



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Números naturais e fracionários: aspectos históricos, operações e bases numéricas

Luiz Carlos de Souza

Goiânia
2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESSES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Luiz Carlos de Souza

3. Título do trabalho

Números naturais e fracionários: aspectos históricos, operações e bases numéricas

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Geci José Pereira Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 01/09/2020, às 15:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

Documento assinado eletronicamente por **LUIZ CARLOS DE SOUZA, Discente**, em 01/09/2020, às 17:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

02/09/2020

SEI/UFG - 1524669 - Termo de Ciência e de Autorização (TECA)



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1524669** e o código CRC **955EE4FD**.

Referência: Processo nº 23070.032072/2020-40

SEI nº 1524669

Criado por [sosteneg](#), versão 2 por [sosteneg](#) em 01/09/2020 11:09:38.

Luiz Carlos de Souza

Números naturais e fracionários: aspectos históricos, operações e bases numéricas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geci José Pereira da Silva.

Goiânia

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

De Souza, Luiz Carlos

Números naturais e fracionários: aspectos históricos, operações e bases numéricas [manuscrito] / Luiz Carlos De Souza. - 2020.

XCIII, 93 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Geci José Pereira da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. História da matemática.. 2. Números naturais e fracionários.. 3. Sistemas de numeração,. 4. Bases de numeração.. I. Pereira da Silva, Geci José, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 12 da sessão de Defesa de Dissertação de **Luiz Carlos de Souza**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Aos trinta dias do mês de julho de dois mil e vinte, a partir das 14 horas, por meio de videoconferência devido a pandemia de Covid-19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Números naturais e fracionários: aspectos históricos, operações e bases numéricas**”. Os trabalhos foram instalados pelo orientador, Professor doutor Geci José Pereira da Silva (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor doutor Alacyr José Gomes (IME/UFG) e membro titular externo o professor doutor Thiago Porto de Almeida Freitas (UFCat). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo professor doutor Geci José Pereira da Silva, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos trinta dias do mês de julho de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Geci José Pereira Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 03/08/2020, às 23:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 04/08/2020, às 14:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thiago Porto De Almeida Freitas, Professor do Magistério Superior**, em 05/08/2020, às 09:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1445488** e o código CRC **193EA146**.

Referência: Processo nº 23070.032072/2020-40

SEI nº 1445488

Criado por [sosteneg](#), versão 6 por [sosteneg](#) em 30/07/2020 20:26:46.

Todos os direitos reservados. É proibido a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Dedico este trabalho a minha esposa Marisa, que está a meu lado em todos os momentos de lutas de forma incondicional, sempre orando e encorajando pela conclusão do curso e aos meus pais Euvaldo e Anália por seu imutável amor.

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa Marisa pelas orações e o apoio imensurável, a minha mãe Anália, a minha irmã Luciane que sempre me incentivou a cursar um mestrado e aos meus familiares.

Aos amigos Ferdinand, Felipe, Leila e Rebeca que conheci e caminharam comigo durante o curso e a todos os demais colegas.

Ao meu orientador Dr. Geci José Pereira da Silva com todo conhecimento e sabedoria me conduziu na elaboração da dissertação.

Ao Dr. Alacyr José Gomes que me ajudou no programa Latex e na correção com bastante critério, ao Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas que foi extremamente minucioso na leitura da dissertação e aos demais professores do mestrado.

Sobretudo, a Deus Pai, ao seu Filho Jesus Cristo meu Salvador e ao Espírito Santo que me guia e fortalece em todos os momentos.

Resumo

Um dos objetivos do Profmat é oportunizar formação matemática sólida para o desenvolvimento da docência na Educação Básica. Assim, nesta dissertação apresentamos um resgate histórico sobre contagem, sistema de numeração, classificação simples de sistema de numeração e sistemas de numeração de alguns povos antigos, tipos diferentes de algoritmo para as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), contexto histórico sobre frações, histórico dos algoritmos de adição para sistemas posicionais, ressaltando o aperfeiçoamento dos números e cálculos ao longo dos anos. Com o objetivo de chamar a atenção dos professores sobre as dificuldades dos alunos em entender as operações na base decimal, aplicamos as operações nas bases 5 e 6 e apresentamos discussões sobre paridade, números primos, MMC e frações em outras bases de numeração. Ao final, discutimos brevemente, a necessidade dos alunos nas series iniciais, terem o contato com outras bases de numeração.

Palavras chave: História da matemática. Números naturais e fracionários. Sistemas de numeração. Bases de numeração.

Abstract

One of Profmat's objectives is to provide solid mathematical training for the development of teaching in Basic Education. Thus, in this dissertation, we present a historical rescue on counting, numbering system, a simple classification of the numbering system and numbering systems of some ancient peoples, different types of the algorithm for the four operations (addition, subtraction, multiplication, and division), historical context on fractions, history of addition algorithms for positional systems, highlighting the improvement of numbers and calculations over the years. To draw teachers' attention to students' difficulties in understanding operations on the decimal basis, we applied the operations on bases 5 and 6 and presented discussions on parity, prime numbers, MMC, and fractions in other numbering bases. In the end, we briefly discussed the need for students in the initial grades to have contact with other numbering bases.

Keywords: History of mathematics. Natural and fractional numbers. Numbering Systems. Numbering bases.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Número 5625 Chinês-Japonês tradicional.	20
Figura 2.2 – O osso de Ishango.	22
Figura 2.3 – Símbolos do sistema de numeração babilônico.	23
Figura 2.4 – Representação de números no sistema de numeração babilônico. . .	24
Figura 2.5 – Ilustração dos símbolos do sistema de numeração egípcio.	25
Figura 2.6 – Ilustração do número 3244.	25
Figura 2.7 – Evolução do traçado dos símbolos do sistema de numeração indo- arábico.	30
Figura 3.1 – Parcela inicial 59.	36
Figura 3.2 – Soma parcial 611.	36
Figura 3.3 – Soma final 611.	37
Figura 3.4 – Primeira parcela 673.	38
Figura 3.5 – Soma parcial 681.	38
Figura 3.6 – Soma parcial 721.	38
Figura 3.7 – Soma final 1421.	39
Figura 4.1 – Representação de frações com hieroglifos egípcios.	61
Figura 4.2 – Ilustração da fração $\frac{1}{249}$	61
Figura 4.3 – Ilustração de frações como hieroglifos egípcios.	62
Figura 4.4 – Ilustração geométrica da fração $\frac{1}{4}$	64
Figura 4.5 – Ilustração geométrica da fração $\frac{2}{4}$	64
Figura 4.6 – Ilustração geométrica das fração $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$	65
Figura 4.7 – Soma de frações com denominadores iguais.	68
Figura 4.8 – Subtração de frações com denominadores iguais.	69
Figura 4.9 – Adição de fração com denominadores diferentes.	71
Figura 4.10–Multiplicação $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$	71
Figura 4.11–Multiplicação $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$	72
Figura 5.1 – Contagem na bases 3.	75
Figura 5.2 – Blocos Multibase - Base 4.	76

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Ilustração dos símbolos do sistema de numeração grego.	21
Tabela 2.2 – Símbolos do sistema de numeração romano	26
Tabela 2.3 – Ilustração dos símbolos e nomes do sistema de numeração decimal.	28
Tabela 2.4 – Símbolos e nomes do sistema de numeração decimal.	28
Tabela 3.1 – Soma no sistema de numeração romano.	36
Tabela 3.2 – Tabuada de adição da base 6	41
Tabela 3.3 – Tabuada de adição na base 7.	46
Tabela 3.4 – Grade de Gelósia.	50
Tabela 3.5 – Grade de Gelósia.	50
Tabela 3.6 – Grade de Gelósia.	50
Tabela 3.7 – Grade de Gelósia.	50
Tabela 3.8 – Grade de Gelósia.	51
Tabela 3.9 – Grade de Gelósia.	51
Tabela 3.10–Grade de Gelósia.	51
Tabela 3.11–Tabuada de multiplicação na base 5.	52
Tabela 3.12–Grade de Gelósia.	52
Tabela 3.13–Métodos de divisão.	54
Tabela 3.14–Terminologia da divisão.	55
Tabela 3.15–Método de divisão Egípcio.	55
Tabela 3.16–Método de divisão Egípcio.	56
Tabela 5.1 – Método da costura (divisão).	80
Tabela 5.2 – Método das subtrações sucessivas (divisão).	81
Tabela 5.3 – MMC($(24)_5, (33)_5, (40)_5$).	81
Tabela 5.4 – MMC($(24)_6, (33)_6, (40)_6$).	82
Tabela 5.5 – Divisão na base 5.	84

Sumário

Resumo	9	
Abstract	10	
Lista de ilustrações	11	
Lista de tabelas	12	
Sumário	13	
1	INTRODUÇÃO	12
2	SISTEMAS DE NUMERAÇÃO	16
2.1	Breve contextualização do surgimento dos números e contagem	16
2.2	Classificações simples dos sistemas de numeração	19
2.2.1	Sistemas de agrupamento simples ou aditivo	19
2.2.2	Sistemas de agrupamento multiplicativos	19
2.2.3	Sistemas de agrupamento cifrados	20
2.2.4	Sistemas de agrupamento posicional	21
2.3	Exemplos de sistema de numeração	21
2.3.1	Sistema de numeração mesopotâmico ou babilônio	21
2.3.2	Sistema de numeração egípcio	25
2.3.3	Sistema de numeração romano	26
2.3.4	Sistema de numeração indo – arábico	27
2.3.5	Sistema de numeração quinário	30
2.4	Reflexão	31
3	ARITMÉTICA: EVOLUÇÃO DOS ALGORITMOS DAS QUATRO OPERAÇÕES	33
3.1	As operações e seus algoritmos	34
3.1.1	Adição	34
3.1.1.1	Interpretações de adição	34
3.1.1.2	Algoritmos para agrupamento da adição	35
3.1.2	Subtração	42
3.1.2.1	Interpretações de subtração	42
3.1.2.2	Algoritmos para a subtração	43
3.1.3	Multiplicação	46
3.1.3.1	Interpretações de multiplicação	47

3.1.3.2	Algoritmos para a multiplicação	47
3.1.4	Divisão	52
3.1.4.1	Interpretações de divisão	52
3.1.4.2	Algoritmos para a divisão	54
3.2	Reflexão	58
4	FRAÇÕES NÚMEROS RACIONAIS	59
4.1	Breve contextualização do surgimento das frações	59
4.2	Gênese dos números racionais	63
4.3	Significados das frações	66
4.3.1	Relação parte/todo	67
4.3.2	Razão entre duas partes de um mesmo todo	67
4.3.3	Quociente entre dois números inteiros	67
4.3.4	Medida	67
4.3.5	Operador partitivo multiplicativo	68
4.4	Operações com frações	68
4.4.1	Adição e Subtração com frações	68
4.4.1.1	Adição e Subtração com denominadores iguais	68
4.4.1.2	Adição e Subtração com denominadores diferentes.	69
4.4.2	Multiplicação de frações	71
4.4.3	Divisão de frações	72
4.5	Reflexão	73
5	DISCUSSÕES A RESPEITO DAS BASES 5 E 6	74
5.1	Números Naturais	75
5.1.1	Sucessor e Antecessor	75
5.1.2	Paridade dos números	76
5.1.3	Adição	77
5.1.4	Subtração	78
5.1.5	Multiplicação	79
5.1.6	Divisão	80
5.2	Mínimo Múltiplo Comum	81
5.2.1	Base 5	81
5.2.2	Base 6	82
5.3	Frações	82
5.3.1	Adição de frações	83
5.3.2	Subtração de frações	83
5.3.3	Multiplicação de frações	83
5.3.4	Divisão de frações	84

6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
	REFERÊNCIAS	87

1 Introdução

[...] é preciso apresentar à criança obstáculos a transpor, e obstáculos que ela queira transpor. Na falta deles, a educação perderá todo seu sabor, não será mais do que alimento insípido e indigesto. Jean Chateau

Embora a matemática seja extremamente necessária e presente no dia a dia, percebe-se um grau de dificuldade de entendimento por parte de muitos alunos e, justamente por estar tão presente na sociedade e na vida dos alunos, não deveria ser vista como abstrata, longe da realidade e de difícil compreensão. Praticamente pouco se faz hoje no ramo da ciência sem o apoio da matemática. O seu progresso é visto como uma ciência dinâmica que abastece respostas para problemas sociais, explica boa parte dos fenômenos naturais do mundo, sendo desde os primórdios uma excelente ferramenta para o homem que sempre a utilizou e desenvolveu para solucionar seus problemas. Atualmente umas das ferramentas do governo para o enfrentamento da pandemia covid-19¹ são a utilização de dados estatísticos. A matemática tem sua importância firmada no fato de cumprir um papel crucial, pois comporta resoluções de problemas da vida cotidiana, tendo variadas aplicações no mundo do trabalho e atua como instrumento eficaz para a construção de conhecimento em outras áreas do conhecimento. Semelhantemente, intervém intensamente na formação de capacidades intelectuais, na composição do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

Em nossa atuação como professor, convivemos diariamente nas aulas de matemática com os erros na aplicação dos algoritmos das quatro operações, com maior ênfase na divisão com números relativamente não tão grandes. Como ilustração de erros cometidos, podemos relatar o seguinte: erros de posicionamento dos algarismos na adição, gerando a soma de unidade com dezena; na multiplicação de dois números com dois algarismos, os estudantes multiplicam a unidade e a dezena do segundo fator apenas uma vez e esquecimento do transporte da dezena quando a soma ultrapassa 9 unidades; na divisão escolha do quociente menor que o indicado. Observamos que tais problemas, em geral, acabam acompanhando o estudante ao longo da sua vida escolar.

Estas dificuldades se não superadas, irão gerar prejuízos que possivelmente podem não ser recuperados nos anos posteriores. A falta de competência do saber calcular causa, além do atraso no conteúdo, alunos inseguros e desestimulados na tentativa das resoluções das questões propostas.

Ao analisarmos com mais cuidado essas dificuldades operatórias, observamos que ao abordar os algoritmos seria necessário uma conexão maior com o sistema de nume-

¹ No momento atual, uma pandemia causada pelo vírus coronavírus (COVID - 19) já matou mais de 120.000 pessoas no Brasil até o mês de agosto de 2020.

ração decimal (SND), que é abordado de forma superficial nas séries iniciais do ensino fundamental.

Considerando que a mudança do currículo através da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ainda está no seu estágio inicial e seus resultados só poderão ser analisados mais a frente, vamos discorrer sobre o ensino do sistema de numeração decimal no ensino regular anterior a mudança.

Segundo MEC (1997, p. 45) "Ao explorarem as situações-problema, os alunos deste ciclo precisam do apoio de recursos como materiais de contagem (fichas, palitos, reprodução de cédulas e moedas), instrumentos de medida, calendários, embalagens, figuras tridimensionais e bidimensionais, etc".

No período dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental as crianças passam a distinguir, de maneira progressiva, as suas propriedades, com o propósito de uma boa aplicação e assimilação dos algoritmos, assim como da leitura e escrita dos números. Na Aprendizagem do Ciclo de Alfabetização do Ensino Fundamental as crianças devem ser incentivadas a procurar suas próprias soluções para problemas do campo aditivo (adição e subtração) e multiplicativo (multiplicação e divisão), se utilizando de recursos como material dourado, palitos de picolé, tampinhas ou representações como os desenhos. No ciclo 1 ao final do 3º ano terão entendido igualmente o uso de meios tradicionais, ou seja, os algoritmos para resolver problemas no campo aditivo, no 4º ano terão contato com os algoritmos habituais da multiplicação e divisão para resolver os problemas propostos. Estes algoritmos deverão ser aprimorados por meio de situações problemas no decorrer dos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental.

"Neste ciclo, os alunos devem ser estimulados a aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético, seja ele exato ou aproximado, mental ou escrito, desenvolvido a partir de procedimentos não-convencionais ou convencionais, com ou sem uso de calculadoras. Certamente, eles ainda não têm domínio total de algumas técnicas operatórias, como da multiplicação e da divisão envolvendo números naturais, compostos de várias ordens, ou aquelas com números decimais, e isso precisa ser trabalhado sistematicamente". (MEC, 1998, p. 67)

Na chegada do Ensino Médio o professor deverá aprimorar o conhecimento adquirido dentro de uma linguagem adequada, de modo que os educandos possam amadurecer matematicamente, assim como, manusear com segurança as propriedades de nosso SND em comparações, notações, cálculos, notação científica.

No entanto, a realidade não tem correspondido aos anseios contidos nos documentos oficiais, é necessário encontrar as falhas no processo de construção do conhecimento, seja por parte dos responsáveis por estas vidas ou pela pouca dedicação do aluno.

Estes erros apresentados por alunos na aprendizagem vêm sendo temas de discussões na Educação Matemática, erros esses, cometidos pelos alunos nas resoluções das questões propostas em sala de aula, que, a princípio, parecem proceder de dificuldades para compreensão de certos conteúdos anteriores.

Estes conteúdos citados são de extrema importância na formação do cidadão, devido ao seu caráter elementar, constando nos currículos escolares desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, permeando toda a matemática da educação básica, conteúdos como: expressões numéricas, equações polinomiais, razão, proporção, probabilidade entre outros.

O ensino do sistema de numeração decimal e das quatro operações fundamentais poderá se dar de diferentes modos, adotando-se diferentes métodos, no entanto para esse trabalho, pretende-se propor ao professor o debate sobre as quatro operações com números naturais e fracionários numa base diferente do sistema decimal, retirando o professor da sua zona de conforto, gerando nele as mesmas dificuldades que supostamente o aluno possa ter no sistema de numeração decimal, provocando nele reflexões sobre a sua atuação.

Um conhecimento importante para operações de números naturais, consiste no entendimento do sistema de numeração decimal, e uma das características importantes deste sistema consiste em entender o valor posicional dos algarismos. O não entendimento deste assunto gera grandes dificuldades nas quatro operações, e posteriormente o não entendimento de multiplicação e divisão gera problemas enormes para o prosseguimento de frações, pois são pré-requisitos para este assunto. Segundo [KAMII \(2001, p. 35\)](#), “compreender o valor posicional é, sem dúvida, muito importante, pois a criança que não o fizer terá sérias dificuldades em somar, subtrair, multiplicar e dividir”.

[DIENES \(1967, p. 77, 78, 81\)](#) defende que para a compreensão do valor posicional, o aluno deveria estudar não somente o sistema de numeração de base 10, mas também trabalhar com várias bases para que, assim, ele possa compreender o significado de valor posicional no nosso sistema de numeração, que segundo ele é o grande problema a ser superado.

A maneira como Dienes via o aprendizado do sistema de numeração decimal foi adotado amplamente nas escolas do Paraná nas décadas de 60, 70 e 80 do século XX. Em seu artigo “What is a base”, ou seja, o que é uma base ([DIENES, 2002](#)) ele relata:

“Esse longo tempo aplicado às leituras e busca de vestígios de tempos idos, em arquivos institucionais e pessoais para constituir as fontes de pesquisa que possibilitassem auxiliar na compreensão das representações do passado e responder como as concepções teórico-metodológicas de Zoltan Paul Dienes para a aprendizagem do sistema de numeração decimal foram apropriadas pela cultura escolar paranaense, permitiu reunir indícios que agora são socializados com todos aqueles que buscam compreender melhor essa teia de significados construídos na cultura escolar paranaense, estabelecida nas décadas de 60, 70 e 80 do século XX, tempo histórico delimitado neste estudo”. ([SOARES, 2014, p. 263](#)).

Ao final desta dissertação, discutimos brevemente, a necessidade dos alunos nas séries iniciais, terem o contato com outras bases de numeração.

Tendo como finalidade que esta dissertação possa contribuir com a formação inicial e continuada de professores de Matemática do ensino básico, pois integra o contexto de ensino das quatro operações e frações, ela está configurada da seguinte forma:

No capítulo 2, apresentamos uma abordagem histórica de números, as classificações simples dos sistemas de numeração, o sistema de numeração decimal e outros tipos de sistemas de numeração de alguns povos. Capítulo 3, abordamos a evolução dos algoritmos das quatro operações com números naturais, enfocando diversos métodos de vários povos ao longo do tempo, assim como, o resgate da origem dos sinais das quatro operações. Capítulo 4, explanamos o contexto histórico da criação de frações, demonstrando a sua importância no contexto da época, a gênese dos números racionais, os cinco significados das frações e as quatro operações com frações. Capítulo 5, argumentamos a importância de que o professor se inteire e estude sistemas de numeração posicional em outras bases, assim como a utilização destes nas quatro operações de números naturais e fracionários. Alguns exemplos de número decimais, fomentando indagações, dúvidas, perguntas que no sistema atual já se encontram consolidados no inconsciente do professor e finalmente aventar a possibilidade do professor abrir discussões sobre este assunto com os alunos. Capítulo 6 as considerações finais.

2 Sistemas de numeração

Neste capítulo apresentamos uma breve contextualização do surgimento dos números e da contagem, iniciando a partir da idade da pedra, a classificação simples dos sistemas de numeração, alguns exemplos de sistemas de numeração de povos antigos que o utilizavam para resolver seus problemas cotidianos, e finalizamos apresentando o sistema de numeração quinário.

2.1 Breve contextualização do surgimento dos números e contagem

Os nossos ancestrais nos primórdios viviam da caça de animais selvagens e da colheita de frutas, castanhas e raízes. Seu habitat consistia, em geral, em espaços abertos das savanas, da África, sul da Europa, sul da Ásia e América Central. Esses povos eram nômades e frequentemente se locomoviam de um lugar para outro a procura de alimento e devido às intempéries que era resultado das mudanças climáticas. A busca pelo alimento era uma constante na sua rotina diária.

Tudo que se fazia era planejado para equipar-se à caça e o preparo dos alimentos, a partir dos seus utensílios de pedra, madeira, osso e carapaça de animais.

Por volta de 30.000 a.C. o *Homo sapiens* (o novo homem) trocou as moradias em cavernas por barracas de peles de animais com cobertura de madeira, com isso ele podia levar consigo nas caçadas. Na mesma época deu início a arte de esculpir estatuetas da fertilidade e outros ícones religiosos em pedra.

O fim da idade da pedra é difícil de precisar, segundo [EVES \(2004, p. 23\)](#), os historiadores subdivide a idade da Pedra em três partes:

Durante o Paleolítico, ou Antiga Idade da Pedra (c. 5 milhões-10.000 a.C.) o *Homo sapiens* envolveu de criaturas menores e mais frágeis e desenvolveu a estrutura socioeconômica da Idade da Pedra. No período Mesolítico, ou Média Idade da Pedra, (c. 10.000-7.000 a.C.) a economia baseada no binômio caçar/colher cristalizou-se. No período Neolítico ou Nova Idade da Pedra (c. 7000-3000 a.C.) a Idade da Pedra começou a declinar e a dar lugar as Idades do Bronze e do Ferro, a medida que os povos começaram a se afastar da forma de sociedade calcada no caçar/colher, para outra que envolvia modos primitivos de agricultura e domesticação de animais. O Paleolítico foi uma era de transição de um mundo de pré-humanos para uma sociedade de caçadores humanos. O Neolítico foi também um período de transição: de uma sociedade de caçadores para uma de agricultores.

De acordo com [EVES \(2004, p. 23\)](#), “as pessoas comerciavam entre si e havia necessidade de anotar a parte de cada família na caçada; ambas as atividades dependiam

da ideia de contar, um prelúdio do pensamento científico”. Na Idade da Pedra, povos como a tribo Sioux, tinham calendários pictográficos que anotavam várias décadas de história. “Todavia, afóra os sistemas de contagem primitivos, tudo o mais teve de esperar o desenvolvimento da agricultura, intensiva e em grande escala, que requeria uma aritmética mais sofisticada”(EVES, 2004, p. 23). No decorrer do período Neolítico, no último milênio da Idade da Pedra, os povos passaram do simples ato de colher, frutas silvestres, raízes, vegetais e castanhas, para se tornar povos agricultores.

No início da história da humanidade os homens se comunicavam por meio de sinais, desenhos e sons. A humanidade ao evoluir tornou-se imperativo o ato de contar animais, objetos, pessoas e tudo mais ao seu redor.

É admissível aceitar que a humanidade, mesmo nas épocas mais primitivas, possuía uma noção do senso numérico, o entendimento de menos e mais quando se retiravam ou acrescentavam alguns objetos de uma coleção pequena, pois na natureza há conhecimento de que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, a contagens simples se tornou inevitável.

Uma tribo necessitava de saber a quantidade de seus membros para divisão da comida e tornava-se necessário a um pastor controlar a quantidade de seu rebanho de carneiros. Supõe-se que o modo mais antigo de contar se baseasse em algum método de registro simples, aplicando o princípio da correspondência biunívoca. Na contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Outra maneira seria também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E posteriormente, com o aperfeiçoamento da escrita, foram aparecendo arranjos de símbolos com intuito de representar os números nas situações diárias.

Segundo EVES (2004, p. 26) “Esse desenvolvimento hipotético encontra respaldo em relatórios de antropólogos que estudaram povos primitivos em nossa época”.

Com o desenvolvimento da sociedade se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, e assim, sucedeu uma sistematização no método de contar. Os números foram organizados em grupos básicos apropriado, no qual a ordem de grandeza desses grupos era determinada na sua maioria pelo processo de correspondência empregado. Exemplificando as ideias, o método versava em escolher certo número b como base e atribuir nomes aos números $1, 2, 3, \dots, b$. Os números maiores do que b seus nomes eram basicamente combinações dos nomes dos números já nomeados. Como os dedos do homem formavam um instrumento de correlação apropriado, o número 10 acabava sendo o preferido nas escolhas da base b .

Analisemos as palavras da língua inglesa de alguns números, considerando a base 10. Temos os nomes específicos *one* (um), *two* (dois), ..., *ten* (dez) para os números

1,2,...,10. A partir de 11 a palavra usada é *eleven*, que, segundo os estudiosos de línguas, provém de *ein lifon*, cujo significado é “um acima de dez”. Analogamente, *twelve* (doze) provém de *twe lif* (“dois acima de dez”). Depois se tem *thirteen* (“três acima de dez”) para 13, *fourteen* (“quatro acima de dez”) para 14, até *nineteen* (“nove acima de dez”) para 19.

Há comprovação de que os números 2,3,4 e 5 foram usados como bases primitivas. Segundo EVES (2004, p. 28), “Por exemplo, há nativos de Queensland que contam “um, dois, dois e um, dois e dois, muito”, e alguns pigmeus africanos que contam “*a, oa, ua, oa-oa, oa-oa-a e oa-oa-oa*” para 1,2,3,4,5 e 6”. Certa tribo da Terra do Fogo compõe seus primeiros e poucos nomes de números na base 3 e algumas da América do Sul usam de maneira análoga o 4. Como seria de esperar, o sistema quinário ou sistema de numeração de base 5, foi o primeiro a ser usado extensivamente. Até hoje algumas tribos da América do Sul contam com as mãos: “um, dois, três, quatro, mão, mão e um” e assim por diante. Os Yukaghirs da Sibéria usam uma escala mista para contar “um, dois, três, três e um, cinco, dois três, um mais, dois três e dois, dez faltando um, dez”. Ainda no início do século XIX se encontravam calendários de camponeses germânicos baseados no sistema quinário. Outra base com algumas evidências, especificamente em relação à medidas, de ter sido utilizada em épocas pré-históricas é a base 12. Essa base pode ter sido recomendada pelo número aproximado de lunações de um ano ou, quem sabe o fato do número 12 ter muitos divisores inteiros. De qualquer forma, 12 é o número de polegadas em um pé padrão, de pences em um *shilling*, as horas de um relógio, o número de meses em um ano, ou quem sabe a palavra dúzia.

Temos também o sistema vigesimal (base 20) amplamente utilizado pelos índios americanos. Outro povo conhecido pelo seu uso foi o povo maia.

As palavras-número francesas *quatre-vingt* (oitenta) em vez de *huitante* e *quatre-vingt-dix* (noventa) em vez de *nonante* são traços da base 20 dos celtas. Também se encontram traços no gaélico, no dinamarquês e no inglês. Os groenlandeses usam “um homem” para 20, “dois homens” para 40 e assim por diante. Em inglês ha a palavra *score* (uma vintena), frequentemente usada. (EVES, 2004, p. 29)

Outro sistema é o sexagesimal (base 60) que foi amplamente trabalhado pelos babilônios, ainda usado na medida de ângulos e do tempo.

Já foi mencionado o uso de marcas e entalhes como maneiras primitivas de registrar números. Esse recurso possivelmente representa a primeira tentativa por parte do homem de registrar. Configura os primeiros esforços no sentido de fazer registros permanentes de números, que resultaram em vários sistemas de numeração escritos. Dentre os vários tipos de sistema de numeração, podemos classificá-los em: sistema de agrupamento simples (aditivo); sistema de agrupamentos multiplicativos; sistema de numeração cifrado e sistema de numeração posicional (EVES, 2004, p. 30-37).

2.2 Classificações simples dos sistemas de numeração

Um sistema de numeração (ou sistema numeral) é um método usado para lidar com o conceito de “quantos”, onde culturas diferentes, em épocas diferentes, adotaram vários métodos, indo do básico “um, dois, três, muitos” à altamente sofisticadas notações de posicionamento decimal que usamos hoje dia.

2.2.1 Sistemas de agrupamento simples ou aditivo

Possivelmente o mais antigo tipo de sistema de numeração a se desenvolver tenha sido o sistema de agrupamentos simples (EVES, 2004). Nesse tipo de sistema é escolhido um número b como base e a partir dele usam-se símbolos para 1, b , b^2 , b^3 , etc. A partir desta escolha, podemos expressar qualquer número usando os símbolos aditivamente, repetindo-se cada um deles na quantidade de vezes que seja necessária. Neste tipo podemos citar os sistemas dos Babilônios, Egípcios e Romanos que abordamos nas seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 respectivamente.

2.2.2 Sistemas de agrupamento multiplicativos

Alguns sistemas de agrupamentos multiplicativos são evolução do sistema de agrupamentos simples (EVES, 2004). Nesse tipo de sistema, escolhe-se uma base b e símbolos que representem os números $1, 2, 3, \dots, b-1$ e um segundo conjunto de símbolos para b, b^2, b^3, b^4, \dots . A construção dos números é feita fazendo composição dos dois conjuntos multiplicativamente de tal forma que mostre quantas unidades dos grupos de ordem superior são imprescindíveis. Assim, escolhendo-se os primeiros nove números pelos algarismos atuais, mas designando-se 10, 100, 1000 e 10000 por p, q, r e s , temos que o número 73485 num sistema de agrupamentos multiplicativo se escreveria da seguinte forma:

$$73485 = 7s3r4q8p5.$$

Neste tipo de sistema podemos citar o sistema de numeração chinês-japonês tradicional, consistem num sistema de agrupamentos multiplicativo de base 10, números estes escritos verticalmente.

Vejamos um exemplo com o número 5625 na Figura 2.1. Na figura do lado esquerdo temos os símbolos dos dois grupos básicos, o primeiro grupo compostos de 1 a 9 e o segundo os números 10, 10^2 e 10^3 e na direita a representação do número 5625, considerando a parte superior do número 5625, temos o primeiro e o segundo símbolo representando respectivamente os números 5 e 10^3 , o terceiro e o quarto símbolo representando respectivamente os números 6 e 10^2 , o quinto e o sexto símbolo representando respectivamente os números 2 e 10, e por fim o último símbolo que fica na

parte inferior representando a unidade 5. No SND, o número seria representado da seguinte forma:

$$5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5.$$

Figura 2.1 – Número 5625 Chinês-Japonês tradicional.

1	一	10	十	五
2	二	10^2	百	千
3	三	10^3	千	六
4	四			百
5	五			二
6	六			十
7	七			五
8	八			
9	九			

Fonte: EVES (2004, p.34).

2.2.3 Sistemas de agrupamento cifrados

No sistema de numeração cifrado, após adotar uma base b , escolhe-se símbolos para os números $1, 2, 3, \dots, b-1$; $b, 2b, 3b, \dots, (b-1)b$; $b^2, 2b^2, 3b^2, \dots, (b-1)b^2$, e, assim sucessivamente. O inconveniente deste sistema é o grande número de símbolos necessários para memorizar e a vantagem consiste na representação dos números de forma compacta. Como exemplo, temos o sistema de numeração grego, conhecido como jônico ou alfabético, segundo (EVES, 2004, p. 35),

O sistema de numeração grego, conhecido como jônico ou alfabético, cujas origens situam-se já por volta do ano 450 a.C., é um exemplo desse sistema cifrado. Ele é decimal e emprega 27 caracteres — as 24 letras do alfabeto grego mais três outras obsoletas: *digamma*, *koppa* e *sampi*. (EVES, 2004, p. 35).

Veja a Tabela 2.1 uma ilustração dos símbolos do sistema de numeração grego.

Tabela 2.1 – Ilustração dos símbolos do sistema de numeração grego.

1	α	alpha(alfa)	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma(gama)	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	obsoleta	digamma	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	\omicron	o	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta(teta)	90	obsoleta	koppa	900	obsoleta	sampi

Fonte: EVES (2004, p. 35).

Neste exemplo de sistema de numeração grego a base escolhida é 10, as letras gregas de Alfa a San tem valores 1, 2, 3, 4, ..., 9; 1×10 , 2×10 , 3×10 , ..., 9×10 ; 1×10^2 , 2×10^2 , 3×10^2 , ..., 9×10^2 .

Por muito tempo as letras maiúsculas foram utilizadas, e posteriormente substituídas pelas letras minúsculas, como exemplos representamos os números 31 e 243:

$$\lambda\alpha = 31 = 3 \times 10 + 1, \quad \sigma\mu\gamma = 243 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10 + 3.$$

2.2.4 Sistemas de agrupamento posicional

Neste tipo de sistema, após a adoção de uma base b , escolhe-se símbolos para $0, 1, 2, 3, \dots, b - 1$. Assim, há no sistema b símbolos básicos, comumente chamado de algarismos. Cada número N deverá ser representado de maneira única na forma de

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$$

onde $0 \leq a_i < b$ e $i = 0, 1, \dots, n$. Logo, escrevemos o número N na base b pela sequência de símbolos: $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$. Como exemplo temos o sistema de numeração decimal adotado pela grande maioria dos países. Não exemplificamos, pois na seção 2.3.4 será falado sobre ele.

2.3 Exemplos de sistema de numeração

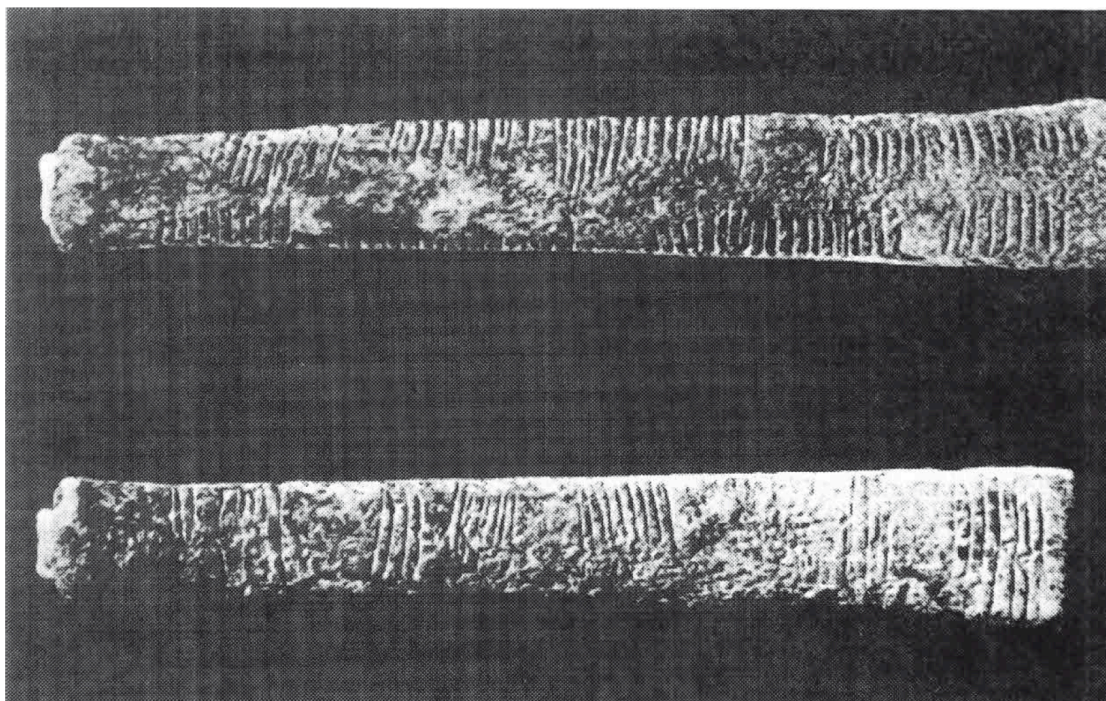
Serão expostos os sistemas de numeração Babilônico, Egípcio, Romano e Indo-Arábico devido a sua importância ao longo da história matemática e o sistema de numeração base 5 por ser objeto de estudo.

2.3.1 Sistema de numeração mesopotâmico ou babilônio

Não é arriscado conceber que sociedades muito antigas tenham possuído uma noção de quantidade. Há um registro relacionado com contagens, que gera interpreta-

ções e discussões entre os especialistas, é o osso, mostrado na Figura 2.2, descoberto em Ishango, na África, e datado entre 20.000 e 10.000 anos a.C.

Figura 2.2 – O osso de Ishango.



Fonte: EVES (2004, p. 26).

Os primeiros registros, que podem ser considerados como um tipo de escrita data quase do quarto milênio antes da era comum e são originários da Baixa Mesopotâmia, onde atualmente se localiza o Iraque. O nascimento da escrita e da Matemática nesta região está fortemente relacionado.

Nesta era, o aumento da população no sul do Iraque (Babilônios) deu origem ao desenvolvimento de cidades e a necessidade de aprimoramento das técnicas de administração da vida comum. Esta nova conjuntura determinou o nascimento de registros das quantidades, considerado às primeiras formas de escrita, o desenvolvimento do conceito de número, a despeito de ter sido estimulado por necessidades concretas, alude em um tipo de abstração, pois o ato de contar é concreto, no entanto quando usamos o mesmo número para expressar quantidades iguais com objetos diferentes é um procedimento abstrato.

Apresentamos agora o sistema de numeração babilônico e focamos apenas o sistema de numeração empregado pelos escribas babilônios que residiram a Mesopotâmia por volta de 2000 a 1600 a.C, durante o período Babilônio Antigo, ignorando os seus antecedentes, que aludem a épocas bem mais antigas.

Seu sistema era aditivo e posicional. O símbolo com aparência de um cravo Υ representava o número “um”, a partir dele representava os números 2, 3, 4 até o número 9 repetindo o número de vezes que era necessário. O número 10 era representado

por ∇ . A representação dos números utilizava o processo aditivo com a junção do símbolo maior com o menor, prosseguindo assim dessa forma até o número sessenta, quando se retornava a utilizar o mesmo símbolo usado para o número um. Observe na Figura 2.3 as representações do número 1 até o número 60. Prosseguindo na contagem, ao atingir o número $60^2 = 3600$, emprega-se novamente o mesmo símbolo, e assim ininterruptamente.

Figura 2.3 – Símbolos do sistema de numeração babilônico.

∇	1	∇	2	∇	3	∇	4
∇	5	∇	6	∇	7	∇	8
∇	9	∇	10	∇	11	∇	12
∇	13	∇	14	∇	15	∇	16
∇	17	∇	18	∇	19	∇	20
∇	30	∇	40	∇	50	∇	60

Fonte: ROQUE T.; PITOMBEIRA (2012, p. 8).

Os números de 60 em diante eram representados em termos dos símbolos para os números de 1 a 59, usando o princípio da posição para indicar múltiplos de potências de 60. Os babilônios já tinham o conceito do zero e, como esse não era nenhuma quantidade, indicavam-no com um espaço vazio. O sistema dos antigos babilônios usa uma notação posicional de base sessenta. De fato mesmo, havia uma combinação de base 10 e base 60, pois os símbolos até cinquenta e nove mudam de dez em dez.

Atualmente ainda usamos sistema babilônico, pois a divisão das horas, minutos e segundos, é uma herança dos babilônicos, é um sistema posicional sexagesimal. Assim, 1h 5min 25 s é igual a $(60 \times 60) + 5 \times 60 + 25 = 3925s$.

Eles são responsáveis pela aquisição do sistema numérico posicional, para entendemos melhor esse sistema, observe o exemplo:

O número 23465 representado no sistema decimal (base 10) ficaria:

$$23465 = (2 \times 10^4) + (3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (5 \times 10^0) = 20000 + 3000 + 400 + 60 + 5,$$

ao mudar a base do sistema, automaticamente o valor do número 23465 também muda. Utilizamos agora a base 6, observe o número $23465 = (2 \times 6^4) + (3 \times 6^3) + (4 \times 6^2) + (6 \times$

$6^1) + (5 \times 6^0)$ ou seja $2592 + 648 + 144 + 36 + 5 = 3425$, já na base babilônica sexagesimal, ocorrerá uma nova mudança, observe: $23465 = (2 \times 60^4) + (3 \times 60^3) + (4 \times 60^2) + (6 \times 60^1) + (5 \times 6^0) = 26582765$.

Qual a vantagem de se utilizar a base sessenta, ou seja, um sistema sexagesimal? A divisibilidade por inteiros pequenos é uma importante característica a ser levada em conta no momento de escolhermos a “base” para um sistema de numeração. Note que na atualidade a base 12 é utilizada até hoje no comércio quando usamos a dúzia, precisamente pelo fato do número 12 ser divisível por 2, 3 e 4, facilita o seu uso, note que um grande vantagem do sistema sexagesimal consiste que o número sessenta é divisível por todos os inteiros entre 1 e 6, facilitando o cálculo dos inversos multiplicativos dos números expressos nesta base.

Figura 2.4 – Representação de números no sistema de numeração babilônico.

Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
	1;15 = $1 \times 60 + 15$	75
	1;40 = $1 \times 60 + 40$	100
	16;43 = $16 \times 60 + 43$	1003
	44;26;40 = $44 \times 3600 + 26 \times 60 + 40$	160000
	1;24;51;10 = $1 \times 216000 + 24 \times 3600 + 51 \times 60 + 10$	305470

Fonte: ROQUE T.; PITOMBEIRA (2012, p. 10).

A Figura 2.4 mostra exemplos de números escritos no sistema sexagesimal usado pelos babilônios. Este sistema da margem a algumas imprecisões na mensuração do número, por exemplo, usando duas cunhas, que representam cada uma delas o número “um”, temos o número 2 ou o número 61. Na representação do número 2, este problema é resolvido unindo-se bem os dois símbolos. Mas como diferenciar 1 de 60? Neste último caso, houve uma época em que se usava o símbolo de 1 com tamanho diferente para representar 60 (ROQUE T.; PITOMBEIRA, 2012).

A partir da padronização dos símbolos, com intuito de facilitar os registros, a distinção entre o número 1 e as potências de 60 dependia da situação, que permitia determinar a ordem de grandeza dos números com que se estava lidando em cada problema, outro caso que causava ambiguidade era a escrita dos números 2 e 120, pois como dife-

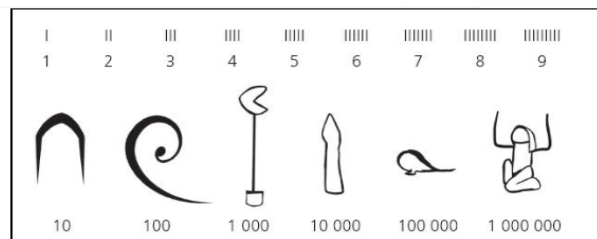
reenciar qual número $\Upsilon\Upsilon$ estes dois símbolos representam. Novamente o contexto do problema ajudava na distinção do valor do número (ROQUE T.; PITOMBEIRA, 2012).

2.3.2 Sistema de numeração egípcio

Segundo estudos, o sistema de numeração do Egito foi desenvolvido aproximadamente na mesma época que dos babilônios, ou seja, por volta do ano 3000 a.C. Seu sistema de numeração empregava o sistema decimal, no entanto, diferentemente dos babilônios, não era posicional, mas sim, aditivo (ROQUE T.; PITOMBEIRA, 2012).

A barra vertical representava o número 1 e os números imediatos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número apropriado de barras. A partir daí, os números são múltiplos de dez e, devido a isso, afirmamos que o sistema é decimal. O número dez é uma alça; cem, uma espiral; mil, a flor de lótus; dez mil, um dedo; cem mil, um sapo e um milhão, um deus com as mãos levantadas, veja a Figura 2.5.

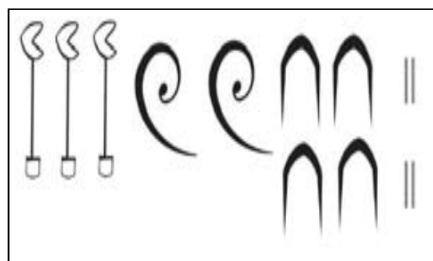
Figura 2.5 – Ilustração dos símbolos do sistema de numeração egípcio.



Fonte: ROQUE T.; PITOMBEIRA (2012, p. 25).

No sistema de numeração egípcio a forma de escrever e ler os números segue o seguinte: os números maiores vêm escritos na frente dos menores e, se houver mais de uma linha de números, devemos começar de cima para baixo. Como exemplo, temos o número 3244 representado na Figura 2.6

Figura 2.6 – Ilustração do número 3244.



Fonte: ROQUE T.; PITOMBEIRA (2012, p. 26).

Devido este sistema ser aditivo, os números são obtidos pela soma de todos os números representados pelos símbolos, basta então escrevermos:

$$3 \times 1000 + 2 \times 100 + 4 \times 10 + 4 \times 1 = 3244.$$

2.3.3 Sistema de numeração romano

O desenvolvimento do sistema de numeração romana ocorreu na Roma Antiga, sendo empregado em todo o Império Romano. A construção do sistema se utiliza de sete letras maiúsculas do alfabeto latino: I, V, X, L, C, D e M.

Vejamos os valores inteiros na Tabela 2.2 representados por letras romanas específicas.

Tabela 2.2 – Símbolos do sistema de numeração romano

NUMERO ROMANO	NOME	VALOR
I	unus	1 (um)
V	quinque	5 (cinco)
X	decem	10 (dez)
L	quingenta	50 (cinquenta)
C	centum	100 (cem)
D	quingenti	500 (quinhentos)
M	mille	1000 (mil)

Pouco se pode afirmar completamente sobre a origem da matemática romana.

Segundo CAJORI (2007, p. 103)

“A pequena matemática dos romanos não veio só dos gregos, mas em parte de fontes mais antigas. Exatamente de onde e como se originou é motivo de dúvida. O mais provável é que a "notação romana", bem como a primitiva geometria prática dos romanos tenha originado dos antigos etruscos, os quais, até onde vai o nosso conhecimento, habitaram o distrito entre Arno e o Tiber”.

A característica predominante da notação romana é o princípio aditivo, no qual XI e VI representam respectivamente $10 + 1$ e $5 + 1$, assim como o princípio subtrativo, ilustrado quando se escreve IV e IX respectivamente para $5 - 1$ e para $10 - 1$. O método subtrativo se tornou vastamente utilizado após a invenção da imprensa com tipografias móveis.

Quando há necessidade de escrever números maiores, utiliza-se uma barra colocada sobre a letra, com isso, ela multiplica o seu valor por 1000. Exemplificando, temos o número $\overline{\text{MM}}$ equivalente a 2000×1000 .

Para melhor entendimento do sistema romano vamos pontuar as regras de representação dos números neste sistema de numeração.

Os números são escritos iniciando da letra de maior valor até a de menor valor, e seguindo as seguintes regras:

- **princípio da adição:** algarismos de menor ou igual valor à direita são somados ao algarismo de maior valor;
- **princípio da subtração:** algarismos de menor valor à esquerda são subtraídos do algarismo de maior valor;

- um algarismo não pode ser repetido lado a lado por mais de três vezes. Assim, os números $10 + 3$ e $10 + 4$ são representados respectivamente por XIII e XIV. Logo, para representar 300, podemos usar CCC; para representar 400, contudo, precisamos escrever CD;
- para cifras superiores, utiliza-se um travessão por cima da letra, que representa sua multiplicação por 1000. Assim, \overline{CC} corresponde ao valor 200.000 (200×1.000) e \overline{M} corresponde ao valor 1.000.000 (1.000×1.000). Este sistema de numeração tem como valor máximo o número 3.999.000 que corresponde a $\overline{MMMCMXCIX}$.

2.3.4 Sistema de numeração indo – arábico

O sistema numérico Hindu-arábico ou indo-árabe (também conhecido por sistema numérico árabe ou sistema numeral Hindu), recebeu esse nome devido aos Hindus, que o inventaram, e devido aos árabes, que foram responsáveis por sua difusão para a Europa Ocidental.

O desenvolvimento da civilização Hindu ocorreu no vale do rio Indo (que atualmente faz parte do Paquistão). Os astrônomos e matemáticos Hindus inventaram ao longo do tempo, um sistema de numeração cujo documento mais antigo é um livro publicado por volta de 1500 anos.

O sistema de numeração árabe (ou decimal ou de base 10) é um sistema numeral decimal posicional, por este motivo que comumente nos aludimos a ele chamando-o de sistema de numeração decimal. A palavra decimal origina-se da palavra latina “*decem*,” que significa dez, pois, assim como vários sistemas de numeração antigos, o nosso sistema atual tem base dez, ou seja, os agrupamentos são sempre feitos de dez em dez. Conjectura-se que isso pode ter ocorrido, possivelmente devido o homem ter dez dedos e usa as mãos para contar, são utilizados apenas 10 símbolos diferentes: os designados algarismos árabes. Estes algarismos árabes são representados pelos símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O símbolo que corresponde a um número qualquer é combinado de vários algarismos dispostos, uns a seguir aos outros. Devido ser posicional, os lugares destes algarismos correspondem às diferentes ordens, começando pela direita, e são chamados de casas: casa das unidades, casa das dezenas, casas das centenas, e assim sucessivamente.

Desde o século III a.C. sabe-se que eram empregados na Índia símbolos gráficos no intuito de identificar os números, pois foram encontradas inscrições em pedra desse período. Os Hindus utilizavam nove símbolos independentes para representar quantidades de 1 a 9. Segundo [IFRAH \(1989, p. 267\)](#), acima do número 9, os números eram escritos por extenso, pois ainda não havia desenvolvido o princípio do valor de posição.

Como não podiam representar os números grandes por algarismos, eles tiveram desde muito cedo a ideia de exprimi-los, como se diria hoje, por extenso. Sem o saber, eles tomavam o caminho que os levaria um dia à descoberta do princípio de posição e, conseqüentemente, a criação do zero. Apesar de oral, esta numeração foi de excelente qualidade.

De acordo com a tabela 2.3, era conferido um nome reservado a cada um dos nove primeiros números inteiros.

Tabela 2.3 – Ilustração dos símbolos e nomes do sistema de numeração decimal.

eka	dvi	tri	catvur	panca	sat	sapta	asta	nava
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Às potências de 10, atribuíam nomes completamente independentes uns dos outros, conforme a tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Símbolos e nomes do sistema de numeração decimal.

10	Dasa
100	Satã
1000	Sahasra
10000	Ayuta
100000	Laksa
1000000	Prayuta
10000000	Koti

Um dos responsáveis pela exposição do sistema de numeração indo-arábico na Europa foi Abu Jafar Muhamed Ibn Musa AL-Khowarizmi, matemático, astrônomo e geógrafo muçulmano do século IX. Seus trabalhos de geometria, aritmética e álgebra foram traduzidos para o latim e mudaram decisivamente o ocidente. De que maneira e quando os novos símbolos numerais entraram na Europa são indagações ainda não decididas. Segundo EVES (2004, p. 40), possivelmente chegaram à Europa com a invasão dos árabes na Espanha.

Esses símbolos se encontram num manuscrito espanhol do século X, sendo possível que tenham sido introduzidos na Espanha pelos árabes que invadiram a península ibérica no ano 711 d.C., onde permaneceram até 1492 d.C. Mas foi uma tradução latina do tratado de AL-Khowarizmi, feita no século XII, seguida de alguns trabalhos europeus sobre o assunto, o que fez com que o sistema se disseminasse mais amplamente.

Segundo IFRAH (1989, p. 303–304), os árabes foram amplamente favoráveis a inserção deste sistema de numeração Hindu, já os europeus demoraram para aceitar a mudança. Nessa época, os cálculos predominantes consistiam na utilização dos ábacos, e somente uma classe privilegiada sabia manipular essas calculadoras, os restantes

viviam a margem deste conhecimento. Ao contrário, houve forte resistência à aceitação da utilização dos símbolos pagãos na Europa, ela só foi vencida depois que a expansão do comércio europeu tornou-se mais forte do que os preconceitos culturais. Deste modo, fez-se necessário um sistema numérico mais favorável ao cálculo.

AL-Khowarizmi se mostrou extremamente importante para a matemática árabe, por meio dele passaram a existir termos como algarismo e algoritmo, o primeiro termo é aproveitado para nomear os símbolos do nosso atual sistema de numeração e o segundo para nomear um conjunto de regras para a resolução de um cálculo numérico. Segundo EVES (2004, p. 40, 41), até o estabelecimento do sistema de numeração decimal como nos dias de hoje, houveram várias modificações na sua escrita.

Até que os símbolos dos numerais indo-arábico se estabilizassem, com a invenção da imprensa de tipos móveis, muitas modificações em sua grafia se verificaram. Nossa palavra *zero* provavelmente provem da forma latinizada *zephirum* derivada de *sifr* que é uma tradução para o árabe de *sunya*, que em Hindu significa “vazio” ou “vacuo”. A palavra árabe *sifr* foi introduzida na Alemanha, no século XIII, por Nemorarius, como *cifra**

No início, o sistema de numeração do povo Hindu não era posicional e também não empregava o zero (EVES, 2004). No momento que eles aperfeiçoaram o sistema vigente para um posicional, houve necessidade da concepção de um símbolo para representar o nulo, ou seja, o nada existente na posição indicada. Apesar de haver um desenvolvimento parcial ou limitado do conceito de zero em alguns sistemas mais antigos que o Hindu, o mérito pela criação foi dado a eles, o zero foi uma grande invenção dos Hindus, veja essa afirmação em EVES (2004, p. 40) "Contudo, a ideia de valor posicional e um zero devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C".

Outro ponto a ser considerado é a alteração do traçado dos símbolos numéricos, pois os livros no século XV eram copiados manualmente antes da invenção da imprensa. Como cada copista tinha uma grafia distinta, as letras e os símbolos que representavam os números foram recebendo inúmeras alterações. A utilização pelos árabes e europeus também contribuíram para mais modificações e com isto alterações nos traçados. Vejamos na Figura 2.7.

Figura 2.7 – Evolução do traçado dos símbolos do sistema de numeração indo-arábico.

	um	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove	zero
Século VI (indiano)	𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘	𑀙	𑀚	𑀛	𑀜
Século IX (indiano)	𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘	𑀙	𑀚	𑀛	𑀜
Século X (árabe oriental)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Século X (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XI (árabe oriental)	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Século XII (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XIII (árabe oriental)	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Século XIII (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XIV (árabe ocidental)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Século XV (árabe oriental)	1	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
Século XV (europeu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Hoje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

fonte: DANTE (2014, p. 17).

Na atualidade, representamos os dez algarismos com o traçado com os símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Com a criação da imprensa, as modificações dos traçados se mantiveram estabilizados, de modo que os algarismos atuais têm, basicamente, a mesma aparência desde o século XV.

Este sistema de numeração atualmente é o mais popular para a representação simbólica de números no mundo, tem se mostrado útil, prático e eficiente, todos esses fatos históricos relatados colaboraram para o desenvolvimento dos números e dos sistemas de numeração.

2.3.5 Sistema de numeração quinário

O sistema quinário é um sistema de numeração quântica de base 5 que usa somente os símbolos 0, 1, 2, 3 e 4. A conversão de um número no sistema decimal para um número no sistema Quinário, consiste na divisão sucessiva entre 5, o número quinário formado é composto pelo último quociente e todos os restos são os algarismos, de acordo com este método, o número cinco da base 10 passa a ser representado por $(10)_5$, o número vinte do SND é o número $(40)_5$ e o quarenta é o $(130)_5$.

No século 20, somente poucas tribos na África ainda utilizavam o sistema base 5. Entretanto, a base dez (sistema de numeração decimal) predominou na maior parte das tribos, territórios e países. Como o número cinco é um divisor de 10 e 20, conclui-se que o sistema quinário é utilizado como uma sub-base do sistema de numeração decimal e também do sistema vigesimal. Podemos escrever qualquer número na base 5 da seguinte forma:

$$N = a_n 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + \dots + a_3 5^3 + a_2 5^2 + a_1 5^1 + a_0$$

onde $0 \leq a_i < 5$ e $i = 0, 1, \dots, n$. Logo, escrevemos o número N na base 5 pela sequência de símbolos: $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$.

2.4 Reflexão

A história mostra que a evolução dos sistemas de numeração da antiguidade não foram linear, ao contrário, sistemas de numeração bem diferentes foram criados e usados paralelamente, inclusive por nações contemporâneas e vizinhas, até que o sistema de numeração posicional fosse adotado. O ensino dos sistemas de numeração da antiguidade é um instrumento valioso, no entanto, não pode se tornar um objetivo em si. O aprendizado de outros sistemas tem como objetivo principal, auxiliar a aprendizagem do sistema posicional decimal. Cada um desses sistemas de numeração apresentados neste capítulo possui particularidades específicas, que causam limitações e benefícios na execução de tarefas. Os procedimentos para realização dos cálculos se baseiam na estrutura de cada sistema, ou seja, se o sistema é aditivo, posicional, multiplicativo, ou outro qualquer.

O estudo do sistema babilônio possibilita ajudar a compreender o real valor do algarismo 0, pois como relatado na seção 2.3.1, sabemos que sua inexistência causa ambiguidades na determinação do valor do símbolo que representa o número 1 e o 60, este problema não ocorre no SND por causa da sua criação. A utilização do algarismo 0 para representar um número significa o consentimento da inexistência de quantidade material como uma quantidade, esse é um enorme passo de abstração com grande significado em relação a todos os sistemas da antiguidade.

Em relação ao sistema egípcio, seu sistema aditivo, mas não posicional, implica em algoritmos mais simplificados que o SND. No registro do número, é suficiente escrevermos os símbolos, seguindo orientação dada na seção 2.3.2, e a soma gera o número esperado. O grande salto do SND em relação a este sistema, é ser posicional, no qual o valor relativo do número depende em que casa esta localizado, diferentemente do egípcio em que cada símbolo tem o valor absoluto e relativo iguais.

Os objetivos de ensinar os algarismos romano tem uma característica peculiar e prática, visto que ele ainda é utilizado em algumas situações atuais (por exemplo, a representação dos séculos). Sobretudo, uma finalidade importante no ensino do sistema romano consiste em entender a estrutura do próprio sistema de numeração decimal posicional, por meio do estudo de diferenças e semelhanças.

O sistema posicional, em primeiro lugar, tem uma grande vantagem em relação aos outros, pois, um mesmo algarismo dependendo da sua posição no numeral, assume infinitos valores diferentes. Isto possibilita que um conjunto finito de algarismos

consiga representar todos os números naturais - diferentemente dos sistemas não posicionais. Outro fato muito importante refere-se à facilidade para construir algoritmos e uma quantidade enorme deles, relativamente simples e práticos, para as operações elementares. Esta é uma característica fundamental para o estudo das quatro operações no ensino básico, no qual, será discutido em detalhes no capítulo 3. Outro ponto relevante, os sistemas posicionais possibilitam uma extensão para a representação de números não inteiros, como os números racionais, irracionais e complexos. O sistema de numeração de base 5 e 6, conjuntamente com o SND, será discutido no capítulo 5.

3 Aritmética: Evolução dos algoritmos das quatro operações

“A Aritmética é a base de toda a Matemática, pura ou aplicada. é a mais útil das ciências e provavelmente não existe nenhum outro ramo do conhecimento humano tão espalhado entre as massas”. (DANTZIG, 1970, p. 44)

A Aritmética é, justamente, o ramo da Matemática que lida com os números e com as operações possíveis entre eles, sendo considerada a ciência dos números.

Na procura das origens do invento dos números e das operações, veem-se, desde a civilização grega, as citações que serviram de base para a educação do mundo ocidental em grupos que foram chamados de trivium e quadrivium. O trivium abrangia a Gramática, a Dialética e a Retórica, matérias que apontavam a uma preparação para a vida prática. O quadrivium repartia o conhecimento considerado indispensável para o desenvolvimento do indivíduo em Aritmética, Geometria, Música e Astronomia. Após o Renascimento, houve reformulações nos currículos, mas o papel de cada “módulo” continuou a ser o mesmo: a preparação formal e prática do indivíduo.

Enfim, tendo em vista a importância da Aritmética (operações) no conjunto dos conhecimentos imprescindíveis a todo cidadão, é aceitável o interesse de se compreender como essa “disciplina” se organizou.

Para chegar à Teoria dos Números, a humanidade percorreu longos caminhos. A técnica da contagem e as regras de calcular foram acontecimentos instituídos no final do período renascentista, em meados do século XVII. Nesse período, muitas batalhas ocorreram: lutas por territórios ou por religião em que os povos empunhavam sua cultura ou adotavam conhecimentos de outras. As várias técnicas de quantificar, contar, medir ou de representar foram se mesclando no transcorrer da história, e determinados povos acabaram se impondo a outros, de modo que, hoje, as práticas quase que se universalizaram.

A aritmética se tornou tão importante, que hoje é parte integrante dos parâmetros curriculares nacionais. Segundo MEC (1997, p. 39, 40) o sistema de numeração, com suas operações, faz parte do ramo da Matemática chamado Aritmética, que se constitui em uma das disciplinas nucleares nos currículos dos anos iniciais da Educação Básica. Contar e calcular, bem como, medir e organizar o espaço e as formas (Geometria) são competências para cujo desenvolvimento o ensino de Matemática se faz fundamental.

3.1 As operações e seus algoritmos

A forma como a disciplina de matemática deve ser trabalhada na escola, precisa considerar a trajetória que cada conteúdo percorreu até chegar ao estágio atual, de modo que não seja vista como estática.

“A matemática, afinal, é um produto cultural. É criada por pessoas em um momento e lugar dados e frequentemente é afetada por esse contexto. Saber mais sobre isso ajuda a entender como a matemática se ajusta com outras atividades humanas” (BERLINGOFF W. P.; GOUVÊA, 2008, p.3).

Apresentamos neste seção as quatro operações fundamentais da Aritmética: adição, subtração, multiplicação e a divisão, e métodos que permite calcular a soma de dois ou mais números em um sistema de numeração posicional, métodos esses que são denominados por algoritmo. Damos ênfase no estudo dos significados das operações, no desenvolvimento dos algoritmos comumente empregados na atualidade brasileira, em alguns métodos largamente utilizados por alguns povos e mostramos como eles estão atrelados ao sistema decimal posicional adotado.

3.1.1 Adição

A adição é a operação fundamental da aritmética. Através dela podemos definir as demais operações.

3.1.1.1 Interpretações de adição

Todo número natural a tem um único sucessor, representado por $a + 1$. Definimos a adição de um número natural a com o número 1 como a operação da qual resulta o sucessor de a .

Uma definição formal para a adição de um número natural a com um número natural qualquer b é usando a ideia de sucessor. Assim, partindo de um número a , adicionando o número 1 obtemos $a + 1$, o sucessor de a , adicionando o número 1 ao número $a + 1$, obtemos $a + 2$, o sucessor de $a + 1$, assim, sucessivamente vamos obtendo os sucessores dos números até chegar no número $a + b$.

Como ilustração vamos calcular a soma $8 + 4$. Como definido acima, devemos calcular os sucessores até obter o número $8 + 4$.

$$\begin{aligned} 8 + 1 &= 9 && \text{(sucessor de 8)} \\ 8 + 2 &= 9 + 1 = 10 && \text{(sucessor de 9)} \\ 8 + 3 &= 10 + 1 = 11 && \text{(sucessor de 10)} \\ 8 + 4 &= 11 + 1 = 12 && \text{(sucessor de 11)}. \end{aligned}$$

Portanto, $8 + 4 = 12$ no sistema decimal.

Observamos que, considerando a definição acima, para realizar a soma necessitamos determinar sucessivamente sucessores. Assim, ao deparamos com números grandes, surge a necessidade de determinar algoritmos práticos para a adição.

Para a construção de algoritmos práticos é necessário interpretar a adição com a ideia de juntar e contar, aproveitando deste modo, as classes e ordens dos números para a construção do algoritmo. Por exemplo, utilizando a ideia de juntar e contar, podemos pensar na adição de $8 + 4$ através do seguinte exemplo: temos numa cesta 8 pães de queijo e em outra cesta 4 pães de queijo, juntando os pães de queijo numa única cesta e contando temos 12 pães de queijo. Assim, através da ideia de juntar e contar podemos afirmar que $8 + 4 = 12$ e observar que a ideia de classe, que neste caso é o pão de queijo, foi importante para proceder a adição.

3.1.1.2 Algoritmos para agrupamento da adição

Quando precisamos adicionar números maiores notamos a necessidade de desenvolver algoritmos mais eficientes e curtos para a adição. Por exemplo, efetuar a adição $673 + 748$ utilizando a ideia de sucessor é extremamente trabalhoso. Assim, usando a ideia de juntar e contar, bem como usando as classes e ordem de um número, vamos apresentar alguns algoritmos de adição no sistema decimal e em outras bases, bem como a adição nos sistemas romano e egípcio.

Inicialmente, vamos usar a ideia de juntar e contar fazendo a adição de números no sistema egípcio. Por exemplo, para calcular a adição dos números egípcios (tabela 2.3.2).

$$\text{||||| } \cap\cap\cap\cap\cap + \text{||||| } \cap\cap\cap\cap\cap \text{ } \mathcal{C}.$$

Juntando os símbolos iguais (de mesmo valor) temos,

$$\begin{array}{c} \text{|||||} \\ \cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap\cap \\ \mathcal{C}. \end{array}$$

Fazendo a contagem, usando que \cap vale dez $|$ e \mathcal{C} vale dez \cap , fazendo as trocas temos,

$$\begin{array}{c} \cap \text{ |||} \\ \mathcal{C} \cap \\ \mathcal{C}. \end{array}$$

Juntando os símbolos iguais, temos,

$$\begin{array}{c} \text{|||} \\ \cap\cap \end{array}$$

ℓℓ.

Reagrupando novamente, obtemos o resultado da adição dos números,

ℓℓnnlll.

Segundo PATERLINI (2017, p. 52), “A adição no sistema romano era usualmente implementada em ábacos seguindo essa mesma técnica de ajuntamento”. A adição exemplificada na Tabela 3.1 poderia muito bem ter sido feita por um antigo romano.

Tabela 3.1 – Soma no sistema de numeração romano.

NÚMERO ROMANO	
LIX	
DLII	
DLVlllllll	Soma provisória
DLVVI	Rearranjo
DCXI	Soma final

Nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 mostramos no ábaco os movimentos da adição de 59 com 552 cuja soma é 611.

Figura 3.1 – Parcela inicial 59.

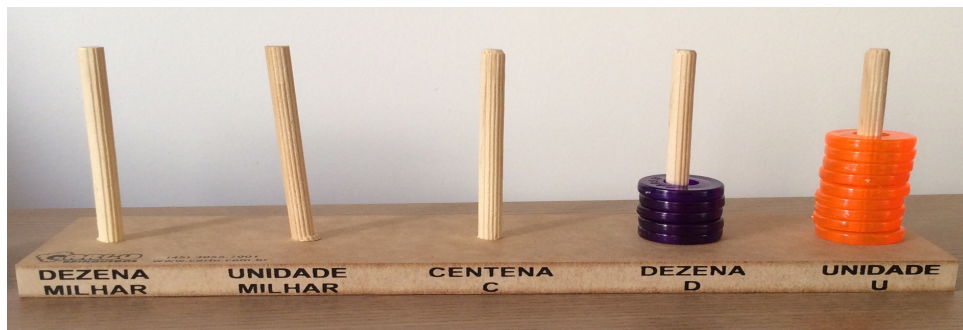


Figura 3.2 – Soma parcial 611.

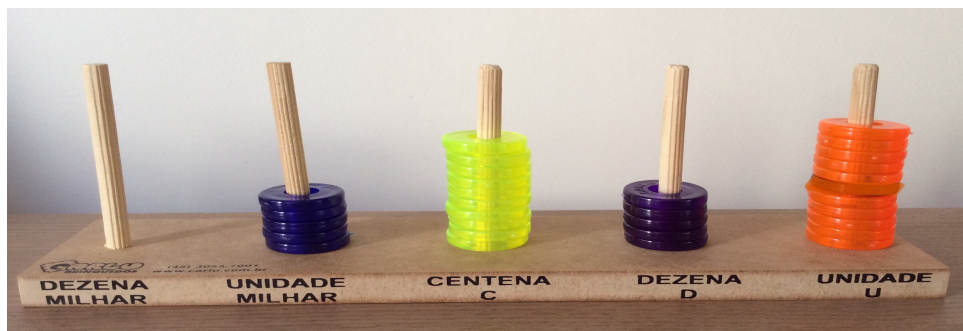
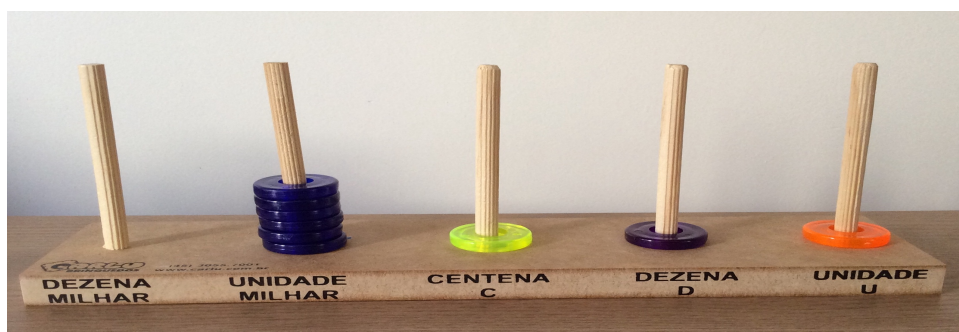


Figura 3.3 – Soma final 611.



A utilização contínua da adição nas mais variadas situações, demandou o desenvolvimento de algoritmos compactos e rápidos para somar números naturais. O ábaco era o instrumento mais facilitador para realizar as operações aritméticas, contudo com a evolução da matemática, foram sendo criados novos métodos mais eficientes que demandavam menor tempo para efetuar os cálculos. Mostramos a evolução destes métodos na base decimal e aplicamos alguns métodos em outras bases.

Iniciamos como o método atual, ressaltamos que notadamente a linguagem escrita foi extremamente importante na efetivação da nossa civilização, e se tornou o método de representação mais utilizado até o momento. A forma atual de calcular $673 + 748$ é

$$\begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 1421 \end{array}$$

O cálculo em etapas seria da seguinte forma: adicione 3 unidades com 8 unidades, formando um dezena e uma unidade, a esta dezena formada, junte a 7 dezenas mais 4 dezenas, formando uma centena e duas dezenas, a esta centena formada junte 6 centenas mais 7 centenas, formando uma milhar e quatro centenas, no total obtemos 1421 unidades.

Comparando esta sequência de cálculos, podemos perceber que ela repete os movimentos exercidos no ábaco. No palavreado cotidiano escolar, a unidade conduzida para a casa seguinte se fala “vai um”, algumas vezes desconsiderado pelo aluno o valor desse um.

Ao longo da história da matemática, tivemos outras formas de resolver este problema até chegar ao dispositivo atual.

Além do dispositivo usual, temos um método do povo Hindu, que consegue transpor para a linguagem escrita o que é feito no ábaco. Apresentamos este dispositivo no exemplo abaixo, no cálculo de $673 + 748$. No primeiro movimento, somamos $3 + 8 = 11$, ficando 1 na unidade e aumentamos de 7 dezenas para 8 dezenas. No segundo movimento, somamos $8 + 4 = 12$, ficando 2 na dezena e aumentamos de 6 centenas para 7 centenas. No terceiro movimento, somamos $7 + 7 = 14$, ficando 4 na centena e 1 na milhar.

$$\begin{array}{r} 673 \\ +748 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 681 \\ +74 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 721 \\ +7 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1421$$

Nas Figuras 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 mostramos no ábaco os movimentos da adição acima.

Figura 3.4 – Primeira parcela 673.

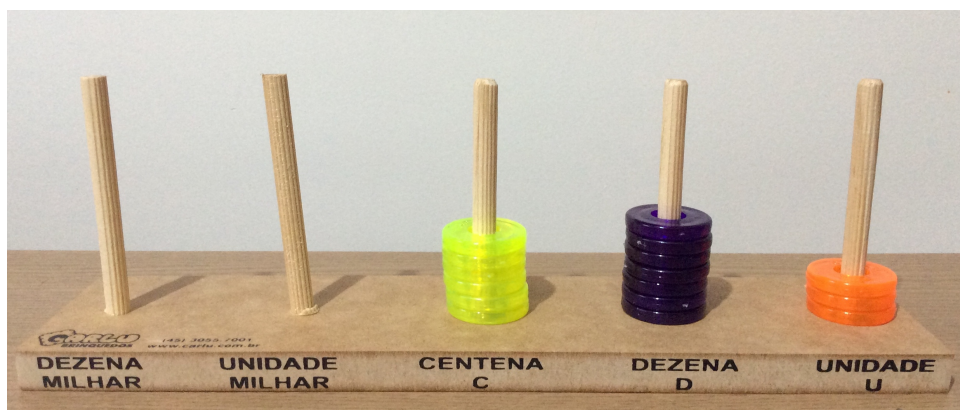


Figura 3.5 – Soma parcial 681.

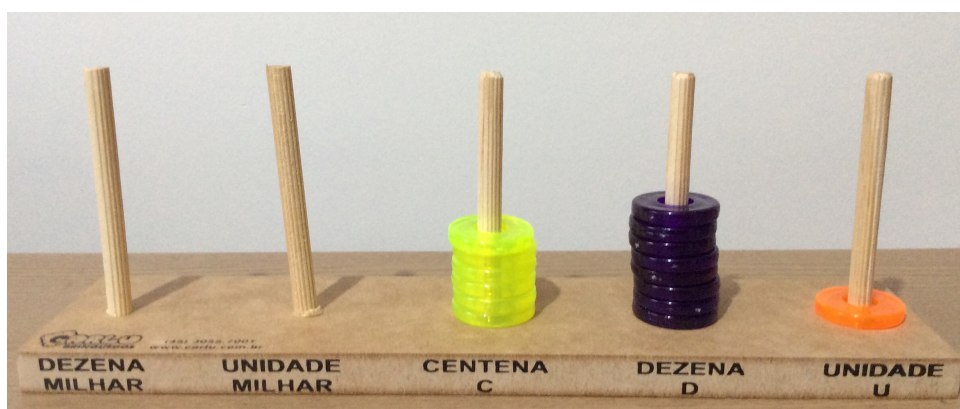


Figura 3.6 – Soma parcial 721.

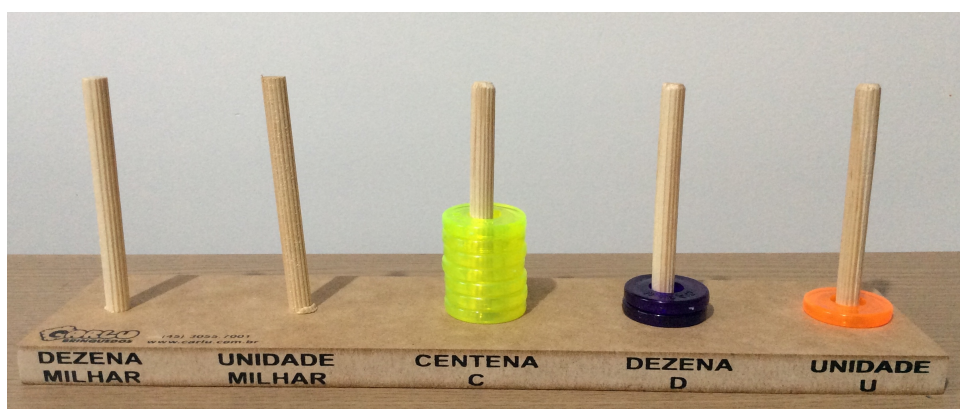
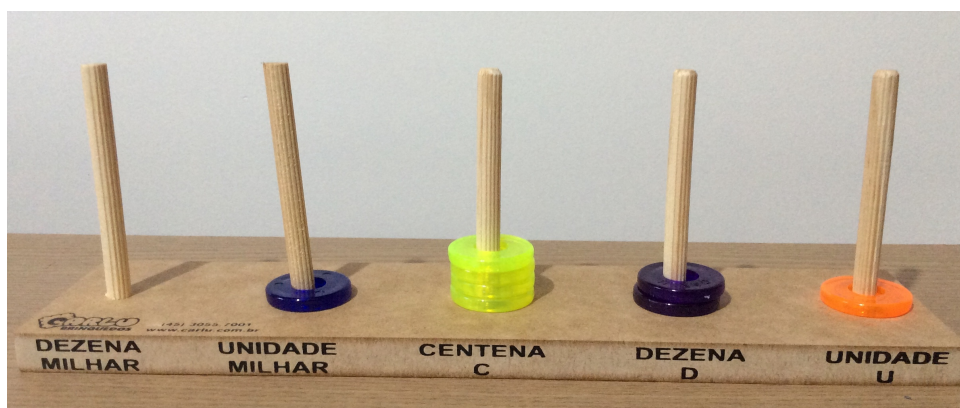


Figura 3.7 – Soma final 1421.



Devido o interesse histórico e pedagógico, vamos apresentar alguns algoritmos usados na Europa do Século XVI (veja (PATERLINI, 2017)). Esses algoritmos são variações do método usual, que tiveram origem ou não no ábaco.

Iniciamos com o método do povo Hindu. A soma inicia pela esquerda, e os dígitos vão sendo ajustados à medida que for necessário, colocados abaixo do resultado.

Somamos 6 centenas com 7 centenas, gerando 1 milhar e 3 centenas; depois somamos 7 dezenas com 4 dezenas, formando 1 centena e 1 unidade, gerando 4 centenas; e por fim juntamos 3 unidades com 8 unidades, formando 1 dezena e 1 unidade, e assim gerando 2 dezenas, obtendo deste modo que $673 + 748 = 1421$.

$$\begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 1311 \\ 42 \end{array}$$

Outro método que foi bastante utilizado é o chamado “versão longa”. Este algoritmo adia o transporte para a próxima ordem. O cálculo é feito da seguinte forma: Juntamos 3 unidades com 8 unidades formando 11 unidades, que são colocadas na primeira linha; juntamos 7 dezenas com 4 dezenas formando 11 dezenas, que são posicionadas na segunda linha, considerando a posição; juntamos 6 centenas com 7 centenas formando 13 centenas, que são colocadas na terceira linha, considerando a posição. Assim, as três linhas são somadas, obtendo que $673 + 748 = 1421$.

$$\begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 11 \\ 11 \\ + 13 \\ \hline 1421 \end{array}$$

Observei, no decorrer da minha carreira, que alguns alunos utilizam em partes este método nas atividades de sala de aula, em vez de subir a dezena o aluno escreve todo o resultado da soma das parcelas.

Os algoritmos de adição dos árabes tinham certa proximidade com os métodos do povo Hindu. Vejamos dois exemplos, no primeiro a adição é feita da direita para a esquerda. Os algarismos da operação “vai um número” são colocados na última linha.

Este primeiro exemplo difere do método tradicional apenas nos dígitos de reserva, ao invés de serem colocados em cima da primeira parcela, coloca-se abaixo da soma.

$$\begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 1421 \\ 11 \end{array}$$

No segundo exemplo, a adição é feita da esquerda para a direita igual ao método Hindu. O resultado 1311 colocado na primeira linha é temporário, abaixo dele são guardados os dígitos de reserva. Em seguida são somados, a última soma é feita da direita para a esquerda. Adiciona-se 6 centenas como 7 centenas, resultando em 13 centenas; 7 dezenas com 4 dezenas, resultando em uma centena que fica abaixo das três centenas e uma dezena; 3 unidade com 8 unidade gerando uma dezena que fica abaixo de uma dezena e uma unidade; e por fim, adiciona-se 1311 com 11 dezenas, resultando na soma 1421.

$$\begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 13 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 131 \\ 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 1311 \\ +11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 673 \\ + 748 \\ \hline 1311 \\ +11 \\ \hline 1421 \end{array}$$

Outro método utilizado, consiste no algoritmo da decomposição. As ordens dos números são decompostas e depois reagrupados novamente. Exemplificando, podemos reescrever a soma $673 + 748$ como:

$$\begin{aligned} 673 + 748 &= (600 + 70 + 3) + (700 + 40 + 8) \\ &= (600 + 700) + (70 + 40) + (3 + 8) \\ &= 1300 + 110 + 11 \\ &= (1300 + 100) + (10 + 10) + 1 \\ &= 1400 + 20 + 1 \\ &= 1421. \end{aligned}$$

Podemos usar este método, devido às propriedades comutativa e associativa da adição.

Outro método consiste na obtenção de um valor aproximado. Por exemplo, se um objeto custa 673 reais e outro 748 reais, desejamos saber se 1500 reais que temos na

carteira são suficientes para pagar esta compra. Neste exemplo, é aconselhável que se arredonde para cima, pois assim, não corre o risco do dinheiro não ser suficiente e passarmos constrangimentos na fila do caixa. Logo, considerando o arredondamento na ordem da centena, podemos arredondar os valores 673 e 748 para respectivamente 700 e 800, encontrando 1500 como resultado. No currículo nacional, o estudo é considerado pertinente. "Desenvolver procedimentos de cálculo — mental, escrito, exato, aproximado — pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados" (MEC, 1997, p. 47).

Os mesmos algoritmos e métodos do sistema decimal podem ser aproveitados para efetuar a adição em qualquer sistema posicional. Vamos dar um exemplo com o sistema posicional de base seis.

Entretanto, ao realizarmos cálculos de adição no sistema decimal empregamos automaticamente os conhecimentos que temos na memória, ou seja, a tabuada de adição. Portanto, para realizarmos o cálculo de adição na base seis seria mais conveniente termos em mãos a tábua de adição na base seis, vejamos na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Tabuada de adição da base 6

+	0	1	2	3	4	5	10
0	0	1	2	3	4	5	10
1	1	2	3	4	5	10	11
2	2	3	4	5	10	11	12
3	3	4	5	10	11	12	13
4	4	5	10	11	12	13	14
5	5	10	11	12	13	14	15
10	10	11	12	13	14	15	20

Abaixo, ilustramos uma adição no sistema de numeração posicional de base 6.

$$\begin{array}{r} (5\ 3\ 5)_6 \\ + (4\ 3\ 4)_6 \\ \hline (1\ 4\ 1\ 3)_6 \end{array}$$

A estrutura do algoritmo é precisamente o mesmo do algoritmo usual de adição do sistema decimal. A diferença acontece somente que a soma de dois algarismos quaisquer deve ser feita na base seis.

Nesta nova base temos menos algarismos e conseqüentemente uma nova maneira de contar, pois no sistema decimal contamos até 9 e o próximo número está em outra ordem, no sistema de numeração posicional de base 6, contamos até 5 e o próximo número muda de ordem. Deste modo, a sequência numérica de 0 até $(50)_6$ na base 6 é $(0)_6, (1)_6, (2)_6, (3)_6, (4)_6, (5)_6, (10)_6, (11)_6, (12)_6, (13)_6, (14)_6, (15)_6, (20)_6, (21)_6, (22)_6, (23)_6, (24)_6, (25)_6, (30)_6, (31)_6, (32)_6, (33)_6, (34)_6, (35)_6, (40)_6, (41)_6, (42)_6, (43)_6, (44)_6, (45)_6, (50)_6$.

Pela sequência acima, os sucessores de $(5)_6$, $(15)_6$, $(25)_6$, $(35)_6$ e $(45)_6$ passam a ser respectivamente $(10)_6$, $(20)_6$, $(30)_6$, $(40)_6$ e $(50)_6$. A ideia de adição permanece inalterada, pois para calcular $(5)_6 + (4)_6$ podemos proceder usando a ideia de sucessor, assim, o sucessor $(5)_6$ é $(5)_6 + (1)_6 = (10)_6$, de $(10)_6$ é $(10)_6 + (1)_6 = (11)_6$, de $(11)_6$ é $(11)_6 + (1)_6 = (12)_6$ e de $(12)_6$ é $(12)_6 + (1)_6 = (13)_6$. Logo $(5)_6 + (4)_6 = (13)_6$.

3.1.2 Subtração

A adição está pautada com a ideia de acrescentar e juntar, já a subtração com a ideia de retirar, completar e comparar.

3.1.2.1 Interpretações de subtração

Sabemos que o antecessor de um número natural a maior do que 1, é o número natural cujo sucessor é a , ou seja, o antecessor do número a é $a - 1$, e o sucessor do número $a - 1$ é a . Exemplificando, no sistema de numeração decimal o antecessor de 2 é 1, de 3 é 2, de 4 é 3, e assim sucessivamente.

O ato de “determinar o antecessor de um número natural” é inversa da ação “determinar o sucessor de um número natural”, por isto podemos considerar a subtração como sendo derivada da adição.

O antecessor do número a é indicado por $a - 1$ (lê-se: a menos um). Assim, o antecessor de um número é encontrado retirando (subtraindo) 1 desse número. Deste modo, dados dois números naturais a e b , b maior do que a , podemos subtrair a de b , determinando os antecessores. Assim, partindo de b , subtraindo o número 1, obtemos $b - 1$, o antecessor de b ; subtraindo o número 1 do número $b - 1$, obtemos $b - 2$, o antecessor de $b - 1$. Assim, sucessivamente, vamos obtendo os antecessores dos números até chegar ao número $b - a$.

Como ilustração vamos calcular a subtração $8 - 4$. Como definido acima, devemos calcular os antecessores de 8 até obter o número $8 - 4$.

$$\begin{aligned} 8 - 1 &= 7 && \text{(antecessor de 8)} \\ 8 - 2 &= 7 - 1 = 6 && \text{(antecessor de 7)} \\ 8 - 3 &= 6 - 1 = 5 && \text{(antecessor de 6)} \\ 8 - 4 &= 5 - 1 = 4 && \text{(antecessor de 5).} \end{aligned}$$

Portanto, $8 - 4 = 4$ no sistema decimal.

De maneira geral, o resultado de subtrair o número a do número b é indicado por $b - a$ (lê-se: b menos a), e é denominado diferença entre b e a . Ressaltamos novamente que a subtração é inversa da adição, isto equivale afirmar que se subtrairmos a de b e a seguir, ao resultado, adicionarmos a , obtemos novamente b , ou seja: $(b - a) + a = b$. Da mesma forma, se adicionarmos a a b , e da soma subtrairmos a , o resultado é b , ou seja, $(b + a) - a = b$.

Outra interpretação de subtração consiste na situação de completar. Sabendo que em uma cesta há 15 broas e outra com 6 broas, pretendemos saber quantas broas precisamos adicionar na segunda cesta para que a quantidade de broas fique igual à da primeira.

O método utilizado por várias pessoas é resolvê-lo usando os dedos das mãos. Para calcular $15 - 6$ contam “sete” e abaixam um dedo, “oito” e abaixam outro dedo, “nove” e abaixam outro dedo, e assim sucessivamente, até atingir o quinze. Os dedos abaixados totalizam nove. Assim, $15 - 6 = 9$.

Dessa forma, dados números naturais a e b tais que b tem mais unidades do que a , a diferença $b - a$ é o número natural que somado com a resulta b , ou seja, temos outra vez:

$$a + (b - a) = b.$$

A terceira interpretação de subtração é a ideia de comparar. Neste caso ele merece uma atenção especial. A comparação entre duas quantidades pode ser definida de diversas formas. Por exemplo, a comparação entre 8 e 2 pode ser: “8 é o quádruplo de 2”, “a razão entre 8 e 2 é 4”, e a comparação que nos interessa neste momento é “8 tem 6 unidades a mais que do 2” ou “2 tem 6 unidades a menos do que 8”.

Ressaltamos que, da mesma forma que a adição, para realizar a subtração, é suficiente apenas a habilidade matemática de saber contar, no entanto do mesmo modo que a adição, a subtração apresenta a mesma dificuldade de resolver cálculos de grandes números, daí a necessidade de aprender algoritmos de subtração.

3.1.2.2 Algoritmos para a subtração

Segundo [PATERLINI \(2017, p. 59\)](#), “Os algoritmos para implementação da subtração em sistemas posicionais tiveram sua gênese na manipulação do ábaco”.

Para realizar a subtração de dois números naturais em um ábaco é satisfatório desempenhar os movimentos opostos àqueles que são feitos na adição.

Qualquer método que permite calcular a diferença de dois ou mais números em um sistema de numeração é chamado de algoritmo da subtração.

As três interpretações de subtração: retirar, completar e comparar compõem a aplicação imediata da operação de subtração, consiste nos algoritmos mais simples a serem usados.

Abordamos estes significados nos três exemplos a seguir. No primeiro abordamos a ideia de retirar.

Ganhei um pacote com 57 bombons. Eu e meus colegas comemos 23. Quantos bombons ainda têm no pacote?

Na linguagem escrita, a solução segue os seguintes movimentos:

$$\begin{array}{r} 57 \\ - 23 \\ \hline \end{array} \quad (\text{retira 3 unidade de 7}) \quad \begin{array}{r} 57 \\ - 23 \\ \hline 4 \end{array} \quad (\text{retira 2 dezenas de 5}) \quad \begin{array}{r} 57 \\ - 23 \\ \hline 34 \end{array}$$

A segunda interpretação que abordamos é a ideia de completar. Uma empresa de vendas de flores plantará flores em 42 vasos. Dezoito vasos de flores já foram plantados. Em quantos vasos ainda faltam plantar?

Neste exemplo, fazer $42 - 18$ é mais expressivo, pois surge uma condição de empréstimo, ou melhor dizendo um reagrupamento de ordens. Embora 42 seja um número maior do que 18, na casa da unidade ocorre o contrário.

Na linguagem escrita esses movimentos podem ser indicados por:

$$\begin{array}{r} 42 \\ - 18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4^1 2 \\ - 18 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \\ - 18 \\ \hline 24. \end{array}$$

A última interpretação é o de comparar. Ana tem 42 canetinhas em seu estojo. Clara tem 18. Quantas canetinhas Clara têm a mais que Ana?

Uma variação do dispositivo do segundo exemplo utiliza o expediente da compensação, ou seja, a dezena do dezoito é acrescido de uma dezena.

$$\begin{array}{r} 42 \\ - 18 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 4^1 2 \\ - 28 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 42 \\ - 28 \\ \hline 24. \end{array}$$

Notamos que as subtrações resolvidas em uma coluna, como $12 - 8 = 4$, podem ser calculadas “contando-se nos dedos”. Segundo [PATERLINI \(2017, p. 60\)](#): “Esse é o método da complementação, às vezes também denominado método austríaco”.

Na operação de subtração se emprega a seguinte terminologia:

$$\begin{array}{r} 42 \\ - 18 \\ \hline 24 \end{array} \quad \begin{array}{l} 42 \text{ minuendo} \\ - 18 \text{ subtraendo} \\ 24 \text{ resto ou diferença.} \end{array}$$

Nos dois exemplos a seguir, vamos mostrar que a subtração, semelhante à adição, também pode ser resolvida da esquerda para a direita.

$$\begin{array}{r} 821 \\ - 385 \\ \hline 546 \\ 43 \end{array} \quad \begin{array}{r} 43 \\ 546 \\ \hline 821 \\ - 385 \end{array}$$

No primeiro algoritmo, tem-se os seguintes movimentos: $8 - 3 = 5$ centenas; $12 - 8 = 4$ dezenas (12 dezenas é formado pelo empréstimo de uma centena); $11 - 5 = 6$ unidades

(11 unidades é formado pelo empréstimo de uma dezena); e por fim faz-se $5-1 = 4$ centenas e $4 - 1 = 3$ dezenas, assim $821-385 = 436$. No segundo algoritmo, a diferença é colocada por cima do minuendo, um velho costume do povo Hindu e segue o mesmo raciocínio do primeiro.

A seguir, vamos mostrar, através de um exemplo, uma outra maneira diferente utilizada pelos Hindus, onde o minuendo é escrito abaixo do subtraendo e os empréstimos colocados acima do subtraendo.

$$\begin{array}{r} 11 \\ -385 \\ \hline 821 \\ 436 \end{array}$$

O método de subtração a seguir, presente em alguns livros didáticos, evita o uso do empréstimo. Como 4 unidades é menor que 7 unidades, acrescenta-se 3 unidades ao 64 e ao 27, assim evitando o uso de empréstimo.

$$\begin{array}{r} 64 \quad (+3) \\ -27 \quad (+3) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 67 \\ -30 \\ \hline 37 \end{array}$$

Seguindo a mesma ideia do exemplo anterior, calculamos a diferença de 821 por 385, ele exigiu o acréscimo de 5 unidades e 10 dezenas evitando o empréstimo de uma dezena e uma centena aos algarismos 1 e 2 respectivamente do número 821.

$$\begin{array}{r} 821 \quad (+5) \\ -385 \quad (+5) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 826 \quad (+10) \\ -390 \quad (+10) \\ \hline 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 836 \\ -400 \\ \hline 436 \end{array}$$

O próximo método era muito utilizado no comércio, atualmente os computadores já provê o valor do troco. Ele admite fazer subtrações empregando apenas adições. Notemos que $821 - 385$ é o número que, adicionado a 436, resultam 821. Portanto partindo de 385, o método consiste em ir adicionando valores até que alcance o resultado 821, a soma destas quantidades adicionadas conforme explicado, é a diferença entre 821 e 385.

$$\begin{array}{r} 385 + 15 = 400 \\ 400 + 400 = 800 \\ 800 + 21 = 821 \\ \hline 436 \end{array}$$

Logo, $821 - 385 = 436$.

Outra método para calcular $821 - 385$ é ir retirando valores de 821 até obtermos 385, a soma dessas quantidades subtraídas é a diferença entre 821 e 385.

$$\begin{array}{r}
 821 - 1 = 820 \\
 820 - 20 = 800 \\
 800 - 400 = 400 \\
 400 - 15 = 385 \\
 \hline
 436.
 \end{array}$$

Logo $821 - 385 = 436$.

Assim, como fizemos em adição, podemos naturalmente fazer cálculos de subtração em um sistema posicional em outra base com o algoritmo habitual. Por exemplo, podemos calcular uma subtração usando tábua de adição na base 7, vejamos na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Tabuada de adição na base 7.

+	0	1	2	3	4	5	6	10
0	0	1	2	3	4	5	6	10
1	1	2	3	4	5	6	10	11
2	2	3	4	5	6	10	11	12
3	3	4	5	6	10	11	12	13
4	4	5	6	10	11	12	13	14
5	5	6	10	11	12	13	14	15
6	6	10	11	12	13	14	15	16
10	10	11	12	13	14	15	16	20

Abaixo, ilustramos uma subtração no sistema de numeração posicional de base 7.

$$\begin{array}{r}
 (645)_7 \\
 - (464)_7 \\
 \hline
 (151)_7.
 \end{array}$$

A forma de usar a tábua de adição, para proceder a subtração acima, é a seguinte: ao calcular $(5)_7 - (4)_7$, devemos procurar na tabela o número da base 7 que somado com $(4)_7$ seja igual a $(5)_7$, neste caso $(1)_7$; ao calcular $(4)_7 - (6)_7$, tomando empréstimo de uma dezena na base 7, temos que fazer o cálculo $(14)_7 - (6)_7$, assim, procuramos na tabela o número da base 7 que somado com $(6)_7$ seja igual a $(14)_7$, neste caso $(5)_7$; ao calcular $(5)_7 - (4)_7$, devemos procurar na tabela o número da base 7 que somado com $(4)_7$ seja igual a $(5)_7$, neste caso $(1)_7$.

3.1.3 Multiplicação

O procedimento egípcio talvez explique a origem da palavra multiplicar, na língua latina multi quer dizer vários e plicare significa dobrar. Portanto, multiplicar é dobrar várias vezes.

3.1.3.1 Interpretações de multiplicação

Para o MEC (1997, p. 71, 72) a multiplicação no ensino fundamental tem como ênfase quatro tipos principais de situações: adição de parcelas iguais, arranjo retangular, cálculo de possibilidade e comparação.

A primeira situação, adição de parcelas iguais, pode ser mostrado no contexto em que Safira tem 6 caixinhas de joias, com 10 joias em cada uma. Quantas joias tem no total?

A segunda situação, arranjo retangular, pode ser vista no problema, onde em uma sala de aula com 5 filas e cada fila temos 7 carteiras cada uma. Quantas carteiras há nessa sala de aula?

A terceira situação, cálculo de possibilidade, consiste em que Elizabeth deseja passear no parque, e precisa escolher entre 5 saias e 7 blusinhas. De quantas maneiras diferentes Elizabeth pode vestir usando uma dessas saias e uma dessas blusinhas?

O quarto e último exemplo temos a multiplicação visto pela situação comparação. Joaquim tem 5 anos de idade e seu pai é 6 vezes mais velho. Qual a idade de seu pai?

Enfocamos a primeira situação no início da seção, para desenvolver inicialmente a construção do algoritmo tradicional.

3.1.3.2 Algoritmos para a multiplicação

Uma das maneiras de se resolver a multiplicação de dois números consiste na adição de parcelas iguais. Por exemplo, para calcular 6×13 , calculamos $13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = 78$. A dificuldade de calcular multiplicação de números maiores, por exemplo, 23×252 , torna o cálculo da multiplicação trabalhosa e demorada. Assim, para números naturais quaisquer, torna-se necessário o desenvolvimento de algoritmos que resolva de maneira compacta e rápida o cálculo da multiplicação.

Uma forma de fazer a multiplicação 23×252 sem a necessidade de somar 23 vezes o 252 é fazer o seguinte: calculando $252 + 252 = 504$, obtemos que $2 \times 252 = 504$; calculando $504 + 504 = 1008$, obtemos que $4 \times 252 = 1008$; calculando $1008 + 1008 = 2016$, obtemos que $8 \times 252 = 2016$; calculando $2016 + 2016 = 4032$, obtemos que $16 \times 252 = 4032$; usando o fato que $23 = 16 + 4 + 2 + 1$, temos que $23 \times 252 = 16 \times 252 + 4 \times 252 + 2 \times 252 + 1 \times 252 = 4032 + 1008 + 504 + 252 = 5796$.

Os cálculos ficaram mais compactos, mas ainda com a necessidade de vários cálculos separados. O algoritmo usa a duplicação, método criado pelos antigos egípcios.

Ao longo da história, foi observando a necessidade de implantar um método mais eficiente para multiplicar um número natural qualquer por um número de um dígito. Por exemplo, necessitava-se criar um método mais compacto para efetuar o cálculo

$$252 + 252 + 252 + 252 + 252 + 252.$$

Primeiramente, notou-se que não havia necessidade da repetição do número 252. Basta escrevê-lo apenas uma única vez, e, uma forma pensada para manter a multiplicação por 6 foi colocá-lo embaixo do 252, conforme ilustração abaixo.

$$\begin{array}{r} 252 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$$

Em seguida, implementamos o cálculo como se estivéssemos fazendo a soma acima, ou seja, tomamos a unidade 2 de 252 e calculamos $6 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$. Escrevemos 2 na primeira coluna, reservamos 1 na coluna seguinte. Repetimos o mesmo processo com a dezena 5 e a centena 2. Logo, obtemos o produto $6 \times 252 = 1512$.

$$\begin{array}{r} {}^3 2 \ 15 \ 2 \\ \times 6 \\ \hline 1 \ 5 \ 1 \ 2. \end{array}$$

Utilizando a tabuada, podemos fazer o cálculo de 23×252 da seguinte forma: Calculamos: $3 \times 2 = 6$ unidades; 3×5 dezenas = 15 dezenas (uma centena e cinco dezenas) transposta a centena para à sua ordem; 3×2 centenas = 6 centenas, com a centena transportada obtemos 7 centenas, encontrando o número 756; repetimos o mesmo processo com a dezena 2 e obtemos o número 5040; e por adicionamos 756 com 5040, encontrando 5796. Abaixo ilustramos este método, que é usado atualmente.

$$\begin{array}{r} 252 \\ \times 23 \\ \hline 756 \\ 5040 \\ \hline 5796. \end{array}$$

Uma outra opção para o cálculo da multiplicação é usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

$$\begin{aligned} 23 \times 252 &= (2 \times 10 + 3) \times 252 \\ &= 2 \times 252 \times 10 + 3 \times 252 \\ &= 5040 + 756 \\ &= 5796. \end{aligned}$$

O mesmo exemplo poderia ser feita da seguinte maneira.

$$\begin{array}{r}
 252 \\
 \times 23 \\
 \hline
 756 \\
 + 504 \\
 \hline
 5796.
 \end{array}$$

No exemplo seguinte, o método exige- constantemente o conhecimento das ordens do sistema de numeração decimal. Neste método, cada produto é colocado em uma linha respeitando a posição da ordem e fazemos os seguintes movimentos: 3 unidades \times 2 unidades = 6 unidades; 3 unidades \times 5 dezenas = 15 dezenas; 3 unidades \times 2 dezenas = 6 centenas; 2 dezenas \times 2 unidades = 4 dezenas que ficam dispostas na mesma posição das 15 dezenas; 2 dezenas \times 5 dezenas = 10 centenas; e por fim 2 dezenas \times 2 centenas = 4 milhares.

$$\begin{array}{r}
 252 \\
 \times 23 \\
 \hline
 06 \\
 15 \\
 06 \\
 04 \\
 10 \\
 + 4 \\
 \hline
 5796.
 \end{array}$$

Vale salientar que este método já usufrui do uso da tabuada de multiplicação.

Apresentamos outro método muito eficiente, compacto e rápido, chamado Gelósia. De acordo com EVES (2004, p. 323) talvez tenha surgido na Índia, pois aparece num comentário sobre o Lilāvati em outros trabalhos hindus e observa que da Índia sua trajetória seguiu por trabalhos chineses, árabes e persas. O nome é devido à semelhança com as persianas venezianas. Há uma grande semelhança com o método atual. A simplicidade de sua aplicação poderia tê-lo mantido em uso até hoje, não fora o imperativo de desenhar uma rede de segmentos de reta.

O método trata-se de um diagrama em rede em que os resultados das multiplicações são colocados dentro de triângulos, no qual os produtos são somados diagonalmente. Cada célula se divide em dois triângulos por uma diagonal conforme a Tabela 3.4. Com isto, não se faz necessário nenhum transporte na multiplicação, somente na adição das diagonais.

Escreve-se um dos fatores logo acima da grade horizontal conforme a Tabela 3.5, dispondo cada algarismo sobre um quadrado. Em seguida, escreve-se os algarismos do segundo fator ao lado direito verticalmente, de modo que cada algarismo fique ao lado de um quadrado.

O resultado desta multiplicação é 7452. Multiplicamos cada par de números conforme a Tabela 3.6, escrevendo o produto em cada célula a_{ij} , sendo cada um dos alga-

Tabela 3.4 – Grade de Gelósia.

×				

Tabela 3.5 – Grade de Gelósia.

×	3	2	4	
				2
				3

rismos posicionados em um dos lados da diagonal, e finalmente adicionamos as diagonais.

Tabela 3.6 – Grade de Gelósia.

×	3	2	4	
0	0	0	0	2
7	0	0	1	3
	4	5	2	

Exemplificamos o método com a multiplicação dos números 252 e 23 e em seguida 456 e 425. Inicialmente, desenhamos uma grade 3×2 , já que os fatores em questão possuem 3 e 2 algarismos cada, respectivamente. Dividimos cada quadrado por uma diagonal secundária.

Escrevemos um dos fatores logo acima da grade horizontalmente, dispondo cada algarismo sobre um quadrado. Em seguida, escrevemos os algarismos do segundo fator ao lado direito verticalmente, de modo que cada algarismo fique ao lado de um quadrado. Vejam as tabelas 3.7, 3.8 e 3.9 de cálculos a seguir mostrando o passo a passo do método Gelósia.

Tabela 3.7 – Grade de Gelósia.

×	2	5	2	
				2
				3

Multiplicamos cada par de números, escrevendo o produto em cada célula a_{ij} , sendo cada um dos algarismos posicionados em um dos lados da diagonal.

Tabela 3.8 – Grade de Gelósia.

×	2	5	2	
	0	1	0	2
	4	0	4	
	0	1	0	3
	6	5	6	

Agora, somamos todos os números das diagonais começando da direita para a esquerda e escrevemos o resultado na parte inferior e esquerda da grade.

Tabela 3.9 – Grade de Gelósia.

×	2	5	2	
0	0	1	0	2
	4	0	4	
5	0	1	0	3
	6	5	6	
	7	9	6	

Encontrando assim o produto: $23 \times 252 = 5796$

Vamos calcular 456×425 , pois neste exemplo surge a necessidade do “vai um número” na soma dos produtos. Veja a Tabela 3.10

Tabela 3.10 – Grade de Gelósia.

×	4	5	6	
1	1	2	2	4
	6	0	4	
9	0	1	1	2
	8	0	2	
3	2	2	3	5
	0	5	0	
	8	0	0	

Encontramos o produto: $456 \times 425 = 193800$.

Cada multiplicação corresponde a uma célula da tabela, ou seja, o método é adequado para qualquer multiplicação que se queira efetuar, pois os algarismos correspondentes a cada ordem ficarão em uma célula, conforme o exemplo acima.

O algoritmo de multiplicação atual e o Método Gelósia usada no sistema decimal é apropriado para qualquer sistema posicional. Vejamos dois exemplos na base cinco. Como usamos na base decimal a tábua de multiplicação, na Tabela 3.11, apresentamos a tábua de multiplicação na base 5.

Tabela 3.11 – Tabuada de multiplicação na base 5.

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

No primeiro exemplo utilizamos o método de multiplicação tradicional. Calculamos: $(4)_5 \times (4)_5 = (31)_5$ e transportamos $(3)_5$ para a próxima ordem; $(4)_5 \times (1)_5 = (4)_5$ adicionado com $(3)_5$, resulta em $(12)_5$ e transportamos $(1)_5$ para a próxima ordem; $(4)_5 \times (2)_5 = (13)_5$ adicionado com $(1)_5$, resulta em $(14)_5$, transportamos $(1)_5$ para a próxima ordem; e por fim $(4)_5 \times (3)_5 = (22)_5$ adicionado com $(1)_5$, resulta em $(23)_5$.

$$\begin{array}{r} ({}^13 \ {}^12 \ {}^31 \ 4)_5 \\ \times 4 \\ \hline (2 \ 3 \ 4 \ 2 \ 1)_5 \end{array}$$

Logo o produto de $(3214)_5 \times 4_5 = (23421)_5$.

Agora, na Tabela 3.12 fazemos o produto $(341)_5 \times (23)_5$ pelo método Gelósia e por questão de estética não vamos usar a notação $(n)_5$ para lembra da base 5, mas os números na tabela abaixo estão na base 5.

Tabela 3.12 – Grade de Gelósia.

×	3	4	1	
1	1 1	1 3	0 2	2
4	1 4	2 2	0 3	3
	4	4	3	

Logo o produto de $(341)_5 \times (23)_5 = (14443)_5$.

3.1.4 Divisão

A divisão é, entre as operações básicas, a mais complexa e a que determina maiores desafios para o ensino e para a aprendizagem. Segundo [PATERLINI \(2017, p. 73\)](#), foi considerada, até o século XV, uma operação de difícil uso.

3.1.4.1 Interpretações de divisão

A divisão de números naturais pode ser interpretada como repartir e comparar. A interpretação repartir ocorre quando conhecendo uma quantidade de objetos, almejamos partilhar eles em grupos, sendo que cada grupo tenha a mesma quantidade de

objetos. Neste caso, conhecemos o número de grupos e desejamos saber o número máximo de objetos que poderão compor cada grupo.

Como Ilustração da interpretação acima apresentamos o seguinte problema: dividir 32 maçãs para 9 crianças de modo que todos recebam a mesma quantidade de maçãs inteiras. Desse modo desejamos dividir 32 maçãs em nove grupos, e necessitamos saber quantas maçãs poderá ter cada grupo, sendo essa quantidade a maior possível. Uma tática básica é entregar uma maçã para cada criança. Ficamos com $32 - 9 = 23$ maçãs. Entregamos mais uma maçã para cada criança, e ficamos com $23 - 9 = 14$ maçãs. Repetimos entregando mais uma maçã para cada uma, e ficamos com $14 - 9 = 5$. Com as cinco maçãs que sobraram não é possível repartir mais uma vez, de modo que a divisão termina. Dessa forma dividimos 32 em 9 grupos com 3 maçãs cada grupo, e sobram 5 maçãs.

A interpretação da divisão como comparação acontece quando temos dois números e queremos saber quantas vezes, no máximo, um número “cabe” no outro. Por exemplo, dado um conjunto de objetos, almejamos saber quantos grupos podemos formar com uma mesma quantidade de objetos.

Como Ilustração da interpretação acima apresentamos o seguinte problema: temos 32 maçãs e almejamos saber quantas crianças poderão receber 3 maçãs cada uma. Uma estratégia consiste em multiplicar 3 por 1, 2, 3, 4, ..., até atingir o número máximo de maçãs que não ultrapasse 32. Contemos assim: 1 grupo, $1 \times 3 = 3$ maçãs; dois grupos, $2 \times 3 = 6$ maçãs, e assim sucessivamente, prosseguimos até chegar a dez grupos, $10 \times 3 = 30$ maçãs. Cessamos, pois $32 - 30 = 2$, e 2 não é suficiente para formar outro grupo. Portanto 3 cabe 10 vezes (inteiras) em 32, e sobra 2.

Considere a quantidade de elementos a , $a > 0$ um número natural, suponhamos que a foi dividido em q grupos com b elementos cada um, e que restaram r elementos. Essa situação é representada pela equação fundamental da divisão:

$$a = b \cdot q + r. \quad (3.1)$$

Um caso particular ocorre quando o resto é zero. Neste caso afirmamos que a divisão é exata é a equação fundamental é dada por:

$$a = b \cdot q. \quad (3.2)$$

Nas relações (3.1) e (3.2), q é denominado o quociente e r o resto da divisão de a por b .

Dividir um número natural a pôr um número natural b exprime achar um quociente q tal que $a = bq$ ou o maior quociente q e o resto r tais que $a = bq + r$. Neste caso temos $r < b$. Em geral, consideramos que $0 < b \leq a$, pois caso $b > a$ temos que $q = 0$ e $r = a$, que no contexto de divisão de números naturais é um caso sem aplicações práticas.

3.1.4.2 Algoritmos para a divisão

Através de alguns exemplos vamos mostrar como o algoritmo usual de divisão, o qual é ensinado em nossas escolas, atingiu seu formato atual.

Iniciamos dividindo 43 por 10 por meio do método de subtrações sucessivas, assim obtemos:

$$\begin{aligned} 43 - 10 &= 33 \\ 33 - 10 &= 23 \\ 23 - 10 &= 13 \\ 13 - 10 &= 3. \end{aligned}$$

Como foram feitas quatro subtrações, temos quatro como quociente, restando três. Assim, $43 = 10 \times 4 + 3$.

No entanto, este método de subtrações sucessivas não seria nada adequado para dividir números maiores. Dessa forma, necessitamos encontrar uma forma mais compacta e rápida. O algoritmo a seguir, usado para dividir 43 por 10, utiliza o mesmo método de subtrações sucessivas, mas segue um formato mais apropriado. Podemos reduzir os cálculos observando que $10 \times 4 = 40$, para 43, sobram 3. Como $3 < 10$, finalizamos o cálculo. Na Tabela 3.13 apresentamos os dois métodos, um ao lado do outro.

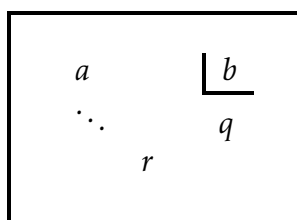
Tabela 3.13 – Métodos de divisão.

Subtrações sucessivas	Método usual
$\begin{array}{r} 43 \\ -10 \\ \hline 33 \\ -10 \\ \hline 23 \\ -10 \\ \hline 13 \\ -10 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \\ -40 \\ \hline 3 \end{array}$
$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 4 \end{array}$

A terminologia adotada na maioria dos livros para o algoritmo da divisão é mostrada na Tabela 3.14 ou na equação $a = b \cdot q + r$, onde os termos são conhecidos como:

- a é o dividendo;
- b é o divisor;
- q é o quociente;
- r é o resto.

Tabela 3.14 – Terminologia da divisão.



A seguir, mostraremos dois métodos de divisão diferentes do modelo atual. O primeiro, semelhante ao da multiplicação, é o método da duplicação para a divisão que era utilizado pelos egípcios. Vamos ilustrar o método com dois exemplos, onde no primeiro o resto é zero e no segundo o resto é diferente de zero. No cálculo da divisão de 184 por 8 procedemos da seguinte forma: criamos uma tabela com duas colunas, onde na primeira linha da primeira coluna colocamos o número 1 e na primeira linha da segunda coluna colocamos o divisor 8. Dobramos sucessivamente os números das duas colunas, até que a soma da segunda coluna, coluna do divisor 8, seja igual ou mais próximo possível do dividendo 184. Veja a Tabela 3.15.

Tabela 3.15 – Método de divisão Egípcio.

1	8
2	16
4	32
8	64
16	128

Escolhemos, na coluna da direita, números que somados resulta em 184.

$$128 + 32 + 16 + 8 = 184.$$

Portanto, escolhendo na coluna da esquerda os valores correspondentes aos escolhidos na coluna da direita, fazendo a soma destes números temos que o resultado da divisão $184 \div 8$ é 23.

$$16 + 4 + 2 + 1 = 23.$$

Utilizando da tabela, podemos escrever o método da duplicação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 184 \div 8 &= (128 + 32 + 16 + 8) \div 8 \\
 &= (128 \div 8) + (32 \div 8) + (16 \div 8) + (8 \div 8) \\
 &= 16 + 4 + 2 + 1 \\
 &= 23.
 \end{aligned}$$

Na Tabela 3.16, calculamos a divisão de 184 por 7, repetindo o processo de duplicação num exemplo em que o resto é diferente de zero.

Tabela 3.16 – Método de divisão Egípcio.

1	7
2	14
4	28
8	56
16	112

Escolhemos, na segunda coluna, os números que somados resultam em 184 ou mais próximo possível que não ultrapasse 184. Assim, temos os números:

$$112 + 56 + 14 = 182.$$

Portanto, escolhendo na coluna da esquerda os valores correspondentes aos escolhidos na coluna da direita, fazendo a soma destes números temos que o resultado da divisão $184 \div 7$ é 26 e o resto é 2, pois $184 - 182 = 2$.

$$16 + 8 + 2 = 26.$$

Este método de calcular divisão elimina a necessidade de utilização de uma tábua de multiplicação e esteve associado ao uso do ábaco.

“O processo egípcio de divisão não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda tanto ao ábaco que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois” (EVES, 2004, p. 73).

Para a divisão de números grandes, a aplicação do método egípcio torna-se muito longa e exige habilidade para a escolha dos números que satisfaçam a soma desejada. Deste modo, apresentamos um segundo algoritmo chamado de “Método da Costura”, que consiste na modificação dos algarismos do dividendo em múltiplos do divisor, onde cada múltiplo será representado por um ou dois algarismos. Esse método é válido para divisões não exatas e exatas.

Vamos ilustrar o método com dois exemplos no sistema decimal, onde no primeiro o resto é zero e no segundo o resto é diferente de zero e um exemplo no sistema quinário.

No primeiro exemplo, vamos dividir 3454316 por 4. Neste caso o resto é zero.

1º passo: calcule os múltiplos do divisor, nesse caso o número 4.

$$4 \times 1 = 4, 4 \times 2 = 8, 4 \times 3 = 12, 4 \times 4 = 16, \dots$$

2º passo: separe de um em um ou de dois em dois algarismos iniciando da esquerda para direita e faça a seguinte pergunta:

- Como o número 3 é menor que o divisor 4, verificamos na tabuada do número 4, qual o múltiplo de 4 que é igual a 34 ou é o mais próximo possível, sem ultrapassar, de 34?

- A resposta será 32. Coloca-o abaixo do número 34 e o resto 2 coloca do lado do próximo, no caso o número 5, formando o número 25.
- Agora, repetindo a pergunta para o 25, a resposta é o 24. Faz a devida subtração e coloca o resto 1 ao lado do 4, próximo número. Repetimos o processo até que não temos mais números a serem acrescentados.

Abaixo, apresentamos a sequência dos passos acima.

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (34 = 4 \times 8 + 2) \\ 3\ 2\ 2\ 5\ 4\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (25 = 4 \times 6 + 1) \\ 32\ 24\ 1\ 4\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (14 = 4 \times 3 + 2) \\ 32\ 24\ 12\ 2\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (23 = 4 \times 5 + 3) \\ 32\ 24\ 12\ 20\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (31 = 4 \times 7 + 3) \\ 32\ 24\ 12\ 20\ 28\ 3\ 6 \div 4 \quad (36 = 4 \times 9 + 0) \\ 32\ 24\ 12\ 20\ 28\ 36 \div 4 \quad (\text{resto é } 0) \end{array}$$

3º passo: Divida os números 32, 24, 12, 20, 28 e 36 pelo número 4 e coloque o resultado abaixo de cada número correspondente.

$$\begin{array}{cccccc} 32 & 24 & 12 & 20 & 28 & 36 \\ 8 & 6 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

Logo, $3454316 \div 4 = 863579$.

Vamos calcular, seguindo os passos acima, a divisão 3454316 por 11. Neste caso, o resto é diferente de zero.

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (34 = 11 \times 3 + 1) \\ 33\ 1\ 5\ 4\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (15 = 11 \times 1 + 4) \\ 33\ 11\ 4\ 4\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (44 = 11 \times 4 + 0) \\ 33\ 11\ 44\ 0\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (03 = 11 \times 0 + 3) \\ 33\ 11\ 44\ 03\ 3\ 1\ 6 \div 4 \quad (31 = 11 \times 2 + 9) \\ 33\ 11\ 44\ 03\ 22\ 9\ 6 \div 4 \quad (96 = 11 \times 8 + 8) \\ 33\ 11\ 44\ 03\ 22\ 88\ 8 \div 4 \quad (\text{resto é } 8) \end{array}$$

Observamos que na última operação ficou um resto 8 e não tem mais algarismos do número para acompanhá-lo, assim finalizamos o procedimento e o 8 é o resto da divisão. Ao dividir os números 33, 11, 44, 03, 22 e 88 pelo número 11, temos 3, 1, 4, 0, 2 e 8, respectivamente. Logo, $3454316 \div 11 = 314028 + 8$.

No próximo exemplo, vamos calcular a divisão $(341)_5 \div (2)_5$ pelo método da costura no sistema quinário.

Para maior comodidade tenhamos à mão a tábua de multiplicação nesta base, isto é, os produtos efetuados pela multiplicação por $(2)_5$.

$(2)_5 \times (1)_5 = (2)_5$, $(2)_5 \times (2)_5 = (4)_5$, $(2)_5 \times (3)_5 = (11)_5$, $(2)_5 \times (4)_5 = (13)_5$, $(2)_5 \times (10)_5 = (20)_5$.

Seguindo os passos anteriores, temos o seguinte:

$$\begin{array}{l} (3 \ 4 \ 1)_5 \div (2)_5 \quad ((3)_5 = (2)_5 \times (1)_5 + (1)_5) \\ (2 \ 1 \ 4 \ 1)_5 \div (2)_5 \quad ((14)_5 = (2)_5 \times (4)_5 + (1)_5) \\ (2 \ 14 \ 1 \ 1)_5 \div (2)_5 \quad ((11)_5 = (2)_5 \times (3)_5 + 0) \\ (2 \ 14 \ 11)_5 \div (2)_5 \quad (\text{resto é } 0) \end{array}$$

Portanto, $(341)_5 \div (2)_5 = (143)_5$.

3.2 Reflexão

Por meio dos algoritmos apresentados, podemos observar as várias maneiras que os povos durante séculos faziam os cálculos das operações. Os métodos apresentados acabaram ajudando na construção dos algoritmos que usamos atualmente.

Seria interessante proporcionar aos estudantes o conhecimento de mais de um algoritmo para o cálculo das operações com números naturais, proporcionando aos mesmos uma apropriação maior do sistema posicional e do método utilizado. Segundo [KAMII \(1995, p. 55-75\)](#), o uso precoce e a obrigatoriedade de um só tipo de algoritmo pode atrapalhar o desenvolvimento lógico da criança e o entendimento do sistema de numeração decimal.

4 Frações números racionais

Encontramo-nos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais, ou campo racional – que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números fracionários; estes são, de fato, os números novos. (CARAÇA, 1951, p. 36)

Apresentamos neste capítulo o surgimento das frações, a gênese dos números racionais, os significados de frações e as operações com frações.

4.1 Breve contextualização do surgimento das frações

Partimos da Teoria Histórico-Cultural, pois entendemos a escola como o local social privilegiado para a apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade. De acordo com esse entendimento, julgamos importante a realização nas salas de aulas, resgates históricos sobre acontecimentos e conceitos matemáticos para que, possivelmente, ocorra uma melhor compreensão destes. Portanto, buscamos melhor compreender e repassar o movimento histórico que originou o conceito de fração para que pudéssemos desenvolver nossa proposta.

A necessidade de dividir quantias e números faz parte da vida diária do homem. Ele precisa medir objetos, determinar o peso, medir o tempo. Desta realidade prática, por meio da medida, a humanidade tirou a ideia dos números racionais. O número natural surgiu da necessidade da contagem, já o número racional da necessidade de medir. A representação dessa ideia surgiu inicialmente na linguagem falada e posteriormente o homem percebeu que era necessário documentar essas ideias.

A civilização egípcia em meados de 3000 a.C. era extremamente desenvolvida e, devido às necessidades administrativa e comercial, compreendeu a limitação da memória humana para preservar duradouramente o pensamento e a fala, além de enumerações e grandes registros. A civilização egípcia era exclusivamente oral, de modo que diferentes conhecimentos passavam de geração a geração por meio de mitologias, o que estimulou o imperativo de uma expansão da memória com a criação da escrita e, em seguida, uma notação numérica.

Por algumas razões, ditadas notadamente por necessidades de ordem administrativa e comercial, ela tomou consciência pouco a pouco dos limites das possibilidades do homem–memória e do desalento de sua cultura exclusivamente oral. Experimentando cada vez mais a necessidade de memorizar o pensamento e a fala, bem como a necessidade de guardar duradouramente a lembrança de suas enumerações e inventários, compreendeu então que uma organização do trabalho inteiramente diversa se impunha. E como a necessidade cria o órgão, chegou a superar a dificuldade criando uma escrita e uma notação numérica. (IFRAH, 1997a, p. 332)

O conceito dos números racionais data de cerca de 3.000 a.C, no Antigo Egito, e sobreveio da necessidade de retratar partes de um inteiro. Nos períodos de inundações do Rio Nilo, muitas terras ficavam inundadas, recebendo nutrientes e tornando-se excelentes para a agricultura. No momento que as águas baixavam, era necessário retornar a marcação dos limites entre os terrenos de cada proprietário, de modo a propiciar a correta arrecadação de impostos.

Os comentários históricos sobre os números racionais se referem ao faraó Sésotris, que, conforme o historiador Heródoto teria realizado

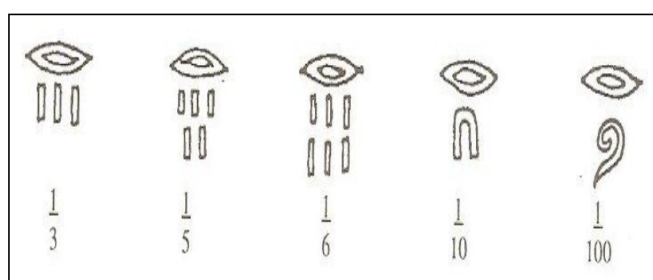
”Eles disseram também que este rei (Sésotris) dividiu a terra entre todos os egípcios, de modo a doar a cada pessoa um quadrângulo de mesmo tamanho, e para extrair disso dividendos pela imposição de uma taxa anual de impostos, mas cada um dos que o rio tirou algum pedaço de terra foi até ele e notificou o que acontecia; ele então mandou observadores, os quais tinham que resolver o quanto ficou menor cada parte e, assim, estipular o que cada um devia proporcionalmente ao que sobrara das suas terras levando em conta a taxa anual estabelecida. Deste modo, me parece, originou-se a geometria, que então passou para Helas”. (CAJORI, 2007, p. 34).

Os observadores referidos no texto acima se empregavam de cordas que continham uma determinada unidade de medida, devido à redução dos lotes com as enchentes anuais que acontecia o antigo Egito. No entanto, por mais eficientes que tentassem corrigir as percas dos agricultores, dificilmente o cálculo resultava em um número exato de vezes na fronteira do lote. Mesmo depois de uma subdivisão entre dois nós consecutivos, que salientavam medidas inteiras, existia sempre a probabilidade de subdivisões entre nós. Os números inteiros positivos demonstravam-se precários para expressarem medidas de segmentos menores do que a unidade, devido o problema da divisão $p \div q$ de números inteiros positivos, resultando em um número não inteiro. Para superar este problema, os antigos egípcios organizaram o conceito de fração de uma unidade, apesar dos números inteiros positivos não serem suficientes para designar o número obtido, a criação das frações se sustentaram nos números proveniente da contagem, ou seja dos números naturais.

Os egípcios trabalhavam com frações ditas “unitárias” ROQUE T.; PITOMBEIRA (2012), ou seja, numerador igual ao número 1, que formavam a base da sua operação aritmética para a divisão dos lotes, era colocada uma elipse sobre o número do denominador sobre o qual se colocava. Nos primórdios, havia lacunas a respeito da unificação da notação de fração e na preparação de numerações bem organizadas, impedindo-os, desta maneira, de construir um sistema coeso para suas unidades de medida. Suas notações foram, durante muito tempo, mal definidas e não adequadas às aplicações práticas. Inicialmente as frações não eram consideradas como números, nem se concebia a noção de fração geral $m \div n$ como m vezes o inverso de n , tal como se entende atualmente.

Ao repartir a unidade, ou seja, estabelecer o conceito de fração, isso proporcionou a ampliação do campo dos números naturais ao campo dos números racionais. No entanto, embora a fração esteja no princípio do número racional, fazendo parte da composição do pensamento numérico, identificar frações não significa conhecer o número racional, pois esta ampliação dos naturais para os racionais sucedeu somente séculos mais tarde. Como dito anteriormente, os egípcios utilizam na sua grande maioria as frações unitárias. Vejamos a Figura 4.1 no qual temos as representações hieróglifos egípcios de algumas destas frações.

Figura 4.1 – Representação de frações com hieróglifos egípcios.

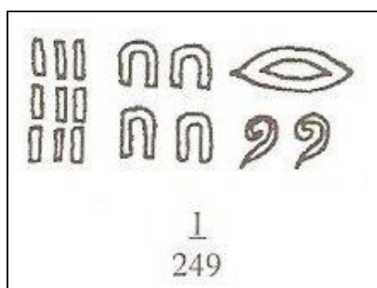


Fonte: IFRAH (1997a, p. 349).

Na Figura 4.1 temos na sequência: uma parte de três, uma parte de cinco, uma parte de seis, uma parte de dez e uma parte de cem. O significado que os egípcios empregavam nas frações unitárias era observada apenas como uma relação entre a parte e o todo, eles ainda a entendia como representação de um número.

Quando o algarismo que representa o denominador – havia vários hieróglifos e o sinal da “boca” não permanecia sobre todos eles, o excedente era inscrito na sequência, como na Figura 4.2.

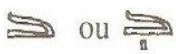





Figura 4.2 – Ilustração da fração $\frac{1}{249}$.



Fonte: IFRAH (1997a, p. 349).

Apesar de toda fração unitária possa ser representada da forma descrita anteriormente, as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ tinham sinais específicos, conjectura-se que provavelmente devido à sua utilidade prática conforme Figura 4.3.

Figura 4.3 – Ilustração de frações como hieróglifos egípcios.

Fração	1/2	2/3	3/4
Símbolo	 ou 	 ou  ou 	
Significado	"metade"	"as duas partes"	"as três partes"

Fonte: [IFRAH \(1997a\)](#).

Apesar da segunda e terceira fração não serem unitárias, elas eram empregadas pelos egípcios, como exceções à regra. As demais frações eram decompostas como soma de frações unitárias, observe a seguinte expressão: $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

A transformação ou redução das frações próprias como soma de frações unitárias consta no Papiro de Rhind uma tabela fornecendo a representação da fração $\frac{2}{n}$ como soma de frações unitárias para todos os valores ímpares de n , sendo este, variando de 5 a 101 ([BOYER, 1974](#)). A fração $\frac{2}{5}$, onde 5 é o valor de n , é representada pela soma de um terço com um quinze avos, isto é, $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

Infelizmente não se sabe como os egípcios conseguiram escrever e trabalhar com as frações unitárias, nenhum método foi encontrado no papiro de Rhind, apenas a tabela de frações unitárias.

Vamos transformar o número $\frac{3}{7}$, isto é, transformá-lo em uma soma de frações unitárias através do método de Fibonacci que está exposto em sua obra *Liber Abaci*, editado em 1202.. Este método é exposto por [ROQUE \(2012, p. 59\)](#).

Necessitamos expressar $\frac{3}{7}$ como uma soma de frações com numerador 1.

- i - Invertendo a fração $\frac{3}{7}$, obtendo $\frac{7}{3}$;
- ii - tomamos o menor número inteiro que seja maior do que $\frac{7}{3}$, o número 3 satisfaz a exigência, assim $\frac{7}{3} < 3$, invertendo as duas frações conclui-se que $\frac{1}{3} < \frac{3}{7}$;
- iii - subtraindo $\frac{1}{3}$ da fração $\frac{3}{7}$, obtemos:

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{9-7}{21} = \frac{2}{21},$$

reescrevendo, temos:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{21}.$$

O problema consiste em transformar a fração $\frac{2}{21}$ em frações unitárias, logo façamos a mesma estratégia obedecendo os passos i, ii e iii com esta fração.

Assim, segue-se:

- iv - invertendo a fração $\frac{2}{21}$, obtendo $\frac{21}{2}$;
 v - o menor inteiro maior que $\frac{21}{2}$ é 11, assim $\frac{21}{2} < 11$, invertendo as duas frações conclui-se que $\frac{1}{11} < \frac{2}{21}$;
 vi - subtraindo $\frac{2}{21}$ da fração $\frac{1}{11}$, obtemos:

$$\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{22 - 21}{231} = \frac{1}{231},$$

ou seja

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{11} + \frac{1}{231},$$

como todas as frações se converteram em frações unitárias, temos que o resultado é dado por:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

Portanto, consegue-se representar a fração como uma soma de frações unitárias.

Observe um exemplo prático que trata da utilização de frações unitárias no cotidiano dos egípcios. Divida 3 pães de trigo com cinco pessoas.

Primeiro, os três pães são divididos pela metade, encontrando seis metades. Distribui cada metade para cada pessoa, sobrando um metade. Dividi esta metade em cinco partes e encontra-se $\frac{1}{10}$ para cada pessoa. Logo cada pessoa ficará com uma metade mais um dez avos, ou seja, $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$. Portanto, $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.

De acordo como [IFRAH \(1997a\)](#) o cálculo com frações unitárias se manteve presente durante muitos anos, tanto no período grego como na Idade Média.

4.2 Gênese dos números racionais

Os numerais fracionários é a parte resultante da divisão de uma grandeza por um número inteiro maior ou igual a 2. Por exemplo, meio, um terço, um quarto, sete onze avos, um milésimo. Cada um desses numerais tem seu significado preciso, como sete onze avos, que indica que a unidade foi dividida em onze partes iguais, e foram tomadas sete dessas partes.

Assim, foi construído, considerando os números inteiros positivos, uma nova classe de números, que atualmente chamamos de números racionais positivos. Dados números inteiros positivos a e b , dividimos a unidade em b partes, e tomamos a dessas partes, ou seja, dividimos a em b partes iguais e tomamos a partes. As formas mais disseminada de representação dessa quantidade são $\frac{a}{b}$ e a/b , e se denomina fração de inteiros ou fração ordinária.

Segundo [PATERLINI \(2012, p. 20\)](#) “Esse método de representação deriva da forma original construída com o aparecimento dos números racionais na tela mental humana, e é o formato próximo da compreensão mais concreta desses números”.

Em uma fração ordinária $\frac{a}{b}$, o número a chama-se numerador e b , denominador. Inicialmente $\frac{a}{b}$ era chamada de fração de inteiros, atualmente apenas fração.

A forma $\frac{a}{b}$ indica que estamos considerando a grandeza obtida com a divisão da unidade em b partes iguais, e são tomadas a dessas partes. De maneira equivalente, o número a é dividido em b partes iguais, e é tomada uma dessas partes. Representamos essa equivalência com a identidade algébrica (4.1)

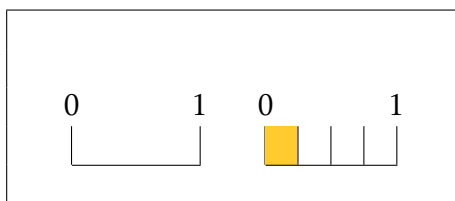
$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}, \tag{4.1}$$

onde $a \cdot \frac{1}{b}$ significa que estamos tomando a vezes a fração $\frac{1}{b}$, ou seja,

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b} \quad (a \text{ vezes}). \tag{4.2}$$

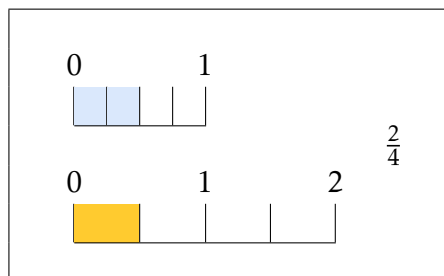
Exemplificamos esse conceito com uma representação geométrica. Representamos a unidade com um segmento de reta com extremos indicados por 0 e 1, na Figura 4.4 à esquerda, e na mesma figura, à direita, representamos $\frac{1}{4}$, repartindo o segmento em quatro partes iguais e tomando uma dessas partes.

Figura 4.4 – Ilustração geométrica da fração $\frac{1}{4}$.



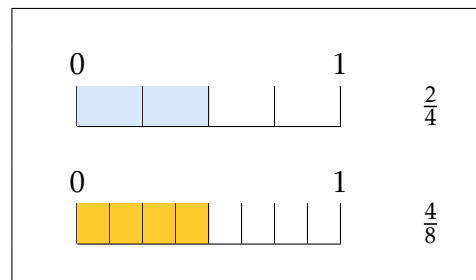
Ilustramos agora a relação (4.1) acima com a representação de $\frac{2}{4}$, na Figura 4.5, primeiro dividindo a unidade em quatro partes iguais e tomando duas dessas partes, e depois dividindo 2 unidades em quatro partes iguais e tomando uma das partes. Percebe-se que os comprimentos resultam no mesmo tamanho.

Figura 4.5 – Ilustração geométrica da fração $\frac{2}{4}$.



Utilizando a ideia geométrica o número $\frac{a}{b}$, observamos que o mesmo valor pode ser representado de maneiras equivalentes, por exemplo, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, conforme ilustrado na Figura 4.6.

Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são ditas frações equivalentes quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos definir uma caracterização algébrica que nos aponte condições sobre a, b, c e d de modo que $\frac{a}{b} =$

Figura 4.6 – Ilustração geométrica das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$.

$\frac{c}{d}$. Averiguando o caso em que duas frações com o mesmo denominador são iguais, percebe-se que a questão fica facilitada na comparação. Exemplificando, $\frac{3}{5}$ é menor do que $\frac{4}{5}$, pois estamos dividindo a unidade em cinco partes iguais, e com $\frac{3}{5}$ estamos tomando três dessas partes, e com $\frac{4}{5}$ estamos tomando quatro dessas partes. Logo, observamos que na relação (4.3)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow a = b \quad (4.3)$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a , b e c .

Uma resultado imediato na comparação de duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é que precisamos inicialmente transformá-las em duas frações com mesmo denominador. Vamos observar um caso especial de equivalência de frações. Seja uma fração $\frac{a}{b}$ e um inteiro positivo x , a fração $\frac{xa}{xb}$ é equivalente à primeira. Com certeza $\frac{a}{b} = \frac{xa}{xb}$, pois estamos dividindo a unidade em b partes iguais e tomando a dessas partes. Agora, se cada uma dessas b partes for subdividida em x partes iguais, significa que estamos dividindo a unidade em xb partes iguais. Por outro lado, tomar xa dessas partes menores é o mesmo que tomar a das partes maiores. Exemplificando, temos $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}$, generalizando temos a seguinte relação algébrica (4.4)

$$\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx} \quad (4.4)$$

com inteiros positivos quaisquer a , b e x .

Considere $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Vamos reescrever as frações com o mesmo denominador, utilizando a mesma ideia:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}. \quad (4.5)$$

Utilizando a expressão (4.5), nota-se que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad = bc$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a , b , c e d .

Consegue-se deste modo uma caracterização algébrica para a equivalência de duas frações. Além disso, conseguimos determinar que o conjunto dos números racionais positivos possa ser ordenado, e que podemos definir uma relação de ordem em (4.6)

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc \quad (4.6)$$

quaisquer que sejam os inteiros positivos a , b , c e d . Podemos também utilizar os símbolos $>$, \leq ou \geq na expressão (4.6).

Vamos fazer algumas observações imediatas. Se adotarmos um inteiro positivo e o dividimos em uma única parte, permanecemos com o mesmo inteiro, isto é

$$\frac{a}{1} = a$$

para todo inteiro positivo a . Desse modo, todo inteiro positivo pode ser visto como um número racional. De outra forma, na fração $\frac{a}{a}$ tem como significado, que repartimos a unidade em a partes iguais e tomamos essas a partes, ou seja, adotamos a unidade. Portanto

$$\frac{a}{a} = 1$$

para todo inteiro positivo a .

Ressaltamos também que não temos como dividir um inteiro positivo a em zero partes, ou seja, não há significado onde uma fração tenha como denominador o zero. No entanto pode-se repartir zero em c partes, do que resulta parte nenhuma. Portanto

$$\frac{0}{c} = 0$$

para todo inteiro positivo c .

4.3 Significados das frações

As frações tem cinco significados, ou seja, interpretações diferentes conforme o contexto a que estão inseridos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, MEC (1998, p. 66), o ensino de frações, "deve requerer atenção especial no 3º ciclo (6º e 7º ano), partindo da exploração dos seus significados: relação parte-todo, quociente, razão, medida e operador".

O PCN sinaliza que as frações, dependendo do contexto em que se encontram, se apresentam como registro numérico de diversas situações, que precisam ser consideradas pelos professores no momento em que estes se propõem a ensinar.

Os educadores matemáticos, baseados nos estudos realizados por KIEREN (1980, p. 125-150), declaram a existência de cinco subconstrutos básicos: relação parte/todo,

razão, quociente, medida e operador partitivo multiplicativo, os mesmos citados no PCN, sendo estes suficientes para esclarecer o sentido de número racional.

Devido essas diversas interpretações de frações, é normal que haja dúvidas do conteúdo e seu conceito.

4.3.1 Relação parte/todo

Nesta situação, a unidade deve ser repartida em partes iguais no qual, na representação fracionária, o denominador representa a quantidade de vezes em que a unidade foi repartida e o numerador representa o número de partes consideradas. A unidade pode ser representada por uma pizza ou um saco de balinhas, que serão repartidos em partes iguais. Diante disso, supondo que um todo foi dividido em a partes e uma destas partes for destacada, temos a representação da fração $\frac{1}{a}$.

4.3.2 Razão entre duas partes de um mesmo todo

É Definido como razão uma relação de comparação entre duas quantidades ou medidas de mesma espécie. A razão pode ser expressa comparando uma parte de um todo ou também à outra parte do mesmo todo, por exemplo, a razão entre o número b de homens e o número a de mulheres em um auditório, obtêm-se a fração $\frac{b}{a}$.

4.3.3 Quociente entre dois números inteiros

Neste cenário, um objeto ou mais, devem ser repartidos de maneira igual a um grupo de receptores. Exemplificando, sejam b barras de chocolate a serem repartidas entre a pessoas em que a quantidade de barras de chocolate é representada pelo numerador e o número de pessoas no denominador. O quociente $\frac{b}{a}$ representa a relação entre a quantidade de barras de chocolate e o número de pessoas que são os receptores, assim como o resultado da divisão das barras de chocolate para as pessoas.

4.3.4 Medida

O ato de medir significa comparar uma grandeza com uma unidade de mesma classe. Exemplificando, quando medimos um comprimento, podemos utilizar como referência o palmo, o passo, ou uma unidade bem definida como o centímetro. Se adotarmos o centímetro como unidade de medida, podemos afirmar que a distância entre determinados dois pontos é de 200 centímetros, ou seja, a unidade centímetros cabe 200 vezes dentro da distância dada.

Generalizando, quando aferimos certo comprimento $\overline{AB} = x$, necessitamos adotar como unidade um segmento $\overline{CD} = y$ determinando quantas vezes este cabe no comprimento dado, reescrevendo em símbolos matemáticos temos $\overline{AB} = \frac{x}{y} \overline{CD}$.

4.3.5 Operador partitivo multiplicativo

Este significado de fração indica que, ao ser aplicado a uma grandeza, ela (a fração) passa a ser um valor escalar que determina o tamanho final da grandeza, ou seja, um operador multiplicativo da grandeza indicada, de natureza discreta ou contínua. Exemplificando, como preciso encontrar $\frac{a}{b}$ de c , devemos multiplicar $\frac{a}{b}$ por c , resultando no valor d , ou seja, $\frac{a}{b} \cdot c = d$.

4.4 Operações com frações

Como já vimos o conceito de frações equivalentes e o método de construí-las, deste modo, podemos lidar com a adição e subtração de frações, que serão trabalhadas em duas situações: denominadores iguais, ou seja, aqueles cuja natureza do todo é a mesma e denominadores diferentes, aqueles cuja natureza do todo é diferente. Nosso objetivo nesse momento é estudar e repassar a metodologia para o uso desses números, incluindo a construção das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações.

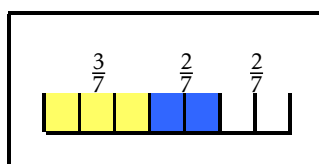
4.4.1 Adição e Subtração com frações

4.4.1.1 Adição e Subtração com denominadores iguais

Na adição de frações com denominadores iguais, a natureza do todo é a mesma, então tomar 3 partes de um todo que foi repartido em 7 partes iguais e depois tomar 2 partes do mesmo todo que foi repartido nas mesmas 7 partes iguais é o mesmo que somar o numerador que representa aquele que enumera. Em matemática para operar é preciso que tenhamos objetos de mesma natureza, se, é claro, queremos que o resultado preserve a natureza dos objetos somados, ou seja, se desejamos somar 4 mangas com 3 abacates precisamos descobrir que natureza podemos somar, pois se formos somar a natureza do nome da fruta não vamos conseguir, mas se pensamos que estamos somando frutas então temos 7 frutas. Considerando o que foi falado, é interessante evidenciar a importância de que nesse momento estamos trabalhando com denominadores iguais, pois, quando iniciarmos o trabalho com denominadores diferentes, necessitamos do conceito de frações equivalentes.

Vejamos a adição $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ na Figura 4.7 com mesmo denominador.

Figura 4.7 – Soma de frações com denominadores iguais.



Portanto, temos como resultado $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$, é válido realçar a parte restante $\frac{2}{7}$, sendo essa parte aquela que completa o todo. Este cálculo deve ser introduzido dentro de inúmeros contextos, possibilitando mais vivências para os alunos.

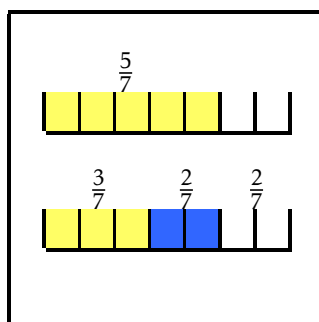
Observamos primeiro que é fácil entender como somar ou subtrair fração com mesmo denominador, basta somar os numeradores e conservar o denominador,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Para a subtração segue a ideia análoga. Vejamos a subtração como $\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$.

Na subtração de frações com numeradores iguais, a natureza do todo é a mesma, assim subtrair duas partes de um todo que foi dividido em 7 partes iguais de 5 partes do mesmo todo que foi dividido nas mesmas 7 partes iguais é o mesmo que subtrair os numeradores que representam aqueles que enumeram, ou seja, quantificam as partes retiradas e conservar a qualidade do todo. Veja na Figura 4.8.

Figura 4.8 – Subtração de frações com denominadores iguais.



Segue que $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$ representa o restante e $\frac{5}{7}$ a parte que completa o todo. Essa situação deve ser introduzida dentro de várias situações, pois os alunos vão vivenciando e dando significado que o leva a construção de procedimentos.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

4.4.1.2 Adição e Subtração com denominadores diferentes.

Usamos as frações equivalentes para a construção do algoritmo da adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

A ideia de equivalência de frações é fundamental para o aluno compreender os algoritmos das duas operações citadas. Tendo em vista que na maioria das vezes o aluno aprende frações equivalentes apenas para simplificar frações, no entanto, as vezes passa despercebido que encontrar frações equivalentes não se reduz a somente o ato de simplificar, ou seja, a redução do numerador e denominador, pois dependendo do contexto é mais interessante obter uma fração equivalente cujo numerador e o de-

nominador são múltiplos, dessa forma, seguindo a mesma ideia já usada antes, para somar duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, primeiro coloca-se no mesmo denominador, assim, tem-se:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ tem-se $ad > bc$ e pode-se considerar a subtração no conjunto dos inteiros positivos.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

A adição e a subtração de racionais positivos nos dá a ideia de considerar números racionais com a qualidade de negativo. Seja uma fração de inteiros positivos $\frac{a}{b}$, desejamos uma fração $\frac{c}{d}$ de modo que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0$. Essa fração é naturalmente $\frac{-a}{b}$, pois

$$\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = \frac{a - a}{b} = \frac{0}{b} = 0.$$

Assim, aumenta o conjunto dos números racionais, considerando as frações $\frac{a}{b}$ com a um inteiro qualquer e b um inteiro positivo, dessa forma já temos todos os números racionais que desejamos.

Rigorosamente podemos ponderar as expressões fracionárias $\frac{a}{b}$ com b negativo, definindo

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}.$$

para todos os inteiros a e b , com $b \neq 0$. Não há um aumento do conjunto dos números racionais neste, no entanto nos permite mais liberdade para operar com esses números.

O conjunto dos números racionais é usualmente representado pelo símbolo \mathbb{Q} , representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Para esse conjunto consideramos como uma caracterização fundamental das frações de inteiros equivalentes. Assim

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

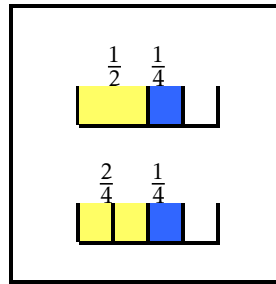
quaisquer que sejam os inteiros $a, b \neq 0, c$ e $d \neq 0$. De outra forma, para ampliar a definição de ordem para todo o conjunto \mathbb{Q} nos limitamos às frações de inteiros com denominador positivo. Assim

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$

quaisquer que sejam os inteiros $a, b > 0, e d > 0$.

Vamos mostrar na Figura 4.9 um exemplo, com a utilização de frações equivalentes, onde temos a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Figura 4.9 – Adição de fração com denominadores diferentes.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Assim como as operações nos naturais, podemos adicionar ou subtrair duas frações em outra base posicional, se utilizando dos mesmos algoritmos, vejamos o exemplo a seguir na base 5.

$$\frac{(1)_5}{(2)_5} + \frac{(4)_5}{(3)_5} = \frac{((3)_5 + (13)_5)}{(11)_5} = \frac{(21)_5}{(11)_5}$$

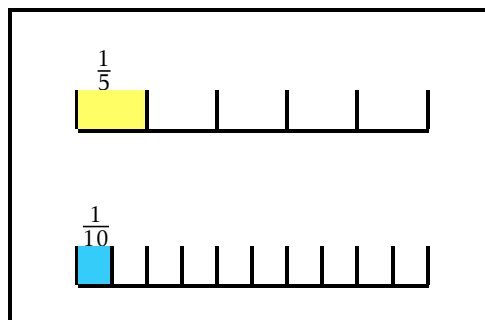
4.4.2 Multiplicação de frações

Como deve ser definida a multiplicação de números racionais? Uma exigência é conservar a multiplicação de inteiros. Logo precisamos ter $\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = ab$. A definição deve conservar o significado de número racional. Exemplificando, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$ representa a metade de $\frac{1}{5}$. Para conseguir essa metade podemos repartir cada quinta parte da unidade em duas partes iguais, o que equivale a dividir a unidade em dez partes iguais, e tomar uma parte. Portanto queremos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

Podemos representar a multiplicação através da Figura 4.10

Figura 4.10 – Multiplicação $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$.



Genericamente, se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são frações de inteiros positivos, percebemos que o produto de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ significa que primeiro dividimos a unidade em d partes iguais, e tomamos c dessas partes. Depois repartimos cada uma das d partes em b partes iguais, e tomamos a vezes as partes antes ponderadas. Dessa maneira a unidade é repartida em bd partes e são tomadas ac dessas partes. Logo adotamos como definição de multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

sendo esta definição válida para todo os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

Assim como adição e subtração de fração, podemos utilizar dos mesmos algoritmos. Segue um exemplo na base 5 com a multiplicação das frações $\frac{(10)_5}{(3)_5}$ e $\frac{(4)_5}{(3)_5}$.

$$\frac{(10)_5}{(3)_5} \times \frac{(4)_5}{(3)_5} = \frac{(40)_5}{(14)_5}$$

Calculamos os produtos de $(10)_5$ por $(3)_5$ e $(4)_5$ por $(3)_5$, depois verificamos se os números $(40)_5$ e $(14)_5$ são simplificáveis.

4.4.3 Divisão de frações

Vamos definir a divisão da seguinte forma, seja $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ aspiramos encontrar uma fração $\frac{x}{y}$ tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y}$, segue-se que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{cx}{dy} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$$

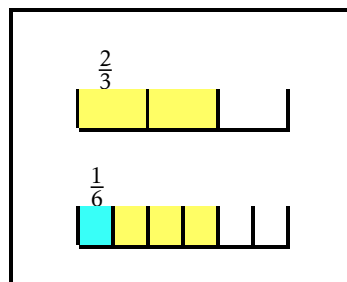
Assim sendo, tomamos como definição de divisão:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

qualquer que sejam os números inteiros a , b , c e d , com b e $d \neq 0$.

Vejam um exemplo dividindo a fração $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ com o auxílio da Figura 4.11. Para isso devemos verificar quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{2}{3}$.

Figura 4.11 – Multiplicação $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$.



Portanto $\frac{1}{6}$ cabe 4 vezes em $\frac{2}{3}$, ou seja,

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4.$$

E por fim, um exemplo de divisão na base 5.

$$\frac{(1)_5}{(2)_5} \div \frac{(4)_5}{(3)_5} = \frac{(1)_5}{(2)_5} \cdot \frac{(3)_5}{(4)_5} = \frac{(3)_5}{(13)_5}.$$

4.5 Reflexão

Os números racionais é um conteúdo importante desde o terceiro ano até os anos finais do ensino médio, a compreensão dos diferentes significados associados a esse tipo de número e também os procedimentos de cálculo, inclusive os que envolvem os racionais na forma decimal. Na transição para o estudo dos racionais ocorre rupturas com ideias construídas para os números naturais, os alunos acabam tendo de enfrentar vários obstáculos, um deles consiste na diferença da representação de um número, no qual ao representar um número racional, necessita de um numerador e denominador. A importância do resgate histórico de frações tem como um dos objetivos mostrar que os números naturais são insuficientes para resolver determinadas situações-problema como as que envolvem a medida de uma grandeza. Pode-se discutir com os alunos, por exemplo, que os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Seria importante mostrar aos alunos do acréscimo de significados de frações em relação a época egípcia. Este assunto é de suma importância para o estudante, pois, eles se deparam em muitos momentos na sua vida escolar e cotidiana, não somente na disciplina de matemática, mas também em física e química. Na abordagem dos números racionais na importância no contexto diário, observar-se que eles aparecem muito mais na forma decimal do que na forma fracionária. Conquanto o contato com representações fracionárias seja bem menos constante nas ocorrências do cotidiano seu estudo também se explica, entre outras razões, por ser essencial para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). Ressaltamos também a importância do conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes que são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números.

5 Discussões a respeito das bases 5 e 6

Neste capítulo debatemos sobre algumas implicações, na utilização do sistema de numeração posicional em outras bases e nas quatro operações nos naturais e fracionários, para que o professor possa sair da sua zona de conforto, provocando aprendizados e questionamentos a respeito do ensino em matemática.

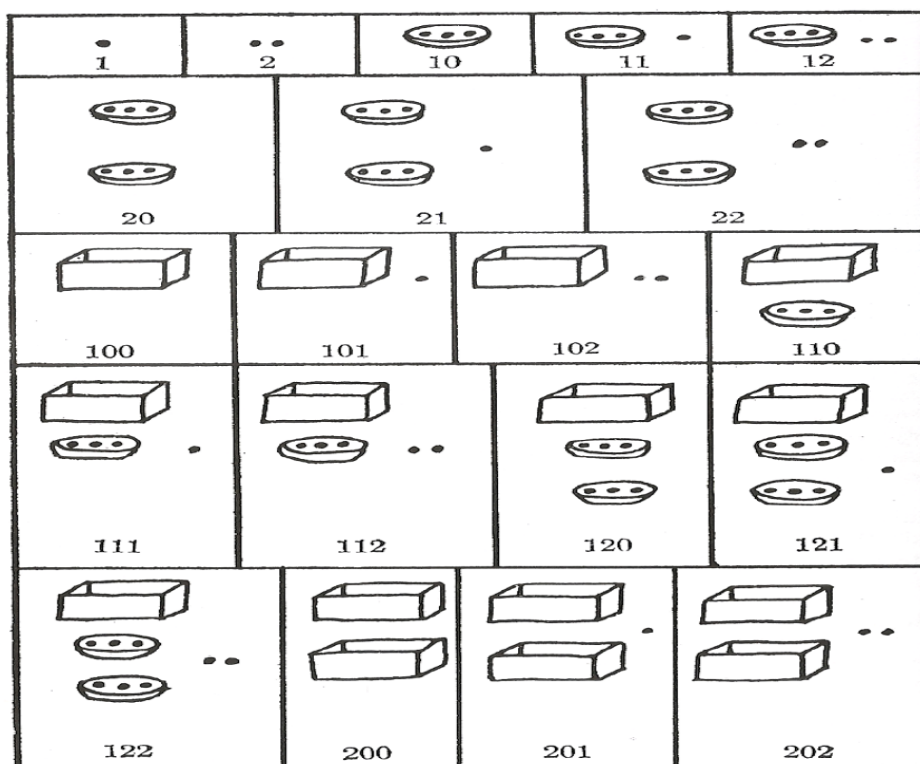
Uma vez que, [DIENES \(1967\)](#) entendia que a criança teria uma compreensão maior do sistema de numeração de base 10 estudando outras bases, é necessário que o professor experimente passar por este mesmo aprendizado para que, assim, ele entenda a importância e aplique este estudo aos alunos na séries iniciais.

Que modificações, dificuldades e facilidades temos nestes conteúdos citados acima, ao adotar outras bases que não a decimal? Que ganhos no ensino aprendizagem no SND professor e aluno teriam, ao estudar o sistema de numeração posicional em outras bases? Fixamos nossa discussão no sistema de numeração posicional de base 5, e em alguns momentos citamos e usamos a base 6, por ser uma base par, o que nos proporcionará fazer algumas discussões.

Em relação ao aluno, o educador húngaro, [DIENES \(1970\)](#) defendia que a criança no estudo do SND, após a formação do conceito do valor de posição a partir de contagens, agrupamentos e reagrupamentos em diferentes bases, o valor posicional dos algarismos em um número pode ser melhor entendido, e assim, a base dez seria melhor compreendida. Ele desenvolveu experiências de ensino em vários países, reestruturando o trabalho matemático em algumas salas de aula de escola primária, usando materiais próprios por ele produzidos, o mais conhecido na época era o Material Multibase, extremamente indicado para a entendimento dos agrupamentos e reagrupamentos em diversas bases, tidos por ele como primordial para a compreensão do valor posicional, princípio que norteia o SND.

Do ponto de vista desse educador húngaro, ao representar a “figura numérica” com algarismos, a criança vai concluindo, por exemplo, quando se escreve $(21)_3$ mostrado na Figura 5.1, o número dois não representa dois elementos, mas dois grupos de três elementos. Semelhantemente, quando se escreve $(21)_4$, o 2 não representa dois elementos, mas, dois grupos de 4 elementos. Desta forma, numa contagem na base dez, que usualmente é o mais utilizado, o 2 do 21 não representa 2, mas, dois grupos de dez elementos, ou seja, um total de 20 unidades. Vejamos na Figura 5.1 exemplos de contagem na base 3, observe os números $(22)_3$ e $(202)_3$, onde o primeiro representa 2 grupos de 3 unidades mais 2 e o segundo representa 2 grupos 3^3 unidades mais 2.

Figura 5.1 – Contagem na bases 3.



Fonte: DIENES Z. P.; GOLDING (1969, p. 61-62).

5.1 Números Naturais

De acordo com a seção 2.3.5 explicamos que a base quinária é formada pelos algarismos de 0 a 4. Com a diminuição de algarismos, mudamos a maneira de fazer contagem, em consequência disso muda-se também o reagrupamento das ordens, já que no sistema decimal contávamos até 9 e o próximo número estaria em outra ordem, agora contamos até o algarismo 4 para que aconteça a mudança de ordem, no caso o próximo número após o 4 é o $(10)_5$ e não mais o número 5.

Uma mudança significativa acontece no valor do número como dito anteriormente, comparando a base 10 em relação a base 5, exemplifiquemos, o valor do número 21 que modifica de 2 grupos de 10 mais 1 para 2 grupos de 5 mais 1.

No sistema decimal o número 123 é lido como cento e vinte e três, e na base 5, como seria lido? A maneira de falar muda completamente, pois agora não estamos falando de dezenas, centenas, milhar, etc. Lemos da seguinte forma um-dois-três. “Esta coleção será identificada como contendo 1323 unidades, em que 1323 é a figura do número na base 4, e se lê (um-três-dois-três)”(DIENES, 1967, p. 91).

5.1.1 Sucessor e Antecessor

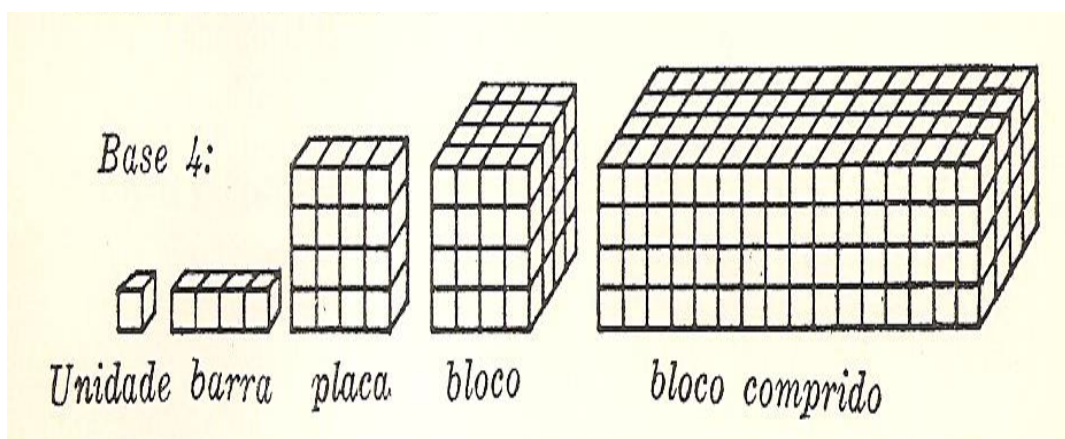
A determinação do sucessor e antecessor são importantes conceitos para adição e subtração, vistos nas seções 3.1.1.1 e 3.1.2.1. Qual seria o antecessor de $(100)_5$ e o su-

cessor de $(444)_5$? Será que teríamos uma resposta imediata, sem o devido preparo? A resposta é negativa, pois adentramos numa nova realidade, necessitamos nos familiarizarmos com este novo sistema.

Ao adotar esta nova base, destacamos a importância do leitor escrever uma certa quantidade de números para se que se adapte a esta nova contagem e possa responder com segurança o antecessor e sucessor dos números $(100)_5$ e $(444)_5$ respectivamente, da mesma maneira que o alunos nos anos iniciais são estimulados a fazer, como isso vamos perceber, em menor grau, a dificuldade que o aluno tem quando adentra o SND nos anos iniciais.

Reafirmamos a importância de professor e aluno estudarem os sistema em várias bases, pois, Dienes tanto defendia esse caminho, que construiu um material chamado Multibase, similar ao material dourado, contudo, o material dele consistia em blocos de varias bases, ele defendia e aplicava a utilização deste material pelo aluno, vide exemplo da base 4 na Figura 5.2.

Figura 5.2 – Blocos Multibase - Base 4.



Fonte: DIENES (1967, p. 107).

5.1.2 Paridade dos números

A paridade de um número é tema importante a ser discutido, pois implicará no cálculo da divisão e nas frações. Como determinar a paridade de um número? Bastaria que olhássemos o dígito das unidades? A resposta à esta pergunta dependeria de que base adotamos, se par ou ímpar. No caso da base 5, temos números pares e ímpares que tem como unidade os algarismos $(0)_5$, $(1)_5$, $(2)_5$, $(3)_5$ e $(4)_5$, ou seja, neste caso a determinação da paridade não se resume a olhar a unidade, esse é um complicador menos elementar do que determinar o sucessor ou antecessor. No caso da base 6, se aplica à mesma regra do sistema de numeração decimal, isto é, basta observar o algarismo da unidade, pois nesta base números pares e ímpares tem como possíveis dígitos $(0)_6$, $(2)_6$, $(4)_6$ e $(1)_6$, $(3)_6$, $(5)_6$ respectivamente.

Voltando a base 5 em relação a paridade, observe os números listados de 1 até $(100)_5$:

$(1)_5, (2)_5, (3)_5, (4)_5, (10)_5, (11)_5, (12)_5, (13)_5, (14)_5, (20)_5, (21)_5, (22)_5, (23)_5, (24)_5,$
 $(30)_5, (31)_5, (32)_5, (33)_5, (34)_5, (40)_5, (41)_5, (42)_5, (43)_5, (44)_5, (100)_5.$

Numa rápida olhada nesta sequência de números, verifica-se a afirmação acima, no qual o dígito da unidade não determina a sua paridade, exemplificando temos o $(10)_5$ e $(20)_5$ que tem dígito 0, no qual o $(10)_5$ é ímpar e o $(20)_5$ é par, o mesmo se percebe com os dígitos 1, 2, 3 e 4 na unidade. Explorando mais a paridade na base 5, considere o número ímpar $(12341)_5$, ao permutar este número, existe alguma possibilidade de uma dessas permutações formar um número par? A resposta é negativa, seja qual for a permutação, pois, bastar fazer a soma dos algarismos do número e conferir se esta soma é divisível por 2, do contrário, o número é ímpar.

5.1.3 Adição

Um das suas regras primordiais nos algoritmos, leva em conta, que a soma correta considera os agrupamentos de mesma ordem, ou seja, é necessário que coloquemos unidade sobre unidade, dezena sobre dezena e assim sucessivamente, se o aluno não compreende que o nosso sistema é posicional, como entenderá o motivo pelo qual deve seguir essa orientação.

Outro fato, é que devido nosso sistema ser decimal e o não entendimento do significado desta palavra, implicará que, na resolução de uma soma de duas parcelas na primeira ordem, e esta for maior ou igual a 10, ele não saberá que se deve fazer o transporte da unidade para a dezena, ou quando muito, fará o transporte de maneira mecanizada.

Entendemos que a matemática deve ser compreendida e não somente memorizada, cada algoritmo listado na seção 3.1 é completamente dependente do SND, são métodos excelentes, no entanto, é necessário que os alunos compreendam o que estão fazendo quando usá-los. Segundo DIENES (1970, p. 30) a matemática “não deve ser considerada como um conjunto de técnicas, embora tais técnicas sejam claramente essenciais para a utilização efetiva da Matemática. Esta deve ser vista antes como uma estrutura de relações”. Em relação ao sistema de numeração usual, esse autor pondera que:

Os fatores biológicos e culturais fizeram finalmente surgir uma notação de número que usa valor de posição, com a base dez como um meio de comunicar números, e é essencial que as crianças aprendam o significado dessa comunicação tão eficazmente quanto possível. Aprender a contar até 50 ou 100 não implica em nada que aprendemos a significação de notação. (...) Uma criança pode ter aprendido o conceito de que, para somar dois números, temos de ‘contar seguidamente’, do primeiro número, com tantos números intermediários quanto indicado no

segundo. Contudo, ela poderá ficar muito longe de conceber a complicada estrutura da tarefa de $27 + 35$, em que se deve realizar o agrupamento e reagrupamento de dez em dez, para executar economicamente a tarefa. (DIENES, 1970, p. 48).

Vamos analisar a primeira alteração, que consiste na adição com transporte ou “vai um número” ou reagrupamento, observe o cálculo a seguir: $(34)_5 + (24)_5 = (113)_5$, aqui temos $(4)_5 + (4)_5 = (13)_5$ e não mais 8, a mudança de ordem já se faz presente, assim, sobe $(1)_5$ quina, daí temos $(3)_5 + (2)_5 + (1)_5 = (11)_5$ gerando um acréscimo de outra ordem. No SND precisaríamos de dez unidades para completar um dezena, já na base 5 precisamos apenas de cinco unidades, necessitamos treinar o cérebro para esta mudança, em sala de aula encontramos vários alunos que teve ou tem a mesma dificuldade de entender e se habituar com a base 10.

Observamos o mesmo cálculo resolvido por decomposição, assim temos $(34)_5 + (34)_5$:

$$\begin{aligned} (34)_5 + (34)_5 &= ((30)_5 + (4)_5) + ((20)_5 + (4)_5) \\ &= ((30)_5 + (20)_5) + ((4)_5 + (1)_5) + (3)_5 \\ &= (100)_5 + (10)_5 + (3)_5 \\ &= (113)_5. \end{aligned}$$

Aqui fica clara a mudança de base, temos um reagrupamento de modo que as três ordens ficassem bem destacadas, onde a primeira soma gerou a 3ª ordem, a segunda soma gerou a 2ª ordem e o número 3 sendo a 1ª ordem.

5.1.4 Subtração

Na subtração, quando o minuendo é menor que o subtraendo e há a necessidade do empréstimo de uma dezena, ou melhor dizendo, do reagrupamento das ordens, como ele entenderá o significado dessa ação apelidado de “empréstimo”, além disso, não saberá mensurar o valor deste empréstimo, como saberá se está emprestando um dezena, ou centena, etc.

Na subtração, o oposto do “vai um número”, consiste na subtração com recurso, ou seja, no empréstimo de uma quina ao invés de uma dezena para possibilitar a subtração do minuendo pelo subtraendo. Exemplificamos com o cálculo $(300)_5 - (33)_5 = (212)_5$. Este é um exemplo típico de empréstimos sucessivos, como a base é 5, não podemos cometer o erro ao subtrair $(0)_5 - (3)_5$, acrescentar uma dezena ao invés de uma quina por força do hábito, assim, temos $(10)_5 - (3)_5 = (2)_5$, em seguida temos que de $(10)_5$ foi retirado $(1)_5$ sobra $(4)_5$ e não 9, daí $(4)_5 - (3)_5 = (1)_5$, nosso inconsciente ao resolver esta subtração nos impele a considerar o número 9 e colocar na resposta o número 6 em vez de $(1)_5$.

Notamos a mesma situação ao resolver por decomposição, daí, temos $(300)_5 - (33)_5$:

$$\begin{aligned}
 & (200)_5 + (100)_5 - (33)_5 \\
 &= (200)_5 + (1)_5 + (44)_5 - (33)_5 \\
 &= (200)_5 + (12)_5 \\
 &= (212)_5.
 \end{aligned}$$

Quando decompomos $(100)_5 = (1)_5 + (44)_5$, utilizamos do conceito de antecessor do $(100)_5$, que é o $(44)_5$. Mas, o grande destaque é a mudança de ordem após o número $(44)_5$, note que há uma relativa dificuldade para se acostumar a esta base, há uma chance de errarmos e escrevermos o número 99 ao invés do número $(44)_5$.

5.1.5 Multiplicação

Como os algoritmos da multiplicação e divisão se utilizam da adição e subtração, com acréscimo de algo mais, entendemos que as dificuldades se fazem presentes em maior grau, no caso da divisão surge um novo complicador, no algoritmo tradicional muda-se a ordem de resolução, a maneira de se resolver inicia-se da esquerda para direita e as outras três são resolvidas na ordem contrária. Contudo, resolvendo divisão pelo método das subtrações sucessivas, permanecem a mesma ordem de resolução.

Ressaltamos na multiplicação “vai um número” ou reagrupamento de ordens, seja na multiplicação dos fatores, assim como, na adição dos produtos quando resolvemos as multiplicações.

Vejamus um exemplo onde o “vai uma quina” é bem explorado, utilizamos o método da quintuplicação (multiplicação por 10) e o método longo irá explorar as duas situações citadas anteriormente.

Vamos calcular o produto de $(43)_5 \times (24)_5$. Utilizando o método da quintuplicação (multiplicação por $5 = (10)_5$), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & (43)_5 \times (24)_5 \\
 &= (43)_5 \times [(2)_5 \times (10)_5 + (4)_5] \\
 &= (2)_5 \times (10)_5 \times (43)_5 + 4 \times (43)_5 \\
 &= (1410)_5 + (332)_5 \\
 &= (2242)_5.
 \end{aligned}$$

A exigência do domínio da base 5 é bem explorada, ao resolvê-la somos desafiados a não utilizar a dezena o tempo todo.

Vejamus o cálculo pelo método longo:

$$\begin{array}{r}
 (4\ 3)_5 \\
 \times (2\ 4)_5 \\
 \hline
 (2\ 2)_5 \\
 (3\ 1)_5 \\
 (1\ 1)_5 \\
 + (1\ 3)_5 \\
 \hline
 (2\ 4\ 4\ 2)_5
 \end{array}$$

Pelo método longo, fica evidente o quanto é importante o entendimento de alguns pré-requisitos que são necessários neste cálculo: a base que foi adotada, o momento da mudança de ordem, assim como, a colocação dos produtos nos seus devidos lugares exigindo o conhecimento das ordens encontradas.

Estes, são problemas que os professores e alunos tem enfrentado nas salas de aulas no ensino básico, são vários os alunos que não compreendem o valor posicional do número, acarretando no erro da soma de ordens diferentes, por exemplo somar unidade com dezena, devido o fundamento do valor posicional no SND nos anos iniciais não foram bem compreendidos.

Entendemos que os professores devam ter total compreensão deste assunto e das dificuldades existentes neste sistema. O debate sobre outras bases possibilita ajudar em alguns aspectos, por exemplo, proporciona ao professor fazer questionamentos e asseverações que na base atual já estão sedimentadas para ele, além disso, ajuda a retirar o automatismo dos métodos de algoritmo que foram solidificados no sistema atual.

5.1.6 Divisão

Discutimos a divisão no exemplo $(324)_5 \div (24)_5$ utilizando o método da costura e o algoritmo das subtrações sucessivas.

No método costura, no primeiro passo, exige-se como pré-requisito ter a compreensão do sistema adotado, o transporte da multiplicação para a próxima ordem e conhecimento da tabuada.

1º passo: vamos criar uma tabuada para o divisor, tomando cuidado por ser a base 5.

$$(1)_5 \times (24)_5 = (24)_5, (2)_5 \times (24)_5 = (103)_5, (3)_5 \times (24)_5 = (132)_5, (4)_5 \times (24)_5 = (211)_5$$

No segundo passo temos como pré-requisito o uso da subtração com recurso ou reagrupamento, compreensão do sistema adotado e sua aplicação no algoritmo.

2º passo: vamos separar o dividendo de dois em dois ou de um em um de modo que sejam múltiplos do divisor. Veja Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Método da costura (divisão).

$(324)_5$			$\div (24)_5$
$(24)_5$	$(24)_5$	$(10)_5$	
$(1)_5$	$(1)_5$		

Neste algoritmo, de $(32)_5$ retiramos $(3)_5$ unidades, encontramos na primeira coluna da segunda linha o número $(24)_5$, e assim formando novamente o número $(34)_5$, repe-

timos o processo e finalizamos com o resto $(10)_5$. Aqui, encontramos a exigência de trabalhar com o empréstimo de uma quina.

Vejam agora, a divisão de $(324)_5 \div (24)_5$ pelo método da subtrações sucessivas, sem a utilização da chave. Veja a Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Método das subtrações sucessivas (divisão).

$(324)_5 - (24)_5 =$	$(300)_5$
$(300)_5 - (24)_5 =$	$(221)_5$
$(221)_5 - (24)_5 =$	$(142)_5$
$(142)_5 - (24)_5 =$	$(113)_5$
$(113)_5 - (24)_5 =$	$(34)_5$
$(34)_5 - (24)_5 =$	$(10)_5$

Como tivemos $(11)_5$ subtrações por $(24)_5$, portanto, o quociente é $(11)_5$ e o resto $(10)_5$.

Neste método, encontramos situações com as seguintes exigências: necessidade de subtração com recurso sendo amplamente utilizado, contagem de $(1)_5$ até $(11)_5$ para determinar o quociente e comparações de números para determinar o resto. Cada uma dessas exigências são extremamente dependentes da base adotada nesta discussão.

5.2 Mínimo Múltiplo Comum

Devido a importância do MMC para as frações, resolvamos o MMC $(24, 33, 40)$, nas bases 5 e 6.

5.2.1 Base 5

Vejam o cálculo do MMC $((24)_5, (33)_5, (40)_5)$ na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – MMC $((24)_5, (33)_5, (40)_5)$.

$(24)_5,$	$(33)_5,$	$(40)_5$	$(2)_5$
$(12)_5,$	$(14)_5,$	$(20)_5$	$(2)_5$
$(12)_5,$	$(14)_5,$	$(10)_5$	$(3)_5$
$(12)_5,$	$(3)_5,$	$(10)_5$	$(3)_5$
$(12)_5,$	$(1)_5,$	$(10)_5$	$(40)_5$
$(12)_5,$	$(1)_5,$	$(1)_5$	$(12)_5$
$(1)_5,$	1,	1	$(20020)_5$

Além das situações já citadas nas quatro operações, deparam-se também com a necessidade do critério de divisibilidade, como não foi construído a teoria no texto, surgiu a necessidade de testar se o número fatorado seria divisível pelo número escolhido. Logo, o $\text{MMC}((24)_5, (33)_5, (40)_5)_5 = (20020)_5$.

Considere a dificuldade de determinar se um número é primo sem a utilização dos critérios de divisibilidade conhecidos, assim como a proibição neste trabalho do uso da conversão a base 10.

5.2.2 Base 6

Calculamos agora o MMC na base 6, vejamos na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – $\text{MMC}((24)_6, (33)_6, (40)_6)$.

$(24)_6$	$(33)_6$	$(40)_6$	$(2)_6$
$(12)_6$	$(33)_6$	$(20)_6$	$(2)_6$
$(4)_6$	$(33)_6$	$(10)_6$	$(2)_6$
$(2)_6$	$(33)_6$	$(3)_6$	$(2)_6$
$(1)_6$	$(33)_6$	$(3)_6$	$(3)_6$
$(1)_6$	$(1)_6$	$(1)_6$	$(1)_6$
$(1)_6$	$(1)_6$	$(1)_6$	$(1320)_6$

Logo, o $\text{MMC}((24)_6, (33)_6, (40)_6) = (1320)_6$.

Nesta base temos as mesmas situações da base 5, no entanto, tem-se uma diferença interessante, na base 6 por ser par, ela pode se fatorado por 2 e 3, isto facilitou o produto de $(2)_6 \cdot (2)_6 \cdot (2)_6 \cdot (2)_6 \cdot (3)_6 \cdot (11)_6$, observe o cálculo a seguir:

$$\begin{aligned}
 & (2)_6 \cdot (2)_6 \cdot (2)_6 \cdot (2)_6 \cdot (3)_6 \cdot (11)_6 \\
 = & (2 \cdot 2 \cdot 2)_6 \cdot (2 \cdot 3)_6 \cdot (11)_6 \\
 = & (12)_6 \cdot (10)_6 \cdot (11)_6 \\
 = & (120)_6 \cdot (11)_6 \\
 = & (1320)_6
 \end{aligned}$$

Já a base 5 por ser um número primo, encontramos mais dificuldades para efetuar os cálculos.

5.3 Frações

Prosseguindo, vamos analisar as operações com frações na base quinarária e um exemplo associando fração com número decimal.

Na soma de $\frac{(13)_5}{(14)_5}$ e $\frac{(11)_5}{(30)_5}$ usamos o método das frações equivalentes e na subtração de $\frac{(13)_5}{(14)_5}$ por $\frac{(11)_5}{(30)_5}$ utilizamos o MMC, contemplando os dois métodos.

5.3.1 Adição de frações

Calculamos neste momento as frações equivalentes de $\frac{(13)_5}{(14)_5}$ e $\frac{(11)_5}{(30)_5}$, segue-se

$$\frac{(13)_5}{(14)_5} = \frac{(31)_5}{(33)_5} = \frac{(44)_5}{(102)_5} = \frac{(112)_5}{(121)_5} = \frac{(130)_5}{(140)_5} \quad \text{e} \quad \frac{(11)_5}{(30)_5} = \frac{(22)_5}{110_5} = \frac{33_5}{140_5} = \frac{(44)_5}{(220)_5}.$$

Substituindo as duas frações iniciais, obtemos:

$$\frac{(13)_5}{(14)_5} + \frac{(11)_5}{(30)_5} = \frac{(130)_5}{140_5} + \frac{(33)_5}{(140)_5} = \frac{(213)_5}{(140)_5}.$$

Neste exemplo, na procura das frações equivalentes necessitamos encontrar o mesmo denominador para as duas frações, o nível de exigência dessa tarefa faz com que precisemos da tabuada, do algoritmo de multiplicação, e o reagrupamento de ordens ou “vai um número”. Posteriormente, na soma de frações no resultado final, necessitamos verificar se as frações são irredutíveis, e por isso, esbarramos na utilidade dos critérios de divisibilidade, do contrário teríamos que verificar calculando a divisão um por um.

5.3.2 Subtração de frações

Ao calcular o MMC de $(14)_5$ e $(30)_5$, obtemos o número $(140)_5$, assim,

$$\frac{(13)_5}{(14)_5} - \frac{(11)_5}{(30)_5} = \frac{130_5}{140_5} - \frac{(33)_5}{(140)_5} = \frac{(42)_5}{(140)_5}.$$

O nível de conhecimento que se requer na subtração de fração utilizando o MMC é bem maior do que o método de frações equivalentes, pois, para calcular o MMC de imediato precisamos da divisão, e posteriormente, este algoritmo exige o cálculo da divisão do MMC por cada denominador e em seguida a multiplicação deste resultado pelo seu respectivo numerador exigindo quase sempre o reagrupamento das ordens quando iguala ou ultrapassa o número 5. Na diferença entre os numeradores, novamente necessitou da subtração com recurso, e por fim precisamos verificar se as frações são irredutíveis.

5.3.3 Multiplicação de frações

Calculamos a multiplicação das frações $\frac{(13)_5}{(21)_5}$ e $\frac{(14)_5}{(24)_5}$. Observemos o cálculo abaixo.

$$\frac{(13)_5}{(21)_5} \times \frac{(14)_5}{(24)_5} = \frac{(242)_5}{(1104)_5} = \frac{(121)_5}{(302)_5}.$$

No produto dos numeradores e denominadores saímos de números com dois algarismos para um número de três algarismos, gerando a necessidade do reagrupamento das ordens e finalmente a verificação se as frações são irredutíveis.

5.3.4 Divisão de frações

Vejam a divisão das frações $\frac{(13)_5}{(21)_5}$ e $\frac{(14)_5}{(24)_5}$,

$$\frac{(13)_5}{(21)_5} \div \frac{(14)_5}{(24)_5} = \frac{(13)_5}{21_5} \times \frac{(24)_5}{(14)_5} = \frac{(422)_5}{(344)_5}$$

No caso da divisão, basicamente é uma repetição da multiplicação, com exceção do fato que a divisão é o inverso da multiplicação.

Vejam o valor de uma fração em número decimal, utilizando o método tradicional de divisão. Considere a fração $\frac{1}{3}$, muito conhecida nos livros didáticos que no sistema decimal tem como resultado o número 0,333..., que é uma dízima periódica.

Construindo a tabuada do três temos: $(3)_5 \times (1)_5 = (3)_5$, $3_5 \times (2)_5 = 11_5$, $(3)_5 \times 3 = (14)_5$, observe o cálculo na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Divisão na base 5.

$\begin{array}{r} (10)_5 \\ (-3)_5 \\ \hline (20)_5 \\ (-14)_5 \\ \hline (10)_5 \\ (-3)_5 \\ \hline (20)_5 \\ (-14)_5 \\ \hline (1)_5 \end{array}$	$\begin{array}{r} (3)_5 \\ \hline (0,1313)_5 \dots \end{array}$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------

No resultado da fração $\frac{(1)_5}{(3)_5}$ temos uma similaridade e uma mudança. A similaridade é a continuação da dízima periódica, no entanto, o período mudou do algarismo $(3)_5$ para o $(13)_5$.

Neste último exemplo abordamos a ideia de razão. Uma escola possui $(40000)_5$ alunos matriculados e $(1300)_5$ foram selecionados para participar de um concurso de redação. Qual é a razão que representa o total de alunos selecionados em forma de fração e número decimal?

$$\frac{(1300)_5}{(40000)_5} = \frac{(13)_5}{(400)_5} = \frac{(2)_5}{(100)_5} = (0,02)_5$$

Este exemplo basicamente exige do leitor o conhecimento de simplificação por meio da divisão com ou sem o conhecimento dos critérios de divisibilidade. Encontramos aqui uma similaridade com o sistema de numeração decimal, que ao dividir $(2)_5$ por $(100)_5$, deslocamos a vírgula duas casas decimais para esquerda.

6 Considerações finais

O estudo do sistema de numeração, das quatro operações elementares com números naturais e fracionários ocupa um função importante no ensino fundamental. Por meio destes conteúdos o aluno terá um bom alicerce para construir seu conhecimento matemático, sendo necessário que a criança seja bem fundamentada no sistema de numeração decimal, para que compreenda bem os algoritmos das quatro operações que são utilizados no sistema atual de ensino, assim como o conhecimento das ideias de cada operação e em qual usá-las. Do professor, exige-se o preparo para que aos poucos, ir introduzindo os algoritmos das operações, de modo que a formalização destes seja o mais natural possível, e, sempre ressaltando a ligação com o sistema de numeração adotado.

O professor é um dos principais agentes na construção do conhecimento do aluno, é imperativo que ele tenha conhecimento sólido da matemática, que conheça várias formas de ensino, vários algoritmos das quatro operações, e entendimento dos vários sistemas de numeração existente ao longo da história matemática, conhecimento estes que lhe darão suporte para enfrentar as dificuldades inerentes aos conteúdos citados.

O conhecimento da história dos números é extremamente importante para o preparo do professor, pois ao estudá-lo, ele verá que os povos pensavam de maneiras diferentes na construção do número e nos vários algoritmos existentes. Supõe-se que as várias maneiras que os alunos pensam representa de certa forma os povos com suas várias maneiras de pensar. Os algoritmos e o sistema de numeração estão intimamente ligados na maneira como foram construídos, estudando os vários tipos de algoritmos pudemos notar que alunos do 5º e 6º anos tentam resolver as operações de maneiras semelhantes aos povos antigos, quando o professor tem o conhecimento destes inúmeros sistemas e algoritmos ele tem mais condições de ajudá-los a superar esses erros constantes na sala de aula.

Quando o professor é provocado a trabalhar em uma outra base, de certo modo, ele perpassa por algumas das dificuldades que os alunos passam quando da construção do sistema de numeração, dificuldades estas que no caso do professor, habituado ao sistema de numeração decimal, já automatizadas na sua mente, assim, existe o risco de se perder a sensibilidade na percepção dos erros cometidos pelo aluno, dificultando o trabalho de superação das dificuldades inerentes a este conteúdo.

Muito se tem falado sobre sistema de numeração, mas, nem tanto sobre a evolução dos algoritmos para as quatro operações elementares, entende-se que este trabalho pode ser de grande utilidade aos professores. A maioria do material encontrado são publicados em artigos, entretanto não reúnem, em sua maior parte, as quatro operações e nem um grande número de algoritmos, pelo que notamos eles trabalham no

máximo com duas operações, geralmente multiplicação e divisão.

Não podemos deixar de investir na busca de novos conhecimentos que proporcione a difusão do ensino da matemática de forma consolidada. Professores firmados no saber podem gerar crianças e jovens matematicamente seguros que consigam superar as dificuldades que a vida lhe propõe de forma mais fácil.

Preparar materiais que auxiliarão, tanto professores como alunos, nessa jornada, continuará sendo nosso objetivo.

Referências

- BERLINGOFF W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática Através dos Tempos: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2007.
- CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda, 1951.
- DANTE, L. *Projeto Teláris - Matemática 6º ano A Linguagem da Ciência*. São Paulo: Ática, 2014.
- DANTZIG, T. *Número: A Linguagem da Ciência*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.
- DIENES, Z. P. *A Matemática Moderna no Ensino Primário*. Rio de Janeiro, São Paulo: Editora Fundo de Cultura, 1967.
- DIENES, Z. P. *Aprendizado moderno da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.
- DIENES, Z. P. What is a base? v.1. 2002. Disponível em: <http://www.zoltandienes.com/wp-content/uploads/2010/05/what_is_a_base.pdf>. Acesso em: Acesso em 05 de março. 2020.
- DIENES Z. P.; GOLDING, E. W. *Conjuntos, números e potências*. São Paulo: Editora Herder, 1969.
- EVES, H. *Introdução a história da matemática*. 3. ed. Campinas, São Paulo: UNICAMP, 2004.
- IFRAH, G. *Os Números - A História de uma Grande Invenção*. Rio de Janeiro: Globo, 1989.
- IFRAH, G. *História Universal dos Algarismos. Tomo 1*. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997a.
- KAMII, C. *Desvendando a Aritmética*. 1. ed. Campinas, São Paulo: Papyrus, 1995.
- KAMII, C. *Aritmética: novas perspectivas - Implicações da Teoria de Piaget*. 3. ed. Campinas, São Paulo: Papyrus, 2001.
- KIEREN, T. E. *The rational number construct its elements and mechanisms In: KIEREN*. 1. ed. Columbus: Eric/Smeac, 1980.
- MEC. *Parâmetros Curriculares nacionais – Primeiro e Segundo Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. 1. ed. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- MEC. *Parâmetros Curriculares nacionais – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática*. 1. ed. Brasília: MEC/SEF, 1998.

PATERLINI, R. R. *Aritmética dos Números Reais*. Sao Carlos: Departamento de matemática, UFSCar, 2012. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_reais_02_07_2012.pdf>. Acesso em: Acesso 10 de fevereiro de 2020.

PATERLINI, R. R. *Aritmética dos Números Inteiros*. Sao Carlos: Departamento de matemática, UFSCar, 2017. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_arit_2ed_19_02_2017.pdf>. Acesso em: Acesso 01 de fevereiro de 2020.

ROQUE, T. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos da história da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SOARES, E. T. P. *Zoltan Paul Dienes e o sistema de numeração decimal na cultura escolar paranaense (1960-1989)*. Tese (Doutorado em Educação) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná escola de educação e humanidades, Curitiba, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/117008>>. Acesso em: 21 de fevereiro de 2020.