Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos

Rafael Lemes de Rezende

Goiânia

2020

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Rafael Lemes de Rezende

3. Título do trabalho

Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Júnior**, **Professor do Magistério Superior**, em 20/10/2020, às 12:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL LEMES DE REZENDE**, **Discente**, em 20/10/2020, às 18:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1577802** e o código CRC **86E0B039**.

Referência: Processo nº 23070.038344/2020-15 SEI nº 1577802

Rafael Lemes de Rezende

Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.

Goiânia

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Rezende, Rafael Lemes de
Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos [manuscrito] / Rafael Lemes de Rezende. - 2020.
144 f.

Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.
Bibliografia.
Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas.

1. Probabilidade. 2. Jogos. 3. Apostas online. 4. Odds. I. Vargas Júnior, Valdivino, orient. II. Título.

CDU 51

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 15 da sessão de Defesa de Dissertação de Rafael Lemes de Rezende, que confere o título de Mestre em Matemática, na área de concentração em Matemática.

Aos vinte e cinco dias do mês de setembro de dois mil e vinte, a partir das 14 **horas, por meio de videoconferência devido a pandemia covid-19**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Estudo da teoria de probabilidade através de dinâmicas de jogos"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Tiago Moreira Vargas (IME/UFG) e os membros titulares externos os professores doutores; Fábio Prates Machado (USP) e Alejandro Roldan Correa (Universidad de Antioquia /Medellin - Colômbia). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e cinco dias do mês de setembro de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Valdivino Vargas Júnior**, **Professor do Magistério Superior**, em 25/09/2020, às 16:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas**, **Professor do Magistério Superior**, em 25/09/2020, às 16:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Fabio Prates Machado**, **Usuário Externo**, em 19/10/2020, às 17:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **ALEJANDRO ROLDAN CORREA**, **Usuário Externo**, em 19/10/2020, às 19:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0,

informando o código verificador **1519723** e o código CRC **AD4E6169**.

Referência: Processo nº 23070.038344/2020-15 SEI nº 1519723

Criado por sosteneg, versão 6 por sosteneg em 28/08/2020 20:55:45.

Rafael Lemes de Rezende graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela (ULBRA) Universidade Luterana do Brasil (Campus de Itumbiara) em 2007, atualmente é Professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, efetivo do Estado de Goiás, pelo Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás - Dionária Rocha, Professor de Matemática do Ensino Médio do Colégio ULBRA de Aplicação e do Colégio Diocesano de Itumbiara-Go.

Dedico este trabalho a minha família, meus pais Norival e Iolanda e minha esposa Fernanda.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida pelo dom da vida, por me proporcionarem momentos tão especiais, por me oferecerem em uma família muito abençoada e especial que sempre me apoiou em todos os momentos. Por me darem saúde, sabedoria e paciência para que pudesse enfrentar todos os obstáculos e por serem meus companheiros fieis em todas as viagens, da minha casa ao IME/UFG e do IME/UFG de volta para casa. Todas as sextas-feiras eram aproximadamente 500 km que quase me fizeram desistir em vários momentos, porém, Deus e Nossa Senhora estiveram sempre comigo, para me guiar, me acompanhar e me dar força para seguir sempre adiante.

Ao meu orientador, Professor Doutor Valdivino Vargas Júnior por toda atenção, dedicação e paciência. Faltam adjetivos para agradecer o quanto o senhor, digo, você me ajudou de uma forma muito tranquila e serena, sempre cuidando para que este trabalho pudesse ser desenvolvido com qualidade.

Aos professores da banca examinadora, Dr. Tiago Moreira Vargas, Dr.Fábio Prates Machado e Dr. Alejandro Roldan Correa, pelas valiosas contribuições.

Aos meus Pais, Norival e Iolanda, pelo amor, carinho, por cuidarem de mim, por me oferecerem todas as oportunidades e pelo incentivo aos estudos na busca do conhecimento. Muito obrigado, por estarem comigo em todos os desafios, por confiarem e acreditarem em todos os meus sonhos.

A minha esposa, Fernanda, por estar sempre ao meu lado em todos os momentos, por ser a minha inspiração para buscar mais conhecimento, por ser sempre tão dedicada e paciente com a minha ausência, em vários momentos. Muito obrigado, por confiar, acreditar e me dar todo amor e carinho necessário para que pudesse concluir este trabalho com sucesso.

Aos meus tios e primos de Goiânia-GO, por me acolherem em suas residências em vários momentos, sempre com muito carinho e atenção.

Aos amigos Adriano e Wellington, egressos do PROFMAT pelos incentivos e suporte através de materiais e orientações para que pudesse desenvolver um bom trabalho durante o curso.

Aos diretores, coordenadores e professores dos colégios: CEPMG - Dionária Rocha, COC Diocesano e ULBRA de Aplicação, pelo apoio e confiança.

Aos meus alunos e ex-alunos, por serem a principal motivação para que eu pudesse me qualificar e aprimorar minhas habilidades como professor de Matemática.

A todos os meus amigos da turma (PROFMAT 2018 - IME/UFG), pelo companheirismo, foram vários momentos inesquecíveis ao lado de vocês, sempre dispostos a ajudar uns aos outros, sempre dando forças. Mais uma vez, muito obrigado Deus pela oportunidade de conhecer pessoas tão especiais, pela oportunidade de fazer grandes amizades e poder vivenciar momentos tão especiais.

Ao IME/UFG, em especial a todas as pessoas desta instituição que sempre nos acolheu muito bem, com muito carinho e zelo, ao IMPA pela promoção do curso em âmbito nacional e principalmente a todos os professores que foram sempre dedicados e fizeram o melhor para que pudéssemos alcançar este grande objetivo.

A todas as pessoas que de alguma forma estiveram ao meu lado, me apoiaram e acreditaram, que vocês recebam o meu carinho e a minha gratidão.

Muito obrigado!

Resumo

Este trabalho apresenta sugestões para aplicação de atividades em sala de aula relacionadas aos jogos de apostas. Apresentando ainda um contexto histórico do estudo das Probabilidades e o desenvolvimento do conteúdo através de simulações de jogos, visando além de aplicar o conteúdo, apresentar os riscos do investimento em diversas situações. Para isto, foram apresentados os conteúdos, definições e conceitos de Probabilidade e Análise Combinatória, bem como a apresentação das regras e características de jogos de cartas, moedas, dados, par ou ímpar, loterias e de apostas em jogos online. Inicialmente são apresentadas situações que podem ser aplicadas a nível superior e posteriormente são apresentadas dinâmicas de jogos para serem aplicadas em sala de aula com alunos do Ensino Básico, através de simulações e análise dos resultados obtidos. Cujo resultado esperado é a compreensão do conteúdo de probabilidades por parte do aluno e que eles percebam e façam análises dos riscos de participação em atividades relacionadas as apostas em jogos.

Palavras-chave

Probabilidade. Jogos. Apostas online. Odds.

Abstract

This paper presents suggestions for the application of classroom activities related to betting games. It also presents a historical context of the study of probabilities and the development of content through game simulations, in addition to applying the content and presenting the investment risks in various situations. The contents, definitions and concepts of probability and combinatorial analysis were presented as well as the presentation of the rules and characteristics of card games, currencies, dice, odd or even, lotteries, and betting in online games. Initially, situations are presented that can be applied at a higher level then later, game dynamics are presented to be applied in the classroom with elementary school students through simulations and analysis of the results obtained. The expected result is the understanding of the content of probabilities on the part of the student and that they perceive and analyze the risks of participating in activities related to gambling.

Keywords

Probability. Games. Online betting. Odds.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

No decorrer de pouco mais de dez anos atuando como professor do Ensino Básico em escolas públicas e particulares, pude perceber ao analisar a grade curricular e conversando com outros professores da área de Matemática, que o conteúdo de Probabilidade é quase sempre deixado de lado e muitos alunos obtém pouco acesso a resolução de problemas e exercícios dessa disciplina. Muitas vezes a Probabilidade é apresentada somente na fase final do Ensino Fundamental, mais precisamente no último bimestre do 9º ano e também na 2ª Série do Ensino Médio, onde o conteúdo começa a avançar um pouco, porém na maioria das vezes de forma bem superficial, principalmente na rede pública. Em alguns casos, o conteúdo é repassado aos alunos apenas com a apresentação das fórmulas, sem contextualização, de maneira que muitos alunos simplesmente desistem de buscar o entendimento e analisar situações problemas de forma interpretativa, o que torna o conteúdo desinteressante.

Atualmente, principalmente com a estruturação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), podemos observar avanços e a expectativa é que os estudos da análise combinatória e da probabilidade sejam realizados em todas as séries do Ensino Fundamental, através da unidade temática "Probabilidades e Estatística", o que garante o contato dos alunos com o conteúdo, bem como a sua aplicação.

Dentro dessa perspectiva, surge a proposta de trabalhar a aplicação teoria da Probabilidade através de Jogos, para atuar de forma lúdica, com o intuito de estimular e aprimorar a compreensão dos alunos diante da apresentação do conteúdo, durante o período de estudos na Educação Básica. A ideia principal é apresentar algumas situações que envolvam a apostas em jogos, mesmo sabendo que geralmente os alunos não podem participar dessas apostas, pois, na prática, apostar financeiramente em jogos é considerada uma atividade ilegal para menores de 18 anos. Entretanto, a principal proposta deste trabalho é apresentar situações problemas, cujo objetivo é orientar e demonstrar que investimentos em apostas aleatórias podem representar alto risco para a situação financeira do indivíduo. É importante mostrar também que praticamente todas as situações de apostas em jogos são acompanhadas por especialistas, cujo objetivo principal da banca é obter lucro. Por isso, é importante ir além do papel didático de tratar sobre o conteúdo de Probabilidade, pois cabe ao professor apresentar o conteúdo e orientar seus alunos para que possam compreender e inclusive repassar para seus familiares, visto que muitas pessoas podem não jogar, mas sempre conhecem alguém que jogue e essas informações são importantes, pois é necessário ter responsabilidade ao escolher investir no universo das apostas em jogos de diversas formas.

Dentro deste cenário, é importante que o professor ao ministrar as aulas propostas, tenha profundo conhecimento sobre a Probabilidade, bem como as normas e regras para participação em cada situação de jogo, conheça suas aplicações e seja capaz de adaptar o nível de aplicação do conteúdo ao seu respectivo nível de aprendizado.

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de promover uma interação entre os alunos com a Probabilidade e suas aplicações através de jogos, principalmente voltado aos alunos do Ensino Médio, buscando levar a linguagem Matemática e Probabilística com mais clareza e de forma conexa, com aplicações envolvendo o cotidiano dos alunos e resolução de problemas para serem desenvolvidos em sala de aula.

Para realizar este trabalho, desenvolvemos cinco capítulos. No primeiro, apresentamos uma breve introdução sobre a história da probabilidade, teoremas e definições sobre o conteúdo e apresentamos ainda os conceitos de análise combinatória e princípios de contagem, ou seja, neste capítulo é apresentado todo referencial teórico necessário para compreender as aplicações que serão apresentadas na sequência do trabalho. No segundo capítulo, abordamos a probabilidade associada a jogos, bem como a apresentação das regras e definições de cada modalidade específica de jogo e apostas. No terceiro capítulo, apresentamos cinco propostas de aplicações da probabilidade em situações de apostas e jogos em nível de Ensino Superior. No quarto capítulo, a ideia é apresentar situações de apostas e jogos em nível de Ensino Fundamental e Médio, mostrando propostas para serem aplicadas em sala de aula, com o intuito de desenvolver o conteúdo de Probabilidade em Matemática, de forma interativa, buscando a participação dos alunos, bem como a sua compreensão de forma prática e objetiva. Para finalizar, no último capítulo, a ideia é apresentar as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido e conclusões sobre a aplicação dentro do conteúdo, de acordo com as situações apresentadas.

Capítulo 1

Probabilidade

1.1 História da Probabilidade

A necessidade do ser humano em tratar de problemas do cotidiano tais como, jogos e seguros pela tentativa de quantificar riscos associados à acidentes, naufrágios e mortes podem ser considerados como fatores pioneiros para o estudo das probabilidades. A criatividade e o interesse em momentos que proporcionassem o desenvolvimento de atividades de entretenimento para determinada época, mostrava o caminho para a procura de objetos que pudessem ser utilizados em determinadas atividades.

Podemos dizer que um dos fatores que levaram ao início da Teoria das probabilidades, era a realização de jogos, visto que desde a civilização mais antiga, os jogos eram uma fonte de entretenimento. Em uma dessas passagens, podemos citar o surgimento do Astrágalo que nos trás uma referência do que viria a ser o jogo do dado, segundo (CALABRIA e CAVALARI, 2013) "No início da era pré-Cristã os Babilônios, os Egípcios, os Gregos e os Romanos usavam o astrágalo, para os jogos e as brincadeiras. Este objeto é considerado o ancestral do dado e continha quatro lados: o côncavo, o convexo, plano e o sinuoso. A pontuação para cada lado era três para o lado côncavo, quatro para o lado convexo e um e seis para os outros lados. Os números dois e cinco eram omitidos."

Ainda sobre os jogos e a Teoria das Probabilidades, podemos citar David (apud

CALABRIA e CAVALARI, 1962, p.6) que sobre essa relação nos diz que existem alguns indícios de que os jogos de azar também colaboraram para a origem do pensamento probabilístico. Estes jogos eram utilizados em cerimônias religiosas e adivinhações, e, também, eram empregados em situações de lazer, passando a ser uma recreação na civilização romana quando a Europa estava sob seu domínio.

Como podemos ver, estudos e pesquisas sobre a teoria das probabilidades não haviam sido aprimorados até o momento. Não havia registros de pesquisa mais elaborada sobre o assunto, somente dados e relatos de situações que podem ter levado à reflexão sobre uma possível elaboração do que posteriormente iremos tratar de teoria das probabilidades.

A partir deste momento podemos observar que os primeiros cálculos probabilísticos foram realizados por estudiosos italianos dos séculos XV e XVI, dentre os quais destacamos frei Luca Pacioli (1445 - 1517), Niccolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia (1499 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576). Eles realizaram estudos nos quais compararam as frequências dos eventos e estimaram as chances de se ganhar nos jogos de azar, mas não apresentaram teoremas que se baseassem em alguma teoria (SILVEIRA, 2001).

Embora os primeiros registros sobre probabilidades sejam muitos séculos antes, a origem da teoria das probabilidades está ligada aos jogos de azar. Girolamo Cardano (1501-1576) e Galileu Galilei (1564-1642) estão entre os primeiros matemáticos a analisar, matematicamente, o jogo de dados.

No século XVII, o chamado "problema dos pontos" foi discutido por vários matemáticos. Vejamos a título de curiosidade o enunciado do problema dos pontos.

Determine a divisão das apostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o placar no momento da interrupção do jogo e o número de pontos para ganhar o jogo.

Ele foi proposto por a Blaise Pascal (1623-1662) em 1654. Pascal trocou cartas com Pierre de Fermat (1601-1665) sobre esse problema. Dessa correspondência entre Pascal e Fermat e de suas pesquisas observando várias situações de jogos de azar é que evoluiu a teoria das probabilidades.

Outros matemáticos que se dedicaram, direta ou indiretamente, ao estudo das probabilidades foram: o holandês Christian Huygens (1692-1695), ao qual é atribuído o primeiro livro sobre probabilidades; Abraham Moivre (1667-1754), francês que viveu na Inglaterra na época de Newton e Halley e escreveu, em 1718, a Doutrina das probabilidades; e Jacob Bernoulli (1654-1705).

Mais tarde, Leonhard Euler (1707-1783) e Jean Baptiste D'Alembert(1717-1783) desenvolveram outros estudos sobre probabilidades, aplicando-os à Economia, às ciências Sociais e as loterias. Segundo (BOYER, 1974), "entre os problemas de loteria que Euler publicou em 1765, o mais simples é o seguinte: suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso; então a probabilidade de que três números consecutivos sejam tirados é $\frac{2.3}{n.(n-1)}$".

Ainda segundo Boyer, "a teoria das probabilidades deve mais a Laplace (1749-1827) que a qualquer outro matemático. A partir de 1774 ele escreveu muitos artigos sobre o assunto, cujos resultados ele incorporou no clássico Théorie anaytique des probabilités de 1812. Ele considerou a teoria em todos os aspectos e em todos os níveis".

Mais recentemente, os nomes de Jules Henri Poincaré (1854-1912), Émile Borel (1871-1956) e John von Neumann (1903-1957) aparecem ligados ao estudo de probabilidades e teoria de jogos.

Atualmente, a teoria das probabilidades é muito usada na teoria dos jogos, em Estatística, Biologia, Biologia Matemática, Mecânica Estatística, Física de partículas, Geografia, Psicologia, Sociologia, Economia, pesquisa operacional, computação, esporte, etc.

1.2 Conceitos Básicos de Probabilidade

Nesta seção, apresentamos a teoria básica que dará suporte ao desenvolvimento das aplicações relacionadas a jogos. Demonstrações serão omitidas nesta etapa, para analisá-las, sugiro a leitura de MORGADO (2016), NETO e NETO (2005), LEBENSZITAYN e COLETTI (2008), NETO e OLIVEIRA (1998), MEYER (1995) e JAMES (1996).

1.2.1 Teoria dos Conjuntos

Nesta subseção, abordamos algumas noções básicas de teoria dos conjuntos, apesar de subentender que o leitor já tenha uma certa familiaridade com o conteúdo, por isso, vamos apresentar algumas notações que iremos utilizar ao longo desta dissertação para uma boa leitura e compreensão de alguns símbolos matemáticos. Vejamos a seguir algumas notações:

- *Conjuntos* são representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, por exemplo: A, B, C e assim por diante.
- O *Conjunto universo* é representado pela letra grega Ω (Ômega).
- Os *elementos dos conjuntos* são representados por letras minúsculas a, b, c e assim por diante.
- O *conjunto vazio* é representado pela letra grega ϕ.
- A relação de um determinado elemento *pertencer* ou *não pertencer* a um conjunto é representado pelas letras gregas $\in$ e $\notin$, respectivamente.
- O símbolo $n(A)$ representa o *número de elementos* ou a *cardinalidade* do conjunto A.
- Para indicar se um conjunto é subconjunto (está contido) em outro conjunto utilizamos o símbolo $\subset$.
- Para representar a *união* de dois conjuntos A e B (conjunto dos elementos que pertencem a A ou B) indicamos $A \cup B$. Simbolicamente, $A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A$ ou $x \in B\}$. Geralmente a união de n conjuntos $A_1, A_2, ...A_n$ é definida analogamente e representada por $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
- Para representar a *intersecção* entre dois conjuntos A e B (conjunto dos elementos que pertencem a A e B simultaneamente) indicamos $A \cap B$, ou seja $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A$ e $x \in B\}$. Geralmente a intersecção pode ser representada por $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
- Dois conjuntos A e B são denominados *disjuntos* se $A \cap B = \phi$. Quando temos mais de dois conjuntos, dizemos que eles são disjuntos quando forem disjuntos tomados dois a dois.
- Chamaremos A^c de *conjunto complementar* de A o conjunto dos elementos de Ω que não pertencem ao conjunto A. Representaremos da seguinte forma $A^c = \{x \in \Omega | x \notin A\}$.
- Chamamos de *conjunto diferença* de A e B, representado por $A - B$, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, onde: $A - B = A \cap B^c = \{x \in \Omega | x \in A$ e $x \notin B\}$.

- Para uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de números reais, escrevemos $x_n \to x$ quando $\lim_{n\to\infty} x_n = x$; $x_n \uparrow x$ significa que $x_1 \leq x_2 \leq ...$ e $x_n \to x$; $x_n \downarrow x$ significa que $x_1 \geq x_2 \geq ...$ e $x_n \to x$.

Vejamos agora algumas propriedades importantes que relacionam os conceitos definidos anteriormente.

Teorema 1.2.1. *(Propriedades dos conjuntos)*

T1) Para todo conjunto $A \subset \Omega$, $A \cup \phi$, $A \cap \phi = \phi$;
T2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
T3) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$;
T4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
T5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
T6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
T7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
T8) $A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \phi, \phi^c = \Omega, \Omega^c = \phi$;
T9) $(A^c)^c = A$; $A \subset B \leftrightarrow B^c \subset A^c$;
T10) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
T11) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

Definição 1.2.2. *(Partição de um conjunto)*

Seja A um conjunto não vazio. Uma partição de A é uma família de conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$, todos não vazios, tais que:

i) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = A$;

ii) $A_i \cap A_j = \phi$ *se* $i \neq j$.

Portanto, os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$ são disjuntos dois a dois e sua união é o conjunto A. Dizemos também que A foi particionado pelos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$.

1.2.2 Análise combinatória

Nesta seção, apresentamos algumas definições e teoremas relativos a Análise Combinatória, com ênfase a aplicações do Princípio Fundamental de Contagem. A utilização desta ferramenta auxiliará na resolução de problemas onde se faz necessário o cálculo do número de elementos de determinados conjuntos, sem a necessidade de enumerar todos os elementos.

Proposição 1.2.3. *(Princípio aditivo de contagem)*

Dados os conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$ *disjuntos, com* $n_1, n_2, ..., n_k$ *elementos, respectivamente, então* $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ *possui* $n_1 + n_2 + ... + n_k$ *elementos.*

Proposição 1.2.4. *(Princípio Fundamental de Contagem ou Princípio da Multiplicação)*

Se existem n_1 *maneiras de se tomar uma decisão* D_1 *e, para cada uma delas,* n_2 *maneiras de se tomar uma decisão* D_2*, e assim por diante até* n_k *maneiras de se tomar uma decisão* D_k*, então o número de maneiras de tomarmos sucessivamente as decisões* $D_1, D_2, ..., D_k$ *é dado por* $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$*, válido para qualquer número de decisões sucessivas.*

A noção de *permutação* está associada ao ato de *permutar*, ou seja, reordenar um grupo de objetos. Dado um conjunto finito A, uma permutação dos elementos de A é uma lista ordenada, ou seja, uma sequência, na qual cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Por exemplo, quando $A = \{v, w, x, y, z\}$, temos que a lista ordenada (x, v, w, z, y) é uma permutação dos elementos de A, na qual o primeiro é x, o segundo é v, e assim por diante.

Proposição 1.2.5. *(Permutações Simples)*

O número de permutações simples de n *elementos distintos é indicado por* P_n *e dado por* $P_n = n!$.

Em uma *permutação com objetos repetidos*, cada objeto deve aparecer na permutação exatamente a mesma quantidade de vezes que aparece na lista original.

Proposição 1.2.6. *(Permutações com Repetição)*

O número de permutações de n *elementos tais que um ou mais deles são repetidos é indicado por* $P_n^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k}$ *e dado por:*

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ... \cdot \alpha_k!}.$$

Na indicação $P_n^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k}$*, temos* n *elementos, dos quais* α_1 *é do tipo* a_1*,* α_2 *do tipo* a_2*, e assim por diante até* α_k *do tipo* a_k*, onde* $a_1, a_2, ..., a_k$ *são distintos.*

A quantidade de *permutações circulares* de um conjuntos com n objetos (distintos) é o número de maneiras de colocá-los ao redor de um círculo, de forma que disposições que coincidam pela aplicação de uma rotação sejam consideradas iguais.

Proposição 1.2.7. *(Permutações Circulares)*

O número de permutações circulares dos n *elementos, que indicamos por* $(PC)_n$*, é dado por:*

$$(PC)_n = (n-1)!.$$

Uma *combinação simples* de n elementos distintos, tomados p a p, é qualquer escolha de p elementos dentre os n elementos dados. Em uma combinação, apenas o conjunto dos elementos escolhidos é relevante, de modo que a ordem em que eles forem tomados não importa. Escrevemos C_n^p para indicar a quantidade de combinações de n elementos, tomados p a p.

Proposição 1.2.8. *(Combinações Simples)*

O número de combinações simples de n *elementos tomados* p *a* p*, onde o número de maneiras de ordenar os* n *elemento é* $n!$ *e os números de maneiras de ordenar os elementos em cada um dos grupo são* $p!$ *e* $(n-p)!$*. é dado por:*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!.(n-p)!}.$$

Corolário 1.2.9. *(Combinações Complementares) De modo geral, para cada grupo de* p *elementos escolhidos entre os* n *disponíveis, existe um grupo de* $n-p$ *elementos associado. Assim, a seguinte igualdade é verdadeira:*

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

Dado um conjunto de n objetos distintos, o número de maneiras de escolher p dentre eles, onde podemos escolher várias vezes o mesmo elemento e de forma que a ordem em que os p elementos são escolhidos não é importante, é chamado de número de *combinações completas* ou *combinações com repetição* de n escolhe p, sendo denotado por CR_n^p.

Proposição 1.2.10. *(Combinações com repetição ou combinações completas)*

O número de soluções inteiras e não negativas de $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$ é dado por:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p.$$

Podemos observar que as *permutações* e as *combinações* estão relacionadas com as ações de *ordenar* e de *escolher*, respectivamente. No entanto, existem situações nas quais precisamos escolher e ordenar simultaneamente e essas situações são chamadas de *arranjos simples.*

Um *arranjo simples* de n elementos *distintos*, tomados p a p, é qualquer maneira de listar ordenadamente p elementos, tomados dentre os n elementos dados. Escreveremos A_n^p para indicar a quantidade de arranjos simples de n elementos, tomados p a p.

Proposição 1.2.11. *(Arranjos Simples)*

O número de arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde o número de maneiras de escolher p dos n elementos é C_n^p e o número de maneiras e ordenar os p elementos escolhidos é $p!$, é dado por:

$$A_n^p = C_n^p.p! \Leftrightarrow A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

1.2.3 Definição Clássica de Probabilidade

Quando iniciamos qualquer leitura sobre conceitos elementares de probabilidades, quase sempre verificamos a seguinte definição: *Razão entre o número de "casos favoráveis" e o número de "casos possíveis"*, esta definição aparece em vários livros, em qualquer que seja o grau de Ensino em que o assunto seja abordado. Segundo (MORGADO), essa foi a primeira definição formal de probabilidade e apareceu pela primeira vez de forma clara na obra *Liber de Ludo Aleae* de Jeronimo Cardano (1663), porém também foram atribuídas às obras de De Moivre (1718) e Laplace (1812). Neste trabalho, destacamos a Probabilidade e suas várias propriedades, a definição de função de conjunto que também é aplicada a probabilidade e as aplicações das Variáveis Aleatórias discretas, para reforçar e esclarecer algumas informações e definições. Vamos abordar alguns exemplos para melhor compreensão do significado e aplicação na resolução de situações problema.

Para definir probabilidade através da referência de Laplace dada pela razão entre o *número de casos favoráveis* pelo *número de casos possíveis*, é preciso supor que os experimentos aleatórios tenham as seguintes características:

i) Existe um número finito de eventos elementares e a união de todos os eventos elementares é o espaço amostral.

ii) Os eventos elementares tem a mesma probabilidade de ocorrência.

iii) A ocorrência de um determinado evento é a união dos eventos elementares, onde o número de eventos elementares é menor ou igual ao número de casos possíveis.

A partir dessas características, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.12. *(Definição clássica de probabilidade).*

Seja um espaço amostral Ω *com* $n(\Omega)$ *resultados possíveis (chamados eventos simples), todos equiprováveis. Seja ainda* A *um evento com um total de* $n(A)$ *eventos simples. Então, a probabilidade de* A*, denotada* $P(A)$*, é definida por:*

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Tomando a razão entre o número de casos favoráveis a um determinado evento (A) e o número de casos possíveis (espaço amostral) (Ω) *e sendo este finito, não-vazio, e supondo que seus subconjuntos são equiprováveis, verificamos as consequências imediatas da definição com as seguintes propriedades:*

1) Para todo evento A*,* $0 \leq P(A) \leq 1$*;*

2) $P(\Omega) = 1$*;*

3) $P(\phi) = 0$*;*

4) Se $A \cap B = \phi$*, então* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo 1.2.13. *Duas moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de obter duas coroas?*

Solução:

Vamos indicar cara com K e coroa com C, logo podemos verificar o espaço amostral $\Omega = \{(KK), (CK), (KC), (CC)\}$, observando $n(\Omega) = 4$. Se A representa o evento "obter duas coroas", então $A = \{(CC)\}$, logo $n(A) = 1$, portanto $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$.

Analisando alguns livros que falam sobre Probabilidade, principalmente no Ensino Médio, é comum nos depararmos apenas com a definição clássica de Probabilidade, porém, é fácil verificar que nem todo experimento aleatório possui espaço amostral equiprovável para que possamos aplicar a definição clássica diretamente, por isso neste trabalho vamos analisar as diferenças entre a definição frequentista e subjetiva de probabilidade, com o objetivo de demonstrar a diferenciação de aplicação dentro do conteúdo.

Neste trabalho abordamos as outras maneiras de definir probabilidade: Definição frequentista, definição subjetiva e definição axiomática. Esta última provê um tratamento formal rígido a um modelo probabilístico.

1.2.4 Definição Frequentista de Probabilidade

Segundo (JÚNIOR, 2016) a *definição frequentista* surge na segunda metade do século XVII. Não propriamente como uma definição, mas como um critério empírico para avaliar cálculos associados a probabilidades relativas a jogos. A definição clássica já estava estabelecida. Entretanto, havia muitos erros nos cálculos realizados devido a falhas nas técnicas de contagem. Como podemos ver, através de aplicações em situações problemas envolvendo Probabilidades, foi necessário estabelecer um fundamento para que pudéssemos aplicar a definição clássica de Probabilidade com a finalidade de resolver algumas questões principalmente em situações de jogos. Fazia-se necessário ter certeza de que um determinado experimento pudesse ser repetido com uma certa frequência. Para isso, seriam realizados experimentos estatísticos com a finalidade de garantir uma baixa variação dos resultados obtidos e assim certificar uma determinada regularidade em certos eventos. Vejamos agora a definição frequentista de Probabilidade:

Definição 1.2.14. *(Frequentista)*

Suponhamos um determinado experimento cujo espaço amostral é Ω *e* A *um evento qualquer desse espaço amostral. Suponha que o experimento é repetido* n *vezes e seja* $n(A)$ *o número de vezes que* A *ocorre nessas repetições. Então definimos a probabilidade do evento* A *por:*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Em palavras, $P(A)$ é a proporção (limite) de vezes em que A ocorre, ou seja a frequência limite de A.

Vejamos o uma aplicação da definição frquentista observando o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.15. *Uma moeda é lançada diversas vezes. Os resultados obtidos nos lançamentos está na tabela a seguir:*

Tabela 1.1: Resultados obtidos nos lançamentos de uma moeda

Primeiros n lançamentos	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**	**100.000**	**1.000.000**
Nº de caras	7	54	518	5.063	50.215	500.602
Nº de coroas	3	46	482	4.937	49.785	499.398
Proporção de caras	0,7	0,54	0,518	0,5063	0,50215	0,500602
Proporção de coroas	0,3	0,46	0,482	0,4937	0,49785	0,499308

Note que se A é o evento sair cara no lançamento de uma moeda honesta, então: $P(A) = \frac{1}{2}$.
Pelos resultados obtidos temos:

Tabela 1.2: Proporção de caras obtidas em n lançamentos

n	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**	**100.000**	**1.000.000**
$\frac{n(A)}{n}$	0,7	0,54	0,518	0,5063	0,50215	0,500602

Assim,

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{1.000.000} \approx 0,500602.$$

No limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = 0,5.$$

1.2.5 Definição Subjetiva de Probabilidade

Segundo (JÚNIOR, 2016) a *definição subjetiva* pode ser vista como uma estimativa do que o indivíduo pensa que seja a viabilidade de ocorrência de um evento. A probabilidade subjetiva é baseada no julgamento pessoal, acúmulo de conhecimento, e experiência do pesquisador. Pode ser útil, quando não há possibilidade de utilização da probabilidade clássica ou frequentista. Ou seja, podemos analisar que nem sempre é possível aplicar diretamente as definições clásssica ou frequentista, pois não é possível garantir uma regularidade na distribuição de frequência de um determinado evento. Por isso, podemos concluir que existem situações nas quais a repetição de um evento não pode ser realizada e outras em que elas não podem ser realizadas em iguais condições.

Exemplo 1.2.16. *Vejamos alguns exemplos, nos quais, podemos aplicar a definição subjetiva de Probabilidade:*

a) Desejamos verificar a probabilidade de ocorrência de um tornado na cidade do Rio de Janeiro.

b) Calcular a Probabilidade de vitória da seleção da Venezuela no próximo jogo contra a seleção Brasileira.

c) Calcular a probabilidade de um estudante ser aprovado no vestibular.

1.2.6 Definição axiomática de Probabilidade

Definição 1.2.17. *(Classe de eventos aleatórios)*

Seja Ω um espaço amostral. Uma classe de eventos aleatórios para Ω é uma classe de eventos $\mathcal{F}$ de Ω satisfazendo:

i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

ii) Se $A \in \mathcal{F}$ *então,* $A^c \in \mathcal{F}$;

iii) Se $A_n \in \mathcal{F}$ *para* $n = 1, 2, ...$ *então,*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

A definição a seguir apresenta formalmente o conceito de probabilidade, uma vez aplicado temos um tratamento matemático rigoroso para o experimento aleatório.

Definição 1.2.18. *(Axiomática(Kolmogorov(1933)))*

Seja Ω um espaço amostral (conjunto). Probabilidade é uma função $\mathbb{P}(.)$ definida em uma classe $\mathcal{F}$ de eventos aleatórios do espaço amostral Ω, tal que:

(A1) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, *para todo* $A \in \mathcal{F}$,

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(A3) Aditividade enumerável: para qualquer sequência $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *de eventos dois a dois disjuntos:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *é chamada de espaço de probabilidade.*

Observação: Se o espaço amostral Ω for finito ou infinito enumerável, definimos a probabilidade na classe $\mathcal{F}$ de todos os subconjuntos de Ω, a qual podemos representar por 2^{Ω} ou $P(\Omega)$ (conjunto das partes de Ω). Neste caso, escrevendo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$, associamos a cada ω_i, $i = 1, 2, ...$, um número $p(\omega_i)$ tal que $p(\omega_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$. Para $i = 1, 2, ...$, $p(\omega_i)$ é a probabilidade do evento simples ω_i. A probabilidade de um evento $A \in \mathcal{F}$ é definida por:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Exemplo 1.2.19. *Ao lançarmos um dado podemos observar a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e verificamos que há* $2^6 = 64$ *eventos. Exemplos desses eventos são* $\varnothing$, *(evento impossível),* Ω *(evento certo),* $A = \{2, 4, 6\}$, *que ocorre, se e somente se, o resultado do lançamento for par, etc.*

Proposição 1.2.20. *(Propriedades de uma Probabilidade)*

i) $P(\varnothing) = 0$;

ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$;

iii) Se $A \subset B$, *então* $P(A) = P(B) - P(B - A)$;

iv) Se $A \subset B$, *então* $P(A) \leqslant P(B)$;

iv) Para qualquer evento A e B, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

v) Aditividade finita: para qualquer sequência $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ *de eventos dois a dois disjuntos:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

vi) Princípio da Inclusão e exclusão: Para quaisquer n eventos, $A_1, A_2, ..., A_n$, *temos:* $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - ... - P(A_{n-1} \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$;

vii) Subaditividade finita: Para quaisquer eventos $A_1, A_2, ..., A_n$, *temos:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

viii)Subaditividade enumerável: Para quaisquer eventos $A_1, A_2, ...,$ *temos:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

1.2.7 Probabilidades Condicionais e Independência de Eventos

Definição 1.2.21. *(Probabilidade Condicional)*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade. Dados dois eventos aleatórios* $A \in \mathcal{F}$ *e* $B \in \mathcal{F}$ *tais que* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Definimos a probabilidade condicional de A dado que B ocorreu por:*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

A definição acima nos permite escrever $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B).\mathbb{P}(A|B)$.

Proposição 1.2.22. *Seja B tal que* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Então:*

a) $\mathbb{P}(\phi|B) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$, $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$;

b) $\mathbb{P}((A \cup C)|B) = \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B)$, *se* $A \cap C = \phi$.

Podemos provar que, fixado B tal que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(.|B)$ é uma probabilidade sobre o espaço amostral B.

Teorema 1.2.23. *(Teorema da multiplicação)*

Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são eventos com $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|(A_1 \cap A_2))...\mathbb{P}(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})).$$

Teorema 1.2.24. *(Teorema da Multiplicação Condicional)*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos aleatórios em $\mathcal{F}$ tais que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$. Então:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|B) =$$
$$\mathbb{P}(A_1|B).\mathbb{P}(A_2|A_1 \cap B).\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2 \cap B) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B).$$

Teorema 1.2.25. *(Fórmula da Probabilidade Total Condicional)*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e I um conjunto enumerável de índices. Suponha que os eventos aleatórios $B_i, i \in I$ formem uma partição do espaço amostral Ω, isto é

i) $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j;$

ii) $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega;$

iii) $\mathbb{P}(B_i) > 0 \ \forall i.$

iv) $\mathbb{P}(C) > 0$

Dado um evento aleatório $A \in \mathcal{F}$ temos:

$$\mathbb{P}(A|C) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i|C).\mathbb{P}(A|B_i \cap C).$$

Teorema 1.2.26. *(Fórmula da Probabilidade Total)*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e I um conjunto enumerável de índices. Suponha que os eventos aleatórios $B_i, i \in I$ formem uma partição do espaço amostral Ω, isto é *i*)$B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j;$

ii)$\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega;$

iii)$\mathbb{P}(B_i) > 0 \ \forall i.$

Dado um evento aleatório $A \in \mathcal{F}$ temos:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i).\mathbb{P}(B_i).$$

Teorema 1.2.27. *(Teorema de Bayes)*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e I um conjunto enumerável de índices. Suponha que os eventos aleatórios $B_i, i \in I$ formem uma partição do espaço amostral Ω. Dado um evento aleatório $A \in \mathcal{F}$ temos para todo $j \in I$:

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j).\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i).\mathbb{P}(B_i)}.$$

Definição 1.2.28. *Dois eventos A e B são chamados independentes se:*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B).$$

Uma consequência imediata desta definição é que o vazio ϕ e o espaço amostal Ω são independentes de qualquer outro evento, porque, se A é um evento, então:

$$\mathbb{P}(A \cap \phi) = \mathbb{P}(\phi) = 0 = \mathbb{P}(\phi).\mathbb{P}(A).$$

e

$$\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A).1 = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(\Omega).$$

Definição 1.2.29. *$A_1, A_2, ..., A_n$ são independentes se para toda escolha de $i_1, i_2, ..., i_k$, $k = 2, ..., n$ tal que $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$, $j = 1, 2, ..., k$, temos:*

$$\mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ik}) = \mathbb{P}(A_{i1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i2}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{ik}).$$

Definição 1.2.30. *(Continuidade da Probabilidade)*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade e* $\{A_n\}$ *uma sequência de eventos aleatórios em* $\mathcal{F}$ *tal que* $A_n \subset A_{n+1}$ *para todo* n. *Se* $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ *então:*

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

De forma análoga, se $\{A_n\}$ *é uma sequência de eventos aleatórios em* $\mathcal{F}$ *tal que* $A_{n+1} \subset A_n$ *para todo* n *e* $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ *então:*

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

1.3 Variáveis Aleatórias Discretas

Funções que associam números reais a pontos amostrais do espaço amostral são chamadas variáveis aleatórias e essas dizem respeito a características numéricas associadas ao experimento aleatório.

A variável aleatória é chamada discreta quando no experimento aleatório a quantidade de possíveis valores que ela pode assumir é finita ou no máximo infinito enumerável.

No caso de uma variável aleatória discreta definimos a função de probabilidade que associa probabilidade positiva a cada valor possível da variável aleatória e zero aos demais valores. Geralmente, podemos obter uma função probabilidade diretamente através do cálculo das probabilidades dos eventos do espaço amostral original do experimento.

Vale destacar que as variáveis aleatórias podem ser também contínuas, porém estas serão interessantes para os casos em que as variáveis assumam valores em subintervalos da reta numérica ou para aproximação de variáveis aleatórias discretas. Tais probabilidades poderão ser determinadas com o conhecimento da distribuição de probabilidade da variável aleatória, porém, neste trabalho iremos destacar somente os casos aplicados em variáveis aleatórias discretas.

Além das variáveis aleatórias discretas e contínuas, existem ainda as variáveis aleatórias singulares e mistas.

1.3.1 Conceito de Variável Aleatória Discreta

Definição 1.3.1. *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função a valores reais definida em Ω, tal que*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F};$$

Definição 1.3.2. *A função de distribuição acumulada de uma variável X é a função $F = F_x$ definida por*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Propriedade 1.3.3. Propriedades fundamentais de uma função de distribuição:
(F1) F é uma função não-decrescente: $x < y$, então $F(x) \leq F(y)$.
(F2) F é contínua a direita: se $x_n \downarrow x$, então $F(x_n) \downarrow F(x)$.
(F3) Se $x_n \downarrow -\infty$, então $F(x_n) \downarrow 0$; se $x_n \uparrow +\infty$, então $F(x_n) \uparrow 1$.

Observação: Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz (F1), (F2) e (F3) é a função de distribuição de alguma variável aleatória X.

Definição 1.3.4. *Seja X uma variável aleatória discreta. A função $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ é chamada função de probabilidade de X.*

1.3.2 Média e Variância

Definição 1.3.5. *A Esperança (média, valor esperado) de uma variável aleatória discreta X é definida por:*

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x).$$

Observação: A esperança está definida somente quando a soma (integral) é bem definida.

Proposição 1.3.6. *Se a variável aleatória discreta X tomar somente valores não-negativos, ou seja, $X(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, então:*

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Propriedade 1.3.7. *(Propriedades da Esperança)*

P1) Se $X = c$, então $E(X) = c$.

P2) Se $X \leq Y$ então $E(X) \leq E(Y)$, se as esperanças estão bem definidas.

P3) Linearidade.

(i) Se $E(X)$ está bem definida, então $E(aX + b) = aE(X) + b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ (Convencionando: $0.\infty = 0$);

(ii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$, quando o termo à direita da igualdade tem sentido. (Vale resaltar que: Se $E(X) = +\infty$, então $0 = E(X - X) \neq E(X) - E(X)$), pois $+\infty$ e $-\infty$ não tem sentido).

P4) Desigualdade de Jensen. Seja φ uma função convexa definida na reta. Se a variável aleatória X é integrável, então

$$E\varphi(X) \geq \varphi(EX).$$

1.3.3 Propriedades da Variável Aleatória Discreta

Definição 1.3.8. *Seja X uma variável aleatória discreta e $h(X)$ uma função de X. Então:*

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{x} h(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Definição 1.3.9. *A variância de uma variável aleatória discreta X integrável com esperança μ é dada por:*

$$Var(X) = \sum_{x} (x - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x).$$

Proposição 1.3.10. *A variância de uma variável aleatória X integrável com esperança μ é dada por:*

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Se $Var(X) < \infty$, então $\sqrt{Var(X)}$ é chamado de desvio padrão de X.

Definição 1.3.11. *(Independência de Variáveis Aleatórias)*

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ um vetor aleatório (vetor onde cada entrada é uma variável aleatória). As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são ditas independentes se para quaisquer conjuntos borelianos $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ vale

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1; X_2 \in A_2; \cdots; X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^{n} [\mathbb{P}(X_i \in A_i)].$$

Definição 1.3.12. *Seja $(X_1, X_2, ..., X_n)$ um vetor aleatório.*

A Função de distribuição conjunta $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ é dada por:

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = F(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n).$$

Para todo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

Teorema 1.3.13. *Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são independentes então*

$$F_{X_1;X_2;\cdots;X_n}(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

Reciprocamente, se existem funções $F_1, \cdots, F_n$ tais que para todo i

$$\lim_{x \to \infty} F_i(x) = 1$$

e

$$F_{X_1;X_2;\cdots;X_n}(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

para toda escolha de $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *então as variáveis aleatórias* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *são independentes e* $F_{X_i} = F_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema 1.3.14. *Seja* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *um vetor aleatório discreto. As variáveis aleatórias* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *são ditas independentes se para toda escolha de* $(x_1; \cdots; x_n)$

$$p_{X_1;X_2;\cdots;X_n}(x_1; x_2; \cdots; x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i).$$

Teorema 1.3.15. *Seja* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *um vetor aleatório. Então se* $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots X_n)$ *faz sentido:*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Teorema 1.3.16. *Se as variáveis aleatórias* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *são independentes então:*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i).$$

1.3.4 Lei Forte dos Grandes Números

A esperança matemática de uma variável aleatória X é também chamada de *Média* ou *valor esperado* de X. Se X é discreta, $E(X)$ é uma espécie de *média ponderada*, onde determinamos os pesos como probabilidades, então $E(X)$ é uma média ponderada dos valores possíveis de X. Suponha que temos um experimento aleatório com uma variável aleatória X associada. Suponha que o experimento é repetido n vezes em condições idênticas. Podemos verificar, que o valor da média $E(X)$ será o limite quando $n \to \infty$ da média amostral dos valores observados para X nas n repetições. O valor amostral da média observada convergirá para $E(X)$ quando o valor de n repetições aumenta. Assim, dizemos que "esperamos" obter a longo prazo um valor médio $E(X)$. Analisando este princípio podemos obter uma versão do que virá a ser a *Lei dos Grandes Números*.

Antes de enunciar a lei forte dos grandes números vamos definir convergência quase certa.

Definição 1.3.17. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade,* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias em* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *e* X *uma variável aleatória em* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Dizemos que* $X_n \stackrel{q.c.}{\to} X$ *se,*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega, X(\omega) \to X(\omega)) = 1.$$

Intuitivamente falando, X_n *converge quase certamente para* X, *se* $\mathbb{P}(\omega \in \Omega, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$ *infinitas vezes*$) = 0$.

Logo, como probabilidade 1, dado $\epsilon > 0$ *existe* $N(\varepsilon)$ *aleatório tal que para* $n \geq N(\varepsilon)$.

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Teorema 1.3.18. *(A Lei Forte de Kolmogorov)*

Sejam $X_1, X_2, ...$ *variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e integráveis, com* $E(X_n) = \mu$. *Então,*

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to \mu.$$

quase certamente.

A lei forte dos grandes números diz que para qualquer $\varepsilon > 0$, com probabilidade 1, existe $N(\varepsilon)$ aleatório tal que para $N \geq N(\varepsilon)$, $\frac{S_n}{n} \in (\mu - \varepsilon; \mu + \varepsilon)$.

Corolário 1.3.19. *(Lei Forte de Borel, 1909)*

Sejam $X_1, X_2, ...$ *independentes e identicamente distribuídas tais que* $\mathbb{P}(X_n = 1) = p, \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$. *Então* $\frac{S_n}{n} \to p$ *quase certamente, onde* $S_n = X_1 + ... + X_n$.

Teorema 1.3.20. *(Primeira Lei Forte de Kolmogorov)*

Sejam $X_1, X_2, ...$ *variáveis aleatórias integráveis e independentes, suponha que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var X_n}{n^2} < +\infty.$$

Então as X_n satisfazem a Lei Forte dos Grandes Números, isto é,

$$\frac{(X_1 + ... + X_n)}{n} - \frac{[E(X_1) + ... + E(X_n)]}{n} \to 0,$$

quase certamente.

Capítulo 2

Probabilidades associadas a jogos

É comum, principalmente quando iniciamos a abordagem do conteúdo de Probabilidades no Ensino Médio, associar algum tipo de problema envolvendo situação de jogos, pelo simples fato de que quase todos alunos conhecem algum tipo de jogo, por conhecer alguém que joga, através de informações na internet, redes sociais e até mesmo participar de jogos de cartas, tiro ao alvo, jogos de dados, jogos online, etc. Por isso, este tema foi escolhido, com a finalidade de varias possibilidades de aplicação dentro do conteúdo e por se tratar de uma atividade lúdica, onde podemos apresentar aos alunos várias formas de resolução de situações problemas envolvendo o cotidiano.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (1998), os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Portanto, neste capítulo, destacamos alguns tipos de jogos, dentre eles as Loterias, os jogos envolvendo dados, as roletas, alguns jogos de cartas, moedas e jogos online, dentre os quais faremos uma abordagem um pouco mais específica voltada para apostas em jogos de futebol, com a finalidade de possíveis aplicações de situações problemas envolvendo jogos e probabilidade em sala de aula.

2.1 Loterias

2.1.1 História dos Jogos de Loteria

Os jogos de loteria nos moldes que funcionam atualmente, tiveram sua origem em meados do século XX, mais precisamente no ano de 1962, sendo administrada pela CEF - Caixa Econômica Federal, porém, somente após a década de 70 que os jogos foram impulsionados e o número de apostas começaram a aumentar, através de campanhas de divulgação. Um fator que auxiliou no aumento do número de apostas foi o fato de a partir deste momento parte dos valores arrecadados com as apostas serem destinados para a própria população, ou seja, a exploração das loterias pela Caixa Econômica Federal tem sido autorizada pelo Estado, onde à princípio a arrecadação de recursos devem ser revertidos em benefício da sociedade, para investimentos em saúde, educação, segurança pública, esporte e cultura. No esporte, alguns projetos como o bolsa atleta, programa de apoio e incentivo a atletas olímpicos nacionais, são financiados pela arrecadação das apostas. Segundo informações disponíveis no próprio site de Loterias da caixa, do total arrecadado, uma parte da verba é destinada ao Comitê Olímpico Brasileiro (COB) e também ao (CPB) Comitê Paraolímpico Brasileiro.

Sobre a origem das atividades de jogos lotéricos no Brasil, podemos destacar sua origem no final do século XVIII, cujo principal objetivo não era arrecadar recursos e favorecer a população. Segundo (CANTON, 2010), O governador da época em Minas Gerais, Luiz da Cunha Menezes, com o objetivo de arrecadar recursos para o término das obras da Casa de Câmara e Cadeia (atual Museu da Inconfidência) de Vila Rica, hoje em dia chamada de cidade de Ouro Preto, solicitou à Presidência da Câmara Municipal autorização para promover uma loteria.

Existem outro jogos similares aos das Loterias, cujo objetivo não é apenas de cunho social, mas pessoal, dentre eles podemos citar os Bingos, porém essa prática é tratada como irregular em nosso país desde 2002, porém, existe uma mobilização para a liberação da prática deste jogo em nosso país, porém ainda necessita ser julgada e aprovada pelo Congresso Nacional e Senado.

Por isso, nesta etapa focamos somente nos jogos de loterias, abordamos a funcionalidade de alguns jogos e apresentamos exemplos que envolvam a probabilidade, analisando as chances de acertar os números sorteados em cada uma das situações.

As informações sobre cada modalidade de loteria, apresentadas a seguir, são retiradas do site da Caixa Econômica Federal (CAIXA,s/d).

2.1.2 Como funcionam os Jogos de Loteria

2.1.2.1 Mega-sena

Podemos dizer que a Mega-Sena é o jogo de loteria que apresenta o maior número de apostadores, principalmente pelo alto valor da premiação, segundo o jornal extra de 08 de maio 2019, mais de 1,8 milhões de pessoas fizeram apostas na Mega da virada (Mega-Sena cujo sorteio é realizado no final de cada ano) e a premiação superou a casa dos 170 milhões de Reais, em 2019 a premiação se aproximou dos 300 milhões de reais, segundo o site da própria Caixa Econômica Federal.

Para jogar, o apostador deve escolher de 6 a 15 números entre os 60 disponíveis em uma cartela que pode ser retirada em qualquer casa lotérica ou também fazer a seleção através do site ou aplicativo da Caixa Econômica Federal, o valor das apostas, bem como o cálculo das probabilidades disponibilizado pelo próprio site para acerto em apostas únicas são definidos da seguinte forma:

Figura 2.1: Valor das apostas e probabilidades de acerto na Mega-sena

Quantidade de nº jogados	Valor de aposta	Probabilidade de acerto (1 em)		
		Sena	Quina	Quadra
6	4,50	50.063.860	154.518	2.332
7	31,50	7.151.980	44.981	1.038
8	126,00	1.787.995	17.192	539
9	378,00	595.998	7.791	312
10	945,00	238.399	3.973	195
11	2.079,00	108.363	2.211	129
12	4.158,00	54.182	1.317	90
13	7.722,00	29.175	828	65
14	13.513,50	16.671	544	48
15	22.522,50	10.003	370	37

Fonte: http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena.

Neste jogo, vale ressaltar que os apostadores ganham também se acertarem 4 ou 5 dezenas, e os sorteios acontecem às quartas-feiras e aos sábados, podem acontecer em dias especiais como a Mega da Virada e a Mega de Independência.

Vejamos agora uma proposta de aplicação de exercício voltada ao ensino de Probabilidades no Ensino Médio.

Exemplo 2.1.1. *O Jogo da Mega-Sena consiste em marcar de 6 a 15 dezenas em um cartão com 60 dezenas.*

a) De quantas maneiras podemos escolher 6 dezenas para fazer uma aposta?

b) Um pessoa que faz uma aposta simples, ou seja, que marca 6 dezenas, paga determinado valor. Digamos que esse valor seja de R$ 4,50. Quando são escolhidas mais do que 6 dezenas, os valores pagos são os indicados na Figura 2.1. Qual é o raciocínio que justifica esses valores?

Solução:

a) A quantidade de apostas possíveis é o número de combinações das 60 dezenas tomadas 6 a 6.

$$C_{60}^{6} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 50.063.860.$$

Portanto, uma aposta pode ser feita de 50.063.860 maneiras.

b) Uma pessoa que escolhe 7 dezenas faz $C_7^6 = 7$ apostas simples. Uma pessoa que escolhe 8 dezenas faz $C_8^6 = 28$ apostas simples. Uma pessoa que escolhe 9 dezenas faz $C_9^6 = 84$ e assim sucessivamente. Desse modo, os valores pagos correspondem ao valor de uma aposta simples, R$ 4,50, multiplicados por 7, 28, 84 e assim por diante.

2.1.2.2 Quina

Assim como a Mega-sena, a quina é um jogo de apostas que consiste no sorteio de 5 dezenas detre 80 dezenas disponíveis. Neste caso o apostador pode escolher de 5 a 15 dezenas para realizar uma aposta, existe uma possibilidade de jogar utilizando a surpresinha, onde os números são escolhidos aleatoriamente pelo sistema, ou então pode escolher a modalidade Teimosinha, onde o jogador pode concorrer com a mesma aposta, durante 3, 6, 12, 18 ou 24 sorteios consecutivos.

Os sorteios da quina são realizados durante toda a semana exceto aos domingos e o apostador pode ganhar com um bilhete único, se dentre 2, 3, 4 ou 5 dezenas sorteadas em um determinado concurso estiverem as dezenas marcadas no bilhete. O valor das apostas seguem os critérios da mega-sena, onde o valor de cada aposta é R$ 2,00 e para cada número extra marcado no bilhete multiplicamos esse valor pela probabilidade de acertos desses números, como podemos ver no quadro abaixo retirado da própria página de loterias da Caixa Econômica Federal (CAIXA, s/d).

Figura 2.2: Valor das apostas e probabilidades de acerto na Quina

Quantidade de nº jogados	Valor de aposta	Probabilidade de acerto (1 em...)			
		Quina	Quadra	Terno	Duque
5	2,00	24.040.016	64.106	866	36
6	12,00	4.006.669	21.658	445	25
7	42,00	1.144.763	9.409	261	18
8	112,00	429.286	4.770	168	14
9	252,00	190.794	2.687	115	12
10	504,00	95.396	1.635	82	9
11	924,00	52.035	1.056	62	8
12	1.584,00	30.354	714	48	7
13	2.574,00	18.679	502	38	6
14	4.004,00	12.008	364	31	5,8
15	6.006,00	8.005	271	25	5,2

Fonte: http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/quina

Se após 90 dias o apostador não resgatar o dinheiro da premiação esses valores são repassados diretamente ao Tesouro-nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Exemplo 2.1.2. *A Quina é um jogo de loteria que paga prêmios aos acertadores de 2 (duque), 3 (terno), 4 (quadra) ou 5(quina) números. Para jogar, o apostador deverá escolher e marcar de 5 a 15 números dentre os 80 disponíveis no volante. Amanda queria fazer uma "fezinha"e foi a uma Casa Lotérica para jogar na Quina, mas como só dispunha de R$ 2,00 resolveu fazer uma aposta de 5 números (aposta simples) que custava R$ 2,00. Qual é a chance de Amanda ganhar um terno da Quina com uma aposta simples?*

Solução:

Inicialmente, devemos pensar nas possibilidades de Amanda acertar cada prêmio da Quina, para isso, iremos calcular a probabilidade de cada evento ocorrer. Neste momento, devemos identificar os dados apresentados no problema.

- Experimento: Sortear 5 números diferentes, no universo de 01 a 80.
- Espaço amostral: Neste caso, para determinar o número de elementos do espaço amostral, temos que calcular de quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Quina.

Outro fator a ser analisado é que a ordem do sorteio não é importante, sendo assim, utilizaremos combinações simples para resolver esta situação.

1º passo: Escolher 5 dezenas, dentre as 80 disponíveis:

$$C_{80}^{5} = \frac{80!}{5! \cdot 75!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76 \cdot 75!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 75!} = \frac{2.884.801.920}{120} = 24.040.016.$$

2º passo: Determinar o número de casos favoráveis, ou seja, de quantas maneiras Amanda pode acertar 3 números (terno) com uma aposta simples. Para isso devemos escolher dentre dos 5 números apostados 3 que estejam entre as dezenas sorteadas e calcular a combinação de 5 números tomados 3 a 3 e os dois números restantes podem ser qualquer um dos 75 que não foram apostados, ou seja, a combinação dos 75 números tomados 2 a 2.

$$C_{5}^{3} \cdot C_{75}^{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{75!}{2! \cdot 73!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \frac{75 \cdot 74 \cdot 73!}{2 \cdot 1 \cdot 73!} = \frac{11.000}{4} = 27.750.$$

Logo, o número de casos favoráveis de fazer um terno com a aposta é de 27.750 maneiras.

3º Passo: Vamos a probabilidade de acertar um terno com uma aposta simples.

$$\frac{27.750}{24.040.016} = \frac{1}{866} = 0,12\%.$$

Portanto, a probabilidade de Amanda acertar um terno na Quina é de 1 em 866 combinações ou 0,12%.

2.1.2.3 Lotofácil

O primeiro sorteio da Lotofácil foi realizado em 29 de setembro de 2003, o jogo tem características parecidas com as da mega-sena e da quina, porém, na Lotofácil ganha quem consegue acertar 11, 12, 13, 14 ou 15 dessas dezenas, podendo apostar de 15 a 18 números, dentre uma quantidade de 25 dezenas disponíveis. Mais uma vez, o valor das apostas será determinado pelo número de dezenas selecionadas multiplicadas pelas suas respectivas probabilidades de ocorrência.

Os sorteios da Lotofácil são realizados às segundas, quartas e sextas-feiras e a aposta mínima de 15 números custa R$ 2,50, como podemos ver no quadro abaixo retirado da própria página de loterias da Caixa Econômica Federal (CAIXA, s/d).

Figura 2.3: Probabilidades de acerto na Lotofácil

Faixas de premiação	Apostas simples			
	15 números (1 aposta) Probabilidade - N. de ganhadores (1 em):	16 números (16 apostas) Probabilidade - N. de ganhadores (1 em):	17 números (136 apostas) Probabilidade - N. de ganhadores (1 em):	18 números (816 apostas) Probabilidade - N. de ganhadores (1 em):
15 ACERTOS	3.268.760	204.297	24.035	4.005
14	21.791	3.026	600	152
13	691	162	49	18
12	59	21	9,4	5
11	11	5,9	3,7	2,9
PREÇO A PAGAR	1 X R$ 2,50 = R$ 2,50	16 X R$ 2,50 = R$ 40,00	136 X R$ 2,50 = R$ 340,00	816 X R$ 2,50 = R$ 2.040,00

Fonte: http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil.

Assim como na quina, se após 90 dias o apostador não resgatar o dinheiro da premiação, esses valores são repassados diretamente ao Tesouro-nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Exemplo 2.1.3. *Sabendo que cada jogo custa R$ 2,50, quanto este apostador gastaria se fizesse todos os jogos? Suponhamos que a estimativa de prêmio do próximo concurso seja de R$ 2.500.000,00 e que este apostador tenha muito dinheiro, é vantajoso para ele realizar esta aposta?*

Solução:

Inicialmente, devemos determinar em quantos jogos de 15 números (aposta simples) o apostador deve apostar para ter a certeza que ganhará o prêmio máximo, ou seja, acertar os 15 números sorteados, para isso, devemos calcular de quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Lotofácil. Como a ordem de sorteio dos números não é importante, utilizaremos a combinação simples para realizar este cálculo, ou seja, faremos a combinação das 25 dezenas tomadas 15 a 15.

$$C_{25}^{15} = \frac{25!}{15! \cdot 10!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3.268.760.$$

Portanto, deverá realizar 3.268.760 apostas diferentes. Posteriormente, iremos multiplicar esse número de apostas ao valor de cada aposta simples.

$$2,50 \cdot 3.268.760 = 8.171.900.$$

Portanto, o apostador gastaria R$ 8.171.900 e como o prêmio do próximo concurso é menor que esse valor, podemos concluir que não é vantajoso realizar esta aposta.

2.2 Roleta

2.2.1 História dos jogos de Roleta

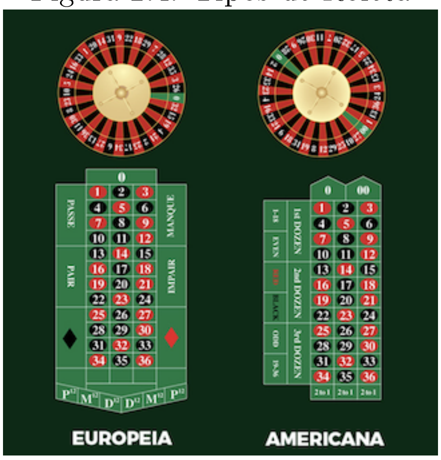
A Roleta (do francês Roullete, que significa pequena roda) foi criada no século XVIII. Porém há registros de que no século anterior já se tenha desenvolvido algumas pesquisas em uma determinada máquina com pequenos movimentos circulares e perpétuos, que outrora fosse aplicada em determinadas atividades do exoterismo. Acredita-se que a origem advém do fato dos monges franceses estarem criando esta atividade para fugir de uma possível monotonia. Porém, existem passagens que atribuem a criação das roletas aos romanos, onde ao desmontar as rodas de suas carruagens de batalhas, utilizavam estas para transformar em uma roda de azar ou simplesmente uma roleta.

O jogo se tornou popular com uma certa facilidade, inclusive passou a ser jogado no continente americano, onde suas regras passaram a ser atualizadas e prontamente atribuiu-se mais um valor, o 00, aumentando assim a vantagem da banca que, desta forma, diminui as chances de ganho de um jogador nas apostas. Talvez por isso, atualmente nos grandes cassinos onde são realizados esses jogos, utiliza-se o mesmo sistema de numeração e somente as roletas do estilo americano.

2.2.2 Como funcionam os jogos de Roleta

Atualmente são atribuídas duas maneiras de se jogar roleta, através da Roleta Americana qua apresenta 38 casas 0, 00 e de 1 à 36 números e através da Roleta Europeia que possui 37 casas de 0 à 36, veja a seguir um exemplo de cada uma das roletas.

Figura 2.4: Tipos de Roleta



Fonte: https://aposta10.com/cassino/artigo/o-que-faz-da-roleta-um-jogo-tao-popular

O jogo é realizado da seguinte forma, o Dealer (responsável por girar a roleta), gira a roleta, lança uma bola e a partir deste momento ganha o jogo o apostador que escolher o número no qual a bola irá ficar quando a roleta parar de girar.

Provavelmente, por se tratar de um jogo popular, o jogo de Roleta apresenta uma grande variedade de apostas e prêmios. As apostas individuais, por exemplo, acontecem na parte de dentro da mesa, cabe ao jogador escolher um determinado número, sendo importante analisar as cores. Nesta situação de aposta, a distribuição dos prêmios é maior (35 a 1). Em contrapartida, essas jogadas apresentam a menor probabilidade de acerto. Vejamos a seguir, segundo as regras disponíveis em (ODDSSHARK, 2008), e (ANDRADE,2017) outros tipos de aposta que podem acontecer na parte de dentro da mesa:

- **(1 número)** O jogador aposta no número que ele deseja que a bolinha pare em cima quando a roleta parar de girar.
- **(Street)** Na mesma linha e com a mesma ficha podem ser apostados colocando a ficha no começo da linha.
- **(Corner)** Pode ser apostado colocando a ficha em cima do ponto interseção das linhas que pertence aos 4 números ao mesmo tempo. A desvantagem desse tipo de aposta é que os números devem estar juntos.
- **(Fileira Vertical Dobrada)** Aposta nos números 16, 17, 18, 19, 20 e 21. Para esse tipo de aposta, coloca-se a ficha no começo da linha que divide as filas verticais centrais.
- **(Basket)** Na Roleta Europeia aposta nos números 0, 1, 2 e 3. Já na Roleta Americana, aposta também no 00.
- **(Dupla)** Aposta em dois números ao mesmo tempo. Podem ser vizinhos verticalmente ou horizontalmente.
- **(Rua)** Aposta em 3 números na orientação horizontal.
- **(Rua Dupla)** Aposta em 6 números vizinhos horizontalmente.
- **(Quadrado)** Aposta em 4 números que formam um quadrado.
- **(Trio ou Street)** Na mesma linha e com a mesma ficha podem ser apostados colocando a ficha no começo da linha. Aposta nos três primeiros números da mesa: 0/00/1 (na roleta americana) / 0/1/2 (na roleta europeia).

Confira as apostas do lado externo da mesa:

- **(Vermelho ou Preto)** Todos os números da mesa possuem coloração preta ou vermelha (com exceção ao 0). O jogador aposta que o próximo número será da cor vermelha ou preta.
- **(Par ou ímpar)** O jogador prevê se o próximo número sorteado será par ou ímpar. Essa jogada pode ser realizada em conjunto com a vermelho/preto, para aumentar sua premiação.
- **(Aposta de dúzias)** Na roleta americana há 38 números, e na roleta europeia são 37. Esses números são divididos em 3 dúzias (excluindo os números nulos). O jogador pode apostar qual delas terá um número sorteado.
- **(Aposta de Coluna)** A mesa do jogo de roleta é dividida em três colunas. A exemplo da aposta de dúzias, o jogador pode realizar sua jogada em alguma dessas colunas.
- **(1-18 / 19-36)** Aposta que prevê que o número sorteado fará parte de alguma das divisões da mesa.

Exemplo 2.2.1. *Um dos jogos de azar presentes nos cassinos é a roleta. O jogo consiste em lançar uma bola numa roleta que está dividida num certo número de secções numeradas e coloridas de vermelho, preto ou verde. A roleta europeia contém 36 secções pretas ou vermelhas numeradas de 1 a 36 e uma secção verde com o número 0. A roleta americana contém mais uma secção verde numerada com 00. O jogador poderá fazer diferentes tipos de apostas, sendo estas feitas numa mesa que contém os números da roleta, estando os números de 1 a 36 distribuídos em 3 colunas e 12 linhas. O jogador poderá apostar em números isolados ou escolher conjuntos pré-definidos de números, por exemplo, os números de uma das três colunas, os números pares ou os números coloridos a vermelho. Se o jogador conseguir acertar no número que escolheu receberá um prémio correspondente ao tipo de aposta que efetuou. Por exemplo, se apostou apenas num número e ele saiu na roleta, ficará com o dinheiro que apostou e receberá mais 35 vezes o dinheiro que apostou; se apostar num número par (o zero não é contado) e a bola cair numa secção com um número nestas condições, receberá uma quantia de dinheiro igual ao que apostou e manterá a quantia que apostou.*

a) Qual é a probabilidade de obter número par para cada um dos tipos de roletas (o 0 e o 00 não contam como números pares)?

b) Sabendo que o apostador deve escolher uma única dezena. Em qual roleta essa aposta será mais vantajosa?

c) Qual a probabilidade de o apostador ganhar alguma premiação, ao apostar em um "Corner" {1, 2, 4, 5} na roleta americana?

Solução:

Item a) Para determinar a probabilidade de obter um número par na roleta europeia, inicialmente definimos como espaço amostral Ω todas as possibilidades dessa jogada, como a bolinha pode cair nos seguintes números $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 36\}$, então o número de elementos do espaço amostral será $n(\Omega) = 37$. Por outro lado, o evento esperado E, número de casas pares da roleta europeia é igual à $n(E) = 18$, sendo $E = \{2, 4, ..., 36\}$, portanto a probabilidade $P(E)$ de se obter um número par na roleta é igual a:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{18}{37} \approx 48,65\%.$$

Logo, a probabilidade de ser sorteado um número par na roleta europeia é de aproximadamente 48,65%.

Para determinar a probabilidade de obter um número par na roleta americana, inicialmente definimos como espaço amostral S todas as possibilidades dessa jogada, como a bolinha pode cair nos seguintes números $S = \{00, 0, 1, 2, ..., 36\}$, então o número de elementos do espaço amostral será $n(S) = 38$. Por outro lado, o evento esperado A, número de casas pares da roleta americana é igual à $n(A) = 18$, sendo $A = \{2, 4, ..., 36\}$, portanto a probabilidade $P(A)$ de se obter um número par na roleta é igual a:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} =\approx 47,37\%.$$

Item b) A roleta europeia, pelo fato de ter apenas o valor 0 na roleta, dando uma probabilidade de $\frac{1}{37} \approx 2,7\%$ da banca ganhar, enquanto a probabilidade da banca ganhar na roleta americana é de $\frac{1}{38} \approx 2,63\%$.

Item c) Sabemos que a o número de casos possíveis de uma roleta americana é $n(S) = 38$. Determinamos o número de casos favoráveis de um apostador ser premiado escolhendo um número que pertence ao corner representado pelo conjunto $B = \{1, 2, 4, 5\}$, logo $n(B) = 4$. Portanto, a probabilidade pode ser calculada da seguinte forma:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{38} = \frac{2}{19} \approx 10,53\%.$$

Logo, a probabilidade de um apostador ser premiado pela aposta realizada no corner $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ é de aproximadamente $10,53\%$.

2.3 Cartas

Nesta seção, apresentamos algumas regras de jogos de cartas, mais especificamente sobre pôquer e blackjack ou vinte e um, estes que são muito comuns no cotidiano das pessoas, como forma de passatempo e também são muito procurados pelos apostadores em cassinos e sites de jogos.

Inicialmente, uma hipótese para trabalhar alguma dinâmica envolvendo jogos de cartas é tentar adivinhar qual é a próxima carta a ser retirada e quais as chances reais de vencer a partida com a retirada dessa carta, ou ainda, adivinhar qual é a carta que está com o seu adversário. Neste sentido, vamos abordar o Pôquer e o Blackjack, com objetivo de propor algumas questões que envolvam a probabilidade e estes jogos. Como dissemos inicialmente, seria inviável nesta pesquisa abordar todos os tipos de jogos de cartas, pois em cada lugar do mundo pode existir um tipo de jogo, com regras diferentes e até mesmo regras iguais e nomes diferentes. Alguns tipos de jogos de cartas muito populares em nosso país ou mais precisamente na região de Goiás são, o Truco, a Caixeta, a Canastra, o Pontinho, e etc.

Bastante popular entre os mais jovens, o jogo do UNO é praticado em algumas escolas de forma educativa, com a finalidade de estimular os alunos a realizarem operações matemáticas de adição e subtração. O jogo é formado de cartas enumeradas de 1 a 9, com 4 tipos de cores, a princípio parece com o o baralho comum com cartas enumeradas de 2 a 10, com o A (ás) e com as figuras K (rei), Q (Dama) e J (Valete), porém vale ressaltar que o UNO é um jogo desenvolvido de forma lúdica e assim apresenta essas características diferentes de um baralho convencional, porém também apresenta algumas cartas especiais para dar dinâmica ao jogo e neste caso vence quem ficar sem nenhuma carta no final do jogo.

Vejamos agora, um pouco sobre a História do jogo de cartas da origem do baralho convencional que é utilizado atualmente.

2.3.1 História dos jogos de cartas e origem do baralho

Segundo algumas pesquisas em sites da internet, verificamos que não se sabe ao certo uma data específica de sua criação, mas existem relatos de que sua origem tenha ocorrido no século X antes de Cristo, no oriente médio, alguns citam que o baralho é originário da China, a pedido dos imperadores da época. Outros creditam a criação do baralho aos egípcios, árabes e indianos com funções religiosas e exotéricas.

É possível observar nas pesquisas que o baralho tenha chagado a Europa por volta do século XVI, onde começou a ser produzido, tornando-se popular em vários países. O baralho que conhecemos hoje com as características dos naipes e numeração tem uma grande influência dos franceses, pois reza a história de que o Rei Carlos da França tenha solicitado a um dos pintores da época que desenhasse cada naipe com a finalidade de que as cartas de copas, representassem o clero, as cartas de ouros, representasse a burguesia, a carta de espadas representasse a nobreza e as cartas de paus representassem os camponeses.

2.3.2 Pôquer

2.3.2.1 História do Pôquer

Atualmente o Pôquer é um dos jogos de cartas mais praticado no mundo todo e deve ser jogado por duas ou mais pessoas utilizando apenas um baralho convencional de 52 cartas. A dinâmica do jogo de apostas é a seguinte, quem tiver a melhor combinação de cartas vence o jogo ou se o apostador fizer uma aposta e os demais desistirem. O pôquer é um jogo de muitas regras e são muito importantes para o desenvolvimento da atividade. Atualmente o Pôquer é considerado um esporte de habilidade mental, como xadrez por exemplo, mas é pouco aplicado em questões de probabilidade voltadas para o Ensino Médio, certamente pelo fato de ser um jogo de apostas, considerada uma atividade ilícita em nosso país, porém é muito conhecido pelos jovens principalmente por praticantes de jogos online.

Não se sabe ao certo, quando foi criado o jogo de Pôquer, fazendo algumas pesquisas em site de jogos como (BODOG, 2020) e (TITANPOKER, 2013), (POKERSTARS, 2001) podemos ver que a maioria trata o Pôquer como jogo originário da China no século X, alguns fundamentam sua criação de origem Persa no século XVI, outros tratam da sua origem na França, levado ao continente americano, onde de fato se tornou cada vez mais popular estando diretamente associado a histórias do Velho Oeste do continente americano, onde o nome Pôquer teve seu nome diretamente associado a jogo de trapassas, pelo simples fato de que o apostador pode ganhar a banca mesmo se estiver blefando, ou seja, mentindo para seus adversários.

2.3.2.2 Como funcionam os jogos de Pôquer

Existem algumas maneiras diferentes de jogar o Pôquer, por este motivo, iremos destacar apenas o jogo de Pôquer Texas Hold'em, que é atualmente o sistema mais abordado em casas de apostas e de cassinos.

A dinâmica do jogo é a seguinte, cada apostador recebe duas cartas, na sequência o *Dealer* distribui três cartas sobre a mesa, nesta etapa já pode haver vencedor, por exemplo se um apostador colocar suas fichas sobre a mesa e os outros desistirem, este apostador é decretado ganhador da rodada. Porém, se mais de um apostador continuar cobrindo as apostas uns dos outros o *Dealer* continua colocando as cartas na mesa até formar, no máximo, uma sequência com 5 cartas sobre a mesa, nesta etapa são conferidas as apostas e quem obtiver uma sequência com a maior pontuação dentre as regras do jogo leva as apostas da mesa. Segundo (ANDRADE,2017) existem apenas nove modos (ou jogos) para pontuar no pôquer. Em ordem decrescente de pontuação temos:

- **Straight Flush** Sequência de cartas do mesmo naipe com os números em sequência, não existe empate para esta série, devem ser observadas as sequencias numéricas para verificar qual é a maior série e portanto obtêm um maior valor, em alguns campeonatos são definidos inicialmente, qual tipo de naipe é mais importante, porém existe a jogada que é chamada de **Royal Straight Flush**, considerada a maior pontuação para desempate, consiste em uma sequência de A, K, Q, J e 10 de naipe de ouros.

- **Quadra** Consiste em quatro cartas iguais. Caso haja empate (dois jogadores com quadras), ganha o jogador com o maior valor da carta que forma a quadra.

- **Full House (ou Full Hand)** É formado por uma trinca e um par. Caso haja empates entre full houses, desempata a maior trinca.

- **Flush** Acontece quando o jogador tem todas as cartas do mesmo naipe. O desempate entre flushes ocorre comparando as maiores cartas de cada jogador e, havendo novo empate, uma nova comparação entre as "maiores seguintes" até se esgotarem as cinco cartas. Caso haja empate entre todas as cartas dos flushes, sendo diferenciados apenas por seus naipes, é declarado empate, pois não critério de desempate.

- **Straight** Sequência de cartas em que o naipe não importa. O desempate entre os straights é pelo valor das cartas da sequência (semelhante ao straight flush). Caso haja empate, mudando apenas os naipes dos straights, é considerado empate por não haver critérios para desempatar.

- **Trinca** É uma sequência com três cartas iguais. Caso haja empate entre trincas, ganha aquela com maior valor das cartas (assim como as quadras, mencionadas anteriormente). Se a diferença for somente nos naipes das trincas, não há desempate.

- **Dois pares** Como o próprio nome sugere, essa pontuação é dada por dois pares de cartas iguais. Caso mais de um jogador tenha essa pontuação, compara-se os maiores pares de cada jogador e, havendo novo empate, faz a comparação entre os menores pares. Em um novo empate, não há outro critério para desfazê-lo.

- **Par** Dupla de cartas iguais. Caso haja empate de pontuação, ganha o jogador com maior valor de cartas que formam o par. Novo empate não há critérios que desempate o desfecho da partida.

- **Maior carta** Se nenhum dos jogadores que permanecerem até a última rodada de apostas fizer nenhuma das pontuações citadas acima, ganhará aquele com a maior carta. Caso a maior carta de outro jogador coincidir, é declarado empate na rodada.

Com base nessas informações, sobre as regras de pontuação do Pôquer, vamos verificar alguns cálculos de probabilidade envolvendo possíveis rodadas em determinadas situações:

Exemplo 2.3.1. *Qual a probabilidade de um jogador de Pôquer, conseguir na primeira rodada sair com a pontuação **Royal Straight Flush**?*

Solução:

Inicialmente vamos determinar o número de possibilidades do espaço amostral $n(\Omega)$, neste caso, devemos considerar todas as 52 cartas do baralho, dessas cartas, o jogador irá obter sua pontuação escolhendo (neste caso, a ordem das cartas não será importante) 5 entre 7 cartas dentre todas disponíveis. Assim, o espaço amostral consiste das possibilidades de escolher 7 cartas entre as 52 disponíveis. Logo:

$$n(\Omega) = C_{52}^{7} = \frac{52!}{7! \cdot 45!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45!}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 45!} = 133.784.560.$$

Logo, existem 133.784.560 possibilidades de escolher 7 dentre 52 cartas disponíveis no jogo. Agora, vamos determinar as possibilidades de o jogador sair com a pontuação *Royal Straight Flush*.

Sabemos que a pontuação *Royal Straight Flush* é obtida quando o jogador tem a sequência $A, K, Q, J, 10$ do mesmo naipe, ou seja, o número de casos possíveis $n(A)$ será determinado de 4 maneiras, porém, como o jogador tem disponível 7 cartas, sedo 5 delas um *Royal Straight Flush*, devemos ainda escolher duas cartas dentre as 47 que sobraram para compor as cartas disponíveis para o jogador. Portanto, o número de casos favoráveis será:

$$n(A) = 4.C_{47}^{2} = 4.\frac{47!}{2! \cdot 45!} = 4 \cdot \frac{47 \cdot 46 \cdot 45!}{2 \cdot 1 \cdot 45!} = \frac{8.648}{2} = 4.324.$$

Sabendo que existem 4.324 combinações possíveis de acontecer um *Royal Straight Flush* em jogo de Pôquer, então, a probabilidade de um jogador sair com um *Royal Straight Flush* será dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4.C_{47}^{2}}{C_{52}^{7}} = \frac{4.324}{133.784.560} \approx 0,00003232 \text{ ou } \approx 0,003232\%.$$

2.3.3 Blackjack (Vinte e Um)

2.3.3.1 História do Blackjack

Também conhecido como **Vinte e um**, o **Blackjack** é um jogo de cartas muito popular nas casas de apostas americanas foi inclusive abordado no filme "Quebrando a banca" (2008 - Sony,EUA) e tornou-se ainda mais famoso, visto que muitos apostadores preferem esse jogo pelo grau de facilidade das regras. O objetivo principal do jogo é obter uma pontuação maior que o adversário sem ultrapassar 21 pontos, o apostador que conseguir esta façanha ganha o jogo.

Blackjack surgiu em meados do século XVIII na França, como passatempo para a nobreza e eram criadas festas para jogar "Vigent en Un" (Vinte e Um em francês) e ganhou vários adeptos da época, dentre eles o mais famoso era Napoleão Bonaparte. Segundo historiadores, o Blackjack ou Vinte e Um teve origem através de outros dois jogos de raízes italianas o 31 (Trentuno) e o jogo $7\frac{1}{2}$ (Sette e mezzo), o jogo passou a ser chamado de Blackjack quando chegou aos Estados Unidos e passou a ser jogado nos cassinos americanos.

2.3.3.2 Como funcionam os jogos de Blackjack

Como já foi citado anteriormente, por ser um jogo de regras fáceis, o jogo atrai uma grande quantidade de apostadores profissionais pelo mundo inteiro. É jogado com até 8 baralhos com a finalidade de dificultar a contagem de cartas distribuídas aos jogadores e o jogador que obtiver a maior pontuação sem extrapolar 21 pontos vence o jogo.

Sobre os valores de carta durante os jogos: As cartas de 2 a 10 tem o mesmo valor original, as figuras, valete, damas e reis valem 10 pontos cada e o A ou ás é uma carta especial que pode valer 1 ou 11 pontos. Se o jogador tiver 10 pontos na primeira carta o ás valerá 11 pontos finalizando assim a partida,visto que nesta situação o jogador completa os 21 pontos, porém se a primeira carta é menor do que 10, o ás passa a valer 1 ponto, pois diminui as chances de ultrapassar 21 pontos rapidamente, determinando outras possibilidades de pontuação.

No jogo, são distribuídas, duas cartas para cada jogador e normalmente são viradas para cima, inclusive para a Banca, porém uma carta fica voltada para cima e a outra fica voltada para a mesa, dessa forma a Banca tem a possibilidade fazer 21 um pontos somente se uma das cartas voltada para cima é um ás ou uma carta de pontuação igual a 10 pontos e se isso acontecer, a mesa só perde se o outro jogador também fizer 21 pontos.

Verificado que a Banca não tem um Blackjack, cada jogador pode fazer sua jogada. Depois que todos os jogadores fizerem suas jogadas o *Dealer* representante da Banca deve jogar até obter uma pontuação maior que 17 e menor que 21 sem ultrapassar um número de 5 cartas, caso a banca ultrapasse 21 pontos, todos os jogadores que não estouraram sua pontuação saem vitoriosos. As jogadas podem ser realizadas da seguinte forma em cada rodada, após a distribuição das cartas pela banca, segundo (ANDRADE, 2017) cada jogador pode optar por uma jogada da seguinte maneira:

- **Stand** Comando para o dealer parar. Significa que o jogador não quer mais cartas (provavelmente por estar satisfeito com a sua combinação).

- **Hit** Significa que o jogador quer receber mais uma carta.

- **Dobrar** Caso o jogador decida que precisa de uma (e só uma) carta adicional, então ele pode dobrar sua aposta e receber mais uma carta (não há a garantia que será boa para o jogador). Esta opção é oferecida apenas para as duas primeiras cartas ou em cada uma das cartas após o jogador usar o Dividir.

- **Split** Ou **Dividir**, faz com que o jogador divida suas cartas em duas mãos, formando dois jogos distintos. Essa opção de jogada só pode ser feita se as duas primeiras cartas tiverem o mesmo valor de pontos. Nesse caso, cada uma dessas cartas será a primeira carta de uma nova mão. Cada jogador pode dividir duas ou três vezes, da forma mais conveniente e até mesmo usar o Dobrar em cada uma das mãos que foi dividida.

- **Surrender** Alguns cassinos oferecem a opção de *Surrender (ou Redenção)* nas primeiras duas cartas. Se o jogador não gostar de suas cartas de sua mão, ele pode pedir a redenção (antes do dealer revelar a carta da mesa) e perder somente a metade de suas fichas.

Por apresentar várias formas e combinações distintas para que o jogador ganhe uma rodada de Blackjack, não iremos apresentar nesta dissertação todas as probabilidades, visto que o nosso principal objetivo é mostrar alguns exemplos e aplicações do cálculo das probabalidades em situações que devem ser aplicadas ao Ensino Médio, então vamos somente demonstrar alguns exemplos e calcular a probabilidade em situações específicas do jogo.

Exemplo 2.3.2. *Em uma rodada de Blackjack, que está sendo jogado com um único baralho, qual a probabilidade de um apostador vencer, sabendo que a Banca já revelou ter 21 pontos?*

Solução:

Neste caso $n(\Omega) = C_{50}^2$, pois sabemos que a banca dispõe de uma carta de pontuação igual a 10 e um ás, portanto, para determinar o espaço amostral é necessário escolher 2 cartas dentre 50 disponíveis. Por outro lado, para obter o número de casos favoráveis $n(A)$, o apostador deverá ter necessariamente um ás e uma carta de pontuação igual a 10, para isso, devemos combinar as situações da seguinte forma: Escolher 1 ás dentre os disponíveis, ou seja C_3^1 e escolher uma carta de pontuação 10 dentre as 15 disponíveis, pois sabemos que são 4 cartas 10, e 12 figuras, porém uma delas já está com a banca, portanto devemos ter C_{15}^1. Então, a probabilidade será calculada da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_3^1.C_{15}^1}{C_{50}^2} = \frac{3 \cdot 15}{\frac{50 \cdot 49 \cdot 48!}{2 \cdot 1 \cdot 48!}} = \frac{45}{1 \cdot 225} = \frac{9}{245} \approx 0,03673 \text{ ou } \approx 3,673\%.$$

2.4 Moedas

2.4.1 História das Moedas

Sabemos que os objetos de metal são apreciadas por muitas pessoas em nossa atualidade, mas, antigamente esses objetos eram ainda mais apreciados. Sua produção era muito trabalhosa, exigia, além dos domínios e técnicas de fundição, existia a necessidade de conhecer a fonte desses objetos, onde eles eram encontrados e essas referências não eram de fácil acesso, ou seja, nem todos tinham acesso a essas informações.

A supervalorização destes objetos foi tamanha que eles passaram a ser utilizados como moedas que ao pesquisar no dicionário significam "peça de metal, geralmente circular, cunhada por instituição governamental para ser usadas como meio de pagamento".

Devido à falta de uma documentação suficiente, a origem das moedas ainda é uma incógnita para muitos arqueólogos e historiadores. Mas podemos verificar em algumas pesquisas, que o início da cunhagem das moedas geralmente é atribuído aos asiáticos, mais precisamente na Ásia Menor e posteriormente ela passou a ser adotadas pelas cidades gregas. Segundo (FLORENZANO, 2001) em uma publicação na revista do museu de Arqueologia e Etmologia de São Paulo-SP, Com relação às fontes escritas, há duas tradições principais que se registram: uma que posiciona o surgimento da moeda de ouro e prata na Ásia Menor, entre os lídios e outra que atribui a Fídon, tirano de Argos a cunhagem das primeiras moedas de prata na cidade de Egina. Note-se, que à exceção de Heródoto (século V a.C.), e também de Xenófanes de Cólofon (século VI a.C.), citado por Póllux (século II d.C.), todas as demais fontes são posteriores ao século IV a.C.

A partir daí, as moedas passaram a ser utilizadas no mundo inteiro, na sua história, podemos citar uma evolução, partindo mais precisamente pelos gregos (Atenas, Egina e Corinto) até o que conhecemos atualmente, sendo utilizada no comércio, como grande passo para a evolução financeira da população mundial. É certo que, a instituição das moedas no mercado financeiro desde o século VI tem um grande contexto de caracterização do Estado ao qual a moeda está diretamente associada como podemos ver ao citar Holloway (apud FLORENZANO, 2001, p.203) que diz: "a emissão de moedas tem a ver com o controle, com o poder instituído muito mais do que com qualquer aspecto econômico, de crescimento comercial ou de aprofundamento de relações de mercado. A moeda é fruto da pólis grega, é resultado de transformações profundas no pensamento grego e na maneira de se medir e de se avaliar coisas e serviços. A moeda é um instrumento de poder e de manipulação do poder; como elemento constitutivo da pólis grega servia à tirania e ao poder democrático".

A partir deste momento, apresentamos algumas curiosidades sobre as situações específicas da moedas atribuídas a aplicações em jogos e suas probabilidades, com a finalidade de tornar a compreensão por parte dos leitores dessa dissertação, das aplicações que serão associadas às atividades envolvendo a Probabilidade como conteúdo a ser trabalhado com alunos do Ensino Médio.

2.4.2 Curiosidade: Aplicação dos Jogos de Moedas no futebol

Pense na seguinte situação. Uma seleção bi-campeã do mundo disputando, em casa, a semifinal de uma competição como Eurocopa, o jogo vale vaga para a final da competição, o adversário é forte, porém, com pouca expressão no cenário mundial. A princípio podemos pensar que a equipe bi-campeã é claramente a favorita para avançar até a final, mas a disputa que será decidida em jogo único conta com a inspiração do time adversário e dramaticamente a partida termina empatada em 0x0, sendo esta acrescida de uma ainda mais dramática prorrogação que continua sem gols, você pode dizer, ok, vamos para os pênaltis e resolver essa história, só que não. Entra em campo, neste momento, a poderosa e sublime moeda para resolver essa situação. Este jogo realmente aconteceu na semifinal da Eurocopa de 1968, em Nápoles-Itália, entre Itália (Bi-campeã mundial) e União Soviética e para alegria da nação italiana o capitão do time na época, Giacinto Facchetti, escolheu a face certa da moeda e assim a Itália conseguiu chegar a final da Eurocopa, sagrando-se campeã em cima da antiga Iugoslávia. Curiosamente a primeira partida também terminou empatada, porém no regulamento da final estava prevista a realização de uma segunda partida e nesta a seleção italiana venceu o jogo por 2x0 (CALCIOPÉDIA, 2013).

Analisando esta situação, vimos que uma moeda não-viciada decidiu uma partida histórica, seguindo a definição clássica de probabilidade, onde as chances de a Itália vencer era 50% e para a União Soviética vencer a partida as chances também eram de 50%. Observando a situação do jogo, de onde a Itália vinha de dois títulos mundiais, jogando em casa, esta aplicação da moeda para decidir o jogo através da moeda não parece muito justa. De fato, poderia se ter escolhido uma forma subjetiva de probabilidade para resolver a situação do confronto, como a análise do histórico de jogos entre as equipes. Atualmente, em alguns casos, são atribuídos critérios técnicos para a solução de casos assim, como gol marcado fora de casa, para confrontos de ida e volta, equipe mais disciplinada e inclusive pênaltis, embora muitos considerem esse sistema de desempate como jogo de sorte, existem vários estudos que mostram que alguns fatores são relevantes, como quem cobra o pênalti primeiro, habilidades dos jogadores, etc., vale ressaltar que as disputas de pênalti no futebol foram instituídas a partir de 1970 pela FIFA (Federação Internacional de Futebol).

2.4.3 Como funcionam os jogos de Moedas

De todos os jogos que citamos até o momento a moeda é o mais simples. Consiste de uma moeda separada entre cara e coroa, portanto o espaço amostral de uma moeda simples é dado por $\Omega = \{K, C\}$, ou seja $n(\Omega) = 2$ e portanto a probabilidade de sair cara (K) em um lançamento da moeda é dado por $P(K) = \frac{n(K)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} = 50\%$ e a probabilidade de sair uma coroa em um determinado experimento simples é dado por $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2} = 50\%$. Podem ocorrer lançamentos sucessivos ou simultâneos de moedas, como veremos no exemplo a seguir:

Exemplo 2.4.1. *(PIC - OBMEP)*[1] *(CARVALHO, 2017) Pedro e João combinaram de lançar uma moeda 4 vezes. Pedro apostou que, nesses 4 lançamentos, não apareceriam 2 caras seguidas; João aceitou a aposta. Quem tem maior chance de ganhar a aposta?*

Resposta: Inicialmente iremos determinar o número de eventos que podem acontecer no espaço amostral $n(\Omega)$. Como em cada lançamento existem duas possibilidades, sair cara (k) ou coroa (C), então o número de possibilidades do espaço amostral será $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, logo $n(\Omega) = 16$. Todas essas sequências tem a mesma probabilidade de ocorrência, já que o resultado de um lançamento não afeta os demais e há a mesma chance de sair cara ou coroa. Vamos verificar quais dessas sequências levam à vitória de Pedro.

1º caso: Pedro vence, quando saírem todas as coroas (CCCC);

2º caso: Pedro vence, se nos lançamentos saírem uma única cara (KCCC), (CKCC), (CCKC), (CCCK);

3º caso: Pedro vence, se nos lançamentos saírem duas casas (CKCK), (KCKC), (KCCK), Lembrando que, neste caso, não pode ocorrer duas caras seguidas;

4º caso: Pedro perde, se saírem 3 ou mais caras.

Logo, o número de sequências favoráveis a Pedro é igual a 8, e sua probabilidade de vitória é igual a $\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 50\%$. Portanto, ambos tem a mesma chance de vitória.

2.5 Dados

2.5.1 História dos jogos de Dados

Como já foi citado no tópico de História da probabilidade, podemos afirmar que os jogos de dados quase deram a origem ao tema que estamos abordando nesta dissertação e que hoje é objeto essencial no ensino da Matemática, no estudo das Probabilidades.

A origem do dado, está diretamente associada ao osso Astrágalo (osso do calcanhar de um determinado animal com formato de um tetraedro irregular) que segundo historiadores essa transição foi ocorrendo de forma lenta no decorrer do tempo, mais precisamente em todo de 2 mil anos. Estima-se que os primeiros dados tenham surgido através do polimento das laterais arrendondadas do astrágalo até que ficassem planas, segundo (CALABRAIA e CALAVARI, 2013) A passagem de astrágalo para dado ocor-

[1] Programa de iniciação científica Jr. da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

reu simultaneamente em diferentes partes do mundo e os formatos nem sempre foram cúbicos. Os matemáticos gregos, por exemplo, provavelmente construíram dados poliédricos. Hoje com a evolução dos materiais, os dados passaram a ser fabricados com metais e marfim, porém, atualmente os dados são feitos basicamente com celulose e fibra de vidro.

Existem várias maneiras e jogos diferentes que podemos utilizar os dados, é comum observar em situações de jogos de dados que pessoas criem diferentes brincadeiras modelos distintos de regulamentos como entretenimento, porém nesta pesquisa iremos falar apenas do Craps, jogo que assim como o Blackjack, a roleta e o Pôquer são jogos muito populares em cassinos pelo mundo inteiro.

2.5.2 Craps

2.5.2.1 História do Craps

Há registros de que soldados ingleses jogavam, durante o período de guerras o que entre eles era chamado de "Hazard" que posteriormente viriam a se chamar Craps. Na França, também havia um jogo muito popular que era chamado de "Crabes", mas este jogo foi se tornando conhecido até atravessar o oceano atlântico e chegar ao Canadá. Neste avanço do jogo, com a mudança de continentes, linguagens e sotaques é que o Crapes surgiu e passou oficalmente a ser conhecido desta forma. Mais tarde, o jogo passou por novas modificações, onde foram adotadas as técnicas e regras que são aplicadas até hoje em vários cassinos.

2.5.2.2 Como funcionam os jogos de Craps

Tecnicamente, o jogo consiste em prever o resultado do par de faces voltadas para cima no lançamento de um dado. Nos cassinos, as apostas são realizadas e os dados são lançados pelo jogador, feito isso, se o jogador obtiver de 7 ou 11 pontos ele vence, porém se a soma for 2, 3 ou 12 ele perde imediatamente o que apostou. Se a soma estiver entre 4 e 6 ou entre 8 e 10 ele continua jogando, partindo para uma nova rodada e em cada rodada pode haver uma nova situação de aposta que depende ou não da situação do jogo. Segundo (ANDRADE, 2017) Vejamos abaixo alguma situações:

- **Pass Line (Linha de Passagem)** ou Linha de Frente. Quando a mesa chama "façam suas apostas" antes do lançamento inicial, os jogadores apostam no espaço destinado. O lançamento inicial é feito. Se a soma dos dados for 2, 3 ou 12 os jogadores perdem automaticamente. Se a soma dos dados for 7 ou 11 os jogadores ganham automaticamente. Se qualquer outra soma for obtida, esse resultado se transformará em Ponto, e uma espécie de disco (denominada de puck com os lados contendo ON e OFF) é colocado sobre o a coluna desse número com a indicação ON. Se o número do Ponto sair novamente, as apostas Pass Line ganham; se sair um 7 a aposta perde e a rodada acaba; qualquer outro valor obtido na soma não causa nenhuma ação no jogo e a rodada continua. Apostas na Linha de Passagem não podem ser removidas nem modificadas. Elas ficam comprometidas até o puck indicar OFF (no final da rodada), quando as apostas são transferidas para o canto da mesa e começará uma nova rodada.

- **Don't Pass Line (Linha não Passa)** ou Linha Traseira. Esse campo de apostas fica oposto ao Pass Line. Essa aposta ganha se o lançador obtiver 7 antes do Ponto, mas perde se o lançador obtiver o Ponto antes do 7. Essa aposta é feita antes do lançamento inicial. Ela ganha com 2 ou 3. Caso saia 12 ela não é retirada da mesa, mas também não ganha. Com qualquer outra pontuação, o Ponto é estabelecido.

- **Come (Vinda)** Fica disponível depois que se estabelece o Ponto. As apostas Come ganham se aparecer um 7 ou 11 e perdem se sair um 2, 3 ou 12. Qualquer outro ponto associará essa aposta a esse ponto ou ao 7. Essa aposta ganha se o ponto aparecer antes do 7 e perde se o 7 aparecer antes do ponto. Essas apostas não tem o uso do puck, ficam vinculadas somente ao reaparecimento do ponto ou do 7.

- **Don't Come (Não vem)** é o oposto da aposta Come. Ganha com 2 ou 3 e perde com 7 ou 11. Caso saia 12, a aposta continua na mesa. Qualquer outro resultado gera o Ponto. As apostas Don't Come ganham com o 7 vindo antes do ponto e perdem se o ponto sair antes do 7, ficando as apostas restritas ao aparecimento desses dois resultados.

- **Odds** é considerada uma estratégia de defesa. O valor máximo de uma aposta Odds é de duas vezes o valor de sua aposta original (igual a soma do apostado com o valor que ganharia). O jogador pode fazer full Odds em qualquer uma das apostas: Pass Line, Don't Pass Line, Come ou Don't Come, afim de garantir que ele não perca totalmente a quantia que está apostando.

- **Field (Campo)** é uma aposta de uma única rodada. A aposta Field ganha se os números forem 3, 4, 9, 10 ou 11 e paga dobrado se o resultado for 2 ou 12. A aposta Field perde para 5, 6, 7 ou 8 e pode ser realizada antes de qualquer rodada.

- **Big 6 ou Big 8 (6 grande ou 8 grande)** são as apostas em que o 6 ou o 8 são lançados antes do 7. Esse tipo de aposta pode ser feita antes de qualquer rodada, mas acaba quando se atinge o 7 ou outro ponto (4, 5, 9 ou 10).

- **Place to Win (Lugar para ganhar)** é uma aposta em um dos números 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 (que devem sair antes do 7). Esse tipo de aposta deve ser feita no espaço da mesa que contém o número desejado em "4, 5, SEIS, 8, NOVE, 10".

- **Buy (Compra)** é uma aposta que reserva 5% para o perdedor (seja ele mesa ou o próprio jogador). O jogador aposta em um ponto, que deve sair antes do 7. Esse tipo de aposta pode ser feita a qualquer momento, assim como alterá-la ou até mesmo removê-la.

- **Lay (Configuração)** é a aposta contrária a Buy. Na Lay, o 7 deve sair antes do ponto. O vencedor da aposta leva o prêmio, com exceção dos 5% que ficam reservado para a mesa.

- **Any 7 (Qualquer 7)** quando o jogador deseja que saia 7 na próxima rodada. Esse tipo de aposta paga até quatro vezes o valor apostado.

- **Any Craps (Qualquer Crap)** quando o jogador espera que o próximo resultado seja 2, 3 ou 12.

- **Any 11 Bets (Qualquer 11)** quando o resultado seguinte deve ser 11. Paga até 15 vezes o valor apostado.

- **Horn (Chifre)** é o tipo de aposta que se espera que o resultado seja um dos quatro extremos: chifre inferior 2 ou 3 e chifre superior 11 ou 12. No chifre inferior o jogador recebe 30:1 e no chifre superior o jogador recebe 15:1.

- **Hardway (Duras)** As apostas duras são aquelas que geram os resultados 4, 6, 8 ou 10 com os valores dos dados iguais (2+2, 3+3, 4+4 ou 5+5). Pagam 7:1 para resultado 4 ou 10 e 9:1 para resultado 6 ou 8.

Vejamos agora, algumas aplicações de probabilidade envolvendo o jogo Craps em exercícios voltados ao Ensino Médio.

Exemplo 2.5.1. *O jogo Craps, jogado com dois dados, é um dos jogos de aposta mais rápido e mais popular da América. As regras são as seguintes. Apenas o total dos dois dados é contado. O jogador lança os dados e ganha se o total das somas na primeira jogada for 7 ou 11, perde se for 2,3 ou 12. Qualquer outra soma é chamada de "ponto". Se no primeiro lançamento sair um point, o jogador lança os dados novamente repetidamente até que, ele ganhe tirando o seu point novamente, ou perde se tirar 7. Qual é a chance do jogador ganhar?*

Solução:

Considere os seguintes eventos no lançamento de dois dados:

- A: "A soma das faces voltadas para cima ser 7";
- B: "A soma das faces voltadas para cima ser 11";
- C: "A soma das faces voltadas para cima ser 4";
- D: "A soma das faces voltadas para cima ser 5";
- E: "A soma das faces voltadas para cima ser 6";
- F: "A soma das faces voltadas para cima ser 8";
- G: "A soma das faces voltadas para cima ser 9";
- H: "A soma das faces voltadas para cima ser 10".

Inicialmente, vamos calcular a probabilidade de o jogador ganhar na primeira rodada. Aplicando o Princípio fundamental de contagem , temos: $n(\Omega) = 6.6 = 36$, portanto o número de casos possíveis é igual a 36. O número de casos favoráveis, neste caso, é o obtido observando as possibilidades para que a soma dos dados seja 7 ou 11, portanto, $A = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\}$, logo $n(A) = 6$ e $B = \{(5,6); (6,5)\}$, logo, $n(B) = 2$ como os eventos são independentes temos:

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0,2222.$$

Porém, se o jogador sair com a pontuação 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, ele faz um ponto e segue para a próxima rodada, tendo que acertar a mesma pontuação para vencer o jogo, vejamos a seguir as possibilidades para cada caso favorável:

1ª Rodada

- $C = \{(1,3); (2,2); (3,1)\}$, portanto, $n(C) = 3$, logo $P(C) = \frac{3}{36}$;
- $D = \{(1,4); (2,3)(3,2); (4,1)\}$, portanto, $n(D) = 4$, logo $P(D) = \frac{4}{36}$;
- $E = \{(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)\}$, portanto, $n(E) = 5$, logo $P(E) = \frac{5}{36}$;
- $F = \{(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)\}$, portanto, $n(F) = 5$, logo $P(F) = \frac{5}{36}$;
- $G = \{(3,6); (4,5)(5,4); (6,3)\}$, portanto, $n(G) = 4$, logo $P(G) = \frac{4}{36}$;
- $H = \{(4,6); (5,5)(6,4)\}$, portanto, $n(H) = 3$, logo $P(H) = \frac{3}{36}$.

Porém vale ressaltar que nesta segunda rodada o jogador não pode obter soma 7 e $n(\hat{\Omega}) = 30$, ou seja todos os números disponíveis menos as 6 possibilidades de soma 7 para que ele possa jogar repetidamente, sendo assim temos:

2ª Rodada

- Se sair na primeira rodada a soma 4, temos $P(C|C \cup A) = \frac{3}{9}$;
- Se sair na primeira rodada a soma 5, temos $P(D|D \cup A) = \frac{4}{10}$;
- Se sair na primeira rodada a soma 6, temos $P(E|E \cup A) = \frac{5}{11}$;
- Se sair na primeira rodada a soma 8, temos $P(F|F \cup A) = \frac{5}{11}$;
- Se sair na primeira rodada a soma 9, temos $P(G|G \cup A) = \frac{5}{11}$;
- Se sair na primeira rodada a soma 10, temos $P(H|H \cup A) = \frac{5}{11}$.

Agora para sabermos a probabilidade do jogador ganhar, devemos pensar na conta como uma probabilidade condicional: como se os resultados indicados representam as chances do jogador ganhar dado que saiu o número indicado, por exemplo, Se na primeira rodada a soma foi quatro, na segunda a soma necessariamente deverá ser quatro e assim sucessivamente, logo a probabilidade dele ganhar é:

$$\frac{3}{36} \cdot \frac{3}{9} + \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{11} + \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{36} \cdot \frac{3}{9} \approx 0,271.$$

Logo, a probabilidade do jogador ganhar é de $0,222 + 0,271 \approx 0,493$.

2.6 Apostas online em jogos esportivos

Nesta seção, iremos tratar de uma modalidade de apostas que vem aumentando significativamente a quantidade de adeptos pelo mundo inteiro, são apostas online em jogos esportivos. Na realidade, apostas em jogos esportivos acontecem praticamente desde o surgimento dos esportes, pois quando você escolhe um time para torcer, ou escolhe torcer para um determinado lutador, por exemplo, acreditando que o seu time ou o seu lutador favorito irá ganhar a partida e então saíra feliz da disputa, principalmente se nesta situação algum objeto ou valor financeiro for apostado e ganhar, pelo fato de ter realizado a escolha certa. Neste caso de apostas em jogos, também estamos falando de apostar financeiramente, com a possibilidade de apostar, não somente no seu time ou jogador favorito, mas existe a possibilidade de apostar dinheiro em jogos ou jogadores que você talvez nem conheça.

No início do capítulo, citamos que, no Brasil a prática de apostas em jogos é ilegal, exceto se apostar em jogos de loteria da Caixa Econômica Federal. Porém o governo passou a observar que o país estava deixando de arrecadar vários impostos, pois os brasileiros estavam procurando sites de outros países, onde a prática dos jogos é regular e nestes sites faziam suas apostas, por isso, em 2018, o governo federal, que no período era governado por Michel Temer, decretou a lei nº 13.756/18[2] , liberando a prática de apostas em jogos online no país, para que através dessa lei pudessem arrecadar impostos e assim passar a ser uma fonte de arrecadação a mais para o nosso pais. Porém, a lei ainda precisa ser regulamentada para permitir a exploração legal desta modalidade lotérica e a geração dos benefícios sociais previstos na lei. Segundo (SALVARO, 2019), a justificativa para a sua edição foi a de que a prática é encontrada legalmente em diversos países, gerando renda, emprego e possibilidades de ganhos financeiros ao apostador e aos clubes, além da evasão de divisas que poderiam ficar no Brasil.

Nos sites de apostas online, é possível encontrar os mais variados tipos de competições para realizar suas apostas, como por exemplo, futebol, voleibol, basquetebol, tênis, tênis de mesa, corrida de carros, corrida de cavalos, hoquei, futebol americano, e-esportes (jogos de videogame online), política, olimpíadas, e inclusive partidas de jogos de cassinos (Blackjack, Pôquer, roletas, ...), em fim, tudo que se tratar de competição

[2] Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2018/Lei/L13756.htm

pode ser apostado nestes sites. Existem várias regras de se jogar online, escolhendo sua modalidade de competição favorita, jogos que serão disputados em uma data específica, jogos em tempo real (inclusive nesta modalidade, as probabilidades podem variar no decorrer da partida e o apostador pode modificar suas apostas no decorrer deste tempo), também é possível apostar na performance de um determinado jogador, qual time faz o primeiro gol da partida, etc. Em jogos cuja disputa contém três possibilidades de resultados (vitória, empate e derrota) ele pode escolher em um resultado exclusivo, como a vitória de um clube, ou escolher apostar na possibilidade de dois resultados, como por exemplo, vitória ou empate para o time da casa. Na subseção sobre como funcionam as apostas online em jogos esportivos iremos falar mais sobre cada tipo de aposta. Passamos agora a falar um pouco sobre a origem e história sobre as apostas em jogos esportivos e apostas online.

2.6.1 História das apostas em jogos esportivos

Segundo (RODRIGUES, 2013), acredita-se que as primeiras apostas surgiram na Grécia antiga, há cerca de dois mil anos, precisamente nos Jogos Olímpicos da Antiguidade. As primeiras Olimpíadas incluíam em seu calendário competições de maratonas, salto em distância, lançamento de dardo e disco, e boxe. Enquanto o evento ocorria, os espectadores apostavam valores sobre os resultados de cada disputa. Com o passar do tempo, a civilização romana passou a adotar apostas nos seus eventos e na Idade Média eram realizadas através de duelos e torneios de cavaleiros, até chegar à idade Moderna, onde as corridas de cavalos eram vistas como fontes de apostas, onde as apostas passaram a ser o foco principal do torneio.

A partir do Século XVIII, as apostas em eventos esportivos passaram a tomar conta do cenário mundial, Segundo (RODRIGUES,2013), com o passar dos tempos, praticamente todas as formas esportivas começaram a se organizar e se expandiram com extraordinária rapidez por todo o mundo. Na segunda metade do século XIX, as primeiras associações esportivas alcançam o seu auge. À época, o jornal impresso e o rádio eram os únicos meio de comunicação disponíveis para se acompanhar os jogos, mas o advento da televisão revolucionou o universo das apostas, pois as competições começaram a ser pela população. A partir de então, passam a ser divulgados os resultados dos jogos na programação diária. Mais tarde, surgem canais especializados e o mundo dos esportes mudou por completo. E com o surgimento das novas tecnologias de comunicação, em especial a Internet, quase no final do século XX, o esporte acompanha outro fenômeno da época: a globalização. A indústria esportiva passa a ser uma organização internacional e as apostas acompanharam o ritmo.

Segundo (SALVARO, 2019), em meados da década de 1990 no Estado de Antígua e Barbuda, foram regulamentas as primeiras leis que liberavam a prática de apostas online, principalmente durante a realização de jogos de Pôquer, a partir daí, os sites começaram a criar várias possibilidades de regras para a prática de apostas esportivas, em variadas modalidades e diferentes competições. Devido ao sucesso dos sites de apostas, os países e estados passaram a regulamentar e exigir regras de boas práticas para manter a liberação dos jogos de apostas, dentre elas para que os sites criassem sistemas para verificar caso de abusos de apostas ou apostadores que, empolgados com a prática, tivessem prejuízos excessivos pudessem ser acompanhados para que não houvesse danos significativos. Para (CHAGAS,2016), no passado as competições e jogos consistiam-se apenas em um mero passatempo. Contudo, no decorrer dos tempos assumiram o status de "indústria de apostas", que detêm uma posição multibilionária, devido principalmente ao crescente nível de comercialização dos esportes.

Desta forma, a prática de apostas em jogos online se difundiu no mundo inteiro, com várias possibilidades de aplicações. A tendência é que esta realidade seja ainda mais utilizadas por vários jogadores, com a finalidade de faturar sobre a banca e buscar lucros, simplesmente apostando em seus jogos favoritos ou passando a conhecer cada vez mais a realidade de outros esportes.

Por isso, nesta seção, apresentamos algumas regras de apostas em jogos online, bem como a apresentação de alguns termos utilizados nos sites de apostas, para que possamos conhecer um pouco mais sobre as formas de apostas em variadas modalidades esportivas. Por fim, apresentamos de uma forma mais especifica os vários tipos de apostas online em jogos de futebol e um modelo de cálculo da probabilidade relacionada a partidas de futebol.

2.6.2 Como funcionam as apostas online em jogos esportivos (futebol)

Inicialmente, é valido ressaltar que não iremos, nesta seção, falar sobre todas as possibilidades de apostas e modalidades esportivas ou simplesmente abordar todas as apostas possíveis, pois demandaria uma dissertação inteira, e ainda ficariam muitas situações sem respostas. Por isso, vamos tratar sobre as regras e possíveis apostas online sobre partidas de futebol, visto que, o nosso principal objetivo é abordas técnicas de aplicação do conteúdo de probabilidade no Ensino Médio. Para realizar esta pesquisa, observamos as regras gerais dos jogos online e as regras específicas do futebol nos sites (SPORTINGBET, 2005), (ODDSSHARK, 2008) e (APOSTAGOLOS, 2008).

2.6.2.1 O que são odds (cotações) e como calcular?

Nas apostas esportivas sempre nos deparamos com o termo *odds*, de origem inglesa, odds, na prática, tem o mesmo significado de probabilidades, porém o termo odds em apostas online significa a representação das cotações que serão aplicadas a cada elemento que será apostado. As cotações são a chave para obter lucro neste mercado. ODDS representa o índice que mostra o valor que a casa de apostas nos vai pagar por cada real apostado no evento, tendo em conta a probabilidade deste resultado. Como tal, apostar num resultado altamente provável irá produzir apenas pequenas recompensas, enquanto uma aposta particularmente arriscada num evento extremamente improvável pode ser muito lucrativa, se for bem-sucedida. Geralmente são fornecidos três tipos de odds, onde o jogador pode escolher o que se sentir mais a vontade para jogar, sejam elas decimais fracionárias ou americanas.

- **Odss decimais**: As cotações são apresentadas na forma decimal, exemplo: 1,25; 3,67; ... Este é o tipo de Odds mais utilizado no Brasil. Para saber quanto você receberá se acertar a aposta, é só multiplicar o valor apostado pelos odds. Exemplo, existe uma partida de futebol que será realizada, São Paulo x Guarani, e a cotação do São Paulo ganhar é $2,50$, se você apostar R$ 10,00, nesta cotação(odds) de 2,50, basta multiplicar $10 \cdot 2,50$ e você receberá R$ 25,00, neste caso, os R$10,00 apostados e receberá R$ 15,00 de lucro. Para calcular qual a probabilidade de vitória do São Paulo atribuída pela banca neste caso, basta dividir 100 por 2,50 e a probabilidade seria 40%. Portanto, quanto menor o Odds, maior o favoritismo da equipe.

- **Odss fracionários**: Mais utilizado na Europa. O número da esquerda mostra qual é o lucro que você terá ao apostar o valor da direita. Nesse exemplo, a aposta em uma cotação (3/2) no valor de R$ 2,00 resultaria no retorno do dinheiro investido, e ainda mais R$ 3. Caso aposte R$ 10,00 (cinco vezes 2), receberá o lucro de R$ 15 (cinco vezes 3). Para transformar esse valor em porcentagem, some os dois números $3 + 2 = 5$. Em seguida, use o resultado obtido para dividir o número da direita: $2 \div 5 = 0,4$. Multiplicamos por 100 para encontrar a porcentagem, que é 40%. Nesse formato, quanto maior o número da esquerda em relação ao da direita, mais favorito o atleta é. Como no exemplo do UFC, o lutador com odds 4/7 é favorito (63% de chances), enquanto o lutador com odds 6/4 é o azarão (40% de chances).

- **Odss americanos**: (+150 (Aposte R$ 100,00 para receber R$ 150,00) ou -150 Aposte R$ 150,00 para receber R$ 100,00) Muito utilizado em ligas americanas, como NFL, UFC ou NBA, esse formato de odds é um pouco mais complicado de entender. Isso porque alguns números levam valor positivo (+) e outros levam valor negativo (-), e isso muda a forma como devem ser lidos. Existem diferenças ao se calcular a probabilidade de cada evento. Se o número for positivo, some 100 e use o resultado para dividir 100. Nesse exemplo, temos $150 + 100 = 250$. Em seguida, $100 \div 250 = 0,4$. Ou seja, a probabilidade nesse caso também é 40%. No caso do valor negativo, some 100 e divida o número original pelo resultado da soma. Teremos $150 + 100 = 250$. Então, $150 \div 250 = 0,6$. Ou seja, 60% de chances. Como pode ver, o lucro a receber por um número negativo é bem menor, ao passo que as probabilidades são maiores. Isso significa que, no UFC, o lutador com odds de -175 é o favorito (63% de chances), enquanto o atleta com odds de $+150$ é o azarão (40% de chances).

2.6.2.2 Tipos de apostas

Os sites de apostas podem variar os tipos de apostas, porém em parte deles o apostador pode escolher entre três tipos de apostas diferentes. Começando com uma seleção, você pode escolher opção de aposta single, com duas ou mais você pode fazer uma aposta acumulada, e com três ou mais seleções você pode fazer uma aposta "system". Caso opte por mais de duas seleções, o sistema propõe por padrão o modo de apostas acumuladas. Os tipos de apostas apresentados a seguir são retirados dos sites (SPORTINGBET, 2005), (ODDSSHARK, 2008) e (APOSTAGOLOS, 2008).

- **Single** é a aposta mais simples. Você prevê um resultado, define o valor e faz a aposta. Se a sua previsão estiver correta, você vence a aposta. Os ganhos são calculados ao multiplicar as cotas pelo valor apostado.

- **Acumuladas** se você fizer apostas em dois ou mais resultados (ex. em dois jogos de futebol diferentes), elas são exibidas como apostas acumuladas automaticamente. O valor total das cotas é calculado ao multiplicar as cotas de cada seleção.

- **System** Assim que você tiver escolhido três ou mais seleções (até oito) em seu boletim de apostas, você pode fazer uma aposta system. O número de possíveis apostas system dependem do número de resultados previstos. As apostas system possíveis com as suas seleções serão exibidas automaticamente. Cada possibilidade é acompanhada por um botão de informação em que você pode clicar para mais informações sobre o princípio subjacente a aposta system. A diferença entre apostas acumuladas e system é que você pode vencer uma aposta system mesmo que nem todas as suas seleções sejam vencedoras. Por exemplo, no caso de uma aposta system 2/3 você ganha mesmo que somente duas de suas seleções sejam vencedoras; *observação:* **Handicap** A grande maioria das apostas disponíveis pode ser combinada livremente. Existem algumas exceções, no entanto, como certas apostas de Fórmula 1 que só podem ser colocadas como apostas simples. São as casas de apostas que decidem quais apostas podem ser combinadas e sua decisão é baseada em vários fatores, como o respectivo jogo ou evento. Você será informado de sua decisão até o momento em que as apostas forem feitas.

- **Head-to-head** Se um concorrente é claramente favorecido sobre o outro, as casas de apostas geralmente permitirão ao competidor mais fraco uma “vantagem”, que é levada em consideração ao calcular o resultado final;

- **3Way**, existem três resultados possíveis e você deve escolher o caminho certo. A aposta de futebol comum - vencer, empatar ou perder - é uma aposta 3Way clássica. Por exemplo, Bayern de Munique joga contra o Manchester United - 1, X, 2. As apostas 3Way geralmente se referem ao resultado no final do tempo de jogo regular; **2Way**, existem dois resultados possíveis e você deve prever o correto. Essas apostas são comuns para todos os tipos de esportes que não permitem empate (basquete, tênis, etc.). Há também muitas apostas especiais que funcionam de acordo com o mesmo princípio.

- **Bankers** só são possíveis com apostas sistema, não com apostas simples ou acumuladas. Se você está realmente certo sobre o resultado de um jogo (por exemplo, se houver um favorito claro), você pode selecionar esse jogo como um banker na sua aposta do sistema. Nesse caso, você ganha a aposta se o banker estiver correto e o critério de apostas sistema correspondente tiver sido satisfeito. A quantidade de ganhos em uma aposta sistema com um banker mais uma vez depende da quantidade de dicas corretas. Se o banker estiver incorreto ou o critério de apostas sistema não estiver satisfeito, você perderá a aposta. Se você escolher uma aposta sistema 2/3 com um banker, você ganha apenas se duas escolhas de sua aposta sistema e seu banker estiverem corretos. A quantidade de ganhos depende das cotas das seleções que você ganhou. Os ganhos máximos da sua aposta (banker correto e todas as outras seleções da aposta sistema estão corretas) serão exibidos quando você fizer a sua aposta. Também é possível incluir vários banqueiros dentro de uma única aposta no sistema.

- **Sistema 2/3** consiste em 3 apostas que venham de 3 seleções - três combinadas de 2 seleções. Pelo menos duas das três seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 2/4** consiste em 6 apostas que venham de 4 seleções - seis combinadas de 2 seleções. Pelo menos duas das quatro seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 2/5** consiste em 10 apostas que venham de 5 escolhas - dez de duas seleções combinadas. Pelo menos duas das cinco seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 2/6** consiste em 15 apostas que venham de 6 escolhas - quinze de 2 seleções combinadas. Pelo menos duas das seis seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 2/7** consiste em 21 apostas que venham de 7 seleções - 21 seleções de 2 combinadas. Pelo menos duas das sete escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 2/8** consiste em 28 apostas que venham de 8 escolhas - vinte e oito seleções de 2 combinadas. Pelo menos duas das oito escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 3/4** consiste em 4 apostas que venham de 4 seleções - quatro combinadas de 3 seleções. Pelo menos três das quatro escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.
- **Sistema 3/5** consiste em 10 apostas que venham de 5 seleções - dez combinadas de três seleções. Pelo menos três das cinco seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.
- **Sistema 3/6** consiste em 20 apostas que se venham de 6 seleções - vinte combinadas de 3 seleções. Pelo menos três das seis seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.
- **Sistema 3/7** consiste em 35 apostas que decorrem de 7 escolhas - trinta e cinco multis de 3-pick (parlays). Pelo menos três das sete escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.
- Um sistema **3/8** consiste em 56 apostas que venham de 8 seleções - 56 combinadas 3 seleções. Pelo menos três das oito seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.
- **Sistema 4/5** consiste em 5 apostas que venham de 5 seleções - cinco combinadas de 4 seleções. Pelo menos quatro das cinco seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.
- **Sistema 4/6** consiste em 15 apostas que venham de 6 seleções - quinze combinadas de 4 seleções. Pelo menos quatro das seis escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 4/7** consiste em 35 apostas que venham de 7 seleções - 35 combinadas de 4 seleções. Pelo menos quatro das sete seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 4/8** consiste em 70 apostas que venham de 8 seleções - 70 combinadas de 4 seleções. Pelo menos quatro das oito seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 5/6** consiste em 6 apostas que venham de 6 seleções - seis combinadas de 5 seleções. Pelo menos cinco das seis seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 5/7** consiste em 21 apostas que venham de 7 seleções - 21 combinadas de 5 seleções. Pelo menos cinco das sete seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 5/8** consiste em 56 apostas que venham de 8 seleções - 56 combinadas de 5 seleções. Pelo menos cinco das oito seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 6/7** consiste em 7 apostas que venham de 7 seleções - sete combinadas de 6 seleções. Pelo menos seis das sete escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 6/8** consiste em 28 apostas que venham de 8 seleções - 28 combinadas de 6 seleções. Pelo menos seis das oito escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema 7/8** consiste em 8 apostas que venham de 8 seleções - oito combinadas de 7 seleções. Pelo menos sete das oito seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema canadense** consiste em 26 apostas que venham de 5 seleções. Dez combinadas de 2 seleções, dez combinadas de 3 seleções, cinco combinadas de 4 seleções e uma combinada de 5 seleções. Pelo menos duas das cinco seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema Goliath** consiste em 247 apostas que venham de 8 escolhas. 28 combinadas de 2 seleções, 56 combinadas (3), 70 combinadas de 4 seleções, 56 combinadas de 5 seleções, 28 combinadas (6-seleções), oito combinadas de 7 seleções e uma combinada de 8 seleções. Pelo menos duas das oito seleções devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **sistema Heinz** consiste em 57 apostas que venham de 6 seleções. 15 acumuladas de 2 seleções, 20 acumuladas de 3 seleções, 15 acumuladas de 4 seleções, seis acumulas de 5 seleções e uma acumulada de 6 seleções. Pelo menos duas das seis escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **sistema Lucky 15** consiste em 15 apostas que venham de 4 escolhas. Uma única aposta por escolha, seis acumuladas de 2 seleções, quatro acumuladas (3) e uma acumulada de 4 seleções. Pelo menos uma das quatro escolhas deve ser correta para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema Lucky 63** consiste em 63 apostas que venham de 6 escolhas. Uma única aposta por escolha, quinze acumuladas de duas seleções, vinte acumuladas de 3 seleções, quinze acumuladas de 4 seleções, seis acumuladas de 5 seleções e uma acumulada de 6 seleções . Pelo menos uma das seis escolhas deve ser correta para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema Lucky 31** consiste em 31 apostas que venham de 5 escolhas. Uma única aposta por escolha, dez acumuladas de 2 seleções, dez acumuladas de 3 seleções, cinco acumuladas (4) e uma acumulada de 5 seleções. Pelo menos uma das cinco escolhas deve ser correta para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema Patent** consiste em 7 apostas que venham de 3 escolhas. Uma única aposta por escolha, três acumuladas (2) e uma acumulada de 3 seleções. Pelo menos uma das três escolhas deve ser correta para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema Super Heinz** consiste em 120 apostas que venham de 7 seleções. 21 acumuladas de 2 seleções, 35 acumuladas (3 seleções), 35 acumuladas (4 seleções), 21 acumuladas (5) e sete acumuladas (6) e uma acumulada de 7 seleções. Pelo menos duas das sete escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema Trixie** consiste em 4 apostas que venham de 3 escolhas. Três acumuladas de 2 seleções e uma acumulada de 3 seleções. Pelo menos duas das três escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

- **Sistema Yankee** consiste em 11 apostas que venham de 4 escolhas. Seis acumuladas de 2 seleções, quatro acumuladas de 3 seleções e uma acumulada de 4 seleções. Pelo menos duas das quatro escolhas devem ser corretas para obter ganhos - a quantidade exata dos ganhos depende de quantas das seleções se revelem corretas.

Algumas apostas podem ser realizadas com o jogo em andamento, são chamadas as apostas ao vivo. Essas apostas são oferecidas durante uma competição. Portanto, as cotas são continuamente ajustadas de acordo com o andamento do evento.

As cotas no boletim da aposta são atualizadas regularmente e, como tal, elas podem aumentar ou diminuir a qualquer momento. Algumas configurações podem ser oferecidas pelo site, com a finalidade de facilitar e encurtar o processo de realização da aposta da seguinte forma:

- **Aceitar cotas mais altas:** Se as cotas aumentarem, elas serão automaticamente aceitas até que a aposta seja feitas. Isso também inclui aumento de cotas durante a confirmação da aposta. Você ainda precisará aceitar uma diminuição das cotas antes de poder fazer a aposta.

- **Aceite qualquer alterações de cotas:** As cotas maiores ou menores serão automaticamente aceitas até que as apostas sejam feitas. Isso também inclui mudanças de cotas durante a confirmação da aposta.

Vejamos agora algumas regras para apostas online em partidas de jogos de futebol.

2.6.2.3 Apostas online em partidas de jogos de futebol.

Para apostar partidas de jogos de futebol, os apostadores tem uma grande variedade de opções e formas distintas de jogar. Os tipos de apostas online em partidas de jogos de futebol apresentados a seguir são retirados dos sites (SPORTINGBET, 2005), (ODDSSHARK, 2008) e (APOSTAGOLOS, 2008). vejamos algumas situações específicas:

- **Aposta no Placar Correto:** Todas as apostas são liquidadas no placar final, ao final do tempo regulamentar. Existe uma opção para "Qualquer outro placar"que inclua placares que não apareçam na lista original de placares a apostar e que serão liquidadas de acordo.

- **Total de Gols - Acima/Abaixo:** Prever se o número total de gols marcados no tempo regulamentar será maior ou menor que um certo número, por exemplo, acima/abaixo de 0,5 gol, de 1,5 gol, de 2,5 gols, etc. No caso de uma partida ser interrompida antes que o tempo regulamentar seja completado, todas as apostas serão anuladas a menos que já determinadas.

- **Total de Gols - Exato:** Prever o número exato de gols marcados no tempo regulamentar.

- **Total de Gols 1º tempo - Exato e 2º tempo - Exato:** Prever o número exato de gols marcados em um tempo de 45 minutos.

- **Número de Gols - Ímpar/Par:** Prever se o número total de gols será um número ímpar ou par (nenhum gol marcado é contado como par).

- **Número de Gols 1º tempo - Ímpar/Par:** Prever se o número total de gols no 1º tempo será um número ímpar ou um número par (nenhum gol marcado é contado com par).

- **Total de Gols - Acima/Abaixo 1º tempo e Acima/Abaixo 2º tempo:** Prever se o número total de gols marcados em um tempo de 45 minutos será superior ou inferior a um determinado número, por exemplo, acima/abaixo de 0,5 gols, 1,5 gols, 2,5 gols, etc. No caso de uma partida ser interrompida antes do tempo tiver esgotado, todas as apostas serão anuladas a menos que já determinadas.

- **Equipe a Marcar Primeiro/Segundo/Próximo Gol:** Os gols contra contam para o lado creditado com o gol.

- **Equipe a Marcar por Último:** Apostas serão anuladas se a partida for interrompida.

- **1X2 e Acima/Abaixo (Resultado da Partida e Acima/Abaixo):** Uma previsão sobre quem vencerá a partida e o total de gols marcados durante o tempo regulamentar, acima/abaixo. Se uma partida for interrompida, todas as apostas nesses tipos de aposta serão anuladas.

- **Resultado da Partida e Ambas as Equipes Marcando:** Uma previsão sobre quem vencerá a partida com as duas equipes marcando um gol durante o tempo regulamentar. Todos os outros resultados estão disponíveis neste tipo de aposta, incluindo equipe 1 ou 2 vencendo sem tomar nenhum gol; ambas as equipes não marcando gols e; ambas as equipes marcando gols, terminando a partida empatada. Se uma partida for interrompida, todas as apostas desse tipo serão anuladas.

- **Tipos de Aposta em Artilharia.** Todas as apostas em artilharia (1º/ Último/ Qualquer Momento) são oferecidas nas principais partidas selecionadas. Apostas liquidadas ao jogador que marcar (1º/ Último/ Qualquer Momento) na partida, baseadas apenas no tempo regulamentar. Os gols contra não contam para nenhum tipo de aposta em artilharia. Os preços para jogadores não cotados estarão sempre disponíveis mediante pedido e esses jogadores serão contados como vencedores no evento em que marcarem e não tiverem sido cotados.

- **Primeiro Artilheiro da Partida:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Este tipo de aposta será liquidada no jogador que marcar o primeiro gol válido. Observe que gols contra não contam na liquidação das apostas. Se a partida for interrompida a qualquer momento, o primeiro gol válido marcado conta. Se nenhum gol foi marcado no momento da interrupção, todas as apostas serão anuladas. Se um jogador não entrou em campo antes do primeiro gol ser marcado, então este jogador é considerado um “não participante” e todas as apostas neste jogador são nulas. *(“Gols contra”):* Se o primeiro gol é um “Gol contra”, este tipo de aposta será liquidada no jogador que marcar o próximo gol válido, exceto apostas em jogadores que não entraram em campo antes do primeiro gol ser marcado, o que significa que os jogadores são considerados “não participantes”. Todas as apostas nesses jogadores são nulas. *(“Não está na lista”):* Se o primeiro gol é marcado por um jogador que não está na lista de jogadores para apostar, todas as apostas são “perdedoras”, exceto apostas em jogadores que não entraram em campo antes do primeiro gol ter sido marcado, o que significa que tais jogadores são considerados “não participantes”. Apostas nesses jogadores são nulas.

- **Último Artilheiro da Partida:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Este tipo de aposta será liquidada no jogador que marcar o último gol válido da partida. Se a partida for interrompida a qualquer momento, todas as apostas serão anuladas. Se um jogador não entra em campo durante a partida, então este jogador é considerado um "não participante". Todas as apostas neste jogador são nulas.*(“Gols contra”:)* Se o último gol for um “Gol contra”, este tipo de aposta será liquidada ao jogador que marcar o próximo gol válido seguinte, exceto as apostas em jogadores que não entraram em campo durante a partida. Tais jogadores são considerados “não participantes”, todas as apostas nesses jogadores são nulas. *(“Não Está na Lista”)*: Se o último gol for marcado por um jogador que não esteja na lista de jogadores a apostar, todas as apostas serão “perdedoras”, exceto apostas em jogadores que não entraram em campo durante a partida. Tais jogadores são considerados “não participantes”, todas as apostas nesses jogadores são nulas.

- **Artilheiros da Partida:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Este tipo de aposta será liquidada em todos os jogadores que marcarem um gol válido. Se um jogador não entra em campo durante a partida, então este jogador é considerado um “não participante” - todas as apostas neste jogador são nulas. Se a partida for interrompida a qualquer momento, todas as apostas permanecem válidas se já determinadas, exceto as apostas em jogadores que não entraram em campo durante a partida.

- **Jogador a Marcar 2 Gols ou Mais:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Este tipo de aposta será liquidada em todos os jogadores que marcarem 2 ou mais gols válidos. Se um jogador não entra em campo durante a partida, então este jogador é considerado um “não participante” - todas as apostas neste jogador são nulas. Se a partida for interrompida a qualquer momento, todas as apostas permanecem válidas se já determinadas, exceto as apostas em jogadores que não entraram em campo durante a partida.

- **Jogador a Marcar 3 Gols ou Mais:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Este tipo de aposta será liquidada em todos os jogadores que marcarem 3 ou mais gols válidos. Se um jogador não entra em campo durante a partida, então este jogador é considerado um “não participante” - todas as apostas neste jogador são nulas. Se a partida for interrompida a qualquer momento, todas as apostas permanecem válidas se já determinadas, exceto as apostas em jogadores que não entraram em campo durante a partida.

- **Jogador a Marcar e Sua Equipe Vencer a Partida:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Este tipo de aposta será liquidada em todos os jogadores que marcarem um gol válido e sua respectiva equipe vencer a partida. Se um jogador não entra em campo durante a partida, então este jogador é considerado um “não participante” - todas as apostas neste jogador são nulas. Se a partida for interrompida a qualquer momento, todas as apostas permanecem válidas se já determinadas, exceto as apostas em jogadores que não entraram em campo durante a partida.

- **Jogador Marcar e Sua Equipe Vencer a Partida:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Este tipo de aposta será liquidada em todos os jogadores que marcarem um gol válido e sua respectiva equipe vencer a partida. Se um jogador não entra em campo durante a partida, então este jogador é considerado um “não participante” - todas as apostas neste jogador são nulas. Se a partida for interrompida a qualquer momento, todas as apostas permanecem válidas se já determinadas, exceto as apostas em jogadores que não entraram em campo durante a partida.

- **Aposta em Duelo de Artilharia na Partida:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Ambos os jogadores devem começar a partida para que as apostas sejam válidas. Se um dos jogadores não iniciar a partida, todas as apostas são anuladas.

- **Apostas Handicap:** São liquidadas com base no(s) gol(s) inicial(is) dado a uma equipe. Apostas liquidadas adicionando ou subtraindo o(s) gol(s) do resultado regular.

- **Um Tempo/Dois tempos:** As apostas estão disponíveis na maioria das partidas com cotação de preços 1 X 2. Apostas liquidadas com base no resultado da partida no primeiro tempo e em todo o tempo regulamentar (por exemplo, ao final de 45 minutos, incluindo acréscimos e apito final). As apostas serão anuladas se a partida for interrompida antes da conclusão do tempo regulamentar.

- **Chance Dupla:** Apostas liquidadas nos seguintes possíveis resultados em uma partida de futebol especificada, por exemplo, 1) (1 ou X) Se o resultado for equipe da casa vence ou empate, as apostas nessa opção serão vencedoras. 2) (X ou 2) Se o resultado for empate ou equipe visitante vence, as apostas nessa opção serão vencedoras. 3) (1 ou 2) Se o resultado for equipe da casa ou equipe visitante vence, as apostas nesta opção são vencedoras. Se uma partida for disputada em um local neutro, a equipe listada em primeiro lugar é considerada a equipe da casa para fins de apostas. Todas as apostas são liquidadas em tempo regulamentar.

- **Sem Empate** Se a partida terminar em empate, apostas serão reembolsadas, por exemplo, aposta em que não haverá empate (draw no bet), aposta em empate ou vitória da equipe visitante (Home no bet), aposta em empate ou vitória da equipe da casa (Away no bet).

- **Total de Gols Diários - número total de gols por dia:** Apostas aceitas apenas no tempo regulamentar. Os gols contra contam para fins de liquidação. Prorrogação e cobranças de pênaltis não contam.

- **Número Total de Gols/Torneio:** Esta aposta inclui todos os gols marcados no tempo regulamentar (incluindo o tempo adicionado) e em prorrogação. Gols marcados nas cobranças de pênaltis não contam.

- **Apostas em Torneios:** Para todas as apostas referentes a artilheiros em um torneio (por exemplo, Maior Artilheiro, Melhor no Duelo de Artilheiros, Artilheiro da Equipe, Equipe Artilheira, Artilheiro da Liga...), gols marcados na prorrogação contam para efeitos de liquidação. Cobranças de pênaltis não contam.

- **Vencedor do Torneio ou da Taça:** Se a equipe na qual a aposta foi feita não se qualificar, desistir ou for desqualificada, todas as apostas feitas na equipe serão consideradas como perdedoras.

- **Artilheiro do Torneio:** Gols marcados em tempo regulamentar e prorrogação contam. Gols marcados em cobranças de pênaltis não contam. Aplicam-se regras de desempate (dead-heat) em vez de considerar o jogador receber a Chuteira de Ouro etc. (A equipe citada para o jogador serve apenas como referência)

- **Artilheiro/Equipe Artilheira:** Gols marcados em tempo regulamentar e prorrogação contam. Gols marcados em cobranças de pênaltis não contam. Regras de desempate (dead-heat) aplicadas. Para a Copa da Inglaterra, os gols contam a partir da 1ª rodada.

- **Duplo: Vencedor do Torneio/Artilheiro do Torneio** Um preço especial será aplicado para prever o Vencedor do Torneio e o Artilheiro do Torneio. Regras de desempate (dead-heat) aplicadas.

- **Bola de Ouro**: Este tipo de aposta é liquidadas pelo vencedor da Bola de Ouro (o melhor jogador do torneio declarado pela FIFA)

- **Melhor Equipe do Continente** Apostas liquidadas na rodada em que uma equipe sai da competição, independentemente de prorrogação. Uma equipe que vencer a final será considerada a melhor equipe. Regras de desempate (dead-heat) aplicadas.

- **Totais do Torneios/Grupos/Diários:** Esta regra refere-se a todas as apostas relativas ao número total de gols, cartões, escanteios ou penalidades máximas que ocorrem num torneio, num grupo de torneios ou num dia específico de um torneio que contém as opções de apostas "acima" e "abaixo". Para os totais de Torneios/Grupos/Diários serão contados somente cartões amarelos, vermelhos, escanteios e penalidades máximas que ocorrem em tempo regulamentar (incluindo tempo adicional).

- **Apostas de Rebaixamento** Se uma equipe for removida da liga antes do início da temporada, todas as apostas desse tipo serão anuladas e um novo tipo de aposta será formado. O rebaixamento incluirá lugares automáticos e o resultado de quaisquer decisões de eliminatórias de promoção/rebaixamento.

- **Próximo Técnico Permanente:** Apostas liquidadas no próximo técnico permanente, conforme anunciado pelo comunicado oficial do clube. Cartolas e treinadores interinos não contam para fins de liquidação.

- **Equipe Ganha os Dois Tempos:** A partida de 90 minutos é tratada como dois tempos separados de 45 minutos e, portanto, sua seleção deve marcar mais gols do que a outra equipe em cada um dos dois tempos, por exemplo, se a sua seleção marcar no primeiro tempo da partida e a partida terminar em 1 a 0, embora o primeiro tempo tenha sido ganho por 1 a 0, o placar nos outros 45 minutos foi 0-0 e, portanto, um empate. Se isso ocorrer, apenas o primeiro tempo foi considerado uma seleção vencedora e, portanto, as apostas serão liquidadas como perdedoras.

- **Como Primeiro Gol Será Marcado?** "Falta" é a opção vencedora se o jogador que cobrar a falta marcar gol diretamente a partir da falta e for nomeado como artilheiro. Qualquer gol marcado que não seja um "Gol contra", uma "Falta direta", uma "Penalidade Máxima" ou um "Gol de Cabeça" é liquidado como um "Chute". Isto significa que é considerado um "Chute" quando a bola entra na rede para um gol válido de qualquer parte do corpo que não seja a cabeça e não é um "Gol contra", uma "Falta" direta ou uma "Penalidade Máxima". Essa regra também se aplica a apostas em gols subsequentes.

- **Decisões VAR (árbitro assistente de vídeo):** As apostas são liquidadas apenas no jogo normal. Se o árbitro alterar uma decisão após consultar o Árbitro Assistente de Vídeo (VAR), essa decisão será considerada uma Revisão de VAR e as apostas serão liquidadas de acordo. Uma checagem de VAR ocorre nos bastidores e não é seguida pelo árbitro. Todas as apostas serão liquidadas apenas na Revisão VAR e não em Checagens de VAR. Exemplo: O árbitro faz um sinal de que uma Revisão VAR está em andamento, fazendo um sinal de TV com as mãos, isso indica que uma Revisão VAR acontecerá e o árbitro analisará o incidente. Qualquer decisão posterior feita pelo árbitro após a Revisão do VAR contará para fins de apostas. Checagens de VAR não contam. Se um jogo for abandonado, quaisquer apostas em que o resultado já tenha sido decidido serão válidas, todas as outras apostas serão anuladas.

- **Começa e Termina Ganhando:** Esta aposta será liquidada na primeira equipe que estiver ganhando em combinação com o resultado no final do tempo regulamentar, independentemente de quantas vezes a liderança da partida tenha mudado entre as equipes.

- **Períodos de Tempo:** Para todas as apostas referentes a ocorrências ou resultados em relação a períodos de tempo, as apostas serão liquidadas no tempo exato, conforme mostrado pelo relógio dos fornecedores de TV/Informações, por exemplo, apostas de 15 minutos, tempo do primeiro gol e hora do último gol. Se os resultados da cobertura de TV/provedores de informações não estiverem disponíveis ou forem ambíguos, as liquidações serão baseadas em estatísticas oficiais e dados fornecidos por provedores de informações terceiros.

- **Tempo de Acréscimo Oficial 1º tempo/2º tempo:** Apostas em acréscimos são liquidadas com base no número de minutos exibidos na quarta mesa de oficiais, em vez do tempo real jogado.

- **Equipe Qualificada Para a Próxima Rodada:** Se uma partida oferecida dentro de uma rodada específica de uma competição for adiada, as apostas na equipe a se qualificar ainda permanecem, independentemente do tempo de atraso. Regras de adiamento/interrupção não se aplicam. Apesar de quaisquer interrupções/suspensões das partidas em questão, a aposta na equipe que realmente tem direito a participar da próxima rodada será considerada a vencedora.

- **Primeira Equipe a Sofrer Bola na Trave/Travessão:** Todos as bolas na trave/travessão contam para esta aposta, independentemente se a trave/travessão foram atingidos no decorrer de um gol marcado ou não, por exemplo, gol da equipe da casa, sem trave/travessão acertado, gol da equipe visitante.

Existem ainda, uma grande quantidade de opções para realizar apostas e ainda podem surgir novas modalidades dentro de um esporte específico, como vimos em uma das opções citadas acima, existe regra de apostas para o VAR que é uma tecnologia que ainda está sendo adaptada ao futebol.

2.6.2.4 Probabilidade em partidas de Futebol

Como citado anteriormente, existem variadas formas de se apostar no futebol. Em algumas situações chega a ser um pouco inusitado, como no caso do VAR, porém o futebol é um dos esportes com um dos maiores índices de fãs em todo o mundo, então é fácil compreender que os sites de apostas busquem o maior número de possibilidades para chamar a atenção dos apostadores, que em sua grande parte são verdadeiros apaixonados por futebol. Como seria muito extenso estudar cada caso de aplicação da probabilidades em todas as situações disponíveis de cada partida, neste tópico abordamos um modelo específico do cálculo das probabilidades aplicadas ao futebol, observamos um modelo utilizado por professores de Matemática da (UFMG) Universidade Federal de Minas Gerais, para calcular das chances de um time vencer, empatar ou perder uma partida de futebol.

É fácil verificar que não existe um modelo exato para calcular as chances de uma determinada equipe sair vencedora de uma partida de futebol, também não podemos dizer que ao iniciar uma partida, todos os resultados apresentam as mesmas chances de ocorrer. Se tomarmos como referência a definição clássica de probabilidade, cada resultado possível de uma partida teria $\frac{1}{3}$ ou $33,33\%$ de chances de ocorrer, visto que inicialmente cada equipe entra em uma partida com três situações de resultados possíveis, vitória, empate ou derrota, sendo estes resultados determinados como espaço amostral. Porém, se supostamente colocássemos frente a frente a equipe do Liverpool (Atual campeão mundial de clubes de Futebol) e a equipe do Goiânia E. C. (que atualmente disputa a quarta divisão do campeonato Brasileiro), acredito que nem o mais otimista torcedor do Goiânia E. C. acreditaria em uma probabilidade de $33,33\%$ de chances da equipe sair vencedora neste confronto.

Um fator deixa claro que as probabilidades em jogos de futebol não podem ser calculadas de maneira simples como citada anteriormente, basta observar as odds de um site de apostas online, Vejamos a seguinte situação:

Na final do Campeonato Mundial de Clubes de futebol, as odds para o confronto Flamengo e Liverpool, dispostas na forma decimal, determinava 1,57 para quem apostasse na vitória do Liverpool (Neste caso, se o apostador apostasse R\$1,00 na vitória do Liverpool ele teria um retorno de $R\$1,57 - R\$1,00 = R\$0,57$), 4,20 para as apostas em qualquer resultado de empate no tempo normal, ou seja, um retorno de R\$ 3,20 e 5,25 para quem apostasse na vitória do Flamengo, obtendo retorno de R\$ 4,25 para cada R\$ 1,00 apostado, segundo o site de apostas (ODDSSHARK, 2019).

Como citamos anteriormente, podemos calcular as probabilidades cuja banca entende que deve ser atribuída a cada resultado, sendo assim, temos:

- Probabilidade de vitória do Liverpool $\frac{1}{1,57} = 63,7\%$.
- Probabilidade de empate $\frac{1}{4,20} = 23,8\%$.

- Probabilidade de vitória do Flamengo $\frac{1}{5{,}25} = 19\%$.

Assim, podemos observar que neste jogo especificamente o time do Liverpool é considerado amplamente favorito. Mas, existe uma curiosidade, ao somar os resultados obtidos em cada uma das probabilidade vamos obter o seguinte resultado: $63,7\% + 23,8\% + 19\% = 106,5\%$. Ou seja, a princípio, você pode pensar ter feito o cálculo errado, pois a soma das probabilidades deveria ser igual a 100%, porém o que acontece é que as casas de apostas online, geralmente inflacionam as odds, com o intuito claro de receber alguma vantagem pela participação nas apostas, o que neste caso representaria um valor de 6,5% sobre o valor apostado. Para fazer a correção e determinar o valor da probabilidade real de cada time, basta utilizar a regra de três simples e calcular a probabilidade sobre um valor total de 100%, feito isso, a probabilidade real para cada resultado, são apresentados da seguinte forma:

- Probabilidade de vitória do Liverpool $\frac{63{,}7}{1{,}065} = 59,81\%$.
- Probabilidade de empate $\frac{23{,}8}{1{,}065} = 22,35\%$.
- Probabilidade de vitória do Flamengo $\frac{19}{1{,}065} = 17,84\%$.

Somando a probabilidade de ocorrência de cada um dos resultados, obtemos 100%.

Analisando esta situação em uma partida de futebol e utilizando a distribuição subjetiva de probabilidade, podemos dizer que é possível modelar a probabilidade dos possíveis resultados em uma partida de futebol, porém não é uma proposta tão simples, depende de alguns fatores de uma situação para a outra, de uma modelagem para a outra. De fato, sabemos que as probabilidades foram calculadas através das odds disponibilizadas pela banca, porém o caminho para o cálculo dessas probabilidades é feito de maneira inversa, ou seja a banca calcula as odds através das probabilidades. Esse cálculo depende de muitos fatores, impossíveis de se levar em conta nos mínimos detalhes. Como exemplos, temos o estádio onde é disputada a partida, a temperatura no horário do jogo, se chove ou não, os desfalques de cada equipe, os resultados recentes dos times, a situação de cada um no campeonato, o árbitro escalado para o confronto. Por isso, neste momento, mostramos como é calculada a probabilidade seguindo o modelo retirado do site (UFMG, 2005).

Para calcular a probabilidade de vitória, empate ou derrota de um time em uma determinada partida de acordo com a modelagem probabilística disponível no site, façamos as seguintes observações:

- As probabilidades dependerão apenas da história das equipes dentro do próprio campeonato.

- O mando de campo é um fator importante, mas times diferentes reagem de maneiras diferentes a este fator.

- Vencer uma partida aumenta a probabilidade de vencer outras, perder aumenta a probabilidade de perder, empatar aumenta a probabilidade de empatar.

O primeiro item, simplifica as situações relacionadas a uma partida entre Flamengo (Atual campeão Brasileiro da Série A de 2019) e Atlético-GO (Recém promovido a primeira divisão do Campeonato Brasileiro), por exemplo, suponhamos que esses clubes se enfrentem na 5ª rodada do campeonato Brasileiro de 2020 e o Flamengo não está em uma boa fase e perde os quatro jogos anteriores a essa rodada, enquanto o Atlético-GO, em plena acensão, supostamente tenha vencido os últimos quatro jogos. Nesta situação, não será levado em consideração o histórico do passado vitorioso do Flamengo, mas sim a sua trajetória específica nesta sequência, ou seja, sem levar em consideração "o peso da camisa". Obviamente, que a história anterior de cada clube, os fatos recentes, os desfalques seja por indisciplina ou contusão, elenco, se ele disputa outras competições simultaneamente, todas essas situações podem influenciar no resultado do jogo, mas esses fatores fazem a modelagem, em questão, ainda mais complexa. No segundo item, temos a simplicidade do fator "mando de campo" e portanto é razoável sugerir que este item esteja inserido nesta modelagem, além de ser um cálculo mais simples de fazer. E a terceira situação, trata de uma forma simples de afirmar que um time que vence muitas partidas, tem mais chances de vencer, quem empata mais partidas, tem mais chances de empatar e quem perde mais partidas, tem mais chandes de perder.

Aplicando a modelagem, através das situações descritas anteriormente, observamos que a cada rodada, cada time é descrito por dois trios de números (Mandante ou Visitante).

- Mandante: Tendência de vencer, empatar ou perder jogos em casa.

- Visitante: Tendência de vencer, empatar ou perder jogos fora de casa.

Cada um desses números é positivo e a soma de cada trio é sempre 1. Neste momento, chamamos de p a probabilidade de vitória do time mandante, ou seja, quando o time A enfrenta o time B jogando em casa, e neste caso, essa probabilidade será determinada pela média aritmética entre a tendência de vitória expressa pelo perfil do mandante A e a tendência de derrota do perfil de visitante do time B. Analogamente, obtemos uma probabilidade q analisando as médias das tendências de empate dos dois times, posteriormente, devemos somar as probabilidades, pois pode haver uma situação ou outra, e assim, vamos obter a soma das probabilidades iguais a 1, pois estes números descrevem as probabilidades das três alternativas consideradas.

Após o término de cada rodada, é realizada a atualização dos resultados, para que os perfis de cada time sejam alterados de acordo com o resultado obtido na rodada anterior. Para isso, será feita a média ponderada entre o perfil de antes da rodada e o trio de números que descreve o resultado anterior (1 para o resultado ocorrido e zero para as ouras situações). Neste momento, será aplicado um peso determinado para aplicar a média ponderada, onde o perfil anterior ao último resultado, naturalmente deve receber um peso maior. Porém, ainda existe uma outra variável, que são os fatores de vencer um adversário que vem de bons desempenhos nos resultados, ou em relação ao vencedor de uma partida com desempenho mais fraco. Com a análise de variadas situações e simulações de resultados, determinaram que para calcular essa probabilidade seriam aplicados peso 4 para a vitória do mandante e peso 3 para os demais resultados, empate e derrota. Ou seja, cada probabilidade deverá ser multiplicada pelo trio [0,4; 0,3; 0,3], no entanto esses números podem variar de um modelo para outro, de um campeonato para outro, etc.

Vejamos um exemplo com a finalidade de ilustrar essa situação e expressar as probabilidades de uma partida de futebol, fizemos uma análise do campeonato Brasileiro de 2019, onde na última rodada foi realizado o confronto entre Cruzeiro x Palmeiras. Aplicamos a modelagem anterior, aos 10 jogos que antecederam esse confronto. Inicialmente, verificamos os resultados dos últimos 10 jogos da equipe do Cruzeiro que antecederam ao confronto:

- Rodada 28: Cruzeiro 1 x 1 Fortaleza.
- Rodada 29: Botafogo 0 x 2 Cruzeiro.
- Rodada 30: Cruzeiro 1 x 1 Bahia.
- Rodada 31: Atlético - PR 0 x 0 Cruzeiro.
- Rodada 32: Cruzeiro 0 x 0 Atlético - MG.
- Rodada 33: Cruzeiro 0 x 0 Avaí.

- Rodada 34: Santos 4 x 1 Cruzeiro.
- Rodada 35: Cruzeiro 0 x 1 CSA.
- Rodada 36: Vasco 1 x 0 Cruzeiro.
- Rodada 37: Grêmio 2 x 0 Cruzeiro.

Note que o aproveitamento da equipe do Cruzeiro como **mandante** é de (Zero vitória em cinco jogos), ou seja, 0% de vitória, (Quatro empates em cinco jogos), logo 80% de empate e (Uma derrota em cinco jogos), portanto, 20% de derrota, enquanto o aproveitamento como **visitante** em caso de vitória é de 20% (uma vitória em cinco jogos), 20% de empate (um empate em cinco jogos) e 60% de derrotas (Três derrotas em cinco jogos).

Agora, verificamos os resultados dos últimos 10 jogos da equipe do Palmeiras que antecedem o confronto:

- Rodada 28: Avaí 1 x 2 Palmeiras.
- Rodada 29: Palmeiras 3 x 0 São Paulo.
- Rodada 30: Palmeiras 1 x 0 Ceará.
- Rodada 31: Vasco 1 x 2 Palmeiras.
- Rodada 32: Palmeiras 1 x 1 Corinthians.
- Rodada 33: Bahia 1 x 1 Palmeiras.
- Rodada 34: Palmeiras 1 x 2 Grêmio.
- Rodada 35: Fluminense 1 x 0 Palmeiras.
- Rodada 36: Palmeiras 1 x 3 Flamengo.
- Rodada 37: Palmeiras 5 x 1 Goiás.

Note que o aproveitamento da equipe do Palmeiras como **mandante** é de (três vitórias em seis jogos), ou seja, 50% de chances de vitória, (um empate em seis jogos), logo 16,67% de chances de empate e (Duas derroras em seis jogos), portanto, 33,33% de chances de derrota, enquanto o aproveitamento como **visitante** em caso de vitória é de 50% de chances (duas vitórias em quatro jogos), 25% de empate (Um empate em quatro jogos) e 25% de derrotas (uma derrota em quatro jogos).

Seguindo as técnicas para o cálculo da probabilidade, de acordo com o modelo apresentado, vamos determinar o valor que representa a probabilidade de vitória do mandante p, neste caso o mandante da partida será a equipe do Cruzeiro, assim, teremos a média aritmética entre o perfil de vitória do Cruzeiro, jogando como mandante e o perfil de derrota do Palmeiras, jogando como visitante, neste caso, temos: $p = \frac{0\%+25\%}{2} = 12,5\% = 0,125$. Agora, vamos calcular a média das tendências de empate(e), o aproveitamento de empate do Cruzeiro como mandante é de 80% e o aproveitamento de empate do palmeiras como visitante é de 25%, portanto, a média entre as duas tendencias é igual a $e = \frac{80\%+25\%}{2} = 52,5\% = 0,525$. Pela propriedade da soma 1, temos que a probabilidade do Palmeiras vencer é igual a $1-0,25-0,525 = 0,35 = 35\%$, neste caso, podemos determinar um certo favoritismo para a equipe do Palmeiras, no entanto, o resultado mais esperado para este jogo é de empate com 52,5%. Portanto, as probabilidades de ocorrência de cada um dos resultados possíveis na partida entre Cruzeiro e Palmeiras são:

- Cruzeiro 12,5%.
- Empate 52,5%.
- Palmeiras 35%.

Esta partida foi realizada no dia 08 de dezembro de 2019 no Estádio Mineirão em Belo Horizonte, Minas Gerais e o resultado final da partida foi Cruzeiro 0 x 2 Palmeiras e mostra o modelo de cálculo da probabilidade em uma partida futebol realizado pelos professores de Matemática da UFMG é interessante e importante para muitas situações, inclusive para o cálculo das odds de um site de apostas online.

Capítulo 3

Propostas de aplicações de Probabilidade em situações de jogos

Nesta seção, analisamos e verificamos aplicações dos conceitos, teoremas e definições relacionadas a Probabilidade, bem como observamos algumas situações propostas sobre jogos e apostas online. Para isso, apresentamos modelos de aplicações de probabilidade em jogos de dados, loteria, roletas, aposta online relacionada ao futebol e para finalizar um modelo de aplicação proposta sobre o método de Martingale.

3.1 Dados

Suponhamos a seguinte situação, um jogador paga k reais a banca, um dado honesto é lançado. O jogador recebe da banca cX reais, onde X é a face obtida. Analisando essas informações, os seguintes Teoremas podem ser enunciados:

Teorema 3.1.1. *Seja L o lucro obtido pela participação do jogador em uma rodada. O lucro médio do jogador por participação no jogo poderá ser calculado por:*

$$E(L) = \frac{-2k + 7c}{2}.$$

Demonstração.

$$L = -k + cX \Rightarrow E(L) = E(-k + cX) = -k + cE(X)$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} xP(X = x) = \sum_{x=1}^{6} x.\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(L) = -k + c\frac{7}{2} = \frac{-2k + 7c}{2}.$$

$\square$

Neste caso podemos verificar três situações para o lucro médio do apostador neste jogo:

i) Se $c = \frac{2k}{7} \Rightarrow \frac{-2k+7c}{2} = 0 \Rightarrow E(L) = 0$, nesse caso, temos um jogo justo.

ii) Se $c < \frac{2k}{7} \Rightarrow \frac{-2k+7c}{2} < 0 \Rightarrow E(L) < 0$, nesse caso, em média, o jogador leva prejuízo.

iii) Se $c > \frac{2k}{7} \Rightarrow \frac{-2k+7c}{2} > 0 \Rightarrow E(L) > 0$, nesse caso, em média, o jogador tem lucro.

A seguir temos um gráfico para ilustrar a situação:

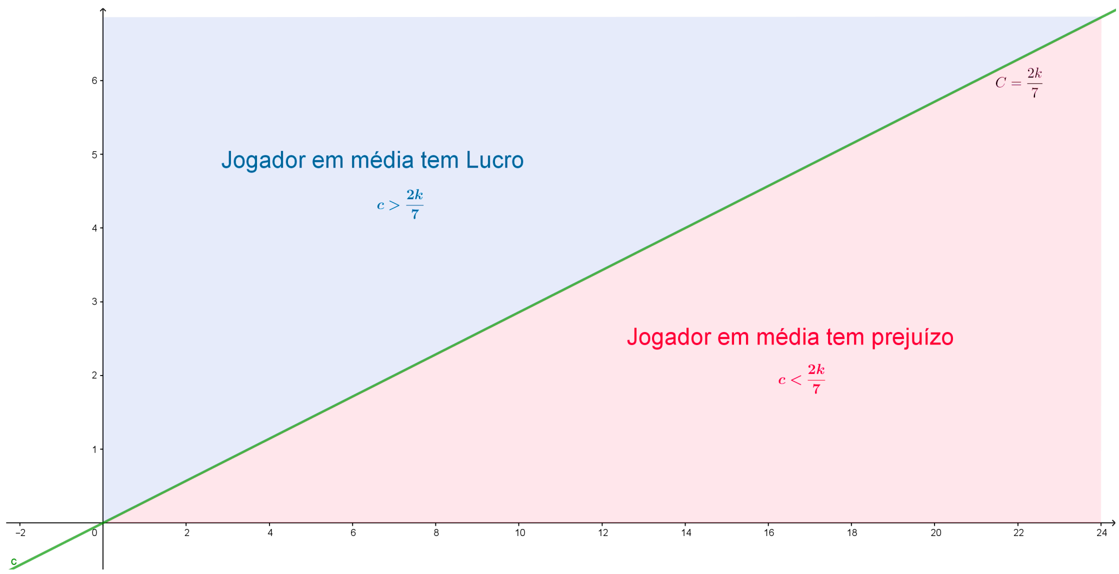


Figura 3.1: Lucro médio do jogador por participação

Agora o jogador repete a aposta n vezes.

Teorema 3.1.2. *Seja L_i o lucro na i-ésima aposta, onde $i = 1, 2, \ldots, n$ e $L(n)$ o lucro total em n rodadas. Então, o lucro médio em n participações será calculado pela seguinte fórmula:*

$$E(L(n)) = n\frac{7c - 2k}{2}.$$

Demonstração:

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n} L_i.$$

Então,

$$E(L(n)) = E\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(L_i).$$

Mas,

$$E(L_1) = \frac{7c - 2k}{2}.$$

Então,

$$E(nL_1) = nE(L_1) = n\frac{7c - 2k}{2}.$$

$\square$

Teorema 3.1.3. *O lucro a longo prazo obtido pelo jogador satisfaz*

$$\frac{L(n)}{n} \overset{q.c.}{\to} \frac{7c - 2k}{2}.$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, com probabilidade 1, $\exists\ N = N(\varepsilon)$, aleatório tal que para $n \geq N(\varepsilon)$, $\frac{L(n)}{n} \in \left(\frac{7c-2k}{2} - \varepsilon; \frac{7c-2k}{2} + \varepsilon\right)$.

Assim, a longo prazo: $L(n) \approx \frac{7c-2k}{2} \cdot n$.

Vejamos a seguir dois gráficos, no primeiro podemos observar que para n grande, ou seja, a longo prazo para $c > \frac{2k}{7}$ o apostador terá lucro. Para $c < \frac{2k}{7}$ o apostador terá prejuízo.

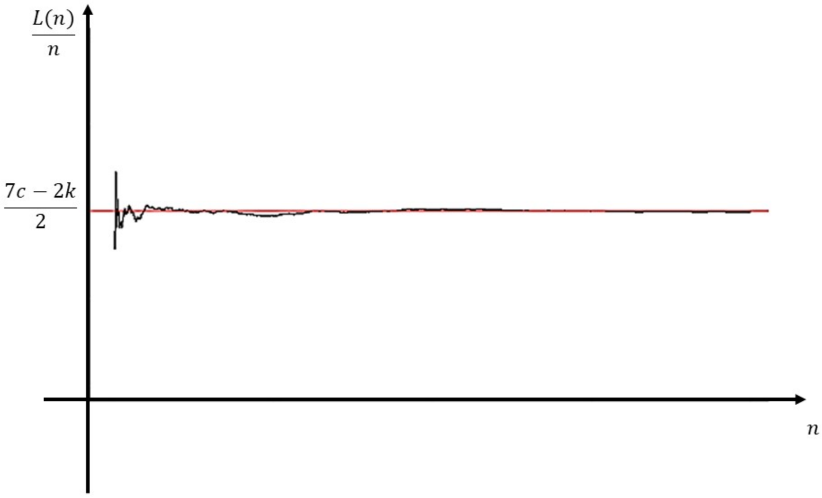


Figura 3.2: Lucro a longo prazo para $c > \frac{2k}{7}$

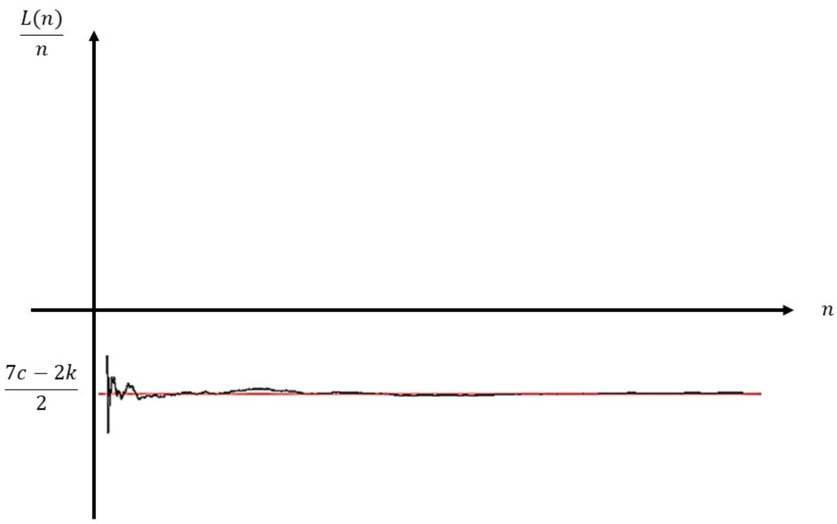


Figura 3.3: Prejuízo a longo prazo para $c < \frac{2k}{7}$

Demonstração.
Aplicando a Lei Forte dos grandes números, temos:

$$\frac{L(n)}{n} \xrightarrow{q.c.} E(L_1) = \frac{7c-2k}{2}.$$

Para n grande, temos:

$$\frac{L(n)}{n} \approx \frac{7c-2k}{2}.$$

Isto é,

$$L(n) \approx \frac{7c-2k}{2}n.$$

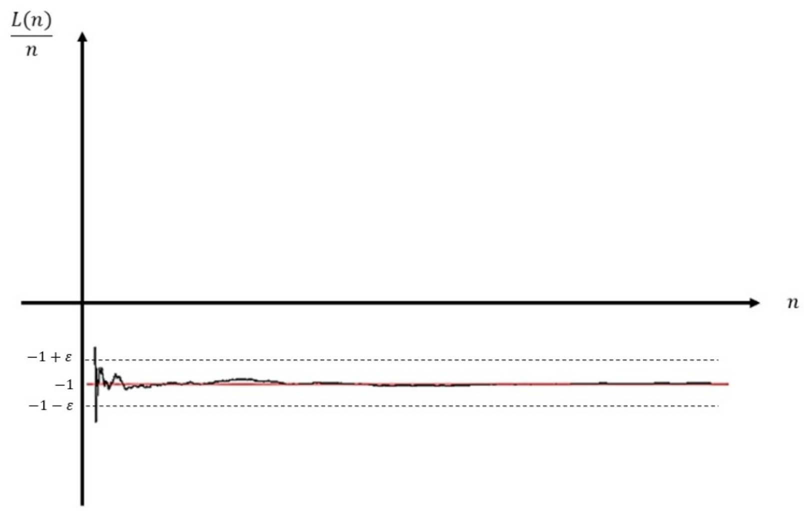
$\square$

Exemplo 3.1.4. *Se $c = 2$ e $k = 8$, então:*

$$\frac{L(n)}{n} \xrightarrow{q.c.} -1.$$

Assim, $L(n) \approx -n$ para n grande. Para todo $\varepsilon > 0$, com probabilidade 1, $\exists\, N = N(\varepsilon)$ tal que $\frac{L(n)}{n} \in (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$.

Graficamente,



Teorema 3.1.5. *A probabilidade do jogador estar em lucro após n rodadas, para n grande, será dado por:*

$$P(L(n) > 0) \approx 1 - \phi\left(\frac{(2k-7c).\sqrt{3n}}{c\sqrt{35}}\right).$$

Demonstração.
Queremos $P(L(n) > 0)$. Para isso, temos:

$$Z_n = \frac{L(n) - E(L(n))}{\sqrt{Var(L(n))}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

$$E(L(n)) = \frac{n(7c - 2k)}{2}.$$

Usando a independência das variáveis L_i:

$$Var(L(n)) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(L_i) = nVar(L_1).$$

Mas,

$$Var(L_i) = Var(-k + cX) = c^2 Var(X).$$

Onde,

$$Var(X) = \sum_{x=1}^{6}(x - E(X))^2 \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{6}(x - 3,5)^2 P(X = x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{6}(x - E(X))^2.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6}(x - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$$

Então,

$$Var(L_i) = \frac{35}{12}.c^2 \Rightarrow Var(L(n)) = \frac{35}{12}n.c^2$$

$$Z_n = \frac{L(n) - \frac{n(7c-2k)}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}n.c^2}}$$

Logo,

$$P(L(n) > 0) = \left(\frac{L(n) - \frac{(7c-2k)n}{2}}{c.\sqrt{\frac{35}{12}n}} > \frac{\frac{0-(7c-2k)n}{2}}{c.\sqrt{\frac{35}{12}n}}\right)$$

$$= P\left(Z_n > \frac{\frac{(2k-7c)n}{2}}{\frac{c\sqrt{35n}}{\sqrt{12}}}\right)$$

$$= P\left(Z_n > \frac{(2k-7c)n}{2}.\frac{\sqrt{12}}{c\sqrt{35n}}\right)$$

$$= P\left(Z_n > \frac{(2k-7c).\sqrt{3n}}{c\sqrt{35}}\right).$$

Aplicando o Teorema Central do Limite, temos:

$$\approx 1 - \phi\left(\frac{(2k-7c).\sqrt{3n}}{c\sqrt{35}}\right).$$

□

Exemplo 3.1.6. *Tomando $c = 2$ e $k = 8$, teremos:*

$$P(L(n) > 0) \approx 1 - \phi\left(\sqrt{\frac{3n}{35}}\right).$$

Portanto, se $n = 105$, por exemplo, então a probabilidade de o jogador estar em lucro após 105 rodadas será dada por:

$$P(L(105) > 0) \approx 1 - \phi\left(\sqrt{\frac{3.105}{35}}\right) = 1 - \phi(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013.$$

Ou seja, em 105 rodadas é remota a chance do jogador estar em lucro.

3.2 Loteria

Suponha um jogo de loteria, com características semelhantes as da megassena, consiste em marcar 15 dezenas numa cartela de 60 dezenas disponíveis. O preço da participação é $R\$2.500,00$ e seis números serão sorteados. O jogador ganha o prêmio, caso as 6 dezenas sorteadas estejam entre as 15 escolhidas inicialmente. O valor do prêmio é $R\$30.000.000,00$. Nessas circunstâncias, podemos enunciar os seguintes teoremas:

Teorema 3.2.1. *Seja A o evento onde o jogador é premiado, então a probabilidade do jogador marcar uma cartela e ser premiado será aproximadamente,* $0,01\%$.

Demonstração.

$$P(A) = \frac{\binom{15}{6} \cdot \binom{45}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{\frac{15!}{9! \cdot 6!}}{\frac{60!}{54! \cdot 6!}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55} = \frac{13}{130.036} = 0,000099972 \approx 0,01\%.$$

Ou seja, a chance do jogador ser premiado é de aproximadamente 1 em cada 10 000 jogos.

Teorema 3.2.2. *Seja L o lucro do jogador, então o lucro médio $E(L)$ será de aproximadamente R\$* $499,17$.

Demonstração.

Temos que:

$$E(L) = \sum l \cdot P(L = l).$$

Então,

$$E(L) = -2.500 \cdot P(L = -2.500) + (30.000.000 - 2.500) \cdot P(L = 30.000.000 - 2.500)$$

$$E(L) = -2.500 \cdot P(L = -2.500) + 29.997.500 \cdot P(L = 29.997.500)$$

$$E(L) = -2.500 \cdot P(A^c) + 29.997.500 \cdot P(A)$$

$$E(L) = -2.500 \cdot \left(1 - \frac{13}{130.036}\right) + 29.997.500 \cdot \left(\frac{13}{130.036}\right)$$

$$E(L) = -2.500 \cdot \left(\frac{130.023}{130.036}\right) + 29.997.500 \cdot \left(\frac{13}{130.036}\right)$$

$$E(L) = \frac{-325.057.500 + 389.967.500}{130.036}.$$

Logo,

$$E(L) = \frac{64.910.000}{130.036} = 499,1694608.$$

Portanto, o apostador obtém um lucro médio de aproximadamente R$ 499,17 nesta situação.

Observação: O apostador apresenta lucro médio positivo, porém, existe um alto risco de se perder o dinheiro investido. Em outras palavras, em média, o jogador ganha, mas se de fato joga, provavelmente irá perder o dinheiro investido, pois este é um investimento de altíssimo risco.

3.3 Roleta

Como foi citado no capítulo sobre roletas, sabemos que existem dois tipos, a roleta americana e a roleta europeia. Então, o objetivo desta proposta é verificar o quanto bancas podem faturar num jogo de roleta. Além disso, analisar o efeito da inclusão do "00"na roleta americana. Vamos considerar algumas apostas externas e internas.

Tabela 3.1: Apostas Exeternas

	Números	Prob. Americana	Prob. Europeia	Pagamento
Dúzia	12	$\frac{12}{38} = 31,58\%$	$\frac{12}{37} = 32,43\%$	2:1
Preto/Vermelho	18	$\frac{18}{38} = 47,37\%$	$\frac{18}{37} = 48,65\%$	2:1
Par/Ímpar	18	$\frac{18}{38} = 47,37\%$	$\frac{18}{37} = 48,65\%$	2:1
Colunas	12	$\frac{12}{38} = 31,58\%$	$\frac{12}{37} = 32,43\%$	2:1

Tabela 3.2: Apostas Internas

	Número	Prob. Americana	Prob. Europeia	Pagamento
Número Pleno	1	$\frac{1}{38} = 2,63\%$	$\frac{1}{37} = 2,7\%$	35: 1
Cavalo	2	$\frac{2}{38} = 5,26\%$	$\frac{2}{37} = 5,41\%$	17: 1
Fila	3	$\frac{3}{38} = 7,89\%$	$\frac{3}{37} = 8,11\%$	11: 1
Equina	4	$\frac{4}{38} = 10,53\%$	$\frac{4}{37} = 10,81\%$	8: 1
Rua	6	$\frac{6}{38} = 11,79\%$	$\frac{6}{37} = 16,22\%$	5:1

Nas tabelas 3.3 e 3.4, vamos considerar algumas apostas externas e internas e os respectivos lucros da banca por unidade apostada e o lucro médio. Para determinar o lucro médio da banca devemos proceder da seguinte forma:

Como a banca paga 2:1 em caso de aposta em *dúzia* na *roleta americana*, ou seja, paga 2 unidades monetárias, para cada unidade monetária apostada, então se um apostador opta por este jogo, receberá uma unidade monetária, pois iremos descontar a unidade monetária investida, logo a banca perde uma unidade. Se o apostador perde, então a banca recebe uma unidade monetária, assim, calculando o lucro médio obtemos:

$$(-1) \cdot \frac{12}{38} + (1) \cdot \frac{26}{38} = 0,3684.$$

Para obter o lucro médio da banca para 1.000 u.m., basta multiplicar o resultado anterior por 1.000. Assim:

$$0,3684 \cdot 1.000 = 368,40.$$

Seguindo este exemplo, temos:

Tabela 3.3: Apostas Externas

	(Americana) Lucro médio da banca por un. apostada	(Europeu) Lucro médio da banca por un. apostada	Lucro médio em 1.000 un. apostadas na Roleta Americana	Lucro médio em 1.000un. apostadas na Roleta Europeia
Dúzia	0,3684	0,3514	368,40	351,40
Preta/ Vermelho	0,0526	0,0270	52,60	27,00
Par / Ímpar	0,0526	0,0270	52,60	27,00
Coluna	0,3684	0,3514	368,40	351,40

Tabela 3.4: Apostas Internas

	(Americana) Lucro médio da banca por un. apostada	(Europeu) Lucro médio da banca por un. apostada	Lucro médio em 1.000 un. apostadas na Roleta Americana	Lucro médio em 1.000 un. apostadas na Roleta Europeia
Nº Pleno	0,0989	0,0541	78,90	54,10
Cavalo	0,1053	0,0811	105,30	81,10
Fila	0,1316	0,1081	131,60	108,10
Esquina	0,1579	0,1351	157,90	135,10
Rua	0,2105	0,1892	210,50	189,20

Considere 1000 unidades monetárias apostadas em cada uma das 9 tipos de apostas. portanto, o total apostado será $1.000 \cdot (9) = 9.000$ unidades monetárias (u.m.). Neste caso, basta somar o lucro médio obtido multiplicado por 1.000 u.m. em cada uma das situações de apostas na roleta americana e repetir o mesmo processo com a as apostas na roleta europeia.

Tabela 3.5: Lucro médio da Banca

	Roleta Americana	Roleta Europeia
	368,40	351,40
	52,60	27,00
	52,60	27,00
	368,40	351,40
	78,90	54,10
	105,30	81,10
	131,60	108,10
	157,90	135,10
	210,50	189,20
Total	1 526,20 u.m.	1 324,40 u.m.

Portanto, o lucro médio da banca para 9.000 unidades monetárias apostadas será de 1.526,20 u.m. para apostas na roleta americana e 1.324,40 u.m. para apostas na roleta europeia.

3.4 Apostas online

No capítulo sobre Probabilidade associada a jogos, vimos que existem equipes especializadas em calcular as Probabilidades de uma partida de futebol e de várias modalidades esportivas e jogos, essas analisadas por outras equipes de sites de apostas online que por sua vez definem as odds, esses as inflacionam e disponibilizam aos jogadores para que possam realizar suas apostas. No modelo proposto a seguir, faremos o caminho inverso, vamos analisar as odds em uma situação de apostas e posteriormente fazer as conversões para obter as probabilidades e verificar o lucro médio de uma banca em cada milhão de unidades monetárias apostadas.

Considerando uma situação de aposta online em uma partida de futebol, suponha que a banca consegue obter as probabilidades associadas ao resultado da partida.

- Juventus 2,30.

- Empate 3,40.
- Milan 3,00.

Cada R$ 1,00 apostado em cada uma das situações, em caso de acerto o lucro será:

- Juventus $1.(2,30 - 1) = R\$1,30$.
- Empate $1.(3,40 - 1) = R\$2,40$.
- Milan $1.(3,00 - 1) = R\$2,00$.

Fazendo a conversão verificamos que essas odds foram obtidas através das probabilidades:

- Probabilidade de vitória da Juventus: $\frac{1}{2{,}30} = 43,48\%$.
- Probabilidade de Empate: $\frac{1}{3{,}40} = 29,41\%$.
- Probabilidade de vitória do Milan: $\frac{1}{3} = 33,33\%$.

A soma das probabilidades deveria ser 100% mas a partir das odds obtemos:

$$43,48\% + 29,41\% + 33,33\% = 106,22\%.$$

Na prática a banca estima as probabilidades e as inflaciona para, em média, obter lucro. Note que inflacionando as probabilidades as odds são diminuídas e assim o retorno do jogador.

Vamos supor que as probabilidades foram inflacionadas proporcionalmente, assim temos:

- Probabilidade de vitória da Juventus: $40,93\%$.
- Probabilidade de Empate: $27,69\%$.
- Probabilidade de vitória do Milan: $31,38\%$.

A tabela a seguir mostra o retrospecto entre as duas equipes até 13/02/2020.

Juventus	Empate	Milan
108	87	94
37,37%	30,10%	32,53%

Note que as proporções relativas ao histórico do confronto diferem das probabilidades estimadas pela banca. De fato, a definição frequentista não pode ser aplicada, nesse caso, já que as partidas não foram ao longo do tempo realizadas nas mesmas condições. Mudaram jogadores, treinadores, estádios etc. A definição frequentista não serve para estimar probabilidades associadas a partidas de futebol.

Suponha j reais apostados no Juventus, e reais apostados no empate e m reais apostados na vitória do Milan.

Sejam os eventos J Juventus vence, E ocorrer empate e M Milan vence, vamos também definir a variável lucro da banca por L, então:

$$E(L) = E(L|J)P(J) + E(L|E)P(E) + E(L|M)P(M).$$

Assim, temos:

- $E(L|J) = -j.1,30 + e + m.$
- $E(L|E) = e.2,40 + j + m.$
- $E(L|M) = -m.2,00 + j + e.$

Então,

$$E(L) = 0,4093(-1,3j + e + m) + 0,2769(-2,4e + j + m) + 0,3138(-2m + j + e)$$

$$E(L) = 0,6862m + 0,7231e + 0,5907j - 0,53209j - 0,66456e - 0,6276m$$

$$E(L) = 0,0586m + 0,05854e + 0,05861j$$

$$E(L) \approx 0,0586(m + e + j)$$

$$E(l) \approx 5,86\%(m + e + j).$$

Onde $m + e + j$ representa o total de apostas.

Assim, em cada um milhão de unidades monetárias apostadas, em média a banca lucra 58.600 unidades monetárias.

Observações:

- Considerando que grandes bancas devem ter sistemas eficientes de previsão e estimativas fica difícil um jogador numa grande quantidade de apostas ter lucro. A longo prazo, em média, o prejuízo do jogador é realidade.
- Em função das odds colocadas pelas bancas é possível extrair o lucro médio que a banca estabelece.

3.5 Método Martingale

A técnica consiste em apostar repetidamente e progressivamente num mesmo tipo de resultado, até ele ocorrer. O objetivo é recuperar o que terá perdido até lucrar. Nesta situação podemos enunciar os seguintes teoremas e exemplos:

Teorema 3.5.1. *A probabilidade de vencer em uma tentativa é $p \in (0,1)$. Suponha que o jogador faça suas apostas indefinidamente. Então, a probabilidade dele nunca vencer é zero. Logo, em algum momento ele vence uma aposta.*

Demonstração.

Sejam os eventos: A_i "vencer na i-ésima repetição"e B "nunca vencer", então:

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

Defina B_n "Perder todas as repetições até a n-ésima"

$$B_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c.$$

Temos:

$$P(B_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = \prod_{i=1}^{n}(1-p) = (1-p)^n.$$

Pela continuidade da Probabilidade

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty}(1-p)^n = 0.$$

$\square$

Logo, a chance de nunca vencer é 0. Portanto, em algum momento o jogador vencerá uma aposta.

Exemplo 3.5.2. *Vamos observar a aplicação do Método de Maringale considerando uma aposta odds R$ 2,00.*

Suponha que o apostador perde na primeira, segunda, terceira e quarta aposta e vença na quinta.

- ***1ª Aposta:*** *R$ 10,00 na equipe com odds 2,00. Como ele perde o prejuízo é de R$ 10,00.*

- ***2ª Aposta:*** *R$ 20,00 na equipe com odds 2,00 e ele perde. O prejuízo acumulado é R$ 30,00.*

- ***3ª Aposta:*** *R$ 40,00 na equipe com odds 2,00 e ele perde. O prejuízo acumulado é R$ 70,00.*

- ***4ª Aposta:*** *R$ 80,00 na equipe com odds 2,00 e ele perde. O prejuízo acumulado é R$ 150,00.*

- ***5ª Aposta:*** *R$ 160,00 na equipe com odds 2,00 e ele vence. Ganha nessa rodada R$ 160,00.*

Concluímos que subtraindo R$ 150,00 do lucro R$ 160,00, temos o lucro final de R$ 10,00 que é o valor da aposta inicial.

Passamos agora a analisar a funcionalidade do Método de Martingale, observe o exemplo a seguir.

Exemplo 3.5.3. *Tome, por exemplo uma aposta de odds 2,00 e seja k a aposta inicial, com a regra de dobrar a aposta a cada rodada até vencer pela primeira vez. Assim, dado que a vitória ocorre na i-ésima rodada o lucro do jogador (L_n) será o valor ganho na i-ésima rodada (G_n) menos o total perdido nas rodadas anteriores.*

Então,

$$P_n = k + 2k + 4k + 8k + ... + (2^{n-1}k)$$
$$P_n = k \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{n-2})$$
$$\text{Logo, } P_n = k(2^{n-1} - 1).$$

E,

$$G_n = 2^{n-1} \cdot k.$$

Assim, o Lucro L_n será obtido da seguinte forma:

$$L_n = G_n - P_n$$
$$L_n = k \cdot 2^{n-1} - k \cdot (2^{n-1} - 1)$$
$$L_n = k.$$

O lucro L_n do jogador seria então k reais, mas para isso ser garantido o apostador precisaria de duas coisas que ele não tem na prática:

- Dinheiro infinito.
- Limite infinito para aposta nas casas.

Observação: Logo, o método pode falhar já que usualmente há limites para valores de apostas nas casas e no caso de se demorar a sair a vitória pode chegar um momento onde o jogador não tenha mais dinheiro para apostar, ficando no prejuízo.

Passamos agora a analisar um exemplo para verificar a existência da Probabilidade do jogador sair no lucro usando o método de Martingale.

Exemplo 3.5.4. *Vamos fazer este cálculo num exemplo prático com as odds igual a* $2,00$*, aposta inicial R\$* $1,00$ *e limite de apostas R\$* $1.000,00$*. Estamos supondo jogo justo, neste caso, o jogador precisa vencer até a 10ª rodada.*

Se vencer na rodada n o lucro será:

- **1ª Rodada:** $+1 = 1$.
- **2ª Rodada:** $-1 + 2 = 1$.
- **3ª Rodada:** $-1 - 2 + 4 = 1$.
- **4ª Rodada:** $-1 - 2 - 4 + 8 = 1$.
- **5ª Rodada:** $-1 - 2 - 4 - 8 + 16 = 1$.
- **6ª Rodada:** $-1 - 2 - 4 - 8 - 16 + 32 = 1$.
- **7ª Rodada:** $-1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 + 64 = 1$.
- **8ª Rodada:** $-1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 + 128 = 1$.
- **9ª Rodada:** $-1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 + 256 = 1$.
- **10ª Rodada:** $-1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 + 512 = 1$.
- **Perde todas as dez rodadas:** $-1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256 - 512 = -1.023$.

Seja A_i "Vencer na i-ésima rodada", então:

$$P(L = -1.023) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_{10}^c) = \prod_{i=1}^{10} P(A_i^c)$$

$$P(L = -1.023) = \prod_{i=1}^{10} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1.024} \approx 0,000976562.$$

$$P(L = 1) = 1 - P(L = -1.023) = 1 - \frac{1}{1.024} = \frac{1.023}{1.024} \approx 0,9990.$$

Logo, o jogador tem alta probabilidade de lucrar R\$ $1,00$, a saber $0,9990$ e um pequeno risco de ter um prejuízo enorme R\$ $1.023,00$.

O lucro médio $E(L)$ é:

$$E(L) = 1\frac{1.023}{1.024} + (-1023) \cdot \frac{1}{1.024} = 0.$$

Exemplo 3.5.5. *Considere uma aposta no jogo preto/vermelho em uma roleta europeia. Nesse caso, o lucro médio do jogador seria negativo, uma vez que paga-se 2:1, mas a probabilidade de vitória é um pouco inferior a 0,5.*

$$P(L = -1.023) = \prod_{i=1}^{10} P(A_i^c) = \prod_{i=1}^{10} \left(1 - \frac{18}{37}\right) = \left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0,001275.$$

$$P(L = 1) = 1 - P(L = -1.023) = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0,9987.$$

Nesse caso,

$$E(L) = 1 \cdot \left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10}\right) + (-1.023) \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{10}$$

$$E(L) = 1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{10} - 1.023 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{10} = 1 - 1.024 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx -0,3056.$$

Ou seja, em média, o lucro do jogador é negativo.

Exemplo 3.5.6. *Vamos voltar a situação da roleta americana com aposta inicial R\$* $20,00$ *e limite de apostas R\$* $1.000,00$.

Nesse caso, o jogador precisa vencer até a 6ª rodada. Vamos observar o lucro obtido pelo jogador, quando vence em uma determinada rodada:

- ***1ª Rodada:*** $+20 = 20.$
- ***2ª Rodada:*** $-20 + 40 = 20.$
- ***3ª Rodada:*** $-20 - 40 + 80 = 20.$
- ***4ª Rodada:*** $-20 - 40 - 80 + 160 = 20.$
- ***5ª Rodada:*** $-20 - 40 - 80 - 160 + 320 = 20.$
- ***6ª Rodada:*** $-20 - 40 - 80 - 160 - 320 + 640 = 20.$
- *Perde todas as 6 rodadas:* $-20 - 40 - 80 - 160 - 320 - 640 = -1.260.$

Suponha que o jogo é a aposta preto/vermelho numa roleta americana, então:

$$P(L=-1260)=\prod_{i=1}^{6}P(A_i^c)=\left(1-\frac{18}{38}\right)^6=\left(\frac{20}{38}\right)^6\approx 0,021255845.$$

$$P(L=20)=1-P(L=-1.260)=1-\left(\frac{20}{38}\right)^6\approx 0,978744154.$$

Nesse caso,

$$E(L)=20\left[1-\left(\frac{20}{38}\right)^6\right]+(-1.260)\cdot\left(\frac{20}{38}\right)^6$$

$$E(L)=20-20\left(\frac{20}{38}\right)^6-1.260\cdot\left(\frac{20}{38}\right)^6$$

$$E(L)=20-1.280\left(\frac{20}{38}\right)^6$$

$$E(L)\approx -7,20748284.$$

Ou seja, em média, o lucro do jogador é negativo.

Exemplo 3.5.7. *Se Vence até a r-ésima rodada obtém lucro.*

Se pensarmos no jogo preto/vermelho com odds 2,00 na roleta americana aposta inicial k e limite de aposta l temos:

- ***1ª Rodada:*** $+k=k$.
- ***2ª Rodada:*** $-k+2k=k$.
- ***3ª Rodada:*** $-k-2k+4k=k$.

$\vdots$

- ***rª Rodada:*** $-k-2k-2^2k-...-2^{r-2}k+2^{r-1}k=k$.
- ***Perde todas as r rodadas:*** $-k-2k-2^2k-...-2^{r-2}k-2^{r-1}k=-k(1+2+2^2+...+2^{r-2}+2^{r-1})=-k(2^r-1)$.

Pois,

I) $S=1+2+...+2^{r-1}$.

II) $2 \cdot S = 2 + 4 + ... + 2^r$.

Subtraindo II por I, temos:

$S = 2^r - 1$, *sendo* $r = min\,\{n \geq 1; k \cdot 2^r > l\}$.

Logo,

$$P(L = -k(2^r - 1)) = \left(\frac{20}{38}\right)^r$$

e

$$P(L = k) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^r$$

. *Portanto,*

$$E(L) = k\left[1 - \left(\frac{20}{38}\right)^r\right] + (-k) \cdot (2^r - 1) \cdot \left(\frac{20}{38}\right)^r$$

$$E(L) = k - k\left(\frac{20}{38}\right)^r - k \cdot 2^r\left(\frac{20}{38}\right)^r + k \cdot \left(\frac{20}{38}\right)^r$$

$$E(L) = k - k \cdot 2^r\left(\frac{20}{38}\right)^r$$

$$E(L) = k - k\left(\frac{40}{38}\right)^r$$

$$E(L) = k\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^r\right)$$

.

Note que $h(K, R) = E(L) < 0$ *para todo* $k > 0, r > 0$.

Ou seja, em média o jogador perde embora no caso onde r *é suficientemente grande, tenha grande chance de sair vencedor.*

Tabela 3.6: **k=10**

$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^r\right)$ e $P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^r$			
l	r	$E(L)$	$P(L = 10)$
100	4	$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^4\right) = -2,277$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^4 = 0,923$
200	5	$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^5\right) = -2,924$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^5 = 0,960$
500	6	$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^6\right) = -3,604$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^6 = 0,979$
1 000	7	$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^7\right) = -4,320$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^7 = 0,989$
2 000	8	$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^8\right) = -5,073$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^8 = 0,994$
5 000	9	$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^9\right) = -5,867$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^9 = 0,997$
10 000	10	$E(L) = 10\left(1 - \left(\frac{20}{19}\right)^{10}\right) = -6,702$	$P(L = 10) = 1 - \left(\frac{20}{38}\right)^{10} = 0,999$

Capítulo 4

Probabilidade no Ensino Médio

4.1 Parâmetros Curriculares

Sobre o desenvolvimento do estudo da Probabilidade no Ensino Médio, podemos observar até o presente momento que na maioria das escolas, principalmente na rede pública, o conteúdo de Probabilidades recebe uma abordagem específica somente na 2ª Série do Ensino Médio, com base nos PCN[1] e nas abordagens dos livros didáticos. No Ensino Fundamental, a abordagem é realizada como conceito básico apenas no 9º ano, após a demonstração o Princípio Fundamental de Contagem, como breve introdução para a aplicação da Estatística, onde é apresentado aos alunos a distribuição de frequência simples e algumas noções de Medidas de tendência central.

Comparando PCN e BNCC[2], podemos verificar que o estudo das Probabilidades está sendo cada vez mais inserido em outras séries da educação básica, pois é uma importante referência para aplicação em outras disciplinas além da Matemática e em diversas situações do cotidiano. Nesta perspectiva, aplicar aos alunos atividades que envolvam a interdisciplinaridade e a inserção ao mercado de trabalho e que faça transparecer o protagonismo juvenil são fatores essenciais para o Ensino de Matemática nas escolas, por esse motivo é necessário que a escola passe por essa reformulação de apli-

[1] Parâmetros Curriculares Nacionais

[2] Base Nacional Comum Curricular

cações de conteúdos para que o estudo da probabilidade seja mais presente na rotina do cotidiano escolar.

A importância do estudo na área de Probabilidade se torna ainda mais importante com a complementação da BNCC sobre o que é desejado ao ensinar Probabilidades através dessa nova formulação, exposição dos conteúdos que está sendo implementada ao novo currículo a ser trabalhado nas escolas. No tocante à Probabilidade, os estudantes do Ensino Fundamental têm a possibilidade, desde os anos iniciais, de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL, 2017, p.517)

Nesse segmento, através da importância de trabalhar e desenvolver os estudos sobre probabilidades desde as series iniciais do Ensino Fundamental de acordo com a reformulação curricular, podemos analisar que:

> [...] o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. No Ensino Fundamental - Anos Finais, o estudo deve ser ampliado e aprofundado, por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica - probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2017, p. 230).

Sobre o Ensino de Probabilidade através de Jogos, primeiramente, podemos retomar a história da probabilidade e verificar que a teoria das probabilidades, ou seja, o avanço das pesquisas neste ramo é constituído em sua essência, por uma atividade envolvendo um jogo e através da troca de cartas entre Fermat e Pascal buscando a solução para o "problema das cartas". Portanto, é importante verificar que, segundo o PCN, trabalhar com propostas lúdicas, em sala de aula, são atrativos e são significativos no processo de aprendizagem dos alunos.

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (BRASIL, 1998, p. 46).

Ainda em relação à inserção dos jogos no ensino de Matemática, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática enfatiza-se que:

> [...] além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um "fazer sem obrigação externa e imposta", embora demande exigências, normas e controle. No jogo, mediante a articulação entre o conhecido e o imaginado, desenvolve-se o autoconhecimento - até onde se pode chegar - e o conhecimento dos outros - o que se pode esperar e em que circunstâncias.
> Para crianças, os jogos são as ações que elas repetem sistematicamente, mas que possuem um sentido funcional (jogos de exercício), isto é, são fonte de significados e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema. Essa repetição funcional também deve estar presente na atividade escolar, pois é importante no sentido de ajudar a criança a perceber regularidades.
> Por meio dos jogos as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações.
> Além disso, passam a compreender e a utilizar convenções e regras que serão empregadas no processo de ensino e aprendizagem. Essa compreensão favorece sua integração num mundo social bastante complexo e proporciona as primeiras aproximações com futuras teorizações (BRASIL, 1997, p.35).

Com base nos PCN e BNCC é que surge essa proposta para trabalhar e desenvolver com os alunos, principalmente do Ensino Médio, o conteúdo de Probabilidade utilizando jogos. Buscando quantificar o conhecimento através de atividades lúdicas, de modo atrativo, para que os alunos se desenvolvam através de sua capacidade criativa e aprimorem de forma natural as reflexões diante da solução de situações problema envolvendo atividades do cotidiano, registrando e compreendendo com maior facilidade o que foi desenvolvido durante a aplicação e explicação do conteúdo de Probabilidade em sala de aula.

4.2 Aplicações da Probabilidade relacionada aos jogos no Ensino Médio

Nesta seção, apresentamos quatro propostas para aplicação da Probabilidade através de jogos aos alunos do Ensino Médio. O objetivo principal, nesta etapa, é mostrar aos alunos uma forma lúdica de desenvolver o estudo da teoria da probabilidade, associando jogos presentes no cotidiano, como o jogo de dados, jogo de par ou ímpar, jogo de loteria e uma situação de jogo online associado ao futebol.

4.2.1 Jogo de dado

Quando buscamos qualquer livro de Ensino Médio, para introduzir o conteúdo de probabilidades, é comum ver em suas primeiras abordagens uma situação envolvendo jogos de dados. Provavelmente isso acontece, pois existem várias situações envolvendo o cálculo da probabilidade mostrando a ocorrência de um evento para um lançamento de um dado. Também é comum, que em sua primeira abordagem seja apresentado aos alunos o caso clássico em que a ocorrência dos eventos em um dado não viciado são equiprováveis, ou seja, cada face de um dado tem a mesma chance de sair voltada para cima em relação a outra. Para isso, segue o planejamento da aula envolvendo o jogo de dados.

PÚBLICO ALVO

Alunos da 2ª Série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade será necessário uma hora/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Espera-se que os alunos tenham conhecimentos prévios sobre noções de definição clássica de probabilidade e saibam diferenciar números de casos possíveis e números de casos favoráveis em um determinado evento.

OBJETIVOS

Aplicar a definição clássica de probabilidade de forma simples, analisar uma sequência de eventos e verificar qual dentre as situações propostas representam um jogo justo.

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade.

METODOLOGIA

Serão apresentadas aos alunos, três situações de jogos com auxílio de um dado. Depois de apresentar cada uma das situações, serão criados três grupos e cada grupo lançará o dado 30 vezes e será registrado os resultados obtidos em cada uma das situações, vejamos a seguir a dinâmica de cada jogo.

1ª Situação: Um jogador paga 10 reais e lança um dado, não viciado, de seis faces. O jogador receberá como premiação 3 vezes o valor da face voltada para cima, então:

- Se a face voltada para cima for 1, o apostador recebe $3.1 = 3$ reais, ou seja, tem um prejuízo de 7 reais $(3 - 10 = -7)$.
- Se a face voltada para cima for 2, o apostador recebe $3.2 = 6$ reais, ou seja, tem um prejuízo de 4 reais $(6 - 10 = -4)$.
- Se a face voltada para cima for 3, o apostador recebe $3.3 = 9$ reais, ou seja, tem um prejuízo de 1 real $(9 - 10 = -1)$.
- Se a face voltada para cima for 4, o apostador recebe $3.4 = 12$ reais, ou seja, tem um lucro de 2 reais $(12 - 10 = 2)$.
- Se a face voltada para cima for 5, o apostador recebe $3.5 = 15$ reais, ou seja, tem um lucro de 5 reais $(15 - 10 = 5)$.

- Se a face voltada para cima for 6, o apostador recebe $3.6 = 18$ reais, ou seja, tem um lucro de 8 reais $(18 - 10 = 8)$.

2ª: Situação: Um jogador paga 10 reais e lança um dado, não viciado, de seis faces. O jogador receberá como premiação 3 vezes o valor da face voltada para cima menos um, então:

- Se a face voltada para cima for 1, o apostador recebe $3.1 - 1 = 2$ reais, ou seja, tem um prejuízo de 8 reais $(2 - 10 = -8)$.

- Se a face voltada para cima for 2, o apostador recebe $3.2 - 1 = 5$ reais, ou seja, tem um prejuízo de 5 reais $(5 - 10 = -5)$.

- Se a face voltada para cima for 3, o apostador recebe $3.3 - 1 = 8$ reais, ou seja, tem um prejuízo de 2 reais $(8 - 10 = -2)$.

- Se a face voltada para cima for 4, o apostador recebe $3.4 - 1 = 11$ reais, ou seja, tem um lucro de 1 real $(11 - 10 = 1)$.

- Se a face voltada para cima for 5, o apostador recebe $3.5 - 1 = 14$ reais, ou seja, tem um lucro de 4 reais $(14 - 10 = 4)$.

- Se a face voltada para cima for 6, o apostador recebe $3.6 - 1 = 17$ reais, ou seja, tem um lucro de 7 reais $(17 - 10 = 7)$.

3ª: Situação: Um jogador paga 10 reais e lança um dado, não viciado, de seis faces. O jogador receberá a premiação da seguinte forma: Se sair a face 1 voltada para cima, ele vai pagar 5 reais a mais para a banca, se sair a face 2 voltada para cima, ele não paga nada a mais e não recebe nada, se sair a face 3 voltada para cima, ele recebe 5 reais da banca, se sair a face 4 voltada para cima, ele recebe 15 reais da banca, se sair a face 5 voltada para cima, ele recebe 20 reais da banca e se sair a face 6 voltada para cima, ele recebe 25 reais da banca, da seguinte forma:

- Se a face voltada para cima for 1, o apostador paga 5 reais a mais, ou seja, tem um prejuízo de 15 reais $(-5 - 10 = -15)$.

- Se a face voltada para cima for 2, o apostador não paga nada a mais e nem recebe, ou seja, tem um prejuízo de 10 reais $(0 - 10 = -10)$.

- Se a face voltada para cima for 3, o apostador recebe 5 reais, ou seja, tem um prejuízo de 5 reais ($5 - 10 = -5$).
- Se a face voltada para cima for 4, o apostador recebe 15 reais, ou seja, tem um lucro de 5 reais ($15 - 10 = 5$).
- Se a face voltada para cima for 5, o apostador recebe 20 reais, ou seja, tem um lucro de 10 reais ($20 - 10 = 10$).
- Se a face voltada para cima for 6, o apostador recebe 25 reais, ou seja, tem um lucro de 15 reais ($25 - 10 = 15$).

Separados os grupos, os dados serão lançados e posteriormente cada grupo apresenta os resultados obtidos. Após análise dos resultados de cada situação, os alunos deverão responder as seguintes questões:

a) Em cada uma das situações de jogo, qual a probabilidade do jogador obter lucro?

b) Qual jogo é mais vantajoso?

c) Qual jogo é menos vantajoso?

Para responder o item a), é necessário que o aluno identifique dentro do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o número de casos possíveis $n(\Omega) = 6$ e número de casos favoráveis sendo a escolha de uma das faces do dado para apostar durante a rodada, como existe em cada caso 3 chances de obter lucro, logo $n(A) = 3$, então:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 50\%.$$

Portanto, 50% de chances obter lucro com face escolhida estar voltada para cima em cada uma das situações.

Para responder os itens b) e c), como o espaço amostral relativo a face obtida no lançamento de um dado não viciado, é equiprovável, espera-se que os alunos concluam que na primeira situação o apostador tende a levar vantagem, na segunda situação o apostador tende a levar prejuízo e na terceira situação observa-se um jogo justo, sem uma grande margem para lucro ou prejuízo. Veja a seguinte situação:

Suponha que um dado honesto seja lançado seis vezes e que nesses seis lançamentos cada uma das faces saia uma vez voltada para cima. Então, o jogador obteria os seguintes resultados:

- **1ª Situação:** $(-7) + (-4) + (-1) + (2) + (5) + (8) = +3$, ou seja, lucro de 3 reais.
- **2ª Situação:** $(-8) + (-5) + (-2) + (1) + (4) + (7) = -3$, ou seja, prejuízo de 3 reais.
- **3ª Situação:** $(-15) + (-10) + (-5) + (5) + (10) + (15) = 0$, ou seja, nem lucro, nem prejuízo.

Podemos observar que, na 3ª situação para cada valor de prejuízo existe com a mesma probabilidade um valor de lucro simétrico, enquanto na 1ª situação, para cada valor de prejuízo existe um valor de lucro (comparando os módulos) uma unidade maior, com mesma probabilidade, o que torna a 1ª situação mais vantajosa em relação a 3ª situação. No caso da 2ª situação, para cada valor de prejuízo existe um valor de lucro (comparando os módulos) uma unidade menor, com mesma probabilidade.

Portanto, é esperado que os alunos observem essa relação e indiquem que a 1ª situação é mais vantajosa, enquanto a 2ª situação seja identificada como menos vantajosa.

MATERIAIS

Quadro, pincel, dados, caneta e caderno.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua participação e empenho durante as atividades propostas e discussão de resultados.

4.2.2 Jogo Par ou Ímpar

Geralmente muito utilizado em diversas atividades do nosso cotidiano, onde é importante escolher uma equipe ou pessoa que irá começar uma brincadeira ou um jogo, o "par ou ímpar" é muito popular e é comum refletir se representa um jogo justo ou não, se é possível determinar um padrão e buscar uma regularidade de vitórias neste jogo.

Nos jogos de várzea de futebol e nas "peladas" ou "rachas", jogos de futebol entre amigos é comum utilizar o par ou ímpar para decidir quem escolhe um determinado jogador para o seu time ou quem começa com a bola, mas fica uma pergunta, porque o futebol profissional começa sempre com cara e coroa e não par ou ímpar? Por esse motivo, torna-se interessante mostrar aos alunos que o jogo do par ou ímpar pode não ser um jogo tão justo. Nesta atividade, iremos comparar duas situações que podem ser observadas em um jogo de par ou ímpar e tentar mostrar aos alunos que o jogo pode não ser tão justo, para isto iremos propor a seguinte aula:

PÚBLICO-ALVO

Alunos da Segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade serão necessárias duas horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Espera-se que os alunos tenham conhecimentos prévios sobre noções de definição clássica de probabilidade e saibam diferenciar números de casos possíveis e números de casos favoráveis em um determinado evento.

OBJETIVOS

Aplicar a definição clássica de probabilidade de forma simples, observar a diferença do espaço amostral nas duas situações que serão apresentadas, analisar uma sequência de eventos e verificar dentre as situações propostas, qual representa um jogo justo.

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade.

METODOLOGIA

Serão propostas duas dinâmicas, na primeira situação, cada aluno deverá jogar o par ou ímpar contra outro colega de classe, podendo escolher as seguintes opções, colocar 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos. Na segunda situação, cada aluno deverá jogar contra outro colega de classe, tendo que colocar pelo menos um dedo, ou seja, escolher a seguinte opção, colocar 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos. Em cada uma das situações, os alunos deverão registrar em uma tabela, quantas vezes a pessoa que escolheu par ganhou e quantas vezes a pessoa que escolheu ímpar ganhou. Após a análise dos dados serão realizados os seguintes questionamentos aos alunos:

a) Os dois jogos são justos?

b) É possível estabelecer uma estratégia para vencer o jogo do par ou ímpar?

É esperado que no item a), que os alunos ao serem apresentados aos espaços amostrais das duas situações e comparando com a análise dos resultados obtidos durante a dinâmica, percebam que a 1ª situação representa um jogo mais justo, pois analisando o espaço amostral, podemos esperar a chance de a soma ser par, ser igual a chance de a soma ser ímpar, veja o espaço amostral da primeira situação:

$$\Omega_1 = \{(i,j), i,j \in \{0,1,2,3,4,5\}\}.$$

Como podemos ver das 36 possibilidades do espaço amostral, em 18 delas a soma é par e as outras 18 são ímpares, sendo assim a probabilidade de o jogador escolher par e ganhar é 50% e de o jogador escolher par e perder também é 50%. Portanto é provável que em uma série de várias rodadas jogando o par ou ímpar que essa série represente um equilíbrio entre o número de jogadores apostaram no resultado par e entre os jogadores que apostaram no resultado ímpar.

Na segunda situação, quando o jogador deve escolher colocar pelo menos um dedo para jogar, podemos ver um desequilíbrio dentre as possibilidades do espaço amostral, como podemos ver analisando os possíveis resultados na representação a seguir:

$$\Omega_2 = \{(i,j), i,j \in \{1,2,3,4,5\}\}.$$

Neste caso, podemos ver que as chances de obter um resultado par em uma rodada é maior e portanto, a probabilidade de uma rodada terminar com uma soma par é de $\frac{13}{25} = 52\%$ e a probabilidade de uma rodada terminar com a soma ímpar é de $\frac{12}{25} = 48\%$, o que pode levar aos alunos a ter uma pequena impressão de que o segundo jogo não seja justo.

No item b), analisando a hipótese do jogo dois não ser justo, é provável que alguns alunos tentem buscar algumas formas de encontrar padrões ou elaborar alguma estratégia para buscar a vitória no jogo do par ou ímpar. É importante discutir com os alunos, que uma possibilidade seria de que o jogador, sabendo do fato ocorrido no espaço amostral da segunda situação, induza o outro jogador a escolher pelo menos um dedo para jogar o par ou ímpar. Posteriormente deve escolher se quer par ou ímpar e para aumentar suas chances de vitória é importante adotar a seguinte estratégia. Se escolher par, deve colocar um número ímpar de dedos, pois se outro adversário colocar uma quantidade também ímpar terá 60% de chances de vitória, pois existem 3 possibilidades dentre 5 disponíveis. Em outras palavras, se ele quer que a soma seja par, é melhor colocar uma quantidade ímpar, pois outro jogador tem 3 possibilidades de números ímpares para jogar, o que representa uma chance maior de sair vencedor na rodada.

Caso o jogador escolha ímpar, a melhor opção é colocar uma quantidade par de dedos, pois novamente, existe 3 possibilidades em 5 de o adversário colocar um número ímpar e todo número ímpar quando somado com um número par gera um resultado ímpar. Portanto, é esperado que os alunos consigam encontrar uma estratégia para vencer no jogo do par ou ímpar.

MATERIAIS

Quadro, pincel, caneta e caderno.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua participação e empenho durante as atividades propostas e discussão de resultados.

4.2.3 Loteria: Mega-Sena

Nesta 3ª atividade, iremos falar sobre outro jogo muito comum no cotidiano dos alunos, as apostas em jogos da Mega-Sena. É importante ressaltar que apostar na Mega-Sena ou em qualquer jogo lícito de apostas só é permitido para pessoas maiores de 18 anos. Porém, é fato que os alunos do Ensino Médio, já tenham conhecimento sobre o jogo, conheçam pessoas da família que apostam nestes jogos e então é importante abordar o assunto e principalmente orientar sobre os riscos do investimento em jogos de apostas.

Um dos papéis do professor na educação é de orientar aos alunos sobre os caminhos a escolher com relação ao dinheiro que eles irão ganhar com suas profissões, mas é importante deixar claro que em algum momento ele vai vencer alguma partida e deixar a sensação de que possa obter lucros fazendo apostas, porém, é fácil ver que a banca não quer entrar no jogo para perder, então é preciso ter cuidado para não ficar sem capital e ter a consciência de que a aposta em jogos, na maioria das vezes representa uma maneira subjetiva de iludibriar o apostador. Neste sentido, segue o plano de aula sobre apostas em jogos da Mega-Sena, com foco em apostas com maior chance de retorno, no caso, apostas em 15 dezenas de uma cartela com 60 números.

PÚBLICO-ALVO

Alunos da Segunda série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade serão necessárias duas horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Espera-se que os alunos tenham conhecimentos prévios sobre noções de definição clássica de probabilidade e saibam diferenciar números de casos possíveis e números de casos favoráveis em um determinado evento. Nesta atividade, é importante conhecer sobre o teorema da multiplicação e sobre probabilidade do evento complementar.

OBJETIVOS

Aplicar a definição clássica de probabilidade de forma simples, bem como realizar aplicações de analise combinatória, mais precisamente da combinação de eventos, com a finalidade de obter um modelo para calcular as chances de não ganhar em nenhuma rodada da Mega-Sena.

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade, Combinações simples, Propriedades fundamentais da Probabilidade (Probabilidade de um evento complementar e teorema da multiplicação).

METODOLOGIA

Serão apresentados aos alunos as seguintes situações:

1º Momento: Inicialmente, iremos apresentar aos alunos as regras da Mega-Sena, qual o valor atual das apostas e como é realizado o cálculo desses valores, quais tipos de apostas podem ser realizadas, quais as possibilidades de vitória e que os alunos podem obter um retorno da aposta, acertando 6, 5 ou 4 dezenas, ou seja, acertando a Sena, a quina ou a quadra. Também deverá ser apresentado aos alunos, como é realizado o cálculo das probabilidades para analisar as chances de vitória em cada um dos tipos de apostas, para isso iremos apresentar aos alunos a tabela representada logo abaixo:

Tabela 4.1: Cálculo da probabilidade de acertar na sena, quina ou quadra em um jogo da mega-sena.

Quantidade de números apostados	Valor da aposta	Sena	Quina	Quadra
6	$4,50 \cdot C_6^6 =$ $4,50 \cdot 1 = 4,50$	$\frac{C_6^6}{C_{60}^6} = \frac{1}{50.063.860}$	$\frac{C_6^5 \cdot C_{54}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{154.518}$	$\frac{C_6^4 \cdot C_{54}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{2.332}$
7	$4,50 \cdot C_7^6 =$ $4,50 \cdot 7 = 31,50$	$\frac{C_7^6}{C_{60}^6} = \frac{1}{7.151.980}$	$\frac{C_7^5 \cdot C_{53}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{44.981}$	$\frac{C_7^4 \cdot C_{53}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{1.038}$
8	$4,50 \cdot C_8^6 =$ $4,50 \cdot 28 = 126,00$	$\frac{C_8^6}{C_{60}^6} = \frac{1}{1.787.995}$	$\frac{C_8^5 \cdot C_{52}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{17.192}$	$\frac{C_8^4 \cdot C_{52}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{539}$
9	$4,50 \cdot C_9^6 =$ $4,50 \cdot 84 = 378,00$	$\frac{C_9^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{595.998}$	$\frac{C_9^5 \cdot C_{51}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{7.791}$	$\frac{C_9^4 \cdot C_{51}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{312}$
10	$4,50 \cdot C_{10}^6 =$ $4,50 \cdot 210 = 945,00$	$\frac{C_{10}^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{238.399}$	$\frac{C_{10}^5 \cdot C_{50}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{3.973}$	$\frac{C_{10}^4 \cdot C_{50}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{195}$
11	$4,50 \cdot C_{11}^6 =$ $4,50 \cdot 462 = 2.097,00$	$\frac{C_{11}^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{108.363}$	$\frac{C_{11}^5 \cdot C_{49}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{2.211}$	$\frac{C_{11}^4 \cdot C_{49}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{129}$
12	$4,50 \cdot C_{12}^6 =$ $4,50 \cdot 924 = 4.158,00$	$\frac{C_{12}^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{54.182}$	$\frac{C_{12}^5 \cdot C_{48}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{1.317}$	$\frac{C_{12}^4 \cdot C_{48}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{90}$
13	$4,50 \cdot C_{13}^6 =$ $4,50 \cdot 1.716 = 7.722,00$	$\frac{C_{13}^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{29.175}$	$\frac{C_{13}^5 \cdot C_{47}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{828}$	$\frac{C_{13}^4 \cdot C_{47}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{65}$
14	$4,50 \cdot C_{14}^6 =$ $4,50 \cdot 3.003 = 13.513,50$	$\frac{C_{14}^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{16.671}$	$\frac{C_{14}^5 \cdot C_{46}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{544}$	$\frac{C_{14}^4 \cdot C_{46}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{48}$
15	$4,50 \cdot C_{15}^6 =$ $4,50 \cdot 5.005 = 22.522,50$	$\frac{C_{15}^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{10.003}$	$\frac{C_{15}^5 \cdot C_{45}^1}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{370}$	$\frac{C_{15}^4 \cdot C_{45}^2}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{37}$

2º Momento Nesta etapa utilizaremos a cartela da Mega-Sena e será solicitado aos alunos que escolham e marquem 15 dezenas dessa cartela, mais uma vez será reforçada a probabilidade de em um evento A de serem sorteadas as 6 dezenas dentre as 15 escolhidas, neste caso:

$$P(A) = \frac{C_{15}^6}{C_{60}^6} \approx \frac{1}{10003}.$$

E devemos observar ainda a probabilidade de um apostador não acertar as 6 dezenas, mesmo escolhendo 15 dezenas, e vamos desconsiderar também as chances de acertar na quadra ou na quina, ou seja, o foco neste momento da atividade é acertar as 6 dezenas, neste caso, como $0 \leq P(A) \leq 1$, então, usando o cálculo da probabilidade de um evento complementar, temos:

$$P(A^c) = 1 - \frac{C_{15}^6}{C_{60}^6} \approx 1 - \frac{1}{10003} = \frac{10002}{10003}.$$

Seguindo este raciocínio, mostraremos aos alunos que é possível criar uma fórmula para calcular a Probabilidade de não vencer em n rodadas da Mega-Sena, para isso, utilizando o teorema da multiplicação, iremos construir esta fórmula da seguinte forma:

- Na primeira rodada de apostas, o apostador tem $p(1) = \frac{10002}{10003}$ de não acertar as 6 dezenas e perder na primeira rodada.
- Na segunda rodada de apostas, como o sorteio é realizado com reposição das bolas e fica indiferente apostar a mesma cartela ou outras dezenas, pelo teorema da multiplicação, o apostador tem $p(2) = \frac{10002}{10003} \cdot \frac{10002}{10003} = \left(\frac{10002}{10003}\right)^2$ de não acertar as 6 dezenas e perder na primeira e na segunda rodada.
- Na n-ésima rodada de apostas, como o sorteio é realizado com reposição das bolas e fica indiferente apostar a mesma cartela ou outras dezenas, pelo teorema da multiplicação, o apostador tem $p(n) = \frac{10002}{10003} \cdot \frac{10002}{10003} \cdot ... \cdot \frac{10002}{10003} = \left(\frac{10002}{10003}\right)^n$ de não acertar as 6 dezenas e perder na primeira e na segunda rodada, ... e na n-ésima rodada.

Portanto, temos a seguinte fórmula para representar a probabilidade de não vencer em n rodadas.

$$p(n) = \left(\frac{10002}{10003}\right)^n.$$

E para finalizar esta etapa apresentaremos aos alunos uma tabela de investimentos em n rodadas nesta modalidade de jogo, juntamente com as chances de não ganhar em nenhuma das n rodadas, desconsiderando a inflação dos valores e possíveis aumentos no valor das apostas, neste caso estamos apresentando os valores das apostas válidas para o mês de junho de 2020. Vejamos a tabela a seguir:

Tabela 4.2: Não acertar as 6 dezenas apostando em 15 dezenas da Mega-Sena

Rodada	Investimento	Probabilidade de não acertar as 6 dezenas
1	22 522,50	99,99%
2	45 045,00	99,98%
3	67 576,50	99,97%
4	90 090,00	99,96 %
5	112 612,50	99,95%
6	135 135,00	99,94%
7	157 657,50	99,93%
8	180 180,00	99,92%
9	202 702,50	99,91%
10	225 225,00	99,90%
n	22 522,50.n	$\left(\frac{10002}{10003}\right)^n$

Após a apresentação destes resultados passaremos para o terceiro momento.

3º Momento: Nesta etapa, iremos realizar uma simulação do jogo com os alunos, da seguinte forma: Cada aluno anota 10 cartelas escolhendo 15 dezenas entre as 60 disponíveis de uma cartela da Mega-Sena, podendo modificar os números escolhidos, ou manter com a mesma cartela até o final da 10ª rodada. Posteriormente o professor sorteia as 6 dezenas e a cada uma das dez rodadas verifica se houve ganhador ou não. No final das dez rodadas e com base nos resultados obtidos, serão lançadas as seguintes perguntas:

a) Quantas cartelas foram premiadas com a quadra?

b) Quantas cartelas foram premiadas com a quina?

c) O prêmio máximo saiu?

Espera-se que os alunos vejam o quanto é difícil acertar as 6 dezenas com uma cartela, mesmo que nesta cartela sejam possível escolher 15 números. É importante, neste momento, que seja feito um comparativo com as possibilidades e as chances de não ganhar em n rodadas que foram calculadas no 2º momento.

MATERIAIS

Quadro, pincel, caneta, caderno, cartelas da Mega-Sena e globo de bingo.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua participação e empenho durante as atividades propostas e discussão de resultados.

4.2.4 Simulação de aposta em jogos online

Como ja foi dito anteriormente no capítulo sobre apostas online, esta modalidade vem crescendo muito nos últimos tempos e se tornando muito comum entre todas as faixas etárias de apostadores do mundo inteiro. Isso ocorre devido a sua facilidade de acesso, pois para fazer apostas online é necessário apenas fazer um cadastro no site de apostas, ser maior de 18 anos e começar a apostar. Dependendo do jogo é possível acompanhar em tempo real o que está acontecendo e os resultados obtidos, isso leva a sensação de que o jogo é extremamente justo e muitas pessoas sequer tem a atitude de pesquisar, verificar os bastidores dos jogos de apostas online. Por isso, elaboramos um plano de aula com a intensão de mostrar um pouco da realidade sobre este processo aos alunos e de forma lúdica, proporcionar uma relação direta da atividade com o conteúdo de probabilidades de acordo com a seguinte proposta de simulação de aposta em jogo online.

PÚBLICO ALVO

Alunos da 2ª Série do Ensino Médio.

DURAÇÃO

Para conclusão da atividade serão necessárias duas horas/aula.

PRÉ-REQUISITOS

Espera-se que os alunos tenham conhecimentos prévios sobre noções de definição clássica de probabilidade e saibam diferenciar números de casos possíveis e números de casos favoráveis a um determinado evento, também é necessário conhecer sobre razão inversamente proporcional.

OBJETIVOS

Aplicar a definição clássica de probabilidade de forma simples, analisar uma sequência de eventos e verificar se no final das aplicações os jogos de apostas online são justos e observar os lucros obtidos pela banca (site de apostas).

CONTEÚDOS

Definição clássica de Probabilidade e razão entre grandezas inversamente proporcionais.

METODOLOGIA

1º Momento: Vamos inicialmente apresentar aos alunos a simulação de um jogo entre duas equipes, time A x time B onde existe a possibilidade de obter três resultados: vitória do time A, vitória do time B ou empate entre as duas equipes. Neste caso, iremos representar as probabilidades dos resultados pela proporção das bolas coloridas dentro de uma caixa, de onde posteriormente uma bola será retirada representando o resultado obtido.

Serão colocadas em uma caixa 20 bolas coloridas, das quais, 9 bolas verdes representam proporcionalmente as chances de vitória do time A, 4 bolas vermelhas representam proporcionalmente as chances de vitória do time B e 7 bolas brancas representam proporcionalmente as chances de empate entre as duas equipes. Obtendo as seguintes probabilidades de vitórias para cada situação:

- Probabilidade de vitória do time A: $P(A) = \frac{9}{20} = 0,45$, ou seja, 45%.
- Probabilidade de vitória do time B: $P(B) = \frac{4}{20} = 0,20$, ou seja, 20%.
- Probabilidade de vitória de empate entre as duas equipes: $P(E) = \frac{7}{20} = 0,35$, ou seja, 35%.

2º Momento: Nesta etapa, iremos falar um pouco sobre como funcionam os jogos online, apresentar a definição de odds de acordo como foi apresentado na seção 3.6 desta dissertação, dizer aos alunos que embora odds e probabilidades tenham o mesmo significado na língua inglesa, as odds neste caso, serão as cotações que serão aplicadas a cada elemento que será apostado. Apresentar aos alunos as formas das odds disponíveis em cada site (decimal, fracionária e americana), neste caso, iremos focar nas odds decimais e mostrar ainda que elas são apresentadas ao apostador na sua forma inversa, ou seja, quanto maior a probabilidade de vitória em um jogo, menor será o retorno obtido e posteriormente apresentar a forma decimal de calcular as odds do jogo proposto.

É importante dizer aos alunos antes de iniciar o cálculo das odds, que em todos os sites de apostas a soma decimal não representará 100% do valor, como podemos obter somando apenas as probabilidades, pois a banca inflaciona as probabilidades com a finalidade de obter lucros sobre as apostas. Neste momento iremos inflacionar as probabilidades em 10%, da seguinte forma:

- Inflacionando em 10% as chances de vitória do time A: $45\%.(1+10\%) = 0,45.(1,1) = 0,495$.
- Inflacionando em 10% as chances de vitória do time B: $20\%.(1+10\%) = 0,2.(1,1) = 0,220$.
- Inflacionando em 10% as chances de empate: $35\%.(1+10\%) = 0,35.(1,1) = 0,385$.

Após obter o valor das probabilidades iremos calcular o valor das odds, neste caso obtendo o inverso das probabilidades inflacionadas:

- Odds de vitória do time A: $\frac{1}{0,495} \approx 2,02$.
- Odds de vitória do time B: $\frac{1}{0,22} \approx 4,55$.
- Odds de empate: $\frac{1}{0,385} \approx 2,60$.

Na prática, o valor recebido em caso de vitória será representado da seguinte forma, o apostador aposta x reais e o lucro obtido será calculado multiplicando o valor apostado pela odds e subtraindo o valor investido, assim:

- Lucro obtido em caso de aposta na vitória do time A: $x.2,02 - x = (2,02-1)x = 1,02x$.
- Lucro obtido em caso de aposta na vitória do time B: $x.4,55 - x = (4,55-1)x = 3,55x$.

- Lucro obtido em caso de aposta no empate entre as duas equipes: $x.2,60 - x = (2,60 - 1)x = 1,60x$.

Faremos o seguinte exemplo para os alunos, cada apostador aposta 10 unidades monetárias em um dos resultados, qual será o valor recebido por cada apostador em uma rodada. Neste caso, temos:

- Lucro obtido em caso de aposta na vitória do time A: $1,02.10 = 10,20$ unidades monetárias de lucro.
- Lucro obtido em caso de aposta na vitória do time B: $3,55.10 = 35,50$ unidades monetárias de lucro.
- Lucro obtido em caso de aposta no empate entre as duas equipes: $1,60.10 = 16,00$ unidades monetárias de lucro.

3º Momento: Faremos uma simulação da atividade proposta do seguinto modo:

- Cada aluno como apostador aposta 10 unidades monetárias em um dos resultados;
- Realizadas as apostas será sorteada uma das bolas da caixa, que determinará o resultado de vitória para o time A ou para o time B ou empate.
- Pedir para os alunos que anotem os respectivos resultados obtidos e registrar o lucro da banca na simulação.
- Repetir o procedimento 5 vezes, importante deixar claro aos alunos quanto a importância da reposição das bolas na urna após cada sorteio, para manter as respectivas probabilidades de cada evento.

Após a simulação da atividade, fazer um levantamento de dados obtidos durante a realização dos sorteios, fazendo as seguintes perguntas:

a) Quantos apostadores ficaram em lucro?

b) Quantos apostadores ficaram em prejuízo?

c) Qual o lucro total da banca?

4º Momento: Após fazer uma análise geral dos resultados obtidos, verificando o lucro total da banca e quantos jogadores ficaram em lucro ou prejuízo, deverá ser realizado um debate, ouvindo os alunos quanto a análise dos resultados, verificar se a longo prazo é possível obter lucro com essas apostas. A princípio é importante ressaltar que em alguns momentos, o jogador pode obter sucesso em algumas apostas, porém, a longo prazo, o lucro da banca sempre será maior pelo fato de inflacionar as odds, ou seja, inflacionar os resultados diminui o retorno médio dos jogadores e a longo prazo a banca estará em lucro.

Neste debate, é importante deixar claro aos alunos que, pela definição clássica, as bolas representam as probabilidades de chances de vitórias das equipes. Porém, em uma situação de jogo, em uma partida de futebol, por exemplo, o cálculo das probabilidades são realizados através de estimativa de resultados, vale inclusive citar o site da UFMG sobre probabilidades no futebol e dizer aos alunos que por trás dos resultados da probabilidade em jogos, existem equipes que são responsáveis por realizar as pesquisas, bem como para calcular as odds que são disponibilizadas no site de apostas.

MATERIAIS

Quadro, pincel, caneta, caderno, Caixa e bolas coloridas.

AVALIAÇÃO

O aluno será avaliado observando-se sua participação e empenho durante as atividades propostas e discussão de resultados.

Capítulo 5

Considerações Finais

Escolhemos quatro propostas para apresentar aos alunos um pouco da aplicação da Probabilidade associada a jogos e apostas, mas podemos observar que existe uma grande variedade de situações e problemas que poderíamos apresentar, com a finalidade de tornar as aulas de Matemática mais atrativas e mostrar um pouco mais sobre a Probabilidade aos alunos.

Infelizmente, devido a pandemia do coronavírus (Covid-19) que o ocasionou o fechamento temporário das escolas em nosso país, não foi possível apresentar as atividades aos alunos e também não foi possível realizar a apresentação de forma online. Mesmo assim, acreditamos que se essas atividades forem aplicadas aos alunos, com certeza serão atrativas e acreditamos na efetiva participação de todos, pois os alunos gostam muito de momentos diferentes, onde eles façam parte do processo de aprendizagem e as propostas apresentadas certamente proporcionarão momentos significativos de interação e aprendizagem. Atualmente se fala muito em sala de aula invertida e neste processo certamente o aluno será um grande protagonista desta atividade, onde ele deverá anotar os registros, simular uma aposta e trocar essa experiência com outros colegas. Nesse sentido, é possível acreditar na eficácia deste trabalho.

Outro fator importante, foi apresentar alguns modelos de problemas no capítulo de Propostas de aplicações de Probabilidade, pois é importante mostrar aos alunos que o que ele aprende em sala de aula é apenas o início de tudo e que ainda existe muito a ser desenvolvido principalmente no campo da Probabilidade, devido ao avanço das novas tecnologias e de recursos computacionais.

Portanto, podemos dizer que é possível acreditar na educação como uma fonte ampla de desenvolver o conhecimento e que é possível tornar o ambiente da sala de aula mais prazeroso para todos os envolvidos neste processo. Porém, cabe ao professor buscar essa essência em seus alunos, mostrando as relações dos conteúdos com o seu cotidiano e abrindo as portas para que cada indivíduo seja capaz de aprofundar sobre o conhecimento ou que simplesmente estimule a curiosidade, mostrando aos seus alunos o quanto é possível evoluir e avançar como cidadão responsável e criativo.

Ensinar não é simplesmente transmitir conteúdo, o mais importante neste processo, é proporcionar momentos de aprendizado colaborativo, para que todos possam evoluir com equidade.

Referências Bibliográficas

[1] ACERGO, Priscila, BERLANDA, Juliane C..*A história da Matemática como meio de interlocução no ensino da probabilidade.* Universidade Federal de Santa Maria, 2016. Disponível em: <sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6356_2906_ID.pdf>. Acesso em 12/03/2020.

[2] ANDRADE, Rafael T. B. de. *A Probabilidade Aplicada aos Jogos de Azar.* Universidade Federal da Paraíba, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150210331>. Acesso em 12/07/2020.

[3] APOSTAGOLOS,*O que são Cotações e como Funcionam?*. Apostagolos.com, 2008. Disponível em: <https://apostagolos.com/o-que-sao-cotacoes-e-como-funcionam/>. Acesso em 05/04/2020.

[4] BODOG, *Poker - Jogar poker online no Brasil*, 2020. Disponível em: <https://www.bodog.com/poker>. Acesso em 05/04/2020.

[5] BORGES, Pablo dos S.. *Jogo do Par ou Ímpar.* Universidade Federal de Goiás, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1215>. Acesso em 20/06/2020.

[6] BOYER, Carl B.. *História da Matemática.* Tradução Elza F. Gomide, 2ª ed. São Paulo: Blücher / Edusp, 1996.

[7] BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC.* Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/ BNCC _EI _EF _110518 _versaofinal _site.pdf>. Acesso em 14/04/2020.

[8] BRASIL, Ministério da Educação. *O sistema monetário nacional.* Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000016828.PDF>. Acesso em 14/04/2020.

[9] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC, 1998. 148p.Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 10/02/2020.

[10] CAIXA, Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/ wps/ portal/ loterias/ landing/ megasena/> Acesso em: 14/02/2020.

[11] CAIXA, Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/ wps/ portal/ loterias/ landing/ quina/> Acesso em: 14/02/2020.

[12] CAIXA, Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/ wps/ portal/ loterias/ landing/ lotofacil/> Acesso em: 14/02/2020.

[13] CALABRIA, Angélica R., CAVALARI, Mariana F. *Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades.* X Seminário Nacional de História da Matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática. Campinas, 2013.

[14] CALCIOPÉDIA, *Times históricos: Itália 1968-1970.* calciopedia.com.br, 2013. Disponível em: <https://calciopedia.com.br/2013/11/times-historicos-italia-1968-1970.html>. Acesso em 15/05/2020.

[15] CANTON, Ana Maria. (Org.) *A Rede Lotérica no Brasil.* Brasília, DF: Ipea, 2010. 54p.

[16] CARNEIRO, Cézar A. G.. *Probabilidades no futebol.* Universidade Federal de São João Del-Rei, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94267>. Acesso em 20/06/2020.

[17] CARVALHO, Paulo C. P.. *Métodos de Contagem e Probabilidade.* 1ª Edição. Rio de Janeiro, IMPA, 2017 (PIC - OBMEP).

[18] CHAGAS, Jonathan Machado.. *A (im)possibilidade de regulamentação das apostas esportivas no ordenamento jurídico brasileiro.* 2016. 88 f. Monografia (Graduação) - Curso de Direito, Centro de Ciências Jurídicas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

[19] CYMBALISTA,Melvin. *Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos.* Tradução de Pedro Luiz de Oliveira Costa Neto. São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1974.

[20] DANTAS, Carlos A. B.. *Probabilidade: Um curso introdutório.* 2ª Edição - São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004 (Acadêmica, 10).

[21] FLORENZANO, M.B.B. *Fontes sobre a origem da moeda: apresentação crítica.* Rev. do Museu de Arqueologia e Etnologia, São Paulo, 11: 201-211, 2001.

[22] JAMES, Barry R.. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*, IMPA, 2ª Edição, Rio de Janeiro - RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1996) (Projeto Euclides).

[23] JÚNIOR, Valdivino V.. *Modelos Probabilísticos.* Anais da XXVII Semana do IME/UFG e IV Seminário de Pesquisa e Pós-Graduação do IME/UFG, 2016. Disponível em: <https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/34/o/SEMANAIME2016.pdf>. Acesso em 12/03/2020.

[24] LEBENSZTAYN, E.. *Exercícios de probabilidade.* 2012. Disponível em <http://www.ime. usp.br/ fmachado/MAE221/LivroElcio.pdf>. Acesso em 03/03/2020.

[25] LEBENSZTAYN, E., COLETTI, C. F.. *Probabilidade: Teoria e Exercícios.* 2012. Disponível em <http://professor.ufabc.edu.br/ rafael.grisi/wp-content/uploads/2019/10/CristianElcio.pdf>. Acesso em 04/05/2020.

[26] LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio* - Volume 2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. 7ª Edição. 7ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016 (Coleção Professor de Matemática).

[27] LOPES, José M., TEODORO, João V., REZENDE, Josiane de C.*Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio.* Zetetiké - FE/Unicamp - v. 19, n. 36 - jul/dez 2011 . Campinas, 2011. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br > index.php > zetetike > article > download>

[28] MEYER, Paul L.. *Probabilidade: Aplicações à Estatística.* Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho, 2ª Edição, Rio de Janeiro - RJ. Livros técnicos e científicos Editora, 1995.

[29] MORGADO, Augusto César. *Análise Combinatória e Probabilidade* / Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez. 10ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2016 (Coleção Professor de Matemática).

[30] MORGADO, Augusto César.. *Matemática Discreta.* / Augusto César Morgado, Paulo Cezar Pinto Carvalho. 1ª Edição. Rio de Janeiro, SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[31] NEMITZ, Vanderlei. *Matemática: Ensino Médio* - Volume 7 e 8 / Vanderlei Nemitz, Walderez Soares Melão: reformulação dos originais de Jorge Luiz Farago, Lúcio Nicolau dos Santos Carneiro; Ilustrações Divo. - Curitiba: Positivo, 2016.

[32] NETO, Ângelo P., NETO, Antônio C. M. *Módulo de Princípios Básicos de Contagem.* Portal da Matemática - OBMEP. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2005. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/>. Acesso em 28/09/2020.

[33] ODDSSHARK*Probabilidades e os diferentes formatos de odds.* Oddsshark.com, 2008. Disponível em: <https://www.oddsshark.com/br/guia-de-apostas/probabilidades-e-os-diferentes-formatos-de-odds>. Acesso em 05/04/2020.

[34] POKERSTARS, *As Regras de Poker Online*, 2001. Disponível em: <https://www.pokerstars.com/br/poker/games/rules/>. Acesso em 16/05/2020.

[35] SALVARO, Richard de F.. *Perspectivas de tributação com a legalização das apostas esportivas no Brail.* Universidade do extremo sul catarinense, UNESC 2019. Disponível em: <http://repositorio.unesc.net/handle/1/7442>. Acesso em 12/07/2020.

[36] SILVA, Angélica P. da. *Jogos de loteria: Uma aplicação de probabilidade.* Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170480202>. Acesso em 21/05/2020.

[37] SILVEIRA, J. F. P. DA. *Início da Matematização das Probabilidades.* 2001. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/histo2c.html>. Acesso em 12/02/2020.

[38] SPORTINGBET *Apostas em futebol.* sports.sportingbet.com, 2005. Disponível em: <https://sports.sportingbet.com/pt-br/sports/futebol-4>. Acesso em 05/04/2020.

[39] TITANPOKER, *Guia do Texas hold'em poker*, 2013. Disponível em: <http://www.titanpoker.com/pt/games/texas-holdem>. Acesso em 05/04/2020.

[40] UFMG, *Como probabilidades podem ser usadas em um campeonato de futebol?* Probabilidades no Futebol. Universidade Federal de Minas Gerais, 2005. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/futebol/matematica/>. Acesso em 05/04/2020.