Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Programação Linear: Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio e um Estudo de Caso

Rebeca Maciel Pereira

Goiânia

2020

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Rebeca Maciel Pereira

3. Título do trabalho

Programação Linear: Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio e um Estudo de Caso

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

seil assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues**, **Coordenador de Pós-graduação**, em 14/09/2020, às 10:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **REBECA MACIEL PEREIRA**, **Discente**, em 14/09/2020, às 13:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Processo nº 23070.034923/2020-99 SEI nº 1501357

Rebeca Maciel Pereira

Programação Linear: Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio e um Estudo de Caso

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues

Goiânia

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Maciel Pereira, Rebeca
Programação Linear: Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio e um Estudo de Caso [manuscrito] / Rebeca Maciel Pereira. - 2020.
LXXII, 72 f.: il.

Orientador: Prof. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Programação Linear. 2. Método Simplex. 3. Sequência didática. 4. Matemática.. I. de Azevedo Rodrigues, Paulo Henrique , orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **14** da sessão de Defesa de Dissertação de Rebeca Maciel Pereira, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Aos vinte dias do mês de agosto de dois mil e vinte, a partir das 15 **horas**, por meio de videoconferência, devido a pandemia covid-19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Programação Linear: Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino Médio e um Estudo de Caso"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Ole Peter Smith (IME/UFG) e o membro titular externo a professora Doutora Juliana Silva Canella (UFPA). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da dissertação, tendo sida a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte dias do mês de agosto de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues**, **Coordenador de Pós-graduação**, em 20/08/2020, às 17:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Juliana Silva Canella**, **Usuário Externo**, em 20/08/2020, às 18:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith**, **Professor do Magistério Superior**, em 21/08/2020, às 07:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1481004** e o código CRC **B837424F**.

Referência: Processo nº 23070.034923/2020-99 SEI nº 1481004

Criado por sosteneg, versão 5 por paulo_rodrigues em 20/08/2020 14:56:55.

Rebeca Maciel Pereira graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade de Barra Mansa - RJ em 2006, especializou-se em Educação Matemática, pela Universidade de Barra Mansa - RJ em 2009.

Dedico este trabalho aos meus pais, José Maciel Pereira e Helena Maria de Fátima Pereira, que sempre me deram força e incentivo nos momentos em que mais precisei.

Agradecimentos

A Deus, por me abençoar em todas as áreas da minha vida e permitir que tudo isso acontecesse.

Aos meus colegas de turma (PROFMAT-UFG/2018) pelos dois anos de convivência, pelas alegrias, troca de experiências, muito estudo e aprendizagem.

A minha amiga Leila Borges e família, por todo apoio, carinho, incentivo e orações que me deram durante esse período.

A minha amiga Livia Borges, que esteve sempre disposta a colaborar com informações de sua empresa necessárias para o estudo de caso do efetivo trabalho.

A todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica. Em especial ao professor/orientador Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, por seu acolhimento, orientação e contribuição no decorrer desse trabalho.

A todos aqueles que colaboraram e apoiaram-me de maneira direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

"Todas as vitórias ocultam uma abdicação."
(Simone de Beauvoir)

Resumo

A Programação Linear deu à humanidade a capacidade de estabelecer objetivos gerais e traçar um caminho de decisões detalhadas a serem tomadas, a fim de alcançar melhor seus objetivos quando confrontados com situações práticas possibilitando novas maneiras de formular problemas do mundo real. O objetivo geral desse estudo foi apresentar um estudo de caso de uma aplicação da programação linear usando mais de duas variáveis. Foi realizado uma pesquisa bibliográfica e um estudo de caso e os dados foram interpretados pelo método descritivo. Concluímos que existem algumas virtudes em relação a programas lineares comparados com os não-lineares serem mais fáceis de definir e formular; eles permitem trabalhar eficientemente com mais número de variáveis de decisão e estão melhores adaptados ao tratamento algorítmico com computadores, aproveitando a velocidade de cálculo. Sobre a sequência didática para o Ensino Médio, ressalta-se que foi criado um passo a passo onde o aluno constrói a resolução do problema envolvendo duas variáveis. Observou-se que a importância do planejamento por meio de sequências didáticas implica em um desafio e em um compromisso sustentado por uma responsabilidade significativa e pela complexidade das resoluções apropriadas para organizar as situações de ensino e favorecer os processos de aprendizagem.

Palavras-chave

Programação Linear. Método Simplex. Sequência didática. Matemática.

Abstract

Linear Programming has given mankind the ability to establish general objectives and to outline a path of detailed decisions to be taken, in order to better achieve its objectives when faced with practical situations enabling new ways of formulating real-world problems. The general objective of this study was to present a case study of an application of Linear Programming using more than two variables. Regarding the methodology, a bibliographic research and a case study were carried out and the data were interpreted by the descriptive method. It is concluded that some virtues of linear programs compared with non-linear programs are that they are easier to define and formulate, they allow to work efficiently with more variables of decision and better adapted to the algorithmic treatment with computers, taking advantage in the calculation speed. Regarding the didactic sequence for high school (HS), it is emphasized that a step by step was created where the student builds the problem resolution involving two variables. It was observed that the importance of planning through didactic sequences implies a challenge and a commitment sustained by significant responsibility and the complexity of the appropriate resolutions to organize teaching situations and favor learning processes.

.

Keywords

Linear Programming. Simplex Method. Following teaching. Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Consideramos a Programação Linear como parte de um grande desenvolvimento revolucionário que deu à humanidade a capacidade de estabelecer objetivos gerais e traçar um caminho de decisões detalhadas que são tomadas, a fim de alcançar melhor seus objetivos quando confrontados com situações práticas, possibilitando novas maneiras de formular problemas do mundo real em termos matemáticos detalhados (modelos), técnicas para resolver os modelos (algoritmos) e mecanismos para executar as etapas dos algoritmos (computadores e softwares), segundo Hillier e Lieberman [5].

Observamos que muitos alunos possuem dificuldades na aprendizagem dos sistemas de equações e no desenvolvimento do pensamento aritmético e algébrico e que entre as causas dessa dificuldade está a complexidade dos elementos básicos que são utilizados na aquisição dos objetos de sistemas de equações lineares.

Anton e Rorres, em [1], relatam que a Programação Linear é um método matemático particular, que tem por objetivo o alcance do melhor resultado de um modelo fornecido por uma lista de requisitos que são representadas por relacionamentos lineares. De acordo com essas informações, esta dissertação visa a apresentação de metodologias que facilitem o aprendizado de objetos matemáticos e em especial as equações lineares e o seu conjunto de soluções, juntamente com uma sequência de situações que influenciam no uso de diferentes registros de representação semiótica.

Logo, temos como objetivo a apresentação de um estudo de caso em que a aplicação da Programação Linear é usada com mais de duas variáveis e com objetivos específicos, tais como: Conceituar sistemas lineares e matrizes, espaço vetorial e conjunto convexo; descrever a Programação Linear e peculiaridades do método geométrico, método simplex e método duas fases; verificar as estratégias para a aplicação de uma sequência didática no Ensino Médio.

Explicaremos o passo a passo da Programação Didática Linear e a resolução de todos os tipos de problemas lineares. Dentro desse contexto, esse estudo é justificável, pois visa mostrar como podemos ajudar aos alunos de Ensino Médio no enfrentamento de situações problemáticas com a utilização do conhecimento matemático que permiti um processo de produção de conhecimento que tenha certa analogia com a tarefa matemática.

Apresentaremos uma investigação sobre Programação Linear que almeja mostrar como a sua utilização pode apresentar aos alunos um modo particular de pensar, fazer e produzir conhecimento matemático. Através das seguintes problemáticas: Como a utilização da Programação Linear poderá ajudar no desenvolvimento do conhecimento matemático no Ensino Médio e onde poderemos aplicá-la?

Responderemos esse questionamento através de uma investigação sobre a utilização da Programação Linear e a criação de representações semióticas que nos ajudam na aprendizagem e na resolução de situações matemáticas, das quais propomos um ensino de qualidade que facilite o aprendizado do aluno quanto a utilização de equações lineares, e que tenham influência no comportamento matemático e cognitivo no que diz respeito ao trabalho do aluno para a promoção do aprendizado fazendo com que o tratamento juntamente com a passagem entre representações lineares, registraremos o eixo que as atividades serão propostas.

Para o desenvolvimento dessa dissertação, apresentaremos uma pesquisa bibliográfica e um estudo de caso, cujos dados serão interpretados pelo método descritivo. Da qual, a estrutura do trabalho encontra-se dividida da seguinte forma:

A introdução com a apresentação do objetivo, do problema, da justificativa e da metodologia. No capítulo 1, apresentaremos o desenvolvimento teórico com a apresentação de conceitos básicos, como: sistemas lineares e matrizes, espaço vetorial e conjunto convexo.

No capítulo 2, apresentaremos uma descrição sobre a Programação Linear em que mostraremos as peculiaridades do método geométrico, do método simplex e do método duas fases. Já no capítulo 3, descreveremos as estratégias para a aplicação de uma sequência didática no Ensino Médio.

E no capítulo 4 relataremos o estudo de caso feito em uma academia de ginástica com o objetivo de maximizar a receita anual levando em consideração algumas restrições e exporemos uma planilha personalizada para aplicação em situação similar. Finalmente no capítulo 5, apresentaremos as considerações finais.

1 Conceitos Básicos

O intuito desse capítulo é trabalhar conceitos que segundo Boldrini [2], Hefez e Fernandez [4] e, Lipchutz e Lipson [7] fundamentarão o desdobramento das técnicas que serão estudadas em Programação Linear.

1.1 Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

Definição 1. *Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação que pode ser escrita na seguinte forma padrão:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e b são constantes reais. Exprimimos que a constante a_k é o coeficiente de x_k e b é o termo constante da equação. O conjunto de todas as soluções de uma equação linear é chamado seu conjunto solução ou solução geral da equação.

Definição 2. *Um sistema de equações lineares é uma lista de equações com as mesmas incógnitas. Em particular, um sistema linear de m equações $L_1, L_2, ..., L_n$ e n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é um conjunto de equações do tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

com $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, números reais.

Uma solução desse sistema é uma n-upla de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaçam simultaneamente estas m equações. Além disso, dois sistemas são ditos equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

O sistema geral de m equações lineares com n incógnitas é equivalente à equação matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ ou } AX = B$$

onde, $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$, é a matriz dos coeficientes, $X = \begin{pmatrix} x_j \end{pmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{pmatrix} b_i \end{pmatrix}$ é a matriz dos termos independentes.

Além das matrizes acima, é possível representar o sistema usando a matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

onde cada linha dessa matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação do sistema.

1.1.1 Operações elementares com as linhas

Encontrar a solução de um dado sistema de equações lineares, consiste no uso de três operações elementares nas linhas de uma determinada matriz que não alteram seu conjunto solução e que transforma o dado sistema num sistema equivalente de solução mais simples. Essas operações são:

• (Troca da Ordem de Linhas) Trocar de posição as linhas L_i e L_j, com $i \neq j$. Que pode ser denotado por $(L_i \to L_j)$.

• (Multiplicação de Linha por Escalar) Substituir a linha L_i por um múltiplo não nulo kL_i da linha L_i, denotada por $(L_i \to kL_i)$.

• (Soma de Linhas) Substituir a linha L_i pela soma de um múltiplo kL_j de uma linha L_j com a própria linha L_i com $i \neq j$, denotado por $(L_i \to L_i + kL_j)$.

Ademais, se A e B são matrizes $m \times n$, falamos que uma matriz A é equivalente por linhas a uma matriz B, se B puder ser obtida a partir de A por uma sequência de operações elementares com as linhas. Denotada por $(A \sim B)$.

1.1.2 Matriz Escalonada

Sistemas lineares grandes requerem técnicas especiais para facilitar a resolução. Um procedimento é transformar uma matriz ampliada associada a um dado sistema de equações lineares à forma escalonada.

Definição 3. *Uma matriz $m \times n$ é dita linha reduzida a forma escalonada se:*

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é igual a 1;
b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;
c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;
d) Se as linhas $1, ..., r$ são as linhas não nula, e o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$

Exemplo 1. *A matriz 3×5 está na forma escalonada pois satisfaz as condições acima.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Um teorema importante para este trabalho é o que admite que toda matriz $A_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida na forma escada. Na obra de Hillier e Lieberman, em [5], encontrar - se a demonstração desse teorema.

Outro assunto relevante que recorre das matrizes na forma escalonada é o conceito de posto e nulidade de uma matriz. De modo geral, estes conceitos estão associados a existência de equações não nulas do sistema e seu respectivo número de soluções:

Definição 4. *Dada uma matriz $A_{m \times n}$ e seja $B_{m \times n}$ sua matriz linha equivalente reduzida a forma escada, o posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é obtida pela diferença entre número n e o posto p.*

Notemos que, para encontrar o posto de uma determinada matriz, necessitamos encontrar sua matriz linha equivalente reduzida na forma escada e depois contar a quantidade de linhas não nulas que essa matriz possui. E para encontrar a sua nulidade, basta fazer a diferença entre o número de colunas e seu posto.

1.1.3 Solução do Sistema Linear

Considere um sistema linear (1) com m equações e n incógnitas cujos coeficientes a_{ij} e termos independentes b_i são números reais (ou complexos). Esse sistema poderá ter: uma única solução, infinitas soluções, ou nenhuma solução.

Se tratando de um sistema com uma única solução, dizemos que o sistema é possível (compatível) e determinado. Quando o sistema possui infinitas soluções, dizemos que o sistema é possível e indeterminado e; finalmente, quando não tem solução, o sistema é dito impossível.

Para verificar em qual desses três casos um sistema qualquer se enquadra, é necessária uma comparação entre a quantidade variáveis n, o posto da matriz aumentada e o posto da matriz de coeficientes do sistema, segundo os critérios:

i) Um sistema de m equações admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes;

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única;

iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto e $p < n$, então é possível escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Vale destacar que nesta última situação o número $n - p$ é chamado de grau de liberdade do sistema.

1.2 Espaço Vetorial

O interesse desta seção é apresentar conceitos que respaldam a caracterização de conjunto convexo.

Definição 5. *Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, munido de duas operações: soma $V \times V \xrightarrow{+} V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \xrightarrow{*} V$, tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são satisfeitas as propriedades:*

(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(ii) $u + v = v + u$

(iii) $\exists\, 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$

(iv) $\exists - u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$

(v) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

(vi) $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$

(vii) $(\alpha\beta)\, u = \alpha\, (\beta u)$

(viii) $1u = u$

Exemplo 2. *O conjunto $V = \mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um escalar assim definidas:*
$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ *e* $\alpha\,(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ *com* $\alpha \in \mathbb{R}$.

De fato, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ *e* $w = (x_3, y_3, z_3)$ *vetores de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Temos:*

i) $(u + v) + w = [(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] + (x_3, y_3, z_3)$
$= [(x_1 + x_2)\,, (y_1 + y_2)\,, (z_1 + z_2)] + (x_3, y_3, z_3)$
$= [(x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3]$
$= [x_1 + (x_2 + x_3)\,, y_1 + (y_2 + y_3)\,, z_1 + (z_2 + z_3)]$
$= (x_1, y_1, z_1)\,[(x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3)]$
$= (x_1, y_1, z_1)\,[(x_2, y_2, z_2) + (x_3, y_3, z_3)]$
$= u + (v + w)$

ii) $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1)$
$= (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1)$
$= v + u$

iii) $\exists\, 0 = (0, 0, 0) \in V$ *tal que* $u + 0 = (x_1, y_1, z_1) + (0, 0, 0)$
$= (x_1 + 0, y_1 + 0, z_1 + 0)$
$= (x_1, y_1, z_1)$
$= u$

iv) $\exists - u = (-x_1, -y_1, -z_1) \in V$ *tal que* $u + (u) = (x_1, y_1, z_1) + (-x_1, -y_1, -z_1)$
$= (x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z_1)$
$= (0, 0, 0)$
$= 0$

v) $\alpha(u + v) = \alpha\,[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)]$
$= \alpha\,[(x_1 + x_2)\,, (y_1 + y_2)\,, (z_1 + z_2)]$

$= [\alpha (x_1 + x_2), \alpha (y_1 + y_2), \alpha (z_1 + z_2)]$
$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2, \alpha z_1 + \alpha z_2)$
$= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$
$= \alpha (x_1, y_1, z_1) + \alpha (x_2, y_2, z_2)$
$= \alpha u + \alpha v$

vi) $(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1, z_1)$
$= [(\alpha + \beta) x_1, (\alpha + \beta) y_1, (\alpha + \beta) z_1]$
$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1, \alpha z_1 + \beta z_1)$
$= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_1, \beta y_1, \beta z_1)$
$= \alpha (x_1, y_1, z_1) + \beta (x_1, y_1, z_1)$
$= \alpha u + \beta u$

vii) $(\alpha\beta)v = (\alpha\beta)(x_1, y_1, z_1)$
$= [(\alpha\beta) x_1, (\alpha\beta) y_1, (\alpha\beta) z_1]$
$= [\alpha (\beta x_1), \alpha (\beta y_1) y_1, \alpha (\beta z_1)]$
$= \alpha [(\beta x_1), (\beta y_1), (\beta z_1)]$
$= \alpha [\beta (x_1, y_1, z_1)]$
$= \alpha(\beta v)$

viii) $1u = 1 (x_1, y_1, z_1)$
$= (1x_1, 1y_1, 1z_1)$
$= (x_1, y_1, z_1)$
$= u$

que mostra que todas as propriedades são satisfeitas.

Os elementos de um espaço vetorial podem ser escritos nas formas de linha ou de colunas e são chamados de vetores.

1.2.1 Subespaços Vetoriais

Definição 6. *Um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V é denominado subespaço de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por um escalar definidas em V.*

Teorema 1. *Se W for um subconjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.*

(a) Se u e v forem vetores em W, então $u + v$ está em W.

(b) Se α for um escalar qualquer e u algum vetor de W, então αu está em W.

Demonstração. Se W for um subespaço de V, então todas as propriedades de espaço vetorial estão satisfeitos, inclusive as condições (a) e (b).

Reciprocamente, suponha que W possua as condições (a) e (b). Como as propriedades (i), (v), (vi), (vii) e (viii) valem em W pois os vetores de W pertencem a V,que é o espaço vetorial, precisamos somente verificar que os elementos de W possuem as propriedades (iii) e (iv), Tome um elemento qualquer $u \in W$, o que é possível pois W não é vazio. Por (b), $\alpha u \in W$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Tomando $\alpha = 0$, segue-se que $0u = 0 \in W$. Faça $\alpha = -1$. Segue que $(-1)u = -u \in W$. Isto mostra que (iii) e (iv) valem em W.

□

Exemplo 3. *Dado* $V = \mathbb{R}^4$ *e* $W = \{(0, x_2, x_3, x_4)\,; x_i \in \mathbb{R}\}$. *Assim,* W *é o conjunto de vetores do* $\mathbb{R}^4$*, cuja primeira coordenada é nula. Verifiquemos se as condições (a) e (b) são satisfeitas:*

(a) Seja $u = (0, x_2, x_3, x_4)$ *e* $v = (0, y_2, y_3, y_4) \in W$.
Então $u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ *pertence a* W*, pois a primeira coordenada é nula.*

(b) $\alpha u = \alpha\,(0, x_2, x_3, x_4) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \in W$*, pois a primeira coordenada é nula para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$

Portanto, de W *é um subespaço de* V*.*

1.2.2 Combinação linear de vetores

Definição 7. *Sejam* V *um espaço vetorial real,* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *e* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Então o vetor :*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + ... + a_n v_n$$

é um elemento de V denominado combinação linear entre $v_1, v_2, ..., v_n$.

Exemplo 4. *Dados os vetores* $(1, 2, 3), (2, 3, 7)$ *e* $(3, 5, 7)$ *do* $\mathbb{R}^3$*. Multiplicando-os por* $2, 4$ *e* 7*, respectivamente, e somando esses resultado obtemos:* $2\,(1, 2, 3) + 4\,(2, 3, 7) + 7\,(3, 5, 7) = (2, 4, 6) + (8, 12, 28) + (21, 35, 47) = (31, 51, 81)$*, onde o vetor resultante* $(31, 51, 81) \in \mathbb{R}^3$ *é dito um combinação linear entre os vetores iniciais.*

1.2.3 Subespaços Geradores

Definição 8. *Dizemos que o subespaço de um espaço vetorial V que é formado por todas as combinações lineares possíveis de vetores de um conjunto não vazio W é chamado subespaço gerado por W, e dizemos que os vetores em W geram esse subespaço. Se $W = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$, denotamos o conjunto gerador de W por:*

$$W = G\{v_1, v_2, ..., v_r\}$$

Teorema 2. *Seja $W = G\{v_1, v_2, ..., v_r\}$, onde $v_1, v_2, ..., v_r$ são vetores de um espaço vetorial V. Valem as seguintes afirmações:*

(a) W é um subespaço de V;

(b) W é o menor subespaço de V contendo $v_1, v_2, ..., v_r$, no sentido de que qualquer subespaço de V que contém $v_1, v_2, ..., v_r$ também contém W.

Demonstração. (a): Tomemos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in W$. Então existem números reais $a_1, a_2, ..., a_r$ e $b_1, b_2, ..., b_r$ tais que

$$u = a_1v_1, a_2v_2, ..., a_rv_r \text{ e } v = b_1v_1, b_2v_2, ..., b_rv_r$$

Portanto, $u + \alpha v = (a_1 + \alpha b_1) v_1 + (a_2 + \alpha b_2) v_2 + \cdots + (a_r + \alpha b_r) v_r$. Assim, $u + \alpha v$ é uma combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_r$ e consequentemente pertence a W. Pelo Teorema 1, W é um subespaço de V.

(b): Cada vetor v_i é uma combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_r$, pois podemos escrever

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 1v_i + \cdots + 0v_r \ .$$

Isto mostra que o subespaço W contém cada um dos vetores $v_1, v_2, ..., v_r$. Seja W' um subespaço qualquer de V contendo $v_1, v_2, ..., v_r$. Pelo Teorema 1, esse subespaço contém todas as combinações lineares destes vetores. Assim, $W \subset W'$. $\square$

Exemplo 5. *O espaço gerado pelo vetor $v = (2, 3, 1)$ em $\mathbb{R}^3$ é o conjunto $W = \{\alpha (2, 3, 1) ; \alpha \in \mathbb{R}\}$, já que uma combinação linear de v é um múltiplo escalar de v.*

1.2.4 Base de um espaço vetorial

É corretamente plausível utilizar um número finito de vetores de um espaço vetorial V para gerar o próprio espaço vetorial V. Esse conjunto é nomeado uma base de V. Para tal:

Definição 9. *Sejam V um espaço vetorial, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é Linearmente Independente (LI), ou que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI, se a equação:*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_nv_n = 0$$

implica em $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. Caso contrário, existindo algum $a_i \in \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tal que $a_i \neq 0$, o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é expressado Linearmente Dependente (LD), ou que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LD.

Pode-se definir uma base de um espaço vetorial V como sendo:

Definição 10. *Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \in V$ tal que:*

i) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LI,
ii) $G\{v_1, v_2, ..., v_n\} = V$.

Exemplo 6. *O conjunto $\{v_1, v_2\} = \{(2, 1), (3, 0)\}$ é uma base de $V = \mathbb{R}^2$. De fato, o conjunto $\{(2, 1), (3, 0)\}$ é LI, pois para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$, temos $(0, 0) = a(2, 1) + b(3, 0) = (2a + 3b, a) \Rightarrow a = b = 0$ Ainda, $G\{(2, 1), (3, 0)\} = V$ visto que, quando $a = y$ e $b = \frac{x-2y}{3}$ temos a combinação linear*

$$(x, y) = y(2, 1) + \frac{x - 2y}{3}(3, 0)$$

dos vetores $(2, 1)$ e $(3, 0)$ gerando um vetor (x, y) genérico do $\mathbb{R}^2$.

Portanto $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Um assunto significativo que recorre da base de um espaço vetorial é o conceito de dimensão desse espaço.

Definição 11. *Qualquer base de um espaço vetorial V tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado de dimensão de V e denotado por $dimV$.*

Exemplo 7. *Uma base de um espaço vetorial V no é dada por*

$$\mathbb{R}^3\ \{(x_1, 0, 0), (0, x_1, 0), (0, 0, x_1)\} \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Como essa base possui três elementos, temos que $dimV = 3$.

1.3 Transformação Linear

Definição 12. *Sejam V e W dois espaços vetorias. Uma transformação linear é uma função de V em W, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

i) $F(u + v) = F(u) + F(v)$, quaisquer que sejam u e v em V

ii) $F(\alpha v) = \alpha F(v)$, quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$

Exemplo 8. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $F(x, y) = x + y$ uma aplicação F. Considere os vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ com $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:*

i) $F(u + v) = F((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = F(u) + F(v)$

ii) $F(\alpha u) = F((\alpha (u_1, u_2)) = F(\alpha u_1, \alpha u_2) = \alpha u_1, \alpha u_2 = \alpha (u_1, u_2) = \alpha F(u)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

Como as condições (i) e (ii) são satisfeitas, segue que a função é uma transformação linear.

1.4 Conjunto Convexo

Segundo Boldrini, em [2], a programação linear é uma técnica simples aplicada a muitos problemas do cotidiano no caso específico em que o interesse é maximizar ou minimizar funções lineares com restrições dadas por desigualdade lineares, que são regiões poliedrais convexas, que serão introduzida nesta seção.

Definição 13. *Um subconjunto A não vazio de um espaço vetorial V é uma variedade linear de V se existe um subespaço W de V e um vetor v_0 de V, tal que:*

$$A = \{v \in V;\ v = v_0 + w \, para \, w \in W\}$$

cuja anotação $A = v_0 + w$ indica, a variedade linear. É possível observar que se $v_0 \neq 0$ então A não é um subespaço. Além disso, por dimensão de A entendemos a dimensão de W.

Exemplo 9. *Exemplos de variedade linear:*

1) Uma reta que passa ou não pela origem é uma variedade linear de dimensão 1 *do* $\mathbb{R}^2$.

2) Um ponto do plano é uma variedade linear de dimensão zero.

3)Todo subespaço vetorial é, em particular, uma variedade linear. Para ver, basta fazer $v_0 = 0$.

4) Em todo sistema linear compatível, o seu conjunto solução é uma variedade linear de dimensão igual ao grau liberdade do sistema. Como podemos perceber no caso do sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

cuja solução

$$S = \{(-y + 2z + t, y, z, t)\}$$

possui uma base dada pelo conjunto $\{(-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. *Sendo assim, a dimensão é igual a* 3 *e o grau de liberdade também igual a* 3*, pois possui 4 incógnitas e seu posto equivale a* 1. *Em particular, a variedade linear associada ao sistema linear com uma equação linear é chamada hiperplano.*

De modo geral, um hiperplano divide o espaço vetorial em que está contido em dois semi-espaços.

Exemplo 10. *Considere o hiperplano em* $\mathbb{R}^3$ *descrito pela equação* $2x+3y+3z-2 = 0$ *que divide* $\mathbb{R}^3$ *em dois semi-espaços vetoriais, como pode ser visto abaixo*

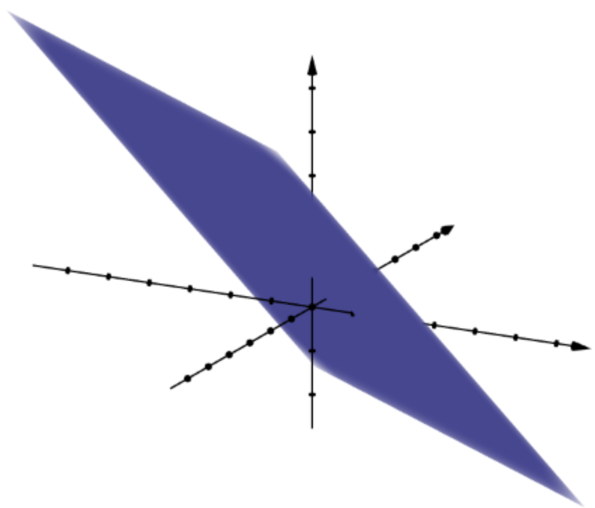


Figura 1: Hiperplano descrito pela equação $2x + 3y + 3z - 2 = 0$

Nesta figura, o hiperplano $2x+3y+3z-2=0$ *aparece hachurado e dividindo o espaço* $\mathbb{R}^3$ *em dois. Para verificar qual semi-espaço satisfaz as desigualdades* $2x+3y+3z-2 \leq 0$ *e* $2x+3y+3z-2 \geq 0$, *tome um ponto qualquer pertencente a um dos semi-espaços e verifique qual desigualdade o mesmo satisfaz. Por exemplo: escolhendo o ponto* $(0,0,0)$ *implica em* $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \leq 0$, *o que satisfaz a desigualdade* $2x+3y+3z-2 \leq 0$. *Logo esse é o semi-espaço que contém o ponto* $(0,0,0)$. *Denominamos de semi-espaço fechado o semi-espaço que possui o hiperplano e, semi-espaço aberto é o semi-espaço que não o possui.*

Para equações com mais de três variáveis, não é possível obter uma representação geométrica como no caso anterior. Entretanto, esses casos são abordados de maneira análoga. De maneira geral, o hiperplano:

$$H = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

é uma variedade linear de dimensão $n-1$ que divide o $\mathbb{R}^n$ em dois subespaços fechados, descritos abaixo como H^+ e H^-:

$$H^+ = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

$$H^- = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$$

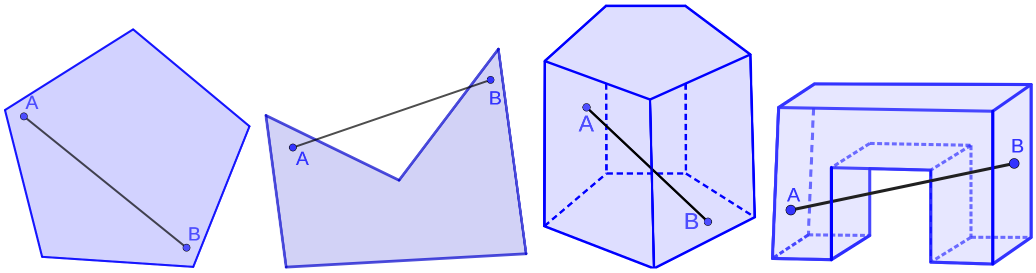
Além do relatado anteriormente, conceituaremos algumas propriedades importantes para a resolução de problemas em programação linear.

Definição 14. *Sejam* A *e* B *dois pontos do* $\mathbb{R}^n$, *o segmento de extremos* A *e* B *é o conjunto* AB *de pontos* $\mathbb{R}^n$, *dado por:*

$$AB = \{(1-t)\,A + tB;\ 0 \leq t \leq 1\}$$

Definição 15. *Um subconjunto* S *do* $\mathbb{R}^n$ *é chamado de convexo se para quaisquer dois pontos de* A *e* B *de* S *o segmento* AB *está inteiramente contido em* S.

Exemplo 11. *Alguns exemplos de subconjuntos convexos e não convexos:*



(a) Convexo do $\mathbb{R}^2$ (b) Não convexo do $\mathbb{R}^2$ (c) Convexo do $\mathbb{R}^3$ (d) Não convexo do $\mathbb{R}^3$

Figura 2: Figuras convexas e não convexas

Teorema 3. *Um semi-espaço fechado é convexo.*

Demonstração. Demonstraremos para o caso do semi-espaço estar em $\mathbb{R}^2$. Os outros casos são feitos utilizando os mesmos argumentos. Para o $\mathbb{R}^2$,um semi-espaço é constituído de pontos (x, y) tais que satisfaçam uma equação do tipo $ax + by + c \leq 0$. Precisamos mostrar que quaisquer dois pontos do semi-espaço em questão, o segmento que une estes dois pontos está contido também neste semi-espaço.

Sejam $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ dois pontos quaisquer de $\mathbb{R}^2$ e seja P um ponto de AB, existe então $t_1 \in \mathbb{R}$, com $0 \leq t_1 \leq 1$ tal que:

$$P = (1 - t_1)\, A + t_1 B = (1 - t_1)\,(x_0, y_o) + t_1\,(x_1, y_1) =$$
$$((1 - t_1)\, x_0 + t_1 x_1, (1 - t_1)\, y_0 + t_1 y_1)$$

É necessário verificar se:

$$a\,[(1 - t_1)\, x_0 + t_1 x_1] + b\,[(1 - t_1)\, y_0 + t_1 y_1] + c \leq 0 \tag{2}$$

que é justamente a condição para que P esteja no semi-espaço. Mas:

$$a\,[(1 - t_1)\, x_0 + t_1 x_1] + b\,[(1 - t_1)\, y_0 + t_1 y_1] + c = 0$$

$$= a\,(1 - t_1)\, x_0 + a t_1 x_1 + b\,(1 - t_1)\, y_0 + b t_1 y_1 + c = 0$$

$$= (1 - t_1)\,[a x_0 + b y_0 + c] + t_1\,[a x_1 + b y_1 + c]$$

e como $ax_0 + by_0 + c \leq 0$ e $ax_1 + by_1 + c \leq 0$, pois A e B estão no semi-espaço e $1 - t_1 \geq 0$ e $t_1 \geq 0$, por conta de $0 \leq t_1 \leq 1$, a condição (2) é satisfeita. Por fim, como P está no semi-espaço e P era arbitrário contido em AB, temos que AB está contido nesse semi-espaço e, portanto, é convexo. □

Definição 16. *Uma região poliedral convexa fechada em $\mathbb{R}^n$ é uma interseção de uma quantidade finita de semi-espaços fechados do $\mathbb{R}^n$.*

Definição 17. *Sejam $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto e $r > 0$ um número real. A bola aberta de centro p e raio r é o conjunto $B(p;r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto p é menor do que r. Explicitado por:*

$$B(p;r) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - p| < r\}.$$

Definição 18. *Dados um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, a bola fechada de centro p e raio r é o conjunto $B[p;r]$ de pontos representado por:*

$$B[p;r] = \{x \in \mathbb{R}^n, |x - p| \leq r\}.$$

Segundo Lima [6] um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado quando está contido em alguma bola fechada $B[p;r]$. Como $B[p;r] \subset B[0;k]$, onde $k = r + |p|$ (conforme mostraremos a seguir), dizer que A é limitado assemelha a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x| \leq k$ para todo $x \in A$.

Para verificar que $B[p;r] \subset B[0;r + |p|]$, repare que $|x - p| \leq r \Rightarrow |x - p + p| \leq |x - p| + |p| \leq r + |p|$. Assim, $x \in B[p;r] \Rightarrow x \in B[0;r + |p|]$.

Pela maneira que foi definida uma região poliedral convexa, percebemos que é obtida por um sistema de inequações lineares em que cada semi- espaços que a compõem se refere a uma inequação do sistema. Ademais, os pontos especiais a serem detectados na região poliedral fechada são os vértices.

Definição 19. *Uma região poliedral convexa fechada no $\mathbb{R}^n$, definida acima, os seus vértices são os pontos que satisfazem um dos possíveis sistemas de n equações lineares independentes, que são obtidas substituindo-as por igualdades.*

Obs.: Depois da resolução do sistema, a fim de verificar se o ponto está na região, é necessário testar o ponto encontrado e observar se o mesmo satisfaz todas as inequações.

1.4.1 Caracterização Geométrica do Vértices

Os vértices até aqui determinados algebricamente, referentes a uma região poliedral convexa, são os pontos extremos de uma região poliedral convexa, ou melhor, são pontos da região que não estão contidos no interior de nenhum segmento contido nesta região.

2 Programação Linear

De acordo com Boldrini, em [2], problemas em Programação Linear de forma geral tratam a otimização (maximizar ou minimizar) de uma função afim do tipo:

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n + b$$

restrita a um subconjunto A poliedral convexo de $\mathbb{R}^n$.

Em Programação Linear (PL), esta região A é denominada de região factível. Na qual será obtida a partir de um conjunto de inequação que comporão as restrições do problema e, f é a chamada função objetivo (F0). Baseado em todos os tipos de regiões poliedrais convexas no $\mathbb{R}^2$ podemos intuir os tipos de soluções poliedrais que existem e se possuem pontos de otimização:

(i) Região ilimitada sem vértice

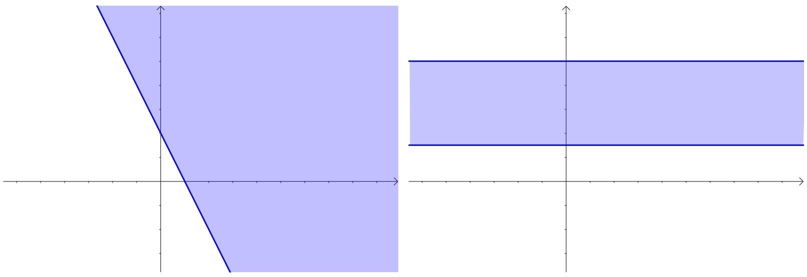


Figura 3: Região ilimitada sem vértice

É possível perceber que a imagem a esquerda assume mínimo em toda reta e não assume máximo já a da direita não assume máximo nem mínimo.

(ii) Região ilimitada com vértice

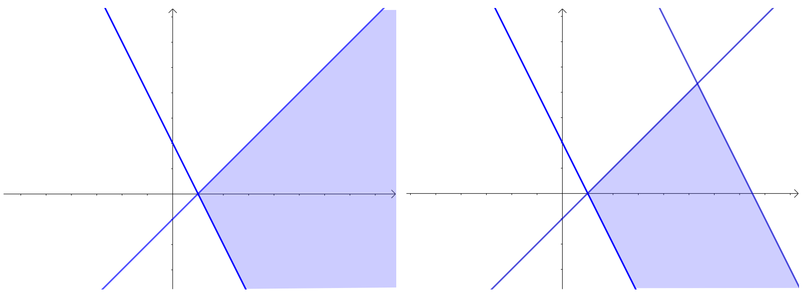


Figura 4: Região ilimitada com vértice

Nesse caso, a imagem a direita não assume máximo nem mínimo e a da esquerda assume máximo e não assume mínimo. Numa região ilimitada com vértice é possível ter máximo ou mínimo (mas não ambas).

(iii) Região limitada (com pelo menos 3 vértices)

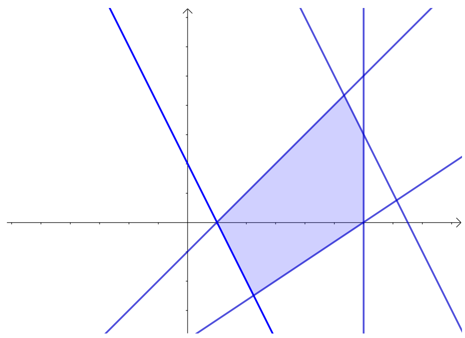
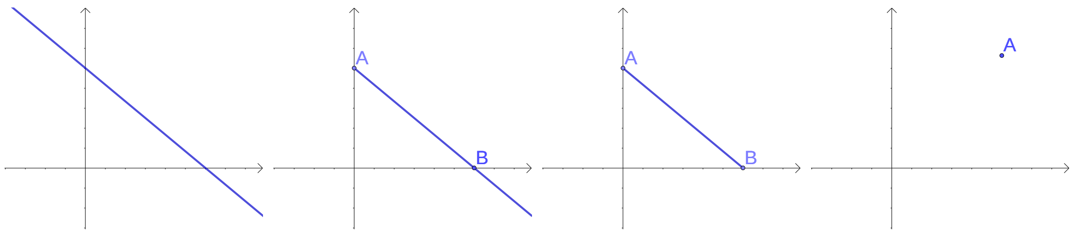


Figura 5: Região limitada (com pelo menos 3 vértices)

Nas regiões desse tipo é possível obter mínimo e máximo.

(iv) Casos degenerados



(a) Reta (b) Semirreta (c) Segmaneto (d) Ponto

Figura 6: Casos degenerados

Nesses casos, tem-se que a imagem:
(a) não assume máximo nem mínimo
(b) assume máximo em A e não assume mínimo
(c) assume mínimo em B e máximo em A
(d) máximo = mínimo = $f(A)$

Abaixo seguem dois Lemas fundamentais para a resolução de problemas de Programação Linear, que antecedem o Teorema 4.

Lema 1. *Seja* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n + b$ *e seja* P *um ponto interior a um segmento* $\overline{AB}$ *do* $\mathbb{R}^n$ *, isto é,* $P = \lambda A + (1 - \lambda) B$*, com* $0 < \lambda < 1$*. Então* $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ *ou* $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$*.*

Demonstração. Como $P = \lambda A + (1 - \lambda) B$ e f é uma transformação afim, ou seja, $f(x) = L(x) + b$ onde $L(x) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n$ é linear, temos, $f(P) = L(P) + b = L(\lambda A + (1 - \lambda) B) + b = \lambda L(A) + (1 - \lambda) L(B) + b$. Supondo $f(A) \leq f(B)$ implica $L(A) \leq L(B)$ e como $f(P) = \lambda L(A) + (1 - \lambda) L(B) + b$ tem-se então, $\lambda L(A) + (1\lambda) L(A) + b \leq f(P)\lambda L(B) + (1\lambda) L(B) + b$, de onde: $L(A) + b \leq f(P) \leq L(B) + b$. Portanto, $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$.

Para $f(B) \leq f(A)$, a prova para demonstrar que $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$ é análoga ao caso anterior. □

Decorre do resultado anterior que os valores extremos de uma função afim são assumidos nos pontos extremos dos segmentos, como segue.

Lema 2. *Seja* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n + b$ *. Se dentre os valores que* f *assumir num segmento* $\overline{AB}$ *do* $\mathbb{R}^n$ *o valor máximo, ou mínimo, for assumido num ponto* P *interior a este segmento, então* f *será constante nesse segmento* $\overline{AB}$*.*

Demonstração. Supondo $f(A) \leq f(B)$, implica em $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ pelo Lema 1. Caso $f(P)$ seja máximo, então $f(B) \leq f(P)$, essas duas últimas desigualdades segue $f(P) = f(B)$. Em especial, para $P = A$, tem-se que $f(P) = f(A)$ e como P é arbitrário, conclui-se que f é constante em $\overline{AB}$.

Caso $f(P)$ seja mínimo tem-se $f(P) \leq f(A)$ e como $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$, logo $f(P) = f(A)$. Em especial para $P = B$, tem-se que $f(P) = f(B)$ e como P é arbitrário, conclui-se que f é constante em $\overline{AB}$. Em ambos os casos, f é constante em AB. Para o caso de $f(B) \leq f(A)$, a demonstração é análoga. □

Segundo Boldrini, em [2], com base nos Lemas 1 e 2 expostos acima e a natureza de uma região poliedral convexa podemos enunciar o principal resultado de PL.

Teorema 4. *(Teorema Fundamental da Programação Linear) Seja* $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n + b$ *definida e numa região poliedral convexa* A *do* $\mathbb{R}^n$*.*

Suponha que f assuma valor máximo (mínimo) em A. Então se A possui vértice(s), esse valor máximo (mínimo) será assumido em um dos vértice.

Demonstração. Demonstraremos o Teorema Fundamental da Programação Linear para o caso em que $A \subset \mathbb{R}^2$. Visto que f assuma um valor máximo (mínimo) em um ponto P de A, as possibilidades são:

i) P é um vértice, logo o teorema está provado;

ii) P está em uma aresta de A, mas pelo Lema 2, todos os pontos desta aresta assumirão o valor $f(P)$ e como A possui vértice, esta aresta obrigatoriamente conterá um vértice V, logo $f(P) = f(V)$;

iii) P é ponto interior de A. Nesse caso, f será constante em toda região A. Para a prova disso,seja Q um outro ponto interior dessa região, e como A é poliedral convexa, o segmento $\overline{QP}$ ainda está contido em A, podendo ainda ser prologado até um ponto $\overline{Q'}$, onde $\overline{QQ'}$ também estará contido em A, pois P é interior à mesma, o que implica em $f(P) = f(Q)$. $\square$

A prova deste Teorema para o caso em $\mathbb{R}^n$ exigirá a análise de uma quantidade muito maior de possibilidades para P, observar quando:

i) P é um vértice;

ii) P está numa aresta que é resultado da solução de $n-1$ equações, onde o valor máximo (mínimo) será assumido em toda a aresta que é um subconjunto de dimensão 1;

iii) P está em uma face que é resultado da solução de $n-2$ equações, onde o valor máximo (mínimo) será assumido em toda a face que é um subconjunto de dimensão 2;

$\vdots$

ni) P é ponto interior onde a função f assumirá valor constante em toda região A.

2.1 Método Geométrico

Com os conceitos e resultados discutidos até aqui é possível resolver problemas de Programação Linear para função no $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$ pelo método geométrico utilizando dois passos de maneira geral:

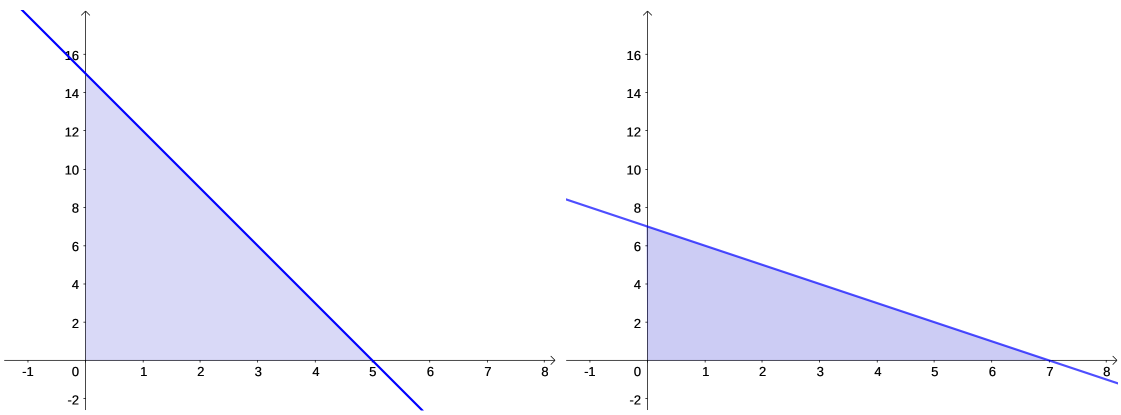
i) Construção da região factível: região poliedral convexa cujos pontos são os que satisfazem as restrições referente ao problema;

ii) Análise de otimalidade: Fazer a análise de otimalidade da função,ou seja, fazer uma análise para encontrar o valor máximo ou mínimo da função. Em geral, se esta região factível for limitada, pelo teorema fundamental da programação linear, seu valor ótimo será assumido em algum dos vértices dessa região. Caso não seja uma região poliedral convexa limitada, se possuir vértice e se a função objetivo possuir um valor ótimo então, este valor é assumido em algum dos vértices. Enfim, se for uma região poliedral convexa ilimitada, a função não assumirá um valor ótimo.

Exemplo 12. *Dada* $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$*; com as seguintes restrições:*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Inicialmente iremos construir a região factível, isto é, construiremos a região (subespaço) definida por cada inequação da restrição. Como $x_1, x_2 \geq 0$ segue que as restrições estarão na parte positiva do plano cartesiano. Assim, a representação geométrica de cada uma das demais restrições é:



(a) $3x_1 + x_2 \leq 15$ (b) $x_1 + x_2 \leq 7$

Figura 7: Representação Geométrica de cada restrição

Como todas as restrições foram traçadas, temos o chamado Espaço Solução que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo; ou seja, é a intersecção de todos os pontos que obedecem cada uma das restrições do modelo. No gráfico abaixo, o Espaço Solução é o polígono convexo $ABCD$:

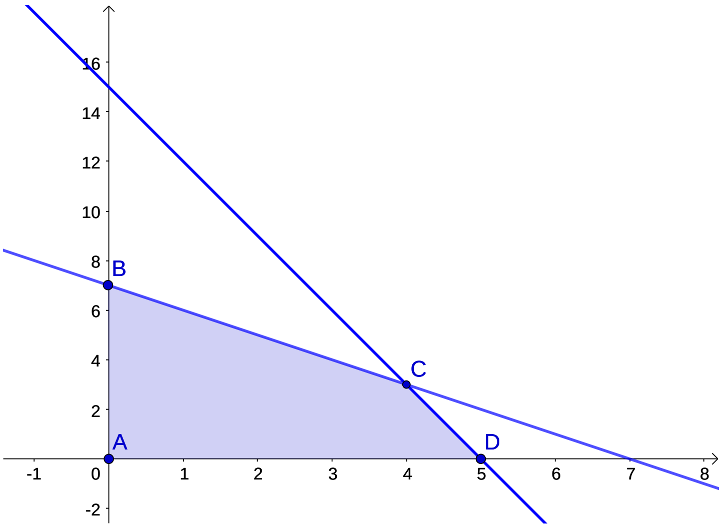


Figura 8: Espaço Solução

Agora, faremos a análise de otimalidade da função objetivo. Uma vez que a região factível é limitada sabemos que o valor máximo ou mínimo será assumido em algum dos vértices dessa região.

Portanto, podemos calcular os valores da função a partir dos vértices da região fatível que é o ponto em que as restas se interceptam duas a duas. Os resultados podem ser conferidos na tabela a seguir.

Ponto	**Valor**
$A = (0, 0)$	0
$B = (0, 7)$	21
$C = (4, 3)$	17
$D = (5, 0)$	10

Tabela 1: Valor da função $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ nos vértices da Região Factível

Verificamos que o ponto B nos dá o valor máximo de 21 e o ponto A assume o valor mínimo zero.

Uma possível solução geométrica de problemas de Programação Linear no $\mathbb{R}^3$ pode ser encontrada na dissertação de Silva [10].

2.2 Método Simplex

Na seção anterior vimos que é possível achar a solução ótima de um problema de Programação Linear em $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$ pelo método geométrico. Porém, quando se trata de um modelo de PL contendo mais de três variáveis esse método se torna inviável. Com isso, surgiu o Método Simplex que segundo Boldrini [2] nada mais é que um algoritmo de busca, isto é, um método que começa em um vértice da região factível e vai percorrendo os demais vértices da região até encontrar a solução ótima.

Antes de expormos o Método Simplex, seguem algumas definições bastante importantes para a resolução de problemas em programação linear.

Considerando, um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

na sua forma matricial $Ax = b$, supondo que o posto de A seja igual a m e que $n > m$, para tal sistema tem-se as seguintes definições.

Definição 20. *(Solução básica) Seja B qualquer submatriz $m \times m$ não singular constituída por m colunas independentes de A e seja C a submatriz $m \times (n - m)$ constituída pelas $n - m$ colunas restantes de B. Assim, $Ax = b$ pode ser reescrito da seguinte forma:*

$$Bx_B + Cx_C = b$$

Onde x_B é o vetor de m componentes constituído pelas variáveis associadas a matriz B e x_C é o vetor de $(n - m)$ componentes formado pelas variáveis associadas a matriz C. Dessa forma, se todos os componentes de x_C forem iguais a zero, a solução para o sistema $Bx_B = b$ é dita solução básica de $Ax = b$ sobre a base B, no qual as variáveis x_B serão chamadas de variáveis básicas e as variáveis de x_C de variáveis não básicas.

Definição 21. *(Solução básica degenerada) Se possuir uma ou mais variáveis básicas que sejam iguais a zero na solução básica, esse resultado é dito solução básica degenerada.*

Definição 22. *(Solução factível) Um vetor que satisfaz à todas as restrições de um problema de programação linear é dito ser solução factível. Ademais, uma solução básica que também é factível diz-se solução básica factível e se essa solução básica factível for degenerada, será chamada de solução básica factível degenerada.*

Definição 23. *(Solução Básica Factível Ótima) A solução básica factível ótima é a que dentre todas as outras soluções básicas factíveis otimiza o valor da função objetivo.*

Exemplo 13. *A seguir será resolvido o exemplo 12 utilizando as definições que foram expostas acima sobre os tipos de solução de um sistema linear.*

Considere o sistema das restrições do exemplo 1:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Observe que este sistema é uma sistema composto por inequações. Assim, para transformar o sistema de inequações em um sistema de equações adiciona-se em cada uma das inequações as variáveis de folga F_1 e F_2. Note que essas variáveis de folga nunca serão negativas pois são obtidas através de uma diferença em que o primeiro termo nunca é maior que o segundo, com isso as variáveis do sistema são não negativas. Desta forma temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + F_1 = 15 \\ x_1 + x_2 + F_2 = 7 \end{cases}, \text{ com } x_1, x_2, F_1, F_2 \geq 0$$

Que na forma matricial $Ax = b$ é:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Escalonando a matriz A verificamos que possui posto 2, isto é, o número de linhas não nulas da matriz escalonada A é igual a 2. O que admite tomar como base submatrizes 2×2 do sistema.

As possíveis soluções básicas são:

i) Assumindo como base a submatriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e reformulando o sistema na forma matricial $Bx_B + Cx_C = b$ temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sendo assim as variáveis x_1 e x_2 serão as variáveis básicas e F_1 e F_2 serão as variáveis não básicas que também podem ser chamadas de variáveis livres dado que a nulidade, quantidade de linhas não nulas, da matriz dos coeficientes do sistema inicial é 2. Considerando que F_1 e F_2 sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima, apresenta a forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que possui solução $x_1 = 4$ e $x_2 = 3$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Note que o ponto $(x_1, x_2) = (4, 3)$ que é o ponto C da região factível da solução geométrica.

ii) Assumindo como base a submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e reformulando o sistema na forma matricial $Bx_B + Cx_C = b$ temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sendo assim as variáveis x_2 e F_1 serão as variáveis básicas e x_1 e F_2 serão as variáveis não básicas. Considerando que x_1 e F_2 sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima, apresenta a forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que possui solução $x_2 = 7$ e $F_1 = 8$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como foi considerado que $x_1 = 0$, segue que ponto $(x_1, x_2) = (0, 7)$ que é o ponto B da região factível da solução geométrica.

iii) Assumindo como base a submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e reformulando o sistema na forma matricial $Bx_B + Cx_C = b$ temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sendo assim as variáveis F_1 e F_2 serão as variáveis básicas e x_1 e x_2 serão as variáveis não básicas. Considerando que x_1 e x_2 sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima, apresenta a forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que possui solução $F_1 = 15$ e $F_2 = 7$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como foi considerado que $x_1 = x_2 = 0$, segue que ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ que é o ponto A da região factível da solução geométrica.

iv) Assumindo como base a submatriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e reformulando o sistema na forma matricial $Bx_B + Cx_C = b$ temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sendo assim as variáveis x_1 e F_2 serão as variáveis básicas e x_2 e F_1 serão as variáveis não básicas. Considerando que x_2 e F_1 sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima , apresenta a forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que possui solução $x_1 = 5$ e $F_2 = 2$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como foi considerado que $x_2 = 0$, segue que ponto $(x_1, x_2) = (5, 0)$ que é o ponto D da região factível da solução geométrica.

v) Assumindo como base a submatriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e reformulando o sistema na forma matricial $Bx_B + Cx_C = b$ temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sendo assim as variáveis x_1 e F_1 serão as variáveis básicas e x_2 e F_2 serão as variáveis não básicas. Considerando que x_2 e F_2 sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima , apresenta a forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que possui solução $x_1 = 7$ e $F_1 = -6$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nesse caso F_1 não satisfaz a condição de não negativo, portanto o ponto $(x_1, x_2) = (7, 0)$ não pertence ao vértice da região factível.

vi) Assumindo como base a submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e reformulando o sistema na forma matricial $Bx_B + Cx_C = b$ temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sendo assim as variáveis x_2 e F_2 serão as variáveis básicas e x_1 e F_1 serão as variáveis não básicas. Considerando que x_1 e F_1 sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima, apresenta a forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Que possui solução $x_2 = 15$ e $F_2 = -8$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nesse caso F_2 não satisfaz a condição de não negativo, portanto o ponto $(x_1, x_2) = (0, 15)$ não pertence ao vértice da região factível.

O fato importante desse exemplo é perceber que a cada base assumida encontramos o ponto de uma possível solução básica, conseguindo verificar se pertence ou não à região factível. Se tratando de um problema com mais variáveis o Método Simplex percorre caminhos pelos vértice que faz com que cheguemos na solução ótima sem precisar encontrar todos os pontos extremos para depois analisar o desempenho desses pontos na função objetivo tornando o procedimento menos extenso.

Este método foi desenvolvido por George B. Datzing em 1947 e logo após o seu desenvolvimento houve um crescimento surpreendente da Programação linear, que até então era desconhecida e pouco utilizada devido seus problemas demandarem de um grande esforço computacional. Após esse avanço a Programação Linear se expandiu como área de pesquisa.

Segundo Hillier e Lieberman [5] o Método Simplex é um procedimento sistemático para solução que fica repetindo uma série de passos, chamadas iterações, até que se chegue a um resultado desejado. Cada vez que é executada uma iteração desloca-se da solução básica atual para outra adjacente até encontrar a solução ótima; esse deslocamento é feito ao longo do lado da região factível com maior taxa de crescimento da função objetivo. Esse procedimento possui a seguinte estrutura:

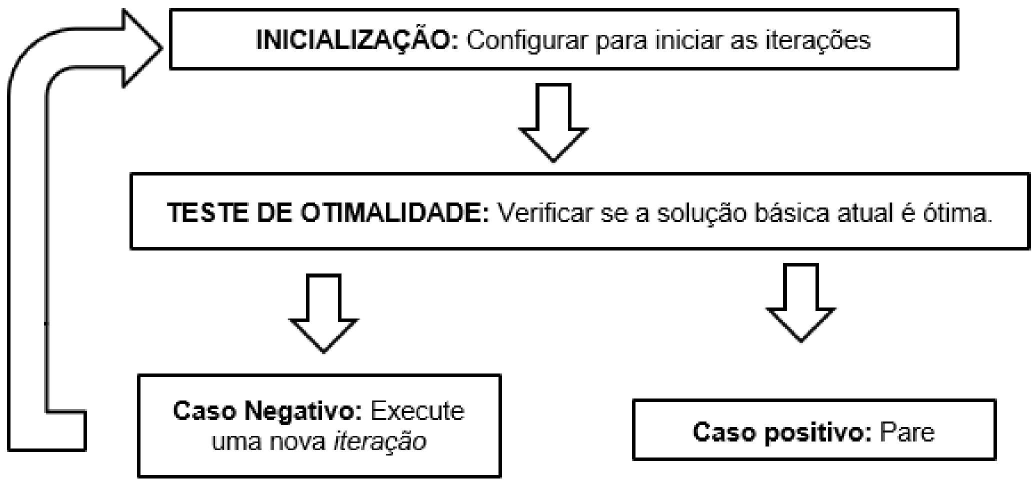


Figura 9: Estrutura do Método Simplex

O Método Simplex é uma forma algébrica de resolução de problemas em Programação Linear. As descrição das etapas de solução desse método será baseada, principalmente, de acordo Hillier e Lieberman [5] .

Consideremos o problema na forma padrão para a aplicação do Método Simplex

$$\text{Maximizar: } f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n + b$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Para resolver, deve seguir as seguintes etapas:

I) Inicialização:

• Introduza a variável folga para transformar o problema de Simplex com $\leq$ em um problema linear.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n + F_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n + F_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n + F_m = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n, F_1, F_2, \cdots, F_m \geq 0 \end{cases}$$

• Selecione as variáveis básicas (VB) as variáveis de folga introduzidas e as variáveis não básicas (VNB) as demais varáveis (configurando-as iguais a zero); em seguida preencha a tabela Simplex conforme modelo.

Variável Básica (VB)	Equação	Coeficientes de									Lado Direito
		$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	F_1	F_2	$\cdots$	F_m	
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	(0)	1	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	0	0	$\cdots$	0	0
F_1	(1)	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
F_2	(2)	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
			$\vdots$								
F_m	(3)	0	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m

Tabela 2: Tabela Simplex Inicial

II) Teste de Otimalidade: A atual solução básica é ótima se, e somente se todos os coeficientes da linha 0 forem maiores do que ou iguais a zero. Se for verdade pare; caso contrário, realize uma nova iteração mudando uma variável básica para uma não básica.

III) Iteração :

Passo 1) Determine a variável básica que ENTRA selecionando na função objetivo a variável com o coeficiente negativo tendo o maior valor absoluto; caso haja empate a escolha pode ser feita de modo arbitrário entre os contendores. Selecione a coluna dessa variável que entra e chame-a coluna pivô.

Passo 2) Determine a variável básica que SAI, aplicando o teste da razão mínima, da seguinte maneira:

1. Selecione cada coeficiente da coluna pivô que seja estritamente positivo. (Se nenhum coeficiente possui essa qualificação então dizemos que a solução para o respectivo problema é ilimitada.)
2. Faça o teste da razão que procede da seguinte maneira: Divida cada um dos coeficientes da coluna nomeada lado direito pelos coeficientes da coluna pivô nas respectivas linhas
3. Identifique a linha que possui a menor dessas razões (desempate de modo arbitrário caso necessário) e denominei-a linha pivô.
4. A variável básica para esta linha é a variável básica que sai. Portanto substitua-a pela VB que entra na coluna da VB da próxima tabela simplex.

Denomine o coeficiente que se encontra na intersecção da coluna pivô com a linha pivô de número pivô.

Para o modelo de tabela simplex do passo 1 vamos considerar que x_2 seja a VB que Entra e que F_1 seja a VB que Sai. Assim teremos o modelo abaixo para aplicar o próximo passo:

Variável Básica	**Equação**	**Coeficientes de**									**Lado**	**Teste da**
(VB)		$f(x_1, \cdots, x_n)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	F_1	F_2	$\cdots$	F_m	**Direito**	**Razão**
$f(x_1, \cdots, x_n)$	(0)	1	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	0	0	$\cdots$	0	0	
F_1	(1)	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1	$\frac{b_1}{a_{12}}$ (mínimo)
F_2	(2)	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2	$\frac{b_2}{a_{22}}$
				$\vdots$								
F_m	(3)	0	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m	$\frac{b_m}{a_{m2}}$

Tabela 3: Tabela Simplex na iteração 0 (encontrar o elemento pivô)

Passo 3) Encontre a nova solução básica usando operações elementares em linhas indicadas:

1. Divida a linha pivô pelo número pivô e encontre a nova linha pivô.

2. Para as demais linhas subtraia dessa linha o produto do coeficiente da coluna pivô respectiva a esta linha pela nova linha pivô.

Iteração	**Variável Básica**	**Equação**	**Coeficientes de**									**Lado Direito**
	(VB)		$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	F_1	F_2	$\cdots$	F_m	**b**
	$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	(0)	1	a_1	a_2	$\cdots$	a_n	0	0	$\cdots$	0	0
	F_1	(1)	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
0	F_2	(2)	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
						$\vdots$						
	F_m	(3)	0	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m
	(VB)	**Equação**	$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	F_1	F_2	$\cdots$	F_m	**b**
	$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$	(0)	$1 - a_2 \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$a_1 - a_2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}}$	$a_2 - a_2 \cdot \frac{a_{12}}{a_{12}}$	$\cdots$	$a_n - a_2 \cdot \frac{a_{1n}}{a_{12}}$	$0 - a_2 \cdot \frac{1}{a_{12}}$	$0 - a_2 \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$\cdots$	$0 - a_2 \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$0 - a_2 \cdot \frac{b_1}{a_{12}}$
1	x_2	(1)	$\frac{0}{a_{12}}$	$\frac{a_{11}}{a_{12}}$	$\frac{a_{12}}{a_{12}}$	$\cdots$	$\frac{a_{1n}}{a_{12}}$	$\frac{1}{a_{12}}$	$\frac{0}{a_{12}}$	$\cdots$	$\frac{0}{a_{12}}$	$\frac{b_1}{a_{12}}$
	F_2	(2)	$0 - a_{22} \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$a_{21} - a_{22} \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}}$	$a_{22} - a_{22} \cdot \frac{a_{12}}{a_{12}}$	$\cdots$	$a_{2n} - a_{22} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{12}}$	$0 - a_{22} \cdot \frac{1}{a_{12}}$	$1 - a_{22} \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$\cdots$	$0 - a_{22} \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$b_2 - a_{22} \cdot \frac{b_1}{a_{12}}$
						$\vdots$						
	F_m	(3)	$0 - a_{m2} \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$a_{m1} - a_{m2} \cdot \frac{a_{11}}{a_{12}}$	$a_{m2} - a_{m2} \cdot \frac{a_{12}}{a_{12}}$	$\cdots$	$a_{mn} - a_{m2} \cdot \frac{a_{1n}}{a_{12}}$	$0 - a_{m2} \cdot \frac{1}{a_{12}}$	$0 - a_{m2} \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$\cdots$	$1 - a_{m2} \cdot \frac{0}{a_{12}}$	$b_m - a_{m2} \cdot \frac{b_1}{a_{12}}$

Tabela 4: Tabela Simplex (iteração 0 e 1)

IV) Nova iteração: Repita o procedimento até encontrar a solução básica ótima na iteração, isto é , achar uma função objetivo equivalente onde todos os coeficientes sejam não negativos.

Para o pleno entendimento das etapas, segue o exemplo, que pode ser seguido de maneira análoga para a resolução de outros problemas em PL desde que estejam na forma padrão:

Exemplo 14. *Maximizar a função* $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3$*, sujeita a :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 80 \\ x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Inicialmente é necessário transformar o sistema de inequações em um sistema de equações, adicionando as variáveis folga em cada uma das inequações do sistema, o que resulta em:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + F_1 = 20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + F_2 = 80 \\ x_3 + F_3 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, F_1, F_2, F_3 \geq 0 \end{cases}$$

Como dito na etapa I, uma solução básica inicial para esse sistema são podem ser os valores $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, F_1 = 20, F_2 = 80$ e $F_3 = 10$. A partir dessa solução e reescrevendo a função na forma $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 3x_2 + 7x_3$ é possível montar a tabela Simplex, que pode ser conferida abaixo.

Variável Básica (VB)	Equação	Coeficientes de $f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	Lado Direito b
$f(x_1, x_2, x_3)$	(0)	1	-5	-3	-7	0	0	0	0
F_1	(1)	0	1	1	1	1	0	0	20
F_2	(2)	0	3	1	1	0	1	0	80
F_3	(3)	0	0	0	1	0	0	1	10

Tabela 5: Tabela Simplex inicial do exemplo 14

Com a tabela Simplex devidamente estruturada, é preciso aplicar o teste de otimalidade, ou seja, verificar se essa solução inicial faz a função objetivo assumir seu valor ótimo. Para isso, basta verificar se na tabela, os coeficientes das variáveis não básicas da função objetivo são todos não negativos.

Por conta de existirem coeficientes negativos $-5, -3$ e -7 que estão associados as respectivas variáveis x_1, x_2, x_3 , essa solução básica inicial encontrada não é a solução ótima desse problema. Portanto, é necessário fazer uma iteração para encontrar uma nova solução.

Para fazer a busca por uma nova solução é preciso reescrever a tabela e determinar a linha pivô e a coluna pivô; esse processo é conhecido como pivoteamento. Pela tabela inicial é determinado que a variável x_3 é a variável básica que entra pois dentre as variáveis com coeficiente negativo da FO ela é a que possui o maior valor absoluto. A fim de encontrar a variável básica que sai foi aplicado o teste da razão e concluído que a variável F_3 é a que sai dado que essa tem o menor valor positivo como pode ser visto na tabela abaixo.

Iteração	Variável Básica (VB)	Equação	Coeficientes de $f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	Lado Direito b	Teste da Razão
0	$f(x_1, x_2, x_3)$	(0)	1	-5	-3	-7	0	0	0	0	
	F_1	(1)	0	1	1	1	1	0	0	20	20
	F_2	(2)	0	3	1	1	0	1	0	80	80
	F_3	(3)	0	0	0	1	0	0	1	10	10

Tabela 6: Tabela Simplex do exemplo 14 (iteração 0)

Mediante esses resultados é possível perceber que o número pivô é 1 e as novas variáveis básicas são F_1, F_2 e x_3 . Para encontrar a nova linha pivô basta dividir todos os coeficientes da linha pivô da iteração zero pelo número pivô da mesma. Feito isso, aplica-se operações elementares (conforme o passo 3 da etapa III) para gerar uma nova tabela e inspecionar se é a solução ótima.

Iteração	**Variável Básica (VB)**	**Equação**	**Coeficientes de** $f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	**Lado Direito b**
0	$f(x_1, x_2, x_3)$	(0)	1	-5	-3	-7	0	0	0	0
	F_1	(1)	0	1	1	1	1	0	0	20
	F_2	(2)	0	3	1	1	0	1	0	80
	F_3	(3)	0	0	0	1	0	0	1	10
1	**(VB)**	**Equação**	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	**b**
	$f(x_1, x_2, x_3)$	(0)	1	-5	-3	0	0	0	7	70
	F_1	(1)	0	1	1	1	1	1	-1	10
	F_2	(2)	0	3	1	0	0	1	-1	70
	x_3	(3)	0	0	0	1	1	0	1	10

Tabela 7: Tabela Simplex do exemplo 14 (iterações 0 e 1)

Percebe-se que após a iteração não se chegou a solução ótima. Realizando outra iteração de maneira análoga tem-se a tabela:

Iteração	Variável Básica (VB)	Equação	Coeficientes de $f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	Lado Direito b	Teste da Razão
0	$f(x_1, x_2, x_3)$	(0)	1	-5	-3	-7	0	0	0	0	
	F_1	(1)	0	1	1	1	1	0	0	20	20
	F_2	(2)	0	3	1	1	0	1	0	80	80
	F_3	(3)	0	0	0	1	0	0	1	10	10
1	**(VB)**	**Equação**	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	**b**	
	$f(x_1, x_2, x_3)$	(0)	1	-5	-3	0	0	0	7	70	
	F_1	(1)	0	1	1	1	1	1	-1	10	10
	F_2	(2)	0	3	1	0	0	1	-1	70	$\frac{70}{3}$
	x_3	(3)	0	0	0	1	1	0	1	10	
2	**(VB)**	**Equação**	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	**b**	
	$f(x_1, x_2, x_3)$	(0)	1	0	2	5	5	5	2	120	
	x_1	(1)	0	1	1	1	1	1	- 1	10	
	F_2	(2)	0	0	- 2	- 3	- 3	- 2	2	40	
	x_3	(3)	0	0	0	1	0	0	1	10	

Tabela 8: Tabela Simplex do exemplo 14 (iterações 0, 1 e 2)

Como nessa solução básica os coeficientes da função objetivo são todos não negativos, conclui-se que essa solução é a procurada. Cujo resultado é:

Variáveis Básica	**Variáveis não Básica**	**Valor da função**
$x_1 = 10$	$x_2 = 0$	
$F_2 = 40$	$F_1 = 0$	120
$x_3 = 10$	$F_3 = 0$	

Tabela 9: Solução Factível do exemplo 14

Logo, o valor máximo desse problema é 120 quando $x_1 = 10, x_2 = 0$ e $x_3 = 10$.

Existem alguns problemas em programação linear que não se encontram na forma padrão,por exemplo, quando se procura a minimização de uma solução. Uma maneira de resolver essa situação é convertê-la a um problema de maximização. Para isso basta calcular o oposto da função a minimizar, pois quanto menor for FO, maior será – FO. Portanto, a solução que dá o menor valor da função objetivo em toda região factível tem que dar também o maior valor do oposto da função objetivo nessa região. Valendo a equivalência:

$$\text{Minimizar: } f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n$$
$$\Leftrightarrow Maximizar : \text{- f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - ... - a_nx_n$$

2.2.1 Método Duas Fases

O Método Duas Fases é utilizado quando o problema de Programação Linear não aparece na forma padrão, ou melhor, quando possui restrições do tipo $\geq$ ou $=$. Na fase 1 são introduzidos variáveis auxiliares para gerar uma solução inicial viável, essa fase consiste em minimizar a soma das variáveis introduzidas visando obter o valor de zero, pois todas as variáveis artificiais acopladas ao problema original tendem a zero e, depois de resolver este primeiro problema e contanto que o resultado seja o esperado, a tabela resultante é reorganizada para utilizá-la na fase 2 do problema original. Caso contrário, o problema não é factível, ou seja, não tem solução e não será necessário continuar com a fase 2.

A inserção de variáveis quando o problema não está na forma padrão fornece uma solução básica inicial. É feita da seguinte maneira:

a) Restrição do tipo $\geq$: a variável de folga (excesso) é subtraída e soma a variável artificial.

b) Restrição do tipo $=$: recebe variável artificial.

Para entender como este método funciona, considere-se o problema:

$$\text{Maximizar: } f\left(x_1, x_2, x_3\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Sujeita as restrições:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Como o problema não está na forma padrão deve-se inicialmente introduzir as variáveis de folga e artificial para transformar as inequações da restrição em equações para depois preencher a tabela simplex.

Introduzindo as variáveis tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + F_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - F_2 + A_1 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + A_2 = b_3 \\ x_1, x_2, x_3, F_1, F_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

Após a adequação necessária, pode-se aplicar o Método Duas Fases, havendo possibilidade de ocorrer as seguintes situações:

***Fase 1*:** Resolva o problema abaixo, usando o método simplex, como o objetivo de zerar as variáveis artificiais. Comece com a solução básica factível F_1, A_1 e A_2.

$$\text{Maximizar: } f\left(x_1, x_2, x_3\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

Sujeita as restrições:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + F_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 - F_2 + A_1 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + A_2 = b_3 \\ x_1, x_2, x_3, F_1, F_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

Se o valor ótimo para $f\left(x_1, x_2, x_3\right) \neq 0$, o problema não tem solução factível. Caso contrário, passe para a fase 2.

***Fase 2*:** Caso tenha concluído que o problema original tem solução, elimine as colunas correspondentes às variáveis artificiais e modifique a linha da função objetivo pela linha do problema original para calcular novamente o valor ótimo. As iterações feitas para alcançar o valor ótimo é análoga as do Método Simplex.

3 Sequência Didática para o Ensino Médio

A Programação Linear pode ser apresentada no Ensino Médio através do método gráfico. Visto que os conceitos geométricos utilizados possuem uma relação com o currículo de matemática do ensino médio e desta forma, será apresentado nesta seção uma sequência didática do estudo de PL, para esta modalidade de ensino.

De acordo com Oliveira, em [8], sequência didática é um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino aprendizagem.

Alguns livros didáticos abordam o tema de PL de maneira discreta e recorrente como por exemplo o livro do Dante [3] que introduz esse assunto aplicando os conceitos de sistemas lineares e inequações em problemas de economia, transporte, dietas, entre outros.

Esta proposta didática é apoiada em três etapas que possui a finalidade de capacitar os alunos para que ao final da aplicação de proposta, sejam capazes de resolver um problema de Programação Linear de duas variáveis. Como mostra no quadro abaixo com a síntese das etapas:

SEQUÊNCIA DIDÁTICA		
Objetivo Geral: Resolver problemas em Programação Linear com duas variáveis pelo método geométrico		
Etapas	**Objetivos Específico**	**Tempo previsto**
1. Construção da região factível	• Traçar no plano cartesiano as regiões correspondentes a cada restrição do sistema; • Determinar no plano cartesiano o conjunto solução do sistema (região factível).	1 hora e 30 minutos

2. Verificação do valor da função nos vértices	• Determinar os pontos que delimitam o conjunto solução (ponto extremos da região factível); • Calcular o valor da função objetivo para cada um dos vértices do conjunto solução.	20 minutos
3. Análise de otimalidade	• Determinar o ponto que corresponde a otimização.	10 minutos
Tempo total previsto		2 horas

Tabela 10: Síntese da proposta de sequência didática para o Ensino Médio

A aplicação dessa proposta consiste em uma encadeação de problemas, no qual o aluno vai construindo a solução de forma detalhada e coerente e ao final dessa resolução o aluno deverá em seguida, otimizar a função $f(x, y) = 20x + 30y$, que encontra-se sujeito as restrições:

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \geq 15 \\ y \geq 25 \\ x \leq 60 \\ y \leq 50 \end{cases} \tag{3}$$

Problema 1: Represente geometricamente a região definida pela inequação $x+y \leq 100$

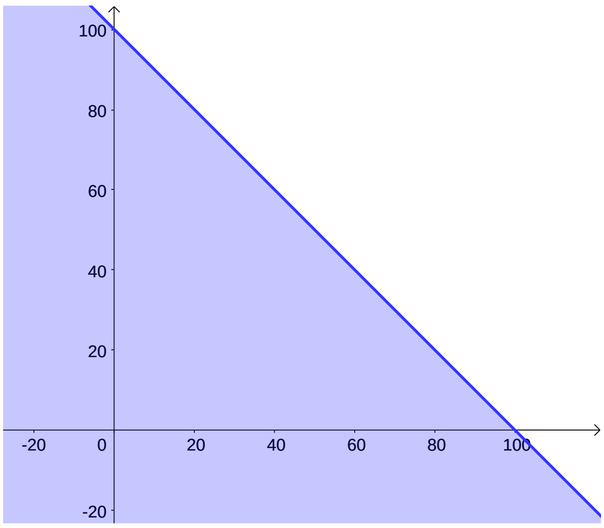


Figura 10: Gráfico da inequação $x + y \leq 100$

Problema 2: Represente geometricamente a região definida pela inequação $x \geq 15$

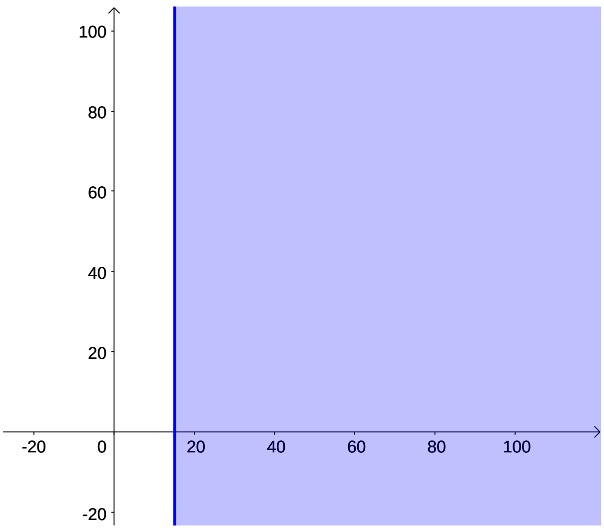


Figura 11: Gráfico da inequação $x \geq 15$

Problema 3: Represente geometricamente a região definida pela inequação $y \geq 25$

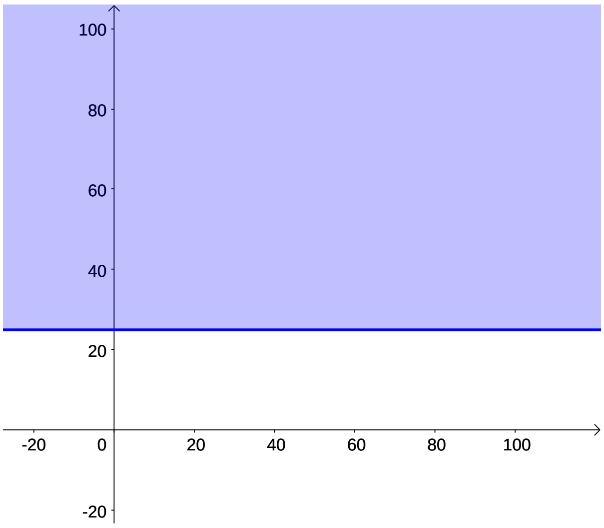


Figura 12: Gráfico da inequação $y \geq 25$

Problema 4: Represente geometricamente a região definida pela inequação $x \leq 60$

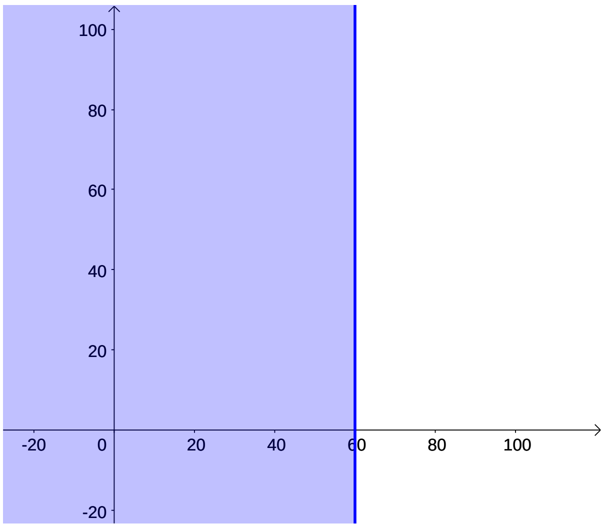


Figura 13: Gráfico da inequação $x \leq 60$

Problema 5: Represente geometricamente a região definida pela inequação $y \leq 50$

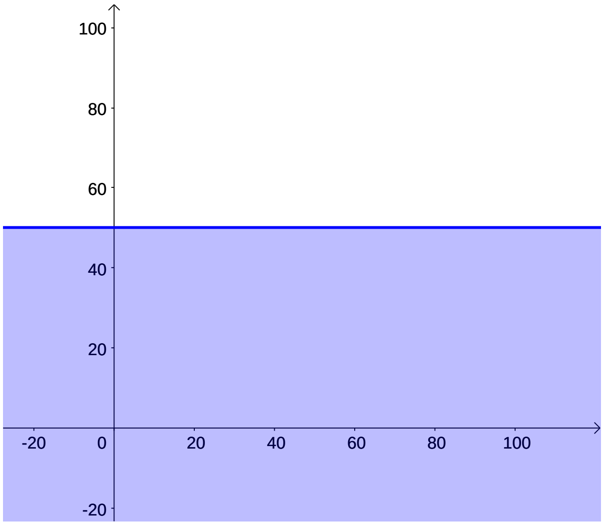


Figura 14: Gráfico da inequação $y \leq 50$

Problema 6: Representar geometricamente a região definida pela intersecção das regiões dos problemas anteriores, ou seja, represente o Conjunto Solução do sistema (3) de desigualdade linear.

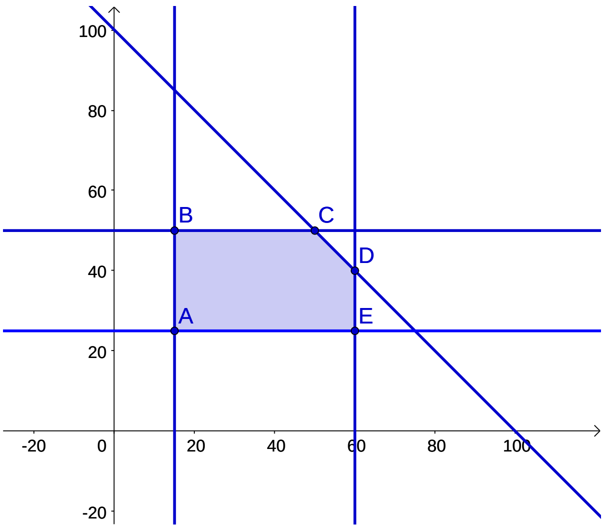


Figura 15: Gráfico do Conjunto Solução (Região Factível)

Problema 7: Calcule o valor da função $f(x, y) = 20x + 30y$ em cada um dos vértices do conjunto solução

Vértice	**Valor da Função:** $f(x, y) = 20x + 30y$
$A = (15, 25)$	$f(15, 25) = 20 \cdot 15 + 30 \cdot 25 = 1050$
$B = (15, 50)$	$f(15, 50) = 20 \cdot 15 + 30 \cdot 50 = 1800$
$C = (50, 50)$	$f(50, 50) = 20 \cdot 50 + 30 \cdot 50 = 2500$
$D = (60, 40)$	$f(60, 40) = 20 \cdot 60 + 30 \cdot 40 = 2400$
$E = (60, 25)$	$f(60, 25) = 20 \cdot 60 + 30 \cdot 25 = 1950$

Tabela 11: Valor da função $f(x, y) = 20x + 30y$ nos vértices da Região Factível

Assim sendo, o valor máximo é 2500 para $x = 50$ e $y = 50$ e no ponto $(15, 25)$ tem-se o menor valor que corresponde a 1050.

Um contexto para essa resolução retirado do livro do Dante [3] é: Um comerciante vende dois tipos de artigo, A e B. Na venda do artigo A tem um lucro de 20 por unidade, e na venda do artigo B tem um lucro de 30 por unidade. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos do tipo A e 50 artigos do tipo B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que venda todos, obtenha o lucro máximo?

Diante disso, na certeza de que os alunos compreenderam as etapas da resolução, o professor poderá expor alguns conceitos teóricos, tais como: a forma padrão de modelagem desses problemas de Programação Linear, definições e os teoremas apresentados no Capítulo 2. Considerando que os estudos dos conceitos teóricos, são necessários para entender a ferramenta utilizada, na resolução dos problemas.

4 Estudo de Caso

Com o intuito de aplicar os conceitos trabalhados no decorrer desse trabalho, adotamos como estratégia de pesquisa o Estudo de Caso, método que permite a análise através da observação de determinado assunto como: uma organização social ou um grupo de pessoas. Para Yin, em [11], o estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro do contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos.

A pesquisa ocorreu em uma academia de ginástica, cujo objetivo principal é a maximização da receita que, de acordo com a entrevista in loco, na qual a proprietária obteve informações sobre os tipos de planos de aquisição, identificando as restrições presentes na organização da qual, é necessária a formulação do modelo em programação linear.

Os componentes escolhidos para análise foram definidos a partir de critérios quantitativos, sendo os tipos de planos para aquisição, dos quais são: mensal, trimestral, semestral, anual ou grupo mensal (com duas, três ou quatro pessoas).

Durante o funcionamento da academia foram realizadas as seguintes observações: o número total de alunos possível, a quantidade de mão-de-obra necessária, a quantidade de cada recurso utilizado por aluno e o período de aquisição de cada plano.

Como o objetivo é apresentar uma ótima distribuição dos recursos e ao mesmo tempo maximizar a receita da academia, utilizamos as informações colhidas no processo de funcionamento e encontramos uma solução.

A academia oferece alguns tipos de planos para pagamento, que são:

PLANO INDIVIDUAL	
mensal	R$ 75,00
trimestral	3 x R$ 65,00
semestral	6 x R$ 60,00
anual	12 x R$ 55,00
PLANO MENSAL PARA GRUPO	
2 pessoas	R$ 60,00 por pessoa
3 pessoas	R$ 55,00 por pessoa
4 pessoas	R$ 50,00 por pessoa

Tabela 12: Custo e oferta dos planos

A determinação das restrições foi realizada com base nos números totais possíveis de alunos e despesas em que é levado em consideração a sazonalidade do fluxo de alunos.

De acordo com a proprietária e através da sua experiência na qual relata que a academia comporta 30 alunos no período de uma hora e funciona 17 horas por dia, concluímos que a capacidade total é 510 alunos/dia.

Além disso, para o funcionamento do estabelecimento, algumas despesas são necessárias como: água, luz, produtos de reposição e limpeza da academia, aluguel, funcionários, contador, Guia da Previdência Social (GPS) e internet. Usando como base as contas e gastos do último ano, verificamos que o valor da energia altera conforme a quantidade de alunos e as demais despesas são fixas. Após uma análise do consumo médio mensal do ano anterior e com o número de alunos concluímos que o consumo médio mensal de luz é de R$ 0,41 por aluno. As despesas fixas mensais são de: R$ 48,90 (água), R$ 4.380,00 (funcionários), R$ 300,00 (produtos de reposição e limpeza da academia), R$ 1.600,00 (aluguel), R$ 315,00 (contador), R$ 220,00 (GPS) e R$ 69,90 (internet).

Por outro lado, considerando a sazonalidade verificamos o fluxo de alunos em cada período dos anos anteriores e em seguida organizamos em uma tabela com a taxa dos que permanecem em cada plano durante cada período de um ano. Conforme mostra a tabela abaixo.

Taxa de permanência anual por plano	
Mensal	66%
Trimestral	52%
Semestral	67%
Anual	100%
Grupo de 2 pessoas	50%
Grupo de 3 pessoas	63%
Grupo de 4 pessoas	60%

Tabela 13: Taxa de permanência anual por plano

Os dados fornecidos pela empresa foram utilizados para uma formulação do problema. O objetivo é definir uma equação matemática da qual, através da Programação Linear possamos encontrar a melhor alocação de alunos por plano e maximizar a receita da empresa.

4.1 Estruturação do Caso

Para a formulação do Caso, consideramos as variáveis de estudos que representam cada modalidade de plano oferecida pela academia, tais:

x_1 = quantidade de alunos que adquirem o plano mensal
x_2 = quantidade de alunos que adquirem o plano trimestral
x_3 = quantidade de alunos que adquirem o plano semestral
x_4 = quantidade de alunos que adquirem o plano anual
x_5 = quantidade de grupos com 2 alunos que adquirem o plano mensal
x_6 = quantidade de grupos com 3 alunos que adquirem o plano mensal
x_7 = quantidade de grupos com 4 alunos que adquirem o plano mensal

4.2 Função objetivo

A função objetivo do problema é maximizar a receita da Academia de Musculação através da investigação das variáveis citadas anteriormente. Em outras palavras: o alvo é descobrir qual a melhor distribuição de alunos por plano que maximize a receita da empresa.

A tabela que se segue apresenta a receita mensal por plano da Academia de Musculação.

Receita mensal por plano	
Plano mensal	R$ 75,00
Plano trimestral	R$ 65,00
Plano semestral	R$ 60,00
Plano anual	R$ 55,00
Grupo de 2 pessoas	R$ 120,00
Grupo de 3 pessoas	R$ 165,00
Grupo de 4 pessoas	R$ 200,00

Tabela 14: Receita mensal por plano

A soma dessas receitas, multiplicadas pela quantidade de alunos/grupos que adquirirem cada plano irá resultar na receita total da academia no período. Para isso segue a função objetivo que maximiza essa receita.

Maximizar: $f\,(x_1, x_2, ..., x_6, x_7) = 75x_1 + 65x_2 + 60x_3 + 55x_4 + 120x_5 + 165x_6 + 200x_7$

4.3 Restrições da função

i) A primeira restrição está relacionada com a quantidade máxima de alunos que a empresa recebe durante o dia. Para isso foi elaborada a seguinte restrição:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 \leq 510$$

Observe que o plano representado pela variável x_5 é composto por um grupo de 2 pessoas totalizando $2.x_5$ alunos que adquirem esse plano por mês. O raciocínio é análogo para as variáveis x_6 e x_7.

ii) A segunda restrição diz respeito as despesas e ao faturamento anual. Numa empresa, devemos ter um faturamento despesa maior do que ou igual a despesa. Caso contrário, teremos prejuízo, que não é o nosso objetivo.

Levando em consideração a sazonalidade anual e a arrecadação anual por tipo de plano, podemos representar o faturamento anual pela expressão:

$(0,66) \cdot (75 \cdot 12)x_1 + (0,52) \cdot (65 \cdot 12)x_2 + (0,67) \cdot (60 \cdot 12)x_3 + (1) \cdot (55 \cdot 12)x_4 + (0,5) \cdot (120 \cdot 12)x_5 + (0,63) \cdot (165 \cdot 12)x_6 + (0,6) \cdot (200 \cdot 12)x_7$
$= 594x_1 + 405,60x_2 + 482,40x_3 + 660,00x_4 + 720,00x_5 + 1.247,40x_6 + 1.440,00x_7$

Visto que as despesas fixas mensal são de R\$ 48,90, R\$ 4380,00, R\$ 300,00, R\$ 1600,00, R\$ 315,00, R\$ 220,00 e R\$ 69,90 e, a despesa variável mensal é de R\$ 0,41 por aluno, a despesa anual é representada pela respectiva expressão:

$48,90 \cdot 12 + 4380 \cdot 12 + 300 \cdot 12 + 1600 \cdot 12 + 315 \cdot 12 + 220 \cdot 12 + 69,90 \cdot 12 + (0,41 \cdot 12) \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7)$
$= 83.205,60 + 4,92x_1 + 4,92x_2 + 4,92x_3 + 4,92x_4 + 9,84x_5 + 14,76x_6 + 19,68x_7$

Assim como na segunda restrição, consideramos o faturamento anual maior do que ou igual a despesa anual, cuja expressão segue abaixo:

$594x_1 + 405,60x_2 + 482,40x_3 + 660,00x_4 + 720,00x_5 + 1.247,40x_6 + 1.440,00x_7 \geq 83.205,6 + 4,92x_1 + 4,92x_2 + 4,92x_3 + 4,92x_4 + 9,84x_5 + 14,76x_6 + 19,68x_7$

o que implica em

$589,08x_1 + 400,68x_2 + 477,48x_3 + 655,08x_4 + 710,16x_5 5 + 1.232,64x_6 + 1.420,32x_7 \geq 83.205,60$

4.4 Representação matemática do problema

Deste modo, o problema resulta na seguinte representação matemática:

Maximizar: $f(x_1, x_2, ..., x_6, x_7) = 75x_1 + 65x_2 + 60x_3 + 55x_4 + 120x_5 + 165x_6 + 200x_7$

sujeito as restrições:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 \leq 510 \\ 589,08x_1 + 400,68x_2 + 477,48x_3 + 655,08x_4 + 710,16x_5 + 1.232,64x_6 + 1.420,32x_7 \geq 83.205,60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

4.5 Resolução do problema

Esse problema pode ser resolvido manualmente usando o passo a passo do Método Simplex Duas Fases descrito no Capítulo 2 (pág. 50) ou usando a ferramenta Solver do EXCEL, conforme será esplanado nesta seção.

Segue abaixo a colocação de dados do problema no programa segundo a função objetivo e suas restrições.

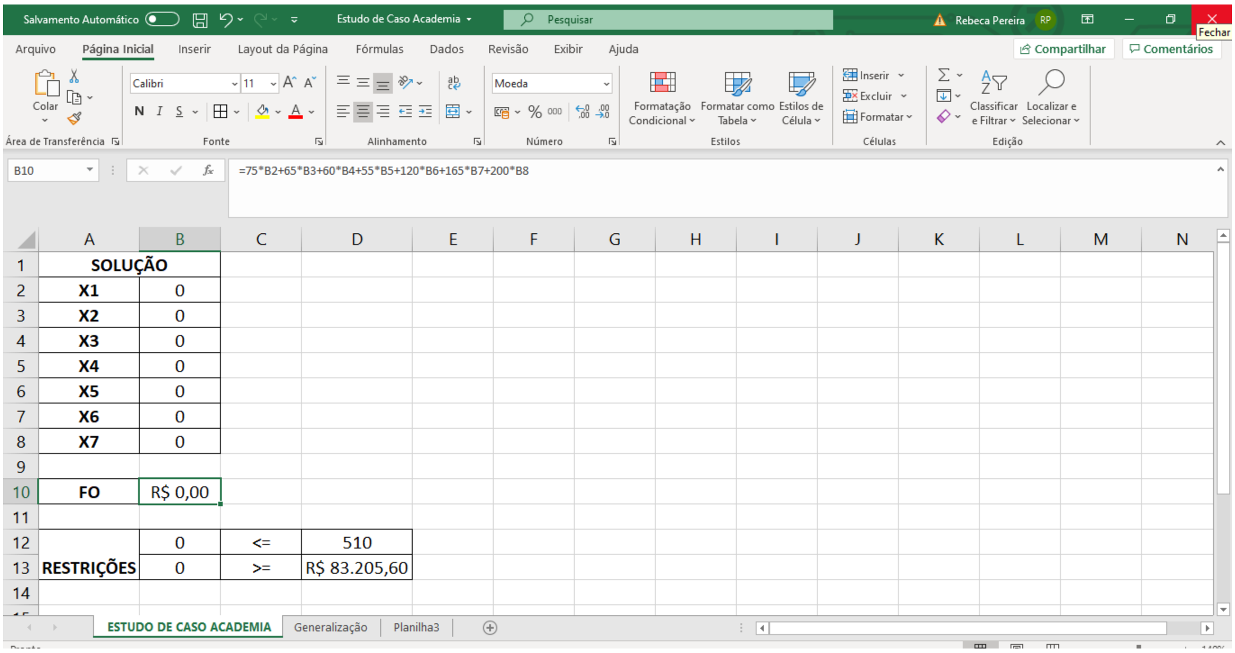


Figura 16: Dados do problema no Microsoft Office Excel

Observando a imagem acima, têm-se nas células A2, A3, A4, A5, A6,A7 e A8 as variáveis que representam cada tipo de plano simbolizados pelos respectivos coeficientes $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ e x_7 e ao lado seus respectivos coeficientes, que serão configurados com valor zero inicialmente.

A célula B10 diz respeito a função objetivo que possui a fórmula: $= 75 * B2 + 65 * B3 + 60 * B4 + 55 * B5 + 120 * B6 + 165 * B7 + 200 * B8$. Encontra-se abaixo, nas linhas 12 e 13 a primeira e a segunda restrição. Cuja fórmula: $= B2 + B3 + B4 + B5 + 2 * B6 + 3 * B7 + 4 * B8$ está na célula B12, em C12 tem o símbolo de menor ou igual e em D12 o valor 510, todos os resultados relacionados a primeira restrição. Já na célula B13 tem a fórmula: $= 588,05 * B2 + 399,65 * B3 + 476,45 * B4 + 654,05 * B5 + 708,1 * B6 + 1.229,54 * B7 + 1.416,19 * B8$, em C13 o símbolo de maior ou igual e no campo D13 o valor R$ 83.205,60 referentes a segunda restrição.

Para usar a ferramenta Solver com o objetivo de encontrar o resultado, vá na aba Ferramentas, Suplementos e marque a opção Solver. Depois abra a Ferramenta Solver que está localizada na aba Dados, onde abrirá a seguinte caixa de diálogo:

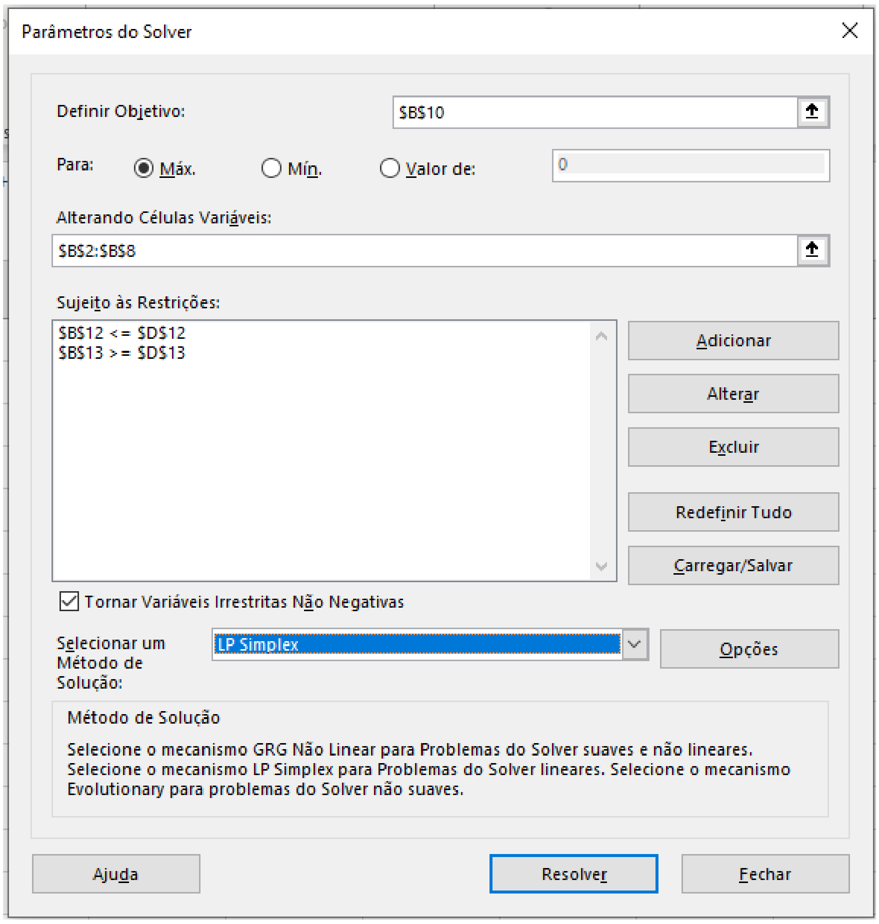


Figura 17: Caixa de diálogo do Solver

No campo 'Definir Objetivo', clique na célula B10 que contém a função objetivo. No marcador 'Para', marque a opção de Máx, que indica um problema de maximização como é o caso. No campo 'Alterando células variáveis', selecione as células de B2 à B8, que são as variáveis da solução. Em seguida, clique no botão adicionar, para incluir as restrições, onde abrirá a seguinte janela:

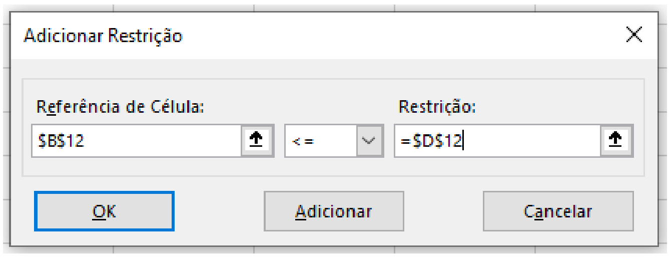


Figura 18: Adição de restrições do problema

No campo ‘Referência de Célula’ selecione a célula B12, depois selecione o símbolo menor ou igual e no campo ‘restrição” clique na célula D12. Aperte adicionar e insira a outra restrição. Não é preciso inserir as variáveis individualmente com valores maiores ou iguais a zero, pois esta é uma condição para o problema em Programação Linear visto no Capítulo 3. Feche essa janela, no campo ‘Selecionar um método se solução’, marque LP Simplex depois clique em resolver. Aparecerá uma nova janela com os resultados do Solver, dê um ‘ok’.

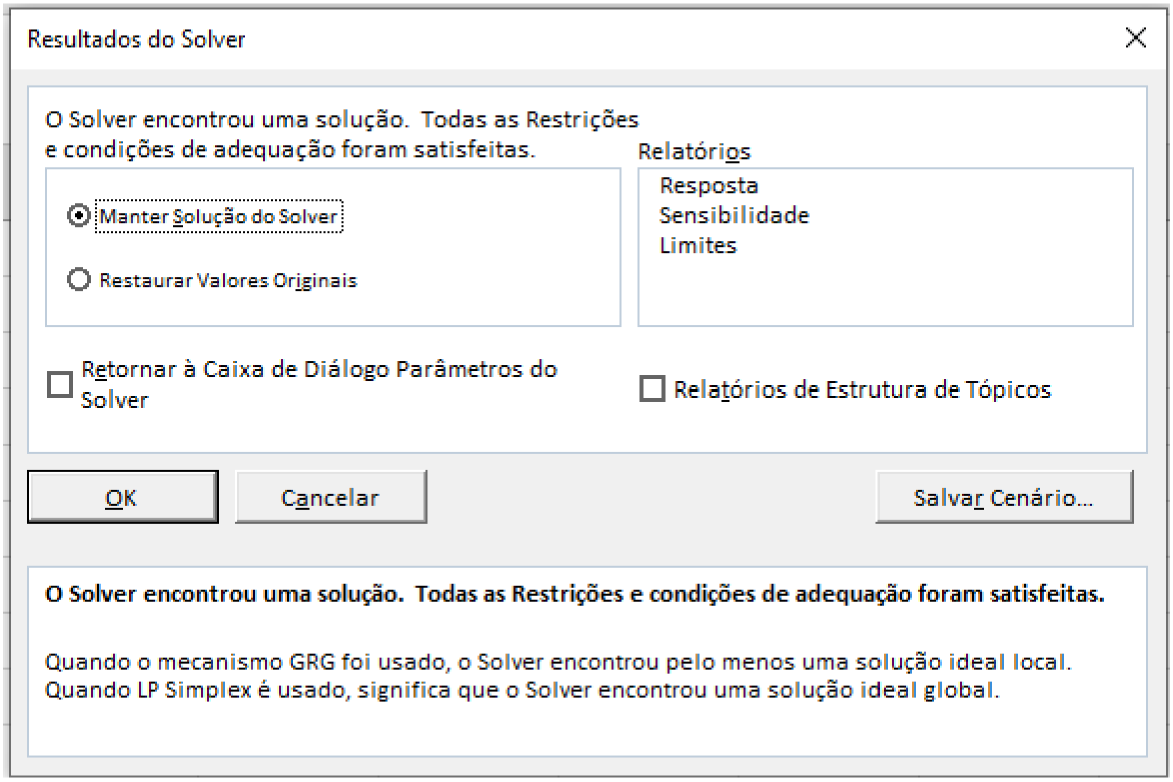


Figura 19: Janela de Resultados do Solver

Desta forma, utilizando este recurso, obteremos os seguintes resultados:

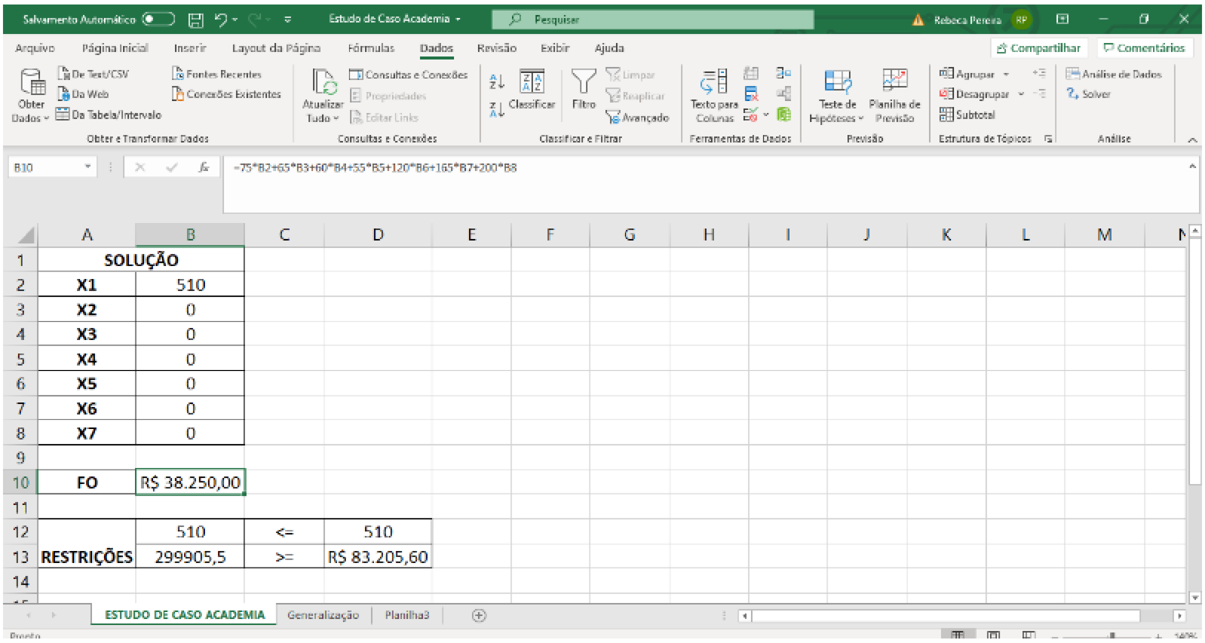


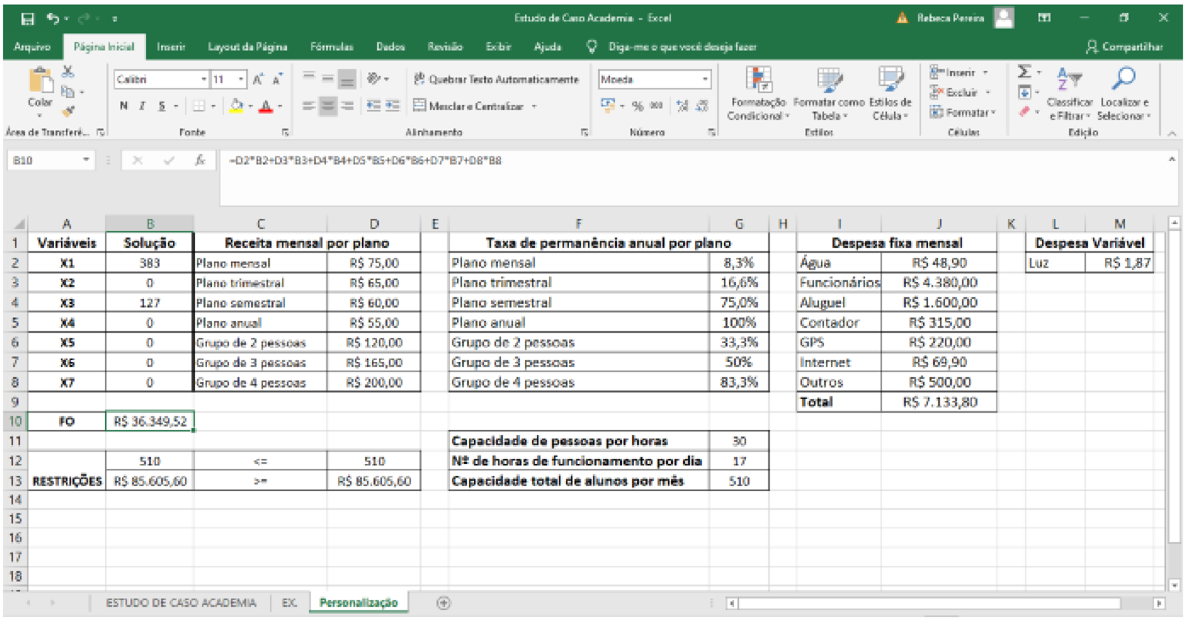
Figura 20: Janela do Excel com a solução do problema

Por isso, neste caso, a otimização da receita máxima é de R$ 38.250,00 quando 510 alunos estiverem matriculados no plano individual.

4.6 Personalização do estudo de caso

Apesar do caso individual não permitir a generalização, segundo Yin, em [11]. É possível a personalização para o uso em situações similares. Para tanto, foi criado uma matriz no programa Excel com a utilização de fórmulas e tabelas para que o problema matemático seja automático com as mudanças de dados nas células. A otimização do resultado é encontrada usando o mesmo processo do subcapítulo 4.5.

Segue abaixo a colocação de dados com problemas da empresa



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Variáveis	Solução	Receita mensal por plano			Taxa de permanência anual por plano			Despesa fixa mensal			Despesa Variável	
2	X1	383	Plano mensal	R$ 75,00		Plano mensal	8,3%		Água	R$ 48,90		Luz	R$ 1,87
3	X2	0	Plano trimestral	R$ 65,00		Plano trimestral	16,6%		Funcionários	R$ 4.380,00			
4	X3	127	Plano semestral	R$ 60,00		Plano semestral	75,0%		Aluguel	R$ 1.600,00			
5	X4	0	Plano anual	R$ 55,00		Plano anual	100%		Contador	R$ 315,00			
6	X5	0	Grupo de 2 pessoas	R$ 120,00		Grupo de 2 pessoas	33,3%		GPS	R$ 220,00			
7	X6	0	Grupo de 3 pessoas	R$ 165,00		Grupo de 3 pessoas	50%		Internet	R$ 69,90			
8	X7	0	Grupo de 4 pessoas	R$ 200,00		Grupo de 4 pessoas	83,3%		Outros	R$ 500,00			
9									Total	R$ 7.133,80			
10	FO	R$ 36.349,52											
11						Capacidade de pessoas por horas	30						
12		510	<=	510		Nº de horas de funcionamento por dia	17						
13	RESTRIÇÕES	R$ 85.605,60	>=	R$ 85.605,60		Capacidade total de alunos por mês	510						

Figura 21: Dados da empresa no Microsoft Office Excel

De acordo com a imagem acima, observamos que a matriz foi construída da seguinte forma:

- Nas colunas C e D com as linhas 1 à 8, dispõe a tabela com os valores referentes a cada tipo de plano.
- Nas colunas F e G com as linhas 1 à 8, dispõe a tabela com a porcentagem de permanência anual em cada plano.
- Nas colunas I e J com linhas 1 à 9, contém a tabela das despesas fixas mensalmente.
- Nas colunas L e M com linhas 1 e 2, contém a tabela das despesas variáveis mensalmente.
- Nas colunas F, G, H e I com linhas 11 à 13, inclui a quantidade de alunos.

Estas são as informações necessárias para montar o problema em Programa Linear, que será alterada conforme os dados de cada empresa.

A matriz do problema juntamente com suas fórmulas se encontram nas colunas A e B e nas células C11, C12, D11 e D12, nas quais estão elaborada, da seguinte forma:

a) A célula B10, dispõe a fórmula geral da função objetivo, representada por: $= D2 * B2 + D3 * B3 + D4 * B4 + D5 * B5 + D6 * B6 + D7 * B7 + D8 * B8$

b) A célula B12, dispõe da fórmula do total possível de alunos, representada por: $= B2 + B3 + B4 + B5 + 2 * B6 + 3 * B7 + 4 * B8$

c) A célula D12, contém da capacidade total de alunos, representada por: $= G13$

d) A célula B13, dispõe de fórmula com a diferença de faturamento e da despesa variável anual, que está representada por:
$= (G2 * D2 * 12 - M2 * 12) * B2 + (G3 * D3 * 12 - M2 * 12) * B3 + (G4 * D4 * 12 - M2 * 12) * B4 + (G5 * D5 * 12 - M2 * 12) * B5 + (G6 * D6 * 12 - 2 * M2 * 12) * B6 + (G7 * D7 * 12 - 3 * M2 * 12) * B7 + (G8 * D8 * 12 - 4 * M2 * 12) * B8$

e) A célula D13, contém o valor total da despesa fixa anual, representada por: $= J9 * 12$.

Foram realizadas algumas alterações em relação aos dados da pesquisa na matriz personalizada na qual é percebível mudança do resultado, conforme pode ser visto na tabela a seguir; que possui solução máxima de R$ 36.349,52 quando $x_1 = 383$ e $x_2 = 127$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Variáveis**	**Solução**	**Receita mensal por plano**			**Taxa de permanência anual por plano**			**Despesa fixa mensal**			**Despesa Variável**	
2	**X1**	383	Plano mensal	R$ 75,00		Plano mensal	8,3%		Água	R$ 48,90		Luz	R$ 1,87
3	**X2**	0	Plano trimestral	R$ 65,00		Plano trimestral	16,6%		Funcionários	R$ 4.380,00			
4	**X3**	127	Plano semestral	R$ 60,00		Plano semestral	75,0%		Aluguel	R$ 1.600,00			
5	**X4**	0	Plano anual	R$ 55,00		Plano anual	100%		Contador	R$ 315,00			
6	**X5**	0	Grupo de 2 pessoas	R$ 120,00		Grupo de 2 pessoas	33,3%		GPS	R$ 220,00			
7	**X6**	0	Grupo de 3 pessoas	R$ 165,00		Grupo de 3 pessoas	50%		Internet	R$ 69,90			
8	**X7**	0	Grupo de 4 pessoas	R$ 200,00		Grupo de 4 pessoas	83,3%		Outros	R$ 500,00			
9									**Total**	R$ 7.133,80			
10	**FO**	R$ 36.349,52											
11						**Capacidade de pessoas por horas**	30						
12		510	<=	510		**Nº de horas de funcionamento por dia**	17						
13	**RESTRIÇÕES**	R$ 85.605,60	>=	R$ 85.605,60		**Capacidade total de alunos por mês**	510						
14													
15													

Figura 22: Matriz com dados e resultados

5 Considerações Finais

Através da Programação Linear, verificamos a proposta referente as formas particulares de abordagem para problemas de negócios e como aproveitar os atuais avanços dos cientistas da computação, oferecendo grande ajuda para avaliar futuras estratégias de desenvolvimento e melhoria de uma empresa.

Para essa melhoria, apresentamos um estudo de casos com a aplicação da Programação Linear usando mais de duas variáveis, no qual realizamos uma pesquisa com os dados referentes a receita, a despesa e o número de alunos de uma academia de ginástica, em que levamos em consideração a sua sazonalidade. Demonstramos com o resultado obtido uma melhor distribuição de alunos por plano para se obter a receita máxima, no qual proporcionou que identificássemos os custos de cada recurso.

Durante o processo criamos uma matriz personalizada no Excel, em que podemos aplicar em qualquer situação similar ao estudo de caso, ações que possibilite encontrar a otimização. Nessa matriz é possível percebermos a mudança de resultado devido à alteração de alguns dados.

Do ponto de vista prático, concluímos que algumas virtudes dos programas lineares se comparados com os não-lineares envolvem a facilidade em trabalhar eficientemente com mais variáveis de decisão e por estarem melhor adaptados ao tratamento algorítmico de computadores, aproveitando a velocidade de cálculo.

Sobre a sequência didática para o Ensino Médio, ressaltamos que foi criado um passo a passo no qual o aluno constrói a resolução do problema envolvendo duas variáveis. Observamos que a importância do planejamento por meio de sequências didáticas implica em um desafio e um compromisso que sustenta uma responsabilidade significativa e pela complexidade das resoluções apropriadas para organizarmos as situações de ensino e que possa favorecer os processos de aprendizagem.

De acordo com a elaboração de uma sequência didática que é uma tarefa importante para organizarmos situações de aprendizagem que serão desenvolvidas no trabalho dos alunos. Enfatizamos que o debate didático contemporâneo tem por objetivo através do professor propor aos alunos, atividades sequenciadas que permitem o estabelecimento de um clima de aprendizado, que traz o sentido da expressão atualmente em moda, no debate didático que é focado no aprendizado.

Analisamos que o contexto social atual e as mudanças que estão chegando e que colocamos o desafio de passar da ênfase do planejamento do ensino para uma nova função de ensino, no qual implicamos com a geração de situações significativas, para que os alunos aprendam o que eles necessitam para sua autorrealização e participação na sociedade. Dessa forma, a educação permanece intencional, porque tentamos planejar processos de acordo com as metas e orientações quanto ao desenvolvimento das habilidades que são exigidas pelos cidadãos de hoje.

Isso implica que, como professores, devemos estudar os grandes problemas do contexto, ter clareza sobre as competências que pretendemos contribuir para a formação, apropriar-se profundamente dos conteúdos disciplinares e depois saber mediar com os alunos para que aprendam e reforcem as competências, partindo de seus conhecimentos prévios e aplicando estratégias didáticas pertinentes, de acordo com as competências, conteúdos e problemas. O aluno aprende com o que faz, com o significado da atividade realizada, com a possibilidade de integrar novas informações em concepções anteriores que possui, pela capacidade que obtém verbalizando a reconstrução de informações para outras pessoas. Não basta ouvir o professor ou fazer uma leitura para gerar esse processo complexo e individual.

Tendo em conta o exposto, as sequências constituem uma organização das atividades de aprendizagem que serão realizadas com os alunos e para os alunos, a fim de criarmos situações que lhes permitam desenvolver uma aprendizagem significativa. Portanto, é importante enfatizarmos que não se pode reduzir a um formulário para preencher os espaços em branco, este é um instrumento que exige o conhecimento do assunto, a compreensão do programa de estudos e a experiência e visão pedagógica do professor, bem como suas possibilidades de desenvolver atividades para a aprendizagem dos alunos.

Referências

[1] ANTON, H.; RORRES, C, *Álgebra linear com aplicações.; Porto Alegre: Bookman, 10º Edição (2012).*

[2] BOLDRINI J. L.; ET AL., Álgebra Linear; São Paulo: Harper Row do Brasil 3º Edição (1980).

[3] DANTE, L. R., *Matemática, volume único, São Paulo: Ática, 1º Edição (2009)*

[4] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C.S., Introdução à álgebra linear. SBM, (Coleção PROFMAT) 2º Edição (2016).

[5] HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J., *Introdução à Pesquisa Operacional. Tradução: Ariovaldo Griesi; Revisão Técnica: João Chang Júnior. São Paulo: McGraw-Hill,(2006).*

[6] LIMA, E. L., Análise Real, Volume 2, Rio de Janeiro IMPA (1976).

[7] LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M., *Álgebra Linear. Porto Alegre: Bookman, 4º Edição (2011).*

[8] OLIVEIRA, M. M., Sequência didática interativa no processo de formação de professores. Petrópolis, RJ: Vozes (2013).

[9] POOLE, D., *Álgebra linear.; São Paulo: Pioneira Thomson Learning, (2004).*

[10] SILVA, C. A. F., Abordagem Geométrica de problemas de Programação linear no espaço 3D. Dissertação (PROFMAT) - Universidade Federal do Amapá (2019).

[11] YIN, R. K., *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos., Porto Alegre: Bookman, 2º Edição (2001).*