Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

CÍRCULO MATEMÁTICO: EXPERIÊNCIAS COM GRADUANDOS EM MATEMÁTICA E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Raphael Luca Souza da Silva

Goiânia

2020

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Raphael Luca Souza da Silva

3. Título do trabalho

CÍRCULO MATEMÁTICO: EXPERIÊNCIAS COM GRADUANDOS EM MATEMÁTICA E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Mário José De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 12/06/2020, às 18:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **RAPHAEL LUCA SOUZA DA SILVA**, **Discente**, em 16/06/2020, às 10:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do

Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1379685** e o código CRC **3D086637**.

Referência: Processo nº 23070.013152/2020-04 SEI nº 1379685

Criado por sosteneg, versão 4 por mario_jose_souza em 12/06/2020 18:35:24.

Raphael Luca Souza da Silva

CÍRCULO MATEMÁTICO: EXPERIÊNCIAS COM GRADUANDOS EM MATEMÁTICA E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

SILVA, RAPHAEL LUCA SOUZA DA
CÍRCULO MATEMÁTICO [manuscrito] : EXPERIÊNCIAS COM GRADUANDOS EM MATEMÁTICA E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO / RAPHAEL LUCA SOUZA DA SILVA. - 2020.
v, 49 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, , PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, mapas, fotografias, abreviaturas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Matemática. 2. Círculo. 3. Matemático. 4. Motivação. 5. Resolução. I. Souza, Mário José de , orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 06/2020 da sessão de Defesa de Dissertação de **Raphael Luca Souza da Silva**, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Ensino de Matemática.

Aos vinte e oito dias do mês de maio de dois mil e vinte, a partir das 14 **horas**, por meio de videoconferência por motivo da pandemia covid-19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"CÍRCULO MATEMÁTICO: EXPERIÊNCIAS COM GRADUANDOS EM MATEMÁTICA E ALUNOS DO ENSINO MÉDIO"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor doutor Mário José de Souza - (IME/UFG), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Ivonildes Ribeiro Martins Dias - (IME/UFG) e membro titular externo a professora doutora Maria Francisca da Cunha - (UEG). **Participaram por videoconferência** o Professor doutor Mário José de Souza - (IME/UFG), a Professora Doutora Ivonildes Ribeiro Martins Dias - (IME/UFG) e a professora doutora Maria Francisca da Cunha - (UEG). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Mário José de Souza, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e oito dias do mês de maio de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Mário José De Souza**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/05/2020, às 07:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ivonildes Ribeiro Martins**, **Professor do Magistério Superior**, em 04/06/2020, às 09:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Maria Francisca da Cunha**, **Usuário Externo**, em 10/06/2020, às 20:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Referência: Processo nº 23070.013152/2020-04 SEI nº 1229727

Raphael Luca Souza da Silva graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás e especializou-se em Ensino da Matemática pela Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas de Goiatuba.

Dedico este trabalho à minha linda esposa Lucilaine, aos meus enteados Gustavo e Yasmim, à minha mãe Norma, à minha avó Ana, à minha irmã Caroline e aos meus sobrinhos Francisco e Mariana.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo nosso livre-arbítrio e pela nossa capacidade de evoluirmos constantemente.

Aos meus familiares e esposa pelo incentivo constante nos estudos e na carreira profissional.

Aos colegas e professores do PROFMAT, em especial ao meu orientador Mário José por todas as contribuições dispensadas a este trabalho e pela paciência nas orientações.

Ao Professor Eguimar por sugerir o Círculo Matemático como objeto de estudo desta dissertação.

À Professora Maria Francisca por possibilitar a realização de uma sessão do Círculo Matemático na UEG Morrinhos.

À Professora Sheila por possibilitar a realização de uma sessão do Círculo Matemático no Colégio Estadual Coronel Pedro Nunes.

À todos os alunos que participaram das sessões do Círculo Matemático aplicadas para este trabalho.

Aos professores da banca examinadora, Dr.ª Ivonildes Ribeiro Martins Dias e Dr.ª Maria Francisca da Cunha, por suas valiozas contribuições.

E por fim à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho destacamos o Círculo Matemático, um projeto extracurricular de origem na antiga União Soviética que reúne semanalmente alunos, professores e futuros professores de matemática para se divertirem resolvendo problemas. Além de apresentar o Círculo Matemático relatamos duas experiências de aplicação deste projeto, uma com graduandos em Matemática e outra com alunos do ensino médio.

Palavras-chave

Matemática, Círculo, Matemático, Motivação, Resolução, Problemas.

Abstract

In this work we highlight the Math Circle, an extracurricular project which originated in the former Soviet Union that gathers students, teachers and future mathematic teachers weakly to have fun while solve problems. Besides presenting the Math Circle, we reported two experiences of application of this project, one with graduate students and other one with high school students.

Keywords

Mathematics, Circle, mathematical, Motivation, Resolution, Problems.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

No dia 3 de dezembro de 2019 foi divulgado em uma matéria do portal G1, ver [11], o resultado do PISA[1] 2018. Aproximadamente dois terços dos brasileiros de 15 anos sabem menos que o considerado básico em matemática pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). As notas são divididas em seis níveis onde o nível 2 é considerado o básico e os níveis 5 e 6 são considerados de alto desempenho. O Brasil tem participado da avaliação desde o seu início, em 2003, mas não tem mostrado uma evolução relevante nos resultados, ao contrário, os números demonstram uma tendência de estagnação como mostra a Figura 1:

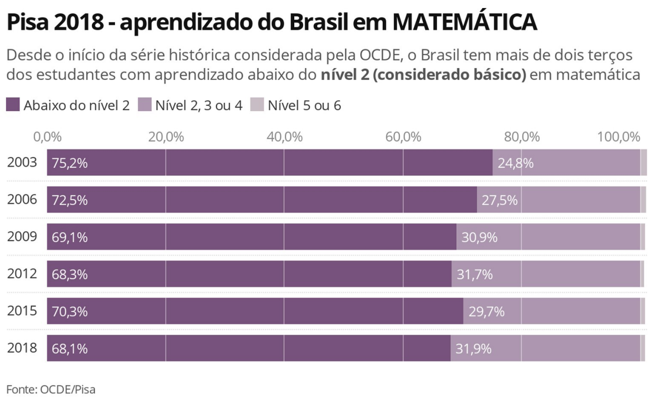


Figura 1: *Série histórica de resultados na prova de matemática dos alunos brasileiros no Pisa.*
Fonte: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/03/pisa-2018-dois-tercos-dos-brasileiros-de-15-anos-sabem-menos-que-o-basico-de-matematica.ghtml> Acesso em: 05 dez.2019

[1] O Pisa é uma avaliação mundial feita em dezenas de países, com provas de leitura, matemática e ciência, além de educação financeira e um questionário com estudantes, professores, diretores e escolas e pais. O resultado é divulgado a cada três anos - a edição mais recente foi aplicada em 2018 com uma amostra de 600 mil estudantes de 15 anos de 80 países diferentes. Juntos, eles representam cerca de 32 milhões de pessoas nessa idade.

Os resultados desse e de outros exames internacionais e nacionais indicam que o sistema educacional brasileiro tem falhado em garantir um ensino de qualidade, principalmente na área de matemática. É necessário que se promovam melhorias em vários aspectos relacionados à educação como: políticas públicas; currículos; formação de professores; práticas pedagógicas e materiais didáticos.

Apesar dos indicadores, esforços têm sido realizados ao longo dos anos no sentido de melhorar a educação básica no Brasil. A BNCC[2] é um ótimo exemplo. Elaborada por especialistas de todas as áreas do conhecimento e homologada, em sua versão final, em dezembro de 2018 tem por objetivo dar diretrizes, que sejam comuns às escolas públicas e particulares de todo o Brasil, sobre as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas em cada etapa e em cada disciplina no decorrer de toda a educação básica. Outro exemplo são os programas de pós-graduação como o PROFMAT[3] que visam melhor qualificar os professores de matemática para seu desempenho profissional.

O objetivo do presente trabalho, no entanto, é contribuir em algo bem específico, mas fundamental para que o processo de aprendizagem seja efetivo: a motivação. É comum ver alunos desmotivados em sala de aula especialmente nas aulas de matemática. Existem diversos fatores que explicam essa desmotivação como má formação dos professores, currículos, abordagem pedagógica, contexto familiar etc. Em relação à abordagem pedagógica muito se reclama do modelo de aula meramente expositivo, ainda muito presente nas salas de aula. Nesse modelo, ao trabalhar determinado tema, o professor explica a teoria, ensina procedimentos e fórmulas, resolve alguns exemplos e por fim aplica exercícios de fixação. O conteúdo muitas vezes não é contextualizado

[2] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

[3] O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional. É formado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O PROFMAT surgiu mediante uma ação induzida pela CAPES junto à comunidade científica da área de Matemática, representada e coordenada pela SBM. O PROFMAT visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência.

ou relacionado às outras áreas do saber e o aluno fica sem saber o porquê de estar estudando aquilo. Nesse sentido Lara afirma:

> (...) quando nós educadores, centramos todos os nossos esforços para que ensinar Matemática seja: desenvolver o raciocínio lógico e não apenas a cópia ou repetição exaustiva de exercícios padrão; estimular o pensamento independente e não apenas a capacidade mnemônica; desenvolver a criatividade e não apenas transmitir conhecimentos prontos e acabados; desenvolver a capacidade de manejar situações reais e resolver diferentes tipos de problemas e não continuar naquela "mesmice" que vivemos quando éramos alunos. Somente dessa maneira, será possível pensar em uma matemática prazerosa, interessante, que motive nossos alunos, dando-lhes recursos e instrumentos que sejam úteis para o seu dia a dia, buscando mostrar-lhes a importância dos conhecimentos matemáticos para sua vida social, cultural e política. (LARA, 2003, p.19).

Nessa linha, o professor tem papel fundamental na preparação e condução das aulas para que o aprendizado da matemática seja significativo. Segundo Polya:

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo. (POLYA, 1995, p. v).

A matemática está presente não somente em suas aplicações nas diversas ciências ou em suas abstrações teóricas, mas também no cotidiano das pessoas. Existem diversas situações rotineiras nas quais se podem aplicar conhecimentos e competências matemáticas. Um exemplo simples de como naturalmente se encara matematicamente o mundo é dado num trecho retirado de uma entrevista concedida por Paulo Freire ao professor Ubiratan D'Ambrósio:

> Quando a gente olha o relógio, por exemplo, a gente já estabelece a quantidade de minutos que a gente tem para, se acordou mais cedo, se acordou mais tarde, para saber exatamente a hora em que vai chegar à cozinha, que vai tomar o café da manhã, a hora que vai chegar o carro que vai nos levar ao seminário, para chegar às oito. Quer dizer, ao despertar os primeiros movimentos, lá dentro do quarto, são movimentos matematicizados. Para mim essa deveria ser uma das preocupações, a de mostrar a naturalidade do exercício matemático. (apud D' Ambrósio, 2004).

Esta maneira de relacionar a matemática com as experiências cotidianas do aluno também está presente na pedagogia de Piaget. Segundo ele:

> A aprendizagem matemática constrói-se através da curiosidade e do entusiasmo das crianças e cresce naturalmente a partir das suas experiências [...] A vivência de experiências matemáticas adequadas desafia as crianças a explorarem ideias relacionadas com padrões, formas, número e espaço duma forma cada vez mais sofisticada (PIAGET, 1976, p. 73).

Existem diversas propostas e experiências que buscam estimular o gosto pela matemática, dar a ela significado. Uma dessas experiências, talvez pouco conhecida no Brasil, e que é o objeto de estudo deste trabalho é o Círculo Matemático. É uma proposta extracurricular que tem como objetivos complementar as aulas regulares e principalmente motivar seus participantes a aprenderem matemática através de resolução de problemas.

A escolha do Círculo Matemático para esta dissertação se deu de maneira casual, em meio aos estudos para o Examente Nacional de Qualificação do PROFMAT. Após uma longa sessão de vídeo aulas no site Portal OBMEP do Saber, ver [13], um módolo de vídeos nomiado Círculo Matemático chamou a atenção. A proposta das vídeo aulas era simples: apresentar problemas matemáticos, um por vez, para que a pessoa que esteja assistindo os resolva e, assim que resolvê-los, veja as resoluções dentro das vídeo aulas. Surgiu daí uma motivação inesperada de sempre querer resolver o próximo problema e a conjectura se essa motivação poderia ser gerada em turmas de ensino médio.

Capítulo 1

Círculo Matemático

Os Círculos Matemáticos para estudantes da educação básica são encontros semanais extracurriculares que reúnem alunos com professores e futuros professores de matemática em um ambiente informal, nos contraturnos da escola ou nos finais de semana, para trabalhar em problemas ou tópicos interessantes da matemática. Combinam conteúdo de significado com aspectos que estimulam um senso de descoberta e entusiasmo sobre a matemática mediante resolução de problemas. Segundo Stankova e Rike:

> Os estudantes que lá estão não o fazem pela necessidade de preencher uma exigência escolar ou adicionar um item aos seus currículos. Em sua maioria, os estudantes lá estão porque amam matemática. Os professores encontram portanto estudantes dispostos e desejosos de aprender, enquanto que os estudantes encontram professores com conhecimento e entusiasmo muito além da experiência usual em salas de aula. Professores e estudantes anseiam pelo próximo encontro. (STANKOVA; RIKE, 2008, p.x).

São baseados na ideia de que estudar matemática pode gerar o mesmo entusiamo que praticar um esporte com um time. Conforme Fomim, Genkin e Itemberg:

> Frequentemente os estudantes se encontravam até altas horas da noite e viajavam juntos durante o final de semana ou durante o verão, construindo uma intimidade e um cooperativismo só obtido, em geral, por times esportivos. (FOMIM; GENKIN; ITENBERG, 1996, p.v).

Os Círculos Matemáticos têm origem na antiga União Soviética (atual Rússia) e têm tradição de mais de um século naquele país. Os Círculos mais conhecidos estão em Moscou e São Petersburgo. As sessões da Universidade Estadual de Moscou, por exemplo, contam com turmas a partir do sétimo ano para o ensino fundamental e para as três séries do ensino médio. Acontecem ao final das tardes de sábado. O total de participantes varia de 100 a 200 nas turmas de nível fundamental e um pouco menos nas turmas do nível médio, ver [4].

Variam em sua organização, estilos de sessões e objetivos. Mas, de modo geral, são encontros de duas horas, com turmas entre 10 e 30 estudantes e de três a seis instrutores por turma. Essas configurações são arranjadas conforme os recursos disponíveis em cada realidade. A maior parte dos instrutores é composta de graduandos e pós-graduandos, mas o instrutor chefe é geralmente um professor de matemática experiente. Não existem listas de chamadas nem provas. Os alunos não são obrigados a comparecer em todas as sessões e tem liberdade de se desligarem do programa a qualquer tempo.

Os programas dos círculos contemplam tópicos da matemática como Paridade, Análise Combinatória, Divisibilidade, Resto, Congruência, Equações Diofantinas, Principio das Casas dos Pombos, Invariantes, Geometria, Bases Numéricas, Desigualdades entre outros.

O público pode variar muito no que diz respeito a conhecimento e competências. Desde que haja recursos para tal, os alunos de cada ano podem ser divididos em turmas de níveis iniciante e avançados. Essa abordagem dá no mínimo o dobro do trabalho, pois exige a montagem de duas listas de problemas para cada encontro. Demanda também uma quantidade maior de instrutores. O mais usual é que não se divida os estudantes em níveis distintos. Conforme Dorichenko:

> Outra possibilidade é fazer apenas uma versão do material que será distribuído a todos os estudantes, sem dividi-los em níveis diferentes. Neste caso, cada conjunto de problemas tem que ter alguns problemas bem simples, outros mais desafiadores e também problemas adicionais. Esta abordagem dá oportunidade aos estudantes de progredir em seu próprio ritmo e é bem administrável com vários instrutores na sala. Também podem ser feitas discussões no quadro que sejam úteis para estudantes de níveis diferentes. (DORICHENKO, 2011, p.xi).

Os princípios e ideias desenvolvidos nos problemas iniciais permitem resolver problemas mais desafiadores ao longo da lista. Contemplam também problemas adicionais, de maior grau de dificuldade, para os estudantes mais avançados que conseguem resolver a totalidade da lista principal.

Além dos problemas, as sessões também trabalham jogos matemáticos e promovem competições, normalmente nos encontros finais de cada período.

Uma das competições mais conhecidas nos círculos russos é o Labirinto Matemático. É uma competição onde o "labirinto" é um conjunto de salas divididas por temas como Cálculo Mental, Jogos, Geometria, Lógica, Combinatória ou Quebra Cabeça. Cada competidor tem que resolver um problema em cada sala. Após visitar todas as salas, o participante tem direito de ir até a sala ou salão principal e escolher um prêmio. Geralmente os prêmios são livros. Obviamente os alunos que percorrem o labirinto primeiro escolhem os melhores prêmios.

Nas férias, todos os participantes do círculo costumam levar para casa uma lista de problemas para resolverem até o início do próximo período letivo. Aqueles que devolvem as listas resolvidas ganham prêmios. A qualidade do prêmio é de acordo com a qualidade das resoluções, ou seja, quantos problemas foram resolvidos e como esses foram desenvolvidos.

O sucesso das experiências no leste europeu inspirou a implantação de Círculos nos Estados Unidos. Os mais conhecidos são o *The Match Circle*, criado em 1994 pelos professores de Harvard Bob e Ellen Kaplan e os *Círculos Matemáticos de Berkeley* (CMB) fundados em 1998, pela Professora Zvezdelina Stankova. Hoje são mais de 230 Círculos por todo o país. O *The Match Circle* é voltado para crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental. Os CMB são considerados círculos de excelência e são direcionados para alunos mais avançados. Segundo Stakova e Rike:

> Sessões são lecionadas por matemáticos de renome e exploram áreas avançadas da matemática. Proveem uma oportunidade educacional para os melhores estudantes de matemática pré-universitários, não oferecida em nenhuma outra área do sistema educacional norte-americano. Além de aprender tópicos matemáticos avançados, aos estudantes são ensinadas as habilidades técnicas necessárias para descrever soluções de problemas complexos. (STANKOVA; RIKE, 2008, p.xii).

Sntakova e Rike, para dar uma melhor noção do nível de exigência dos círculos de Berkeley, citam alguns tópicos cobertos pelo programa:

> Tópicos cobertos no CMB incluem combinatória, teoria dos grafos, álgebra linear, transformações geométricas, sequências recursivas, séries, teoria dos conjuntos, grupos, teoria dos números, curvas elípticas, geometria algébrica, aplicações à computação, ciências naturais, economia e muito mais. (STANKOVA; RIKE, 2008, p.xii).

Por fim comparam o nível dos CMB a cursos mais avançados na área da matemática:

> As sessões são intensas e intelectualmente exigentes. É difícil especificar o quão avançado estas são sem assistir a uma sessão. Níveis comparáveis podem ser encontrados em cursos de graduação avançados e cursos iniciais de pós-graduação. (STANKOVA; RIKE, 2018, p.xii).

1.1 A condução de uma sessão de um Círculo Matemático

O sucesso de uma sessão de um círculo matemático passa incialmente pela escolha dos tópicos a serem trabalhados e de um bom conjunto de problemas. Não é uma tarefa fácil de ser realizada. Felizmente existem três livros excelentes, traduzidos pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que podem servir com material base para a realização de um Círculo Matemático. São eles: *Círculos Matemáticos. A Experiência Russa; Uma Década do Circulo Matemático de Berkeley. A Experiência*

Americana; Um Círculo Matemático de Moscou. Podem ser adquiridos na loja virtual da SBM, ver [9]. Os dois primeiros são organizados em tópicos, enquanto que o terceiro trabalha com diversos tópicos, de maneira não explícita, em cada conjunto de problemas. O material constante nos três livros é resultado de anos de experiências bem sucedidas em diversos Círculos Matemáticos.

No início da sessão é entregue a todos os alunos as folhas com o conjunto de problemas para serem lidos e resolvidos. Os estudantes podem resolvê-los em qualquer ordem. Os instrutores podem fazer algumas sugestões nesta etapa inicial como, por exemplo, não gastar muito tempo em um único problema. Pode ser melhor deixar para pensar nele mais tarde e seguir para os próximos problemas.

A troca de ideias e informações entre os participantes devem ser encorajada. Assim como nos esportes em equipe, o trabalho coletivo pode potencializar o desenvolvimento do grupo. Os alunos mais e menos avançados podem contribuir para a melhoria das competências uns dos outros.

Os estudantes que quiserem fazer perguntas ou discutir suas soluções podem pedir ajuda a um dos instrutores. Diversas vezes os alunos têm boas ideias, mas por inexperiência, não conseguem explicá-las ou desenvolvê-las. Outras vezes podem estar interpretando o problema de forma equivocada. A função do instrutor é auxiliar o estudante.

No meio da sessão é dado um pequeno intervalo. Um pouco antes ou um pouco depois desse intervalo são discutidos pelos instrutores os problemas das sessões anteriores. Nessas discussões são tratadas as ideias fundamentais e até técnicas de resolução para esses problemas. Esse momento pode ser utilizado também para algumas observações que podem ser úteis na resolução dos problemas da sessão atual. Outra possibilidade é trabalhar jogos ou problemas engraçados para relaxar a turma. Tudo vai depender do instrutor chefe, inclusive a escolha desse momento dentro da sessão. Dorichenko pondera que:

> As explicações do instrutor no quadro duram apenas cerca de 20 minutos em uma sessão de duas horas. O resto do tempo é usado para a resolução de problemas pelos estudantes e para a discussão individual com os instrutores. (DORICHENKO, 2011, p.xiii)

Os problemas adicionais são dados para aqueles que resolvem toda a lista principal antes do término da sessão. Em algumas ocasiões nas quais um estudante já resolveu um bom número de problemas da lista, mas está travado em todos as outros, a lista adicional pode ser dada a ele como alternativa. Sempre haverá aqueles que terão dificuldades com todos os problemas da lista. Nestes casos a intervenção dos instrutores se faz necessária, conforme diz Dorichenko:

> Sempre há alguns alunos que resolvem muito poucos ou nenhum dos problemas, não importa quão fácil seja a sessão. É importante que durante qualquer sessão um instrutor converse com cada estudante para dar uma sugestão ou simplesmente para falar sobre os problemas. (DORICHENKO, 2011,p.xiii).

1.2 Estrutura do Conjunto de Problemas

O conjunto de problemas pode ser selecionado e estruturado de diversos modos, conforme o público que se tenha e os objetivos que se queiram alcançar. Uma abordagem comum é organizar cada conjunto de problemas em torno de um tópico específico. Por exemplo, uma sessão é dedicada à Análise Combinatória, outra às Desigualdades, outra à Indução, e assim por diante. Essa abordagem é eficiente e pode possibilitar uma evolução rápida dos alunos em cada um desses tópicos. No entanto, ela possui algumas desvantagens, principalmente para públicos mais jovens. Pode ser tedioso resolver problemas de um único assunto durante uma sessão toda. Se não houver nenhuma explicação preliminar sobre o tema, o estudante que não perceber a ideia principal por contra própria pode não conseguir resolver nenhum problema, o que pode ser frustrante. Caso os instrutores ensinem alguns métodos ou resolvam alguns problemas sobre o assunto, corre-se o risco do aluno tentar apenas reproduzir os métodos aprendidos em problemas parecidos limitando assim a criatividade e o raciocínio.

Outra abordagem que pode ser interessante para um Círculo Matemático é estruturar o conjunto de problemas com tópicos diferentes, sem que os alunos saibam de quais se tratam. Um conjunto típico nesse formato geralmente se inicia com um problema muito fácil, que pode ser resolvido de diversas formas. É interessante ter também problemas com soluções que pareçam óbvias, porém erradas. Embora trabalhe diversos assuntos, cada lista tem um tópico especial e aproximadamente metade dos problemas se dedica a ele. Além disso, um problema preliminar fácil desse tópico deve ser introduzido na lista anterior para que o aluno tenha familiaridade com ele. Repetir problemas idênticos com roupagens distintas pode ser útil no desenvolvimento da percepção dos estudantes, segundo afirma Dorichenko:

> Muitas vezes os estudantes resolvem estes problemas como se fossem completamente novos. Mas fico muito feliz quando um aluno diz "Espera aí! Já resolvemos este problema!". Isto significa que ele aprendeu a ver a essência do problema e não se distrai com a aparência. (DORICHENKO, 2011,p.xv).

Um problema considerado difícil pode fazer parte da lista principal, desde que seja assegurado um tempo confortável durante a sessão, ou mesmo em sessões posteriores, para que os alunos possam trabalhá-lo com calma. Eventualmente é bom ter jogos matemáticos entre os problemas. Além de motivadores, as estratégias trabalhadas contribuem fortemente para desenvolver o raciocínio matemático. Segundo Kishimoto:

> O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que aos poucos será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados cullturais para os conceitos matemáticos e estudos de novos conteúdos. (KISHIMOTO, 2011, p. 95).

Toda sessão tem no mínimo um problema geométrico que pode ser um problema de cortes, um quebra cabeça ou um problema mais simples que envolva geometria clássica. As listas são encerradas com problemas adicionais, habitualmente mais sofisticados, reservados para os estudantes que resolvem toda a lista principal.

Uma das vantagens em não se explicitar com quais tópicos se está trabalhando é que os alunos aprendem a pensar cada problema e escolher os métodos adequados para resolvê-lo. Segundo Dorichenko:

> Muitas vezes não ocorre ao aluno que é necessário pensar sobre o problema para resolvê-lo. Na escola, muitos estudantes desenvolvem um habito de seguir uma rotina, muitas vezes sem compreender seu significado. ((DORICHENKO, 2011, p.xvi).

Por fim, é muito importante que os instrutores discutam o conjunto de problemas antes da realização de cada sessão. Cada instrutor deve tentar responder todos os problemas da lista ou pelo menos conhecer as soluções daqueles que não conseguiu resolver. Desta forma os alunos terão segurança no apoio dispensado.

1.3 Círculo Matemático no Brasil

No Brasil os Círculos Matemáticos são bem mais recentes e contam com pelo menos dois projetos: a Roda de Matemática e o Círculo da Matemático do Brasil.

Fundada em 2016 em São Paulo (SP) por Gustavo Aleixo, Ligia Zorzo e Janaina Villela, a Roda de Matemática é uma escola para crianças de 5 a 12 anos inspirada nos Círculos Matemáticos do leste europeu, onde matemáticos e jovens alunos se encontravam para trocar conhecimento. O objetivo é ensinar o gosto pela matemática de maneira divertida por meio de resolução de problemas. “Não temos aulas expositivas. Discutimos problemas matemáticos com grupos de até oito crianças. O objetivo é menos achar a solução da questão, mas, sim, quantas formas diferentes são possíveis para solucionar este problema”, é o que diz Gustavo Aleixo, ver [15]. Os alunos são estimulados a pensar os problemas, a discuti-los e de preferência a encontrar a solução entre eles. Dessa forma desenvolvem o raciocínio matemático, a cooperação e principalmente, aprendem matemática fazendo matemática. Para tanto, a abordagem dos problemas deve ser interessante, desafiadora e acessível.

A escolha por trabalhar com crianças no início de suas vidas escolares é para que elas aprendam a gostar da matemática antes que tenham tempo para detestá-la.

As aulas são semanais com duração de uma hora e vinte minutos. As crianças resolvem de dois a três problemas por aula. Assim o professor tem tempo suficiente para trabalhar e aprofundar os temas.

Os conteúdos das aulas tem como base a bibliografia dos círculos matemáticos traduzida para o inglês e disponível na biblioteca da Universidade de Berkeley.

Até o ano de 2018 a Roda de Matemática já recebia uma média de 150 alunos por semana. A equipe de professores é composta por matemáticos, físicos, engenheiros ou profissionais das ciências exatas, todos com o devido treinamento pedagógico.

O Círculo da Matemático do Brasil oferece desde 2013 aulas, em encontros semanais de aproximadamente uma hora, para crianças das séries inciciais do ensino fundamental em escolas públicas, preferencialmente de áreas carentes, das cinco regiões do Brasil, conforme o mapa da Figura 1.1:

Figura 1.1: *Cidades de Atuação.*
Fonte: <http://www.ocirculodamatematica.com.br/wp-content/uploads/2018/01/Mapa-Circulo-Matematica-Brasil.png> Acesso em: 20 nov. 2019.

As aulas são ministradas em turmas de no máximo 10 alunos por professores treinados na metodologia participativa do "The Match Circle", desenvolvida pelos professores de Harvard Bob e Ellen Kaplan e adaptada à realidade das escolas públicas brasileiras.

A opção de trabalhar com crianças das séries iniciais do ensino fundamental é devido ao fato de que um mau desempenho inicial limita drasticamente o aprendizado em matemática nas séries seguintes.

A linha pedagógica adotada é participativa e lúdica. Os erros, conjecturas, exemplos e contraexemplos dos alunos são os principais componentes pedagógicos no desenvolvimento do raciocínio matemático. Vale ressaltar que as aulas do círculo servem como complemento do trabalho realizado nas aulas regulares da educação básica. Os resultados esperados são: melhoria do conhecimento matemático; melhoria no desempenho escolar; fortalecimento do raciocínio abstrato; melhoria na competência do uso da matemática na vida cotidiana; melhoria da autoestima em relação à matemática.

O Círculo da Matemática do Brasil oferece periodicamente formação gratuita em parceria com as secretarias estaduais de educação. Os professores que passam pela formação recebem material didático gratuito.

O professor que desejar conhecer o Círculo da Matemática do Brasil pode acessar o site [9] . Lá constam todas as informações sobre o projeto, contatos, agenda dos encontros de formação, depoimento de professores, videoteca e material didático em PDF gratuito para download.

Capítulo 2

Sessão Teste do Círculo Matemático com Alunos da Graduação

A pesquisa bibliográfica sobre os Círculos Matemáticos revelou experiências exitosas pelo mundo, em especial na Rússia e nos Estados Unidos. O Círculo da Matemática do Brasil, com alunos das primeiras séries da educação básica, tem gerado bons resultados e vem se consolidando a cada ano. No entanto havia a necessidade de testar o Círculo Matemático em loco com alunos do ensino médio da rede pública.

Aproveitando uma oportunidade oferecida pela coordenação do curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual de Goiás (UEG) *Campus* Morrinhos, foi planejada a aplicação de uma sessão do Círculo com graduandos selecionados por um dos professores do curso. Essa sessão serviria como "piloto" para testar a dinâmica e fazer ajustes, caso necessário, visando uma futura aplicação no ensino médio.

O ambiente selecionado para a realização da sessão foi o laboratório de matemática do *Campus*, cedido gentilmente pela coordenação. O tempo planejado foi de duas horas, com um pequeno intervalo após a primeira hora, conforme os Círculos Matemáticos russos. Foram selecionados quatro graduandos que se mostraram interessados em participar do projeto. Os problemas selecionados (Apêndice A) pertencem, em sua maioria, ao "Conjunto de Problemas 0" constante no livro Um Círculo Matemático de Moscou de Sergey Dorichenko.

2.1 Aplicação do Círculo Matemático

No dia 4 de novembro de 2019 foi aplicada a sessão do Círculo Matemático das 19h30min às 21h30min com a presença dos quatro graduandos selecionados. Inicialmente fez-se um resumo sobre o que são os Círculos Matemáticos e quais os seus objetivos. Em seguida foi explicado que o intuito do encontro era que os participantes se divertissem e se desafiassem com a lista de problemas. Foi informado também que não era obrigatória a resolução de todos os problemas e nem havia a necessidade de que fossem resolvidos na ordem da lista. O diálogo e a troca de ideias com os colegas foram encorajadas, tal como o uso do quadro negro para exposição de possíveis ideias para as resoluções.

Os participantes se mostraram dispostos desde o início da sessão a ler e interpretar cada problema. A interação entre eles aconteceu de forma natural e em vários momentos houve trocas de informações. As intervenções do instrutor foram pontuais para que o processo fosse o mais ativo possível por parte deles.

Por não saberem sobre quais tópicos tratavam as questões, os graduandos logo se viram em posição de ler, interpretar, verificar, entender os padrões, testar hipóteses, errar, rever suas resoluções, discuti-las e por fim resolvê-las. E assim procederam em todos os momentos. Sentiram-se frustrados por não conseguir em alguns momentos, mas perseverantes em tentar novamente. À medida que tiveram sucesso nas resoluções, a satisfação ficou evidente em suas expressões e a motivação para resolver o problema seguinte aumentou. Não se abstiveram de ir ao quadro diversas vezes para cooperarem entre si na busca das soluções.

Um fato que chamou a atenção foi que, ao ser oferecido aos participantes 15 minutos de intervalo para que pudessem descansar. Os mesmos preferiram permanecer no local, tamanho o envolvimento com a resolução dos problemas. Ficou nítido que estavam gostando da experiência e que queriam aproveitá-la ao máximo.

Outro ponto a se destacar foi a manutenção da concentração ao longo de todo o período da sessão. A atenção de todos estava voltada para a resolução dos problemas. Os celulares, que hoje são tidos como grandes “vilões” do foco, raramente foram manuseados pelos graduandos.

Nos momentos finais foi sorteado um exemplar do livro *Um Círculo Matemático de Moscou* como forma de recompensa e incentivo. Por fim, aplicou-se o questionário (Apêndice B) cujas respostas serão discutidas posteriormente.

2.1.1 Algumas Resoluções Apresentadas pelos Participantes

O primeiro problema "Vovó leva quatro minutos para subir do primeiro andar de um prédio até o quinto. Se ela mantiver a mesma velocidade, quanto tempo vai levar para ela chegar ao décimo andar a partir do primeiro?" é, provavelmente, o mais fácil da lista. Mas exige certo nível de atenção, pois tem uma "armadilha" em seu enunciado. O aluno é induzido a acreditar que a subida do primeiro ao décimo andar é exatamente o dobro da distância da subida do primeiro ao quinto. Seria o caso se a vovó começasse a subido partindo do térreo, que para fins matemáticos, seria o andar de número zero. Percebida essa distração, é fácil notar que a velocidade da vovó é de um andar por minuto e que, ao subir do primeiro ao décimo andar, a vovó sobe a quantidade de 9 andares. Logo o tempo gasto na subida é de 9 minutos.

Os quatro participantes caíram na distração do problema e o responderam com convicção, conforme a resposta da Figura 2.1:

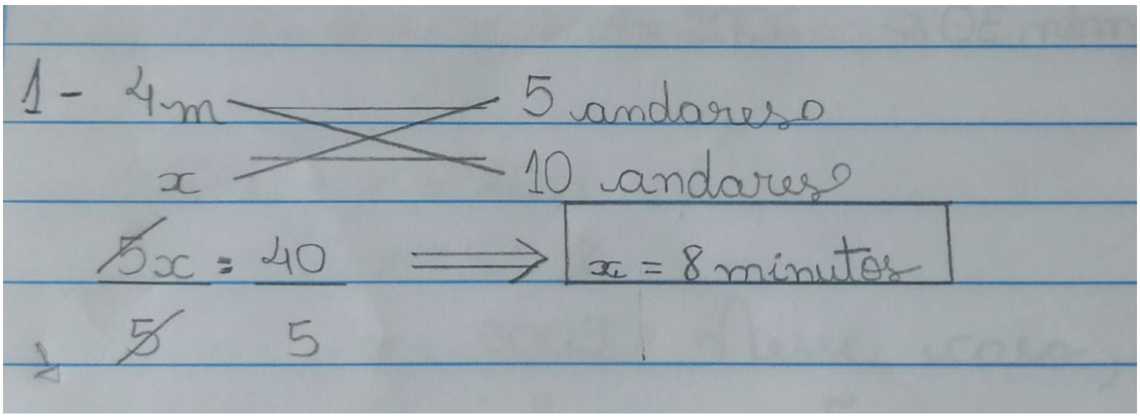


Figura 2.1: *Resolução do Problema 0.1.*
Fonte: O autor.

No segundo problema, sobre a pesagem das mochilas na balança desregulada, ver Apêndice A, os alunos não tiveram problemas na interpretação do enunciado. Logo perceberam que a chave para a resolução era determinar a posição inicial do ponteiro da balança. Tentaram testar valores, mas sem sucesso. Para não gastar muito tempo nesse problema partiram para os seguintes na intenção de retomá-lo mais adiante. Na parte final da sessão ocorreu a um dos estudantes representar os pesos das mochilas e a posição inicial do ponteiro da balança por letras e escrever as pesagens em um sistema de equações. A resolução do problema se deu de forma natural a partir disso, como mostra a Figura 2.2:

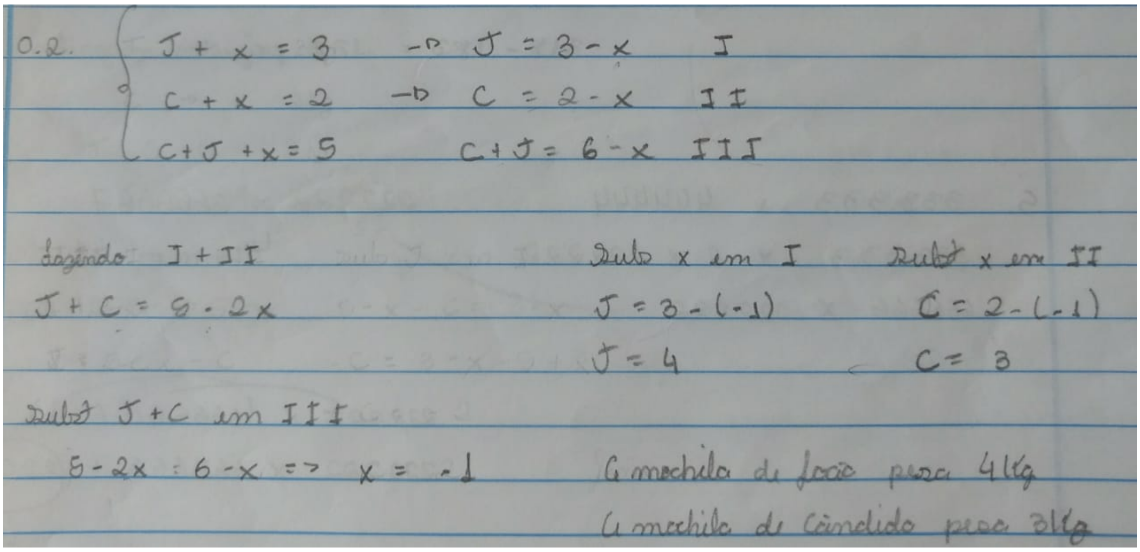


Figura 2.2: *Resolução do Problema 0.2.*
Fonte: O autor.

O terceiro problema "Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anelar é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar é o nono. Inverta a orientação novamente voltando para o mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar a contar dessa forma, indo e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?"gerou interesse imediato. O estudante, se quisesse, poderia fazer a contagem completa e assim descobrir qual o dedo do número 1000. Mas o desafio era descobrir uma maneira mais prática para chegar à resposta. O primeiro passo dos alunos foi tentar identificar o padrão para cada dedo. Perceberam rapidamente que os números pares eram contados apenas nos dedos indicador e anelar, os quais nomearam de dedo 2 e dedo 4 respectivamente. Em seguida observaram o padrão de distribuição dos números terminados em zero nesses dois dedos, como mostra a Figura 2.3:

Figura 2.3: *Esboço dos problemas 0.2 e 0.5 no quadro negro.*
Fonte: O autor.

Conforme mostra a Figura 2.3, perceberam que a partir do número 10 que aparece no dedo 2 as duas dezenas seguintes aparecem alternadamente nos dedos 4 e 2. Dessa forma a contagem se resume a esses dois dedos. Depois de identificados os padrões citados acima, os participantes determinaram que o número 1000 será contado no dedo indicador. Um dos estudantes conjecturou ser um caso de *Progressão Aritmética* e que bastava organizar e aplicar uma das fórmulas, mas acabou por seguir a linha de raciocínio descrita anteriormente.

Aproveitando o fato que três dos participantes haviam estudado Aritmética Modular fazia pouco tempo, foi sugerido que tentassem usar os conhecimentos adquiridos na resolução do problema. A possibilidade de usar uma ferramenta matemática, que há pouco aprenderam a utilizar, fora do contexto de aula gerou um enstusismo imediato. Após algumas tentativas e a observação do instrutor que o início da contagem é sempre no dedo polegar e o final sempre no dedo indicador na volta da contagem, uma das alunas percebeu que os números que ficam em cada dedo deixam o mesmo resto quando divididos por 8. Logo bastava saber o resto da divisão de 1000 por 8 para determinar a resposta, conforme a Figura 2.4:

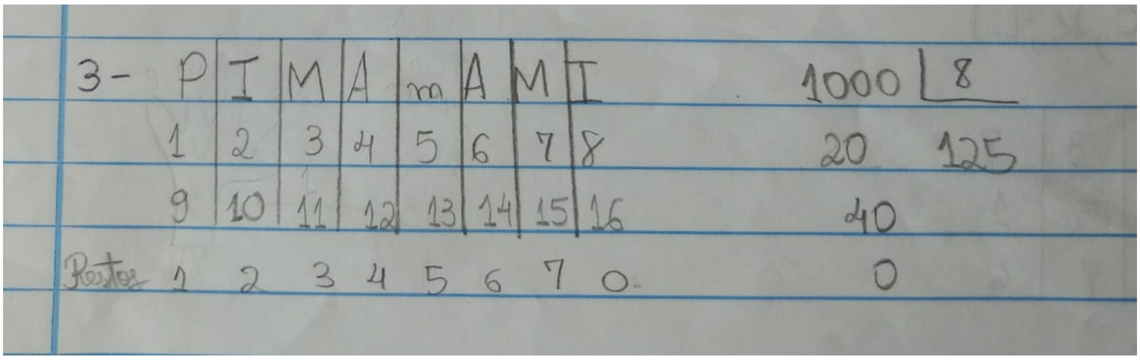


Figura 2.4: *Resolução do Problema 0.3.*
Fonte: O autor.

No quarto problema "João rasgou diversas páginas sucessivas de um livro. O número da primeira página que ele rasgou era e sabe-se que o número da última página estava escrito com os mesmo dígitos em alguma ordem. Quantas páginas João rasgou do livro?" a primeira ideia dos alunos foi escrever todas as possibilidades de páginas com os algarismos 1, 3 e 8. Determinar a última página era a chave para resolver o problema. Apesar de todas as tentativas e troca de ideias entre eles, a resolução só foi possível a partir das dicas do instrutor em forma de perguntas:

- É possível rasgar uma única página de um livro? Se eu rasgo, por exemplo, a página 1, qual a última página rasgada?

A dica possibilitou o seguinte raciocínio: independente da folha que se rasgue, a última página sempre será um número par. Logo a última página rasgada só pode ser a 318. Portanto o número total de páginas rasgadas é 135. Esse raciocínio é verificado na figura 2.5:

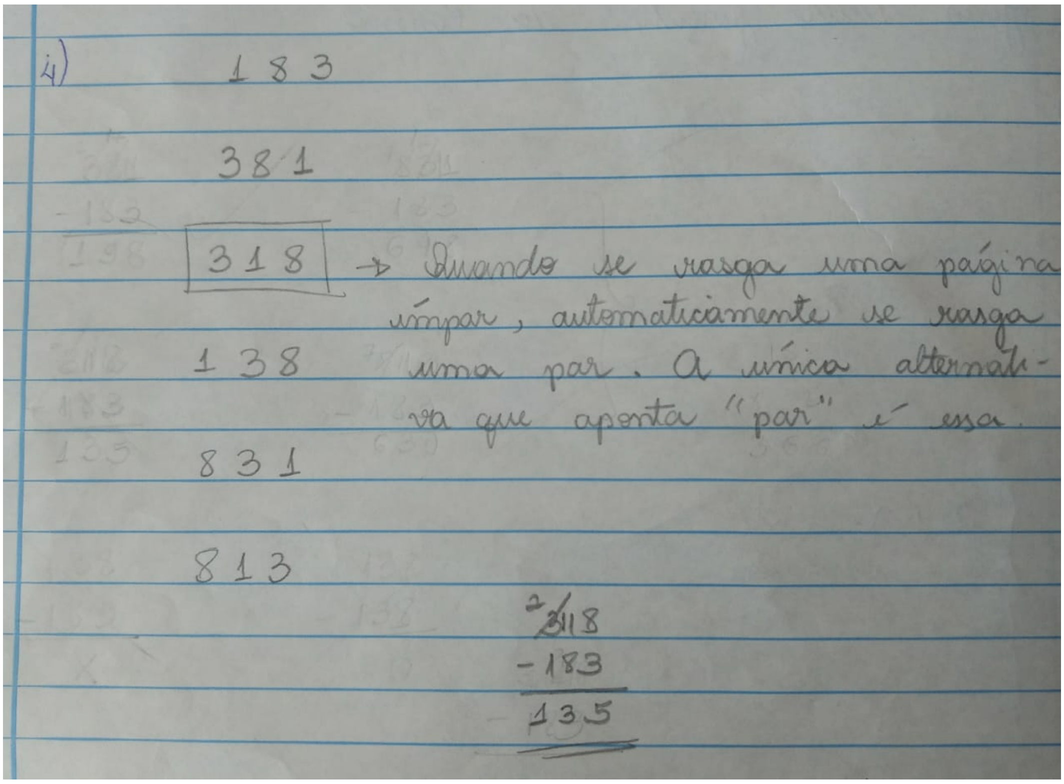


Figura 2.5: *Resolução do Problema 0.4.*
Fonte: O autor.

O quinto problema "O que é maior, 333333x444444 ou 222222x666667? Qual é a diferença entre eles?" foi resolvido após algumas discussões no quadro negro. Após algumas manipulações das expressões numéricas os participantes puderam determinar qual dos dois valores era maior e qual a diferença entre eles, conforme a Figura 2.6:

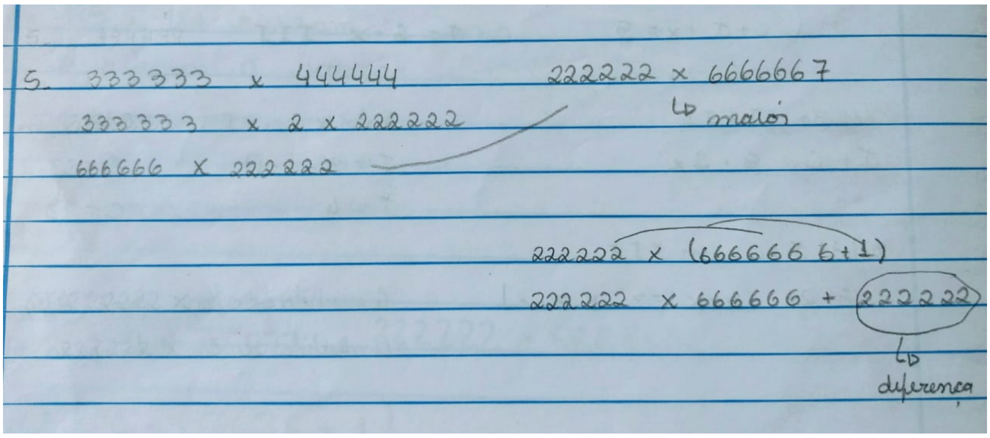


Figura 2.6: *Resolução do Problema 0.5.*
Fonte: O autor.

O oitavo problema "Juntos, o ursinho Puff, o Corujão, o Coelho e o Leitão comeram 70 bananas. Cada um comeu um número inteiro de bananas e cada um comeu pelo menos uma. O Ursinho Puff comeu mais do que cada um dos outros; o Corujão e o Coelho comeram juntos 45 bananas. Quantas bananas o Leitão comeu?" foi resolvido sem a necessidade de intervenção do instrutor. As informações dadas pelo problema foram suficientes para determinar as duas únicas configurações possíveis para a quantidade de bananas comidas por todos os personagens. Em ambas, a única quantidade possível para o Leitão é uma banana, conforme a resposta da Figura 2.7:

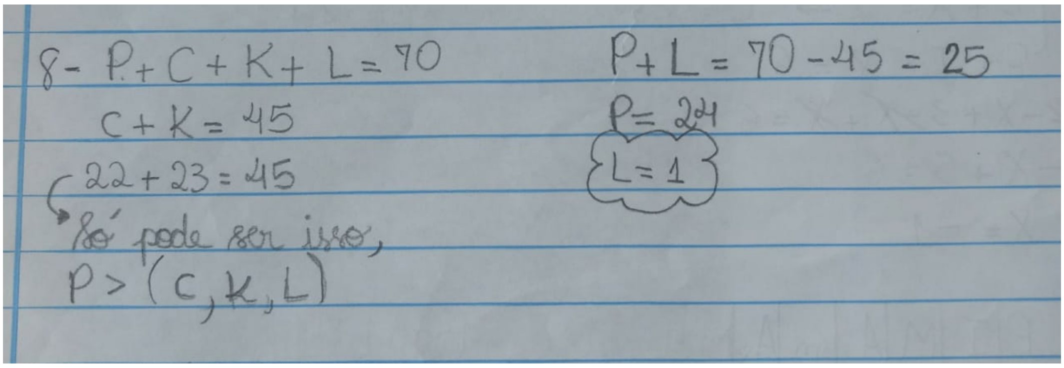


Figura 2.7: *Resolução do Problema 0.8.*
Fonte: O autor.

Por fim, o nono problema, ver Apêndice A, foi resolvido com facilidade por todos os presentes após algumas tentativas de organizar os números. O ponto fundamental do problema era posicionar o número 5 no centro da tabela, conforme mostra a resposta da Figura 2.8:

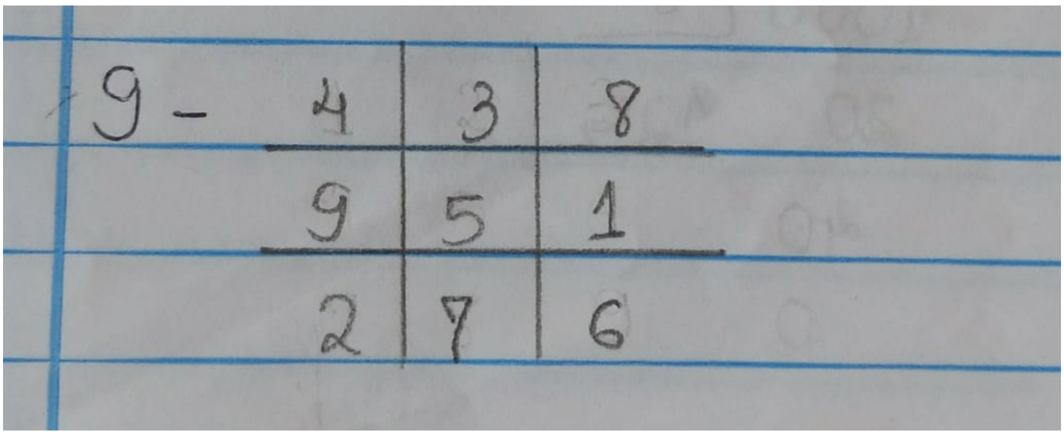


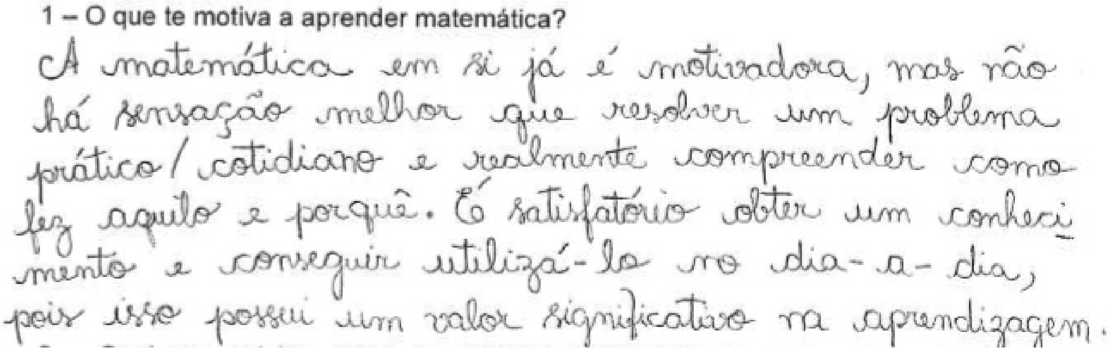
Figura 2.8: *Resolução do Problema 0.9.*
Fonte: O autor.

Os demais problemas não foram resolvidos durante a sessão, mas os quatro graduandos pediram para levar para tentar resolvê-los em casa.

2.1.2 Comentários Sobre o Questionário

O questionário (Apêndice B) foi composto por seis perguntas sendo uma fechada e cinco abertas. Foram elaboradas com o objetivo de verificar o efeito que o Círculo Matemático geraria no público participante.

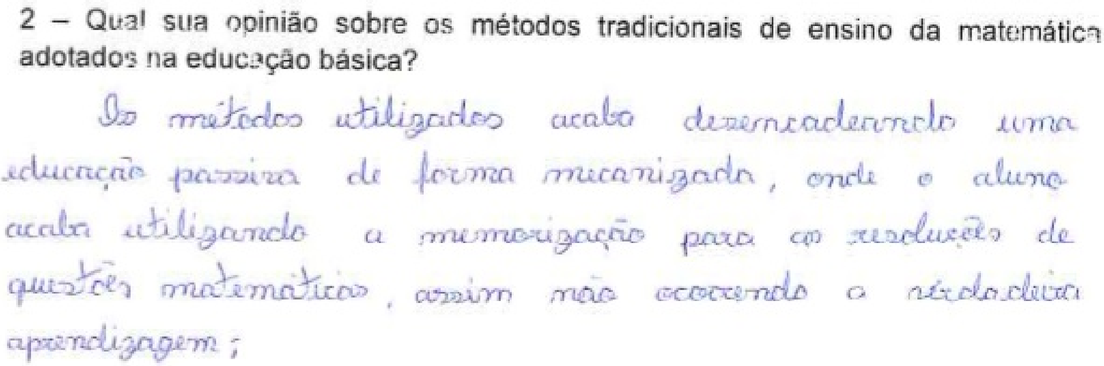
A primeira pergunta "o que te movia a aprender matemática?" visava entender o que motivava àquelas pessoas a estudar matemática. Deve-se levar em conta que são todos graduandos na referida área de conhecimento e que são alunos selecionados por serem destaques em suas turmas. Em essência, as respostas tinham haver com afinidade, admiração e curiosidade. A Figura 2.9 mostra uma das respostas:


1 – O que te motiva a aprender matemática?

A matemática em si já é motivadora, mas não há sensação melhor que resolver um problema prático/cotidiano e realmente compreender como fez aquilo e porquê. É satisfatório obter um conhecimento e conseguir utilizá-lo no dia-a-dia, pois isso possui um valor significativo na aprendizagem.

Figura 2.9: *Resposta à primeira pergunta do questionário.*
Fonte: O autor.

A pergunta seguinte "qual sua opinião sobre os métodos tradicionais de ensino da matemática adotados na educação básica?". Considera-se aqui metodologia tradicional a aula expositiva na qual o aluno é um agente mais passivo do aprendizado. Nas respostas dos quatro participantes predominaram palavras como ultrapassados, maçantes e pouco eficientes. A resposta da Figura 2.10 fala sobre mecanização:


2 – Qual sua opinião sobre os métodos tradicionais de ensino da matemática adotados na educação básica?

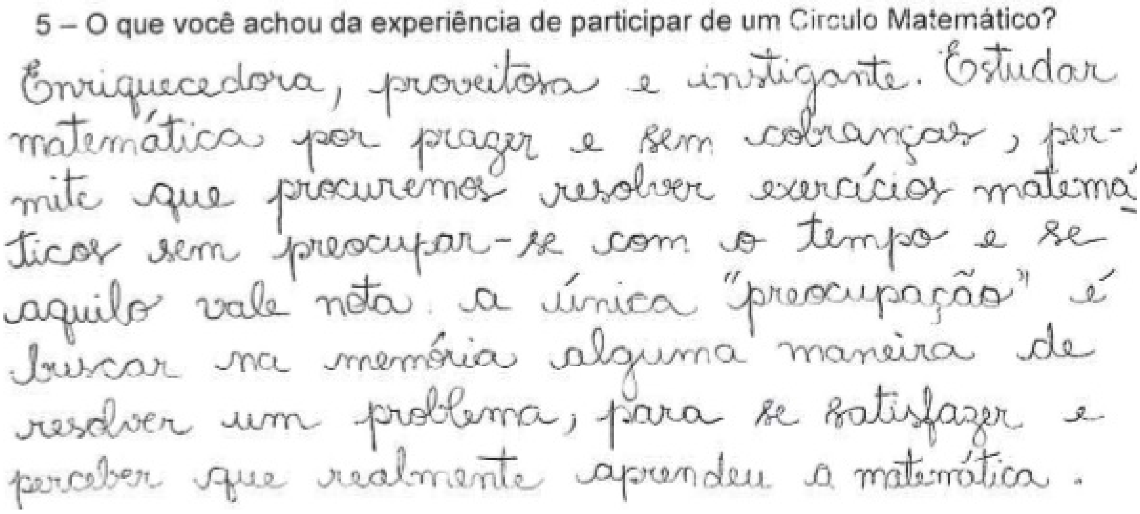
Os métodos utilizados acabo desencadeando uma educação passiva de forma mecanizada, onde o aluno acaba utilizando a memorização para as resoluções de questões matemáticas, assim não ocorrendo a verdadeira aprendizagem;

Figura 2.10: *Resposta à segunda pergunta do questionário.*
Fonte: O autor.

Na terceira questão “Em sua opinião, como deveria ser o ensino da matemática na educação básica?”. Essa pergunta serve de contraponto à anterior na medida em que procura saber o que poderia ser diferente em como se ensina matemática nos dias de hoje. De modo geral o que mais apareceu nas respostas foi: aulas dinâmicas e divertidas. Percebe-se a necessidade de participação ativa no processo de aprendizagem e acima de tudo, de motivação.

A quarta pergunta “você conhecia os Círculos Matemáticos” foi a única questão objetiva com duas opções de respostas, sim ou não. A resposta unanime foi “não”.

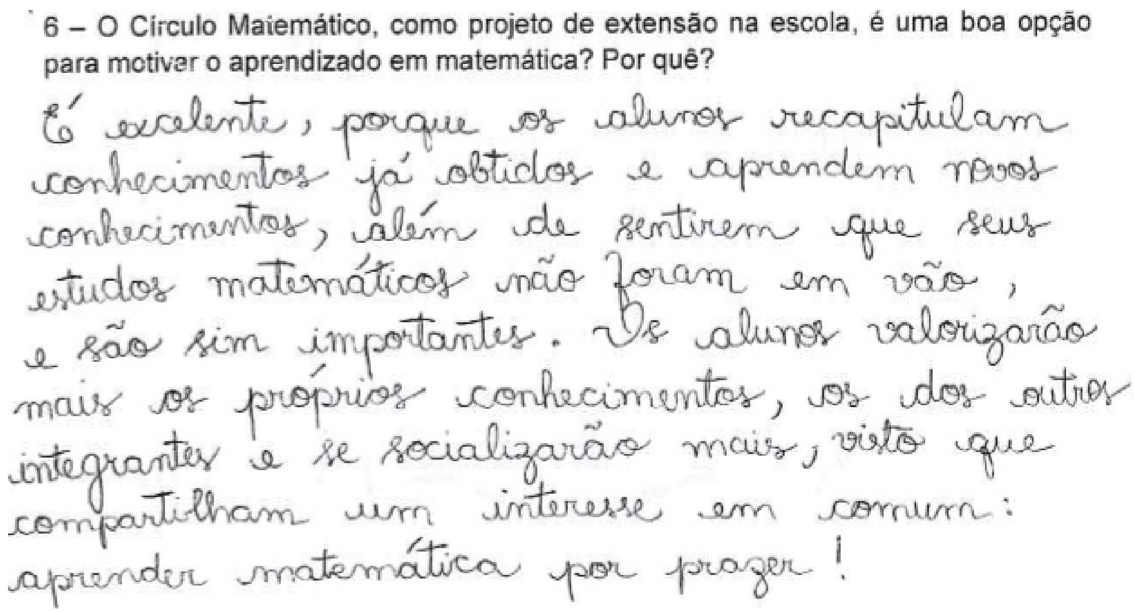
A quinta pergunta “o que você achou da experiência de participar de um Círculo Matemático?” objetivava saber se a sessão havia gerado motivação nos participantes. Todas as respostas foram positivas e confirmaram a impressão deixada ao longo de todo o encontro, como por exemplo, a resposta da Figura 2.11:


5 – O que você achou da experiência de participar de um Circulo Matemático?

Enriquecedora, proveitosa e instigante. Estudar matemática por prazer e sem cobranças, permite que procuremos resolver exercícios matemáticos sem preocupar-se com o tempo e se aquilo vale nota. a única "preocupação" é buscar na memória alguma maneira de resolver um problema, para se satisfazer e perceber que realmente aprendeu a matemática.

Figura 2.11: *Resposta à quinta pergunta do questionário.*
Fonte: O autor.

Finalmente a última pergunta pretendia extrair dos graduandos se eles achavam o Círculo Matemático uma boa opção de projeto extraclasse para ser aplicado em escolas da educação básica. Todos se mostraram favoráveis à aplicação do projeto em específico ou mesmo alguma outra proposta parecida. Uma das respostas comenta algumas vantagens como aprendizagem de novos conhecimentos, valorização dos conhecimentos que os alunos já possuem e socialização entre os participantes, como mostra a Figura 2.12:


6 – O Círculo Matemático, como projeto de extensão na escola, é uma boa opção para motivar o aprendizado em matemática? Por quê?

É excelente, porque os alunos recapitulam conhecimentos já obtidos e aprendem novos conhecimentos, além de sentirem que seus estudos matemáticos não foram em vão, e são sim importantes. Os alunos valorizarão mais os próprios conhecimentos, os dos outros integrantes e se socializarão mais, visto que compartilham um interesse em comum: aprender matemática por prazer!

Figura 2.12: *Resposta à sexta pergunta do questionário.*
Fonte: O autor.

As respostas apresentadas dão indicativos que falta motivação para estudar matemática, muito em função do modelo de aula expositiva, ainda muito comum nas escolas brasileiras. Por outro lado, a abordagem proposta em um Círculo Matemático, demonstrou bom potencial de motivar seus participantes a se engajarem na resolução de problemas matemáticos propostos.

Capítulo 3

Sessão do Círculo Matemático com Alunos do Ensino Médio

A experiência com os graduandos da UEG transcorreu muito bem. Pôde-se observar a fluidez nas dinâmicas de resolução de problemas e na interação entre os participantes. Havia dúvidas se seria gerado o mesmo engajamento em uma sessão com alunos do ensino médio, haja vista a diferença de públicos. No curso de graduação têm-se naturalmente indivíduos mais interessados e envolvidos com a matemática enquanto que no ensino médio os alunos ainda estão em processo de escolha do que vão estudar no ensino superior. Há também a diferença de idade e maturidade nos dois níveis.

Foi autorizada a aplicação do Círculo Matemático no Colégio Estadual Coronel Pedro Nunes, também situado em Morrinhos, graças ao intermédio de uma professora de matemática pertencente ao quadro efetivo do colégio. Havia a pretensão de promover mais de uma sessão para uma melhor observação. No entanto, para não atrapalhar a rotina escolar, a direção optou por conceder somente uma data. Desta vez a forma de seleção dos participantes foi diferente. Uma semana antes do encontro, foi feito o convite em todas as salas de ensino médio do colégio. Antes do convite foi perguntado quais dos presentes gostava de matemática, pois a proposta para participar do Círculo Matemático era direcionada para esses alunos. A princípio se inscreveram quinze alunos, mas na véspera do encontro haviam trinta estudantes inscritos, sendo oito do sexo masculino e vinte e dois do sexo feminino.

3.1 Aplicação do Círculo Matemático no Ensino Médio

A sessão do Círculo aconteceu no dia 21 de novembro de 2019, no período matutino, das 07h30min às 09h30min, com a presença de todos os inscritos. O conjunto de problemas e as instruções dadas foram os mesmos da sessão teste da UEG.

Havia a preocupação de que alguns dos alunos estivessem ali no intuito de faltarem às suas respectivas aulas, mas desde o início, todos os presentes focaram em tentar resolver o conjunto de problemas. A quantidade de participantes não foi um empecilho para a manutenção da disciplina e da organização do Círculo. De forma natural sentaram-se ao lado dos colegas com os quais tinham mais afinidade o que facilitou o intercâmbio de informações nesses pequenos grupos. Diferentemente do que ocorreu na sessão da UEG, os participantes buscaram mais a ajuda do instrutor para compreender os enunciados dos problemas. Em contrapartida nenhum deles quis ir ao quadro mesmo no momento em que tiveram boas ideias para a resolução dos problemas. Ao final do encontro foi sorteado um exemplar do livro *Um Círculo Matemático de Moscou* e aplicado o questionário do Apêndice B.

3.1.1 Algumas Resoluções Apresentadas pelos Participantes

Em média, cada participante resolveu de três a quatro problemas. Dos trinta alunos presentes quatro se destacaram resolvendo as questões com maior autonomia e servindo de auxilio para os demais colegas.

A primeira questão "Vovó leva quatro minutos para subir do primeiro andar de um prédio até o quinto. Se ela mantiver a mesma velocidade, quanto tempo vai levar para ela chegar ao décimo andar a partir do primeiro?", aparentemente a mais fácil, foi logo resolvida por boa parte dos estudantes. Assim como ocorreu na sessão da UEG todos caíram na "armadilha" de achar que a subida do primeiro ao décimo andar é o dobro da distância da subida do primeiro ao quinto, logo o tempo gasto seria o igualmente o dobro. A resposta da Figura 3.1 exemplifica essa linha de raciocínio:

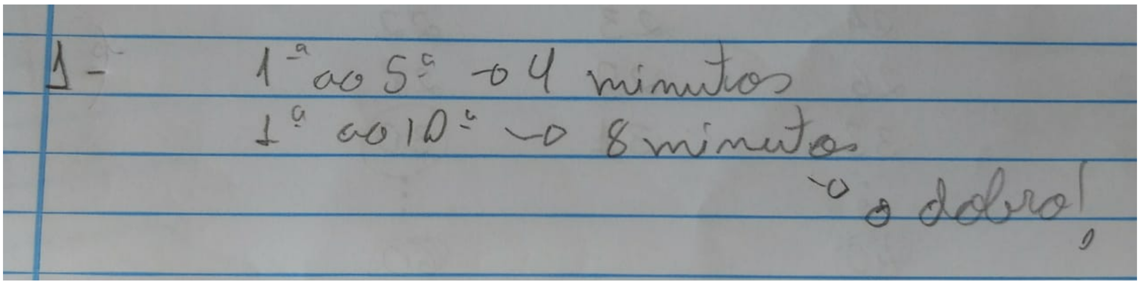


Figura 3.1: *Resolução do Problema 0.1 na sessão do ensino médio.*
Fonte: O autor.

Mesmo com boa convicção a cerca da resposta alguns alunos optaram por confirmar se a mesma estava correta. Nesse momento levantou-se a dúvida se ao subir do primeiro ao quinto andar a vovó havia de fato subido cinco andares. Em questão de pouco tempo alguns alunos perceberam que nesse intervalo são quatro andares, logo a vovó havia subido um andar por minuto. Concluíram então que, mantendo a mesma velocidade, a vovó subiria do primeiro ao décimo andar em nove minutos.

Na segunda questão da lista todos conseguiram interpretar o que estava sendo pedido, alguns com ajuda do instrutor após uma leitura comentada do enunciado. O procedimento geral foi tentar descobrir onde o ponteiro da balança estava quando não havia nada em cima dela. No entanto, ninguém conseguiu chegar a um valor. O problema foi resolvido pelo instrutor na parte final da sessão quando foi relembrada a possibilidade de representar as incógnitas envolvidas com letras e assim formar um sistema de equações.

O terceiro problema "Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anelar é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar é o nono. Inverta a orientação novamente voltando para o mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar a contar dessa forma, indo e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?"foi o que mais gerou interesse em toda turma. O primeiro passo foi o fazer a contagem nos dedos até certo ponto na tentativa de encontrar algum padrão. A primeira observação foi que todos os números pares estariam ou no dedo indicador ou no dedo anelar, reduzindo as possibilidades a esses dois dedos. Após algumas contagens perceberam o mesmo padrão identificado pelos alunos da UEG. O primeiro número terminado no algarismo zero, o 10, é contado no dedo indicador. O 20 e o 30 são contados no anelar, 40 e 50 no indicador, 60 e 80 no anelar e assim por diante. Seguindo esse padrão o número 100 é contado no dedo anelar, o 200 no indicador, o 300 no anelar, o 400 no indicador e assim por diante. Logo o número 1000 é contado no dedo indicador conforme a Figura 3.2:

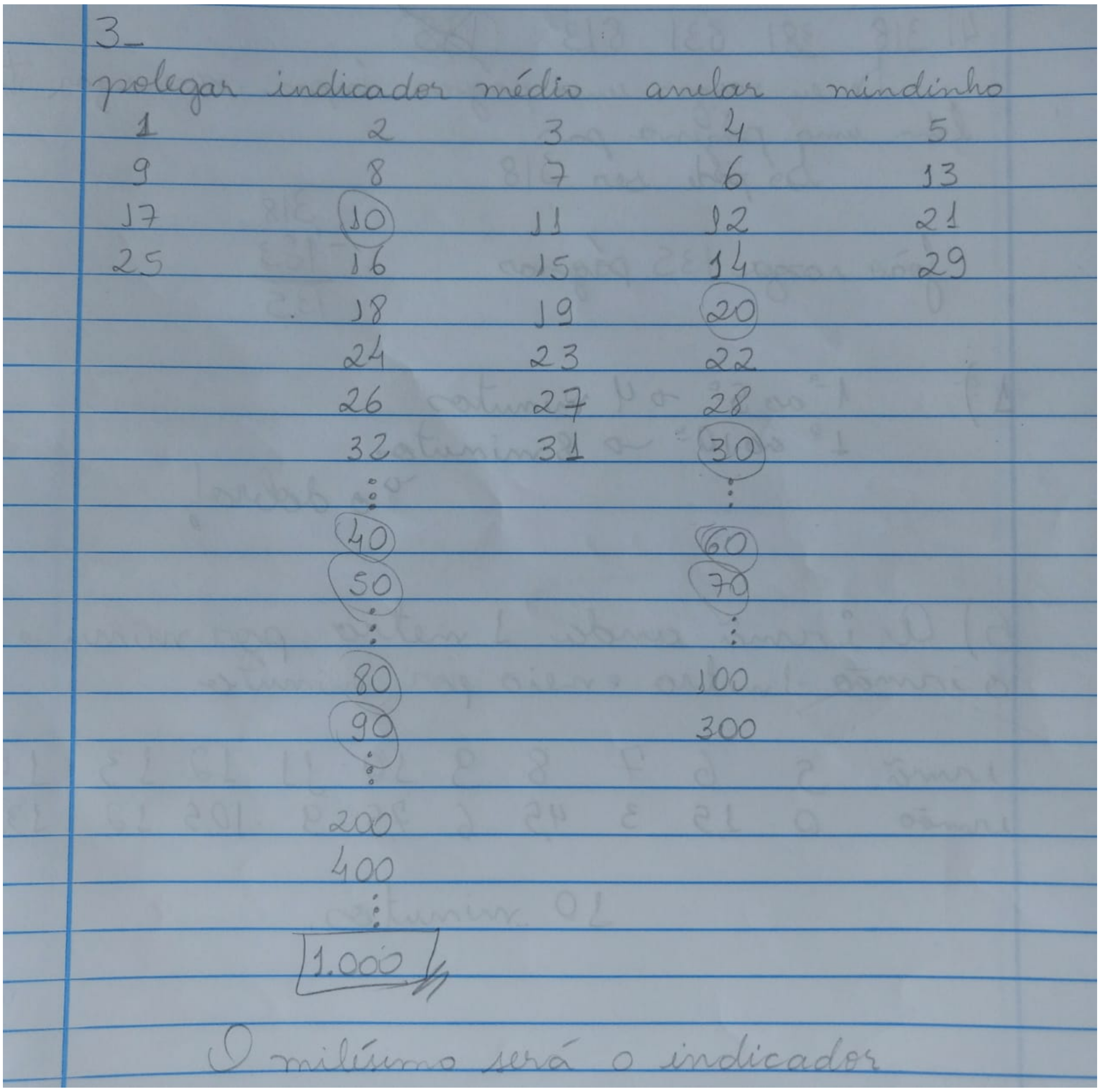


Figura 3.2: *Resolução do Problema 0.3 na sessão do ensino médio.*
Fonte: O autor.

Certamente esse não é o raciocínio mais prático para se chegar ao resultado, mas há de se ressaltar o esforço, a criatividade e a perseverança desses alunos. Após a confirmação do acerto do resultado, ficou nítida a satisfação por terem resolvido o problema. Na parte final do encontro, o problema foi resolvido pelo instrutor utilizando, de modo informal, a aritmética dos restos.

O problema quatro "João rasgou diversas páginas sucessivas de um livro. O número da primeira página que ele rasgou era e sabe-se que o número da última página estava escrito com os mesmo dígitos em alguma ordem. Quantas páginas João rasgou do livro?" também gerou interesse. Após compreenderem o que estava sendo pedido, rapidamente anotaram todas as possibilidades de páginas a partir das combinações possíveis dos dígitos 1, 8 e 3. O desafio agora era saber qual a última página rasgada do livro. A incerteza perdurou por um bom tempo. Por fim foi necessário dar a mesma dica dada aos alunos da UEG.

Partindo dessas duas perguntas, a conclusão de que a última página rasgada do livro só poderia ser par, a única possibilidade era a 318. Portanto a quantidade de páginas rasgadas foi de 135, conforme mostra uma das resoluções na Figura 3.3:

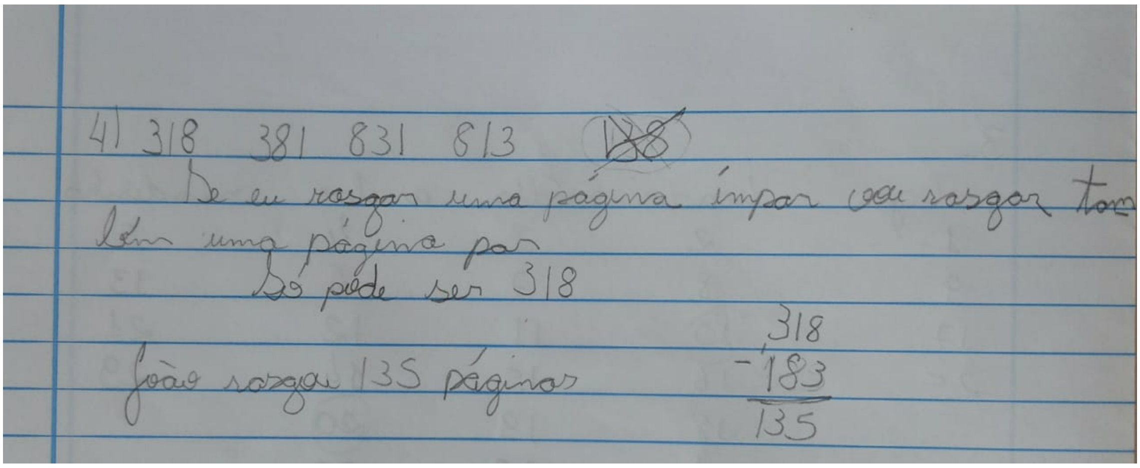


Figura 3.3: *Resolução do Problema 0.4 na sessão do ensino médio.*
Fonte: O autor.

O quinto problema não foi adequadamente respondido por nenhum dos participantes. Alguns disseram ter a impressão de que o produto 222222x666667 é visualmente maior que 333333x444444 por causa do termo 666667.

Poucos alunos trabalharam na resolução do sexto problema, ver Apêndice A. Aqueles que resolveram procederam de forma muito parecida. Consideraram a velocidade da irmã como sendo um metro por minuto e a do irmão um metro e meio por minuto. Observaram que a aproximação do irmão seria de meio metro a cada minuto. Como ele estaria cinco metros atrás dela no momento do início de sua partida, a conclusão é que o tempo necessário para alcança-la é de dez minutos. A resposta da Figura 3.4 mostra o raciocínio de um dos alunos comparando a distância percorrida pelos dois irmãos minuto a minuto até o momento em que se encontram:

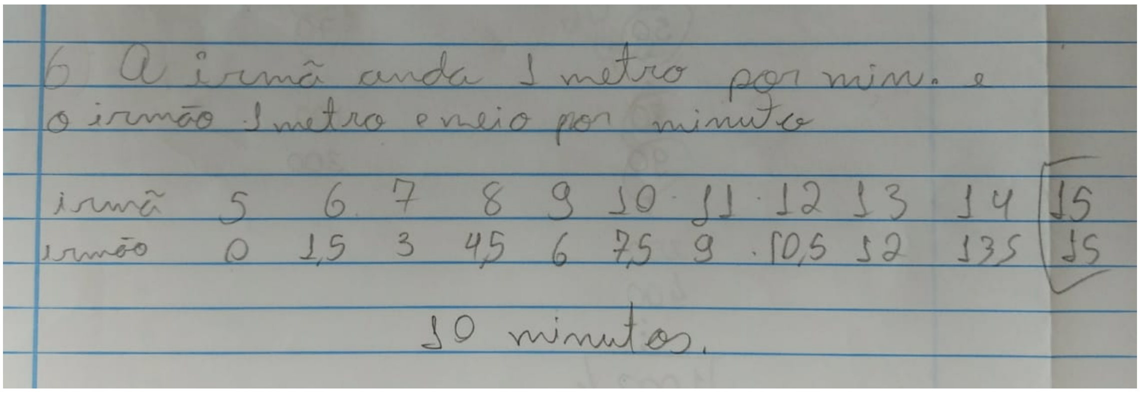


Figura 3.4: *Resolução do Problema 0.6 na sessão do ensino médio.*
Fonte: O autor.

O oitavo problema "Juntos, o ursinho Puff, o Corujão, o Coelho e o Leitão comeram 70 bananas. Cada um comeu um número inteiro de bananas e cada um comeu pelo menos uma. O Ursinho Puff comeu mais do que cada um dos outros; o Corujão e o Coelho comeram juntos 45 bananas. Quantas bananas o Leitão comeu?" foi um dos mais estimulantes para os alunos. A linha de raciocínio foi semelhante a da sessão teste. Utilizando a informação que dizia que o Corujão e o Coelho juntos comeram 45 bananas perceberam que por consequência o Ursino Puff e o Leitão comeram em conjunto 25 bananas. Analisando as possíveis distribuições concluíram que as únicas possibilidades de bananas para o Corujão e para o Coelho era de 23 para um e 22 para o outro, caso contrário um dos dois teria comido no mínimo a mesma quantidade de bananas que o Ursinho Puff, o que contraria o fato de que este comeu o maior número de bananas. Logo o Ursinho Puff comeu 24 bananas. Portanto, o Leitão só pode ter comido uma banana. A Figura 3.5 mostra uma das respostas:

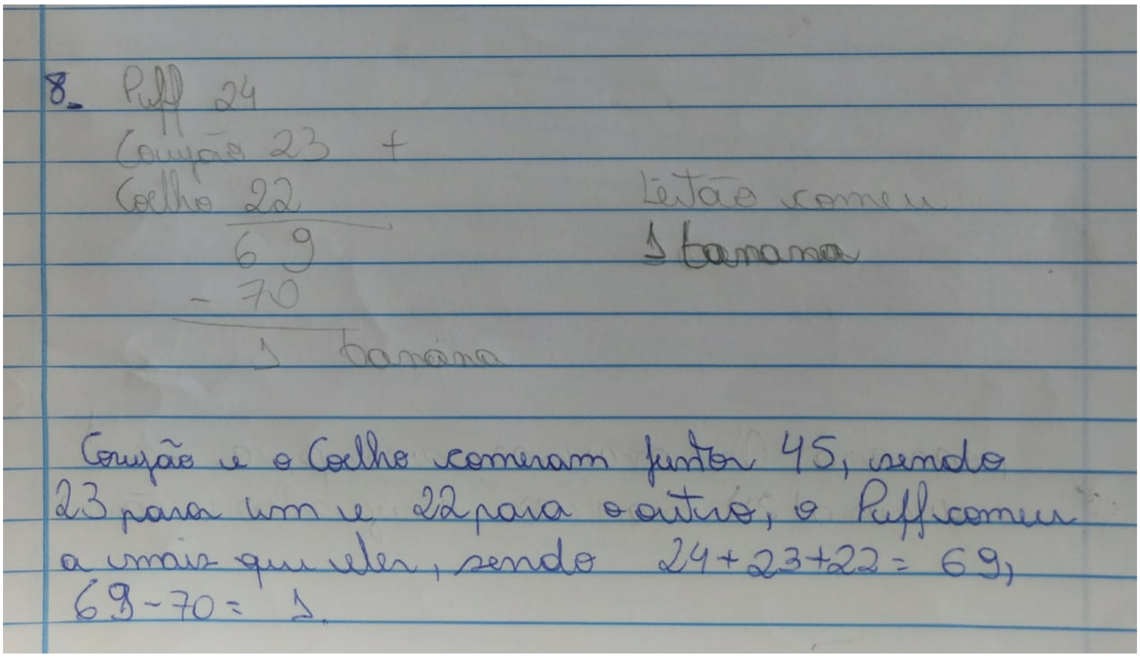


Figura 3.5: *Resolução do Problema 0.8 na sessão do ensino médio.*
Fonte: O autor.

O nono problema não ofereceu dificuldades aos participantes demandando apenas algumas tentativas de encaixe dos valores, como exemplifica uma das respostas na Figura 3.6:

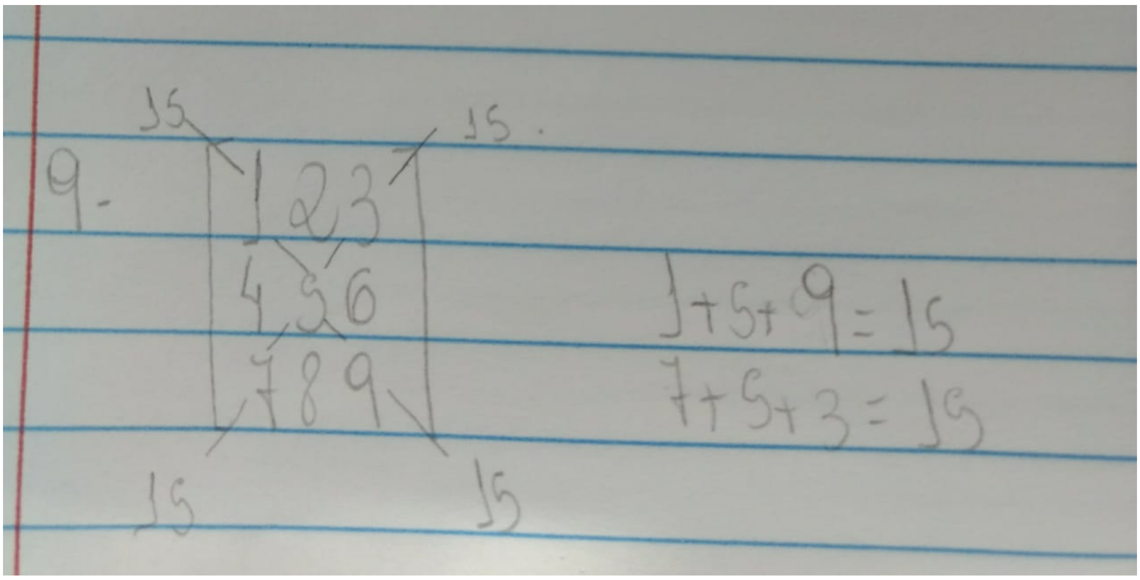


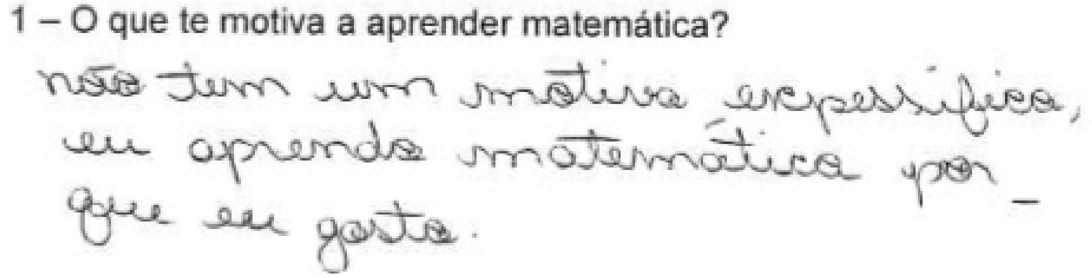
Figura 3.6: *Resolução do Problema 0.9 na sessão do ensino médio.*
Fonte: O autor.

Os problemas 7, 10 e 11 não foram resolvidos por nenhum participante. Não foi possível apresentar as soluções aos alunos, pois o tempo não foi suficiente. A maior parte dos alunos pediu para levar a lista de problemas para casa para que pudessem tentar resolver aqueles que ficaram pendentes.

3.1.2 Comentários Sobre o Questionário

No instante final da sessão, foi aplicado o mesmo questionário da sessão teste. O intuito, além de verificar o grau de motivação gerado pelo Círculo Matemático, era comparar as respostas dadas pelos participantes dos dois Círculos.

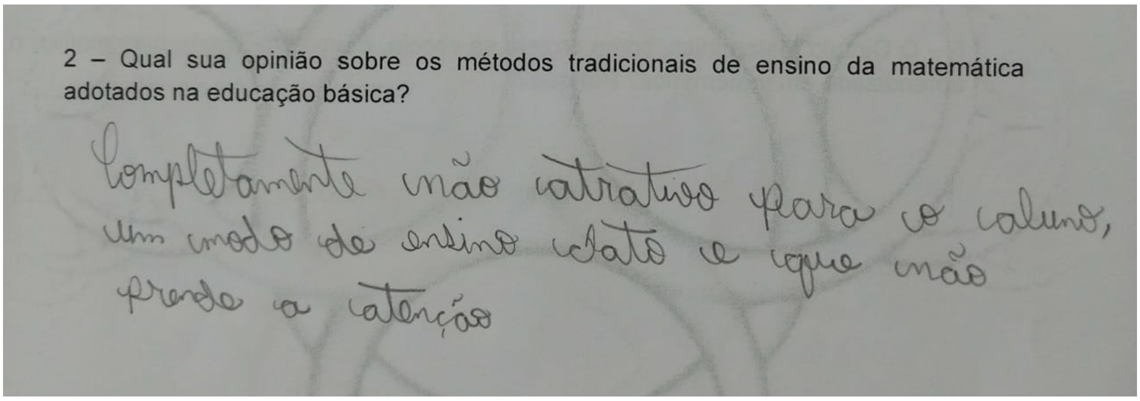
Na primeira pergunta, que trata sobre a motivação em aprender matemática, a maior parte das respostas envolvia a palavra "gostar". Todos os que estavam presentes gostam de matemática, alguns por gostar de como ela ajuda a desenvolver o raciocínio lógico, outros por admirar sua beleza e aqueles, como mostra a Figura 3.7, que gostam sem motivo específico:


1 – O que te motiva a aprender matemática?

não tem um motivo espessifico, eu aprendo matemática por-que eu gosto.

Figura 3.7: *Resposta à primeira pergunta do questionário no ensino médio.*
Fonte: O autor.

Quando perguntados sobre a opinião deles sobre os métodos tradicionais de ensino duas palavras foram as mais recorrentes: ultrapassado e chato. Existe uma evidente desmotivação de boa parte dos alunos com relação ao ensino da matemática e parte dela se deve ao modelo de aula, predominantemente expositivo. A resposta da Figura 3.8 exemplifica um pouco dessa insatisfação com o ensino da matemática nas escolas:

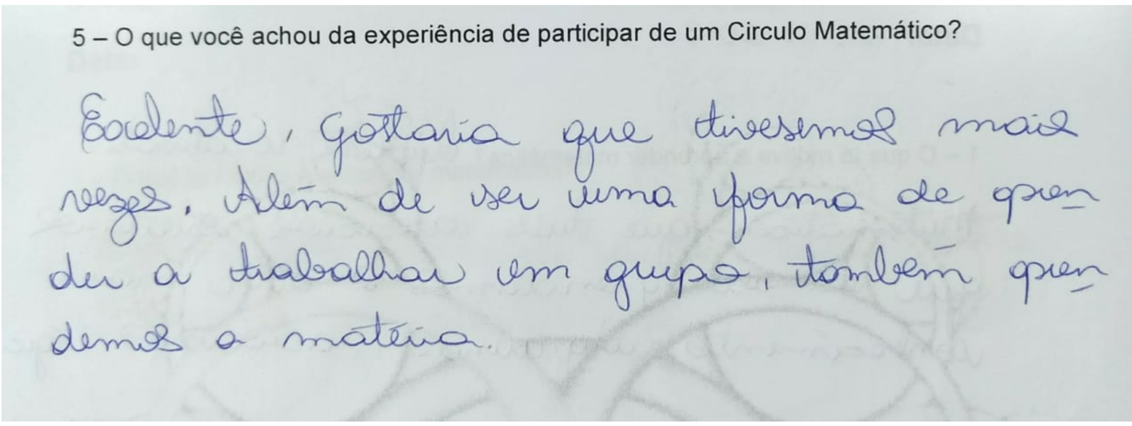

2 – Qual sua opinião sobre os métodos tradicionais de ensino da matemática adotados na educação básica?

Completamente não atrativo para o aluno, um modo de ensino chato e que não prende a atenção

Figura 3.8: *Resposta à segunda pergunta do questionário no ensino médio.*
Fonte: O autor.

Questionados sobre como deveria ser o ensino da matemática as respostas mais recorrentes falavam sobre aulas dinâmicas e divertidas. Alguns alunos responderam que poderiam ser como o Círculo Matemático. Ficou evidente que o maior anseio é pela motivação.

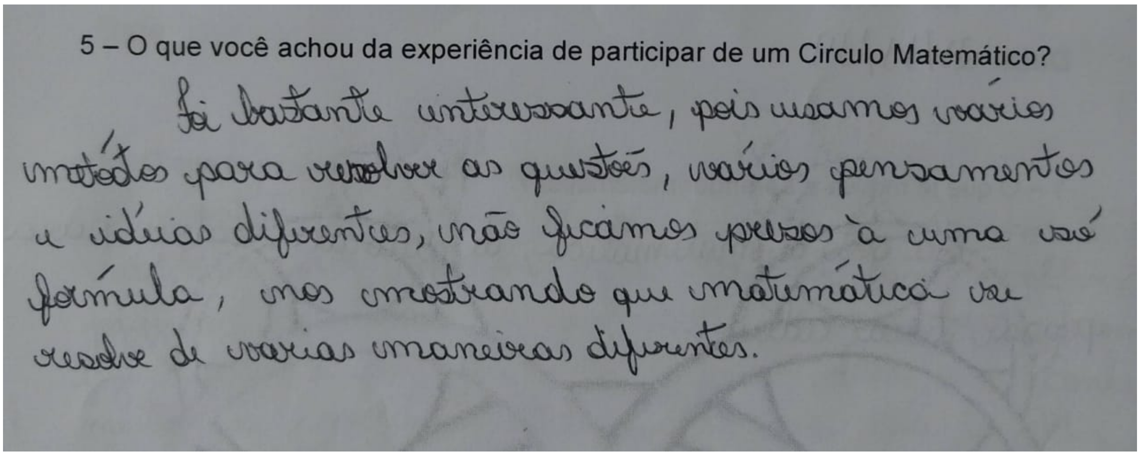
A totalidade dos participantes, assim como ocorreu na sessão da UEG, não conheciam os Círculos Matemáticos. Sobre terem participado de uma seção do Círculo, as respostas foram muito positivas. Destacaram pontos como: motivação; trabalho em grupo; valorização dos conhecimentos dos alunos; possibilidades diversas para a resolução de um problema. Houve até aqueles que manifestaram vontade em participar do Círculo Matemático mais vezes, como demonstra uma das respostas na Figura 3.9:


5 – O que você achou da experiência de participar de um Circulo Matemático?

Excelente, Gostaria que tivessemos mais vezes. Além de ser uma forma de apren der a trabalhar em grupo, tambem apren demos a matéria.

Figura 3.9: *Resposta 1 à quinta pergunta do questionário no ensino médio.*
Fonte: O autor.

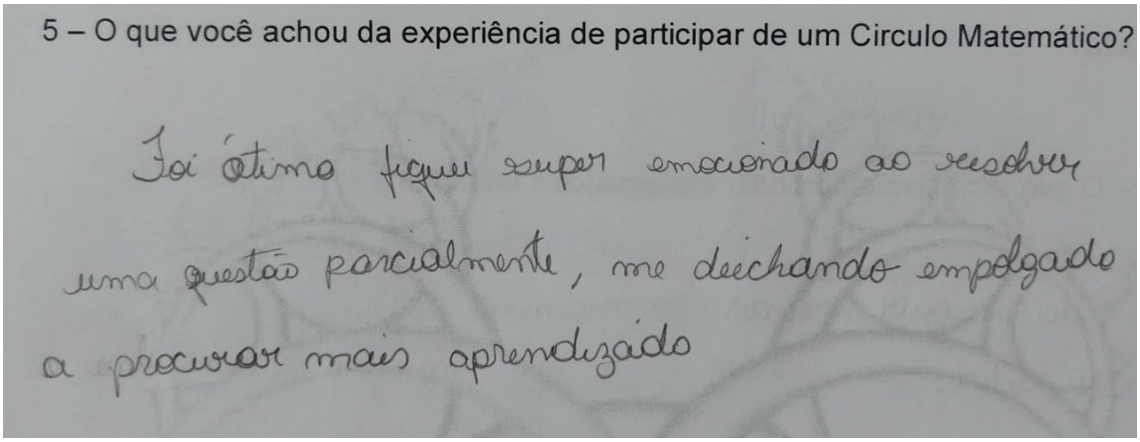
Na resposta da Figura 3.10, um dos alunos destaca as várias possibilidades para resolver um determinado problema:


5 – O que você achou da experiência de participar de um Circulo Matemático?

Foi bastante interessante, pois usamos vários métodos para resolver as questões, vários pensamentos e idéias diferentes, não ficamos presos à uma só fórmula, nos mostrando que matemática se resolve de varias maneiras diferentes.

Figura 3.10: *Resposta 2 à quinta pergunta do questionário no ensino médio.*
Fonte: O autor.

Uma última resposta a ser ressaltada demonstra a motivação que resolver um problema, mesmo que parcialmente, pode gerar em alguém que se envolve conforme a Figura 3.11:


5 – O que você achou da experiência de participar de um Circulo Matemático?

Foi ótimo fiquei super emocionado ao resolver uma questão parcialmente, me deichando empolgado a procurar mais aprendizado

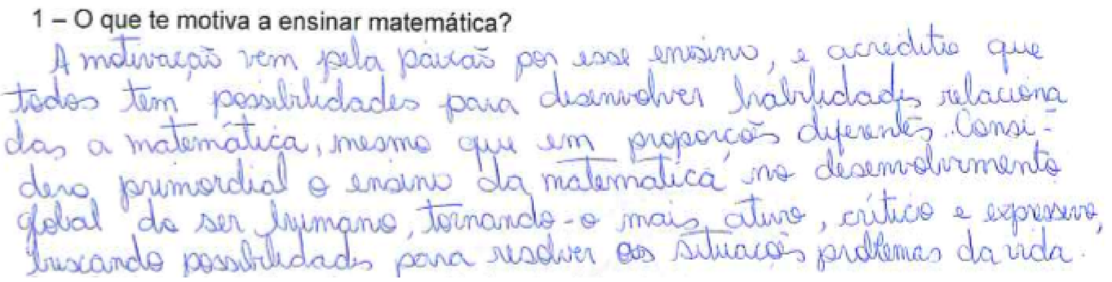
Figura 3.11: *Resposta 3 à quinta pergunta do questionário no ensino médio.*
Fonte: O autor.

Por fim, quando perguntados se eles consideravam o Círculo Matemático um bom projeto para motivar o aprendizado em matemática, a resposta uníssona foi sim. Informalmente após o término do encontro, alguns participantes mostraram interesse em novas sessões nas semanas seguintes.

3.2 Comentários Sobre o Questionário da Professora

Alguns dias após a sessão do Círculo Matemático no Colégio Estadual Coronel Pedro Nunes, a professora de matemática que intermediou sua realização junto à direção do colégio, atenciosamente respondeu ao questionário do Apêndice C. O principal intuito era saber como foi a repercussão que a experiência havia produzido entre os alunos.

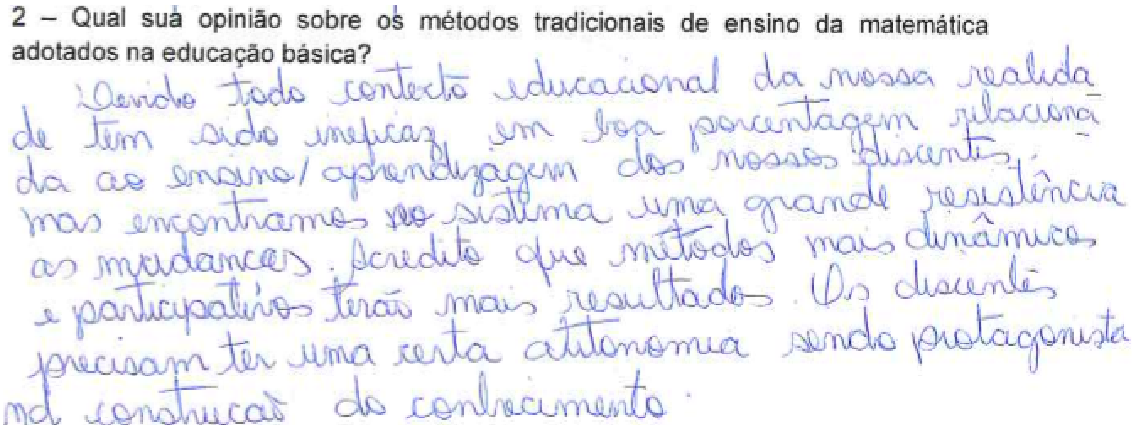
Para que o processo de ensino e aprendizagem seja o mais exitoso possível, tão importante quanto o aluno motivado a aprender é o professor com motivação para ensinar. A resposta da professora à primeira pergunta ressalta, em primeiro lugar, sua paixão pelo ensino da matemática. Em seguida quando diz acreditar que todos podem desenvolver habilidades relacionadas à matemática, ela toca em um ponto importante que muitas vezes é ignorado pelos professores da educação básica: o objetivo principal não é aprender o conteúdo, mas sim as habilidades e competências que o aprendizado desse conteúdo pode proporcionar e que serão importantes para a vida do estudante, conforme mostra a Figura 3.12:


1 – O que te motiva a ensinar matemática?

A motivação vem pela paixão por esse ensino, e acredito que todos tem possibilidades para desenvolver habilidades relacionadas a matemática, mesmo que em proporções diferentes. Considero primordial o ensino da matemática no desenvolvimento global do ser humano, tornando-o mais ativo, crítico e expressivo, buscando possibilidades para resolver as situações problemas da vida.

Figura 3.12: *Resposta à primeira pergunta do questionário do professor.*
Fonte: O autor.

A resposta à segunda pergunta (Figura 3.13) é um reflexo da sensação geral que se tem quanto à qualidade da educação pública brasileira e dos resultados nas avaliações internacionais dos últimos anos. O ensino da matemática de modo geral tem sido pouco eficiente:

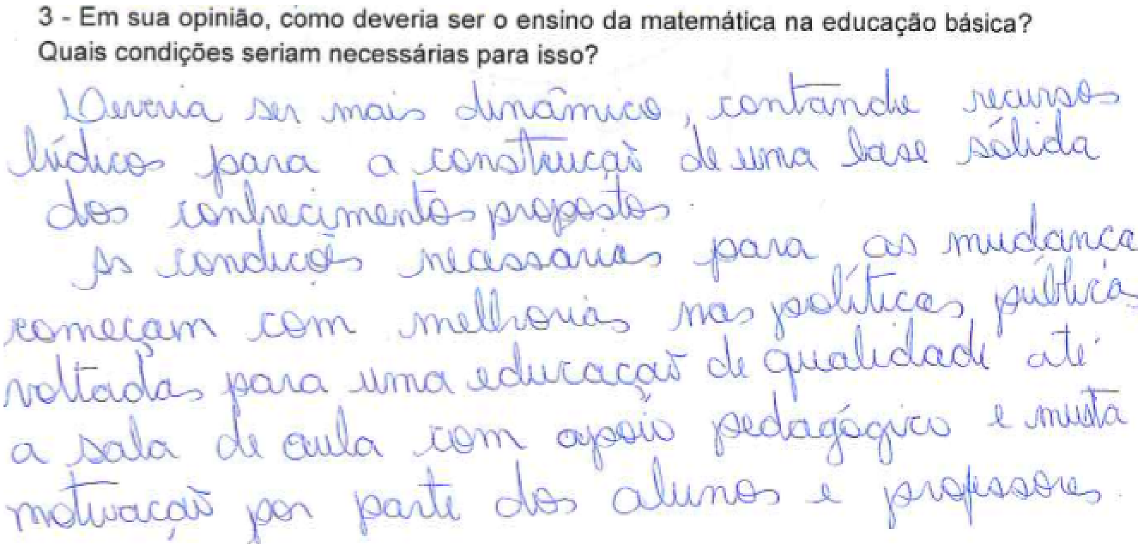


2 – Qual sua opinião sobre os métodos tradicionais de ensino da matemática adotados na educação básica?

Devido todo contexto educacional da nossa realidade tem sido ineficaz em boa porcentagem relacionada ao ensino/aprendizagem dos nossos discentes, mas encontramos no sistema uma grande resistência as mudanças. Acredito que métodos mais dinâmicos e participativos terão mais resultados. Os discentes precisam ter uma certa autonomia sendo protagonista na construção do conhecimento.

Figura 3.13: *Resposta à segunda pergunta do questionário do professor.*
Fonte: O autor.

A resposta da terceira pergunta começa na resposta da segunda quando diz que os métodos de ensino precisam ser mais dinâmicos e com maior participação dos alunos. Segundo ela, a participação do poder público com melhores políticas na área da educação é fundamental na melhoria do ensino, como mostra a Figura 3.14:



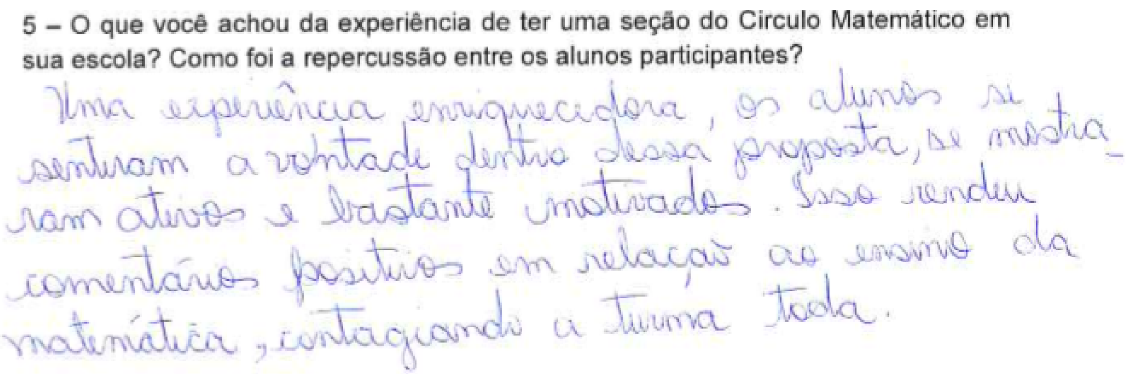
3 - Em sua opinião, como deveria ser o ensino da matemática na educação básica? Quais condições seriam necessárias para isso?

Deveria ser mais dinâmico, contando recursos lúdicos para a construção de uma base sólida dos conhecimentos propostos.

As condições necessárias para as mudança começam com melhorias nas políticas pública voltadas para uma educação de qualidade até a sala de aula com apoio pedagógico e muita motivação por parte dos alunos e professores.

Figura 3.14: *Resposta à terceira pergunta do questionário do professor.*
Fonte: O autor.

Assim como todos os participantes das duas sessões realizadas em Morrinhos, a professora não conhecia os Círculos Matemáticos. Ao responder à quinta questão evidenciou a repercussão positiva que o círculo teve na escola, conforme a Figura 3.15:

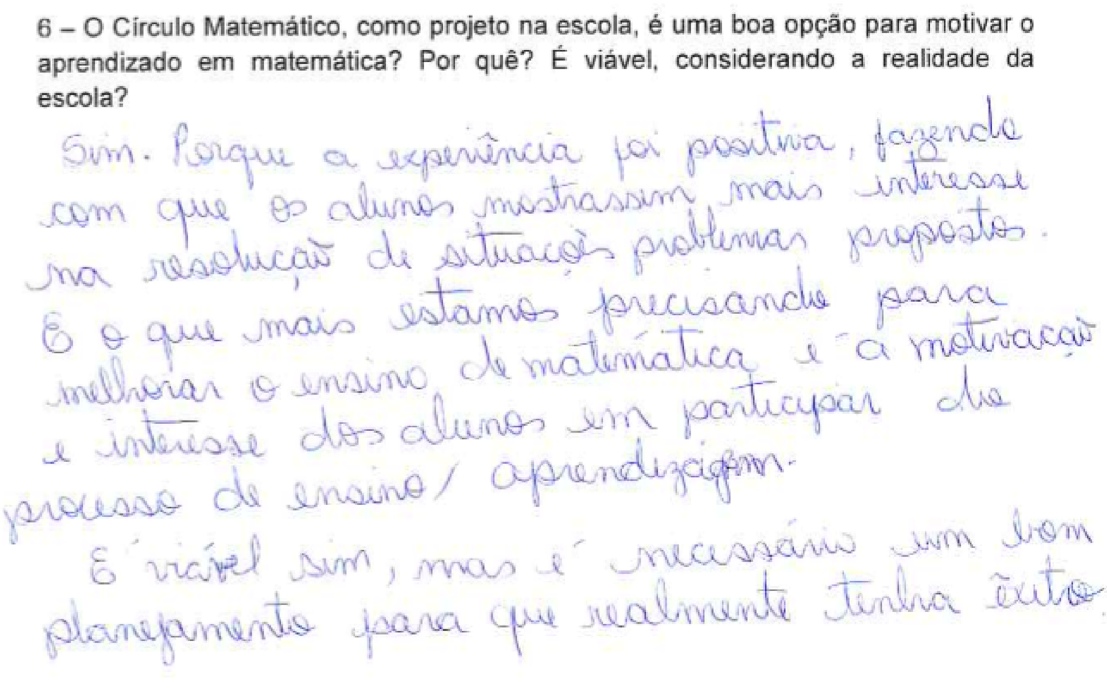


5 – O que você achou da experiência de ter uma seção do Circulo Matemático em sua escola? Como foi a repercussão entre os alunos participantes?

Uma experiência enriquecedora, os alunos se sentiram a vontade dentro dessa proposta, se mostraram ativos e bastante motivados. Isso rendeu comentários positivos em relação ao ensino da matemática, contagiando a turma toda.

Figura 3.15: *Resposta à quinta pergunta do questionário do professor.*
Fonte: O autor.

Por último, a professora diz achar o Círculo Matemático uma boa opção como projeto extracurricular, pois ele cumpre a função de motivar os alunos no aprendizado ativo da matemática. Pondera, entretanto que é necessário um bom planejamento para que se tenha êxito nesta proposta, segundo a resposta da figura 3.16:



6 – O Círculo Matemático, como projeto na escola, é uma boa opção para motivar o aprendizado em matemática? Por quê? É viável, considerando a realidade da escola?

Sim. Porque a experiência foi positiva, fazendo com que os alunos mostrassem mais interesse na resolução de situações problemas propostos. É o que mais estamos precisando para melhorar o ensino de matemática e a motivação e interesse dos alunos em participar do processo de ensino/aprendizagem.

É viável sim, mas é necessário um bom planejamento para que realmente tenha êxito.

Figura 3.16: *Resposta à sexta pergunta do questionário do professor.*
Fonte: O autor.

As respostas, dos participantes da sessão do Círculo Matemático do ensino médio e da professora, convergem no sentido de apontar abordagens de ensino que possibilitem uma maior participação e engajamento dos alunos. O Círculo Matemático, conforme relata as respostas dos questionários, pode ser uma excelente alternativa nesse sentido.

Considerações finais

O Círculo Matemático, embora tenha tradição de muitos anos em outros países, é muito recente no Brasil. Foi uma novidade para todos os envolvidos nesta dissertação. E como toda novidade boa, gerou curiosidade imediata.

A principal virtude desta proposta e o que mais atrai as pessoas para conhecê-la é sua maneira de tratar a matemática como um hobby. Participa o aluno que gosta de matemática e quer se desafiar resolvendo problemas interessantes pela simples satisfação de resolvê-los. Mas também pode fazer parte aquele estudante que não gosta de matemática, mas deseja dar a ela uma chance de conhecê-la melhor.

As sessões realizadas na UEG, no Colégio Estadual Coronel e as respostas dos questionários deram bons indícios do potencial que o Círculo Matemático tem de despertar o gosto pela matemática e de colocar os alunos que dele participam numa postura ativa dentro do processo de ensino-aprendizagem. Porém, para que a proposta realmente tenha êxito se faz necessário que se tenha um bom planejamento e continuidade.

Uma última consideração é que, tão importante quanto um aluno motivado a aprender é um professor motivado e preparado para facilitar o processo de aprendizado.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, M. da E. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: Governo Federal, 2018.

[2] BRASIL, M. da E. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Governo Federal, 2006.

[3] BRASIL, M. da E. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Governo Federal, 2000.

[4] DORICHENKO, Sergey. *Um Círculo Matemático de Moscou/ Sergey Dorichenko, editor. - 1 ed.*- Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[5] FOMIM, Dmitri, GENKIN, Sergey, ITENBERG, Ilia. *Círculos Matemáticos. A Experiência Russa / Dmitri Fimin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, editores; Valéria de Magalhães Iório, tradutor. - 1 ed.*- Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

[6] KISHIMOTO, Tizuko M (org). *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. 14 ed.*. São Paulo: Cortez, 2011.

[7] LARA, Isabel Cristina Machado. *Jogando com a Matemática*. São Paulo: Respel, 2003.

[8] LOJA SBM. *Disponível em: <https://loja.sbm.org.br/panel1-1>*. Acesso em: 14 nov. 2019.

[9] O Círculo da Matemática do Brasil. *Disponível em:<http://www.ocirculodamatematica.com.br/>*. Acesso em: 20 nov. 2019.

[10] PIAGET, J. *Psicologia e Pedagogia.* Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1976.

[11] PISA 2018 . *Disponível em https://g1.globo.com/educacao/noticia/2019/12/03/pisa-2018-dois-tercos-dos-brasileiros-de-15-anos-sabem-menos-que-o-basico-de-matematica.ghtml.* Acesso em: 05 dez. 2019.

[12] POLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[13] Portal OBMEP do Saber. *Disponível em https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1.* Acesso em: 20 nov. 2019.

[14] POZO, J.I ECHEVERRÍA, M.D.P.P. *Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In A solução de problemas: aprender a resolver, resolver a aprender. Juan Ignacio Pozo.* Porto Alegre: Artmed, 1998.

[15] Roda de Matemática. *Disponível em http://www.rodadematematica.com.br/blog/2016/6/1 circulos-de-matematica/.* Acesso em: 20 nov. 2019.

[16] STANKOVA, Zvezdelina, RIKE, Tom. *Uma década do círculo matemático de Berkeley: a experiência americana/ Zvezdelina Stankova; Thomas Rike, editores; Tertuliano Franco, tradutor. - 1 ed.*- Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

Apêndice A - Conjunto de Problemas

0

Problema 0.1. Vovó leva quatro minutos para subir do primeiro andar de um prédio até o quinto. Se ela mantiver a mesma velocidade, quanto tempo vai levar para ela chegar ao décimo andar a partir do primeiro?

Problema 0.2. João e Cândida estão usando uma balança de mola para pesar suas mochilas. Quando pesadas separadamente, a balança mostra 3 kg e 2 kg. Quando são pesadas junto, a balança mostra 6 kg.

"Isso não pode estar certo," disse Cândida. " Dois mais três não é igual a seis!".

"Você não está vendo?" respondeu João. "O ponteiro da balança não está no zero."

Quanto as mochilas pesam de fato?

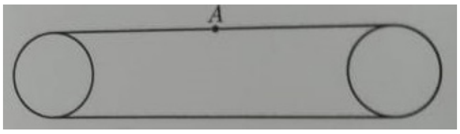
Problema 0.3. Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o dedo mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anelar é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar é o nono. Inverta a orientação novamente voltando para o mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar a contar dessa forma, indo e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?

Problema 0.4. João rasgou diversas páginas sucessivas de um livro. O número da primeira página que ele rasgou era 183 e sabe-se que o número da última página estava escrito com os mesmo dígitos em alguma ordem. Quantas páginas João rasgou do livro?

Problema 0.5. O que é maior, 333333 x 444444 ou 222222 x 666667? Qual é a diferença entre eles?

Problema 0.6. Um irmão sai de sua casa 5 *minutos* depois de sua irmã. Se ele anda a uma velocidade $1,5$ *vezes* a dela, quanto tempo vai levar para alcança-la?

Problema 0.7. O diagrama mostra a esteira de uma escavadeira, vista de lado. A parte debaixo está em contato com o chão. Se a escavadeira se mover para frente 10 *cm*, de quantos centímetros irá se mover o ponto A marcado?



Problema 0.8. Juntos, o ursinho Puff, o Corujão, o Coelho e o Leitão comeram 70 *bananas*. Cada um comeu um número inteiro de bananas e cada um comeu pelo menos uma. O Ursinho Puff comeu mais do que cada um dos outros; o Corujão e o Coelho comeram juntos $45 bananas$. Quantas bananas o Leitão comeu?

Problema 0.9. Forme um quadrado mágico com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; ou seja, coloque-os nas células de uma tabela 3 x 3 de modo que as somas dos números ao longo de todas as linhas, colunas e das duas diagonais sejam todas iguais.

Problemas Adicionais

Problema 0.10. Enquanto estavam passeando no parque, Nicole e Valéria chegaram a uma clareira redonda grande cercada por um anel de choupos e decidiram contar as árvores. Nicole andou em volta da clareira e contou todas as árvores. Valéria fez o mesmo, mas começou de uma árvore diferente. A 20ª árvore de Nicole era a 7ª de Valéria, enquanto que a 7ª árvore de Nicole era a 94ª de Valéria. Quantas árvores estavam crescendo em volta da clareira?

Problema 0.11. Um grupo de um acampamento de verão saiu de uma floresta onde estavam colhendo flores. Eles andavam em pares formados por um menino e uma menina, e em cada par o menino tinha ou três vezes ou um terço da quantidade de flores da menina. É possível que a quantidade total de flores do grupo seja igual a 2006 flores?

Apêndice B - Questionário do Aluno

Nome: **Instituição de Ensino:**

Curso: **Período:**

Data:

1 - O que te motiva a aprender matemática?

2 – Qual sua opinião sobre os métodos tradicionais de ensino da matemática adotados na educação básica?

3 - Em sua opinião, como deveria ser o ensino da matemática na educação básica?

4 – Você conhecia os Círculos Matemáticos?
( ) sim
( ) não

5 – O que você achou da experiência de participar de um Circulo Matemático?

6 – O Círculo Matemático, como projeto na escola, é uma boa opção para motivar o aprendizado em matemática? Por quê?

Apêndice C - Questionário do Professor

Nome: **Instituição de Ensino:**

Curso: **Período:**

Data:

1 - O que te motiva a ensinar matemática?

2 – Qual sua opinião sobre os métodos tradicionais de ensino da matemática adotados na educação básica?

3 - Em sua opinião, como deveria ser o ensino da matemática na educação básica?

4 – Você conhecia os Círculos Matemáticos?
( ) sim
( ) não

5 – O que você achou da experiência de ter uma sessão do Circulo Matemático em sua escola? Como foi a repercussão entre os alunos participantes?

6 – O Círculo Matemático, como projeto na escola, é uma boa opção para motivar o aprendizado em matemática? Por quê?