Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Sociedade Brasileira de Matemática

Francinária Parente Ferreira

Análise Combinatória no Ensino Médio:
uma abordagem sem o uso de fórmulas

Juazeiro – BA
2013

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Sociedade Brasileira de Matemática

Francinária Parente Ferreira

Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas

Dissertação apresentada à Comissão Local do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº. Edson L. Araújo

Juazeiro – BA
2013

	Ferreira, Francinária Parente.
F383a	Análise combinatória no ensino médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas / Francinária Parente Ferreira. – – Juazeiro - BA, 2013.
	xiv, 80 f.: il. ; 29 cm.
	Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Campus Juazeiro - BA, 2013
	Orientador: Prof. Msc. Edson Leite Araujo.
	Inclui referências.
	1. Análise Combinatória – Ensino Médio. 2. Matemática – estudo e ensino. 3. Matemática - resolução de problemas. I. Título. II. Araújo, Edson Leite. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 511.6

UNIVERSIDADE FEDERAL DO
VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

Análise Combinatória no Ensino Médio: uma abordagem sem o uso de fórmulas

Por

Francinária Parente Ferreira

Dissertação aprovada em 18 de julho de 2013

Aníbal Livramento da Silva Netto

Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto
Examinador Interno- UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira

Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira

Examinadora Externa- UPE

Profa. Dra. Mônica Aparecida Tomé Pereira
Examinadora Externa- UNIVASF

Edson Leite Araújo

Prof. MSc. Edson Leite Araújo
Orientador- UNIVASF

Juazeiro-BA
2013

Dedico este trabalho:

Aos meus inesquecíveis avós Manoel Leandro Ferreira e Juvenal Pereira Neves (in memoria), que não tiveram a oportunidade de estudar, mas que possuíam um grande conhecimento de vida e me deram ensinamentos e lições que sempre lembrarei. Para mim vocês serão sempre exemplos de simplicidade, alegria, amizade, respeito, caráter e honestidade.

Ao meu incomparável Professor Petrúcio com quem aprendi a descobrir a beleza da Matemática e o prazer em lecionar.

Agradecimentos

Tem gente pra tudo...
Tem gente educada...
Tem gente amiga...
Tem gente que a gente deve guardar no coração.
(Trecho do poema Gente do Peito do Prof. José Petrúcio de Queiroz)

A Deus

Pela vida e por sua presença em todos os momentos!
Pela a oportunidade desta experiência e por ter me dado força e coragem para enfrentar as dificuldades e os desafios desta jornada árdua.

A meu Esposo

Companheiro de todos os momentos da minha vida, que contribuiu para que este dia fosse possível e com quem quero dividir o mérito desta conquista.

A minha Família

Por terem entendido a minha ausência, e sempre terem acreditado em mim e na possibilidade do meu sonho se concretizar.

A SBM

Pela iniciativa e empenho dedicados à criação e desenvolvimento deste projeto, pioneiro em nosso país, e que possibilitou a nós professores estudo, aprendizagem, aprofundamento de conhecimentos e troca de experiências que irão contribuir de forma significativa com o processo de ensino da Matemática. Sem duvida, este é um grande passo na busca pela melhoria da qualidade do ensino desta disciplina na Educação Básica em nosso país.

A CAPES

Pelo auxilio financeiro que permitiu o custeamento de despesas com transporte, hospedagem, alimentação e compra de materiais que ajudaram no desenvolvimento dos estudos realizados.

Aos Professores do PROFMAT/UNIVASF

Pelos ensinamentos, contribuições e apoio disponibilizados no decorrer de todo o percurso deste mestrado.

A minhas amigas Claudivania e Poliana

Pela dedicação, paciência, convivência, colaboração e por compartilharem as alegrias e dificuldades encontradas no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus Companheiros de Mestrado

André, Adriano, Evandro, George, Geraldo, Isabel, Levi, Magno, Márcio, Marcilio, Murilo e Rutênio pela convivência, pelo aprendizado, pelas palavras de incentivo e pelos bons momentos que compartilhamos nesta caminhada.

E, em especial quero agradecer **ao meu orientador Prof. Edson Leite Araujo** pela confiança, colaboração, compreensão, ensinamentos e esforço dedicado para conclusão deste trabalho.

“Quando lhe disserem que algo em que você acredita é impossível, tenha paciência. Talvez ele não saiba de verdade que a vida é o eterno ato de transformar o impossível em realidade.”

Roberto Thinyashiki

Análise Combinatória no Ensino Médio:
uma abordagem sem o uso de fórmulas

Francinária Parente Ferreira

RESUMO

As dificuldades de aprendizagem apresentadas por estudantes ao lidarem com a **Análise Combinatória**, em sua maior parte, provocadas pela prática pedagógica do professor, o qual geralmente faz uma abordagem explorando apenas algumas técnicas de contagem, onde a preocupação principal é a aplicação de algoritmos, motivou a realização deste estudo; que tem como objetivo elaborar uma proposta pedagógica de ensino para se trabalhar com conceitos básicos da **Análise Combinatória** voltados para o Ensino Médio, sem o uso de fórmulas, utilizando exclusivamente a resolução de problemas e enfatizando o principio multiplicativo como principal estratégia de resolução para os problemas de contagem. Essa opção metodológica se fundamentou em pesquisas realizadas em documentos oficiais de âmbito nacional e estadual que regem o Ensino Médio, sobre a resolução de problemas como metodologia de ensino e em estudos acadêmicos acerca do processo de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória** voltados a esta modalidade de ensino. A proposta didática feita aqui é desenvolvida em quatro momentos compostos de atividades a serem realizadas pelos alunos em pequenos grupos, envolvendo problemas do cotidiano, e tem como finalidade colocar o aluno no papel de construtor do seu conhecimento.

Palavras-chaves: Proposta de Ensino, Ensino médio, Resolução de problemas, Análise Combinatória.

Análise Combinatória no Ensino Médio:
uma abordagem sem o uso de fórmulas

Francinária Parente Ferreira

ABSTRACT

The learning dificulties present by students in dealing with the Combinatorial Analysis, for the most part, caused by teacher.s pedagogic practice, which usually makes an approach exploring just some counting techniques, where the primary concern is the application of algorithms, motivated the realization of this study, which it aims to develop a proposal pedagogical to work with basic concepts of the Combinatorial Analysis aimed at High School, without using formulas, using only the resolution of problems and emphasizing the multiplicative principle as the main strategy of resolution to the problems of counting. This methodological choice was based on research conducted in official documents of national and state level that governing the High School, about problem solving as teaching methodology and scholarship on the teaching and learning the Combinatorial Analysis involving this type of teaching. The didactic proposal made here is developed in four phases composed of activities to be performed by students in small groups, involving problems of everyday life, and aims to place the student in the role of the builder of his knowledge.

Keywords: Proposal for Education, High School, Troubleshooting, Combinatorial Analysis.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de quadros

Lista de siglas

BCC-PE - Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco
OTMs-PE – Orientações Teórico-Metodológicas para o Ensino Médio do Estado de Pernambuco
PCN+ - Parâmetros Curriculares Nacionais +
PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais
PFC – Princípio Fundamental de Contagem
PNLDEM- Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio

Sumário

1 Introdução

A Matemática é uma ciência de grande importância para vida prática em sociedade. Os conhecimentos matemáticos são ferramentas essenciais em muitas situações do cotidiano, em diversas atividades profissionais e em diferentes áreas do conhecimento. Além disso, esta disciplina desempenha um papel importante na formação do indivíduo, já que auxilia no desenvolvimento de competências, na organização do pensamento e do raciocínio dedutivo.

Neste contexto, a **Análise Combinatória**, como a parte da Matemática que permite a escolha e a contagem dos elementos de um conjunto sem necessariamente ter que listá-los (PESSOA e BORBA, 2009), é um dos conteúdos matemáticos que contribuem para o desenvolvimento de capacidades cognitivas, como: analisar, investigar, refletir, levantar hipóteses, testar, argumentar, generalizar e validar. Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, apud Almeida, 2010, p. 18): “O raciocínio combinatório é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral”.

No entanto, na maioria das vezes, o processo de ensino e aprendizagem desse assunto, quando direcionado ao Ensino Médio apresenta muitos obstáculos. A **Análise Combinatória** oferece grandes dificuldades para alunos e professores em relação à formulação e interpretação de seus enunciados. Os problemas que envolvem os conceitos combinatórios constituem-se em verdadeiros desafios para os estudantes, pois exigem o desenvolvimento do raciocínio e a capacidade de reflexão, já que é preciso compreender regularidades, estabelecer relações e esgotar todas as possibilidades sem deixar de contar nenhum elemento (PESSOA, 2009).

Tradicionalmente, este assunto é tratado pelos professores de maneira abstrata. É o que nos diz Mendonça (2011, p.19) quando em relação ao ensino desse conteúdo afirma que “(...) os docentes dispensam a abordagem do tema e optam por apresentar algumas situações a partir da apresentação de fórmulas, sem a construção de um conhecimento expressivo por parte do aluno”. Dessa forma, os conceitos, propriedades e algoritmos são mostrados pelo professor como um processo automático seguido da aplicação de exercícios-padrão.

Neste sentido, é preciso entender que o processo de ensino-aprendizagem da **Análise Combinatória** na esfera do Ensino Médio não é algo simples e requer do professor atenção, reflexão e cuidado ao trabalhar o referido conteúdo, uma vez que sua prática pedagógica deve priorizar a compreensão dos conceitos combinatórios e dos procedimentos adotados, bem como o desenvolvimento de habilidades de raciocínio combinatório na resolução de problemas, o entendimento das dificuldades apresentadas pelos estudantes e a busca por soluções que possam ajudá-los a superar essas dificuldades.

O ensino da **Análise Combinatória**, quando explorado através de uma utilização adequada e diversificada da *metodologia de resolução de problemas*; colocando o aluno numa posição de ação e de participação efetiva na construção de seu conhecimento, valorizando seu pensamento, suas ideias, experiências formais e informais e o trabalho em grupo, contribui para desenvolver no educando o raciocínio lógico-matemático, a criatividade e a capacidade de resolver problemas, colaborando com o desenvolvimento de processos cognitivos e aquisição de atitudes, características essenciais na formação do cidadão atuante e crítico. Além disso, compreender os conceitos da Combinatória é fundamental no estudo de outros ramos da Matemática, como o de Probabilidades e Estatística. Tendo aplicabilidade, também, em outras áreas do conhecimento: Biologia, Informática, Engenharia, Química, entre outras. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN +):

> *Este tema estruturador permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização sociocultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática (BRASIL, 2002, p. 127).*

Mesmo com a quantidade de alternativas e recursos que envolvem o ensino da **Análise Combinatória**, a maioria dos livros didáticos ainda se limita a dar apenas as técnicas para o cálculo de arranjos, permutação, combinação e o princípio multiplicativo, explorando exercícios e problemas que priorizam tão somente a aplicação de fórmulas. Segundo Sabo (2007, p. 52) num estudo realizado sobre o conteúdo de **Análise Combinatória** nos livros didáticos para o Ensino Médio:

> *O processo de estudar análise combinatória expõe o aluno frente a um novo raciocínio, como também, a novos signos e significados. As análises realizadas neste trabalho evidenciam que esses signos são expressos, na maioria das vezes, por fórmulas algébricas tecnicistas, seguidas por sequências de exercícios, nos quais, as técnicas de resoluções são repetitivas.*

Os alunos, na maioria das vezes, empregam procedimentos mecânicos de resolução para os problemas combinatórios, sem observar propriedades, diferenças e semelhanças entre esses problemas. No entanto, é preciso observar que as questões que envolvem contagem podem ser exploradas através de situações do cotidiano, onde os estudantes, para resolvê-las, se utilizem do raciocínio, sem se preocuparem com fórmulas. De acordo com Sturm (1999, p. 3):

> *(...) o ensino de Análise Combinatória deve se dar através de situações-problema. As fórmulas devem aparecer em decorrência das experiências dos alunos na resolução de problemas, devem ser construídas e não ser o elemento de partida para o ensino de cada tema: Arranjo, Permutação e Combinação.*

Apesar de muitas atividades do cotidiano exigirem conhecimentos sobre **Análise Combinatória** e da sua importância na formação do sujeito, o que temos observado ao longo de nossa experiência docente é a maneira equivocada que este conteúdo vem sendo trabalhado em sala de aula, não propiciando situações que possibilitem a aprendizagem. Como consequência os alunos: não compreendem os conceitos relacionados, não distinguem os tipos de agrupamentos nem os invariantes dos problemas de contagem. Decoram fórmulas e as utilizam mecanicamente, sem, contudo, entenderem o que estão fazendo, não percebendo a utilidade desse assunto em situações práticas. Aprendem a desenvolver mais a capacidade de memorizar, de calcular e, o que observamos são alunos que não conseguem falar sobre o conteúdo, nem explicar o que pensaram para resolver um problema. O que termina provocando uma verdadeira "antipatia" na maioria dos alunos e professores por este assunto.

A maneira como vem sendo vivenciado o problema de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória** no Ensino Médio nos deixa conscientes de que é preciso fazer algo, no sentido de oferecer e organizar novas metodologias que possam auxiliar professores e alunos no trabalho com este conteúdo.

Diante do exposto, pretendemos neste trabalho elaborar uma proposta de ensino para se trabalhar a **Análise Combinatória** no Ensino Médio, de uma maneira na qual os alunos possam compreender seus conceitos através da **resolução de problemas**, **sem o uso de fórmulas** e enfatizando o **Princípio Fundamental de Contagem (PFC)** como principal estratégia de resolução. Assim, os problemas sugeridos são o ponto central através dos quais os conhecimentos serão construídos pelos alunos, priorizando situações do cotidiano onde os educandos, para solucioná-las, usem os conhecimentos sobre combinatória como um caminho e não como fim, não devendo haver preocupação apenas com a resposta final dos problemas, mas com as estratégias desenvolvidas e a forma como se mobilizam para buscá-las, utilizando-se dos saberes prévios adquiridos em situações informais ou da sala de aula.

Como afirmam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM),

> *Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 2000, p. 52).*

Para nós professores, é possivelmente a estratégia mais adequada, uma vez que teremos a oportunidade de observar as principais dificuldades dos alunos diante dos conceitos envolvidos, permitindo diagnosticar os erros e fazer as intervenções necessárias além da possibilidade de abordar o assunto, vinculando à realidade dos sujeitos, tendo o aluno como ator principal do processo de construção do conhecimento.

O presente trabalho será desenvolvido e estruturado da seguinte forma: o próximo capítulo traz o embasamento teórico no qual se fundamenta o trabalho, dividido em três partes: análise dos documentos oficiais que orientam o ensino da **Análise Combinatória** no Ensino Médio, estudo sobre a metodologia da resolução de problemas, finalizando com o estudo dos trabalhos de alguns pesquisadores sobre o ensino e aprendizagem no campo da **Análise Combinatória**. No capítulo III, encontra-se uma proposta metodológica para se trabalhar a **Análise Combinatória** no Ensino Médio sem a utilização de fórmulas, assim como os objetivos e procedimentos que devem ser adotados. O último capítulo traz as considerações finais baseadas no que foi proposto.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Documentos Oficiais

Os PCNEM é um documento que rege o Ensino Médio brasileiro e encontra-se dividido em quatro partes:

- ✓ Parte I - Bases Legais;
- ✓ Parte II - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias;
- ✓ Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;
- ✓ Parte IV - Ciências Humanas e suas Tecnologias.

As competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes em relação à Matemática nesta modalidade de ensino, foco deste trabalho, são abordadas na Parte III desse documento.

Para o trabalho com a **Análise Combinatória** no Ensino Médio, os PCNEM enfatizam a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos e o cuidado que os professores devem ter ao explorar esse conteúdo.

Nesse documento a importância para os problemas de contagem e, consequentemente da **Análise Combinatória** é retratada no seguinte trecho:

> *As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da matemática e das demais ciências e áreas (BRASIL, 2000, p.44).*

Corriqueiramente o ensino da **Análise Combinatória** é desenvolvido a partir da utilização de fórmulas ou padronização de resoluções, entretanto, é essencial que esta temática seja trabalhada de forma a possibilitar que o aluno construa suas próprias estratégias de resolução para os problemas apresentados.

Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) afirmam que:

> *Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam por à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (Brasil, 1997, p.33).*

Para o Ensino Médio, podemos destacar também as observações contidas nos PCN +, documento criado com o objetivo de "encaminhar um ensino compatível com as novas pretensões educativas e ampliar as orientações contidas nos PCNEM, adiantando elementos que não estavam ainda explicitados" (BRASIL, 2002, p. 12).

Este documento também se apresenta dividido por áreas, sendo que o volume dedicado às Ciências da Natureza e Matemática aborda "elementos de utilidade para o professor de cada disciplina, na definição de conteúdos e na adoção de opções metodológicas. Além disso, explicitam-se algumas formas de articulação das disciplinas para organizar, conduzir e avaliar o aprendizado" (BRASIL, 2002, p. 12).

Nos PCN +, a **Análise Combinatória** está inserida no eixo temático Análise de Dados, que é organizado em três unidades temáticas: Estatística, Contagem e Probabilidade. Na unidade temática de Contagem os conteúdos e habilidades propostos para o 2º ano do Ensino Médio são:

> ***Contagem:*** *princípio multiplicativo; problemas de contagem.*
> - ✓ *Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.*
> - ✓ *Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.*
> - ✓ *Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (BRASIL, 2002, p. 127).*

Ainda segundo as orientações desse documento, o trabalho com **Análise Combinatória** deve levar o aluno a ser capaz de decidir e utilizar a estratégia mais adequada para contar todos os casos possíveis numa situação de combinatória sem o uso de uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. Dessa forma, o objetivo é que o aluno construa o conhecimento de forma significativa. Nesse contexto, as fórmulas surgem como consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados for muito grande (BRASIL, 2002).

Confirmando essas orientações, o **Guia Nacional do Livro Didático do Ensino Médio** (PNLDEM - 2012) diz que o ensino da **Análise Combinatória** deve:

> *(...) desenvolver no aluno a capacidade para escolher diferentes técnicas de contagem e usá-las de modo eficiente na resolução dos problemas. É prejudicial um ensino que habitue o aluno a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso somente de fórmulas (BRASÍLIA, 2011, p.29).*

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio, elaboradas com o objetivo de “contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente” (BRASIL, 2006, p. 5), também se encontra dividida em três volumes:

- ✓ Volume 1: Linguagem, Códigos e suas Tecnologias;
- ✓ Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias;
- ✓ Volume 3: Ciências Humanas e suas Tecnologias.

No Volume 2 deste documento, pode-se observar no bloco **Análise de Dados** as recomendações quanto ao ensino de **Análise Combinatória**:

> *A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. (...) A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento. (BRASIL, 2006, p. 79).*

A Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco (BCC-PE), documento oficial da Secretaria de Educação desse Estado, criada com o “objetivo de contribuir e orientar os sistemas de ensino, na formação e atuação dos professores da Educação Básica”; recomenda no componente curricular de Matemática para o Ensino Médio que os conceitos de combinatória devem ser desenvolvidos e consolidados. Além disso, enfatiza a importância de explorar recursos, como o princípio multiplicativo e a divisão para evitar a sobrecontagem dos agrupamentos repetidos. Neste contexto, o professor deve propor atividades que favoreçam ao educando “(...) ampliar cada vez mais as estratégias básicas de contagem, evitando-se o ensino restrito a uma extensa lista de fórmulas que não apresentem significado para o aluno” (PERNAMBUCO, 2008a, p.111).

Complementado a BCC-PE no componente curricular de matemática, a Secretária de Educação do Estado de Pernambuco criou as Orientações Teórico-Metodológicas para o Ensino Médio (OTMs-PE), esse documento contempla o currículo de Matemática que deve ser abordado nessa modalidade de ensino, e cuja finalidade é servir “como referenciais estruturadores do processo educativo que proporcione ao educando o acesso ao conhecimento construído, acumulado e sistematizado pela humanidade”(PERNAMBUCO, 2008b, p.6). As OTMs-PE recomendam que sejam abordados os seguintes conceitos da **Análise Combinatória** no Ensino Médio: problemas de contagem, princípio fundamental de contagem, permutações e arranjos simples e combinações simples.

Como podemos observar, os documentos oficiais do Ensino Médio (PCNEM, PCN+, Orientações Curriculares para o Ensino Médio, BCC-PE e as OTMs-PE) recomendam que no processo de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória** a ênfase seja dada na compreensão dos conceitos e das propriedades dos problemas combinatórios, bem como na aplicação de diversas estratégias de contagem como forma de resolver e sistematizar esses problemas, *sem a utilização de fórmulas* e procedimentos mecânicos que não tenham significado para o aluno. Além disso, abordam a importância da combinatória no desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e na aquisição de capacidades essenciais para formação do indivíduo.

2.2 A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

No dia a dia em sala de aula, os termos *"problemas"* e *"resolução de problemas"* são frequentemente empregados, porém muitas vezes de maneira errônea e até mesmo chegam a ser confundidos como uma mesma atividade. Nesse sentido, faz-se necessário uma análise do significado desses termos.

Podemos inicialmente nos questionar sobre o que seria um problema:

Segundo Onuchic (1999, p. 215), “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”.

Na versão de Hiebert (1997) apud Saldanha (2012, p.2):

> *Um problema é definido aqui como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método correto, específico de solução.*

Assim, um problema deve representar para o aluno um desafio, não devendo ser resolvido por meio de um processo mecânico.

Para Polya (1997) apud Buss (2013, p. 14): “resolver um problema é buscar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados".

Vergnaud (1990) apud Pessoa e Silva (2012) considera um problema como uma situação, na qual há a necessidade de perceber e explorar relações, de elaborar e verificar conjecturas, na tentativa de solucioná-la. O autor defende que o processo de formação dos conceitos acontece inserido em **Campos Conceituais**, que podem ser definidos como um conjunto de situações que envolvem uma variedade de conceitos e processos interligados. Nessa Teoria, Vergnaud considera que a partir de problemas a resolver surgem diversos fatores que influenciam na formação e desenvolvimento dos conceitos. Dessa forma, é preciso explorar diversos tipos de problemas para oportunizar aos educandos este estabelecimento de relações que proporcione a construção de novas aprendizagens.

De acordo com Gerard Vergnaud (1990) apud Pernambuco (1998), um conceito é constituído por três conjuntos denominado por ele de SIs:

S - conjunto de situações que dão significado ao conceito (**referências**);

I - conjunto dos invariantes operatórios do conceito, ou seja, conjunto formado pelas propriedades que são comuns aos elementos de S e que permite classificá-los em uma mesma categoria (**significados**);

s - O conjunto dos termos ou representações simbólicas que são utilizados na representação dos conceitos, suas propriedades e os procedimentos de tratamento (**significantes**).

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) apud Pernambuco (1998) abrange essencialmente as seguintes considerações:

✓ não é possível explorar todas as propriedades de um conceito em uma única situação;

✓ a análise de uma situação, de forma geral, envolve vários conceitos;

✓ a formação de um conceito exige um longo período de tempo e muitas intervenções.

Dessa forma, num **campo conceitual** os conceitos aparecem interligados entre si de modo que uns vão dando sentido aos outros e são explorados através de situações variadas. Portanto, trabalhar com os conceitos de forma isolada e fragmentada não favorece a aprendizagem.

Dentro desse contexto, é preciso entender um problema como uma situação de desafio que possibilita ao aluno envolver-se num processo de reflexão, onde é necessário, analisar, fazer conjecturas, construir procedimentos de resolução, aprofundar a compreensão de conceitos, generalizar e validar propriedades. E, neste processo de construção, os estudantes terão a oportunidade de aprender com os próprios erros.

Portanto, para uma atividade ser considerada um problema deve apresentar algumas características importantes, que podem ser assim resumidas:

✓ a solução não é evidente e nem o caminho para ela;

✓ um problema requer um processo de resolução, que envolve mais de uma ação;

✓ os obstáculos ou desafios colocados em um problema exigem uma reorganização dos conhecimentos anteriores;

✓ o enunciado do problema não induz nem o método e nem a solução. (GESTAR, 2008).

Além dessas características, o problema deve garantir a busca da solução pelo próprio educando, explorando os seus conhecimentos e procedimentos de resolução. Assim, ao responder um problema o estudante precisará se libertar dos "exercícios modelos" e procurar utilizar suas próprias estratégias, raciocínio e habilidades na tentativa de chegar à solução. Com isto, o aluno pode, ao invés de somente dar a resposta, perceber que está sendo levado a construí-la.

Por outro lado, a resolução de problemas é uma proposta metodológica que tenta romper com as barreiras dos métodos tradicionais de ensino, uma vez que os conceitos matemáticos são construídos pelo educando nas interações sociais, através da mediação do professor de maneira a promover uma construção significativa para o aluno acerca do seu próprio conhecimento, estabelecendo relações diversificadas quanto à produção de significados, verbalização e socialização de ideias. A proposta de resolução de problemas tem possibilitado uma abordagem inovadora numa perspectiva sócio interacionista, visando um novo olhar sobre a Matemática, que possa ter significado para quem está estudando (GESTAR, 2008).

Para Onuchic (1999, p. 208):

> *O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática.*

Os PCN+ afirmam: “A resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios” (BRASIL, 2002, p. 112).

Para Polya (1995, p. 13): “a resolução de problemas tem sido a espinha dorsal do ensino de Matemática desde a época de papirus Rhind”.

Nesse mesmo contexto, Charnay (1996, p. 37) diz: “resolução de problemas tem estado no próprio coração da elaboração da ciência matemática”. Esse mesmo autor classifica os problemas de acordo com o modelo de aprendizagem, conforme é descrito a seguir:

✓ o modelo **"normativo"**, aquele que é centralizado no conteúdo e que utiliza o problema como critério de aprendizagem;

✓ o modelo **"incitativo"**: aquele que é centralizado no aluno, e que usa o problema como motor da aprendizagem;

✓ o modelo **"aproximativo"**: aquele centrado na construção do saber pelo aluno, ou seja, os conceitos são construídos pelo aluno num processo de interação com o conhecimento. Nesse modelo, o problema é empregado como um recurso para a aprendizagem. (CHARNAY, 1996).

Nessa mesma linha, Marcelo Câmara apud Pernambuco (2008a) classifica os problemas matemáticos conforme a metodologia de ensino adotada em:

✓ **Fechado** - são problemas cujo objetivo é a "fixação" de conceitos ou conteúdos matemáticos. Nesse tipo de problema os conhecimentos necessários à resolução se encontram explícitos no enunciado.

✓ **Aberto** - são aqueles que têm como objetivo permitir que o aluno desenvolva um processo de resolução de problemas, onde ele possa explorar as capacidades de realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testá-las e validar seus resultados.

✓ **Situação-problema** - é uma situação "criadora" de um problema cuja resolução exige do aluno a construção de um novo conhecimento matemático.

Na visão de Dante (2005) apud Piovesan e Zanardini (2008), os problemas podem ser utilizados de acordo com os momentos de aprendizagem e as necessidades do trabalho em sala de aula. Nesse sentido, classifica os problemas em seis tipos:

✓ **"Exercícios de reconhecimento"** - são exercícios em que o objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade.

✓ **"Exercícios de algoritmos"** - são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo, requerem a execução dos algoritmos das operações básicas e cujo objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores.

✓ **"Problemas-padrão"** - sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige qualquer estratégia; seu objetivo é recordar e fixar os fatos básicos e, de um modo geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam.

✓ **"Problemas-processo ou heurísticos"** - são problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos. Aguçam a curiosidade do aluno e permite que ele desenvolva sua criatividade, sua iniciativa seu espírito explorador.

✓ **"Problemas de aplicação"** - são os que retratam situações do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos. São também chamados de situações-problema. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados.

✓ **"Problemas de quebra-cabeça"** - são problemas que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a chamada matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade de perceber algum truque, que é a chave da solução.

No ensino da Matemática, a resolução de problemas é uma atividade de fundamental importância. Os vários tipos de problemas citados anteriormente devem ser levados à sala de aula, e utilizados de acordo com os momentos e as necessidades de aprendizagens dos educandos. Sendo, portanto, papel do professor fazer as escolhas apropriadas, definindo os objetivos a serem alcançados em cada situação que será explorada.

A atividade de realização de exercícios é muitas vezes empregada como metodologia de ensino de resolução de problemas. Na construção do conhecimento matemático, os exercícios são importantes para a fixação de técnicas e propriedades, porém estes não despertam a curiosidade nem oferecem condições para o aluno desenvolver as capacidades de raciocinar, refletir e investigar; já que sua resolução envolve apenas a repetição de procedimentos mecânicos e a memorização de algoritmos, não podendo, portanto, serem confundidos com a proposta de resolução de problemas.

Para que uma atividade seja considerada como uma proposta pedagógica de resolução de problemas, existem alguns pontos essenciais:

- ✓ *um "verdadeiro" problema, que satisfaça os pontos levantados;*
- ✓ *elaboração de estratégias de solução (e não a imitação de um exemplo);*
- ✓ *uma indefinição inicial, da parte de quem resolve o problema, quanto aos conhecimentos matemáticos que ele deverá mobilizar no processo de resolução;*
- ✓ *a validação da solução. (GESTAR, 2008, p. 47).*

O principal objetivo da resolução de problemas para o ensino da Matemática é promover a aprendizagem de forma plena, levando o educando a pensar por si mesmo e desenvolver o raciocínio lógico através da exploração de situações-problema que possibilitem argumentar, estabelecer relações, construir conjecturas e validar suas próprias conclusões.

Os pesquisadores Schroeder e Lester (1989) apud Onuchic (1999) apresentam três caminhos diferentes para se abordar a metodologia da Resolução de Problemas na sala de aula: ensinar para a resolução de problemas, ensinar sobre resolução de problemas e ensinar via resolução de problemas.

A finalidade de **ensinar para a resolução de problemas** é levar o aluno a aplicar o conteúdo matemático em problemas de seu cotidiano. A função do professor é ensinar matemática dando diversos exemplos, mostrando oportunidades de aplicá-la e procurando desenvolver nos estudantes a habilidade em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros.

No **ensino sobre resolução de problemas** o professor procura explorar como foco principal do ensino o processo de resolução, mostrando suas fases, as estratégias que podem ser utilizadas e até mesmo a postura que deve ser adotada. O método de ensino adotado nesse tipo de processo é o modelo de Polya ou alguma variação dele, que descreve quatro etapas principais no processo de resolução de problemas matemáticos:

- ✓ é preciso compreender o problema;
- ✓ estabelecer um plano;
- ✓ executar o plano;
- ✓ analisar e validar o resultado.

Ao **ensinar via resolução de problemas** deve-se considerar o problema como um "ponto de partida" para construção do conhecimento matemático. Dessa forma, resolver problemas se constitui no próprio percurso ao longo do qual os conceitos vão sendo construídos pelos alunos. O professor tem o papel de propor problemas significativos que levem o aluno a avançar nos esquemas de conhecimento, dando-lhe oportunidade de refletir e criar estratégias de resolução.

Segundo Onuchic e Allevato, (2011), não existe um modelo padrão para se trabalhar em sala de aula com a proposta de ensino da resolução de problemas, mas na tentativa de auxiliar os professores a trabalhar com essa metodologia, estruturando o ensino de forma a obter uma aprendizagem significativa, promovendo mais entusiasmo em suas aulas e fazendo com que os alunos vejam a Matemática de maneira mais confiante, essas autoras, junto com um grupo de professores participantes de um **Programa de Educação Continuada**, criaram um **Roteiro de Atividades** que permite fazer uso dessa metodologia. Esta primeira versão constava das seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização.

Posteriormente, com novos estudos e as experiências de sala de aula de alguns professores, sentiu-se a necessidade de modificar esse roteiro, acrescentando novos elementos, surgindo assim um novo roteiro, que pode ser resumido da seguinte forma:

✓ **Preparação do problema** - O professor deve selecionar um *"problema gerador"* cujo objetivo é a construção de um novo conceito matemático, princípio ou procedimento. É importante que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema ainda não tenha sido trabalhado em sala de aula.

✓ **Leitura individual** - O professor deve entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que façam uma leitura individual.

✓ **Leitura em conjunto** - O educador deve formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos, auxiliando os alunos nas possíveis dificuldades de interpretação.

✓ **Resolução do problema** - Depois da leitura e entendimento do problema, cada grupo através de um trabalho cooperativo e colaborativo, procura resolvê-lo. É exatamente através da resolução do problema que o conhecimento matemático planejado pelo professor será construído.

✓ **Observar e incentivar** - Os alunos são protagonistas de sua aprendizagem e o papel do professor é observar e analisar o comportamento dos alunos nos grupos, estimular o trabalho colaborativo, incentivar a utilização de conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas e a escolha de diferentes caminhos para a resolução do problema. É importante que o professor auxilie os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador.

✓ **Registro das resoluções na lousa** - Independente dos erros, acertos e do processo de resolução, os representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções para discussão e análise.

✓ **Plenária** - Os alunos devem ser convidados a discutirem as diferentes soluções apresentadas pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas, cabendo ao professor mediar as discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos.

- ✓ **Busca do consenso -** Após sanar dúvidas, e analisar resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- ✓ **Formalização do conteúdo -** Nessa etapa o professor registra na lousa uma apresentação formal dos novos conceitos, conteúdos e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (Onuchic e Allevato, 2011).

A resolução de problemas como uma proposta de ensino na Matemática possibilita ao aluno o desenvolvimento de competências e habilidades que contribuem para sua formação enquanto cidadão autônomo, consciente e crítico, capaz de atuar de maneira efetiva na sociedade em que vive, despertando um novo olhar por parte do educando na construção e apropriação do conhecimento matemático adquirido.

Sem dúvida trabalhar com a proposta de resolução de problemas não é uma tarefa fácil, pois não se encontra pronta nos livros didáticos, além de exigir do professor tempo, dedicação, estudo e pesquisa para preparar os "problemas geradores", através dos quais os novos conteúdos e conceitos matemáticos serão construídos. Exige também do educador uma nova postura diante das atividades realizadas em sala de aula, não dando respostas prontas para os alunos, mas impulsionando-os na compreensão, interpretação e resolução do problema.

Apesar disso, sendo o objetivo do professor levar o aluno a pensar produtivamente e construtivamente, ensinando-o a enfrentar novas situações, dando-lhe a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática, há boas razões para se fazer esse esforço, pois além de tornar as aulas mais interessantes e desafiadoras, o trabalho com ênfase na resolução de problemas fornece ao aluno estratégias para resolver os diversos tipos de problemas, capacidade essencial em qualquer área da atividade humana.

Nesse contexto, para a proposta didática aqui sugerida adota-se a metodologia de ensino via resolução de problemas, objetivando que os alunos compreendam os conceitos envolvidos na **Análise Combinatória** através de sua interação e participação ativa.

2.3 Pesquisas sobre o Processo de Ensino e Aprendizagem da Análise Combinatória

Um dos primeiros trabalhos desenvolvidos no Brasil sobre o processo de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória** foi a dissertação de Sturm (1999). Nesse estudo, o autor realiza uma pesquisa com os alunos, do período noturno, de uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola na cidade de Itu-SP, procurando investigar e identificar as possibilidades e os limites de uma proposta de ensino voltada para o estudo da combinatória nessa modalidade de ensino. Sturm (1999) chama sua proposta de *"alternativa"* porque permite a participação dos alunos e possibilita o desenvolvimento do raciocínio combinatório, ao invés de trabalhar somente com fórmulas.

Sturm (1999) desenvolveu sua pesquisa analisando sua própria prática pedagógica nas aulas ministradas na turma de 2º ano, e utilizou o diário de classe como instrumento para registrar informações, impressões, reflexões e intervenções realizadas. Além desse instrumento, durante o desenvolvimento da proposta o autor utilizou também um questionário, com o objetivo de avaliar as opiniões dos alunos sobre a prática do professor, e as provas dos estudantes como fontes para análise do trabalho realizado.

Em seu trabalho Sturm (1999) optou por iniciar o conteúdo de combinatória através da utilização de exercícios, e a partir desse enfoque desenvolver a compreensão do PFC, a utilização de formas de registro para representar os agrupamentos e a organização de um processo geral de resolução, ou seja, a construção de fórmulas para resolver os problemas de arranjo, permutação e combinação simples.

Sua proposta faz um estudo sobre a notação de fatorial, aborda o princípio multiplicativo e, os conceitos combinatórios de arranjo, permutação e combinação, mas sem a repetição de elementos nos agrupamentos. Foi estruturada em quatro fases: Familiarização com problemas de contagem em geral, Estudo da notação fatorial, Levantamento e observação das características dos problemas que determinam seu modo de resolução e Relação das características (modo de resolver) com os temas em si e formalização dos conceitos\temas.

Na análise final de seu trabalho, avaliou que as características desenvolvidas em sua proposta como: o trabalho inicial de familiarização dos problemas de contagem, que possibilitaram o uso de estratégias diferenciadas (enumeração sistemática e árvore de possibilidades) na resolução dos problemas, foi muito importante para o processo de ensino da **Análise Combinatória**.

Também menciona que as formas de representação como a árvore de possibilidades e a enumeração sistemática deveriam ter sido mais exploradas, uma vez que o uso dessas estratégias favorece o entendimento dos conceitos combinatórios. O autor considera os problemas aplicados durante a proposta como tradicionais. E, enfatiza que deveria ter proporcionado momentos em que os alunos construíssem o enunciado para determinado tipo de problema de contagem, como forma de avaliar a compreensão dos mesmos em relação ao assunto estudado e de estimular os estudantes a outros desafios.

Ainda considera que sua proposta se diferencia da prática vigente utilizada em sala de aula, pois proporciona a interação entre alunos e professor através da forma como o conteúdo é apresentado e discutido, inicialmente trabalhando com os exercícios para depois tentar chegar à sistematização dos conceitos.

Analisamos como positivo o posicionamento feito por Sturm (1999) em relação a não se iniciar o conteúdo de combinatória utilizando fórmulas, e em utilizar e explorar diferentes formas de representação para o trabalho com problemas de contagem.

Dornelas (2004) comenta sobre metodologia, levantamento de dados, análise, resultados e comentários sobre pesquisas de campo realizadas durante a sua dissertação de mestrado. A primeira pesquisa, constando de dois questionários, foi realizada com 87 alunos do 2º ano do Ensino Médio de duas escolas da cidade de Recife, uma pública e a outra particular, com o objetivo de analisar a desenvoltura desses estudantes em relação ao conteúdo de **Análise Combinatória** no que se refere aos conceitos, ao vocabulário e a habilidade dos alunos em resolver problemas combinatórios.

Os resultados desses questionários apontam que o conteúdo de combinatória é abordado no Ensino Médio de forma mecânica, priorizando fórmulas e procedimentos automáticos, abdicando de explorar os conceitos e as propriedades dos problemas combinatórios, a argumentação e as estratégias de resolução que favorecem a compreensão e a construção do conhecimento. O autor verifica também que os principais erros cometidos pelos alunos estão ligados ao desconhecimento do princípio multiplicativo ou sua utilização inadequada ou incompleta e a não percepção da importância da ou não da ordenação para formação dos agrupamentos.

Dornelas (2004) considera o princípio multiplicativo como um elemento essencial para o desenvolvimento do pensamento combinatório e da compreensão dos conceitos e das características que envolvem os problemas de contagem, arranjo, permutação e combinação. Logo, o não conhecimento desse princípio ou uma abordagem apenas superficial que não possibilite o trabalho com situações possíveis e necessárias trará muitas dificuldades para a aprendizagem da combinatória.

A finalidade da pesquisa de Dornelas (2004) é apresentar e aplicar uma sequência didática que aborde o princípio multiplicativo como recurso para resolução de problemas de contagem que conduza o aluno a refletir, compreender e a resolver problemas envolvendo o pensamento combinatório. Oferecendo oportunidades para o estudante utilizar seus conhecimentos prévios, criar, levantar hipóteses, testar, favorecendo o desenvolvimento de capacidades cognitivas.

O autor realiza uma segunda pesquisa de campo para investigar as consequências pedagógicas decorrentes da aplicação da proposta que favorece a aprendizagem intensiva do principio multiplicativo. Nessa fase, desenvolve o trabalho com 12 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular. O estudo foi realizado em 6 momentos e foram aplicados um pré-teste, explorando o princípio multiplicativo a partir de situações-problema, realizado correções, comentários e aplicado um pós-teste.

Na análise dos resultados, observa que as respostas para as perguntas sobre a **Análise Combinatória** não apresentaram diferenças significativas em relação à primeira fase da pesquisa. E, quanto à abordagem do princípio multiplicativo para se trabalhar com os problemas combinatórios, o pesquisador avalia esse método como excelente, considerando-o um instrumento de alto valor pedagógico não só para a resolução de problemas, mas também para a construção de uma sequência de ensino para se explorar a combinatória.

Como Dornelas (2004), confiamos que uma proposta didática que aborde a **Análise Combinatória** favorecendo e explorando o princípio multiplicativo pode auxiliar os alunos na resolução de problemas de contagem e facilitar sua compreensão em relação aos conceitos combinatórios, promovendo, dessa forma, uma aprendizagem significativa.

Pinheiro (2008) investiga as possibilidades de uma proposta de ensino para se trabalhar com **Análise Combinatória** no Ensino Médio fundamentada na resolução de problemas, na utilização de jogos e na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996). Dentro dos princípios dessa teoria, os conceitos são abordados a partir de situações didáticas, ou seja, atividades voltadas para o ensino e aprendizagem de um determinado conteúdo, que será construído através da relação pedagógica que se estabelece entre professor, alunos e o saber.

O autor desenvolveu sua pesquisa em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, do turno da tarde, de uma escola pública na cidade de Belém-PA. Para coleta dos dados, o pesquisador utilizou como instrumentos os registros dos alunos referentes às aulas ministradas, o pré-teste, o pós-teste e uma câmera de vídeo.

As atividades aplicadas durante a realização do trabalho foram resolvidas em grupos e debatidas conjuntamente entre alunos e o professor, que procurou sistematizar os conceitos e as fórmulas. O trabalho foi desenvolvido em sete encontros, onde foram explorados e formalizados: o PFC, o conceito de permutação simples, a noção do fatorial, arranjo simples, combinação simples e a percepção das diferenças entre esses conceitos, a fórmula de arranjos simples: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ e a fórmula de combinação simples: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Durante a realização da sequência de ensino, o autor faz o uso de jogos, como: o jogo do PIF- PAF da **Análise Combinatória** com o intuito de fixar o PFC, *jogo das Cartas da Combinatória*, cuja finalidade é aprofundar os conceitos da permutação e do cálculo com fatorial, e o *jogo do Dominó Combinatório*, que tem como objetivo aprofundar os conceitos de arranjo simples e combinação simples, bem como estabelecer diferenças entre esses conceitos.

Na análise final de seu trabalho, Pinheiro (2008) analisando o pré-teste e o pós-teste confirmou sua hipótese inicial e verificou que os objetivos previstos para cada etapa foram alcançados, já que a maioria dos alunos apresentou acentuada melhora na resolução dos problemas de contagem. Além disso, observou que a utilização da resolução de problemas como ponto de partida para o ensino da combinatória viabilizou o entendimento dos conceitos, pois os alunos participaram intensamente das atividades realizadas.

Ressaltou também a importância do planejamento das aulas, amparado-as num campo teórico e possibilitando a interação entre alunos e o professor. Considerou as aulas de aprofundamento, realizadas com objetivos bem definidos, como fundamentais para o processo de ensino, enfatizando a necessidade da realização de pós-teste após as referidas aulas, como forma de auxiliar o professor na avaliação do desenvolvimento das habilidades da **Análise Combinatória**.

Assim, como o autor, consideramos importante utilizar a resolução de problemas como ponto de partida para se trabalhar os conceitos combinatórios. Outros fatores que também chamou a atenção na proposta foram as atividades realizadas pelos grupos e a forma como o pesquisador e os alunos interagiram.

Almeida (2010) buscou investigar as contribuições que uma proposta de ensino explorando o pensamento combinatório através do potencial da comunicação matemática pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem da combinatória no Ensino Médio.

A proposta de Almeida (2010) foi desenvolvida em uma turma do 2º ano do Ensino Médio do período noturno da cidade de Itabirito- MG, através de atividades e dinâmicas realizadas em pequenos e grandes grupos cujo objetivo foi a exploração dos conceitos combinatórios através da argumentação e da interação. Nesse sentido, a autora afirma: "Através da discussão em pequenos grupos e da troca de experiências entre o professor e seus alunos ou entre os próprios alunos, a aprendizagem é potencializada pela oportunidade de aprender consigo mesmo e com o outro" (p. 15).

Os instrumentos utilizados pela pesquisadora para coleta de dados foram: diário, gravações em áudio e vídeo de todas as aulas, registros produzidos pelos alunos ao longo atividades, questionários e testes diagnósticos realizados ao longo do trabalho.

Na análise final de sua pesquisa, a autora evidenciou através dos testes aplicados que os estudantes apresentavam estratégias mais elaboradas para resolução dos problemas que as mostradas nas atividades iniciais, embora, ainda tivessem dificuldades de cálculo para resolver questões envolvendo agrupamentos não ordenados. Observou também que boa parte dos alunos conseguia resolver problemas abrangendo os princípios de contagem, diferenciavam subconjuntos ordenados e não ordenados e notavam se havia repetição ou não de elementos nos agrupamentos.

Em relação à comunicação, a pesquisadora observou que os alunos aprenderam a trabalhar em equipe, e mesmo com dificuldade expressavam suas ideias e procuravam justificá-las e validá-las. Observou, também, que as discussões coletivas contribuíram para a evolução das estratégias utilizadas, buscando resoluções mais reduzidas para os problemas propostos baseados na observação de padrões.

Concordamos com Almeida (2010) quando enfatiza que a comunicação matemática e o trabalho em grupo são fatores determinantes para a aprendizagem dos alunos; já que possibilita aos mesmos compartilharem ideias, estratégias e conhecimentos, além de permitir o desenvolvimento de capacidades e atitudes. Também, acreditamos que uma proposta para o trabalho com a **Análise Combinatória** não deve priorizar fórmulas, e sim proporcionar momentos de discussão e oportunidades para os educandos interagirem.

É preciso enfatizar que apesar de não utilizarmos algoritmos em nossa proposta, ela se diferencia da utilizada por Almeida (2010) porque o enfoque metodológico da autora é dado à resolução de problemas através da comunicação matemática.

Na sua dissertação de mestrado, Santos (2011) realizou uma pesquisa com o objetivo de averiguar qual enfoque de ensino favorece o desenvolvimento do pensamento combinatório nos alunos do Ensino Médio. Para responder esse questionamento, o autor utilizou uma metodologia qualitativa para realizar uma pesquisa com alunos e professores a respeito do tratamento que é dado a esse assunto no âmbito escolar. Instrumentos como análise de livros didáticos, questionários aplicados aos alunos e, entrevistas direcionadas aos professores foram usados para analisar e coletar os dados. O trabalho foi realizado com alunos de 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede particular na cidade Guarulhos-SP. Um fato interessante foi que esses alunos tiveram como professor de

Matemática no ano anterior, quando cursava o 2º ano, o próprio pesquisador, que intencionalmente procurava avaliar sua prática pedagógica.

Os questionários aplicados aos educandos tinham como objetivo observar e analisar a compreensão e as possíveis dificuldades que eles pudessem apresentar em relação à Matemática, à Resolução de Problemas e à **Análise Combinatória**. Na análise desse material, o autor observou que os alunos: entenderam que a resolução de problemas está ligada ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, preferem que os conteúdos sejam trabalhados valorizando o raciocínio ao invés de se priorizar a utilização de fórmulas, apresentam muitas dificuldades para definir a **Análise Combinatória**, acreditam que a resolução de problemas de contagem é importante para o desenvolvimento do raciocínio e não conhecem as aplicações da combinatória no cotidiano e em outras áreas do conhecimento e na própria Matemática.

As entrevistas realizadas com os professores colaboradores tinham como finalidade analisar a visão que esses docentes apresentavam em relação à Matemática, à utilização da metodologia da resolução de problemas, ao ensino do conteúdo da **Análise Combinatória** e a maneira como esses professores o abordam, procurando observar as dificuldades enfrentadas no trabalho com este tema e como lidam com os obstáculos encontrados pelos estudantes.

Analisando as entrevistas, o pesquisador constatou que os professores entrevistados são licenciados e têm experiência de sala de aula, no entanto, desconheciam a metodologia da resolução de problemas no campo da Educação Matemática. Também observou que os docentes afirmaram optar por abordar os conceitos combinatórios a partir de problemas e pela não utilização de fórmulas, uma vez que essa prática atrapalha e confunde o aluno. No entanto, confirmaram que em algumas situações a obtenção da solução exige necessariamente o uso de fórmulas.

Santos (2011) justifica que a análise de livros didáticos é indispensável, uma vez que esse instrumento auxilia o aluno no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Além disso, para os professores funciona como um suporte de apoio à organização de sua prática pedagógica. O objetivo do autor ao realizar essa atividade foi evidenciar como o *princípio fundamental da contagem* e os conceitos de *permutações, arranjos* e *combinações* são abordados no capítulo dedicado ao estudo da **Análise Combinatória**. Ele analisa dois livros de volume único: o de Dante (2008) e o de Silva e Barreto (2008).

Em sua análise, o pesquisador observou que os livros avaliados iniciam o capítulo sobre **Análise Combinatória** definindo esse conteúdo através de aspectos históricos ou de suas aplicações. A abordagem que é dada ao tema não permite o entendimento e a construção dos conceitos combinatórios pelos alunos, já que foi feita através das definições de fórmulas dos conceitos de arranjos, permutação e combinação seguidos da resolução de questões, ou seja, o enfoque do processo de ensino foi dado "*para resolução de problemas*". Em relação aos problemas apresentados, o autor considerou que em sua maioria são convencionais, sendo trabalhadas poucas situações envolvendo contextos reais e aplicações em outras áreas do conhecimento. Além disso, estes livros apenas classificaram os problemas quanto ao tipo de agrupamento, sem se preocuparem com o desenvolvimento do pensamento combinatório.

As informações coletadas através dos diferentes instrumentos (questionários, entrevistas e análise de livros) e de seus respectivos agentes (alunos, professores e livros didáticos), incorporada ao estudo da resolução de problemas e da **Análise Combinatória**, possibilitaram que Santos (2011) elaborasse, como produto final de sua pesquisa, uma proposta pedagógica de ensino contendo sugestões de atividades para os professores abordarem os conceitos combinatórios utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.

A proposta elaborada por Santos (2011) é composta de 6 sugestões de atividades para o ensino da combinatória no Ensino Médio, onde são abordados os conceitos do princípio aditivo e multiplicativo da contagem, permutações simples, permutações com repetição, permutações circulares e combinações simples. Cada atividade proposta apresenta as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, um problema gerador através do qual os conceitos serão construídos e formalizados, e as fórmulas sistematizadas. Além disso, ao final de cada etapa, o autor traz a sugestão de outros problemas que podem ser utilizados para avaliar o entendimento dos alunos sobre os temas estudados. Nessa proposta, as fórmulas somente serão utilizadas após a compreensão dos conceitos e padrões envolvidos.

Assim como Santos (2011), acreditamos que a abordagem da **Análise Combinatória** através de sequências de atividades e utilizando a metodologia da resolução de problemas pode trazer benefícios para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, e em nosso trabalho também adotamos esse método de ensino que segue os passos sugeridos por (Onuchic e Allevato, 2011).

No entanto, apesar de adotamos em nossa proposta a mesma metodologia empregada por Santos (2011), é preciso destacar que o autor procura, em sua pesquisa, desenvolver as atividades objetivando a construção significativa das fórmulas que serão utilizadas na resolução dos problemas. Já neste estudo, o enfoque no trabalho com a **Análise Combinatória** é dado às estratégias de resolução que são adotadas pelos estudantes, procurando sistematizar e utilizar o princípio multiplicativo e a divisão como recursos para resolver os problemas de contagem.

Mendonça (2011) realizou um estudo tendo como objetivo investigar as possibilidades de compatibilizar perspectivas construtivistas da aprendizagem com a planificação de ensino, em um trabalho colaborativo realizado pela pesquisadora e professoras colaboradoras, no campo de ensino da **Análise Combinatória**. Também, procurou analisar se o desempenho docente durante a realização das atividades estava condizente com a perspectiva construtivista inserida na Trajetória Hipotética de Aprendizagem - THA de Pires e Traldi, (2007). Esse estudo faz parte de um projeto do Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP que trabalha com a THA no Ensino Médio.

A autora desenvolveu sua pesquisa com a colaboração de quatro professoras, que realizaram o trabalho junto a um grupo de 104 alunos de 2º e 3º anos do Ensino Médio da rede pública estadual paulista das cidades de Santo André e Embu-Guaçu.

Na proposta da THA sugerida pela pesquisadora para o ensino da combinatória, os professores não deveriam iniciar o trabalho desse conteúdo empregando fórmulas, mas sim utilizando situações de aprendizagem que possibilitassem aos alunos construírem seus conhecimentos sobre o tema através da exploração e resolução de problemas. Além disso, as atividades deveriam ser trabalhadas de forma a oportunizar a criação de diferentes estratégias de resolução e registro de possibilidades; assim como, explorar as particularidades de cada tipo de problema de contagem e a sistematização dos conceitos e das fórmulas combinatórias. Cabendo ao docente o papel de mediar esse processo criando um ambiente de estímulo ao comportamento investigativo e questionador dos educandos.

A pesquisadora acompanhou a aplicação das atividades como observadora, gravando e registrando a anotação dos dados relevantes das aulas (características, comentários, atuação do professor e sua interação com os alunos numa perspectiva de trabalho construtivista) para análise do trabalho realizado.

Na conclusão de seu trabalho Mendonça (2011) constata que é possível compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o processo de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória**. Porém, avalia como difícil a tarefa de elaborar uma THA, uma vez que em sua prática os professores não estão habituados a preparar atividades considerando os conhecimentos prévios dos alunos, definindo objetivos, expectativas de aprendizagem e antecipando as dificuldades que possam surgir durante o desenvolvimento dos trabalhos. Além disso, essa metodologia exige do professor planejamento contínuo das atividades, comprometimento e muito estudo e pesquisa. Acreditando, que essa tarefa é mais condizente com a função do pesquisador, a autora sugere que uma versão inicial da THA pode ser elaborada pelo pesquisador, que pode servir como ponto de partida para o professor, que ao realizar seu trabalho, vai aprofundar seus conhecimentos. Assim, o professor interagindo com os alunos e avaliando os resultados, irá propondo modificações, e posteriormente poderá elaborar suas próprias THA. Outra sugestão da pesquisadora é trabalhar THA como uma proposta para formação continuada de professores.

Compartilhamos da mesma opinião da pesquisadora com relação ao ensino da combinatória partindo de situações de aprendizagem que foque o aluno como construtor do conhecimento através da resolução de problemas, que se utilize de sequências de atividades como forma de oportunizar o estudo, explorando os invariantes dos problemas combinatórios e as diferentes formas de resolver e representar os agrupamentos.

Pessoa (2009), em sua tese de doutorado, investigou o desempenho e as estratégias de alunos da Educação Básica em seus três níveis de escolarização (Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio), em relação à resolução de problemas que envolvem raciocínio combinatório. O estudo foi realizado com 568 alunos de quatro escolas de Pernambuco, duas públicas e duas particulares, que responderam, individualmente, a um questionário contendo 8 questões envolvendo os quatro tipos de problemas combinatórios: *arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano*, sendo dois de cada tipo. Além disso, os quatro problemas inicias envolviam um número maior de possibilidades e os quatro últimos um número menor de agrupamentos.

Foi realizada uma análise qualitativa e quantitativa dos dados coletados. Na avaliação qualitativa observou-se as estratégias e os tipos de respostas que os estudantes apresentaram para os problemas combinatórios, e na quantitativa procurou-se avaliar o desempenho dos alunos analisando variáveis, como gênero, tipo de escola, nível de ensino, ano de escolarização, significados dos problemas e ordem de grandeza dos números apresentados nos problemas.

Quanto ao estudo das variáveis, a autora afirmou que embora não tenha organizado a coleta em função do gênero, seu estudo confirmou a hipótese de que essa variável não influencia no aprendizado da Matemática, já que homens e mulheres apresentaram desempenhos bem próximos. Em relação ao tipo de escola, a pesquisadora verificou que os alunos das escolas públicas e particulares pesquisadas apresentaram desempenho semelhante no inicio da escolarização, porém à medida que o nível de escolarização avança os estudantes da escola particular apresentaram um melhor desempenho. A pesquisadora atribuiu esse acontecimento a metodologia de concepções construtivista que é trabalhada na escola particular onde foi realizada a pesquisa. No entanto, a autora ressalvou que não podemos generalizar esse resultado, já que as características e a qualidade variam de escola para escola.

Em relação ao nível de ensino, os alunos apresentaram diferenças significativas no nível de desempenho, seja na escola particular ou na pública, quando avança a escolarização. A pesquisadora acredita que essa constatação sugere que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é influenciado pelo estudo da combinatória, pelas experiências informais e por outros conteúdos ou até outras áreas do conhecimento.

A pesquisadora esperava que o maior avanço entre os níveis de ensino aconteceria nos alunos do Ensino Médio, uma vez que o conteúdo de **Análise Combinatória** é trabalhado nessa esfera de ensino. No entanto, observou que o maior progresso aconteceu entre o Ensino Fundamental I e II, levando-a a concluir que o desempenho dos alunos é influenciado por experiências escolares e extraescolares relacionadas ou não a combinatória. E ainda observou que, entre os alunos do 3º ano do Ensino Médio, há também um misto de conhecimento formal com experiências informais, pois o uso de fórmulas nesse ano de escolarização foi detectado apenas entre os estudantes da escola particular.

Quanto aos significados dos problemas na **Análise Combinatória** (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), a autora verificou que com o avanço da escolarização, acontece um progresso no nível de entendimento dos significados dos problemas. Além disso, constatou que os problemas do tipo cartesiano são os que os alunos apresentaram melhor desempenho, e o de combinação simples são os que apresentam maior dificuldade.

Pessoa (2009) verificou que a última variável analisada, a ordem de grandeza numérica dos problemas, influenciou o desempenho dos alunos já que nas questões que apresentavam um maior número de possibilidades, o desempenho dos alunos foi baixo e, nas questões com um número menor de agrupamentos, os estudantes mostraram um melhor desempenho. A autora acreditou que isso aconteceu porque com um número menor de possibilidades é possível manipular os dados com mais facilidade.

Em relação às estratégias e ao tipo de resposta apresentadas pelos os alunos, Pessoa (2009) observou que os estudantes demonstraram compreender as características e os significados dos problemas combinatórios, pois apresentaram táticas e respostas variadas para resolução das questões, mesmo que esse conteúdo ainda não tivesse sido trabalhado. E, sugeriu que a análise dessas respostas e estratégias, é importante para que o professor possa perceber as dificuldades, e intervir de forma a garantir a compreensão e o desenvolvimento dos conceitos combinatórios pelos alunos.

Pessoa (2009) concluiu que o pensamento combinatório se desenvolve durante um longo período de tempo, e está atrelado aos conhecimentos formais, e as vivências extraescolares relacionadas diretamente ou não às situações da combinatória. Além disso, enfatiza a importância do trabalho formal que deve ser realizado pela escola no processo de sistematização do conteúdo da **Análise Combinatória**.

Assim como a autora acordamos que o trabalho formal com o conteúdo da **Análise Combinatória** no Ensino Médio é muito importante para o aluno sistematizar estratégias e formalizar os conhecimentos. Também acreditamos que isso deve acontecer de forma a oportunizar o entendimento dos conceitos trabalhados, os invariantes dos problemas combinatórios e o incentivo às estratégias variadas de resolução.

Os trabalhos analisados revelam que o uso de fórmulas e procedimentos mecânicos sem compreensão não favorece o processo de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória**, ao contrário, cria muitas dificuldades e desestimula os alunos. Esses estudos apontam para importância de se abordar a combinatória a partir da resolução de problemas. E, recomendam a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos, a utilização de diferentes formas de registro dos agrupamentos, o trabalho com estratégias diversificadas, a exploração dos invariantes de cada problema combinatório, e, em sua maioria, a construção significativa das fórmulas.

Entendemos também que esses pontos são muito importantes para o ensino da **Análise Combinatória** no Ensino Médio, por isso, em nossa proposta procuramos abordá-los e explorá-los. No entanto, não acreditamos que a construção das fórmulas seja um fator essencial, mesmo que os alunos compreendam e participem dessa construção. Uma vez que fazendo uso de estratégias como o PFC e a divisão para evitar a contagem dos agrupamentos repetidos, é possível desenvolver o pensamento combinatório dos alunos de forma mais significativa e sem a preocupação de modelos formais, que de certo modo vão mecanizar os processos de resolução dos problemas combinatórios.

O estudo destes trabalhos propiciou relacionar e comparar as nossas ideias em relação ao ensino da **Análise Combinatória** com as opiniões de outros pesquisadores, e oportunizou também analisar em que aspectos a proposta que pretendíamos construir seria diferente de outras já desenvolvidas. Neste sentido, observou-se que a maioria das pesquisas realizadas faz a utilização de fórmulas, o que justifica a realização de estudos que oportunize o desenvolvimento dos conceitos combinatórios sem o emprego de algoritmos.

3 Uma Abordagem sem Fórmulas

3.1 Objetivos e Métodos

Os estudos realizados nos capítulos anteriores fundamentaram a elaboração de uma proposta didática para abordagem da **Análise Combinatória** no Ensino Médio, sem a utilização de procedimentos mecânicos que não apresentam significado cognitivo, e que possibilita aos alunos desenvolver o raciocínio combinatório através da exploração de diferentes estratégias de resolução para os problemas de contagem.

Como foi mencionado anteriormente, adotaremos nesta proposta a metodologia de ensino **via resolução de problemas** e a **não utilização de fórmulas**, intencionando que os alunos compreendam os conceitos envolvidos no tema abordado. Os problemas sugeridos envolvem situações simples do cotidiano e linguagem acessível aos educandos. Para solucioná-los, é importante que os mesmos utilizem os conhecimentos sobre combinatória como meio e não como fim, não devendo haver preocupação apenas com a resposta final, e sim com a maneira como se mobilizam para buscá-las, valendo-se da reflexão, criatividade, troca de ideias e de conhecimentos prévios adquiridos nas experiências extraescolares e em atividades informais ou da sala de aula.

A partir de pesquisas realizadas sobre: o processo de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória**, as dificuldades e a compreensão do raciocínio combinatório e da própria experiência em sala de aula, não se priorizou nessa proposta de ensino as definições formais dos conceitos de *arranjo, permutação e combinação*, nem o uso de fórmulas; o que possibilitará ao aluno desenvolver o pensamento combinatório, a criatividade, a capacidade de resolver problemas, de abstrair e generalizar.

Nesse sentido, Almeida (2010, p.22), destaca que:

> *Para os estudantes da Educação Básica, entendemos que a ênfase deve ser dada na resolução de problemas combinatórios, por meio de métodos como o diagrama de possibilidades e a observação de padrões, o que, possivelmente, levará à generalização desses modelos. A linguagem utilizada não precisa ser simbólica, pode apenas descrever o modelo.*

A utilização das fórmulas no ensino da **Análise Combinatória** mecaniza os procedimentos e termina por avaliar o resultado final em detrimento do processo de resolução, deixando assim de valorizar e explorar as estratégias e ideias construídas pelos alunos.

Segundo Dornelas (2004, p.2):

> *A construção mecânica de conteúdos leva professores e alunos a abdicar da importância dos conceitos, definições, propriedades e princípios, se detendo nos simplifismos de algumas fórmulas que muitas vezes não se adéquam à resolução porque o aluno não consegue discernir ao menos a que especificidade da análise combinatória o problema trata.*

Neste contexto, os objetivos a serem alcançados em meio à realização deste estudo são:

Objetivo Geral:

Elaborar uma proposta pedagógica de ensino que se trabalhe a **Análise Combinatória** voltada para o Ensino Médio, sem o uso de fórmulas, fundamentada em estudos sobre desenvolvimento do pensamento combinatório através da resolução de problemas e enfatizando o **Principio Fundamental de Contagem** como principal estratégia de resolução.

Objetivos Específicos:

✓ Construir uma sequência de atividades a serem desenvolvidas em grupos de três ou quatro alunos que favoreçam a construção dos conceitos da combinatória a partir de situações-problema;

✓ Desenvolver o raciocínio combinatório do educando valorizando seus conhecimentos prévios e estratégias próprias de contagem na resolução dos diferentes problemas de combinatória;

✓ Oportunizar a interação entre professor e alunos quanto à resolução de problemas de contagem, construção de conceitos e a formalização de procedimentos.

Para alcançar tais objetivos, a proposta de ensino que aqui é sugerida deverá acontecer em *quatro momentos*. Sendo:

- ✓ **1º Momento:** Aplicação do Teste Diagnóstico;
- ✓ **2º Momento:** Explorando o Conceito do Princípio Fundamental de Contagem;
- ✓ **3º Momento:** Explorando os Conceitos de Arranjos e Permutações simples;
- ✓ **4º Momento:** Explorando o Conceito de Combinações Simples.

3.2 Análise Combinatória via Resolução de Problemas e sem o Uso de Fórmulas

3.2.1 Aplicação do Teste Diagnóstico

Este teste possui a finalidade de analisar os conhecimentos prévios dos alunos, suas estratégias de resolução, seus erros e dificuldades diante de problemas de contagem que envolvem habilidades básicas da combinatória. A partir desse referencial, o professor deverá refletir sobre o conhecimento dos alunos e, como consequência fazer intervenções que possam contribuir para o processo de aquisição do conhecimento.

Neste momento, os problemas a serem aplicados devem envolver apenas os conceitos de *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação simples*.

Entre as várias possibilidades, sugerimos os problemas a seguir, como ponto de partida:

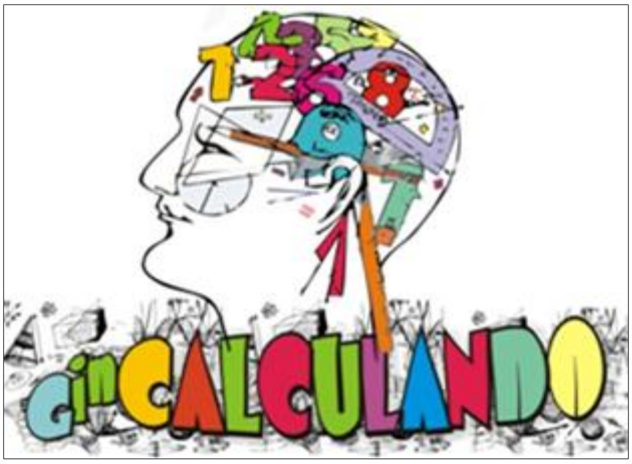
Problema 1 (Adaptado do livro de Bianchini e Paccola (2008, p. 121)) Natália foi a uma concessionária comprar um carro. Para determinado modelo, ela poderia escolher entre três cores (prata, preta e vermelha), três tipos de motor (1.0, 1.4 e 1.6) e três tipos de versões (básico, luxo e superluxo). Quantas possibilidades diferentes ela teria para escolher esse modelo de carro nessa concessionária.

Figura 1 - Imagem do Problema 1

Fonte: Clip-art Word 2003

PROBLEMA 2 (Adaptado do livro de Ribeiro (2010, p. 196)) No colégio Beta, seis equipes, A, B, C, D, E e F estão participando da gincana do Dia da Matemática. Somente o primeiro e o segundo colocados serão premiados. Quantas são as possibilidades de duas dessas equipes receberem o prêmio?

Figura 2 - Imagem do Problema 2



Fonte: http://gincalculando.blogspot.com.br

PROBLEMA 3 (Adaptado do livro de Smole e Diniz (2010, p. 133)) Uma empresa vai colocar código em alguns produtos em fase de testes. Ficou resolvido que para esses testes serão usados códigos formados por 4 algarismos diferentes, escolhidos entre 1, 2, 3 e 4. Considerando que cada produto receberá um código, quantos produtos entrarão em fase de teste?

Figura 3 - Imagem do Problema 3

Fonte: http://www.baixaki.com.br/categorias/420-codigo-de-barras.htm

PROBLEMA 4 (Adaptado do livro de Ribeiro (2010, p. 202)) O gerente de uma empresa decidiu formar uma equipe com três pessoas para executar certo trabalho. Para formar a equipe, ele deveria escolher entre quatro pessoas: Carlos, Ana, Bia e Daniel. Quantas são as possibilidades de formar essa equipe?

Figura 4 - Imagem do Problema 4

Fonte: http://www.fotosearch.com.br/fotos-imagens/quatro-pessoas.html

Para aplicação do **teste diagnóstico**, supõe-se que os alunos busquem utilizar métodos diversos que venham a facilitar a solução das questões. No entanto, de acordo com estudos realizados por outros pesquisadores (ALMEIDA, 2010 e MENDONÇA, 2011), constata-se que uma das estratégias mais utilizadas na resolução destes tipos de problemas é a *listagem* de todos os agrupamentos com o uso ou não de formas de representação dessa listagem. Enfatizamos que os educandos, nesta etapa, podem apresentar dificuldades na interpretação das situações-problema, desinteresse e utilização falha dos métodos ou regras. Desse modo, o aluno deverá ser avaliado durante a realização do teste diagnóstico através da *participação* e demonstração do seu *interesse*.

A aplicação do teste de diagnóstico é essencial para avaliar a melhor maneira de inserir a estratégia de resolução de problemas, em meio ao processo de ensino-aprendizagem da **Análise Combinatória** no Ensino Médio, uma vez que, a partir do instante que o educador consegue diagnosticar as dificuldades dos alunos quanto ao conteúdo em estudo, pode intervir buscando auxiliá-los na superação dessas dificuldades.

3.2.2 Explorando o Conceito do Princípio Fundamental de Contagem

Nesta etapa, utilizamos a aplicação de problemas sobre princípio multiplicativo, buscando a sistematização desse conceito que passará a ser utilizado como estratégia para resolução dos problemas de contagem.

Pretendemos assim:

✓ Explorar os variados tipos de representações (*árvore de possibilidades, diagramas e tabelas*) para a listagem dos agrupamentos;

✓ Compreender e sistematizar o PFC e aplicá-lo como método de resolução.

Durante a aplicação dos problemas, a metodologia utilizada versa sobre solucionar as situações-problema por parte dos alunos agrupando-os em equipes de três ou quatro alunos, fazendo com que busquem por estratégias que sirvam como ponto de partida para se obter êxito frente à atividade proposta. Desse modo, a atividade em grupo dentro do estudo não só sobre **Análise Combinatória**, como também diversos outros conteúdos matemáticos é essencial para o desenvolvimento da aprendizagem frente ao contexto educacional.

Segundo Almeida (2010, p.31):

> *Mais do que ensinar a um aluno como resolver problemas, oferecendo-lhe habilidades e técnicas, é necessário garantir o espaço de discussões para que possa aprender consigo mesmo e com os outros. Estabelecer analogias e diferenças entre suas soluções e as dos colegas, aprender com os erros, expressar-se de forma organizada, a fim de defender suas ideias perante os outros, são algumas das contribuições que este espaço pode gerar.*

Nesse sentido, sugerimos aqui e nas demais etapas deste trabalho, o método de resolução de problemas proposto por (Onuchic e Allevto, 2011), que consiste em:

- ✓ preparação do problema,
- ✓ leitura individual,
- ✓ leitura em conjunto,
- ✓ resolução do problema,
- ✓ observar e incentivar,
- ✓ registro das resoluções na lousa,
- ✓ plenária,
- ✓ busca do consenso,
- ✓ formalização do conteúdo.

Ao longo desta proposta, os problemas cuja resolução envolvem poucos agrupamentos devem ser solucionados utilizando as diversas estratégias construídas pelos alunos e, aqueles que abrangem um número relativamente grande de possibilidades, podem ser utilizados com o intuito de generalizar os procedimentos de resolução, levando a formalização do raciocínio sobre os conceitos em questão. Deve-se pensar em definições após as formalizações.

A avaliação dos alunos neste momento deve ser desenvolvida de modo contínuo, uma vez que deve-se levar em consideração não só o interesse, mas também a desenvoltura e interação do educando em meio à realização da atividade em grupo.

De acordo com (Hoffmann, 2000, p. 72):

> *(...) a ação avaliativa deve partir do fazer do aluno, essa ação intenciona principalmente, a compreensão dos fenômenos e dos objetos. Cabe observar se o professor está atento à provocação necessária ao processo de compreender. Mais especificamente, uma ação avaliativa mediadora envolveria um complexo de processos educativos (que se desenvolveriam a partir da análise das hipóteses formuladas pelo educando, de suas ações e manifestações) visando essencialmente o entendimento. Tais processos mediadores objetivariam encorajar e orientar os alunos à produção de um saber qualitativamente superior, pelo aprofundamento às questões propostas, pela oportunidade de novas vivências, leituras ou quaisquer procedimentos enriquecedores ao tema em estudo.*

Assim, o instrumento de avaliação utilizado neste segundo momento pode ser justamente, os problemas aplicados.

Nos problemas sugeridos abaixo, optamos por questões em que o número de possibilidades de agrupamentos vai aumentando gradativamente. Sendo assim, nos dois problemas iniciais o aluno pode utilizar diferentes formas de representação: árvore de possibilidades, diagramas e tabelas e, consequentemente, através desta exploração perceber a multiplicação de todas as possibilidades como um procedimento de resolução, o que ajudaria na compreensão e formalização do PFC, que pode ser utilizado como estratégia para a resolução dos dois últimos problemas, onde os educandos deverão perceber que as estratégias anteriores podem tornar-se cansativas e desestimulantes.

PROBLEMA 5 (Adaptado do livro de Paiva (2009, p. 154)) Ao concluir o Ensino Médio, Ana Paula pretende ingressar em apenas uma de duas universidades, uma pública e outra particular, escolhendo apenas um dos cursos entre Administração, Economia ou Direito. Cada um desses cursos é oferecido no período da manhã ou da tarde.

a) Em relação à universidade e ao curso, quantas opções de escolha tem essa estudante?

b) Em relação à universidade, ao curso e ao período, quantas opções de escolha tem essa estudante?

Figura 5 - Imagem do Problema 5

Fonte: http://www.riodasostras.rj.gov.br/noticia60.html **e** http://veja.abril.com.br/1000-fatos-2011/a-ascensao-das-universidades-brasileiras.shtml

Solução. O problema pode ser resolvido utilizando as seguintes estratégias:

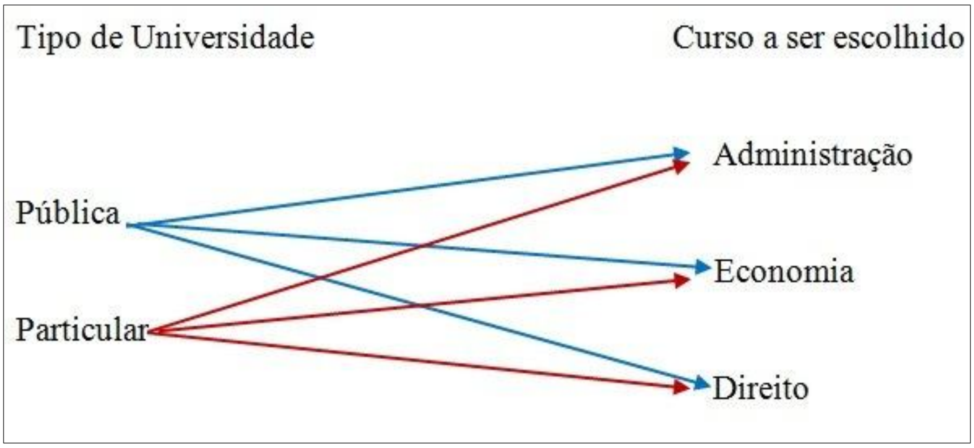
a)

✓ Enumerar todas as possibilidades de agrupamentos;

Pública e Administração	**Particular e Administração**
Pública e Economia	**Particular e Economia**
Pública e Direito	**Particular e Direito**

✓ Utilizar um diagrama;

Figura 6 - Diagrama de possibilidades - Problema 5a



Totalizando 6 opções diferentes de escolha para a universidade e o curso.

✓ Montar uma tabela de dupla entrada;

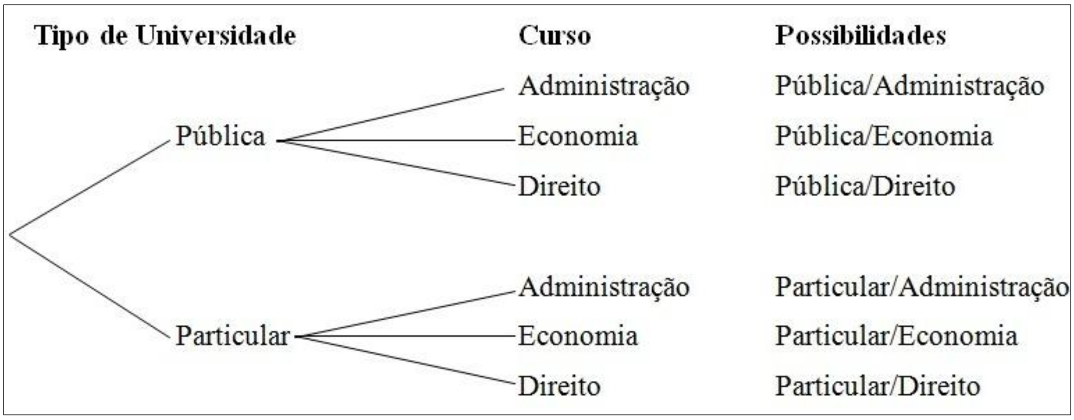
Tabela 1: Escolhas possíveis para universidade e curso – Problema 5a

	Curso a ser escolhido		
Tipo de Universidade	**Administração**	**Economia**	**Direito**
Pública	Pública/Administração	Pública/Economia	Pública/Direito
Particular	Particular/Administração	Particular/Economia	Particular/Direito

Totalizando 6 opções diferentes de escolha para a universidade e o curso.

✓ Construir a árvore de possibilidades;

Figura 7 - Árvore de possibilidades - Problema 5a



Totalizando 6 opções diferentes de escolha para a universidade e o curso

✓ Multiplicar todas as possibilidades de escolha de cada evento: universidade e curso, percebendo assim a ideia do PFC.

A ideia é que o aluno entenda que Ana Paula pode escolher uma entre duas universidades. Feita essa escolha, é preciso decidir entre um dos três cursos disponíveis. Ou seja:

Quadro 1 – Aplicação do PFC – Problema 5a

$$\underbrace{2}_{\text{Tipos de Universidade}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Curso}} = \underbrace{6}_{\text{nº de possibilidades}}$$

b)

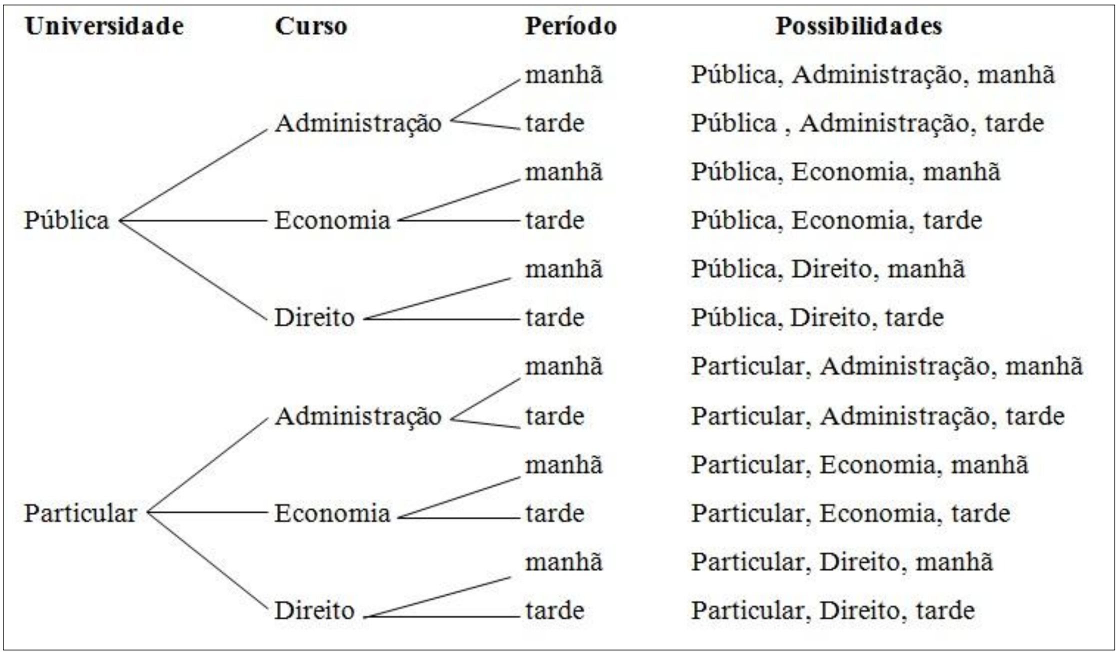
✓ Enumerar todas as possibilidades de agrupamentos;

Pública, Administração, manhã	**Pública, Administração, tarde**
Pública, Economia, manhã	**Pública, Economia, tarde**
Pública, Direito, manhã	**Pública, Direito, tarde**
Particular, Administração, manhã	**Particular, Administração, tarde**
Particular, Economia, manhã	**Particular, Economia, tarde**
Particular, Direito, manhã	**Particular, Direito, tarde**

Totalizando 12 opções diferentes de escolha para a universidade, o curso e o período.

✓ Construir a árvore de possibilidades;

Figura 8 - Árvore de possibilidades - Problema 5b



Totalizando 12 opções diferentes de escolha para a universidade, o curso e o período.

✓ Multiplicar todas as possibilidades de escolha de cada evento: universidade, curso e período, percebendo assim a ideia do PFC.

De forma análoga ao item anterior espera-se que o educando perceba que Ana Paula pode escolher uma entre duas universidades. Feita essa escolha, é preciso decidir entre um dos três cursos e por último, ela deve escolher um entre os dois horários disponíveis. Isto é:

Quadro 2 – Aplicação do PFC – Problema 5b

$$\underbrace{2}_{\text{Tipos de Universidade}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Curso}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Período}} = \underbrace{12}_{\text{nº de possibilidades}}$$

Acreditamos que os alunos consigam resolver o problema inicial, devido ao pequeno número de agrupamentos, sem dificuldades.

A *listagem de possibilidades* e suas possíveis formas de representação ajudam no entendimento dos conceitos envolvidos, por isso caso algumas das estratégias sugeridas aqui não sejam utilizadas pelos alunos como, por exemplo, a *árvore de possibilidades*, é interessante que o professor, no grande grupo, também enfoque e apresente essas táticas de resolução.

Todas as estratégias utilizadas para solucionar o problema devem ser valorizadas, pois são exatamente os procedimentos de resolução adotados pelos alunos que devem ser colocados em plenária para serem discutidos pelo grande grupo, buscando um consenso sobre a solução do problema, seguido posteriormente, de uma formalização dos conceitos, propriedades sobre os conhecimentos em questão.

É o que nos afirma (Pessoa e Borba, 2009, p. 11):

> *As diferentes formas de representação simbólica apresentadas pelos alunos refletem as diferentes maneiras de pensar sobre um mesmo problema. É importante que a escola esteja atenta a estas representações e as levem em consideração no trabalho com estes e outros tipos de problemas. Ou seja, eles desenvolvem interessantes estratégias que devem ser aproveitadas pela escola para ajudá-los a avançar na compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual.*

PROBLEMA 6 (Adaptado do livro de Souza (2010, p. 219)) A seguir estão apresentadas as opções que uma pessoa tem ao realizar a compra de certo pacote turístico em uma agência de viagens.

Tabela 2: Opções de escolha para o pacote turístico – Problema 6

Transporte	Hospedagem	Tempo de permanência
Rodoviário	**Pousada**	**4 dias**
Aéreo: 1ª classe	**Hotel: 3 estrelas**	**7 dias**
Aéreo: 2ª classe	**Hotel: 4 estrelas**	**10 dias**
	Hotel: 5 estrelas	

Fonte: Souza (2010, p. 219)

a) Se a pessoa optar por transporte aéreo e hospedagem em hotel, de quantas maneiras distintas ela pode compor o pacote turístico?

b) De quantas maneiras distintas a pessoa pode compor o pacote turístico?

Solução: Para esse problema podem ser usadas as seguintes estratégias de resolução:

a)

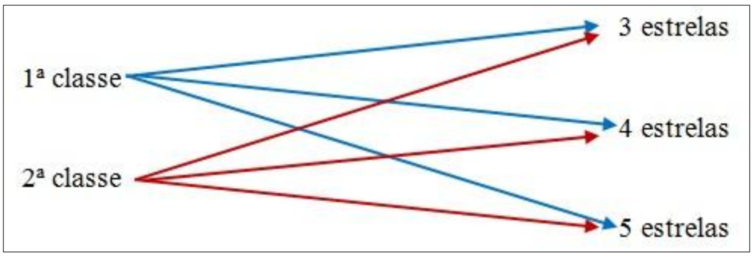
✓ Enumerar todas as possibilidades de agrupamentos;

Aéreo: 1ª classe e Hotel: 3 estrelas
Aéreo: 1ª classe e Hotel: 4 estrelas
Aéreo: 1ª classe e Hotel: 5 estrelas
Aéreo: 2ª classe e Hotel: 3 estrelas
Aéreo: 2ª classe e Hotel: 4 estrelas
Aéreo: 2ª classe e Hotel: 5 estrelas

Portanto, são 6 possíveis escolhas diferentes de transporte aéreo e hospedagem em hotel.

✓ Utilizar um diagrama;

Figura 9- Diagrama de possibilidades - Problema 6a



Portanto, são 6 possíveis escolhas diferentes de transporte aéreo e hospedagem em hotel.

✓ Montar uma tabela de dupla entrada;

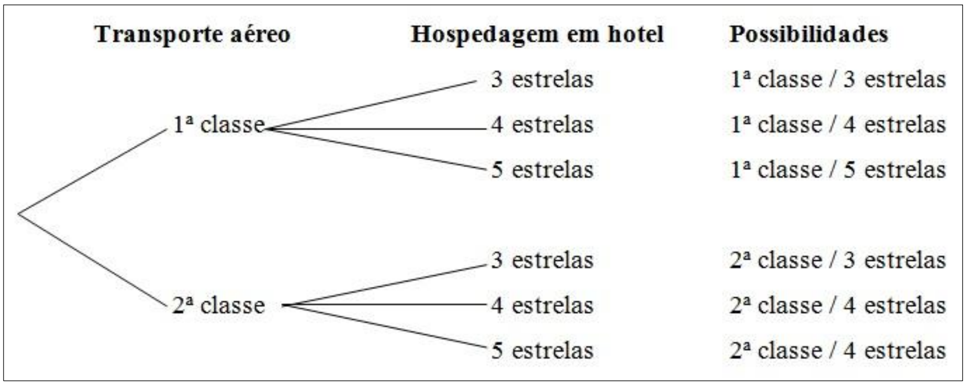
Tabela 3: Escolhas possíveis para transporte aéreo e hospedagem em hotel – Problema 6a

	Hospedagem em hotel		
Transporte aéreo	**3 estrelas**	**4 estrelas**	**5 estrelas**
1ª classe	1ª classe / 3 estrelas	1ª classe / 4 estrelas	1ª classe / 5 estrelas
2ª classe	2ª classe / 3 estrelas	2ª classe / 4 estrelas	2ª classe / 5 estrelas

Portanto, são 6 possíveis escolhas diferentes de transporte aéreo e hospedagem em hotel.

✓ Construir a árvore de possibilidades;

Figura 10 - Árvore de possibilidades - Problema 6a



Portanto, são 6 possíveis escolhas diferentes de transporte aéreo e hospedagem em hotel.

✓ Multiplicar todas as possibilidades de escolha de cada evento: universidade e curso, percebendo assim a ideia do PFC.

A ideia é que o aluno perceba que pode escolher uma entre duas opções de transporte aéreo e, depois dessa escolha; deve decidir entre um dos três tipos de hospedagem em hotel. Ou seja:

Quadro 3 – Aplicação do PFC – Problema 6a

$$\underbrace{2}_{\text{Transporte aéreo}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Hospedagem em hotel}} = \underbrace{6}_{\text{nº de possibilidades}}$$

b)

✓ Enumerar todas as possibilidades de agrupamentos;

Rodoviário, Pousada e 4 dias
Rodoviário, Pousada e 7 dias
Rodoviário, Pousada e 10 dias

Rodoviário, Hotel 3 estrelas e 4 dias
Rodoviário, Hotel 3 estrelas e 7 dias
Rodoviário, Hotel 3 estrelas e 10 dias

Rodoviário, Hotel 4 estrelas e 4 dias
Rodoviário, Hotel 4 estrelas e 7 dias
Rodoviário, Hotel 4 estrelas e 10 dias

Rodoviário, Hotel 5 estrelas e 4 dias
Rodoviário, Hotel 5 estrelas e 7 dias
Rodoviário, Hotel 5 estrelas e 10 dias

Aéreo 2ª classe, Pousada e 4 dias
Aéreo 2ª classe, Pousada e 7 dias
Aéreo 2ª classe, Pousada e 10 dias

Aéreo 2ª classe, Hotel 3 estrelas e 4 dias
Aéreo 2ª classe, Hotel 3 estrelas e 7 dias
Aéreo 2ª classe, Hotel 3 estrelas e 10 dias

Aéreo 2ª classe, Hotel 4 estrelas e 4 dias
Aéreo 2ª classe, Hotel 4 estrelas e 7 dias
Aéreo 2ª classe, Hotel 4 estrelas e 10 dias

Aéreo 2ª classe, Hotel 5 estrelas e 4 dias
Aéreo 2ª classe, Hotel 5 estrelas e 7 dias
Aéreo 2ª classe, Hotel 5 estrelas e 10 dias

Aéreo 1ª classe, Pousada e 4 dias
Aéreo 1ª classe, Pousada e 7 dias
Aéreo 1ª classe, Pousada e 10 dias

Aéreo 1ª classe, Hotel 3 estrelas e 4 dias
Aéreo 1ª classe, Hotel 3 estrelas e 7 dias
Aéreo 1ª classe, Hotel 3 estrelas e 10 dias

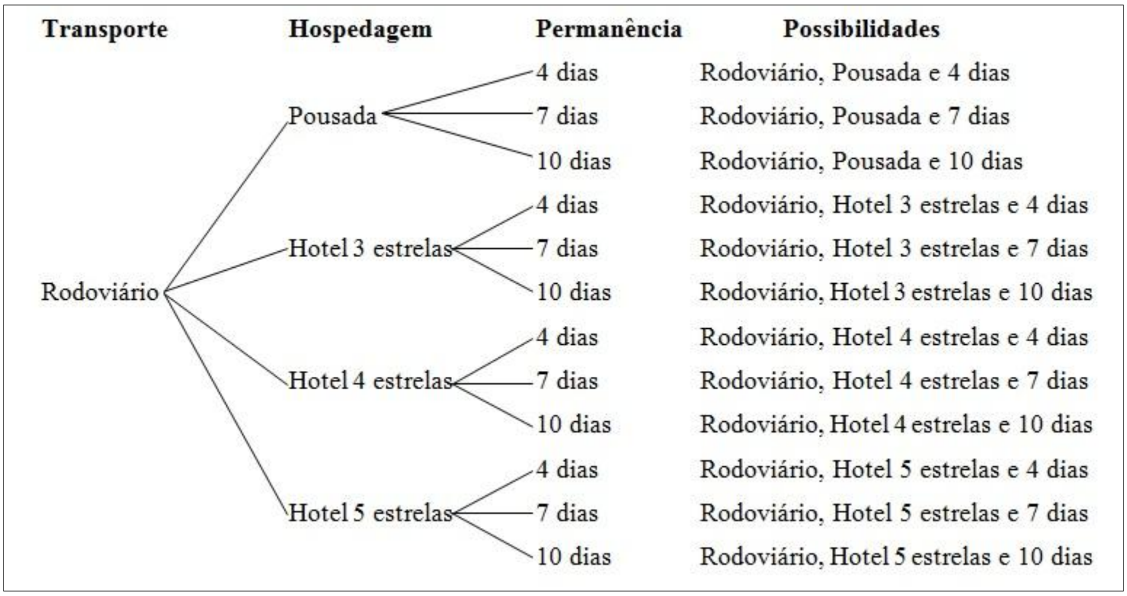
Aéreo 1ª classe, Hotel 4 estrelas e 7 dias
Aéreo 1ª classe, Hotel 4 estrelas e 10 dias
Aéreo 2ª classe, Hotel 4 estrelas e 10 dias

Aéreo 1ª classe, Hotel 5 estrelas e 4 dias
Aéreo 1ª classe, Hotel 5 estrelas e 7 dias
Aéreo 1ª classe, Hotel 5 estrelas e 10 dias

Portanto, são 36 possíveis escolhas diferentes de transporte, hospedagem e tempo de permanência.

✓ Construir a árvore de possibilidades;

Figura 11 - Árvore de possibilidades - Problema 6b



Caso algum grupo utilize o diagrama da árvore como forma de resolução, espera-se que pela construção de um tronco (ou ramo principal) da árvore, os alunos observem que o esquema vai se repetir para os demais tipos de transportes, ou seja, o diagrama da árvore completo constará de três ramos, cada um com 12 possibilidades. Dessa forma, seriam $3 \cdot 12 = 36$ possíveis escolhas diferentes de transporte, hospedagem e tempo de permanência.

✓ Multiplicar todas as possibilidades de escolha de cada evento: transporte, hospedagem e tempo de permanência, percebendo assim a ideia do PFC.

Novamente, espera-se que o estudante entenda que pode escolher uma entre três opções de transporte. Depois dessa escolha, é preciso decidir entre um dos quatro tipos de hospedagem e, finalizar escolhendo um entre os três tipos de permanência disponíveis. Isto é:

Quadro 4 – Aplicação do PFC – Problema 6b

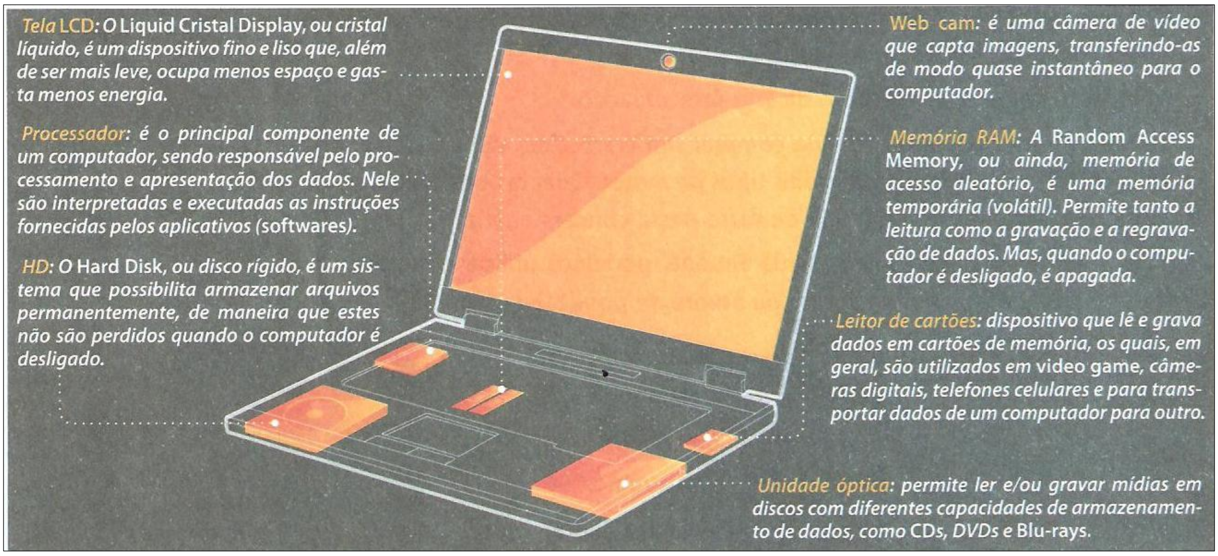
$$\underbrace{3}_{\text{Transporte}} \;.\; \underbrace{4}_{\text{Hospedagem}} \;.\; \underbrace{3}_{\text{Tempo de Permanência}} = \underbrace{36}_{\text{nº de possibilidades}}$$

Embora com um pouco mais de esforço, espera-se que os alunos também solucionem o segundo problema.

Com o aumento do número de possibilidades de agrupamentos é muito importante que o aluno perceba que existem regularidades nesses tipos de problema e, entendam a necessidade de procurar estratégias mais eficientes de resolução sem a necessidade de realizar listagem sistemática ou a representação de todas as possibilidades. Logo, para os últimos problemas espera-se que os educandos adotem a ideia da multiplicação das possibilidades de cada evento como método de resolução.

PROBLEMA 7 (Adaptado do livro de Ribeiro (2010, p. 189)) Um computador pode ser montado com várias possibilidades de configuração. De acordo com as necessidades do usuário, algumas de suas partes, chamadas de hardware, precisam ser mais ou menos potentes, visto que a escolha inadequada de um deles pode aumentar de maneira significativa o custo do computador sem a real necessidade. Veja na figura 12 alguns hardwares que compõem um computador:

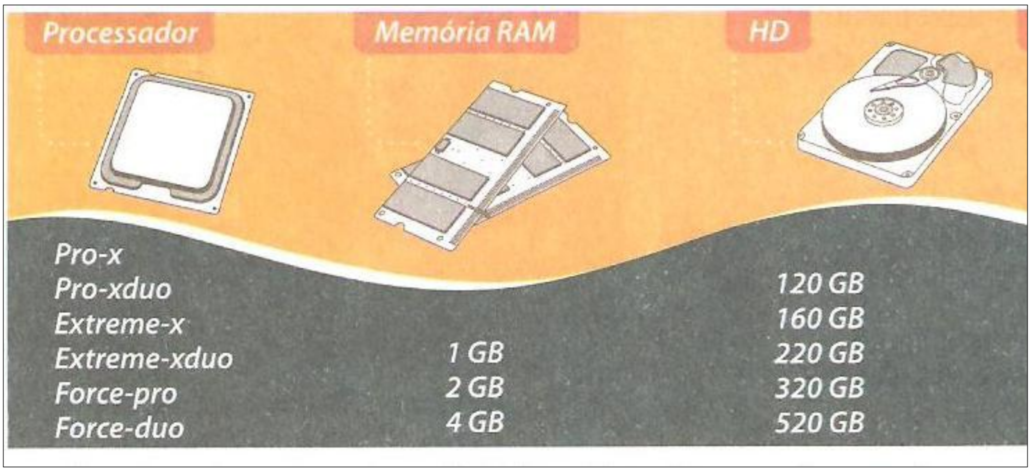
Figura 12 - Infográfico do Problema 7



Fonte: Ribeiro (2010, p. 189)

Carolina pretende comprar um computador, e uma das lojas em que foi, ofereceu as seguintes opções da figura 13:

Figura 13 - Imagem do Problema 7



Fonte: Ribeiro (2010, p. 189)

De quantas maneiras distintas Carolina pode montar o computador nessa loja?

Solução: Estratégias de resolução esperadas:

✓ Enumerar as possibilidades de agrupamentos;

Pro-x, Memória de 1GB e HD de 120 GB
Pro-x, Memória de 1GB e HD de 160 GB
Pro-x, Memória de 1GB e HD de 220 GB
Pro-x, Memória de 1GB e HD de 320 GB
Pro-x, Memória de 1GB e HD de 520 GB

Pro-x, Memória de 2GB e HD de 120 GB
Pro-x, Memória de 2GB e HD de 160 GB
Pro-x, Memória de 2GB e HD de 220 GB
Pro-x, Memória de 2GB e HD de 320 GB
Pro-x, Memória de 2GB e HD de 520 GB

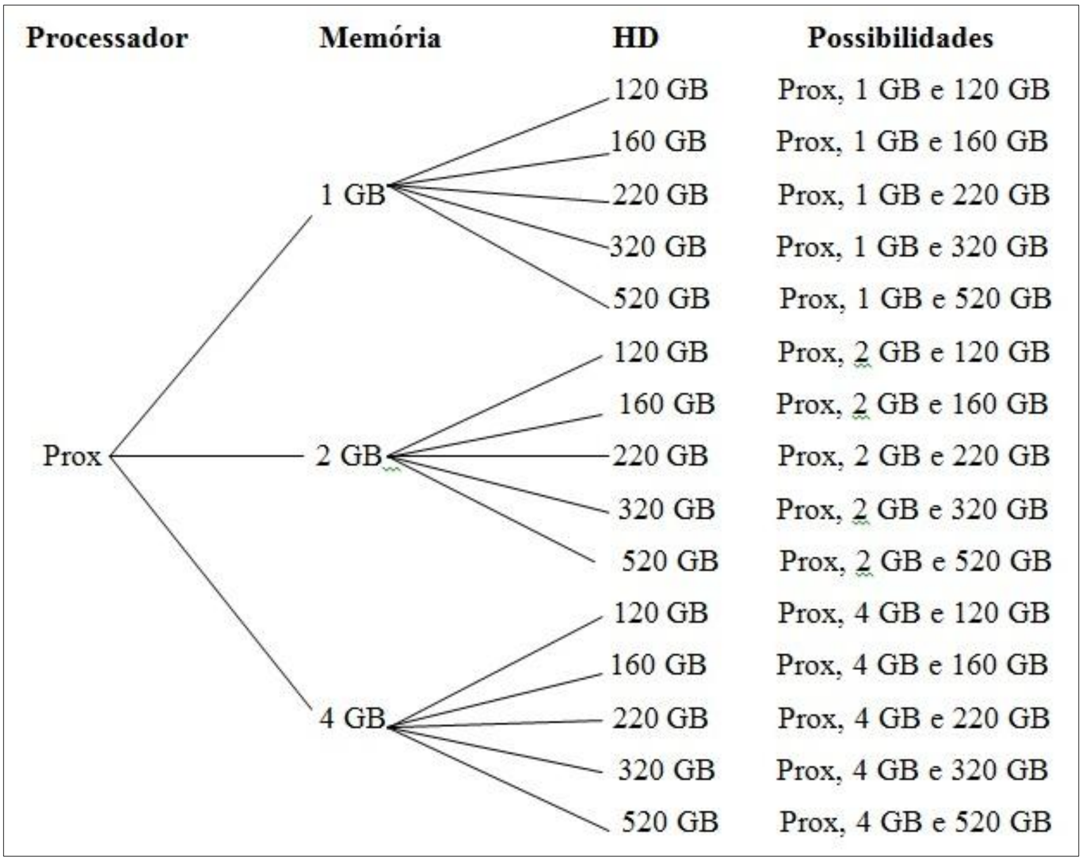
Pro-x, Memória de 4GB e HD de 120 GB
Pro-x, Memória de 4GB e HD de 160 GB
Pro-x, Memória de 4GB e HD de 220 GB
Pro-x, Memória de 4GB e HD de 320 GB
Pro-x, Memória de 4GB e HD de 520 GB

Espera-se que o aluno perceba que existe um padrão e não enumere todos os agrupamentos, uma vez que ao listar as possibilidades fixando um tipo de processador como, por exemplo, o Pro-x e variando os tipos de memória e HD irá obter 15 opções diferentes de escolha. Sendo assim, utilizando o mesmo raciocínio de fixar um processador e alterar ciclicamente os demais elementos para cada uma das outras cinco opções (Pro-xduo, Extreme-x, Extreme-xduo, Force-pro e Force-duo) irá obter 15 possibilidades diferentes em cada situação, o que totalizará 15. 6 = 90 escolhas possíveis, ou seja, para cada opção de memória e HD pode escolher um entre os seis tipos de processador.

É importante que durante a plenária, o professor enfatize essas regularidades como forma de desenvolver o raciocínio combinatório dos alunos.

✓ Construir a árvore de possibilidades;

Figura 14 - Árvore de possibilidades - Problema 7



Caso algum grupo tente utilizar o diagrama da árvore como forma de resolução, espera-se que pela construção de um tronco (ou ramo principal) da árvore, no caso o processador Pro-x, os alunos observem que o esquema vai se repetir para os demais tipos de processadores, ou seja, o diagrama da árvore completo constará de seis ramos principais; cada um com 15 possibilidades. Dessa forma, seriam 6·15 = 90 opções diferentes de escolha para se comprar um computador nessa loja.

✓ Multiplicar todas as possibilidades de escolha de cada evento: processador, memória e HD, percebendo assim a ideia do PFC.

É importante que o estudante entenda que pode escolher uma entre seis opções de processador. Depois dessa escolha, é preciso decidir entre um dos três tipos de memória e, finalizar escolhendo um entre os cinco tipos de HD disponíveis. Isto é:

Quadro 5 – Aplicação do PFC – Problema 7

$$\underbrace{6}_{\text{Processador}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Memória}} \cdot \underbrace{5}_{\text{HD}} = \underbrace{90}_{\text{nº de possibilidades}}$$

PROBLEMA 8 (Adaptado do livro de Paiva (2009, p. 158)) No ginásio da escola de Antônio, os lugares destinados aos espectadores são separados em quatro setores, com a mesma quantidade de cadeiras em cada um: setor azul, vermelho, amarelo e verde. Em um setor, cada cadeira é identificada por uma das cinco vogais, seguida de um dos números naturais de 1 a 50. O bilhete de ingresso ao estádio apresenta uma sequência com uma cor, uma vogal e um número. Assim, por exemplo, (azul-A-8), indica: setor azul, fila A, cadeira 8. Quantas cadeiras são destinadas aos espectadores se o total de cadeiras é igual ao total de possibilidades de identificação?

Figura 15 - Imagem do Problema 8

Fonte: http://www.google.com.br/search?q=imagens+de+ginásios+de+esporte

Solução: Na resolução do último problema acredita-se que o aluno já percebeu que para obter o total de possibilidades de cadeiras destinadas aos expectadores, basta multiplicar todas as opções de escolha de cada evento: setor, fila e identificação da cadeira. Ou seja:

Quadro 6 – Aplicação do PFC – Problema 8

$$\underbrace{4}_{\text{Setor}} \times \underbrace{5}_{\text{Fila}} \times \underbrace{10}_{\text{Cadeira}} = \underbrace{200}_{\text{nº de possibilidades}}$$

Depois de apresentar e debater, no grande grupo, as ideias, estratégias, procedimentos e conceitos desenvolvidos durante a resolução desses problemas, é preciso a partir desse momento enfatizar, organizar e validar as estratégias mais "eficazes" que podem ser utilizadas como ferramenta para resolver problemas mais complexos.

Nesse contexto, é essencial que os alunos observem que no primeiro problema é possível construir estratégias diversificadas de resolução, pois temos um número pequeno de possibilidades de agrupamentos. E, isso acontece também no segundo problema, embora com mais dificuldades. Com o aumento do número de possibilidades, o que acontece nos dois últimos problemas, é possível perceber que algumas dessas estratégias não são muito convenientes, uma vez que se tornaria bastante trabalhoso enumerar todos os agrupamentos ou fazer um diagrama da árvore, por exemplo.

Dessa forma, torna-se fundamental o processo de formalização através do qual é possível generalizar conceitos e estratégias mais adequadas que foram utilizados e construídos durante a resolução dos problemas. Assim, é importante que os alunos compreendam e validem a última estratégia, ou seja, o PFC como recurso capaz de resolver variados problemas da Combinatória, que é o principal objetivo desta etapa.

De acordo com Dornelas (2004, p. 10):

> *(...) com uma abordagem sistemática, adequada e substancial do Princípio Multiplicativo, certamente estaremos contribuindo para o desenvolvimento de potencialidades cognitivas nos alunos, influenciando de maneira positiva não só em sua capacidade de aprendizagem dos conceitos de Arranjos, Permutações e Combinações (derivados do P. M.), como também no reforço de suas capacidades de mobilizar esses conceitos na aplicação à resolução de problemas.*

Segundo Sabo (2010, p.76), o PFC pode ser enunciado depois da exploração e abordagem de problemas envolvendo esse conceito, da seguinte forma:

Se um acontecimento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes para (i = 1, 2, 3, ..., n), então, a sequência de n acontecimentos sucessivos (A_1, A_2, A_3, ..., A_n) pode ocorrer de m_1. m_2. m_3. ... . m_n.

É interessante que após a formalização do PFC, o professor comente que o conteúdo matemático que aborda este tipo de problema é a **Análise Combinatória**, enfatizando sua importância em meio ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática e de outras áreas e sua aplicabilidade em situações práticas.

3.2.3 Explorando os Conceitos de Arranjos e Permutações Simples

Esta fase gira em torno da aplicação de problemas sobre arranjos e permutações simples, cuja resolução pode ser feita pelos alunos através da utilização do PFC percebendo as particularidades dos novos conceitos envolvidos nos problemas.

Os objetivos a serem atingidos neste momento são:

✓ Perceber que a ordenação dos elementos nos agrupamentos produz novos agrupamentos;

✓ Aplicar o **Princípio Multiplicativo** como principal estratégia de resolução;

✓ Analisar e compreender os conceitos de arranjo e permutação simples, diferenciando-os em situações-problema.

É essencial no ensino e aprendizagem da Matemática que o professor discuta com os alunos em sala de aula os problemas aplicados aos grupos, valorizando a troca de ideias e opiniões, assim como as estratégias de resolução apresentadas pelos educandos. Por isso os procedimentos metodológicos adotados para resolução dos problemas seguem as orientações de (Onuchic e Allevato, 2011) que já foram citados no segundo momento.

Na atividade proposta, o nono e o décimo primeiro problemas são de arranjo simples, já o décimo e o décimo segundo são sobre *permutações simples*. A opção por alternar os problemas é fazer o aluno perceber diferenças e ao mesmo tempo estabelecer relações entre os conceitos envolvidos e levá-los a entender a *permutação* como um caso particular de *arranjo*.

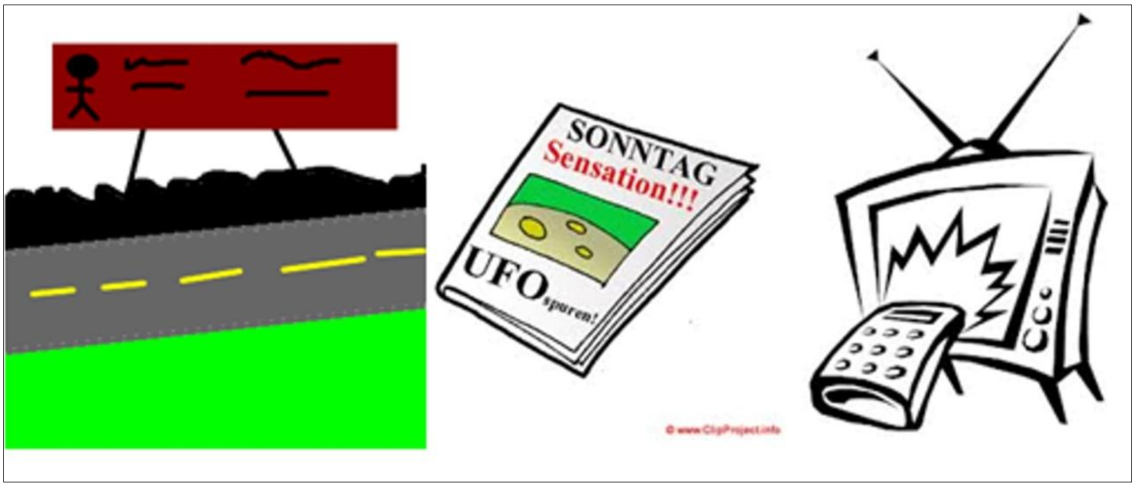
Caso os alunos não utilizem adequadamente o PFC, é interessante que o professor incentive o uso de recursos como a *listagem das possibilidades* ou o *diagrama da árvore* nos problemas iniciais, uma vez que auxiliaria na percepção das regularidades dos conhecimentos trabalhados.

Os alunos serão avaliados de forma processual, o que ocorrerá mediante a análise das respostas dos grupos e desenvolvimento de estratégias realizadas pelos mesmos, o entendimento dos conceitos trabalhados, respeitando-se o nível de conhecimento, interação em grupo, verbalização e socialização de ideias. Sendo os problemas propostos o instrumento de avaliação a ser utilizado.

Os problemas que sugerimos neste momento são:

PROBLEMA 9 (Adaptado do livro de Souza (2010, p. 225)) Uma empresa possui uma linha com cinco produtos diferentes (A, B, C, D e E). O departamento de marketing dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizará três tipos de anúncio para divulgação dos produtos: outdoor, jornal e televisão. Sabendo que em cada tipo de anúncio apenas um dos produtos será divulgado e que um mesmo produto não participa de mais de um anúncio, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária?

Figura 16 - Imagem do Problema 9



Fonte: http://gartic.uol.com.br/desenhos/outdoor

Solução: O problema pode ser resolvido utilizando as seguintes estratégias:

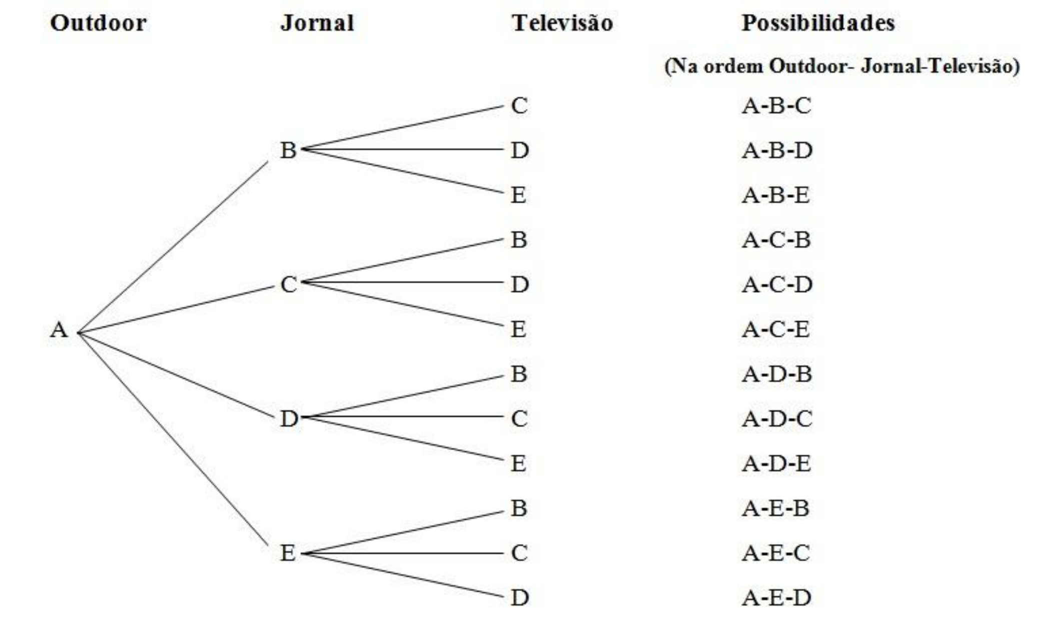
✓ Enumerar todas as possibilidades de agrupamentos;

Outdoor e Produto A, Jornal e Produto B, Televisão e Produto C
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto B, Televisão e Produto D
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto B, Televisão e Produto E
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto C, Televisão e Produto B
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto C, Televisão e Produto D
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto C, Televisão e Produto E
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto D, Televisão e Produto B
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto D, Televisão e Produto C
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto D, Televisão e Produto E
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto E, Televisão e Produto B
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto E, Televisão e Produto C
Outdoor e Produto A, Jornal e Produto E, Televisão e Produto D

Nesse caso, não há necessidade de listar todos os agrupamentos, basta perceber que existe um padrão, ou seja, ao listar as possibilidades fixando um tipo de produto e um tipo de anuncio como, por exemplo, outdoor e o produto A e variando os outros tipos de anúncios e produtos, obtemos 12 opções diferentes de escolha. Sendo assim, fixando o outdoor e o produto B (ou o outdoor e o produto C, outdoor e o produto D, outdoor e o produto E) e variando os demais elementos também vamos obter 12 opções em cada caso. Logo, teremos 5 . 12 = 60 escolhas possíveis para compor a campanha publicitária.

✓ Construir a árvore de possibilidades;

Figura 17 - Árvore de possibilidades - Problema 9



Nesse caso, para o diagrama da árvore que pode ser visto na figura 17 é necessário apenas a construção de um ramo principal, como já foi explorado no segundo momento, e a partir daí observar a regularidade para os demais.

Veja que a construção dessa ramificação originou 12 possibilidades e, como árvore completa constará de cinco ramos principais, então serão 5 . 12 = 60 opções diferentes de escolha para a empresa fazer a campanha publicitária.

✓ Utilizar o PFC.

O objetivo é levar o aluno a perceber que, para o primeiro tipo de anúncio (por exemplo, o outdoor) é possível escolher qualquer um dos cinco produtos. Feito isso, restam quatro opções de escolha para o segundo anúncio (jornal, por exemplo) e, para o último anúncio apenas três opções de produtos. Dessa forma, a cada etapa diminui uma das possibilidades de escolha. Ou seja:

Quadro 7 – Aplicação do PFC – Problema 9

$$\underbrace{5}_{\text{Outdoor}} \cdot \underbrace{4}_{\text{Jornal}} \cdot \underbrace{3}_{\text{Televisão}} = \underbrace{60}_{\text{nº de possibilidades}}$$

PROBLEMA 10 (Adaptado do livro de Smole e Diniz (2010, p. 140)) Para tentar melhorar seu índice no Ibope, uma emissora de televisão resolveu mudar a ordem de sua programação no sábado das 12 às 16 horas. Os programas exibidos nesse horário são: esporte, documentário, religioso e variedades. De quantas maneiras diferentes essa emissora pode formar sua programação?

Figura 18 - Imagem do Problema 10

Fonte: http://ultradesenhosgratis.blogspot.com/2012/02/desenhos-familia-assistindo-televisao.html

Soluções possíveis:

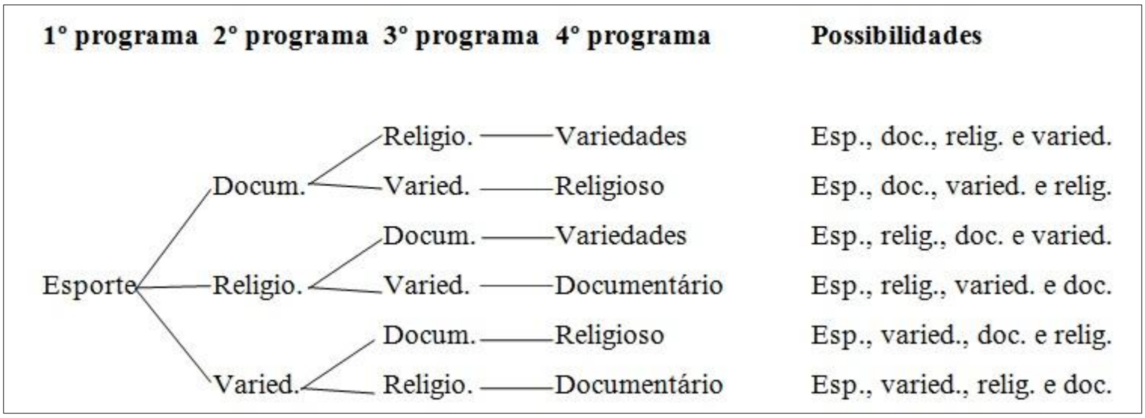
✓ Enumerar todas as possibilidades de agrupamentos;

Esporte, documentário, religioso e variedades
Esporte, documentário, variedades e religioso
Esporte, religioso, documentário e variedades
Esporte, religioso, variedades e documentário
Esporte, variedades, documentário e religioso
Esporte, variedades, religioso e documentário

Não é necessário enumerar todas as possibilidades, basta proceder de forma análoga ao problema 9, fixando o esporte, por exemplo, como o 1º programa e permutando os demais programas é possível obter 6 opções de escolha. Assim, como são quatro tipos de programas, teremos 4·6 = 24 opções diferentes para a emissora formar sua programação.

✓ Construir a árvore de possibilidades;

Figura 19 - Árvore de possibilidades - Problema 10



Novamente é preciso apenas fazer a construção parcial do diagrama da árvore, obtendo o total de possibilidades de um ramo principal e, depois basta multiplicar esse valor pelo número total de ramos dessa árvore. Assim, teremos quatro ramos com seis possibilidades cada um, totalizando 24 opções diferentes para a emissora formar sua programação.

✓ Utilizar o PFC.

O aluno deverá perceber que existem quatro opções para exibição do 1º programa, feita essa escolha restam 3 opções para o segundo. Depois disso, restam 2 opções para o terceiro programa, sobrando para o último programa apenas uma opção. Sendo assim, escolhido um programa, para o próximo horário teremos uma possibilidade a menos e assim sucessivamente, até chegar ao último horário com apenas um programa. Ou seja:

Quadro 8 – Aplicação do PFC – Problema 10

$$\underbrace{4}_{1^\circ\text{ programa}} \cdot \underbrace{3}_{2^\circ\text{ programa}} \cdot \underbrace{2}_{3^\circ\text{ programa}} \cdot \underbrace{1}_{4^\circ\text{ programa}} = \underbrace{24}_{\text{n}^\circ\text{ de possibilidades}}$$

PROBLEMA 11 (Adaptado do livro de Ribeiro (2010, p. 199)) Durante a aula de Geografia, um aluno pretende pintar as cinco grandes regiões (Centro-Oeste, Nordeste, Norte, Sudeste e Sul) em um mapa do Brasil. Sabendo que o aluno tem disponíveis (6) lápis de cores diferentes (azul, amarela, verde, vermelha, marrom e rosa) e que não será utilizada a mesma cor para pintar regiões diferentes, determine de quantas maneiras distintas o mapa poderá ser pintado.

Figura 20 - Imagem do Problema 11

Fonte:
https://www.google.com.br/search?q=desenhos+de+mapas+do+brasil+com+as+cinco+regiões&tbm

Solução: Para esse problema espera-se que o aluno perceba que se trata de uma situação cuja resolução pode ser feita de forma análoga ao primeiro problema, compreendendo assim que o total de maneiras distintas para o mapa ser pintado pode ser obtido utilizando o PFC, ou seja:

Quadro 9 – Aplicação do PFC – Problema11

$$\underbrace{6}_{\text{Centro}-\text{Oeste}} \;.\; \underbrace{5}_{\text{Nordeste}} \;.\; \underbrace{4}_{\text{Norte}} \;.\; \underbrace{3}_{\text{Sudeste}} \;.\; \underbrace{2}_{\text{Sul}} = \underbrace{720}_{\text{nº de possibilidades}}$$

PROBLEMA 12 (Adaptado do livro de Smole e Diniz (2010, p. 204)) Érica decidiu escolher uma senha para o seu Facebook, trocando de lugar as letras de seu nome. De quantas maneiras diferentes Érica pode escolher sua senha?

Figura 21 - Imagem do Problema 12

Fonte: http://www.webcortex.com.br/blog/redes-sociais/como-criar-uma-conta-no-facebook/

Solução: Neste último problema espera-se que o aluno já tenha compreendido as relações e diferenças entre os conceitos envolvidos, utilizando o PFC como principal estratégia de resolução.

Quadro 10 – Aplicação do PFC – Problema 12

$$\underbrace{5}_{1^{\text{a}}\text{ letra}} \cdot \underbrace{4}_{2^{\text{a}}\text{ letra}} \cdot \underbrace{3}_{3^{\text{a}}\text{ letra}} \cdot \underbrace{2}_{4^{\text{a}}\text{ letra}} \cdot \underbrace{1}_{5^{\text{a}}\text{ letra}} = \underbrace{120}_{\text{n}^{\text{o}}\text{ de possibilidades}}$$

Consolidada a ideia do **Princípio Multiplicativo**, é esperado que o aluno tente utilizá-la para resolução dos problemas propostos nesse terceiro momento. No entanto, para obter êxito com o uso dessa estratégia é fundamental que o educando perceba que esses problemas apresentam certas características: nos agrupamentos não há repetição de elementos e a ordem desses elementos nos grupos produz novas possibilidades. Outro fator a ser observado pelos estudantes é que as possibilidades de escolha para compor os elementos nos agrupamentos vão diminuindo gradativamente até que o último elemento seja escolhido.

É essencial que o aluno perceba que existem diferenças entre os problemas trabalhados, entendendo que nos problemas (10 e 12) todos os elementos participavam dos agrupamentos (ocorrendo apenas uma permuta nas posições ocupadas); o que não acontece nos outros problemas (9 e 11), onde o total de elementos do conjunto são organizados em subconjuntos menores. Todas essas particularidades são essenciais no estudo dos conceitos combinatórios de arranjo e permutação simples e, portanto, devem ser amplamente exploradas durante a realização da plenária, para que os alunos possam compreendê-las e, a partir daí construam as definições desses conceitos.

3.2.4 Explorando o Conceito de Combinações Simples

Esta última etapa foi desenvolvida tendo por base a aplicação de questões envolvendo a resolução de problemas sobre combinações simples. Para solucioná-las é preciso utilizar os conhecimentos construídos nas etapas anteriores.

Os objetivos esperados em meio ao desenvolvimento deste momento tratam sobre:

✓ Diferenciar agrupamentos ordenados e agrupamentos não ordenados;

✓ Entender o conceito de **combinação simples**, observando que os agrupamentos formados diferem apenas pela natureza de seus elementos;

✓ Explorar os conhecimentos sobre combinação.

O procedimento metodológico será o mesmo adotado nas etapas anteriores e, se referem ao roteiro sugerido por (Onuchic e Allevato, 2011), quando se propõe trabalhar o ensino via resolução de problemas. Porém, acredita-se que é preciso uma maior atenção por parte do professor, já que no trabalho com combinações os alunos podem apresentar dificuldades caso não percebam que a ordem dos elementos nos agrupamentos não produz novas possibilidades. Sendo assim, para evitar que esses subconjuntos sejam contados mais de uma vez é necessário utilizar algum tipo de estratégia para eliminar os agrupamentos repetidos. No caso, a *divisão*.

Os alunos devem ser avaliados de forma continua, procurando analisar sua participação nos grupos e as estratégias desenvolvidas para resolver os problemas, bem como seus argumentos e exposições individuais.

Dentro desse contexto, algumas possíveis questões a serem usadas são:

PROBLEMA 13 (Adaptado do livro de Souza (2010, p. 218)) Na primeira fase de um campeonato de xadrez organizado em uma escola, cada participante joga uma única vez contra cada um dos outros. Sabendo que 8 alunos participam desta competição, quantas partidas serão realizadas na primeira fase desse campeonato?

Figura 22 - Imagem do Problema 13

Fonte: http://www.fotosearch.com.br/fotos-imagens/jogando-xadrez.html

Solução: Acredita-se que as estratégias mais utilizadas na resolução desse problema serão:

✓ Enumerar todas as possibilidades de agrupamentos;

Vamos chamar os alunos de A, B, C, D, E, F, G e H para simplificar a listagem dos subconjuntos.

A e B	B e A	C e A	D e A	E e A	F e A	G e A	H e A
A e C	B e C	C e B	D e B	E e B	F e B	G e B	H e B
A e D	B e D	C e D	D e C	E e C	F e C	G e C	H e C
A e E	B e E	C e E	D e E	E e D	F e D	G e D	H e D
A e F	B e F	C e F	D e F	E e F	F e E	G e E	H e E
A e G	B e G	C e G	D e G	E e G	F e G	G e F	H e F
A e H	B e H	C e H	D e H	E e H	F e H	G e H	H e G

O aluno deve verificar, a partir da enumeração dos agrupamentos, que a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades. Sendo assim, como o jogo realizado por A e B e B e A é o mesmo, então cada partida foi contada duas vezes, logo é preciso dividir o número total de possibilidades por 2, ou seja, 56÷2 = 28 partidas serão realizadas na primeira fase desse campeonato.

✓ Utilizar o PFC para obter o total de possibilidades, e depois dividir esse valor pela quantidade de permutações dos elementos de cada agrupamento.

Para determinar o número total de partidas basta observar que são 8 opções diferentes para a escolha do primeiro estudante. Feito isso restam 7 opções para escolher o segundo estudante, ou seja:

Quadro 11 – Aplicação do PFC – Problema 13

$$\underbrace{8}_{\text{Primeiro Estudante}} \quad . \quad \underbrace{7}_{\text{Segundo Estudante}} \quad = \quad \underbrace{56}_{\text{nº de possibilidades}}$$

Por outro lado, é preciso eliminar os agrupamentos repetidos e, como cada dupla pode permutar-se duas vezes (A e B, B e A, por exemplo), então basta dividir o número total de possibilidades por 2. Logo, são 28 partidas realizadas na primeira fase do campeonato.

PROBLEMA 14 Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizzas nos seguintes sabores: atum, queijo, calabresa, milho e portuguesa. Quantas são as possibilidades de pizza que podem ser feitas com três sabores diferentes?

Figura 23 - Imagem do Problema 14

Fonte: http://www.canstockphoto.com.br/ilustracao/pizza.html

Solução: Como o aluno sabe que a utilização do PFC vai determinar o número total de possibilidades, o que é preciso fazer é eliminar desse total os subconjuntos repetidos. Nesse sentido, um possível erro que pode ser cometido é o aluno realizar o procedimento do exemplo anterior, e dividir o total de agrupamentos por 3, já que os subconjuntos são formados por três elementos. Assim, cabe ao professor sugerir que os alunos realizem a permutação dos elementos que cada um dos subconjuntos origina, levando-os a identificarem, por exemplo, que o agrupamento (A, Q, C) dá origem a seis subconjuntos idênticos (A, Q, C), (A, C, Q), (C, A, Q), (C, Q, A), (Q, C, A) e (Q, A, C). Logo, é preciso determinar o número total de possibilidades e dividir por 6 para eliminar os agrupamentos repetidos.

Obs.: considerou-se A: atum, Q: queijo e C: calabresa.

Assim, são 5 opções de escolha para o 1º sabor, 4 para o 2º e 3 para o 3º, isto é:

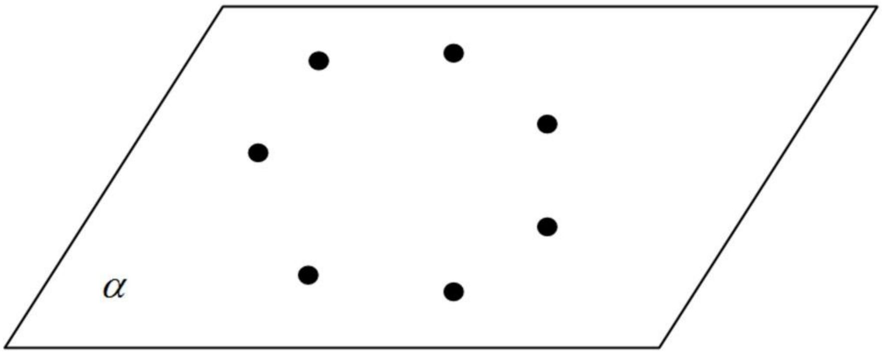
Quadro 12- Aplicação do PFC – Problema 14

$$\underbrace{5}_{1^{\underline{o}}\text{ sabor}} \cdot \underbrace{4}_{2^{\underline{o}}\text{ sabor}} \cdot \underbrace{3}_{3^{\underline{o}}\text{ sabor}} = \underbrace{60}_{n^{\underline{o}}\text{ de possibilidades}}$$

E essas 60 possibilidades devem ser divididas por 6, o que gera 10 possíveis combinações de pizzas com três sabores diferentes.

PROBLEMA 15 (Adaptado do livro de Dante (2010, p. 207)) No plano representado abaixo estão marcados 7 pontos, de modo que não há 3 que pertençam à mesma reta.

Figura 24 - Imagem do Problema 15



a) Quantos segmentos de reta podem ser formados, sendo suas extremidades 2 desses pontos?

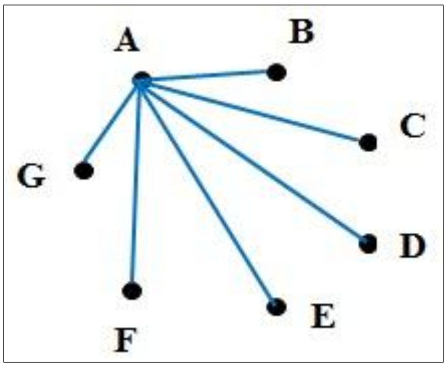
b) Quantos triângulos podem ser formados, sendo seus vértices (3) desses pontos?

Solução: Neste problema, o educando terá a oportunidade de explorar o processo de contagem utilizando os conhecimentos geométricos.

a)

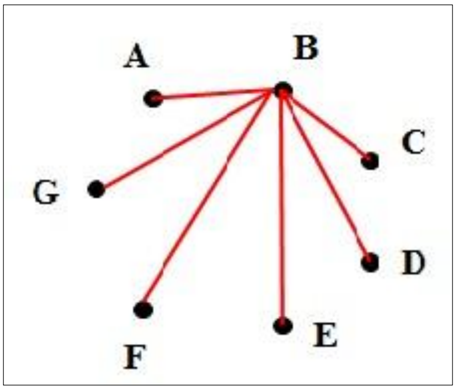
Caso os alunos não percebam que se trata de um problema que envolve o mesmo conceito dos problemas anteriores, o professor pode sugerir que eles façam uma enumeração sistemática dos segmentos de reta que podem ser formados com esses sete pontos. Para facilitar o entendimento vamos nomear os pontos de A, B, C, D, E, F e G e fazer um esboço da situação.

Figura 25 - Possibilidades de segmento de reta - Problema 15a



Sabemos que para formar um segmento de reta só precisamos de dois desses pontos. Agora, fixando A como referência conta-se o número de segmentos que saem desse ponto e tem extremidade em qualquer um dos outros pontos, no caso são seis $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{AG}\right)$. O mesmo procedimento pode ser realizado com os outros pontos, sendo assim fixando B, observa-se que partem mais seis segmentos desse ponto $\left(\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{BG}\right)$.

Figura 26 - Possibilidades de segmento de reta - Problema 15a



A partir desse esquema, os alunos observarão a repetição dos segmentos AB e BA. Dessa forma, eles irão concluir que a ordem em que os pontos são selecionados para formar os segmentos não importa e assim cada segmento será contado duas vezes. Não sendo necessária a enumeração dos demais segmentos.

Logo, para resolver o problema basta proceder de forma análoga aos anteriores. Ou seja, o primeiro ponto pode ser escolhido de 7 formas, já o segundo pode se escolhido de 6 maneiras. Assim, são 42 segmentos que podem ser formados dispondo de 7 pontos (não havendo três deles colineares), mas como ordenação não origina segmentos diferentes, é preciso dividir o resultado por dois, logo é possível formar 21 segmentos tendo como extremidades 2 dos 7 pontos considerados.

b)

Para a resolução desse item, acredita-se que o aluno irá perceber que a ordem da escolha dos pontos para a formação dos triângulos não é importante, ou seja, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA são formas diferentes de referir-se ao mesmo triângulo. Assim para determinar o número total de triângulos basta observar que são 7 opções diferentes para a escolha do primeiro vértice, feito isso restam 6 opções para escolher o segundo vértice e 5 opções para escolha do terceiro vértice, ou seja:

Quadro 13 – Aplicação do PFC – Problema 15

$$\underbrace{7}_{Primeiro\ Vértice} \;.\; \underbrace{6}_{Segundo\ Vértice} \;.\; \underbrace{5}_{Terceiro\ Vértice} = \underbrace{210}_{nº\ de\ possibilidades}$$

No entanto, é preciso eliminar os agrupamentos repetidos e, como os vértices de cada triângulo podem permutar-se 6 vezes, então basta dividir o número total de possibilidades por 6. Logo, são 35 triângulos com vértices nesses 7 pontos.

É fundamental o aluno reconhecer que a ordem em que os elementos são organizados nos agrupamentos nesses problemas não é importante. Caso isso não aconteça, é necessário que o professor intervenha com questionamentos, incentivando-os a estabelecer analogias com os problemas anteriores, propondo problemas com um número menor de possibilidades, bem como estimulando-os a utilizarem alguma forma de registro dos subconjuntos para visualizarem que alguns grupos estão sendo contados mais de uma vez. Dessa forma, os estudantes observarão que a simples utilização do PFC não irá resolver os problemas, sendo necessário pensar em alguma outra estratégia que possa auxiliá-los. Ou seja, é preciso descobrir um padrão que possa ser utilizado para resolver problemas combinatórios desse tipo. Nesse sentido, observar a quantidade de agrupamentos que podem ser formados com a permutação dos elementos nos subconjuntos ajudará na percepção da utilização da divisão como estratégia para eliminar a sobrecontagem dos agrupamentos.

Durante a execução das atividades a ênfase deve ser dada ao estudo em grupo, procurando garantir a participação de todos através de um acompanhamento sistemático das equipes e observando o desempenho dos alunos. Após a realização dos quatro momentos é importante, também, valorizar o estudo individual para que o aluno desenvolva a capacidade de trabalhar por si só e, aplique os conhecimentos adquiridos. Assim, é essencial que o professor procure analisar se os estudantes são capazes de conceituar e identificar os tipos de agrupamentos através de suas propriedades, bem como de utilizarem estratégias adequadas na resolução de variados tipos de problemas combinatórios. Portanto, é importante trabalhar com outras listas de problemas.

Para realização das atividades propostas nos diferentes momentos priorizou-se o não uso de fórmulas, a resolução dos problemas como eixo central para se trabalhar o conteúdo, as formas de representação de listagem dos agrupamentos, a utilização da estratégia do PFC e a compreensão dos conceitos e propriedades de arranjos, permutações e combinações. Isto porque entendemos que abordar o conteúdo de **Análise Combinatória** desse modo pode ser muito mais interessante uma vez que o aluno assume uma participação ativa na construção de sua aprendizagem, cabendo ao professor o papel de orientar, mediar e estimular o processo de ensino-aprendizagem.

4 Considerações Finais

O que nos motivou a realizar esse estudo foi observar, ao longo da nossa experiência em sala de aula, na convivência com os colegas de profissão e na literatura da área, que o ensino da **Análise Combinatória** no Ensino Médio, frequentemente, é acompanhado de muitas dificuldades; já que é realizado através da aplicação automática de fórmulas e da repetição de procedimentos de cálculo, o que termina dificultando o trabalho do professor e provocando nos alunos desinteresse e aversão por este conteúdo. Conforme Santos (2011, p. 72): “(...) o que ocorre, com frequência, no ensino da Análise Combinatória no ensino médio, é o uso excessivo de práticas manipulativas, levando o aluno à mecanização de processos”.

Avaliamos que, diante deste cenário, é necessário utilizar no trabalho escolar com a **Análise Combinatória**, metodologias que possam levar a melhores formas de ensino e aprendizagem. Assim, elaboramos uma proposta didática para abordar este tema no Ensino Médio e que favorece o desenvolvimento do pensamento combinatório utilizando a metodologia da resolução de problemas, sem o uso de fórmulas, enfatizando o **principio multiplicativo** como principal estratégia de resolução para os **problemas de contagem**. Com esta abordagem criamos possibilidades para o aluno pensar produtivamente e construtivamente, uma vez que o *"liberta"* dos processos mecânicos e do emprego de algoritmos.

Assim, propomos uma sequência de atividades a serem aplicadas a uma turma disposta em grupos de três ou quatro alunos, que propicie a construção dos conceitos da combinatória a partir de situações-problema; o desenvolvimento do raciocínio combinatório valorizando conhecimentos prévios e estratégias próprias de contagem; a análise do desenvolvimento dos conhecimentos dos educandos em meio ao processo de ensino e aprendizagem da **Análise Combinatória**, e, possibilitam debates envolvendo a participação professor-aluno quanto à resolução de problemas de contagem, construção de conceitos e formalização de procedimentos.

Nesta proposta, deve-se seguir os passos para resolução de problemas descritos por Onuchic e Allevato, (2011) buscando ao longo do desenvolvimento das atividades que os alunos possam atuar como *"construtores de sua própria aprendizagem",* envolvendo-se com as situações vivenciadas e procurando agir de maneira mais consciente e autônoma na procura por estratégias que os levem a solucionarem os problemas propostos. Neste contexto, as mediações e orientações do professor são fundamentais para o transcorrer do processo de ensino e aprendizagem, bem como para possíveis intervenções que sejam necessárias.

De acordo com Onrubia:

> *(...) a ajuda ajustada pressupõe desafios abordáveis para o aluno, abordáveis não tanto no sentido de que possa resolvê-los ou solucioná-los sozinho, mas que possa enfrentá-los graças à combinação entre suas próprias possibilidades e os apoios e instrumentos recebidos do professor. (ONRUBIA, 2009, apud MENDONÇA, 2011, p.48).*

Diante do exposto, podemos destacar que a finalidade da proposta didática aqui sugerida é colaborar com a melhoria do ensino dos conceitos da **Análise Combinatória** e oportunizar ao educando possibilidades para que ele possa desenvolver o raciocínio lógico-matemático, a capacidade de resolver problemas, tomar decisões e de analisar e interpretar informações de forma crítica utilizando-se do instrumental matemático. Contribuindo, assim, na formação plena do aluno, capaz de questionar o seu espaço na sociedade, e exercer sua cidadania com equidade. Nesse sentido, espera-se que esse trabalho possa auxiliar os professores que tem como preocupação a busca pela qualidade do processo de ensino e aprendizagem da combinatória.

Vale ressaltar que a pretensão inicial era aplicar sequência de atividades que foi sugerida na proposta de ensino, o que infelizmente não foi possível, devido ao pouquíssimo tempo que nos foi oportunizado durante o percurso do mestrado para a elaboração e aplicação do Trabalho de Conclusão de Curso. Neste sentido, acreditamos que para um melhor aprofundamento dos conceitos abordados e aperfeiçoamento do estudo realizado seria importante fazer uma pesquisa para analisar e investigar a eficiência da proposta quando trabalhada em sala de aula.

Como outras sugestões para futuras pesquisas seria interessante a realização de um estudo para comparar os resultados obtidos com o ensino da **Análise Combinatória** em dois grupos de alunos do Ensino Médio, onde este conteúdo seja abordado em um destes grupos através da construção e aplicação de fórmulas e, no outro, o enfoque de trabalho seja o da proposta aqui sugerida. Outra ideia consiste em aplicar a mesma opção metodológica desta proposta a uma sequência didática envolvendo conceitos combinatórios e probabilidades, já que esses conteúdos aparecem integrados em muitas situações em que se exige o levantamento do número de possibilidades de um acontecimento e o cálculo da chance dessas possibilidades se concretizarem.

As reflexões surgidas a partir da realização deste estudo criam possibilidades para futuras investigações que também podem contribuir com o aprimoramento do processo ensino e aprendizagem dos conceitos da **Análise Combinatória** no Ensino Médio.

Referências

ALMEIDA, Adriana Luziê de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do Ensino Médio**. 166 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto De Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP - MG, Ouro Preto, 2010.

BIANCHINI, Edwlado; PACCOLA, Herval. **Matemática** - 2ª série do Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). V.3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica, 2006. 137 p. (Coleção Orientações Curriculares para o Ensino Médio, V. 2).

[BRASÍLIA, 2011] BRASÍLIA. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: **PNLD 2012** - Matemática, 2011.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática**. In: BRUN, Jean. Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BUSS, Leonidis Margaret. **Dificuldade na Leitura e Interpretação de Problemas Relativos ao Cálculo de Probabilidades e Estatística**. Unioeste. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=134>. Acesso em 10 Fev. 2013.

CHARNAY, Roland. **Aprendendo com a resolução de Problemas**. In: PARRA, Cecília; Saiz, Irna. **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. Volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008.

______. **Matemática: Contexto e Aplicações**. V. 2. 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DORNELAS, Augusto César Barbosa. Resolução de Problemas em Análise Combinatória: Um Enfoque Voltado Para Alunos e Professores do Ensino Médio. **Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática** (SBEM), Recife, 2004.

GESTAR. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II**. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 1 - TP1: matemática na alimentação e nos impostos. Brasília, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

HOFFMANN, J. **Avaliação mito & desafio**: uma perspectiva construtivista. 29ª ed. Porto Alegre: Mediação, 2000.

MENDONÇA, Luciane. **Trajetória hipotética de aprendizagem: análise combinatória**. 245 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC -- SP, São Paulo, 2011.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e perspectivas. (org.). São Paulo. Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema. Rio Claro (SP), v. 25, Nº 41, p. 73-98, dez. 2011.

[PAIVA, 2009] PAIVA, Manoel. **Matemática.** V. 2. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.
PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Cultura e Esportes. **Política de Ensino e Escolarização Básica**. Coleção Professor Paulo Freire. Recife: SECE, 1998.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes públicas de Ensino Pernambuco: matemática**. Recife: SE, 2008a.

______. Secretária de Educação. **Orientações Teórico-metodológicas**: Ensino Médio: Matemática. Recife: SE, 2008b.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** 267p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, Recife, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. A Compreensão do Raciocínio Combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. **Anais IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** (SIPEM), Brasília, 2009.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos. & SILVA, Monalisa Cardoso. Invariantes, generalização, sistematização e Estratégias bem sucedidas: o ensino da Combinatória no 9º ano do ensino fundamental. **Anais do 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Fortaleza, 2012.

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. **O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema**. 166p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará, UEP, Belém, 2008.

PIOVESAN, Sucileiva Baldissera; ZANARDINI, João Batista. **O ensino e aprendizagem da Matemática por meio da metodologia de resolução de problemas: algumas considerações**. (Artigo de conclusão do Programa de Desenvolvimento Educacional - PDE, da Secretaria de Estado de Educação, Palotina-PR, 2008.

PIRES, C. M. C.; TRALDI, A. **Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio**. Projeto de pesquisa apresentado ao Programa de Estudo de Pós-Graduados em Educação Matemática (PROEM PUC\SP), 2007.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático**. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.
RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. V. 2. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2010.

SABO, Ricardo Dezso. **Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio: Um Estudo dos Conteúdos Referentes à Combinatória**. 208p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Fundação Santo André, FSA - SP, Santo André, 2007.

______. **Saberes Docentes: A análise combinatória no Ensino Médio**. 208p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC - SP, São Paulo, 2010.

SALDANHA, Mayara de Araújo. resolução de problemas: uma metodologia alternativa para o ensino e a aprendizagem de matemática nas escolas do CASE. In: **Anais da III EIEMAT - Escola de Inverno de Educação Matemática**, Santa Maria - RS, 2012.

SANTOS, Rafael Henrique dos. **Uma Abordagem do Ensino da Análise Combinatória sob a Ótica da resolução de Problemas**. 232p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, UCS-SP, São Paulo, 2011.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO, Benigno. **Matemática: participação & contexto**. Volume Único. 1. ed. São Paulo: FTD, 2008.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: Ensino Médio**. V. 2. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo Olhar Matemática**. V. 2. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010.

STURM, Wilton. **As Possibilidades de um Ensino de Análise Combinatória sob uma Abordagem Alternativa**. 132p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1999.