Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uma Relação Entre a Probabilidade e os Modelos de Genética Populacional Utilizados no Ensino Médio

André Luís Preda

Goiânia

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

André Luis Preda

3. Título do trabalho

Uma Relação Entre a Probabilidade e os Modelos de Genética Populacional Utilizados no Ensino Médio

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Mário José De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 03/07/2020, às 10:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **ANDRE LUIS PREDA**, **Discente**, em 09/07/2020, às 14:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1419712** e o código CRC **BC2D332F**.

Referência: Processo nº 23070.014482/2020-17 SEI nº 1419712

Criado por sosteneg, versão 3 por mario_jose_souza em 03/07/2020 10:57:08.

André Luís Preda

Uma Relação Entre a Probabilidade e os Modelos de Genética Populacional Utilizados no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Probabilidade
Orientador: Prof. Dr. Mário José Souza

Goiânia

2020

Esta é a Página da Ficha de Catalogação com os dados internacionais de Catalogação, fornecidos pela Biblioteca da UFG". OBS. ESTA PÁGINA DEVE SER ENCADERNADA NO VERSO DA PÁGINA ANTERIOR. OBS: O aluno deve pegar esta Ficha no site da Biblioteca, http://www.bc.ufg.br, preenche-la, e enviar para a Biblioteca (Tel. (62) 3521-1229), juntamente com Sumário, Resumo, e Folha de rosto do TCC. Posteriormente a Biblioteca envia de volta a Ficha com todos os dados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 10 da sessão de Defesa de Dissertação de André Luis Preda, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Aos trinta dias do mês de junho de dois mil e vinte, a partir das dez horas, por meio de videoconferência devida a pandemia covid 19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Uma Relação Entre a Probabilidade e os Modelos de Genética Populacional Utilizados no Ensino Médio"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Mário José de Souza (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Ivonildes Ribeiro Martins Dias - (IME/UFG) e membro titular externo a professora doutora Maria Francisca da Cunha – (UEG). **Participaram por videoconferência os professores:** Mário José de Souza (IME/UFG), Ivonildes Ribeiro Martins Dias - IME/UFG e a professora doutora Maria Francisca da Cunha – (UEG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Mário José de Souza, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos trinta dias do mês de junho de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Mário José De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 01/07/2020, às 19:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Maria Francisca da Cunha**, **Usuário Externo**, em 04/07/2020, às 14:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ivonildes Ribeiro Martins**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/07/2020, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1379728** e o código CRC **71533F98**.

Referência: Processo nº 23070.014482/2020-17 SEI nº 1379728

Criado por sosteneg, versão 8 por mario_jose_souza em 01/07/2020 19:15:51.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

André Luís Preda Graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás 2005. Graduou-se também em Direito pela Uni Anhanguera em 2010. Atualmente é professor de matemática dos Colégios: Agostiniano, Dinâmico, Fractal, Santo Agostinho, Princípios e Teo em Goiânia.

Dedico este trabalho a minha esposa, a meu filho Eduardo, a minha filha Elisa e ao meu grande irmão e eterno amigo Alan. Dedico também a todos amigos que me apoiaram, e postumamente, a minha mãe.

Agradecimentos

A Deus, a Jesus Cristo e toda espiritualidade superior que olha e interessa por minha evolução.

A minha esposa Alliny Rodrigues Loureiro Preda, pelo infinito apoio e compreensão e ainda, por estar ao meu lado em todos os momentos, me ajudando nos momentos em que o trabalho e os estudos muito exigem. Sem você a meu lado eu nada seria!

A meu filho Eduardo Rodrigues Preda e a minha filha Elisa Rodrigues Preda por compreenderem que meu tempo com eles era restrito e ainda torná-lo sempre maravilhoso em cada segundo.

A todos meus familiares que me incentivaram a lutar sempre, com honestidade e humildade.

A meu irmão e herói, Alan Kardec Preda, por sempre me incentivar nos estudos, estando ao meu lado nos bons e maus momentos de minha vida. Aqui vai um sonoro obrigado.

A meu amigo, Leonilsom Gomes de Souza, por sempre me apoiar.

A todos meus colegas de Profmat, pela colaboração e apoio.

A todos professores do Profmat, para tornar as sextas feiras, de 2018 e 2019 encontros de muitíssima qualidade a cada aula.

Ao meu colega de trabalho, professor, amigo e orientador Prof. Dr. Mário José Souza pelas sábias orientações e confiança em meu trabalho e por sempre me mostrar pontos a serem trabalhados ou questionados em cada aula, em cada orientação.

A todos amigos e colegas dos colégios pelos quais passei: A todos amigos e colegas dos colégios nos quais ainda laboro: Agostiniano, Dinâmico, Fractal, Santo Agostinho, Princípios e Teo também pelo apoio, incentivo e colaboração.

E por último, porém não menos importante, postumamente a meus pais Osvaldo Preda e Eroní Margarida Preda, gostaria de dizer que sem eles eu nunca teria chegado tão distante.

A você MÃE, MEU ETERNO MUITO OBRIGADO POR TUDO. EU TE AMO!!

A todos que direta ou indiretamente me ajudaram e tornaram meu sonho possível, obrigado!

Parafraseando Isaac Newton:

“Se cheguei até tão distante foi porque me apoiei no ombro dos gigantes.”

Resumo

Este trabalho tem como objetivo a busca por uma relação entre a probabilidade e os modelos de genética populacional utilizados no Ensino Médio e algumas relações que podem ocorrer em uma sala de aula.

Metodologicamente apresentamos o trabalho e focamo-nos no papel do professor que busca em outras áreas do conhecimento uma forma de aplicação de conhecimentos matemáticos, utilizando-se da interdisciplinaridade como uma interessante ferramenta em suas aulas.

Esta pesquisa comenta ainda sobre determinadas formas que o professor de matemática pode conduzir os questionamentos em uma sala de aula, aguçando e despertando o interesse do aluno para outras formas de entender a probabilidade, utilizando-se de uma parte da biologia como meio.

Traz também à luz das normas de educação brasileira, sobretudo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e em quais os aspectos que ela se apoia.

Em seguida, promove uma revisão de conteúdo em Binômio de Newton, Análise Combinatória e Probabilidade, assuntos que justificam a aplicação de nosso trabalho e que entendemos ser de grande importância para o aprendizados dos estudantes no ensino médio.

Na sequência, alguns exemplos da aplicação do trabalho são exibidos e algumas formas de abordar esses questionamentos no que tangem os estudos de genética populacional e a forma de fazer com que os alunos do segundo e terceiro ano no Ensino Médio percebam o conhecimento.

Como resultados, busca mostrar a partir das devolutivas dos alunos em sala de aula, que a produção de um conhecimento a partir de proposituras de problemas pode incentivar a descoberta e instigar a busca pelo conhecimento.

Para concluir, acreditamos que esta interação interdisciplinar tem a força de incentivar uma aproximação entre áreas do conhecimento às vezes tão distantes na visão do aluno.

Palavras-chave

Matemática, Genética, Biologia, Probabilidade, Ensino-Médio.

Abstract

This work aims to search for a relationship between the probability and the population genetics models used in high school and some relationships that can occur in a classroom.

Methodologically, we present the work and focus on the role of the teacher who seeks in other areas of knowledge a way of applying mathematical knowledge, using interdisciplinarity as an interesting tool in his classes.

This research also comments on certain ways that the mathematics teacher can conduct the questions in a classroom, sharpening and arousing the student's interest in other ways of understanding the probability, using a part of biology as a means.

It also brings in the light of Brazilian education standards, especially the National Common Curricular Base (BNCC) and on which aspects it is based.

Then, it promotes a content review in Newton's Binomial,Combinatory Analysis and Probability, subjects that justify the application of our work and that we understand to be of great importance for the students' learning in high school.

In the sequence, some examples of the application of the work are shown and some ways to approach these questions in what concerns the studies of population genetics and the way to make the students of the second and third year in High School realize the knowledge.

As a result, it seeks to show, from the students' feedback in the classroom, that the production of knowledge based on problem propositions can encourage discovery and instigate the search for knowledge.

To conclude, we believe that this interdisciplinary interaction has the strength to encourage an approximation between areas of knowledge that are sometimes so distant in the student's view.

Keywords

Mathematics, Genetics, Biology, Probability, High School.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Em nosso entendimento, o professor de matemática é o tradutor de uma linguagem universal, tendo a função de conectar seus alunos a modelos que poderiam ser percebidos por estes desde que fossem constituídos os conhecimentos preliminares. Trabalhando com seus alunos com o objetivo de incentivar a investigação, promover discussões e debates, auxiliando a identificar modelos e padrões sejam geométricos, sejam algébricos e, por conseguinte, a tomar decisões sobre quais caminhos são mais consistentes para elucidar os problemas percebidos ou propostos em sua aula, seja pelos alunos ou pelo livro didático.

Segundo [19] "Uma melhor compreensão das operações mentais, tipicamente utilizadas na resolução de um problema, pode em efeito influir favoravelmente nos métodos de ensino de matemática."

Diante deste contexto, o professor pode ser arguido por um aluno sobre a finalidade ou qual a importância daquele determinado conhecimento matemático ou ainda ser questionado acerca de onde aquele conhecimento explanado pelo professor possa ser usado em seu cotidiano. Tais perguntas, geralmente são formuladas como a seguir:

-"Isso serve pra quê professor?"
-"Onde ou quando eu vou usar isso professor?"

Acreditamos que nestas circunstâncias o professor tem um papel de extrema importância na construção do conhecimento do aluno, atuando como catalisador no processo de aprendizagem desse aluno. Além disso, o professor deve buscar constantemente por melhoria na capacitação profissional e estar plenamente inteirado das possibilidades de extensão do conhecimento que englobam fatos e acontecimentos da vida cotidiana do aluno. Sendo assim, abre-se uma oportunidade para se fazer uma explanação dessas finalidades, apresentando uma perspectiva sobre o que se espera conquistar com o conhecimento pretendido e suas aplicabilidades. Segundo Brandão:

> “A educação mistura-se com o dia-a-dia, com tudo que está ao nosso redor, com a necessidade e com a vida. Não há um único modelo de educação. A escola não é o único lugar onde ela acontece e, talvez, não seja sempre o melhor lugar. [...]A educação existe da família à comunidade” [4].

Dando força a essa forma de pensar, entendemos então que essas respostas devem ser devolutivas que instigarão a vontade de entender os detalhes daquele conhecimento. O que sugere uma postura completamente oposta daquela que se vê frequentemente apresentada por alguns companheiros de magistério, que, buscando fugir da discussão ou do debate, seja por comodismo, seja por não conseguir ultrapassar seus próprios limites, respondem de forma displicente e muitas vezes até grosseira, por interpretarem que o aluno o está desafiando ou colocando em cheque a necessidade de prestigiar aquele conhecimento trazido pelo professor. É muito comum escutarmos depoimentos de colegas professores ou dos próprios alunos que a resposta do professor foi:

-“Porque vai cair na prova!”
-“Porque está no livro!”
-“Porque vai cair no ENEM.”

Outras vezes em sala de aula somos arguidos sobre determinadas situações ou determinados exercícios que não conhecemos ou não sabemos como resolver, por tratar-se de uma forma muito específica de alguns conteúdos dos quais nós não estamos plenamente familiarizados. Neste momento vemos outra oportunidade, a de mostrar ao aluno que não somos donos de todas as respostas e que, assim como ele, temos que buscar o estudo, ou seja, não somos detentores de todo conhecimento e nem de todas as soluções, mais que podemos e devemos, a todo o momento, buscá-las. Segundo Varizo:

> “O professor se coloca diante da classe, não como aquele que sabe e vai mostrar a seus alunos como resolver, mas como aquele que, junto com a classe, vai procurar a solução do problema, fazendo com que os alunos usem sua capacidade de inventar, encorajando-os a estabelecer suas próprias conjecturas, as testar e ponderar suas próprias ações e a refutar aquelas que forem erradas ou inadequadas” [24].

Estamos convictos que uma postura um pouco mais humana e gentil neste momento pode trazer uma enorme contribuição para a formação desse aluno por dois motivos: o primeiro, que se mostra o sentimento de querer aprender cabe em todos os níveis de graduação e é o que nos tornará melhores em todos os assuntos sobre os quais nos debruçarmos e nos empenharmos em seu estudo. Segundo, que é a oportunidade de nos tornamos professores mais próximos do nosso aluno, desmistificando o professor como um ser supremo posto em um pedestal, o colocando como um amigo que, ao lado do aluno, está disposto a aceitar desafios e a desvendar problemas. Isso possui o condão de aproximar alunos e professor em uma identidade capaz de gerar professores melhores e alunos mais interessados no conhecimento que será abordado nas aulas de matemática.

Outro aspecto que está extremamente entrelaçado com esse modelo de comportamento, é que uma resposta mais humilde pode nos revestir de uma roupagem mais humana e menos mística, onde o professor é uma pessoa que galgou um conhecimento, com esforço e dedicação, não um ser iluminado dotado de uma inteligência superior a qual é inatingível pelo aluno. Sobre isso a professora [24], acima citada, muito contribuiu em nossa formação profissional enquanto professor de matemática.

Este trabalho tem por objetivo explanar e reforçar o argumento de que é possível uma forma abrangente de interação entre a matemática e outras partes do conhecimento científico, mais precisamente o biológico. Nossa pesquisa tem o objetivo de reforçar os alicerces que sustentam as pontes que unem fontes distintas do conhecimento onde é possível transitar livremente de uma área a outra sem nenhum constrangimento ou interferência. Ou seja, busca-se mais uma vez ressaltar que se o conhecimento verdadeiro, ele o é em todas as áreas, e sob todos os prismas, mesmo que estes prismas estejam em áreas distintas do conhecimento.

É muito importante evidenciarmos que trata-se de uma relação interdisciplinar entre assuntos do ensino médio, onde a matemática e a biologia se juntam para adquirir benefícios mútuos, de onde tira-se a ideia de que estas disciplinas relacionam-se de forma simbiótica, fazendo uma pequena alusão à relação de simbiose[1], muito embora sabemos que tal relação é observada apenas em seres vivos.

Esse trabalho também tem a pretensão de ter a força de romper com argumentos que segregam importantes áreas do conhecimento. Por várias vezes encontramos aqueles que acreditam que se um aluno é bom em matemática então ele só vai gostar de física ou química e ainda terá total repúdio por biologia ou ainda que, se o aluno gosta de biológicas ele então vai detestar a matemática. É importante lembrarmo-nos das

[1]A simbiose pode ser definida como uma associação a longo prazo entre dois organismos de espécies diferentes seja essa relação benéfica para ambos os indivíduos envolvidos ou não. No meio científico ainda não há um consenso sobre a definição correta do termo simbiose[27].

contribuições de vários matemáticos que destacaram-se também em outras áreas do conhecimento com suas pesquisas, tais como: Leonardo da Vinci, Leonhard Euler, Blaise Pascal, e muitos outros que tiveram larga contribuição não só na matemática como também em muitos outros campos do conhecimentos.

Em nossa pesquisa buscamos mostrar que a matemática e a biologia estão conectadas sob vários aspectos e também em vários pontos, estas áreas são aliadas e se ajudam em uma sala de aula para explicar determinados fenômenos. Tal interação interdisciplinar pode funcionar também como as respostas para os questionamentos acerca da finalidade de determinados assuntos, como mencionamos anteriormente. Por conseguinte, um professor capaz de mostrar tais conexões poderá despertar um grande interesse em suas aulas até em alunos que se encontravam distantes e indiferentes aos conteúdos e aos problemas matemáticos apresentados.

Um dos pontos fortes para a escolha do tema trabalhado são justamente a receptividade e as devolutivas dos alunos em sala de aula ao apresentamos esta forma de abordar os conteúdos de probabilidade. Quando mostramos a conexão existente entre a probabilidade e os assuntos de biologia, no caso, genética populacional que eles estão estudando, nos parece que de uma forma geral, a sala mostra-se empolgada e bem participativa, o que tem sempre muito apreço pelos professores de um modo geral.

Sob outra perspectiva, pode ser o ponto de ignição para explodir o interesse em matemática de alunos que antes só tinham olhos para a biologia, ou fazer o caminho inverso, trazendo para seu lado a atenção tão pretendida pelos professores em uma sala de aula.

A respeito dos aspectos da interdisciplinaridade, apresentamos o que foi discutido no III CONEDU, Congresso Nacional de Educação:

> “[...]Ao analisarmos os estudos de Augusto e Caldeira (2007), percebemos que as autoras compreendem como sendo a troca e cooperação que envolvem a integração entre as disciplinas o que rompe as fronteiras que possam existir entre elas para que a complexidade do objeto de estudo se destaque. Para Lenoir (2001), a interdisciplinaridade compreende três aspectos fundamentais para sua efetivação. Primeiro, a interdisciplinaridade curricular, que se estabelece no âmbito administrativo; segundo, a interdisciplinaridade didática, que compreende o planejamento do trabalho interdisciplinar a ser realizado, aproximando os planos específicos de cada disciplina de modo a proporcionar a integração entre os conteúdos apresentados; e por fim, a interdisciplinaridade pedagógica, que contempla a prática que ocorre na sala de aula. Entretanto, no ambiente escolar, é notório que haja a necessidade dos conteúdos trabalhados serem apresentados de forma a estimular a criatividade do aluno e possibilitar a ação participativa dos mesmos propondo um ambiente em que haja a interação e a aproximação dos diversos conhecimentos adquiridos entre as várias disciplinas trabalhadas. Para tanto, faz-se necessário a elaboração de um plano de trabalho escolar com a participação dos professores de diversas áreas visando uma perspectiva interdisciplinar de ensino (SILVA e HUSSEIN, 2015).
>
> No entanto, a literatura apresenta alguns dos desafios propostos por professores com relação a prática interdisciplinar, tais como: a insegurança quanto a tratar de um conteúdo que abrange outra disciplina, a falta de tempo para estudo pessoal e com os colegas de outras disciplinas para que sejam realizadas estratégias interdisciplinares, a carga horária exaustiva também foi citada na literatura como alguns dos desafios enfrentados pelos professores (LUCK, 2001; FAZENDA, 2011). Concernente aos desafios enfrentados, o ato de estabelecer redes coletivas de estudo e trabalho pode contribuir para a socialização profissional e afirmação de valores próprios da profissão docente, em especial para pedagogia interativa e dialógica na produção de saberes, fato esse tão relevante para a prática interdisciplinar[...]” [8].

É claro que a postura e o comportamento do professor corroboram para a construção de uma identidade muito mais crítica e investigativa diante de vários temas a serem explorados pelo professor em uma aula interdisciplinar, mergulhado o docente em uma característica pedagógica muito mais eficiente e atenta a todos os temas que podem ser arguidos. Considerando que falarmos sobre a prática interdisciplinar, tendo em vista os desafios apresentados por professores para a realização de tal prática se faz necessário, o interesse em investigar a temática proposta em cada trabalho.

Aqui, este documento também tenta de forma objetiva apresentar os desafios e as possibilidades da interdisciplinaridade na prática docente amplamente discutida na literatura.

Em [8], estão destacadas algumas características importantes e dentre elas destacamos a de superar da fragmentação do conhecimento dando lugar a uma forma mais ampla e única do conhecimento e ainda, a necessidade de diálogo entre os docentes das diversas áreas do conhecimento como condição de operacionalização da interdisciplinaridade na prática docente. A esse respeito temos o documento trazido pelo VI FIEPED que é o Forúm Internacional de Pedagogia, práticas interdisciplinares no ensino da matemática, por Rohr:

> "Pretende-se criar relações entre as disciplinas buscando o envolvimento, e comprometimento diante dos conhecimentos, para adquirir condutas e atitudes interdisciplinares. Para isso acontecer há a necessidade da criação de novos projetos, e principalmente mudança de pensamento por parte dos agentes no processo educacional, pois se passa de um modelo unitário e fragmentado para uma visão ampla com a contribuição de diversas ciências.
>
> A interdisciplinaridade vem sob uma perspectiva global de ensino para articular a aprendizagem. No caso da matemática, precisamos romper com alguns paradigmas impostos pela sociedade e historicamente constituídos.
>
> Nos dias atuais já está modificando-se a era da separação de matérias em áreas de conhecimento, em que nas aulas de matemática só aprende conceitos da área. Percebe-se que há uma completude de aprendizagem quando unimos mais campos da educação, proporcionando um ensino globalizado e totalizado, oferecendo situações problema do nosso cotidiano" [11].

A apresentação do conhecimento em nosso trabalho, vinculando a matemática e a biologia em sua parte de genética, ainda tem respaldo no que tange os benefícios de uma aprendizagem de maneira interdisciplinar. Assim temos que:

> “[...]infere que a aplicação do método interdisciplinar possibilita ao aluno tanto a aquisição de conhecimento teórico e prático para a solução de situação-problema, mediante as várias áreas da educação, como também a solução de questões de cunho intelectual. Assim, o método interdisciplinar contribui para a maior assimilação dos conteúdos por parte dos estudantes. A mesma autora ainda considera como sendo uma prática que visa compreender o processo de ensino e aprendizagem de modo que supera as barreiras entre as disciplinas, impostas pela estrutura curricular tradicional sendo a superação das divisões de departamentos, de grades, de saberes e das relações que envolvem todo o sistema educacional o primeiro ponto de partida para o sucesso dessa prática” [1].

É claro que, diante de todos esses novos paradigmas, a escola e a educação terão que ser repensadas. E nesse novo cenário os professores terão que estar cada vez mais preparados para discussões mais abrangentes, capazes de questionar e propor hipóteses em uma amplitude de áreas, buscando a prática da pesquisa e reflexão acerca dos conteúdos de outras disciplinas.

Corroborando com nossa estratégia de ensino, temos as teorias de resolução de problemas. Que foi muito trabalhada por vários pensadores atuantes em matemática como George Polya, defensor de uma matemática muito mais preocupada em ter um significado para aquele que aprende [19]. Em seu livro “A Arte de Resolver Problemas” publicado em 1950 que ganhou repercussão mundial, propôs a elaboração de um processo dividido em quatro etapas: 1) Conhecer e compreender o problema; 2) traçar uma estratégia de resolução; 3) executar o plano traçado; e 4) avaliar a solução obtida.

Em [19] é ressaltado a importância de o professor ter o domínio do conhecimento de sua área de formação e buscar ter a facilidade para resolver problemas o que, à medida que seu trabalhos se desenvolve, será transmitida a seus alunos. Esse aspecto está em plena consonância com nosso trabalho uma vez que temos o objetivo de aprimorar a forma de resolução de exercícios de probabilidade voltados para a biologia, bem com a resolução de exercícios de genética tratados sob o prisma da matemática. Assim o professor pode alicerçar a formação de um conhecimento atuando como o mediador em meio a esse processo, conduzindo a elaboração das respostas esperadas por meio de construções de perguntas e ainda pela propositura de problemas a serem investigados. A esse respeito temos este matemático como um dos maiores defensores de um método investigativo ou heurístico.

Assim nosso trabalho tem profunda relação com o método heurístico, que é a busca de estratégias e de conhecimentos que possam ajudar na resolução de problemas. A este respeito temos que a heurística é a arte de buscar maneiras ou caminhos de soluções de problemas a partir de uma abordagem criativa e investigativa de uma determinada situação. Deste modo nos é esclarecido:

> "Heurística, Heurética ou 'ars inveniendi' era o nome de um certo ramo de estudos, não bem delimitados, pertencimento à Lógica, à filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção" [19].

Em [19] nos é sugerido a estimular a metodologia de solução de problemas, se possível, com uma grande frequência, sustentando que, como é um processo de aperfeiçoamento, deve ser densamente praticado. Focando-se neste processo, o professor busca encorajar os alunos a pensarem por si mesmos, a trabalhar suas hipóteses e discuti-las com outros colegas, assim podendo defender suas ideias, ouvir outras e argumentar sobre o tema abordado.

Nossa pesquisa busca então a resposta para a seguinte pergunta:

> - "É possível, a partir de uma abordagem interdisciplinar entre a matemática e a biologia, mostrar que o professor pode utilizar de outra área do conhecimento para motivar seus alunos, mostrando que a probabilidade pode também ser aplicada em seus estudos de genética populacional em biologia?"

Neste trabalho primeiramente mostraremos os pontos em que podem ser aplicados de forma conjunta os conhecimentos matemáticos e biológicos, e posteriormente, quais os resultados percebidos nesta relação interdisciplinar.

Capítulo 1

O que diz a Base Nacional Comum Curricular

Definir os objetivos de toda educação não é uma tarefa fácil, porque ela não depende apenas da relação entre educador e educando, depende do seu país, sua cultura, da época em que se está vivendo e da religião; cada povo ministra a educação que acha necessária, seja ela para a vida cotidiana do indivíduo, seja ela para a sociedade. Por conseguinte, temos que nos apoiar em um conjunto de normas e diretrizes que norteiam e estruturam o ensino como um todo.

Em uma leitura sobre a Base Nacional Comum Curricular, temos a felicidade de notar que nossa forma de pensar e de interpretar os conhecimentos matemáticos conforme descreveremos aqui neste trabalho, estão em plena consonância com o que é estabelecido em [2].

Com isso, amplia a visão acerca do que é estabelecido sobre os conhecimentos inter-relacionados, de modo a possibilitar com que os alunos possam construir uma visão mais integrada da Matemática com a realidade que os cerca, embasando um conhecimento respaldado em um significado e em uma finalidade, o que é inegavelmente uma relação entre formas e fontes diversas do conhecimento, não só acadêmico, como também o conhecimento cotidiano. A esse respeito temos que:

> "Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade[...]. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros.
> Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum" [2].

Acerca de uma forma mais participativa de trabalhar com o aluno, onde este possa expor seu conhecimento e ainda este possa ser motivado a investigar sobre modelos e processos relacionados com a matemática, em [2] mostra-se mais uma vez, como um alicerce que ajuda a fundamentar e a sustentar este trabalho, entrando em consonância com nossa ideia que é a de desenvolver modelos e situações que possibilitem o aparecimento de um pensamento crítico e investigativo, buscando ainda o conhecimento de teorias e a propositura de estratégias criativas que possibilitem a resolução e a elucidação de problemas, propostos pelo professor que é um mediador do conhecimento. Neste contexto, aparecem as competências as serem buscadas e desenvolvidas que são elencadas como:

1. Desenvolver a forma de raciocinar;
2. Desenvolver formas de representações de modelos;
3. Comunicar-se para conseguir sugestões e buscar ideias e críticas;
4. Argumentar sobre suas ideias e críticas.

A esse respeito [2], na página 519, traz ainda:

> “[...]para o desenvolvimento de competências que envolvem o raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado.
>
> As competências que estão diretamente associadas a representar pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, é em especial nessa área que podemos verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio.
> Após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles. É nesse contexto que a competência de comunicar ganha importância. Nas comunicações, os estudantes devem ser capazes de justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros.
>
> Com relação à competência de argumentar, seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar” [2].

É importante salientar que neste documento tem-se a ideia de que alguns problemas encontrados em outras áreas do conhecimento como física, química, biologia, etc. podem ser trabalhados sob o prisma da matemática, corroborando com as explicações específicas de cada área, promovendo uma relação entre as demais áreas do conhecimento e a matemática, fazendo com que o aluno possa interligar conhecimentos e conectar explicações e, ainda, ampliando o leque de argumentos e recursos para solucionar determinadas situações problemas que serão propostas em uma sala. Como consequência, temos uma relação de ajuda recíproca em uma relação interdisciplinar entre a matemática e a biologia.

Diante disso, fica evidente que o aluno terá que reunir, no seu bojo de conhecimento, um conjunto de habilidades e de competências, que o tornará capaz de perceber modelos, criar conjecturas, raciocinar e tomar decisões sobre quais teorias poderão ser adotadas para embasar as soluções dos problemas matemáticos. Articulando-se na construção de conhecimentos que atuaram de forma novamente simbiótica para o aluno, uma vez que o aluno, ao mesmo tempo, busca conhecimento em teorias e em modelos para solucionar um determinado problema, cresce intelectualmente, e este crescimento intelectual, favorece e o conduz a novos desafios e a enfrentar problemas mais difíceis, em uma busca por superação de determinados limitações e de novos conhecimentos.

Neste ponto vê-se claramente outra forte conexão com nosso trabalho:

> "Assim, as habilidades previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa.
>
> Considerando esses pressupostos, e em articulação com as competências gerais da Educação Básica e com as da área de Matemática do Ensino Fundamental, no Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Relacionadas a cada uma delas, são indicadas, posteriormente, habilidades a ser alcançadas nessa etapa.
>
> As competências não têm uma ordem preestabelecida. Elas formam um todo conectado, de modo que o desenvolvimento de uma requer, em determinadas situações, a mobilização de outras. Cabe observar que essas competências consideram que, além da cognição, os estudantes devem desenvolver atitudes de autoestima, de perseverança na busca de soluções e de respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas, mantendo predisposição para realizar ações em grupo" [2].

Neste trabalho, mostraremos nos modelos apresentados situações que possibilitem o aparecimento de um pensamento crítico e investigativo, buscando ainda o conhecimento de teorias e propositura de estratégias criativas que possibilitam a resolução e a elucidação de problemas, e que serão executados esses pontos de conexão com [2], mostrando assim essa consonância com nosso ponto de vista. Com isso iremos observar que nosso objetivo foi alcançado.

Capítulo 2

Assuntos matemáticos preliminares

Para mostrar a relação entre a probabilidade e os modelos de genética populacional utilizados no ensino médio apresentaremos a seguir as preliminares matemáticas necessárias. Para mais detalhes sobre o assunto indicamos os livros *Probabilidade e Estatística* [15] e *Probabilidade: Aplicações à Estatística* [16].

2.1 O triângulo de pascal e suas propriedades

2.1.1 Fatorial

É comum, nos problemas de contagem, calcularmos o produto de uma multiplicação cujos fatores são números naturais consecutivos. Para facilitar esse trabalho, vamos adotar um símbolo chamado *fatorial*.

Definição 2.1.1. *Sendo n um número inteiro maior que 1, define-se fatorial de n como o produto dos n números naturais consecutivos de n a 1. Indica-se n! (Lê-se: n fatorial ou fatorial de n).*

$$n! = n \cdot (n - \mathbf{1}) \cdot (n - \mathbf{2}) \cdot (n - \mathbf{3}) ... (n - (n - \mathbf{1})) \tag{2.1}$$

Sendo $n \in \mathbb{N}$ *e* $n > 1$.

De acordo com a definição: $2! = 2 \cdot 1 = 2$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Observações:

1. Podemos escrever para qualquer n ($n \in \mathbb{N}$) e $n \geq 2$: $\mathbf{n! = n(n{-}1)!}$

   Observe na igualdade $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, temos $8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!}$.

   Assim $8! = 8 \cdot 7!$.

2. Vamos entender o conceito de fatorial de n para $n = 1$ e $n = 0$. Em cada extensão, deve-se conservar a propriedade $n! = n \cdot (n-1)!$

$$
\begin{aligned}
\text{Se } n = 2 &\rightarrow n \cdot (n{-}1)! \\
&\rightarrow 2! = 2 \cdot (2-1)! \\
&\rightarrow 2! = 2 \cdot 1! \\
&\rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \text{ (dividindo os dois membros por 2)} \\
&\rightarrow 1 = 1! \text{ ou } 1! = 1 \\
&\rightarrow 1 = 1! \text{ ou } 1! = 1 \\
\text{Se } n = 1 &\rightarrow n! = n \cdot (n{-}1)! \\
&\rightarrow 1! = 1 \cdot 0! \\
&\rightarrow 1 = 1 \cdot 0!
\end{aligned}
$$

Para que essa igualdade seja verdadeira, definimos: $0! = 1$.

2.1.2 Número binomial

Definição 2.1.2. *Dados dois números naturais n e p, com $n \geq p$, chamamos de número binomial n sobre p, indicado por $\binom{n}{p}$, ao número definido por:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n{-}p)!} \tag{2.2}$$

Ao número n chamamos de **numerador** do binomial, e ao numero p, **denominador** do binomial.

Da Definição 2.1.2, decorre que:

Para $p = 0$, temos:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$$

Para $p = 1$, temos:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)}!}{1! \cdot \cancel{(n-1)}!} = n$$

Para $p = n$, temos:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

Definição 2.1.3. *Dois números binomiais são ditos complementares se possuírem o mesmo numerador e a soma de seus denominadores for o numerador. Dessa forma temos que os números binomiais* $\binom{n}{p}$ *e* $\binom{n}{n-p}$ *são complementares.*

$$\binom{n}{p} \; e \; \binom{n}{n-p}$$

.

Propriedade 2.1.2.1. *Dois números binomiais complementares são iguais:*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Demonstração.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot [n-(n-p)]!}$$

$$\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

$\square$

Vamos colocar os números binomiais $\binom{n}{p}$ em linhas e colunas de modo que os de mesmo numerador fiquem em uma mesma linha e os de mesmo denominador fiquem em uma mesma coluna. Substituindo-se cada número binomial pelo seu valor, obtemos o triângulo da direita que recebe o nome de Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{lllllllclllllll}
\binom{0}{0} & & & & & & & \longrightarrow & 1 & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \longrightarrow & 1 & 1 & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \longrightarrow & 1 & 2 & 1 & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \longrightarrow & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \longrightarrow & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & \longrightarrow & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} & \longrightarrow & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

2.1.3 Propriedades do triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal apresenta várias propriedades. Vejamos algumas delas.

Propriedade 2.1.3.1. *Os números das extremidades de qualquer linha do triângulo de Pascal são iguais a 1, isso porque* $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. *Como demonstrado na seção 2.1.2.*

Propriedade 2.1.3.2. *Em uma mesma linha dois binomiais equidistantes dos extremos são iguais por se tratarem de binomiais complementares. Considere, como exemplo, a sétima linha apresentada abaixo.*

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Propriedade 2.1.3.3 (Relação de Stifel)**.** *A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento situado abaixo do segundo elemento somado.*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Demonstração.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$\frac{n!}{p! \cdot (n{-}p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \cdot (n{-}p{-}1)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot (n+1{-}p{-}1)!}$$

$$\frac{(p+1) \cdot n! + (n{-}p) \cdot n!}{(p+1)! \cdot (n{-}p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot (n\cancel{+1}{-}p\cancel{-1})!}$$

$$\frac{\cancel{pn!} + n! + nn! \cancel{-pn!}}{(p+1)! \cdot (n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)! \cdot (n{-}p)!}$$

$$\frac{n! + n \cdot n}{(p+1)! \cdot (n{-}p)!} = \frac{(n+1)}{(p+1)! \cdot (n{-}p)!}$$

□

No triângulo de Pascal, temos então:

$\binom{0}{0}$						1					
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					1	1				
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				1	2	1			
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			1	3	3	1		
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		1	4	6	4	1	
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	1	5	10	10	5	1
$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$			$\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$			$3 + 3 = 6$			$4 + 1 = 5$		

Dessa forma é possível construir todo o triângulo de Pascal de maneira prática apenas utilizando a **Relação de Stifel**.

Propriedade 2.1.3.4 (Teorema a Linha)**.** *A soma dos elementos da linha de numerador n é igual a 2^n. Vejamos:*

$$
\begin{array}{c|c}
\mathit{1} & \mathit{soma} = \mathit{1} = 2^0 \\
\mathit{1} \quad \mathit{1} & \mathit{soma} = \mathit{1} + \mathit{1} = \mathit{2} = 2^1 \\
\mathit{1} \quad \mathit{2} \quad \mathit{1} & \mathit{soma} = \mathit{1} + \mathit{2} + \mathit{1} = \mathit{4} = 2^2 \\
\mathit{1} \quad \mathit{3} \quad \mathit{3} \quad \mathit{1} & \mathit{soma} = \mathit{1} + \mathit{3} + \mathit{3} + \mathit{1} = \mathit{8} = 2^3 \\
\mathit{1} \quad \mathit{4} \quad \mathit{6} \quad \mathit{4} \quad \mathit{1} & \mathit{soma} = \mathit{1} + \mathit{4} + \mathit{4} + \mathit{4} + \mathit{1} = \mathit{16} = 2^4 \\
\mathit{1} \quad \mathit{5} \quad \mathit{10} \quad \mathit{10} \quad \mathit{5} \quad \mathit{1} & \mathit{soma} = \mathit{1} + \mathit{5} + \mathit{10} + \mathit{10} + \mathit{5} + \mathit{1} = \mathit{32} = 2^5 \\
\vdots & \vdots \\
\binom{n}{0} \ \binom{n}{1} \ \binom{n}{2} \ \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} & \mathit{Soma} \to \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n
\end{array}
$$

Podemos escrever essa soma de forma abreviada utilizando o símbolo de somatório (Σ), que indica a soma de um certo número de termos. Por exemplo:

$$\sum_{p=0}^{8} \binom{8}{p} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$$

De forma genérica, podemos demostrar a proposição acima aplicando o Princípio de Indução para n natural.

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Se $n = 0$ temos $S_0 = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$. Agora se $n = 1$ tem-se $S_1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$.

Suponhamos então que o resultado é válido para todo $n = 1, \cdots, k$, isto é, $S_k = 2^k$. Mostraremos então que o mesmo é válido para $n = k + 1$, ou seja,

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}.$$

Temos que $\binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{K+1}{k+1}$. Aplicando pela relação de Stifel, Propriedade 2.1.3.3, nas parcelas da soma que estão entre a primeira e a última parcela, e utilizando o fato de que $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$, tem-se que

$$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} + \binom{k}{k}.$$

Reescrevendo,

$$S_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k}.$$

Ou seja, $S_{k+1} = 2S_k$ e como por hipótese de indução vale que $S_k = 2^k$ concluímos que $S_{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Assim a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se também uma relação análoga para a soma dos termos de uma coluna do Triângulo de Pascal. Ela afirma que:

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+3}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$

2.1.4 Estudo do binômio de Newton

Uma aplicação do cálculo combinatório é o desenvolvimento da potência n-ésima do binômio $(x + a)$. Observe os seguintes desenvolvimentos da potência $(x + a)$.

$$n = 0 \to (x+a)^0 = 1 \to (x+a)^0 = \binom{0}{0}a^0x^0$$

$$n = 1 \to (x+a)^1 = 1x + 1a \to (x+a)^1 = \binom{1}{0}a^0x^1 + \binom{1}{1}a^1x^0$$

$$n = 2 \to (x+a)^2 = 1x^2 + 2ax + 1a^2 \to (x+a)^2 = \binom{2}{0}a^0x^2 + \binom{2}{1}a^1x^1 + \binom{2}{2}a^2x^0$$

$$n = 3 \to (x+a)^3 = 1x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + 1a^3 \to (x+a)^3 = \binom{3}{0}a^0x^3 + \binom{3}{1}a^1x^2 + \binom{3}{2}a^2x^1 + \binom{3}{3}a^3x^0$$

$$n = 4 \to (x+a)^4 = 1x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3 + 1a^4 \to (x+a)^4 = \binom{4}{0}a^0x^4 + \binom{4}{1}a^1x^3 + \binom{4}{2}a^2x^2 + \binom{4}{3}a^3x^1 + \binom{4}{4}a^4x^0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n}a^nx^0$$

De posse das considerações feitas chegamos ao seguinte resultado,

Teorema 2.1.1. *Dados $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a relação:*

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x^1 + \binom{n}{n}a^nx^0$$

Essa relação é conhecida como Fórmula do Binômio de Newton

Observações:

1. O desenvolvimento de $(x+a)^n$ possui $(n+1)$ termos;
2. Os expoentes de x decrescem de n até zero;
3. Os expoentes de a crescem de zero até n;

4. O expoente de a é igual ao denominador do coeficiente binomial e o expoente de x é igual à diferença entre o numerador e o denominador de tal coeficiente;

5. A soma dos expoentes das variáveis, em cada termo, é sempre n.

Usando o símbolo de somatório: $(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cdot a^p \cdot x^{n-p}$ (Desenvolvimento segundo os expoentes decrescentes de x).

2.1.5 Estudo do termo geral do binômio de Newton $(\mathbf{x}+\mathbf{a})^{\mathbf{n}}$.

Observe o desenvolvimento: $(x+a)^n =$

1º termo: $T_1 = T_{0+1} = \binom{n}{0} a^n \cdot x^0 = 1a^n$

2º termo: $T_2 = T_{1+1} = \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot x^1 = n(a^{n-1} \cdot x^1)$

3º termo: $T_3 = T_{2+1} = \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot x^2$

4º termo: $T_4 = T_{3+1} = \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot x^3$

$\vdots$

De maneira geral, um termo qualquer de ordem $k+1$ é dado por

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot x^k$$

Observação:
Para o desenvolvimento de $(x-a)^n = [x+(-a)]^n$

2.2 Análise combinatória

Nesta parte estudaremos Análise Combinatória, ferramenta de grande utilidade em nosso trabalho.

Para melhor compreensão a respeito do estudo de Análise Combinatória, podemos indicar [10], [14], [17], [9] e [13].

2.2.1 Princípio fundamental da contagem

É o princípio mais intuitivo de contagem, que consegue mostrar o número de possibilidades de um evento sem que, necessariamente seja preciso descrever todas elas.

Os exemplos analisados a seguir sugerem que, se um acontecimento é composto de n etapas sucessivas e independentes, de tal forma que:

- p_1 seja o número de possibilidades da 1ª etapa;
- p_2 seja o número de possibilidades da 2ª etapa;
- p_3 seja o número de possibilidades da 3ª etapa;
- $\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
- p_n seja o número de possibilidades da n-ésima etapa, então.

O número de possibilidades P de acontecimento se realizar é dado por:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n \ .$$

Esse é o princípio fundamental da contagem.

2.2.2 Arranjo simples

Neste modelo, notaremos que trata-se de uma extensão do Princípio Fundamental da Contagem para os casos em que não existem possibilidades de repetições de elementos escolhidos e que a diferenciação entre grupos pode se dar tanto pela ordem dos elementos no grupo, quanto pela natureza destes.

Com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, vamos formar todas as sequências possíveis de três elementos distintos:

(a,b,c) (a,b,d) (a,c,d) (b,c,d) (a,c,b) (a,d,b) (a,d,c) (b,d,c)

(b,a,c) (b,a,d) (c,a,d) (c,b,d) (b,c,a) (b,d,a) (c,d,a) (c,d,b)

(c,a,b) (d,a,b) (d,a,c) (d,c,b) (c,b,a) (d,b,a) (d,c,a) (d,b,c)

Tais sequências são chamadas de **arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três**. Isto é, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer **sequência** formada por três elementos distintos de I.

Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam ou pela **ordem** dos elementos ou pela **natureza** dos elementos que os compõem. Por exemplo:

- $(a, b, c) \neq (b, c, a)$ (**diferem pela ordem dos elementos**);
- $(a, b, c) \neq (a, b, d)$ (**diferem pela natureza dos elementos**).

O número de arranjos simples de quatro elementos distintos tomados três a três é indicado pelo símbolo $A_{4,3}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Devemos distribuir os quatro elementos do conjunto I em três casas, sem repetição:

$$A_{4,3} = \overbrace{\quad 4 \quad}^{1^{\text{o}} \text{ elemento}} \cdot \overbrace{\quad 3 \quad}^{2^{\text{o}} \text{ elemento}} \cdot \overbrace{\quad 2 \quad}^{3^{\text{o}} \text{ elemento}} = 24$$

A seguir apresentamos a definição de arranjo simples para todo número natural n.

Definição 2.2.1. *Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número tal que $p \leq n$. Chama-se **arranjo simples de p elementos de** I toda sequência formada por p elementos de I distintos.*

Consideremos a igualdade: $A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1)$

Multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o segundo membro dessa igualdade por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1)\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \cdots \cdot (n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Essa é a fórmula que calcula $A_{n,p}$ através de fatoriais.

2.2.3 Permutações simples

Neste modelo de contagem a diferenciação entre os grupos ocorre apenas pela ordem dos elementos que o compõe, uma vez que participam todos os elementos, não é possível portanto, ocorrer a diferenciação pela natureza.

Ao formar os números naturais de três algarismos distintos com os algarismos 4, 5 e 8, estaremos arranjando esses três algarismos três a três, sem repetição, assim:

$$458 \quad 584 \quad 485 \quad 845 \quad 548 \quad 854$$

Observe que dois quaisquer desses arranjos se diferenciam apenas pela ordem de seus elementos componentes, e não pela natureza desses elementos, pois todos os números são formados pelos mesmos algarismos 4, 5 e 8. Por isso, dizemos que cada um desses agrupamentos é uma **permutação simples** dos algarismos 4, 5 e 8.

Definição 2.2.2. *Seja $M = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ um conjunto com m elementos. Chama-se **permutação simples dos n elementos de M** todo **arranjo simples** desses n elementos tomados n a n.*

Cálculo do número de permutações simples de n elementos distintos

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações simples dos n elementos de I, que indicamos por P_n, é igual ao número de arranjos simples desses n elementos tomados n a n, isto é:

$$p_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!. \text{ Assim temos: } \mathbf{P_n = n!}$$

2.2.4 Combinações simples

Neste modelo de contagem cada grupo diferencia-se do outro apenas pela natureza dos elementos que o constituem, neste caso, a ordem dos elementos não pode promover diferenciações.

Dado o conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, vamos formar todos os subconjuntos de I com três elementos:

$$\{a, b, c\} \quad \{a, c, d\} \quad \{a, b, d\} \quad \{b, c, d\}$$

Tais subconjuntos são chamados de **combinações simples dos quatro elementos de I tomados três a três**. Ou seja, uma combinação simples de três elementos de I é qualquer subconjunto de I formado por três elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos e **não** pela ordem de apresentação desses elementos. Por exemplo:

- $\{a, b, c\} \neq \{a, b, d\}$ **diferem pela natureza dos elementos**;
- $\{b, c, d\} = \{c, b, d\}$ **a ordem dos elementos não altera o conjunto.**

Definição 2.2.3. *Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural tal que $p \leq n$. Chama-se **combinação simples de** p **elementos de** A todo subconjunto de A formado por p elementos.*

Cálculo do número de combinações simples de n elementos distintos tomados p a p.

Para efetuar este cálculo, vamos relacionar o número de combinações simples com o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Voltemos ao exemplo da subseção 2.2.4. As combinações simples dos elementos de $A = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três são $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, c, d\}$; $\{b, c, d\}$. Indicando por $C_{4,3}$ o número de combinações simples de 4 elementos tomados três a três, temos $C_{4,3} = 4$. Cada uma dessas combinações gera 3! arranjos simples dos quatro elementos a, b, c, d tomados três a três.

Observe:

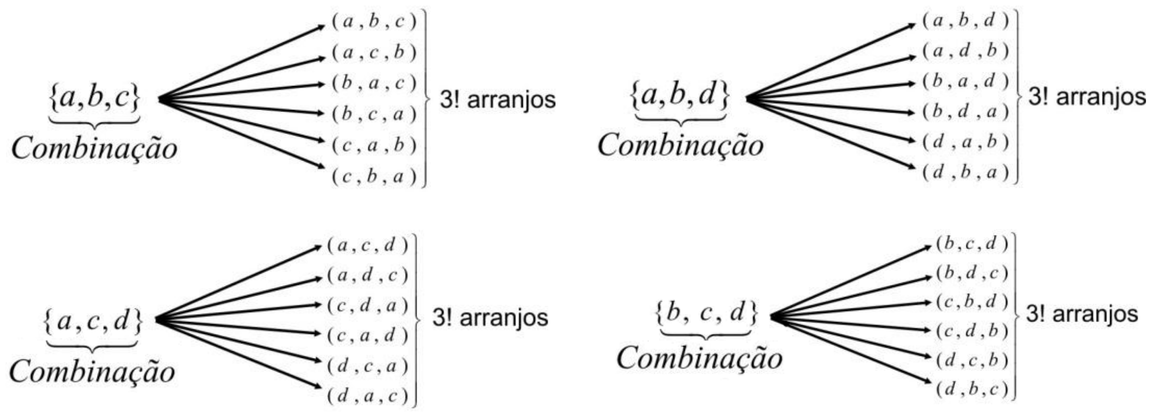

Figura 2.1: Diagrama de todas as possíveis combinações de $\{a, b, c, d\}$.

Assim, multiplicando por 3! o número $C_{4,3}$ obtém-se o número $A_{4,3}$, isto é: $C_{4,3} \cdot 3! = A_{4,3}$.

Generalizando esse raciocínio para os números naturais n e p, com $n \geq p$, obtém-se a fórmula para o cálculo do número de combinações simples, indicado por $C_{n,p}$.

Observe que:

$$C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p}$$

$$C_{n,p} \cdot p! = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Note que $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, ou seja, a combinação de n elementos tomados p a p, é numericamente igual ao número binomial de n sobre p.

2.2.5 Permutações com elementos repetidos

Anteriormente foi dito que o número de permutações de n elementos distintos é dado por: $\mathbf{P_n} = \mathbf{n}!$.

A seguir mostraremos como calcular o número de permutações com elementos repetidos. Esse cálculo pode ser entendido a partir do problema a seguir.

Qual é o número de anagramas da palavra **OSSOS**?

Um anagrama é uma espécie de jogo de palavras, resultando do rearranjo das letras de uma palavra ou expressão para produzir outras palavras ou expressões, utilizando todas as letras originais exatamente uma vez [26].

Se as 5 letras dessa palavra **OSSOS** fossem distintas entre si, teríamos 5! anagramas. Porém, ao permutar letras iguais, a palavra não se altera, por isso, concluímos que o número de anagramas é menor que 5!.

Para calcular esse número de anagramas, vamos colocar índices nas letras, considerando-as como elementos diferentes, isto é: $O_1S_1S_2O_2S_3$.

Em cada sequência dos elementos O_1, S_1, S_2, O_2, S_3, se permutarmos S_1, S_2 e S_3, entre si, obteremos $3! \cdot 2!$ sequências diferentes. Por exemplo:

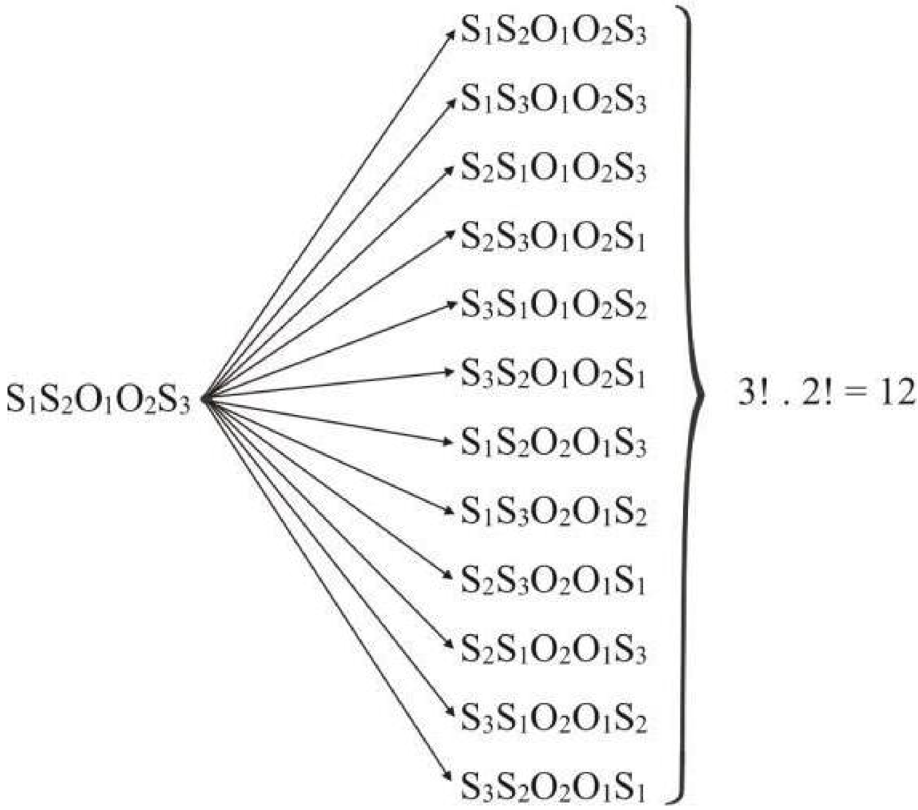

Figura 2.2: Anagrama da palavra *OSSOS*.

Porém, se eliminarmos os índices nessas 12 sequências, teremos o mesmo anagrama **SSOOS**.

Analogamente, se eliminarmos os índices nas 5! sequências dos elementos O_1, S_1, S_2, O_2, S_3, obteremos grupos de $3! \cdot 2!$ anagramas iguais. O número de grupos assim obtidos é exatamente o número de anagramas distintos da palavra **OSSOS**. Esse número é: $\frac{5!}{3!2!}$, ou seja, há 20 anagramas distintos da palavra **OSSOS**.

Assim podemos definir como a Permutação Com Elementos Repetidos com sendo todo agrupamento com repetição no qual cada grupo se difere do outro pela simples troca de posição entre elementos distintos. Neste caso a permutação entre elementos iguais não altera o grupo.

2.3 Estudo de probabilidade

Nesta parte faremos o estudo de probabilidade, conhecimento de grande importância em nosso trabalho.

Para melhor compreensão a respeito do estudo de Probabilidade, podemos indicar [10], [14], [17] e [9].

2.3.1 Experimento aleatório

Um experimento é aleatório ou não determinísticos quando estiverem presentes as seguintes características:

1. O experimento pode ser repetidos por um número determinado de vezes em condições semelhantes;
2. São conhecidos todos o possíveis resultados do experimento;
3. O resultado de cada experimento não pode ser determinado antes de sua ocorrência.

Exemplos:

- Lançar 3 moedas e observar as faces voltadas para cima;
- Retirar 1 carta de 1 baralho com 52 cartas e observar o seu naipe;
- De uma urna contendo 4 bolas brancas e 5 vermelhas, retirar 1 bola e observar sua cor;
- Abrir 1 livro ao acaso e depois observar os números das duas páginas.

2.3.2 Espaço amostral

Espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer num experimento aleatório. Esse conjunto será indicado pela letra S ou U.

Exemplo: Quando se lançar 2 moedas e se observarem as faces voltadas para cima, sendo as faces da moeda cara (c) e coroa (k), o espaço amostral do experimento é:

$S = \{(c, c), (c, k), (k, k), (k, c)\}$ onde o número de elementos do espaço amostral $n(S)$ é igual a 4.

2.3.3 Evento

Evento (E) é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Muitas vezes um evento pode ser caracterizado por um fato.

Exemplo: No lançamento de 2 moedas.

1. E_1: aparecem faces iguais. Portanto $E_1 : \{(c,c),(k,k)\}$. Neste caso, o número de elementos do evento E_1 é $n(E_1) = 2$.

2. E_2: aparece cara em pelo menos 1 face. Portanto $E_2 : \{(c,c),(c,k),(k,c)\}$ Neste caso, o número de elementos do evento E_2 é $n(E_2) = 3$.

   Analisaremos alguns eventos particulares, através de exemplos.

3. Evento certo: evento que possui os mesmos elementos do espaço amostral, ($E = S$).

   Exemplo E_3: a soma dos resultados nos 2 dados é menor ou igual a 12.

4. Evento impossível: evento igual ao subconjunto vazio do espaço amostral.

   Exemplo: E_4: Em uma dado de seis faces, se obter o número 7 no lançamento. $E_4 = \varnothing$.

2.3.4 Cálculo de probabilidade

Considerando um espaço amostral U, não-vazio, e um evento E, sendo $E \subset S$, a probabilidade de ocorrer o evento E é o número real $P(E)$, tal que:

$$\boxed{P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} \text{ e } \leq P(E) \leq (1 \text{ ou } 100\%)}$$

Sendo U um conjunto equiprovável, ou seja, todos os elementos têm a mesma "chance" de acontecer.

$n(E)$: número de elementos do evento E;

$n(U)$: número de elementos do espaço amostral U.

Exemplo:

Lançando-se um dado, a probabilidade de sair um número ímpar na face voltada para cima é obtida da seguinte forma:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n(U) = 6$$

$$E = \{1, 3, 5\} \qquad\qquad n(E) = 3$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

2.3.5 Adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de um espaço amostral U equiprovável, finito e não-vazio.

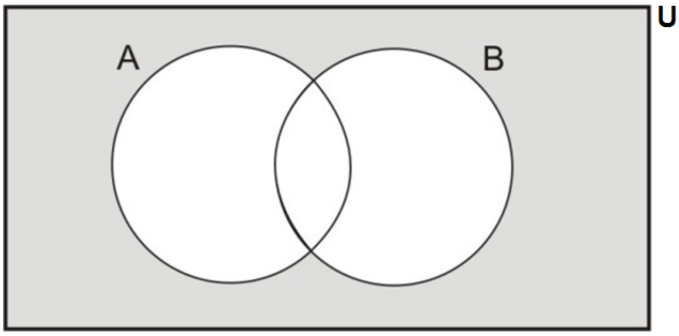

Figura 2.3: Representação dos eventos A e B dentro do espaço amostral U.

A probabilidade de ocorrer um elemento de A ou de B, indicada por $P(A \cup B)$, é:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(U)}$$

Como $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)}$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Exemplo: No lançamento de um dado, qual a probabilidade de o número obtido ser múltiplo de 2 ou de 3?

Múltiplos de 2: $A = \{2, 4, 6\}$;

Múltiplos de 3: $B = \{3, 6\}$

Podemos notar que $A \cap B \neq \varnothing$, então $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

* $P(A) = 3/6$

* $P(B) = 2/6$

* $P(A \cap B) = 1/6$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Portanto a probabilidade de ser múltiplo de 2 ou de 3 será de 2/3.

2.3.6 Eventos complementares

Seja U o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de U, chama-se evento complementar de A, que se indica por $\bar{A}$, o evento que satisfaz as seguintes condições:

$$A \cup \bar{A} = U \qquad\qquad A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Representando o complementar de A por meio de diagramas, temos:

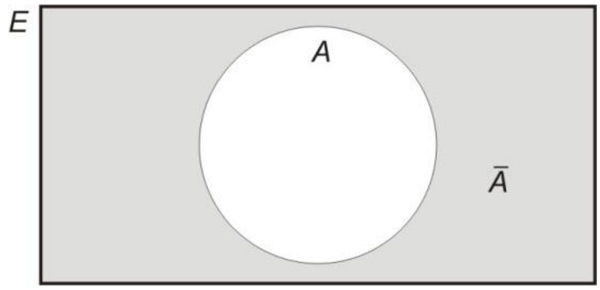

Figura 2.4: Representação do evento A e seu complementar $\bar{A}$.

O círculo representa o evento A e a região mais escura representa o complementar de A. Note que $\bar{A}$ é formado por todos os elementos de U que não pertencem a A.

$$n(A) + n(\bar{A}) = n(U)$$

Dividindo toda equação por $n(U)$, temos:

$$\frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(\bar{A})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)}$$

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1}$$

Exemplo: No lançamento de um dado equilibrado, qual a probabilidade se obter um número que não seja composto?

Considere o lançamento de um dado equilibrado um experimento aleatório em que os resultados possíveis podem ser observados em sua face superior. Seja o **evento** "sair um número composto" pode ser representado pelo seguinte conjunto:

$$E = \{4, 6\}$$

Portanto a probabilidade de ocorrência do evento (E) é dada por:

$$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Nesse caso, o **evento complementar de** E $(\bar{E})$ é o conjunto:

$$\bar{E} = \{1, 2, 3, 5\}$$

Isso porque o **evento complementar** de E é o conjunto formado por todos os elementos do espaço amostral que não pertencem a E. Nesse exemplo, portanto, se o número de elementos do **evento** $n(E)$ for dois, o número de elementos do evento complementar $n(\bar{E})$ será igual a quatro.

Para determinarmos a probabilidade de $\bar{E}$ podemos fazer:

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

$$P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Nestas condições, a probabilidade de se obter um número que não seja composto é de $\frac{2}{3}$.

2.3.7 Probabilidade condicional

Definição 2.3.1. *Denomina-se probabilidade de A condicionada a B, a probabilidade de ocorrência do evento A sabendo-se que vai ocorrer ou já ocorreu o evento B.*

$$\boxed{P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}} \tag{2.3}$$

Uma outra maneira de expressar a probabilidade condicional dos eventos é dividindo o numerador e o denominador do segundo membro por $n(U) \neq 0$:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(B)}{n(U)}} \rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Exemplo: No sorteio de um número natural de 1 a 10, sabe-se que ocorreu um número par. Qual é a probabilidade de que esse número seja maior que 4?

O espaço amostral desse experimento é: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $n(U) = 10$

Consideremos o evento A, formado pelos números pares de U, e o evento B, formado pelos números de E maiores que 4.

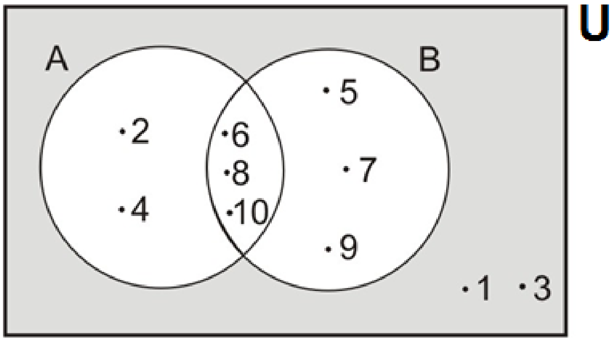

Figura 2.5: Representação do espaço amostral U, eventos A e B e suas interseções.

Desta forma temos que:

$$P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}. \qquad P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}. \qquad P(B \cap A) = \frac{3}{10}.$$

Logo,

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{5}.$$

Nestas condições, a probabilidade de o número ser maior que 4 dado que é par é de $\frac{3}{5}$.

2.3.8 Eventos independentes

Definição 2.3.2. *Dados dois eventos, A e B, são ditos independentes quando a probabilidade do evento A condicionado a B "$P(A/B)$" é igual a própria probabilidade de A "$P(A)$", dessa forma teremos:*

$$\begin{gathered}\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A/B) \\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Generalizando, se um acontecimento Δ é composto por vários eventos sucessivos e independentes, de tal modo que:

- O 1º evento é A e sua probabilidade é $P(A)$;
- O 2º evento é B e sua probabilidade é $P(B)$;
- O 3º evento é C e sua probabilidade é $P(C)$;

  $\vdots$

- O K-ésimo evento é K e sua probabilidade é $P(K)$.

Então a probabilidade de que o evento $A, B, C, \cdots, K$ ocorram nessa ordem é:

$$\boxed{P(\Delta) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot \ \cdots \ \cdot P(K)}$$

Exemplo: Em uma gaveta temos 15 camisas, das quais, cinco são de gola polo e o restante, de gola normal. Retirando duas camisas sucessivamente ao acaso e sem reposição, qual é a probabilidade de as duas camisas serem de gola polo?

Camisetas gola polo são 5.

Camisetas gola normal são 10.

Dessa forma, temos que a primeira retirada deve ser a polo e a segunda retirada deve ser polo, assim temos:

$$1^{\text{o}} \text{ polo e a } 2^{\text{o}} \text{ polo } \rightarrow P(1^{\text{o}} \text{ polo}) \cdot P(2^{\text{o}} \text{ polo}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}.$$

Portanto, a probabilidade de retirarmos duas polos será de $\frac{2}{21}$.

2.4 Estudo da distribuição binomial de probabilidade

Outro instrumento que muito vai ajudar em nosso trabalho é a distribuição binomial de probabilidade. Uma forma muito lógica de tratar as chances, como poderemos perceber.

Definição 2.4.1. *De acordo com o professor Morgado et al.[17] temos que, seja um experimento X composto por apenas dois eventos complementares do tipo sucesso e fracasso, seja k o número de sucessos obtidos na realização de n ensaios independentes deste experimento, neste caso, este é conhecido como ensaio de Bernoulli. Desta forma $n-k$, é o número de fracassos obtidos. Sejam ainda a probabilidade do sucesso igual a $p(S)$ e a probabilidade do fracasso $p(F) = 1-p(S)$, constantes em cada realização destes ensaios, assim:*

Diremos que X tem distribuição binomial com parâmetros n e $p(S)$, em que K é a probabilidade de sucesso em cada ensaio, se sua função de probabilidade for dada por:

$$P(X) = \binom{n}{k} p(S)^k \cdot p(F)^{n-k} \tag{2.5}$$

Considerando-se esse experimento X, observa-se a probabilidade de ocorrer um evento $p(S)$ (sucesso), assim como o seu complementar $p(F)$ (fracasso ou insucesso), em n tentativas independentes. A probabilidade de ocorrerem k sucessos e $n-k$ fracassos é dada pelo termo geral do binômio de Newton $[p(S) + p(F)]^n$.

$P(X) = \binom{n}{k} p(S)^k \cdot p(F)^{n-k}$	sendo $p(S)$ a probabilidade de sucesso em k tentativas e $p(F) = 1-p(S)$ a probabilidade de fracasso.

Considerações:

- "Sucesso" e "fracasso" aqui apenas representam ocorrência que se excluem e se completam;
- Se ocorre um sucesso, não ocorre um fracasso, e vice-versa, ou seja, são eventos complementares e mutuamente exclusivos;
- A probabilidade do sucesso e do fracasso permanecem sempre constantes em cada um das n tentativas.

Usaremos esses argumentos matemáticos para trabalhar algumas situações trazidas pela biologia.

Para melhor compreensão a respeito do estudo da probabilidade podemos indicar [17], [16], [18] e [15].

Capítulo 3

Conceitos de genética populacional que utilizam os conhecimentos da probabilidade

É importante dizer que este trabalho não tem a pretensão de ser a base de conhecimentos de biologia e sim tenta mostrar uma interseção entre esses conhecimentos a partir da visão de um professor de matemática.

A parte da Biologia conforme tratam [22], [3] e [12] que estudam a distribuição e alterações nas frequências de alelos devido a intervenção de elementos como a seleção natural, a derivação genética, as características evolutivas atuando como forças interventoras e ainda a presença de mutações. É também por meio dessa genética populacional que se busca explicar alguns fenômenos como a especiação de alguns grupos e a adaptação ao ambiente que determinados grupos apresentam em seus habitats.

Este ramo explica que a adaptação pode ser por meio de norma de reação vinculando à conceitos evolutivos extremamente modernos.

Os conceitos deste ramo da biologia apoiam-se no fato de que, levando-se em consideração determinadas questões em uma população, tais como a ausência de seleção natural e de mutação no habitat, ausência de migração de espécies e populações em grande número, a frequência dos alelos e dos pares genotípicos podem ser calculadas segundo fórmulas matemáticas de probabilidade e eventos complementares que, na biologia, são chamadas de fórmulas derivadas do Princípio do Equilíbrio de Hardy-Weinberg.

Considerada em locus, com apenas dois alelos segregando e observados em uma população diploide de reprodução sexuada, temos:

- Seja $f(A) = p$ a probabilidade de que um alelo sorteado ao acaso na população seja "A". Na biologia tal probabilidade é chamada de frequência relativa de "A";

- Seja $f(a) = q$ a probabilidade de que um alelo sorteado ao acaso na população seja "a". Novamente, aqui na biologia tal probabilidade é conhecida como a frequência relativa de "a".

Consideradas sem intervenção externas, essas probabilidades são mutuamente exclusivas, ou seja, $p + q = 1$, portanto em biologia diz-se que as frequências de "A" e "a" somam 100%.

No estudo desses alelos, utilizando de um método didático, temos que, "a" representa o alelo recessivo e "A", o alelo dominante. As frequências relativas de cada alelo também representam as respectivas frequências de gametas disponíveis para formar os indivíduos da próxima geração nesta população.

Para o par de alelos "A" e "a" temos três situações em relação à formação de zigotos após uma rodada de acasalamentos aleatórios, isto é, "A" e "a" podem formar três tipos de pares distintos:

- $f(AA) = f(A) \cdot f(A) = p \cdot p = p^2$ (par de alelos dominantes) que é a frequência de genótipos "AA";

- $f(Aa) = [f(A) \cdot f(a)] + [f(a) \cdot f(A)] = 2 \cdot p \cdot q$ (par de alelos distintos formando heterozigotos), que é a frequência de genótipos "Aa";

- $f(aa) = f(a) \cdot f(a) = q \cdot q = q^2$ (par de alelos recessivos) que é a frequência de genótipos "aa".

Note que os resultados obtidos para essa distribuição binomial é exatamente análoga à expansão do binômio de probabilidade $(p + q)^2$, ou seja,

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = 1.$$

As frequências dos três genótipos possíveis somam 100% e podem ser representadas pelo diagrama abaixo.

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Tabela 3.1: Representação dos possíveis genótipos.

$$f(AA) = f(A) \cdot f(A) = p \cdot p = p^2$$

$$f(Aa) = [f(A) \cdot f(a)] + [f(a) \cdot f(A)] = 2 \cdot p \cdot q$$

$$f(aa) = f(a) \cdot f(a) = q \cdot q = q^2$$

Para melhor compreensão a respeito do estuda da probabilidade podemos indicar [22], [3], [12] e [23].

Capítulo 4

Apresentação dos problemas de genética populacional que serão submetidas à análises matemáticas em probabilidade

Nesta parte do nosso trabalho mostraremos com são os problemas que podem ser discutidos de forma conjunta entre a biologia e a matemática, juntando as possibilidades e as variabilidades conhecidas na genética com os estudos da análise combinatória e probabilidade.

Ao direcionarmos um olhar para [2], em relação à abordagem dada a Resolução de Problemas, percebemos que ela aparece de alguma forma em todas as unidades temáticas do ensino fundamental - Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Tal abordagem está direcionada à aplicação de situações via Resolução de Problemas para alcançar habilidades, atitudes e competências desejadas.

Diferentemente do PCN, no ensino fundamental, não percebemos na versão final apresentada em [2] do ensino fundamental, já homologada, uma abordagem específica para a formalização de conteúdos matemáticos por meio da Resolução de Problemas enquanto metodologia e/ou estratégia de ensino.

Os problemas apresentados a seguir foram observados e discutidos com professores de biologia com os quais temos a imensa honra e prazer de trabalhar. Aqui quero deixar meu testemunho de que ao interpelar colegas de outras áreas, estes sempre se dispuseram prontamente a debater suas formas de explicar os pontos relativos à genética que são trabalhados e a forma com que são abordados nas salas de segundo e terceiro anos do ensino médio. Portanto os problemas que apontaremos a seguir foram trabalhados sob o ponto de vista dos professores de biologia e, é claro, da matemática.

Os problemas que serão aqui apresentados são aqueles que várias vezes utilizamos como exemplos para nossa explicações de probabilidade nas turmas de segundos e terceiros anos do Ensino Médio.

4.1 Problema 1

O professor de biologia propõe aos seus alunos o seguinte problema: Se dois indivíduos heterozigotos recessivos para uma determinada característica, como por exemplo, albinismo, tiverem 5 filhos, então qual a probabilidade de 3 serem de albinos e 2 apresentarem pigmentação normal, sabendo que para a criança ter fenótipo de albinismo ela deve ser necessariamente recessiva?

4.1.1 O problema segundo a óptica do professor de biologia

Se os indivíduos são heterozigotos recessivos para a característica citada, então eles são necessariamente Aa, desta forma, fazendo o cruzamento genético desses indivíduos temos:

	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Tabela 4.1: Representação dos possíveis cruzamentos genéticos.

Desta forma temos que:

- AA $\rightarrow$ Representa o indivíduo homozigoto dominante logo terá pigmentação normal;

- Aa $\rightarrow$ Representa o indivíduo heterozigoto e terá fenótipo de pigmentação normal;

- aa $\rightarrow$ Representa o indivíduo homozigoto recessivo logo terá fenótipo de albinismo.

Assim a probabilidade de o indivíduo nascer com pigmentação normal é 3/4 e a probabilidade de o indivíduo nascer com característica de albinismo é de 1/4.

Como são cinco filhos e dois terão pigmentação normal e três serão albinos, temos:

$$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 10 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{64} = \frac{45}{512}.$$

4.1.2 O problema sob o olhar do professor de matemática

Devemos perceber que para discutirmos a resolução de problemas matemáticos temos que entender que não trata-se apenas de acertar o gabarito ou a resposta de uma questão, trata-se de uma construção cognitiva de conhecimento, reunindo um conjunto de habilidades que o tornarão competentes para traçar estratégias de uma resolução. A este ponto entendemos que o resultado não deve ser implementado assim tão direta com respostas prontas na aprendizagem dos alunos, como também não deve ser desenvolvida de forma isolada, deve portanto vir como fruto de um labor cognitivo.

Neste ponto nos parece importante dizer que o professor de matemática tenha um conhecimento mínimo sobre a forma com a qual é aplicado o conhecimento matemático em outras áreas de conhecimento, neste caso em biologia e mais precisamente em genética. Pois bem!

O professor de matemática então pode fazer a seguinte interpretação implementando os conhecimentos matemáticos e biológicos acerca do exemplo tratado.

Seja a probabilidade de um indivíduo ter albinismo P(Ab) representado por A e a probabilidade de o indivíduo ter pigmentação normal P(N) = N então temos que:

$$P(Ab) = A = 1/4 \text{ e } P(N) = N = 3/4$$

Note, que são eventos complementares (uma observação importante para relembrar com os alunos tal ponto da matéria de probabilidade)

Fazendo a distribuição de todas as probabilidades do experimento desses cinco filhos:

$$\binom{5}{0}N^5 + \binom{5}{1}AN^4 + \binom{5}{2}A^2N^3 + \binom{5}{3}A^3N^2 + \binom{5}{4}A^4N + \binom{5}{5}A^5$$

Neste momento é importante observar com os alunos que a expansão binomial acima descrita é a expansão de $(N + A)^5$, portanto temos que:

$$(N + A)^5 = \binom{5}{0}N^5 + \binom{5}{1}AN^4 + \binom{5}{2}A^2N^3 + \binom{5}{3}A^3N^2 + \binom{5}{4}A^4N + \binom{5}{5}A^5$$

Onde os coeficientes numéricos obtidos na expansão binomial são aqueles que encontramos na sexta linha do triângulo de pascal, assim teremos:

$$(N + A)^5 = 1N^5 + 5AN^4 + 10A^2N^3 + 10A^3N^2 + 5A^4N + 1A^5$$

Para facilitar a identificação de cada termo na expansão binomial acima, denotaremos de P_1 a probabilidade correspondente ao primeiro termo obtido na expansão, ou seja, $P_1 = 1N^5$; P_2 a probabilidade correspondente ao segundo termo obtido na expansão, ou seja, $P_2 = 5AN^4$; e assim sucessivamente.

Podemos agora perceber que a pergunta feita pelo professor de biologia representa o quarto elemento da expansão binomial acima descrita, ou seja, a probabilidade de três filhos serem albino e os outros dois filhos com pigmentação normal é $P = 10A^3N^2$, substituindo pelos valores das probabilidades acima mencionados teremos:

$$P = 10 \cdot A^3 \cdot N^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{9}{64} \cdot \frac{1}{16} = \frac{45}{512}.$$

Neste momento é muito importante o professor mostrar que além do resultado esperado para a pergunta do professor de biologia, o aluno pode ver, como se manifestam todas as probabilidades desse experimento e, imediatamente, usando a expansão que está sendo exibida no quadro, fazer algumas perguntas do tipo:

> “Qual a probabilidade deste casal ter apenas um filho albino e os outros quatro de pigmentação normal?”

Deixe o aluno perceber que se trata do segundo termo obtido na expansão do binômio de Newton, ou seja, tal probabilidade é $P_2 = 5AN^4$, logo, com a substituição dos valores temos

$$P_2 = 5AN^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{81}{256} = \frac{405}{1024} \cong 39,55\%$$

Vemos aqui a importância de que essas perguntas possam funcionar como um reforço positivo, para que o conhecimento que agora se liga entre a matemática e a biologia, uma vez que, ao tempo que dá mais oportunidade para que o aluno traga para seu plano cognitivo a compreensão do triângulo de Pascal e de Binômio de Newton, que muitas vezes é apresentado de uma forma extremamente técnica e abstrata, totalmente desconectada de uma aplicabilidade, visualiza também a possibilidade de garantir com que o aluno reforce a confiança e a segurança sobre o assunto que está sendo abordado.

Neste ponto nosso trabalho revela-se em grande comunhão de ideias com o ensino e a aprendizagem através da Resolução de Problemas indo ao encontro do que [21] descreve, pois, de acordo com os estudos, o problema a ser proposto aos alunos precisa possibilitar que utilizem seus conhecimentos prévios, partindo de um ponto sólido o que concede aos alunos uma confiança e, de certo modo, certa empolgação, de forma que sejam capazes de escolher a estratégia que melhor se molda, utilizando-a para encontrar a solução e, assim, discutir, refletir e validar suas respostas.

Destacam-se em [21] que o Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas deve considerar os alunos “co-construtores” de seu próprio conhecimento, colocando aos professores a responsabilidade de conduzir esse processo. As autoras propõem dez etapas para a formalização de conteúdos matemáticos através da Resolução de Problemas, destacadas a seguir: “(1) Proposição do problema, (2) Leitura individual, (3) Leitura em conjunto, (4) Resolução do problema, (5) Observar e incentivar, (6) Registro das resoluções na lousa, (7) Plenária, (8) Busca do consenso, (9) Formalização do conteúdo, (10) Proposição e resolução de novos problemas”.

Neste momento, o aluno que só tinha olhos para a biologia vê a importância de entender os argumentos matemáticos e o aluno que só tem atenção para as disciplinas de exatas, pode ver que esse conhecimento manifesta-se também na biologia e que tanto a matemática quanto a biologia não afastadas ou mesmo isoladas uma da outra.

Uma pergunta também é muito comum e o professor deve estar preparado para essa abordagem.

> "De onde vêm os números que são chamados de coeficientes?"

Ou ainda:

> "Porque temos que multiplicar por 10? E por 5 a segunda pergunta?"

Materializa-se diante do professor então a oportunidade de resgatar um conhecimento que, a esta altura do desenvolvimento dos assuntos no ensino médio, com certeza já terá sido trabalhado. Trata-se da permutação com repetição ou ainda da combinação.

Como permutação com repetição, o professor pode explicar da seguinte forma: Peça para que os alunos calculem a probabilidade de saírem os três primeiros filhos albinos e os dois últimos filhos de pigmentação normal na pergunta do professor. Desse modo teríamos:

$$P_3 = A \cdot A \cdot A \cdot N \cdot N = A^3 \cdot N^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Então, imediatamente após o cálculo o professor de matemática lança o seguinte questionamento:

> "Mas, essa é a única forma desse experimento ocorrer, ou seja, essa é a única sequência possível?"

Aqui o aluno então deverá perceber que existem outras sequências para se obter três filhos com albinismo e dois com pigmentação normal, assim a pergunta é equivalente a quantas são as formas de permutar essas letras, sendo que "A" repete-se três vezes e "N" duas.

$$PR_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Ao empenhar-se, o aluno poderá perceber que o valor do coeficiente corresponde ao número de sequências possíveis para obterem três filhos com albinismo e dois filhos com pigmentação normal.

É novamente então o momento do reforço positivo, o professor devolve a pergunta:

"E no caso de ser apenas um filho albino, quantas sequências são possíveis?"

Fazendo então uma comparação ao exemplo anterior deste exercício, o aluno pode perceber que se trata de uma permutação de 5 elementos com a repetição de um "N" quatro vezes, assim teremos:

$$PR_5^{(4)} = \frac{5!}{4!} = 5$$

Depois de toda essa discussão entendemos que o aluno do Ensino Médio de 2º ano ou de 3º ano está pronto para ampliar essa visão, então neste momento devemos perguntar?

"E se forem seis filhos, qual a probabilidade de serem 3 com albinismo e 3 de pigmentação normal?"

Neste caso, temos a distribuição binomial das probabilidades do experimento dada da seguinte forma:

$$(A+N)^6 = \binom{6}{0}N^6+\binom{6}{1}AN^5+\binom{6}{2}A^2N^4+\binom{6}{3}A^3N^3+\binom{6}{4}A^4N^2+\binom{6}{5}A^5N+\binom{6}{6}A^6$$

Sendo P_4 três filhos albinos e três filhos de pigmentação normal, que é o quarto termo da expansão, temos:

$$P_4 = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot A^3\cdot N^3 = 20\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \cancel{20}\cdot\frac{3^3}{4^{\cancel{6}\cdot 5}} = 5\cdot\frac{3^3}{4^5} = \frac{135}{1024}.$$

Novamente é um momento muito importante para o aluno e muito gratificante para o professor, uma vez que ao perceber que consegue entender o que ocorre na genética e as aplicações das distribuições binomiais em probabilidade, ele fica completamente empolgado com o assunto, portanto é um aluno muito mais interessado tanto pela matemática quanto pela biologia.

4.2 Problema 2

Um casal onde o pai é recessivo para uma mutação genética, a polidactilia, ou seja, é um indivíduo normal, casa-se com uma mulher que tem o fenótipo da mutação, porém não se sabe se é homozigoto dominante ou heterozigoto. Nestas condições, se esse casal tiver quatro filhos, qual a probabilidade de um desses filhos apresentar essa mutação genética?

4.2.1 O problema segundo a óptica do professor de biologia

Temos que a polidactilia é uma manifestação caso haja a presença de um gene dominante P, ou seja, se o indivíduo for “PP” ou “Pp” ele irá apresentar a variação genética. Para que o indivíduo seja normal ou ainda não apresente a mutação, ele deve ser necessariamente recessivo “pp”. Assim temos as seguintes condições:

1º caso: pai homozigoto recessivo “pp” e mãe homozigoto dominante “PP”. Neste caso o cruzamento genético será da seguinte forma:

	P	P
p	Pp	Pp
p	Pp	Pp

Tabela 4.2: Representação do cruzamento genético para o 1º caso.

Assim, a probabilidade de o indivíduo apresentar a polidactilia é de 100%, uma vez que é uma característica que manifesta-se na presença de um gene dominante.

2º caso: pai homozigoto recessivo “pp” e mãe heterozigoto dominante “Pp”. Neste caso o cruzamento genético será da seguinte forma:

	P	p
p	Pp	pp
p	Pp	pp

Tabela 4.3: Representação do cruzamento genético para o 2º caso.

Assim, a probabilidade condicionada de o indivíduo apresentar a polidactilia é de 50%, uma vez que é uma característica que manifesta-se na presença de um gene dominante.

Portanto, a probabilidade de o indivíduo apresentar a variação genética P(Poli) é:

$$P(Poli) = \frac{1}{2}(100\%) + \frac{1}{2}(50\%) = \frac{3}{4} = 75\%$$

Portanto, se o casal tiver quatro filhos, temos:

$$P_4 = \binom{4}{1} \cdot P(Poli)^1 \cdot P(N)^3 = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4 \cdot \frac{3^1}{4^4} = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}$$

4.2.2 O problema sob o olhar do professor de matemática

Sejam $P(Poli)$ a probabilidade de um indivíduo apresentar a polidactilia e $P(N)$ a probabilidade do indivíduo ser normal, sejam ainda $P(Hom)$ a probabilidade de o indivíduo ser homozigoto dominante e $P(Het)$ a probabilidade de o indivíduo ser heterozigoto dominante. Assim no cruzamento genético podemos aplicar o princípio das probabilidades condicionais

$$P(Poli) = P(Hom) \cdot P(poli) + P(Het) \cdot P(poli) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Neste caso, a probabilidade de o indivíduo ser normal é dada por:

$$P(N) = 1 - P(Poli) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Para o caso de ter quatro filhos sendo que um apresenta o fenótipo da polidactilia temos que a distribuição binomial dessa probabilidade se dá da seguinte forma.

Sejam P a probabilidade de o indivíduo apresentar a polidactilia e N a probabilidade de ser normal, assim a distribuição binomial da probabilidade fazendo:

$$(P + N)^4 = \binom{4}{0} N^4 + \binom{4}{1} PN^3 + \binom{4}{2} P^2N^2 + \binom{4}{3} P^3N + \binom{4}{4} P^4$$

Desenvolvendo os números binomiais, temos:

$$(P + N)^6 = 1N^4 + 4PN^3 + 6P^2N^2 + 4P^3N + 1P^4$$

Atribuindo os valores das probabilidades:

$$(P+N)^4 = \underbrace{1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{1^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{2^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2}_{3^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)}_{4^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4}_{5^{\text{o}}\text{ Termo}}$$

Onde os termos representam as seguintes distribuições de probabilidades:

- *1º termo*: 4 filhos normais;
- *2º termo*: 3 filhos normais e um com polidactilia;
- *3º termo*: 2 filhos normais e 2 com polidactilia;
- *4º termo*: Um filho normal e 3 com polidactilia;
- *5º termo*: 4 filhos com polidactilia.

Desta forma, a probabilidade de o casal com quatro filhos ter apenas um destes apresentando a mutação genética é

$$P_4 = \binom{4}{1}\cdot P(P)^1\cdot P(N)^3 = 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 4\cdot\frac{3^1}{4^4} = \frac{3}{4^3} = \frac{3}{64}.$$

Novamente, neste instante da aula é importante que o professor intervenha com a apresentação de algumas perguntas a fim de instigar os alunos à conclusão das formas de se calcular outros casos além daquele apresentado na pergunta.

> “Nessas mesmas condições, qual a probabilidade de o casal possuir dois filhos com a polidactilia e os outros dois sem a mutação?”

Aqui se abre a oportunidade de o aluno intervir no questionamento mesmo de que por meio de uma simples analogia, onde entenderá que trata-se de mesmos elementos e o que ocorre é uma mera variação em suas frequências. Assim o aluno com um pequeno esforço perceberá tratar-se de um caso consecutivo ao da pergunta anterior e então, fazendo tal associação poderá responder:

$$P_5 = \binom{4}{2}\cdot P(P)^2\cdot P(N)^2 = 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6\cdot\frac{3^2}{4^4} = \frac{54}{4^4} = \frac{27}{128}.$$

Outra intervenção se faz oportuna! Neste momento o professor ao perceber que a maioria da turma agora se prontifica a responder e de forma assertiva e rápida, pode buscar um aprimoramento do entendimento apresentado, então pode relacionar com outras quantidades de filhos. Ou seja, poderá apresentar outra pergunta:

> "E se fossem cinco filhos, qual a probabilidade de serem 2 com a polidactilia e os outros três normais?"

Se os alunos responderem de forma pronta ficará nítido que estão inteirados da formação do triângulo de Pascal e de como usá-lo para perceber a distribuição de probabilidade. Do contrário se as respostas forem tímidas e pouco confiantes, o professor mais uma vez deve apresentar a distribuição binomial:

$$(P+N)^5 = \binom{5}{0}N^5 + \binom{5}{1}PN^4 + \binom{5}{2}P^2N^3 + \binom{5}{3}P^3N^2 + \binom{5}{4}P^4N + \binom{5}{5}P^5$$

$$(P+N)^5 = \underbrace{1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5}_{1^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{2^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{10\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{3^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{10\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2}_{4^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)}_{5^{\text{o}}\text{ Termo}} + \underbrace{1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5}_{6^{\text{o}}\text{ Termo}}$$

Onde os termos representam as seguintes distribuições de probabilidades:

- *1º termo*: 5 filhos normais;
- *2º termo*: 4 filhos normais e um com polidactilia;
- *3º termo*: 3 filhos normais e 2 com polidactilia;
- *4º termo*: 2 filhos normais e 3 com polidactilia;
- *5º termo*: Um filho normal e 4 com polidactilia;
- *6º termo*: 5 filhos com polidactilia.

E então pode destacar em que parte da expansão binomial está a resposta do questionamento anteriormente proposto, assim ele mostrará:

$$P_5 = \binom{5}{2} \cdot P(P)^2 \cdot P(N)^3 = 10 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 10 \cdot \frac{9}{4^5} = \frac{45}{512}.$$

E então, aproveitando-se do que já está exposto da distribuição poderá lançar mais perguntas a respeito dos cinco filhos!

Aproveitando-se de uma estratégia que já foi trabalhada, o aluno começa aqui a ganhar uma confiança para traçar sua própria estratégia de resolução, o que nos revela de maneira clara, a eficiência do método heurístico, e o quão importante ele se faz no processo de aprendizagem em matemática. Cabe aqui lembrar que esse método não está restrito apenas a parâmetros matemáticos como seu defensor e divulgador menciona, e aqui o vemos entrelaçado também com a genética em biologia.

4.3 Problema 3

De quantas formas distintas pode ser a pigmentação da pele de um indivíduo nascido de um pai com genótipo AaBbCc e mãe AaBbCc?

Neste caso o professor de matemática deve estar em contato com seu colega da biologia para saber se tal assunto já foi trabalhado, uma vez que a melhor compreensão acerca da herança poligênica da cor da pele só ocorrerá se o professor de matemática fizer o papel de embasar o assunto que já fora apresentado pelo seu par da biologia. Assim, o professor de biologia tem que ter apresentado o tema anteriormente.

4.3.1 O problema segundo a óptica do professor de biologia

Sob a óptica da biologia consideraremos três genes: **A**, **B** e **C**. Esses genes contribuem de forma a deixar a pele mais escura e possuem dominância incompleta sobre **a**, **b** e **c**, ou seja, **quanto mais genes dominantes o indivíduo apresentar, mais escura será a tonalidade de sua pele**. Dessa forma, uma pessoa com pele muito escura teria genótipo **AABBCC**, enquanto uma pessoa de pele muito clara teria **aabbcc**. Uma cor intermediária da pele seria observada em indivíduos **AaBbCc**.

A cor da pele, como já dito, apresenta alelos com efeito aditivo, sendo assim genótipos como AABbcc e AaBBcc teriam a mesma contribuição para a cor da pele, uma vez que apresentam três unidades que deixam a pele mais escura.

Para compreender melhor a herança poligênica da cor da pele apresentada no problema acima, vamos considerar os três genes: **A**, **B** e **C**, dominante e **a**, **b** e **c**, recessivos. Assim podemos propor o seguinte quadro de cruzamento envolvendo herança genética da cor da pele **entre indivíduos heterozigotos** (AaBbCc).

Nesse cruzamento, foram considerados três genes que afetam a cor da pele. Cada indivíduo heterozigoto apresenta três alelos que se relacionam com a pele escura (A, B e C) e três alelos para a pele clara (a, b e c). A primeira linha e a primeira coluna apresentam os gametas de cada um desses indivíduos.

	ABC	AbC	aBC	ABc	Abc	abC	aBc	abc
ABC	AABBCC	AABbCC	AaBBCC	AABBCc	AABbCc	AaBbCC	AaBBCc	AaBbCc
AbC	AABbCC	AAbbCC	AaBbCC	AABbCc	AAbbCc	AabbCC	AaBbCc	AabbCc
aBC	AaBBCC	AaBbCC	aaBBCC	AaBBCc	AaBbCc	aaBbCC	aaBBCc	aaBbCc
ABc	AABBCc	AABbCc	AaBBCc	AABBcc	AABbcc	AaBbCc	AaBBcc	AaBbcc
Abc	AABbCc	AAbbCc	AaBbCc	AABbcc	AAbbcc	AabbCc	AaBbcc	Aabbcc
abC	AaBbCC	AabbCC	aaBbCC	AaBbCc	AabbCc	aabbCC	aaBbCc	aabbCc
aBc	AaBBCc	AaBbCc	aaBBCc	AaBBcc	AaBbcc	aaBbCc	aaBBcc	aaBbcc
abc	AaBbCc	AabbCc	aaBbCc	AaBbcc	Aabbcc	aabbCc	aaBbcc	aabbcc

Tabela 4.4: Quadro de cruzamento de herança genética da cor da pele.

Nesse quadro podemos perceber a presença de sete diferentes fenótipos, na seguinte proporção: 1; 6; 15; 20; 15; 6; 1. Os indivíduos com genótipo AABBCC apresentam a pele mais escura, enquanto os indivíduos aabbcc apresentam pele mais clara. Quanto mais alelos referentes à cor escura uma pessoa apresenta (A, B ou C), mais escura é a pele. Esse esquema é conhecido com *Quadro de Punnett.* A **Escala de Fitzpatrick** [23] é um esquema de classificação numérica para cor da pele humana. Foi desenvolvido em 1975 por Thomas B. Fitzpatrick como uma forma de estimar a resposta de diferentes tipos de pele à luz ultravioleta (UV).

$$\begin{array}{rcc} P(aabbcc) & \longrightarrow & \text{Nível 1 (albino)} \\ P(Aabbcc, aaBbcc, \cdots, aabbCc) & \longrightarrow & \text{Nível 2} \\ P(AAbbcc, AaBbcc, \cdots, aabbCC) & \longrightarrow & \text{Nível 3} \\ P(AaBbcC, aaBbCC, \cdots, AABbcc) & \longrightarrow & \text{Nível 4} \\ P(AABbcC, aABbCC, \cdots, AABbcC) & \longrightarrow & \text{Nível 5} \\ P(AABBcC, AABbCC, \cdots, AaBBCC) & \longrightarrow & \text{Nível 6} \\ P(AABBCC) & \longrightarrow & \text{Nível 7 (negro)} \end{array}$$

4.3.2 O problema sob o olhar do professor de matemática

Note que a pigmentação da pele de um indivíduo é resultado de uma combinação de três pares de alelos que pode ser maiúsculos (dominante) ou minúsculos (recessivos) e que nestas condições pode ser combinados de seis formas distintas. Assim a quantidade de características que pode ser obtidas é apresentada pela quantidade de letras maiúsculas ou minúsculas que se manifestam nas características genéticas deste indivíduo. Desta forma temos:

Seja “G” o evento letra maiúscula e “p” o evento letra minúscula, como o par de alelos poderá conter apenas letras do tipo G ou p, temos que esses eventos são complementares e mutuamente exclusivos, com probabilidades iguais, ou seja, $P(p) = P(G) = 1/2$. Desta forma, fazendo a distribuição binomial das possibilidades temos:

$$(G+p)^6 = \binom{6}{0}G^6 + \binom{6}{1}pG^5 + \binom{6}{2}p^2G^4 + \binom{6}{3}p^3G^3 + \binom{6}{4}p^4G^2 + \binom{6}{5}p^5G + \binom{6}{6}p^6$$

$$(G+p)^6 = 1G^6 + 6pG^5 + 15p^2G^4 + 20p^3G^3 + 15p^4G^2 + 6p^5G + 1p^6$$

Desta forma, note que a tonalidade da cor da pele é dada de acordo com a quantidade de genes dominantes ou recessivos, assim, se todos forem dominantes (AABBCC) o indivíduo tem a pele negra, ao passo que se este tiver todos os genes recessivos (aabbcc) este terá a pele clara.

Assim, neste experimento existem sessenta e quatro formas destes gens se combinarem então a probabilidade de qualquer evento é dada pela divisão do número de casos favoráveis por 64.

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 2^6 = 64$$

Neste ponto podemos perguntar aos alunos qual a probabilidade de o indivíduo nascer com Nível 4 de pigmentação na escala de **Fitzpatrick**?

O aluno terá que perceber que para ser Nível 4, o indivíduo deverá possuir três genes dominantes e três recessivos. Assim

$$P(N_4) = \binom{6}{3} \cdot p^3 \cdot G^3 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

Portanto a probabilidade de o indivíduo nascer com Nível 4 de pigmentação será de 5/16.

O professor pode buscar outra forma de trabalhar a resolução desta probabilidade utilizando-se da seguinte maneira:

Primeiro pode pedir para que o aluno calcule a probabilidade de o indivíduo nascer com exatamente três genes recessivos e três genes dominantes, nesta ordem, assim temos:

$$P(3p, 3G) = p^3 \cdot G^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

Em seguida, o professor deve lançar outra pergunta. Deve então perguntar se esta é a única sequência possível para se ter seis genes sendo três recessivos e três dominantes?

Logo o aluno poderá perceber que existem várias sequências e que essa quantidade poderá ser calculada fazendo uma permutação de seis elementos sendo três "p" e três "G", assim teremos:

$$PR_6^{(3,3)} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20$$

Desta forma, teremos que a probabilidade de se ter um indivíduo com a pigmentação Nível 4 pode ser calculada fazendo:

$$P(N_4) = PR_6^{(3,3)} \cdot P(3p, 3G) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot p^3 \cdot G^3 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

Essa maneira de abordagem será muito interessante para nos apoiar na explicação de uma distribuição multinomial de probabilidade, o que ocorrerá quando possuírem 3 ou mais características.

Novamente o professor pode instigar o conhecimento e ainda buscar reforçar a compreensão com outra pergunta, a respeito da distribuição que está em voga.

> "Qual a probabilidade de o indivíduo nascer com Nível 6 de pigmentação na escala de **Fitzpatrick?**"

Aquele que já compreendeu o conteúdo certamente dará a resposta de pronto, mas é importante que toda a turma tenha a oportunidade de tentar a resposta, assim o professor deve deixar um tempo suficiente para que cada um experimente sua forma de interpretar.

É claro que a turma, valendo-se de uma comparação com a pergunta anterior, deve perceber que para ser Nível 6, o indivíduo deverá possuir cinco genes dominantes e apenas 1 recessivo. Assim

$$P(N_6) = \binom{6}{5} \cdot p^1 \cdot G^5 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}.$$

Portanto a probabilidade de o indivíduo nascer com Nível 4 de pigmentação será de 3/32.

Seria extremamente conveniente que o professor, depois de notar que toda a turma está acompanhando de forma clara e objetiva, buscasse outras formas de associar o raciocínio da probabilidade utilizando o exemplo que está pronto no quadro. Neste intuito pode-se perguntar:

> "Qual a probabilidade de um indivíduo não nascer albino?"

É a chance de buscar uma nova abordagem apoiando-se no conhecimento que já foi trabalhado anteriormente, assim, como mediador ou facilitador do conhecimento o professor, ao perceber que alguns não conseguiram notar qual a linha de raciocínio que devem utilizar, o professor pode auxiliar com outra pergunta:

> "Qual a probabilidade de um indivíduo nascer albino?"

Então o aluno pode perceber que voltando-se ao modelo anterior de perguntas e utilizando de analogia aos exemplos anteriores verá que:

$$P(\text{albino}) = P(N_1) = \binom{6}{0} \cdot p^6 \cdot G^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

Então qual seria a probabilidade de não ser albino? Esta é igual ao total de probabilidades existentes subtraído da probabilidade de ser albino, assim teríamos:

$$P(\text{Não ser albino}) = 1 - P(\text{albino}) = 1 - P(N_1) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

4.4 Problema 4

Na abordagem desse problema pode o professor buscar um novo modelo de raciocínio explorando agora uma distribuição multinomial, assim o professor pode usar de criatividade e perguntar sobre formas de interpretação dessa natureza. Aqui não colocaremos prisma do professor de biologia uma vez que nesta disciplina não se colocam mais que suas características complementares no Ensino Médio.

Sabendo que a probabilidade de um indivíduo nascer com olhos azuis é de 30%, de nascer de olhos castanhos é de 50% e de nascer de olhos pretos é de 20%, qual a probabilidade de um casal que deseja ter 5 filhos ter dois filhos de olhos azuis, dois de olhos castanhos e apenas um de olho preto?

Sendo a probabilidade de nascer de:

- Olhos azuis $P(Az) = 30\%$
- Olhos castanhos $P(Ct) = 50\%$
- Olhos pretos $P(Pr) = 20\%$

Uma maneira muito simples de buscar com que o aluno entenda esta forma de abordagem sobre a probabilidade é a seguinte:

Primeiro peça para que o aluno calcule a probabilidade de que tenha os dois primeiros filhos de olhos azuis, os dois filhos seguintes de olhos castanhos e o último filho de olhos pretos, assim teremos:

$$P\left[\underbrace{(2Az) \text{ e } (2Ct) \text{ e } (1Pr)}_{\text{Nesta Ordem}}\right] = P(2Az) \cdot P(2Ct) \cdot P(1Pr)$$

$$P\left[\underbrace{(2Az) \text{ e } (2Ct) \text{ e } (1Pr)}_{\text{Nesta Ordem}}\right] = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10}$$

$$P\left[\underbrace{(2Az)\text{ e }(2Ct)\text{ e }(1Pr)}_{\text{Nesta Ordem}}\right] = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 \cdot \frac{2}{10} = \frac{9}{2000}.$$

O segundo passo é perguntar se esta é a única sequência possível para estes filhos, e se não for, de quantas formas pode-se organizar esta sequência?

Assim o aluno perceberá que tratar-se de um caso de permutação com repetição e teremos cinco elementos sendo dois azuis, dois castanhos e um preto, assim teremos:

$$PR_5^{(2,2,1)} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{4} = 30$$

Por conseguinte, teremos

$$P[(2Az)\text{ e }(2Ct)\text{ e }(1Pr)] = PR_5^{(2,2,1)} \cdot P\left[\underbrace{(2Az)\text{ e }(2Ct)\text{ e }(1Pr)}_{\text{Nesta Ordem}}\right]$$

$$P[(2Az)\text{ e }(2Ct)\text{ e }(1Pr)] = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot P(2Az) \cdot P(2Ct) \cdot P(1Pr)$$

$$P[(2Az)\text{ e }(2Ct)\text{ e }(1Pr)] = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 \cdot \frac{2}{10}$$

$$P[(2Az)\text{ e }(2Ct)\text{ e }(1Pr)] = 30 \cdot \frac{9}{2000} = \frac{27}{200} = 13,5\%.$$

Portanto temos uma aplicação de probabilidade multinomial de uma forma mais tangível para o aluno.

Por todo exposto, temos a confiança de que nosso objetivo de mostrar que é possível uma abordagem interdisciplinar entre a matemática e a biologia capaz de, a partir de questionamentos e devolutivas motivadoras, aumentar o interesse em matemática dos alunos de segundo e terceiro anos do Ensino Médio, foi alcançado.

Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi mostrar a aplicabilidade da probabilidade, como facilitador e integrador das diversas formas de tratamento do assunto de genética e suas conexões no campo da biologia, sobretudo em genética populacional. Acreditamos que, com a demonstração dos teoremas de análise combinatória e as expressões voltadas para o cálculo de probabilidade, possamos trazer valiosas discussões para a sala de aula no ensino médio. Desse modo estamos contribuindo para facilitar e desmistificar o ensino deste assunto considerado difícil por muitos que ainda possuem uma visão segregada destas teorias.

Utilizando desta forma de abordar os assuntos em sala, por vários anos, estamos conseguindo uma extraordinária aceitação entre muitos alunos do segundo e terceiro anos dos Ensino Médio.

No decorrer do curso de probabilidade e de genética no Ensino Médio, um mesmo problema é abordado e resolvido de diferentes modos tanto pela matemática quanto pela biologia, mas isso não fica claro para os alunos que muitas vezes não conseguem relacionar as duas abordagens. Com a nossa atuação nas salas de ensino por vinte e cinco anos, tivemos oportunidade de perceber o valor de trabalhar estes assuntos de forma conjunta, fazendo que alunos que não tinham o entendimento ou que o possuía apenas de maneira isolada em cada área, pudessem perceber que uma matéria pode ajudar a outra.

Em nossas exposições sobre o tema nas escolas podemos verificar um aspecto sempre presente entre os discentes: o de um imenso entusiasmo quando percebem a ligação entre a matemática e a biologia, de modo que sempre passa a ver a probabilidade em distribuição binomial como uma ferramenta fundamental para o amplo entendimento dos casos da genética populacional.

O entendimento de análise combinatória e probabilidade são de grande importância para os alunos devido à sua larga utilização na Estatística, nos processos de contagem e de suas formas de avaliar a chances de determinados experimentos ou na ocorrência de determinados fenômenos. Assim, estes assuntos têm o condão de atuar como um instrumento de percepção da realidade na qual estamos lidamos no dia-a-dia.

Por tudo exposto, acreditamos que este trabalho contribuirá para uma compreensão mais ampla, melhor e segura dos assuntos aqui abordados tanto em probabilidade como também na genética, voltados, é claro, para os alunos do ensino médio. Também acreditamos que nossos colegas professores podem olhar melhor as oportunidades que outras disciplinas nos trazem.

Por fim desejamos que nossos colegas possam compartilhar dessa proposta e desfrutar da mesma alegria que experimentamos quando temos a oportunidade de aplicar esta proposta em uma sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] AUGUSTO, T. G. S.; CALDEIRA, A. M. A., *Dificuldades para a implantação de práticas interdisciplinares em escolas estaduais, apontadas por professores da área de ciências da natureza.* Investigações em Ensino de Ciências – V12(1), pp.139-154, 2007.

[2] BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 15 de abr. 2020.

[3] BEIGUELMAM, B., *Genética de Populações Humanas.* Ribeirão Preto: Editora SBG, 2008.

[4] BRANDÃO, C. R., *O que é educação.* São Paulo: Editora do Brasil S.A., 1985.

[5] BRASIL, *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, Lei 9394/1996, 1996. Disponível em: <https://www.puc-campinas.edu.br/midia/arquivos/2013/abr/proavi-lein-93941996.pdf>. Acesso em: 23 de dez. 2019.

[6] BRASIL, *Orientações Curriculares Para O Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, p. 81. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/bookvolume02internet.pdf>. Acesso em: 20 de jan. 2020.

[7] BRASIL, *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*, Secretaria de Educação Fundamental. MEC / SEF, 1998.

[8] CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, *Desafios e Possibilidades da Interdisciplinaridade na Prática Docente.* Editora Realize, 2016. Disponível em:

<http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV056_MD1_SA4_ID269_04082016093000.pdf>. Acesso em: 08 de jan. 2020.

[9] Dantas, C. A. B., *Probabilidade: Um Curso Introdutório.* 3 ed. rev. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008, pp. 15-165.

[10] Dante, L. R., *Matemática - Contexto e Aplicações.* Volume 2. São Paulo: Editora Ática, 2003.

[11] Forum Internacional de Pedagogia, *Práticas Interdisciplinares no Ensino da Matemática.* Editora Realize, 2014. Disponível em: <http://editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Modalidade_2datahora_24_05_2014_20_03_48_idinscrito_854_fc6e2dec5ac3915641228d9b1c09db2c.pdf>. Acesso em: 13 de fev. 2020.

[12] Hartl, D. L.; Clark, A. G., *Princípio de Genética de Populações.* 4 Ed. Editora Artmed, 2010.

[13] Hazzan, S., *Fundamentos da Matemática elementar: Combinatória e Probabilidade.* Vol. 5. 6 ed. Editora Atual, 1998.

[14] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio.* Volume 1 e 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[15] Lopes, P. A., *Probabilidades e Estatística.* Editora Reichmann & Affonso Editores, 1999.

[16] Meyer, P. L., *Probabilidade: Aplicações à Estatística Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho.* 2 ed. Rio de Janeiro, 1983.

[17] Morgado, A. C. O.; Carvalho, P. C. P.; Fernandez, P.; Pitombeira, J.B., *Análise Combinatória e Probabilidade: Coleção do Professor de Matemática.* 1 Ed. IMPA: SBM, 1991.

[18] Paiva, M. R., *Matemática: conceitos, linguagem e aplicações.* 1 ed. São Paulo, 2002.

[19] Polya, G., *A Arte de Resolver Probemas.* Editora Interciência, 1977.

[20] Polya, G., *Dez Mandamentos para Professores*, Revista do Professor de Matemática, 10, pp.2-10. Disponível em: <http://www.ifg.edu.br/matematica/images/donwloads/documentos/mandamentos.pdf>. Acesso em: 11 de Mar. 2020.

[21] Revista Boem, *Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas: alguns aspectos orientadores para a prática docente*. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/download/8895/6868>. Acesso em: 15 de abr. 2020.

[22] Silva, P. J. N., *Genética Populacional: Uma Perspectiva Evolutiva*. Createspace Independent Publishing Platform, 2014.

[23] Sociedade Brasileira de Dermatologia, *Classificação dos fototipos de pele*. Disponível em: <http://www2.sbd.org.br/cuidado/classificacao-dos-fototipos-de-pele/>. Acesso em: 29 de abr. 2020.

[24] Varizo, Z. C. M., *A Heuristica e A Resolucao de Problemas*. Boletim - Grupo de estudos e pesquisa em educação matemática, v. XI, n. 18, pp. 25-31, 1986.

[25] Varizo, Z. C. M., *O Livro didático Escolha e Uso*. Interação, v. 6, n. 1-2, pp. 157-165, 1982.

[26] Wikipédia, *Anagrama*, 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Anagrama>. Acesso em: 18 de fev. 2020.

[27] Wikipédia, *Simbiose*. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Simbiose>. Acesso em: 5 de jul. 2020.