parcelas foi o mesmo, em relação ao preço do produto à vista, cada parcela corresponde à:

**a)** $\frac{51}{101}$.

**b)** $\frac{53}{103}$.

**c)** $\frac{55}{105}$.

**d)** $\frac{57}{107}$.

3. (**Fgv 2017**) Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos. Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês. Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$ 65.536,00 então o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a:
**Dado:**$65535 = 2^{16}$
**a)** $3{,}66^8$.
**b)** $3{,}72^8$.
**c)** $3{,}88^8$.
**d)** $3{,}96^8$.

4. (**Uerj 2016**) Na compra de um fogão, os clientes podem optar por uma das seguintes formas de pagamento:
- à vista, no valor de R$ 860,00;
- em duas parcelas fixas de R$ 460,00 sendo a primeira paga no ato da compra e a segunda 30 dias depois.
A taxa de juros mensal para pagamentos não efetuados no ato da compra é de:
**a)** 10%.
**b)** 12%.
**c)** 15%.
**d)** 18%.

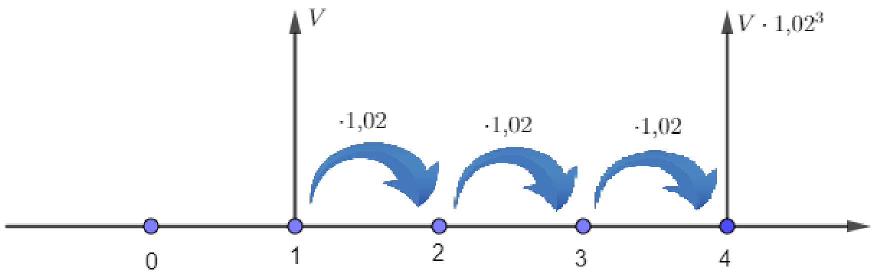
5. (**G1 - cftmg 2016**) O pagamento de uma televisão foi feito, sem entrada, em 5 parcelas mensais iguais, corrigidas a juros simples pela taxa de 0,7% ao mês. Dessa forma, no final do período, o valor total pago, em percentual, será maior do que o inicial em:
**a)** 2,1.
**b)** 3,5.

**c)** 4,2.
**d)** 7,3.

**Resoluções dos exercícios de vestibulares**

1. Alternativa: letra B.

Sabe-se que o comerciante adquiriu a mercadoria um mês antes, com custo de R$ 1.000,00, o prazo de pagamento de quatro meses, que o lucro desejado é de R$ 200,00 e a taxa de 2%, então ao aplicar a fórmula dos juros compostos tem-se:




$$
\begin{aligned}
M &= C \cdot (1+i)^t \\
1200 &= V \cdot (1+0{,}02)^3 \\
1200 &= V \cdot 1{,}02^3 \\
1200 &= 1{,}0612 \cdot V \\
V &= \frac{1200}{1{,}0612} \\
V &\approx R\$1.130{,}80.
\end{aligned}
$$

Assim, o valor da venda à vista é R$ 1.130,80.

2. Alternativa: Letra B

Considerando que o valor da parcela à vista é $y$ e o total da compra é $x$, então ficou devendo $(x-y)$. Após 3 meses, tem-se que os juros serão de 6%, assim o valor da prestação será de $(x-y)\cdot 1{,}06$.

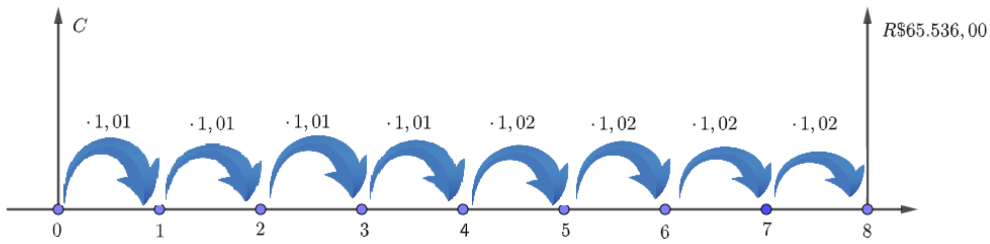
Como as duas prestações são iguais, tem-se:

$$
\begin{aligned}
y &= (x-y)\cdot 1{,}06 \\
\frac{y}{1{,}06} &= x-y \\
x-y &= \frac{100y}{106} \\
100y &= 106x - 106y \\
100y + 106y &= 106x \\
206y &= 106x \\
y &= \frac{106x}{206} \\
y &= \frac{53x}{103}.
\end{aligned}
$$

Logo, em relação ao preço à vista, cada parcela corresponde à $\frac{53}{103}$.

3. Alternativa: letra E

Considerando $C$ o capital aplicado e o montante resgatado de R$ 65.536,00, então tem-se:




$$
\begin{aligned}
M &= C \cdot (1+i)^t \\
65536 &= C(1{,}01)^4 \cdot (1{,}02)^4 \\
4^8 &= C(1{,}03012)^4 \\
C &= \frac{4^8}{(1{,}03012)^4} \\
C &= \left(\frac{4}{\sqrt{1{,}03012}}\right)^8 \\
C &\approx 3{,}98^8.
\end{aligned}
$$

Pode-se afirmar que o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente de $3{,}98^8$.

4. Alternativa: letra C

A primeira parcela paga à vista no ato da compra é de R$ 460,00. A segunda parcela sem juros seria de R$ 400,00, pois o preço à vista é de R$ 860,00. Assim, há um acréscimo de R$ 60,00 na segunda parcela, que corresponde aos juros após 30 dias. Para calcular a taxas de juros aplica-se a Equação 3.3.

$$
\begin{aligned}
J &= C \cdot i \cdot n \\
60 &= 400 \cdot i \cdot 1 \\
i &= \frac{60}{400} \\
i &= 0{,}15 = 15\%.
\end{aligned}
$$

Logo, a taxa de juros simples é 15%.

5. Alternativa: letra B

Sabe-se que a televisão foi paga em 5 parcelas mensais com juros simples de 0,7%, então o percentual de aumento será de $5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5$.

## 7.3 Plano de ação 03

**Tema: Empréstimo**

**Objetivo**

Compreender os conceitos de empréstimos e financiamentos, tal qual identificar a diferença entre os mesmos. Tem-se como objetivo específico desenvolver as tabelas dos sistemas de amortização.

**Procedimento Metodológico**

Apresentar aos alunos a situação de financiamento e investimento através do vídeo: Filhos de Mama. Depois, realizar uma reflexão sobre a diferença entre comprar com um financiamento e investir o dinheiro para realizar a aquisição.

Conceituar os sistemas de amortização (SAC, PRICE, SAM, SAA) e expor a troca intertemporal. Por fim, para fixação dos conteúdos explicados pelo professor, os estudantes deverão realizar exercícios pré-definidos. A correção desses deverá ser feita de forma que eles consigam compreender o tema.

**Público -alvo**: 1º, 2º e 3º ano do ensino médio.

**Tempo estimado:** 2h:30min.

**Atividade 01**

Assistir ao vídeo: Filhos da Mama. Disponível no link[13].

**Figura 7.2:** Imagem do vídeo: Filhos da Mama

Fonte: Banco Central do Brasil,[13]

O vídeo apresenta uma família em que os dois irmãos possuem pensamentos diferentes em relação à compra de um carro. Há uma comparação entre eles para saber a melhor maneira de adquiri-lo. Deveria ser feito por financiamento ou a vista?

**Atividade 02**

Realizar uma roda de conversa com os alunos para que possam refletir qual a forma que eles pensam ser a melhor.

Sugestões de perguntas para reflexão.

- Qual dos dois irmãos que mais me pareço?

- Eu sou uma pessoa que compra com financiamento?
- Eu junto dinheiro para realizar uma compra?
- Para você qual situação é mais vantajosa: comprar a prazo ou economizar para depois comprar a vista?

**Atividade 03**

Divida a turma em oito grupos. Depois sorteie os quatro tipos de sistemas de amortização entre eles e peça para que construam a tabela. Duas equipes irão fazer o mesmo sistema. Após terminarem, realize uma pequena apresentação para comparação dos resultados.

**Atividade 04**

Sugestão de exercícios de vestibulares:

1. (**Ufpr 2019**) Alexandre pegou dois empréstimos com seus familiares, totalizando R$ 20.000,00. Ele combinou pagar juros simples de 8% ao ano em um dos empréstimos e de 5% ao ano no outro. Após um ano nada foi pago, e por isso sua dívida aumentou de R$ 20.000,00 para R$ 21.405,00.

Quanto foi tomado emprestado de cada familiar?
**a)** R$ 2.600,00 e R$ 17.400,00.
**b)** R$ 40.000,00 e R$ 16.000,00.
**c)** R$ 6.500,00 e R$ 13.500,00.
**d)** R$ 7.700,00 e R$ 12.300,00.
**e)** R$ 8.200,00 e R$ 11.800,00.

2. (**Enem PPL 2018**) Um rapaz possui um carro usado e deseja utilizá-lo como parte do pagamento na compra de um carro novo. Ele sabe que, mesmo assim, terá que financiar parte do valor da compra.

Depois de escolher o modelo desejado, o rapaz faz uma pesquisa sobre as condições de compra em três lojas diferentes. Em cada uma, é informado sobre o valor que a loja pagaria por seu carro usado, no caso de a compra ser feita na própria loja. Nas três lojas são cobrados juros simples sobre o valor a ser financiado, e a duração do financiamento é de um ano. O rapaz escolherá a loja em que o total, em real, a ser desembolsado será menor. O quadro resume o resultado da pesquisa.

| **Loja** | **Valor oferecido pelo carro usado(R$)** | **Valor do carro novo (R$)** | **Percentual de juros %** |
|---|---|---|---|
| A | 13.500,00 | 28.500,00 | 18 ao ano |
| B | 13.000,00 | 27.000,00 | 20 ao ano |
| C | 12.000,00 | 26.500,00 | 19 ao ano |

A quantia a ser desembolsada pelo rapaz, em real, será:
**a)** 14.000.
**b)** 15.000.
**c)** 16.800.
**d)** 17.255.

**e)** 17.700.

3. (**G1 - ifsc 2017**) Segundo dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o rendimento médio mensal das famílias catarinenses é R$ 1.368,00. Considerando-se que uma família pegou um empréstimo no valor de 30% de sua renda média mensal e vai pagar este empréstimo a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, quanto essa família pegou emprestado e qual o valor que a família irá pagar (montante final) se saldar essa dívida em 2 meses?
**a)** Pegou emprestado R$ 407,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 423,86.
**b)** Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.
**c)** Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 424,90.
**d)** Pegou emprestado R$ 409,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 425,94.
**e)** Pegou emprestado R$ 410,40 e pagará, ao final de 2 meses, R$ 426,98.

4.(**Uece 2017**) Bruno fez um empréstimo de R$ 1.000,00 a juros simples mensais de 10%. Dois meses após, pagou R$ 700,00 e um mês depois desse pagamento, liquidou o débito. Este último pagamento, para liquidação do débito, foi de:
**a)** R$ 550,00.
**b)** R$ 460,00.
**c)** R$ 490,00.
**d)** R$ 540,00.

5. (**Enem 2017**) Um empréstimo foi feito a taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a $P$. O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.
A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é:

**a)** $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right].$

**b)** $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}\right].$

**c)** $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right].$

**d)** $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{3i}{100}\right)}\right].$

**e)** $P\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^3}\right].$

**Resolução dos exercícios de vestibulares**

1. Alternativa: Letra C

Como não se sabe o valor que Alexandre pegou emprestado, então considera-se $C$ o capital de um empréstimo com a taxa de 8% a.a.. O outro empréstimo como $(20.000 - C)$ com a taxa de 5% a.a. Os juros foram de $(21.405 - 20.000 = 1.405)$.

Tem-se que o produto da soma dos dois capitais com as suas respectivas taxas de juros é igual ao total de juros gerado.

$$\begin{aligned} C \cdot 0{,}08 + (20000 - C) \cdot 0{,}05 &= 1405 \\ 0{,}08 \cdot C + 1000 - 0{,}05 \cdot C &= 1405 \\ 0{,}03 \cdot C &= 1405 - 1000 \\ 0{,}03 \cdot C &= 405 \\ C &= \frac{405}{0{,}03} \\ C &= 13500. \end{aligned}$$

Portanto, o valor emprestado com a taxa de 8% a.a. foi de R$ 13.500,00. Para encontrar o empréstimo com a taxa de 5% a.a., basta calcular: $(20.000 - 13.500 = 6.500)$, logo R$ 6.500,00.

2. Primeiramente, é necessário saber qual o valor que deverá ser desembolsado em cada loja:

Loja A:

$$(28500 - 13500) \cdot 1{,}18$$

$$1500 \cdot 1{,}18$$

$$R\$17.000{,}00.$$

Loja B:

$$27000 - 13000 \cdot 1{,}2$$

$$14000 \cdot 1{,}2$$

$$R\$16.800{,}00.$$

Loja C:

$$26500 - 13000 \cdot 1{,}19$$

$$13500 \cdot 1{,}19$$

$$R\$17.255{,}00.$$

Portanto, o menor valor desembolsado pelo rapaz será o de R$ 16.800,00.

3.Alternativa: letra E

Para saber qual o valor que cada família pegou emprestado, deve-se calcular o quanto representa 30% do salário de R$ 1.368,00. Ou seja:

$$1368 \cdot \frac{30}{100} = 410{,}40.$$

Então a família realizou um empréstimo de R$ 410,40. A taxa de juros é de 2% que será paga em uma única vez no final de 2 meses. Ao aplicar a Teorema 3.13, tem-se:

$$\begin{aligned}
M &= C \cdot (1+i)^t \\
M &= 410{,}4 \cdot (1+0{,}02)^2 \\
M &= 410{,}4 \cdot (1{,}02)^2 \\
M &= 410{,}40 \cdot 1{,}0404 \\
M &= 426{,}98.
\end{aligned}$$

Logo, o valor que a família irá pagar será de R$ 426,98.

4. Alternativa: letra A

Inicialmente, é preciso saber o saldo devedor de Bruno no final dos dois meses. Assim, aplica-se a Equação 3.3.

$$\begin{aligned}
M &= C \cdot (1 + i \cdot n) \\
M &= 1000 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot 2) \\
M &= 1000 \cdot 1{,}2 \\
M &= 1200.
\end{aligned}$$

O valor que Bruno estava devendo no final dos dois meses é R$ 1.200,00. Ao considerar que ele pagou o valor de R$ 700,00, então continuou devendo R$ 500,00. Logo, no mês seguinte, o valor da liquidação foi de $500 \cdot (1{,}1) = 550$. R$ 500,00.

5. Alternativa: letra A

O empréstimo foi dividido em 8 prestações, mas após a 5ª a pessoa resolve pagar o valor restante. Então, ela pagará três parcelas juntas, realizando o abatimento dos juros das prestações 7 e 8.

Tem-se:

$$\left[P + \frac{P}{\left(1+\frac{1}{100}\right)} + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

$$P \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$$

Logo, essa é a expressão para calcular o valor pago.

## 7.4 Plano de ação 04

**Tema: Poupar e investir**

**Objetivo**
O objetivo é apresentar as maneiras de se realizar uma poupança e um investimento. O objetivo específico é mostrar a importância de se possuir uma reserva financeira para qualquer eventualidade.

**Procedimentos Metodológicos**
Exibir o vídeo: O pão da avó. Depois, explicar os modos como podem realizar poupanças e investimentos. Realizar uma reflexão sobre a diferença entre os dois.

Por fim, para fixação dos conteúdos explicados pelo professor, os alunos deverão realizar exercícios pré-definidos. A correção desses deverá ser feita de forma que os alunos consigam compreender o tema.

**Público -alvo**: 1º, 2º e 3º ano do ensino médio.

**Tempo estimado:** 2h:30min

**Atividade 01**
Assistir ao vídeo: O pão da avó. Disponível no link[15].

**Figura 7.3:** Imagem do vídeo: O pão da avó.

Fonte: Banco Central do Brasil, [15].

Aparece o avô realizando junto com seu neto a confecção de um pão. O idoso mostra que é necessário colocar um pouco de fermento na massa para ela possa crescer e conta como ele aprendeu a fazer o pão. Quando estão realizando a massa percebem a necessidade de mais leite. Porém, esse havia acabado na casa. Assim, o avô mostra a utilidade da caixinha de emergência que sua avó havia lhe ensinado.

**Atividade 02**
Realizar uma roda de conversa com os alunos para que possam refletir sobre a caixinha de emergência.

Sugestões de perguntas para reflexão.

- Qual a relação do fermento com o dinheiro?
- Qual a relação do pote de emergência com nosso cotidiano?
- Você possui uma caixinha de emergências?
- Na sua família vocês já conversaram sobre poupar e investir?

**Atividade 03**
Divida a turma em grupos de modo que cada um deles ficará responsável pela pesquisa de um investimento. Quando terminarem, cada um apresenta os seus resultados.

**Atividade 04**
Sugestão de exercícios de Vestibulares:

1. (**Uerj 2020**) Ao se aposentar aos 65 anos, um trabalhador recebeu seu Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) no valor de R$ 50.000,00 e resolveu deixá-lo em uma aplicação bancária, rendendo juros compostos de 4% ao ano, até obter um saldo de R$ 100.000,00. Se esse rendimento de 4 % ao ano não mudar ao longo de todos os anos, o trabalhador atingirá seu objetivo após $x$ anos.
Considerando $log(1{,}04) = 0{,}017$ e $log 2 = 0{,}301$ o valor mais próximo de $x$ é:
**a)** 10.
**b)** 14.
**c)** 18.
**d)** 22.

2. (**Uemg 2019**) Joaquim, um jovem empreendedor, estuda duas possibilidades para investir R$ 10.000,00. A primeira opção é aplicar durante meio ano a uma taxa de juros simples de 0,5% a.m. e a segunda, aplicar o mesmo montante a uma taxa de juros compostos. Assinale a alternativa que apresenta a taxa de juros compostos ao mês para que, com a mesma duração e com o mesmo montante inicial, Joaquim obtenha o mesmo rendimento da primeira possibilidade:
Dados: $\sqrt[6]{1{,}18} = 102797 \cdot 10^{-5}; \sqrt[6]{1{,}03} = 1004939 \cdot 10^{-6}$ **a)** 2,797% a.m.
**b)** 1,555% a.m.
**c)** 0,352% a.m.
**d)** 0,4939% a.m.

3. (**G1 - cftmg 2019**) Um pai abriu uma conta poupança para seu filho e depositou nela R$ 100,00. O filho disse que deixaria esse dinheiro na poupança, a uma taxa fixa de 1% ao mês, a juros compostos, até que tivesse o dobro dessa quantia. Considerando que ele não fará outro depósito no período, o número de meses necessário para receber essa quantia em dobro é de:
Obs.: Use $\log_2 1{,}01 = 0{,}014$
**a)** 12.
**b)** 24.
**c)** 60.
**d)** 72.

4. (**Upe-ssa 3 2017**) Patrícia aplicou, num investimento bancário, determinado capital que, no regime de juro composto, durante um ano e seis meses, à taxa de 8% ao mês, gerou um juro de R$ 11.960,00. Qual é o capital aplicado por ela nesse investimento?

Utilize $(1{,}08)^{18}$.
**a)** R$ 3.800,00.
**b)** R$ 4.000,00.
**c)** R$ 4.600,00.
**d)** R$ 5.000,00.
e) R$ 5.200,00.

5. (**G1 - cftmg 2018**) O gerente de um banco apresentou a um cliente, interessado em investir determinada quantia de dinheiro, quatro opções, conforme descritas no quadro abaixo.

| **Opção de investimento** | **Regime de Capitalização** | **Prazo (meses)** | **Taxa (a.m.)** |
|---|---|---|---|
| 1 | composto | 2 | 2,0% |
| 2 | composto | 3 | 1,5% |
| 3 | simples | 4 | 2,0% |
| 4 | simples | 5 | 1,5% |

A opção que proporcionará um maior rendimento ao cliente, considerando-se os prazos e taxas fixados pelo banco, será a:
**a)** 1.
**b)** 2.
**c)** 3.
**d)** 4.

**Resoluções dos exercícios de vestibular**

1. Alternativa: letra C

Considerando o valor do FGTS de R$ 50.000,00, a aplicação a uma taxa de juros compostos de 4% durante o período necessário para se obter o montante de R$ 100.000,00, e $i = 4\% = 0{,}04$, ao aplicar o Teorema 3.13, tem-se:

$$
\begin{aligned}
M &= C \cdot (1+i)^n \\
100.000 &= 50000 \cdot (1+0{,}04)^x \\
100.000 &= 50000 \cdot (1{,}04)^x \\
\frac{100000}{50000} &= (1{,}04)^x \\
1{,}04^x &= 2 \\
log1{,}04^x &= log2 \\
x \cdot log1{,}04 &= log2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} 0,017 \cdot x &= 0{,}301 \\ x &\approx \frac{0{,}301}{0{,}017} \\ x &\approx 17{,}7. \end{aligned}$$

Portanto, o valor mais próximo de $x$ é 18.

2. Alternativa: letra D

Joaquim irá investir R$ 10.000,00 a uma taxa de juros simples de 0,5% a.m.. Ao aplicar a Equação 3.3, tem-se:

$$\begin{aligned} J &= C \cdot i \cdot n \\ J &= 1000 \cdot 0{,}0005 \cdot 6 \\ J &= 300 \end{aligned}$$

Então, os juros aplicados foram de R$ 300,00. Como Joaquim quer aplicar para ter o mesmo montante. Usa-se o Teorema 3.13.

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i)^n \\ 10.300 &= 10.000 \cdot (1+i)^6 \\ \frac{10300}{10000} &= (1+i)^6 \\ (1+i)^6 &= 1{,}03 \\ \sqrt[6]{(1+i)^6} &= \sqrt[6]{1{,}03} \\ 1+i &= 1,004939 \\ i &= 1{,}004939 - 1 \\ i &= 0{,}004939 = 0{,}4939\% \end{aligned}$$

Portanto, a taxa é de 0,4939% a.m..

3. Alternativa: letra D

O pai realizou um depósito na poupança no valor de R$ 100,00, que é o capital, a uma taxa de 1% ao mês. Ele irá deixar o dinheiro até que dobre o seu valor, chegando à R$ 200,00. Para saber quanto meses serão necessários, aplica-se o Teorema 3.13.

$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+i)^n \\ 200 &= 100 \cdot (1+0{,}01)^n \\ (1{,}01)^n &= \frac{200}{100} \\ \log_2 (1{,}01)^n &= \log_2 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
n \cdot \log_2(1{,}01) &= \log_2 2 \\
0{,}014 \cdot n &= 1 \\
n &= \frac{1}{0{,}014} \\
n &= 72.
\end{aligned}
$$

Para que o valor dobre, será necessário 72 meses.

4- Alternativa: letra B

Patrícia deseja aplicar durante 1 ano e meio, ou seja, 18 meses. Sabendo que o juro é de R$ 11.960,00, então o montante será $(x + 11.960)$. A taxa de juros de 8% a.m.. Ao aplicar o Teorema 3.13, tem-se:

$$
\begin{aligned}
M &= C \cdot (1 + i)^n \\
x + 11960 &= x \cdot (1 + 0{,}08)^{18} \\
x + 11960 &= x \cdot (1{,}08)^{18} \\
x + 11960 &= 3{,}99x \\
3{,}99x - x &= 11960 \\
2{,}99x &= 11960 \\
x &= \frac{11960}{2{,}99} \\
x &= 4000
\end{aligned}
$$

Portanto, o valor empregado é de R$ 4.000,00.

5. Alternativa: letra C

Como os dois primeiros investimentos são juros compostos, tem-se:

| **investimento 01** | **investimento 02** |
|---|---|
| $M = C \cdot (1 + i)^n$ | $M = C \cdot (1 + i)^n$ |
| $M = C \cdot (1 + 0{,}02)^2$ | $M = C \cdot (1 + 0{,}015)^3$ |
| $M = C \cdot (1{,}02)^2$ | $M = C \cdot (1{,}015)^3$ |
| $M = 1{,}0404 \cdot C$ | $M = 1{,}04567 \cdot C$ |

Já os dois últimos investimentos são juros simples, então:

| **investimento 03** | **investimento 04** |
|---|---|
| $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$ | $M = C(1 + in)$ |
| $M = C \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 4)$ | $M = C \cdot (1 + 0{,}015 \cdot 5)$ |
| $M = C \cdot (1 + 0{,}08)$ | $M = C \cdot (1 + 0{,}075)$ |
| $M = 1{,}08 \cdot C$ | $M = 1{,}075 \cdot C$ |

Analisando cada investimento, a melhor opção é a 03, pois proporcionará uma maior rentabilidade do capital.

## 7.5 Plano de ação 05

**Tema: Orçamento**

**Objetivo**

O objetivo é mostrar para os alunos a importância de realizar um orçamento pessoal ou familiar. Já o objetivo específico é esclarecer algumas maneiras de se realizar um orçamento.

**Procedimento Metodológico**

Exibir o vídeo: O piano ou a aninha. Depois, explicar a situação do que é um orçamento e qual sua importância e realizar uma reflexão sobre o tema. Por fim, propor uma atividade em que os alunos possam montar seu próprio orçamento financeiro.

**Público -alvo**: 1º, 2º e 3º ano do ensino médio.

**Tempo estimado:** 1h:40min **Atividade 01**

Assistir ao vídeo: O piano ou a Aninha. Disponível no link[16].

**Figura 7.4:** Imagem do vídeo: O Piano ou a Aninha.

Fonte: Banco Central do Brasil, [16].

Apresenta uma família que se encontra com dificuldades financeiras. Assim, há uma dúvida entre vender o piano da esposa ou demitir a Aninha, que é empregada doméstica. Essa ouve a conversa e tenta ajudar a família expondo um orçamento familiar e como ele pode resolver situações financeiras.

**Atividade 02**

Realizar uma roda de conversa com os alunos para que possam refletir se suas famílias fazem orçamentos financeiros.

Sugestões de perguntas para reflexão.

- Sua Família possui orçamento familiar?
- O que cada membro da família do vídeo faz para poder organizar as suas despesas? E você o que pode fazer para ajudar no orçamento da sua família?

- Por que em algumas famílias apenas alguns membros realizam discussões sobre o assunto?
- Você passou por alguma situação em que sua família precisou cortar alguma despesa?

**Atividade 3**

Pedir para que os alunos pesquisem em casa quais são as despesas que sua família possui, como contas de água, energia, gás, condomínio, supermercado, lazer e outros. Verificar também as receitas.

Após o trabalho, realizar junto com eles um orçamento familiar. Assim, os alunos poderão ver como ele funciona e o que eles podem fazer para ajudar no seu lar.

Modelo de um orçamento familiar:

| **ORÇAMENTO** | **Mês 1 R$** | **Mês 2 R$** | **Mês 3 R$** |
|---|---|---|---|
| **RECEITAS** | | | |
| Receitas Fixas | | | |
| Fonte de Renda 1 | | | |
| Aluguéis, pró-labore | | | |
| Outras rendas | | | |
| Receitas Variáveis | | | |
| 13º Salário | | | |
| Férias | | | |
| Bônus e extras | | | |
| **Total da Renda Familiar** | | | |
| **Investimentos** | | | |
| Aplicações | | | |
| Plano de Previdência Complementar | | | |
| Outros Investimentos | | | |
| **Total de Investimentos** | | | |
| **Dívidas (Prestações a Pagar)** | | | |
| Dívida A | | | |
| Dívida B | | | |
| Outras Dívidas | | | |
| Total de Dívidas | | | |
| **DESPESAS** | | | |
| **Alimentação** | | | |
| Supermercado | | | |
| Restaurantes | | | |
| Outras despesas com alimentação | | | |
| **Habitação** | | | |
| Aluguel / Prestação do Imóvel | | | |
| Condomínio | | | |
| Energia, água e Gás | | | |
| Empregados | | | |
| Outras despesas de habitação | | | |
| **Saúde** | | | |
| Plano de Saúde | | | |
| Medicamentos | | | |
| Outras despesas de saúde | | | |

| | **Mês 1 R$** | **Mês 2 R$** | **Mês 3 R$** |
|---|---|---|---|
| **Transporte** | | | |
| Seguro do automóvel | | | |
| Combustível | | | |
| Estacionamentos | | | |
| Lavagens | | | |
| Manutenção e reparos | | | |
| Ônibus, metro, táxi | | | |
| Outras despesas com transporte | | | |
| **Educação** | | | |
| Mensalidade escolar | | | |
| Cursos extracurriculares | | | |
| Material escolar | | | |
| Outras despesas com educação | | | |
| | | | |
| **Telefonia e comunicação** | | | |
| Telefone fixo | | | |
| Telefones celulares | | | |
| Internet | | | |
| TV por assinatura | | | |
| **Lazer** | | | |
| Bares, danceterias e restaurantes | | | |
| Livros, jornais, revistas | | | |
| Esportes, clubes e academias | | | |
| Cinemas, teatros e shows | | | |
| Viagens | | | |
| Outras despesas com lazer | | | |
| **Despesas pessoais** | | | |
| Salão de beleza | | | |
| Vestuário | | | |
| Animais de estimação | | | |
| Presentes | | | |
| Pensão alimentícia | | | |
| Ajuda a pais/parentes | | | |
| Doações, dízimos, contribuições | | | |
| **Tributos e Multas** | | | |
| IPVA + licenciamento | | | |
| IPTU + taxas municipais | | | |
| Multas (trânsito, pagamentos em atraso) | | | |
| Previdência social dos empregados | | | |
| Outros tributos e multas | | | |
| **Tarifas bancárias e financeiras** | | | |
| Tarifas bancárias | | | |
| Anuidades de cartões de crédito | | | |
| Juros do cartão de crédito | | | |
| Juros do cheque especial | | | |
| Juros de mora | | | |
| Outras despesas bancárias e financeiras | | | |
| **Total das Despesas** | | | |

# 8 Conclusões

Ao final dos estudos, foi possível concluir que o dinheiro não é o papel-moeda, mas a confiança que as pessoas têm entre si. Além disso, compreendeu-se que a maneira que se utiliza ele, atualmente, veio de transformações da sociedade ao longo de séculos.

As duas primeiras revoluções monetárias mostram grandes alterações nas formas em que a população passou a gerir suas finanças e negócios, além do grande impacto na renda e desenvolvimento mundial. A discussão atual de que o mundo atravessa pela terceira revolução monetária é bastante relevante, pois o desenrolar dessa mudança irá com certeza causar enormes modificações sociais. A ideia do dinheiro na nuvem, de plástico ou criptografado é demasiada nova para se saber o que de fato irá ocorrer, mas, ao mesmo tempo, empolgante.

Os organismos internacionais como a OCDE vêm discutindo sobre essas mudanças monetárias e ao mesmo tempo incentivando os países integrantes a darem mais atenção em suas políticas públicas sobre o estudo da Educação Financeira juntamente com a Matemática Financeira. Haja vista isso, o Brasil estabeleceu a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que entrou em vigor há pouco tempo, mas não possui um aprofundamento sobre o assunto, sempre o apresentando de forma superficial e, muitas das vezes, apenas no cálculo de porcentagens. A ideia brasileira foi padronizar a base curricular nacional, já que antes era dada maior autonomia a cada Estado.

Viu-se no trabalho, que o material didático é amplo e envolve um conteúdo diverso e fundamental para o aluno, já que a escola está formando um cidadão para a vida.

Apesar de existir projetos do conteúdo em questão em sites de entidades governamentais, como o da Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) e o do Banco Central do Brasil, eles são poucos divulgados. Fica a impressão que eles são desenvolvidos para cumprir as exigências institucionais, pois poucas pessoas sabem que eles existem. Ademais, dentro da escola não é dado espaço para a utilização desses materiais. O motivo também é incerto, talvez seja desconhecimento, falta de interesse, ou até mesmo a necessidade de se cumprir uma carga curricular que precisa de mudanças.

Através das análises das perguntas e respostas do questionário feito com os alunos do ensino público do terceiro ano do ensino médio, foi possível perceber que os formandos possuem dificuldades em lidar com suas próprias finanças. As análises realizadas expõem o alto grau de preocupação que se deve ter com os estudantes, não obstante a pesquisa ter sido respondida por um grupo específico de uma única escola. Percebeu-se também que o fato dos alunos trabalharem não aumenta o nível de conhecimento sobre o tema.

Enfim, a aplicabilidade da Educação Financeira nas escolas é fundamental para que os alunos entendam como manusear suas finanças. A sequência didática proposta é uma das diversas maneiras de ajudar os alunos a entenderem o que de fato é o dinheiro e a importância do planejamento orçamentário. A formação da cidadania inclui pessoas que consigam ser organizadas financeiramente e que não vivam inadimplentes por não terem a consciência necessária para utilizar seu próprio capital, ainda mais em uma sociedade capitalista, em que esse se tornou a principal articulação global.

# A
# Apêndice

**QUESTIONÁRIO**

1. Sexo:
a) ( ) Feminino. b) ( ) Masculino.

2. Você exerce alguma atividade Remunerada (trabalho/estágio)?
a) ( ) Sim. b) ( ) Não.

3. Você recebe mesada?
a) ( )Não.
b) ( ) Não, recebo dinheiro dos meus pais conforme a necessidade.
c) ( ) sim, recebo a cada 15 dias.
d) ( ) sim, Semanalmente.
e) ( ) Sim, Mensalmente.

4.Você consegue economizar o dinheiro que ganha?
a) ( ) Sim. b) ( ) Não. c) ( ) Ás vezes.

5. Como você controla os seus ganhos e gastos?
a) ( ) Registro periodicamente por tipo de despesa e ganho, inclusive os itens de menor valor, como chocolate, sorvete, cinema, etc, e depois analiso mensalmente.
b) ( ) Registro as despesas e os ganhos, mas não totalizo mensalmente.
c) ( ) Começo a registrar as despesas e ganhos, mas não consigo anotar durante os 30 dias do mês.
d) ( ) Não controlo meu dinheiro.

6. Ao sair para passear ou fazer compras, como você se comporta?
a) ( ) Procuro saber aonde vou e o que vou fazer, para não comprar por impulso.
b) ( ) Gosto de passear e fazer compras e quando há promoções, geralmente compro.
c) ( ) Ao sair não me procuro em saber se vou ou não comprar, mas se vejo algo interessante compro independente se tenho ou não dinheiro.
d) ( ) Adoro sair e ir as compras, o importante é viver o momento.

7. Qual a melhor forma de organizar os gastos?
a) ( ) Criar uma planilha e anotar todos os gastos.
b) ( ) Anotar os gastos mais importantes em um caderno qualquer.
c) ( ) Guardar todos as notas fiscais em um armário.
d) ( ) Comprar apenas no cartão.
e) ( ) Nenhuma das alternativas.

8. Você sabe o que significa orçamento familiar?
a) ( ) Sim. b) ( ) Não.

9. Quais das alternativas você considera um investimento? (marque quantas quiser)
a) ( ) Trocar seu carro por um novo.
b) ( ) Aposentadoria.
c) ( ) Bolsa de valores.
d) ( ) Comprar imóveis.
e) ( ) Realizar uma festa de aniversário.
f) ( ) Imposto de Renda.
g) ( ) Poupança e renda fixa.
h) ( ) Estudos.
i) ( ) Comprar um tênis novo.
j) ( ) Comprar alimentos.
k) ( ) Ter um celular novo.
l) ( ) Ir a festas.

# Bibliografia


[1] ASSAF NETO, A. *Matemática financeira e suas aplicações*. Atlas, 2017.

[2] BRASIL. *DECRETO Nº 7.397, DE 22 DE DEZEMBRO DE 2010*. Acessado: 09 abr. 2020. URL: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm.

[3] BRASIL. *LEI Nº 13.530, DE 7 DE DEZEMBRO DE 2017*. Acessado: 09 abr. 2020. URL: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Lei/L13530.htm#art1.

[4] BRASIL. *LEI Nº 9.514, DE 20 DE NOVEMBRO DE 1997*. Acessado: 09 abr. 2020. URL: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9514.htm.

[5] BRASIL. *Tesouro Direto*. Acessado: 20 abr. 2020. URL: http://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/tesouro-direto/informacoes-tecnicas.htm.

[6] BRASIL/BCB. Acessado: 14 de jul 2020. URL: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira.

[7] BRASIL/BCB. Acessado: 14 de jul 2020. URL: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/cursos.

[8] BRASIL/BCB. Acessado: 13 de jul 2020. URL: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/planejar.

[9] BRASIL/BCB. Acessado: 14 de jul 2020. URL: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/endividado.

[10] BRASIL/BCB. Acessado: 15 de jul 2020. URL: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/poupar_investir.

[11] BRASIL/BCB. *Caderno de Educação Financeira Gestão de Finanças Pessoais*. acessado 14 de nov.2019. URL: https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/Cuidando_do_seu_dinheiro_Gestao_de_Financas_Pessoais/caderno_cidadania_financeira.pdf.

[12] BRASIL/BCB. *Eu vou levar-Série Eu e meu dinheiro*. Acessado: 10 abr 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=FdTip4SdWMw&t=162s.

[13] BRASIL/BCB. *Filhos de Mama-"Série Eu e meu dinheiro"*. Acessado: 10 abr 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=HQ2HZdJNhm8&list=PLhqfgkxuHXh7DCFzdNt3htR_0nJr8QAlj&index=7.

[14] BRASIL/BCB. *Glossário Simplificado de Termos Financeiros*. URL: https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/glossario_cidadania_financeira.pdf (acesso em 5 de jan. de 2020).

[15] BRASIL/BCB. *O pão da avó-Série "Eu e meu dinheiro"*. Acessado: 10 abr 2020. URL: https://www.youtube.com/playlist?list=PLhqfgkxuHXh7DCFzdNt3htR_0nJr8QAlj.

[16] BRASIL/BCB. *O piano ou a Aninha -Série "Eu e meu dinheiro"*. Acessado: 10 abr 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=X1UZuQ8h30o&list=PLhqfgkxuHXh7DCFzdNt3htR_0nJr8QAlj&index=10&t=0s.

[17] BRASIL/ENEF. Acessado: 14 de jul 2020. URL: https://www.vidaedinheiro.gov.br/livros-ensino-fundamental/.

[18] BRASIL/ENEF. Acessado: 25 de jul 2020. URL: https://www.vidaedinheiro.gov.br/ead-novos-alunos/.

[19] BRASIL/ENEF. Acessado: 14 de jul 2020. URL: https://edufinanceira.vidaedinheiro.gov.br/.

[20] BRASIL/ENEF. *Plano Diretor ENEF*. URL: https://www.vidaedinheiro.gov.br/wp-content/uploads/2017/08/Plano-Diretor-ENEF-Estrategia-Nacional-de-Educacao-Financeira.pdf (acesso em 29 de fev. de 2020).

[21] BRASIL/IBGE. *Série Histórica dos Acumulados no Ano–IPCA*. 2020. URL: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/economicas/precos-e-custos/9256-indice-nacional-de-precos-ao-consumidor-amplo.html?t=series-historicas&utm_source=landing&utm_medium=explica&utm_campaign=inflacao#plano-real-ano (acesso em 29 de mar. de 2020).

[22] BRASIL/MEC. *Base Nacional Comum Curricular*. Acessado: 10 mar 2020. URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

[23] CARVALHO, P. C. P. e OLIVEIRA MORGADO, A. C. de. *Matemática Discreta*. 2ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2015, p. 192.

[24] CONEF, C. N. d. E. F. *Educação Financeira nas escolas: ensino Médio*. Brasília/-CONEF, 2013.

[25] CRESPO, A. A. "Matemática financeira fácil". *São Paulo: Saraiva* (2009).

[26] Cristina, P.-G. M., SANTOS NETO, J. P. d. e CONSTANCIO, D. "Contabilização de bitcoins à luz das IFRS e aspectos tributários". *Revista Contabilidade & Finanças* AHEAD (2020).

[27] *Estratégia Nacional de Educação Financeira*. URL: https://www.vidaedinheiro.gov.br/quemsomos/ (acesso em 5 de fev. de 2020).

[28] FERGUSON, N. *A ascensão do dinheiro*. Editora Planeta do Brasil, 2017.

[29] INDECH, R. *Guia sobre Investimento em Renda Fixa*. Acessado: 25 mai. 2020. URL: https://produtos.infomoney.com.br/hubfs/ebook-renda-fixa-3.pdf?utm_campaign=renda_fixa&utm_source=hs_automation&utm_medium=email&utm_content=49291244.

[30] M.C.COSTA, A. L. *História do dinheiro volume01: O valor das moedas e do trabalho da pré história até o fim da Idade Média*. São Paulo, Draco, 2018.

[31] OECD. *Recomendação sobre os Princípios e as Boas Práticas de Educação e Conscientização Financeira*. Acessado: 23 fev.2020. URL: https://www.oecd.org/daf/fin/financial-education/[PT]%5C%20Recomenda%5C%C3%5C%A7%5C%C3%5C%A3o%5C%20Princ%5C%C3%5C%ADpios%5C%20de%5C%20Educa%5C%C3%5C%A7%5C%C3%5C%A3o%5C%20Financeira%5C%202005%5C%20.pdf.

[32] SILVA, A. M. d. e POWELL, A. B. "Um programa de educação financeira para a matemática escolar da educação básica" (2013).

[33] VIANNA, R. d. M. I. *Matemática financeira*. UFBA, Faculdade de Ciências Contábeis; Superintendência de Educação a Distância, 2018.

[34] WEARTHEFORD, J. *A história do dinheiro: do arenito ao cyberspace.* Negócio Editora, 1999.