Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

TEORIA DO CÁLCULO FINANCEIRO PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

DANILO DE ARAÚJO MOURA

Goiânia

2020

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

Danilo de Araújo Moura

3. Título do trabalho

TEORIA DO CÁLCULO FINANCEIRO PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues**, **Coordenador de Pós-graduação**, em 19/08/2020, às 11:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **DANILO DE ARAÚJO MOURA**, **Discente**, em 19/08/2020, às 11:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1496709** e o código CRC **1C627863**.

Referência: Processo nº 23070.034916/2020-97 SEI nº 1496709

DANILO DE ARAÚJO MOURA

TEORIA DO CÁLCULO FINANCEIRO PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.

Goiânia

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Moura, Danilo de Araújo
Teoria do Cálculo Financeiro para Professores do Ensino Médio [manuscrito] / Danilo de Araújo Moura. - 2020.
VI, 103 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2020.
Bibliografia.

1. Juros Simples. 2. Juros Compostos. 3. Amortização. 4. Análise de Investimentos. I. Rodrigues, Paulo Henrique de Azevedo, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **13** da sessão de Defesa de Dissertação de **Danilo de Araújo Moura**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Ensino de Matemática**.

Aos onze dias do mês de agosto de dois mil e vinte, a partir das 15 **horas**, por meio de videoconferência devido a pandemia covid-19, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "TEORIA DO CÁLCULO FINANCEIRO PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Ivonildes Ribeiro Martins Dias (IME/UFG) e o membro titular externo o Professor Doutor Rogério Azevedo Rocha (UFT). Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **a**os onze dias do mês de agosto de dois mil e vinte.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **ROGÉRIO AZEVEDO ROCHA**, **Usuário Externo**, em 19/08/2020, às 06:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Henrique De Azevedo Rodrigues**, **Coordenador de Pós-graduação**, em 19/08/2020, às 11:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Ivonildes Ribeiro Martins Dias**, **Professor do Magistério Superior**, em 19/08/2020, às 11:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1496701** e o código CRC **BFCB0EE6**.

Referência: Processo nº 23070.034916/2020-97 SEI nº 1496701

Criado por sosteneg, versão 2 por sosteneg em 18/08/2020 21:07:35.

Danilo de Araújo Moura graduou-se em Licenciatura em Física pela Universidade de Brasília (UnB) em 2013, especializou-se em Políticas e Gestão em Segurança Pública pela Faculdade de Ciências de Wenceslau Braz (FACIBRA) em 2014, mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG) - polo Goiânia - em 2020, atuou como professor efetivo na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEE-DF) por dois anos, de 2015 a 2017, nas áreas de Física e Matemática, e, atualmente, é servidor efetivo da Secretaria de Estado de Justiça e Cidadania do Distrito Federal (SEJUS-DF).

Dedico esta dissertação aos meus pais (Francinete e Paulo Gardel) por todo investimento realizado em prol da minha formação, prezando sempre pela educação de qualidade sem medir esforços para tal.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, pela minha vida e pela vida da minha família, em especial, à minha mãe, Francinete, presente em todos os momentos me passando força e fé. Agradeço ao meu irmão, Diogo, pela prontidão e ajuda no que foi preciso. Agradeço ao meu pai, Paulo Gardel , pelas palavras de perseverança e coragem. Agradeço a todos os professores(as) do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Goiás, polo Goiânia, pelos conhecimentos e orientações passadas. Agradeço ao orientador Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues por toda ajuda e colaboração ao longo de todo o processo envolvendo a dissertação. Agradeço a Prof.ª Dra. Ivonildes Ribeiro Martins e ao Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha por fazerem parte da banca de dissertação. Agradeço aos discentes do PROFMAT pelos conhecimentos repassados. Por fim, agradeço aos membros do meu trabalho, em Brasília, por toda forma de contribuição.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é fornecer um material teórico de pesquisa para professores de Matemática do ensino médio sobre conceitos do Cálculo Financeiro, possíveis de serem trabalhados em sala de aula. Portanto, não tem como foco o viés prático do conteúdo, mas sim teórico, utilizando-se de lemas, teoremas e corolários, com as respectivas demonstrações, quando possível, na construção do material, e definições elementares, corroborando para corrigir possíveis dificuldades que eventualmente os professores do ensino médio tenham em relação a um conceito teórico específico mais formal no desenvolvimento da temática no ambiente escolar. Nela há também assuntos atuais como a nova modalidade olímpica brasileira, ou seja, as Olimpíadas Brasileiras de Educação Financeira (OBEF), bem como a perspectiva da mídia, do Ministério da Educação (MEC) e do Conselho Nacional de Educação (CNE) sobre a Educação Financeira, com o intuito informativo para os professores do ensino médio observarem a importância do desenvolvimento do Cálculo Financeiro. Além disso, como objetivo específico, haverá a resolução de sete problemas sobre conceitos teóricos do Cálculo Financeiro, trabalhados nos três primeiros capítulos, caso o docente queira, em princípio, desfrutar de um incremento mais usual do tema. Assim, a proposta geral é fornecer uma fonte de pesquisa teórica, sobre diversos conceitos do Cálculo Financeiro para os docentes, que tenham dificuldades em relação a conceitos teóricos do tema, nos tratamentos formais deles, contribuindo para exposição teórica e não prática em si.

Palavras-chave: Juros Simples, Juros Compostos, Amortização, Análise de Investimentos.

Abstract

The main objective of this dissertation is to provide theoretical research material for high school mathematics teachers on concepts of Financial Calculation, which can be worked on in the classroom. Therefore, it does not focus on the practical bias of the content, but rather theoretical, using mottos, theorems and corollaries, with the respective demonstrations, when possible, in the construction of the material, and elementary definitions, corroborating to correct possible difficulties that may high school teachers have in relation to a more formal specific theoretical concept in the development of the theme in the school environment. There are also current issues such as the new Brazilian Olympic modality, that is, the Brazilian Financial Education Olympics (OBEF), as well as the media perspective, from the Ministry of Education (MEC) and the National Education Council (CNE) on the Financial Education, with the purpose of informing high school teachers to observe the importance of the development of Financial Calculation. In addition, as a specific objective, there will be the resolution of seven problems on theoretical concepts of Financial Calculation, worked on in the first three chapters, if the teacher wants, in principle, to enjoy a more usual increase in the theme. Thus, the general proposal is to provide a source of theoretical research, on various concepts of Financial Calculation for teachers, who have difficulties in relation to theoretical concepts of the theme, in their formal treatments, contributing to theoretical and non-practical exposure itself.

Keywords: Simple Interest, Compound Interest, Amortization, Investment Analysis.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O Cálculo Financeiro é uma ferramenta que retrata bem as ideias das recorrências, as quais aplicaremos em algumas demonstrações ao longo da dissertação; do crescimento exponencial, estudado em juros compostos e dos logaritmos, no estudo da capitalização contínua, contribuindo para a demonstração do número de Euler.

Portanto, o conteúdo teórico do Cálculo Financeiro é de fundamental interesse do professor de ensino médio no desenvolvimento dos assuntos, seja para o formalismo necessário em sua apresentação, seja para sanar eventuais questionamentos e dúvidas atreladas a disciplina.

Em 2017, o Conselho Nacional de Educação (CNE) introduziu a educação financeira nas escolas brasileiras, segundo as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), vide [30], sendo o Cálculo Financeiro peça fundamental na temática. A obrigatoriedade foi estabelecida em 2017. Nessa perspectiva, conforme o jornal Correio Braziliense de 2 de Fevereiro de 2020, caderno de Economia, página 9, o Distrito Federal (DF) implementará o conteúdo a partir desse ano (2020), vide [30] . O periódico relata o formato que será desenvolvido no DF.

> De acordo com a Secretaria de Educação do Distrito Federal, como a matéria não fará parte da grade de ensino, cabe às unidades inserirem o novo conteúdo de forma transversal, nas disciplinas lecionadas, conforme o plano pedagógico de cada escola (PINHEIRO, 2020, p. 9).

Na matéria também encontramos a decisão do Ministério da Educação (MEC) a respeito do tema.

> Segundo a decisão do Ministério da Educação (MEC), redes de ensino público e privados de todo o Brasil devem se adequar à nova norma para ajustar o currículo e abordar o tema. O assunto será ensinado nas escolas desde a educação infantil até o ensino médio. O objetivo é preparar os alunos para que desenvolvam o hábito de poupar e oferecer conhecimentos para que, quando adultos, tomem decisões mais conscientes enquanto consumidores e saibam avaliar os produtos financeiros mais adequados, de acordo com o perfil e objetivos de cada um (PINHEIRO, 2020, p. 9).

Conforme Faro [12], está no âmbito do Cálculo Financeiro a determinação dos valores de remuneração de empréstimos. Com isso, o Cálculo Financeiro ajudará no entendimento quantitativo de alguns dos eventos atrelados à educação financeira associados ao consumismo e realizados sob operações de empréstimos, por exemplo. Além disso, ele ajudará também nas escolhas de alternativas financeiras, tendo em vista que o Cálculo Financeiro objetiva a evolução do dinheiro ao longo do tempo, ainda segundo Faro [12]. Portanto, esta dissertação será fonte para os professores do ensino médio das escolas brasileiras.

Voltando à matéria jornalística escrita por Pinheiro (2020, p. 9), segue que: "A Associação de Educação Financeira do Brasil (Aef Brasil) desenvolve metodologias para a disseminação do tema entre estudantes e educadores. Cláudio Forte, superintendente da Aef, acredita que a inserção do tema na grade curricular é uma alternativa para a solução de problemas reais do país, como consumismo, falta de poupança e endividamento da população". Ainda na reportagem de Pinheiro (2020, p. 9), temos que: "A associação (Aef Brasil) divulgou recentemente o resultado parcial de uma pesquisa feita em parceria com a Serasa Consumidor e a Serasa Experian, segundo o qual a educação financeira nas escolas ajuda a desenvolver em crianças e adolescentes hábitos saudáveis na relação com o dinheiro, como a cultura de poupar e de falar sobre o tema de forma aberta no ambiente familiar. Um dos dados do estudo mostra que 34% dos jovens impactados pelo projeto da Aef afirmaram ter aprendido, depois da experiência, a importância de economizar". Por fim, o jornal Correio Braziliense (2020, p. 9) traz que: "O Programa de Apoio à Implementação da BNCC (ProBncc) já aplicou mais de $R\$$ 200 milhões em apoio para estados e municípios revisarem documentos curriculares, de forma a se alinharem à base, seguindo o MEC. No âmbito do ProBncc, o Ministério oferece formação para multiplicadores nos estados e municípios. A Secretaria de Educação, por meio desses multiplicadores, deve estimular os professores a abordagem a educação financeira de forma transversal, nas várias disciplinas, de maneira contextualizada para a realidade local".

Portanto, observa-se, na reportagem do jornal, que o governo brasileiro tem investido na implementação da BNCC, especialmente no que se refere à inserção do tema da Educação Financeira na grade curricular que rege a educação básica no Brasil. Por isso, é importante o desenvolvimento de conteúdos financeiros para professores do ensino médio, a fim de que eles possam estar preparados para essa nova realidade na educação.

A nova modalidade de ingresso em universidades federais e estaduais, inédita no Brasil, diz respeito aos medalhistas olímpicos, tornando-se a Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) à pioneira no processo e à única a adotá-la na data atual, vide [19] e [39]. A seleção é nomeada *Vagas Olímpicas* e ofereceu, na instituição, em 2019, 90 das 3.340 vagas para alunos medalhistas além dos destaques em olimpíadas do ensino médio nas áreas de Matemática, Física, Química, Robótica e Ciências, conforme reportagem da revista Veja publicada em 17 de abril de 2019 e disponibilizada no site do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) [19].

Segundo José Alves de Freitas, coordenador do vestibular da Unicamp, o procedimento de ingresso considerará somente as medalhas.

> Outros países, como os Estados Unidos, até consideram medalhistas olímpicos na hora de avaliar o aluno para a universidade. Mas isso vem junto com outras coisas, como trabalho voluntário. Na Unicamp, vamos considerar apenas as medalhas (IMPA, 2019).

A reportagem deixa claro que o objetivo da modalidade é atrair jovens talentosos e com currículo altamente qualificado, com altas habilidades a jornadas de estudos e que se interessam por desafios. Em termos gerais, as olimpíadas são rígidas, selecionando muito bem os participantes, e organizadas por entidades científicas exigindo alto rendimento de todos, vide [28] e [27].

Ainda conforme a matéria (IMPA, 2019), veiculada pela Veja, o funcionamento na Unicamp será da seguinte forma: "Neste primeiro ano do programa, 27 dos 66 cursos da instituição se interessaram pelo modelo e abriram vagas - pelas normas, até 10% das cadeiras de cada curso poderão ser destinadas a medalhistas. Ao todo, 285 candidatos se inscreveram e 60 postos foram preenchidos por estudantes que carregam prêmios de pelo menos 15 olimpíadas, sendo os mais frequentes vindos da prestigiada Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (OBMEP)". Prosseguindo o conteúdo extraído do site do IMPA [19], observa-se que: "Ao se inscrever nessa modalidade de ingresso, o candidato coloca as medalhas que já recebeu de acordo com as olimpíadas solicitadas pelos cursos. Cada uma terá um peso diferente: uma medalha internacional certamente valerá mais do que uma nacional. O critério de desempate - quando houver - será o histórico escolar em língua portuguesa, já que na área de exatas e ciências esses alunos já são destaques. Em nenhum momento haverá entrevista pessoal. "Optamos pela impessoalidade absoluta na análise dos dados. Buscamos o mínimo de contato possível para evitar distorções ou privilégios", afirma Freitas". Por fim, pela abordagem informativa disponibilizada no site do IMPA [19], o leitor encontrará ainda o seguinte desfecho: "Do total de aprovados, 75% são de outros estados - o que chamou a atenção positivamente da Unicamp, já que o objetivo é flexibilizar o ingresso e atrair talentos. O Estado do Ceará, reconhecido pelo alto desempenho em olimpíadas de conhecimento, foi o segundo que mais aprovou medalhistas - 17 ao todo -, ficando atrás apenas de São Paulo, com 25 candidatos aprovados. Além disso, quase metade (46%) dos medalhistas é de escolas públicas, ampliando a participação dos alunos de menor renda no vestibular paulista".

Portanto, é importante salientar, segundo traz a reportagem da Veja, que a Unicamp ficou na primeira posição do ranking das melhores universidades da América Latina, consoante levantamento publicado pela revista inglesa *Times Higher Education (THE)* em 2018. O ranking é um dos mais prestigiados do mundo e teve como base a análise de dados de 1.250 universidades de 36 países, segundo observado no site do IMPA [19]. Por fim, a Universidade de São Paulo (USP) e a Estadual Paulista (Unesp) também estão dispostas a aceitar vagas de medalhistas olímpicos, segundo informações do site do Correio Braziliense [7] do dia 24 de dezembro de 2018.

Diante desse novo cenário de admissão em Universidades Federais e Estaduais do Brasil, é preciso abordar também a nova modalidade olímpica que surgiu no ano passado em nível nacional e esta dissertação contribuirá bastante para todos os professores do ensino médio em sua aulas, acreditando que as instituições de ensino superior irão acrescentar em seus ingressos os medalhistas da atual olimpíada. Trata-se das Olimpíadas Brasileiras de Educação Financeira (OBEF).

A citação a seguir, sobre o surgimento da nova modalidade olímpica, foi retirada do site da Faculdade de Ciências Econômicas (FCE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), publicado em 7 de outubro de 2019, conforme disponibilizado no site [38], e traz que: "Em 2012, na Universidade Federal da Paraíba, iniciou-se um programa de extensão destinado a trabalhar a Educação Financeira com crianças do 1º até o 5º ano. A iniciativa inspirou a Olimpíada Paraibana de Educação Financeira, que já contou com duas edições, e é a origem da OBEF, realizada pela primeira vez neste ano (2019). O projeto objetiva o estímulo e a promoção da Educação Financeira nas instituições de ensino em cada estado do país, visando, assim, a contribuir para a melhoria da qualidade da Educação. Dentro das suas premissas, estão o despertar do interesse de crianças e adolescentes no aprendizado da Educação Financeira, bem como a percepção do nível de conhecimento dos alunos sobre esse assunto. O evento projeta a inclusão social por meio da difusão do conhecimento e a interação entre as intuições de Ensino Fundamental e Médio com as de Ensino Superior".

Assim, é importante o desenvolvimento do Cálculo Financeiro pelos professores do ensino médio para atender a demanda dos estudantes que se dedicam às diversas olimpíadas, em especial, à OBEF.

Com isso, espera-se que a dissertação contribua de alguma forma, na parte de Cálculo Financeiro, para os docentes do ensino médio que estejam envolvidos nesse novo horizonte brasileiro, associado tanto ao ingresso em universidades por medalhistas quanto aos que se dedicam às Olimpíadas Brasileiras de Educação Financeira. Porém, a finalidade do trabalho é abordar alguns conceitos de Cálculo Financeiro para professores do ensino médio sanarem possíveis dificuldades teóricas no trato dos conteúdos e não práticos, servindo como fonte de pesquisa teórica, conforme se observa no objetivo traçado abaixo.

O objetivo principal desta dissertação é fornecer um material de pesquisa teórico para professores de Matemática do ensino médio sobre conceitos de Cálculo Financeiro, possíveis de serem trabalhados no ensino médio, utilizando-se de lemas[1], teoremas[2] e

[1] **Lema:** São afirmações provadas que ajudam a provar afirmações mais importantes (teoremas). Um lema é normalmente um teorema auxiliar utilizado para provar outros teoremas [21].

[2] **Teorema:** É uma proposição que é garantida por uma prova, ou seja, que se demonstra ser verdadeira baseada em proposições anteriores [21].

corolários[3], quando possível, no desenvolvimento dos assuntos, com suas respectivas demonstrações, bem como definições elementares, e, posteriormente, trazendo uma aplicação imediata, através de um exemplo simples, ilustrando a teoria proposta anteriormente, tendo em vista que o mais importante é a parte formal teórica do conteúdo proposto, seguido de uma exemplificação prática, colaborando, assim, para sanar eventuais dificuldades dos professores de ensino médio em relação aos conteúdos teóricos do Cálculo Financeiro, além de servir como fonte de conhecimento teórico para eles em seus trabalhos em sala.

Além disso, como objetivo específico, promover a resolução de sete problemas sobre a utilização de alguns conceitos teóricos do Cálculo Financeiro, caso o professor de ensino médio, eventualmente, na dificuldade de justificar, para os alunos do ensino médio, a importância e relevância do teor teórico na abordagem em sala, queira, em princípio, desfrutar de um incremento mais usual do tema, ou seja, propondo alguns problemas ganchos, mais práticos, para iniciação dos trabalhos.

Definição de Cálculo Financeiro

Conforme Faro [12], o Cálculo Financeiro tem por objetivo o estudo de relações que envolvem unidades monetárias consideradas em distintos pontos no tempo. Assim, por exemplo, ainda segundo o autor, se nos dispusermos a vender a prazo um certo bem, cuja valor à vista é conhecido, por meio de um dado número de prestações constantes, é através do Cálculo Financeiro, bem como de condições então prevalentes no mercado de capitais, que iremos determinar o valor da prestação. Isto é, uma vez de posse da cotação do que se denomina de taxa de juros, que é estabelecida pelo mercado, o Cálculo Financeiro nos ensina como determinar a quantia que deve ser paga como prestação, de tal modo que se verifique o que se chama de equivalência financeira entre as alternativas venda à vista e a prazo. Para finalizar o autor afirma que, os objetivos do Cálculo Financeiro é estudar a evolução do valor do dinheiro ao longo do tempo.

[3] **Corolário:** É um teorema que pode ser estabelecido diretamente do teorema que foi provado. Quando um teorema ou uma prova nos ajudam a concluir facilmente que outras afirmações são verdadeiras chamamos estas últimas de corolários do teorema [21].

Fluxo de Caixa

O entendimento do fluxo de caixa ajudará nas construções daqui em diante. Então, na visão financeira, um investimento genérico é equivalente a aplicar um ou mais capital e, em contrapartida, receber também um ou mais capital como retorno. As saídas de proventos são nomeadas de aplicações, por sua vez, as entradas são conhecidas como recebimentos. A esse fluxo de entradas e saídas de capitais no decurso do tempo chamamos de fluxo de caixa. Portanto, conforme Securato [35], fluxo de caixa de um projeto ou investimento é o conjunto de entradas e saídas de capital ao longo do tempo.

O diagrama que representa o fluxo de caixa é dado por um segmento de reta na horizontal, que corresponde aos períodos de tempo, e as entradas e saídas de capitais são ilustradas por setas verticais. Logo, por convenção, adota-se que setas[4] com sentido para cima indicam entradas de recursos e setas com sentido para baixo representam saídas de capitais, conformo abaixo.

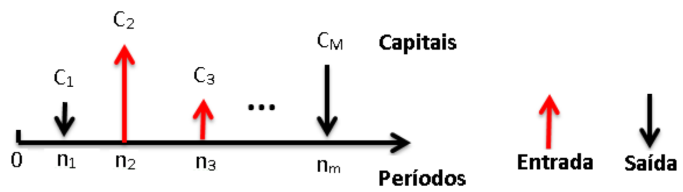

Figura 1: *Diagrama de Fluxo de Caixa*

Fonte: Autor

Logo, a dissertação está dividida em quatro capítulos basilares, contendo também esta introdução e a conclusão. No primeiro capítulo, apresentar-se-á a estrutura teórica do Cálculo Financeiro voltado ao regime de juros simples. Nele constará tópicos envolvendo conceitos de prazo médio, desconto comercial, racional e bancário simples, por exemplo. Destina-se, principalmente, aos docentes do 1° ano do ensino médio. No segundo, mostrar-se-á a dinâmica dos juros compostos, entre os tópicos expostos estão: o número de Euler, a convenção linear, a relação entre a taxa aparente, a taxa real e a taxa de inflação, dentre outros. Tal capítulo é voltado, essencialmente, para profes-

[4]**Observação:** As cores das setas, ao longo da dissertação, não estarão sempre associadas aos sentidos observados no diagrama de fluxo de caixa ilustrado e as entradas e saídas de recursos, para efeitos práticos, são sinônimos, respectivamente, de recebimentos e aplicações.

sores do 2° ano do ensino médio. No terceiro, são apresentados os aspectos teóricos do Cálculo Financeiro relacionados à série uniforme, às amortizações e à análise de investimentos. Esse, por fim, é dedicado, sobretudo, aos docentes que ministram aulas para o 3° ano do ensino médio. Já, no último capítulo, haverá a resolução de 7 problemas mais práticos caso o professor de ensino médio vislumbre a necessidade de justificar a apresentação dos conceitos teóricos para seus alunos. Ou seja, atividades propostas para os docentes, sobre os assuntos trabalhando nos 3 primeiros capítulos, caso queiram apresentá-las em sala, servindo de motivação para os discentes, pois mostrará atividades aplicadas, enaltecendo a importância do estudo de tais temas. Ressalto, que os exemplos utilizados nos três capítulos iniciais, por serem triviais, não tem como intuito a simplificação dos conceitos, mas sim disponibilizar um exemplo imediato para o professor do ensino médio, quando, por ventura, necessitar verbalizar o conceito teórico em uma situação particular. Em razão do exposto, nas considerações finais, ratifico a importância do material proposto nesta dissertação para os professores do ensino médio, bem como trago os novos projetos na área financeira que serão realizados por mim.

Portanto, a metodologia apresentada na dissertação, em relação ao material matemático, foi feito, sempre que possível, da seguinte forma: apresentação de definições elementares, em seguida, a introdução de um lema, teorema ou corolário; a respectiva demonstração; e, finalmente, um exemplo simples com sua solução.

Além disso, na explanação dos conteúdos, ou seja, quando na abordagem deles através dos teoremas, dos lemas e dos corolários e de suas, respectivas, demonstrações, houve, naturalmente, a utilização de um formalismo mais amplos em algumas situações, conforme o grau de aprofundamento dos conteúdos e caso a demonstração o exigisse, tendo em vista que a abordagem é teórica, portanto, o viés é contribuir com o leitor, professor do ensino médio, sempre que possível, na apresentação do formalismo necessário dos termos teóricos do Cálculo Financeiro.

Por fim, é necessário esclarecer, novamente, que o trabalho não é projetado para a aplicação prática do Cálculo Financeiro, pois já existe bastante material que pode ser encontrado em outras dissertações do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), através da aplicação na Educação Financeira vide, Gouveia [16] e Márcio [22], por exemplo. Em razão do exposto, a proposta aqui é teórica, sendo, assim, alguns exemplos não, necessariamente, são reais e não necessitam ser, dado que o relevante é o entendimento teórico dos conteúdos pelos professores do ensino médio, deixando-os, por conseguinte, livres para a busca de mateiras práticos nas vastas dissertações encontradas no PROFMAT e em outras literaturas. Portanto, esta dissertação de Mestrado é a primeira a abordar a Teoria do Cálculo Financeiro no PROFMAT, vide [9]. Ela também se diferencia dos livros teóricos de Matemática Financeira atuais, pois, buscou-se, desde o início, construções teóricas baseadas em teoremas, lemas e corolário, na maior parte dos conteúdos, tendo em vista o formalismo matemático, algo explorado pelos autores, porém concentradas no regime de juros compostos, séries uniformes e amortizações, vide Morgado em [24] e [25], e Lima em [20]. No entanto, os leitores poderão encontrar materiais teóricos também nos livros de Barros [5], Mathias [23], Assaf Neto [1], Securato [35] e Faro [12], por exemplo.

Em relação à distribuição dos conteúdos, entres os capítulos, não houve homogeneidade da quantidade distribuídas neles. Com isso o terceiro capítulo ficou com um conteúdo menor, porém a ideia, em relação a isso, é instigar o professor de ensino médio a buscar, devido aos interessantes conteúdos daquele capítulo, aprofundá-los em materiais complementares, bem como desbravar outros assuntos e, caso queira, até práticos, isso contribuirá, ainda que indiretamente, para o professor de ensino médio procurar, constantemente, atualizar-se. Então, tal situação servirá de motivação para essa busca incessante e interessante de conceitos teóricos do Cálculo Financeiro.

Capítulo 1

Cálculo Financeiro - Parte 1

Grande parte do arcabouço formal e teórico do Cálculo Financeiro relacionado ao regime de juros simples está representado neste capítulo. Ele servirá de base para o professor do ensino médio, em geral do 1° ano, desenvolver, de forma contundente e aprofundada, com qualidade e rigor, os conteúdos matemáticos que achar relevante abordar no seu ambiente escolar. Além disso, contribuirá, também, para sanar eventuais dúvidas e questionamentos que o mesmo tenha sobre os assuntos teóricos, abordados neste capítulo, que surjam em sala de aula.

Os resultados teóricos contidos neste capítulo podem ser encontrados em diversos livros, tais como: Matemática Financeira de Mathias e Gomes [23], Matemática Financeira de Barros [5], Matemática Financeira e suas Aplicações de Assaf Neto [1], Fundamentos da Matemática Elementar de Iezzi [18] e Matemática Financeira Aplicada: Mercado de Capitais, Adminstração Financeira, Finanças Pessoais e Tesouro Direto de Ferreira [13].

1.1 Regime de Juros

Definição 1.1.1. *Capital - C -, em matemática financeira, é o valor inicial ou principal de uma aplicação financeira. Juros - J - , por sua vez, é a importância cobrada pelo empréstimo de dinheiro por um período. Ele é diretamente proporcional ao principal -*

capital inicial -, sendo a taxa - i - o fator de proporcionalidade. Então, $J = Ci$. Já o montante - M - é dado pela soma do capital com os juros, ou seja, $M = C + J$.

1.1.1 Regime de Juros Simples

O regime de juros simples é um sistema em que os juros, em cada período, são calculados constantemente sobre o capital inicial, sendo irrelevante os juros obtidos em períodos pretéritos.

A citação seguinte enaltece a importância deste capítulo para uma visão ampla do Cálculo Financeiro, fortalecendo a perspectiva primária com o intuito de exaltar o mais complexo que virá nos capítulos seguintes.

> Apesar de este tipo de sistema representar dentro da matemática financeira uma injunção ao fluxo natural de rendimentos - sendo por isso mesmo mais utilizado pela matemática comercial -, os modelos que dela provêm são por demais úteis na avaliação daquelas operações de curto e curtíssimo prazo - a exemplo das operações de desconto de títulos -, facilitando ou concorrendo para um compreensão maior dos futuros modelos de capitalização composta (FERREIRA, 2014, p. 25).

Assim, percebe-se, de fato, a relevância da abordagem dos conceitos de Cálculo Financeiro atrelados ao regime de juros simples, visto que as operações de curto e curtíssimo prazo, envolvendo operações de desconto de títulos, por exemplo, utilizam-se desse tipo de sistema. Além disso, os conhecimentos deste capítulo facilitará o estudo de eventos associados ao modelo de capitalização composta, que será mencionado no Capítulo 2.

1.2 Juros Simples

Para iniciar os estudos sobre juros, são listadas algumas abordagem esclarecedoras e relevantes de diversos autores a respeito do tema. Posteriormente, haverá a introdução de todas as definições formais, fundamentais para o professor de ensino médio no trato teórico dos assuntos.

Com isso, Paulo Sandroni, em Novíssimo Dicionário de Economia (1999, p. 316), traz a seguinte definição de Juro: "Juro é a remuneração que o tomador de um empréstimo deve pagar ao proprietário do capital emprestado. A cobrança também foi considerada, por alguns autores, o pagamento de um serviço, isto é, da possibilidade de dispor de um capital. Outros viram na cobrança de juros uma compensação pela "espera", ou seja, uma compensação pelo fato de o dono do capital deixar de dispor desse dinheiro. Keynes explicou a cobrança de juros pela escassez de capital (fator objetivo) e por um elemento subjetivo, a "renúnucia" do dono do capital à Liquidez".

Já Assaf Neto, em Matemática Financeira e suas Aplicações (2012, p. 5), diz o seguinte sobre o tema: "Os juros simples restringem-se principalmente às operações praticadas no âmbito do curto prazo. Além disso, os juros simples são utilizados para o cálculo dos valores monetários de operações (encargos a pagar, para empréstimos e rendimentos financeiros, para aplicações) e não para apuração do efetivo resultado percentual".

Por fim, Roberto G. Ferreira, em Matemática Financeira e suas Aplicações: mercado de capitais, administração financeira, finanças pessoais e tesouro direto (2014, p. 31), aborda o seguinte sobre os juros simples: "Sendo caracterizado pelo curto e curtíssimo prazo, o modelo de juros simples é aplicado com muita frequência pelos bancos comerciais em operações que adotam taxas de períodos anuais para prazos tomados em dias".

Lema 1.2.1. *Os Juros simples - J - são diretamente proporcionais ao capital inicial - C - e ao período de aplicação - n -, sendo a taxa - i - o fator de proporcionalidade, então $J_n = Cin$.*

Demonstração. Temos que, no primeiro instante, os juros são dados, pela Definição 1.1.1, por Ci, e, por outro lado, como o regime é de juros simples, então, em cada um dos intervalos seguintes, os juros são idênticos a Ci. Daí, usando a recorrência, segue que:

$$J_1 = Ci.$$
$$J_2 = J_1 + Ci = Ci + Ci = C \cdot i \cdot 2.$$
$$\vdots$$
$$J_n = J_{n-1} + Ci = \underbrace{Ci + Ci + \cdots + Ci}_{\text{(n-1)-termos}} + Ci = C \cdot i \cdot n.$$

Portanto, os juros simples são da forma $J_n = Cin$. □

Exemplo 1.2.2. *Um capital de* $R\$ \ 50.000,00$ *foi aplicado num fundo de investimento por 6 meses a uma taxa de juros simples de* $0,25\%$ *ao mês. Qual o rendimento financeiro (juros) apurado por esta operação?*

Solução: Pelo Lema 1.2.1, segue que $J = Cin$. Como $i = 0,25\% = 0,0025$ a.m, $C = R\$ \ 50.000,00$ e $n = 6$ meses, temos que:

$$J = 50.000 \cdot 0,0025 \cdot 6 = R\$ \ 750,00.$$

Portanto, o rendimento financeiro (juros) apurado por esta operação é de $R\$ \ 750,00$.

Teorema 1.2.3. *No sistema de juros simples, um capital* C *aplicado a uma taxa* i*, no instante* n*, transforma-se em um montante* $M = C(1 + in)$*.*

Demonstração. Como, por definição, $M = C + J$ e, pelo Lema 1.2.1, $J = Cin$, temos que $M = C + Cin$. Logo, colocando C em evidência, obtemos $M = C(1 + in)$.

$\square$

Exemplo 1.2.4. *Um estudante aplicou, em uma instituição financeira,* $R\$ \ 10.000,00$ *a uma taxa de juros de* $0,15\%$ *ao mês durante* 3 *meses. Determine o valor total resgatado (montante) pelo estudante.*

Solução: Temos, pelo Teorema 1.2.3, que $M = C(1+i.n)$. Daí, como $C = R\$ \ 10.000,00$, $i = 0,15\% = 0,0015$ e $n = 3$ meses, temos que:

$$M = 10.000 \cdot (1 + 0,0015 \times 3) = 10.000 \cdot (1,0045) = R\$ \ 10.045,00.$$

Portanto, o valor resgatado (montante) pelo estudante é de $R\$ \ 10.045,00$.

Corolário 1.2.5. *O instante de tempo* n*, no sistema de juros simples, é da forma*

$$n = \frac{\frac{M}{C} - 1}{i},$$

onde M*,* C *e* i *são, respectivamente, o montante, o capital e a taxa.*

Demonstração. Segundo o Teorema 1.2.3, segue que $M = C(1 + in)$. Com isso, $(1+in) = \frac{M}{C}$, pois o capital inicial é maior do que zero, ou seja, $C > 0$. Daí, subtraindo um dos dois lados da última equação, obtemos $in = \dfrac{M}{C} - 1$. Assim, dividindo por i em ambos os lados da igualdade anterior, com $i > 0$, temos $n = \frac{\frac{M}{C}-1}{i}$. $\square$

Exemplo 1.2.6. *[5] Por quanto tempo deve ficar aplicado um capital, à taxa de juros simples de* 8% *ao bimestre, de forma a produzir um montante igual ao dobro do que foi aplicado.*

Solução: Temos que $M = 2C$. Daí, como 8% $a.b = 0,08\ a.b$, segue, pelo corolário anterior, que $n = \frac{\frac{2C}{C}-1}{0,08}$. Com isso, $n = \frac{1}{0,08}$, que equivale a $12,5$ bimestres ou, multiplicando por 2, equivale a 25 meses. Assim, o capital deve ficar aplicado por 25 meses a uma taxa de juros simples de 8% $a.b$ para produzir um montante igual ao dobro do capital aplicado.

1.3 Juro Comercial ou Ordinário

Definição 1.3.1. *Juro comercial ou ordinário é aquele que tem como base de cálculo o ano comercial, ou seja, considera-se o ano equivalente a 360 dias.*

Na falta de informações, em eventuais questões, adota-se o ano comercial por convenção. Nele, o mês tem 30 dias.

Exemplo 1.3.2. *Qual é o juro comercial de um capital de* $R\$\ 20.000,00$ *que é aplicado por* 50 *dias a uma taxa de* $4,2\%$ *a.a. no regime de juros simples?*

Solução: Sabendo que a base de cálculo no juros comercial é o ano comercial, segue que:

$$J = \frac{Cin}{360} = \frac{20.000 \cdot 0,042 \cdot 50}{360} \approx R\$\ 116,67.$$

Logo, os juros comerciais de um capital de $R\$\ 20.000,00$, que é aplicado por 50 dias à taxa de $4,2\%$ a.a., vale aproximadamente $R\$\ 166,67$.

1.4 Juro Exato

Definição 1.4.1. *Juro exato é aquele que tem como base de cálculo o ano civil, ou seja, considera-se o ano equivalente a 365 dias ou 366 dias, se o ano for bissexto.*

Na falta de informações, sendo impossível determinar se o ano é bissexto, adota-se o ano, por convenção, como sendo equivalente a 365 dias.

Exemplo 1.4.2. *[23] Qual é o juro exato de um capital de* $R\$$ $10.000,00$ *que é aplicado por* 40 *dias e à taxa de* 36% *a.a. no regime de juros simples?*

Solução: Sabendo que a base de cálculo no juros exato é o ano civil, segue que:

$$J = \frac{Cin}{365} = \frac{10.000 \cdot 0,36 \cdot 40}{365} \approx R\$ \ 394,52.$$

Logo, o juro exato de um capital de $R\$$ $10.000,00$, que é aplicado por 40 dias à taxa de 36% a.a., vale aproximadamente $R\$$ $394,52$.

1.5 Prazo Médio, Taxa Média e Capital Médio no Regime de Juros Simples

1.5.1 Prazo Médio

O prazo médio é igual a média ponderada dos períodos das k-ésimas aplicações, sendo os capitais e as taxas os fatores de ponderação. Além disso, conforme Barros [5] o prazo médio é aquele que irá substituir todos os outros sem contudo acarretar alterações nos juros totais devidos, embora os juros individuais de cada empréstimo possam se alterados.

Definição 1.5.1. *Sejam* $C_1, C_2, \ldots, C_k$ *capitais, aplicados, respectivamente, às taxas* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *nos prazos* $n_1, n_2, \ldots, n_k$*. Então, o prazo médio -* n_m *- é dado por:*

$$n_m = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j i_j n_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j i_j}.$$

Uma forma de ratificar a equação da definição acima é proceder da seguinte forma: tome o prazo médio - n_m - em substituição aos demais prazos, com isso a soma dos juros simples das k-ésimas aplicações não se alteram. Portanto, temos que:

$$C_1i_1n_m + C_2i_2n_m + \cdots + C_ki_kn_m = C_1i_1n_1 + C_2i_2n_2 + \cdots + C_ki_kn_k.$$

Com isso, colocando n_m em evidência, obtemos:

$$n_m(C_1i_1 + C_2i_2 + \cdots + C_ki_k) = C_1i_1n_1 + C_2i_2n_2 + \cdots + C_ki_kn_k.$$

Logo,

$$n_m = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_ji_jn_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_ji_j}.$$

Exemplo 1.5.2. *[5] Os capitais de R\$ 8.000,00, R\$ 10.000,00 e R\$ 6.000,00 foram aplicados à mesma taxa de juros simples, pelos prazos de 8, 5 e 9 meses, respectivamente. Obtenha o tempo necessário para que a soma desses capitais produza juros, à mesma taxa, iguais à soma dos juros dos capitais individuais aplicados nos seus respectivos prazos.*

Solução: Neste exemplo, temos que encontrar o prazo médio. Para tal, usando a Definição 1.5.1, temos que:

$$\begin{aligned}
n_m &= \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} C_ji_jn_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} C_ji_j} \\
&= \frac{C_1i_1n_1 + C_2i_2n_2 + C_3i_3n_3}{C_1i_1 + C_2i_2 + C_3i_3} \\
&= \frac{8.000 \cdot 8 \cdot i + 10.000 \cdot 5 \cdot i + 6.000 \cdot 9 \cdot i}{8.000 \cdot i + 10.000 \cdot i + 6.000 \cdot i} \\
&= \frac{64.000 \cdot i + 50.000 \cdot i + 54.000 \cdot i}{24.000 \cdot i}
\end{aligned}$$

$$= \frac{168.000 \cdot i}{24.000 \cdot i}$$

$$= 7\ m$$

Portanto, o prazo médio é de 7 meses.

1.5.2 Taxa Média

A taxa média é igual a média ponderada das taxas das k-ésimas aplicações, sendo os capitais e os prazos os fatores de ponderação. Além disso, segundo Barros [5] a taxa média é aquela que irá substituir todas as outras sem contudo acarretar alterações no juros total devido, embora os juros individuais de cada empréstimo possam ser alterados.

Definição 1.5.3. *Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k$ capitais, aplicados, respectivamente, as taxas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ nos prazos $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Então, a taxa média - i_m - é dado por:*

$$i_m = \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j i_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} C_j n_j}.$$

Uma forma de ratificar a equação da definição acima é proceder da seguinte forma: tome a taxa média - i_m - em substituição às demais taxas, com isso a soma dos juros simples das k-ésimas aplicações não se alteram. Assim, temos que:

$$C_1 i_m n_i + C_2 i_m n_2 + \cdots + C_k i_m n_k = C_1 i_1 n_1 + C_2 i_2 n_2 + \cdots + C_k i_k n_k.$$

Com isso, colocando i_m em evidência, obtemos:

$$i_m(C_1 n_1 + C_2 n_2 + \cdots + C_k n_k) = C_1 i_1 n_1 + C_2 i_2 n_2 + \cdots + C_k i_k n_k.$$

Portanto,

$$i_m = \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j i_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} C_j n_j}.$$

Exemplo 1.5.4. *Os capitais de R\$ 8.000,00, R\$ 5.000,00, R\$ 2.000,00 e R\$ 1.000,00 são aplicados, respectivamente, às taxas de 0,7%, 0,4%, 0,3% e 0,2% ao mês, no regime de juros simples, durante o mesmo prazo. Determine a taxa média mensal de aplicação desses capitais.*

Solução: Consoante a definição 1.5.3 e os dados do exemplo, obtemos:

$$
\begin{aligned}
i_m &= \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{4} C_j i_j n_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{4} C_j n_j} \\
&= \frac{C_1 i_1 n_1 + C_2 i_2 n_2 + C_3 i_3 n_3 + C_4 i_4 n_4}{C_1 n_1 + C_2 n_2 + C_3 n_3 + C_4 n_4} \\
&= \frac{8.000 \cdot 0,007 \cdot n + 5.000 \cdot 0,004 \cdot n + 2.000 \cdot 0,003 \cdot n + 1.000 \cdot 0,002 \cdot n}{8.000 \cdot n + 5.000 \cdot n + 2.000 \cdot n + 1.000 \cdot n} \\
&= \frac{56 \cdot n + 20 \cdot n + 6 \cdot n + 2 \cdot n}{16.000 \cdot n} \\
&= \frac{84 \cdot n}{16.000 \cdot n} \\
&= 0,00525 \ a.\ m \ = \ 0,525\% \ a.\ m.
\end{aligned}
$$

Logo, a taxa média mensal de aplicação desses capitais é de 0,525% a.m

1.5.3 Capital Médio

O capital médio é igual a média ponderada dos capitais das k-ésimas aplicações, sendo as taxas e os prazos os fatores de ponderação. Além disso, consoante Barros [5] o capital médio é aquele que irá substituir todos os outros sem contudo acarretar alterações no juro total devido, embora os juros individuais de cada empréstimo possam se alterados.

Definição 1.5.5. *Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k$ capitais, aplicados, respectivamente, as taxas $i_1, i_2, \ldots, i_k$ nos prazos $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Então, o capital médio - c_m - é dado por:*

$$c_m = \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j i_j n_j}{\sum_{j=1}^{k} i_j n_j}.$$

O procedimento para ratificação da equação da definição anterior é análogo às apresentadas para o prazo médio e para a taxa média.

Exemplo 1.5.6. *Uma sociedade limitada faz três empréstimos, a juros simples, de uma mesma instituição financeira, nos seguintes termos:* $R\$$ 1.000,00*, à taxa de* 0,5% *a. m., vencíveis daqui a* 2 *meses;* $R\$$ 3.000,00*, à taxa de* 0,6% *a.m., vencíveis daqui a* 4 *meses; e* $R\$$ 1.500,00*, à taxa de* 0,3% *a.m., vencíveis daqui a* 1 *mês. A sociedade, então, decide substituir os capitais de todas as dívidas por um único capital, de tal forma que os juros totais continuem o mesmo. Assim, determine o capital médio associado aos empréstimos da sociedade limitada.*

Solução: Nesse exercício, precisamos encontrar o capital médio. Então, segundo a Definição 1.5.5 e os dados do exemplo, obtemos:

$$\begin{aligned}
C_m &= \frac{\sum_{j=1}^{3} C_j i_j n_j}{\sum_{j=1}^{3} i_j n_j} \\
&= \frac{C_1 i_1 n_1 + C_2 i_2 n_2 + C_3 i_3 n_3}{i_1 n_1 + i_2 n_2 + i_3 n_3} \\
&= \frac{1.000 \cdot 0,005 \cdot 2 + 3.000 \cdot 0,006 \cdot 4 + 1.500 \cdot 0,003 \cdot 1}{0,005 \cdot 2 + 0,006 \cdot 4 + 0,003 \cdot 1} \\
&= \frac{0,01 \cdot 1.000 + 0,024 \cdot 3.000 + 0,003 \cdot 1.500}{0,01 + 0,024 + 0,003} \\
&= \frac{86,5}{0,037} \\
&\approx R\$\ 2.337,84.
\end{aligned}$$

Portanto, o capital médio vale aproximadamente $R\$\ 2.337,84$.

1.6 Valor Nominal, Atual e Futuro

1.6.1 Valor Nominal

Para Mathias e Gomes [23], valor nominal - N - é quanto vale um compromisso na data do seu vencimento. Caso, depois do vencimento, o compromisso não seja quitado, entende-se que ele continuará tendo seu valor nominal, acrescido de juros e de relativas multas por atraso, ainda segundo o autor.

O exemplo a seguir foi extraído do livro do Mathias e Gomes (1993, p. 34).

Exemplo 1.6.1. *Uma pessoa que aplicou uma quantia hoje e que vai resgatá-la por* $R\$ \ 20.000,00$ *daqui a* 12 *meses.*

A situação pode ser representada do seguinte modo:

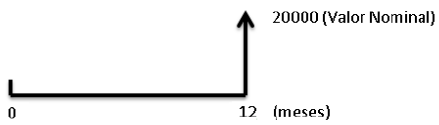

Figura 1.1: *Valor Nominal*

Fonte: (MATHIAS; GOMES, 1993, p. 34)

O valor nominal da aplicação é, portanto, igual a $R\$ \ 20.000,00$ no mês 12.

1.6.2 Valor Atual

Valor atual[5] - A - corresponde à quantia de um obrigação em uma época que antecede ao seu vencimento.

[5] Para determinar o valor atual, deve-se discriminar o valor nominal, determinar a época de cálculo e a taxa de juros empregada na operação. Portanto, o cálculo do valor atual prevê que já há um compromisso assumido o qual vence numa data futura.

Exemplo 1.6.2. *Um professor aplicou hoje uma certa quantia, a juros simples, e recebeu, pela aplicação, um título que irá valer* $R\$$ 22.200, 00 *daqui a* 6 *meses, segundo o diagrama abaixo.*

Figura 1.2: *Análise de Valor Atual Hoje*

Fonte: Autor

(a) Se a taxa de aplicação é de 0, 8% *a.m., então qual será o valor atual hoje (na data zero), que corresponde ao próprio valor aplicado?*

(b) Imagine, agora, que passados 2 *meses da data da aplicação o docente precise do dinheiro. Assim, ele vai a um mercado com o intuito de trocar seu título por dinheiro. Nesse contexto, suponha que a taxa de juros vigente no mês* 2 *seja de* 1% *a.m. Nestes termos, quanto obterá o professor pelo título?*

Solução:

(a) Temos que $N = M = C(1 + in)$, porque o montante é igual ao valor nominal, tratando-se de um caso particular de valor futuro, consoante veremos adiante. Consequentemente, como o valor nominal, a taxa e o tempo são, respectivamente, 22.200, 0, 008 e 6, temos que $22.200 = C(1 + 0,008 \cdot 6) \Leftrightarrow C = \dfrac{22.200}{1,048} \approx R\$\ 21.183,21$. Portanto, o valor atual hoje será de aproximadamente $R\$\ 21.183,21$.

(b) A nova situação, em termos de diagrama, é da forma:

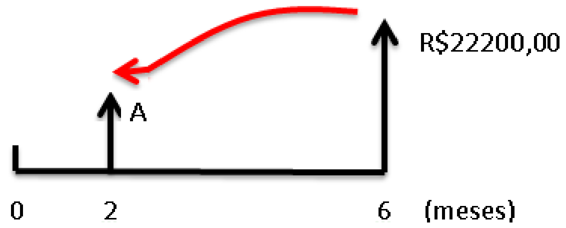

Figura 1.3: *Análise de Valor Atual 4 Meses Antes do Vencimento*

Fonte: Autor

Observe que A é o valor atual do título no mês 2, isto é, 4 meses antes do seu vencimento. Com isso, $N = R\$ \ 22.200,00$, $i = 1\%$ a.m. $= 0,01$ e $n = 4$ meses. Daí,

$$22.200 = A(1 + 0,01 \cdot 4) \Leftrightarrow A = \frac{22.200}{1,04} \approx 21.346,15.$$

Portanto, o valor atual do título no mês 2 é de aproximadamente $R\$ \ 21.346,15$.

1.6.3 Valor Futuro

Valor futuro[6] - F - corresponde à quantia do título em qualquer época ulterior à que tomamos como referência no momento.

Exemplo 1.6.3. *Um estagiário possui hoje a quantia de* $R\$ \ 1.500,00$, *consoante o diagrama abaixo.*

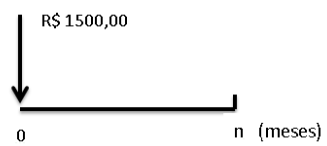

Figura 1.4: *Valor Futuro*

Fonte: Autor

[6]**Observação:** Segundo Mathias e Gomes [23], valor futuro é o mesmo que montante, quando a data considerada for a do vencimento da aplicação. Na prática e para todos os feitos algébricos, o valor futuro corresponde ao próprio valor nominal e ao montante.

Suponha que ele queira aplicar o valor em um banco, que oferece uma taxa de 3% a.b., durante 2 bimestres. Nessa situação, qual será o valor futuro da aplicação feita pelo estagiário?

Solução: Perceba que o valor futuro F nada mais é do que o montante M na operação financeira. Para tanto, temos que $F = M$, $i = 0,03$ a.b. e $n = 2$ bimestres. Com isso, $F = C \cdot (1 + in) \Leftrightarrow F = 1.500 \cdot (1 + 0,03 \times 2) = 1.500 \cdot (1,06) = R\$\ 1.590,00$. Em razão do exposto, o valor futuro da aplicação feita pelo estagiário será de $R\$\ 1.590,00$.

1.7 Descontos no Regime de Juros Simples

Segundo Mathias [23], quando se faz uma aplicação de capital com vencimento predeterminado, obtém-se um comprovante de aplicação que pode ser, por exemplo, uma nota promissória. O autor afirma ainda que caso o aplicador precise do dinheiro antes de vencer o prazo da aplicação, deve voltar à instituição captadora, transferir a posse do título e levantar o principal e os juros já ganhos. Assim, conforme Mathias [23], todas as operações citadas anteriormente são chamadas de "descontos"e o ato de efetuá-las é chamado de "descontar um título".

Por sua vez, Puccini [32] introduz a seguinte definição para desconto.

> Desconto é a diferença entre o valor nominal do título e o valor pago por ele numa certa data (anterior à data do vencimento). É uma operação financeira criada para atender a detentores de títulos de crédito, como nota promissória e duplicata mercantil e de serviços, que necessitam transformá-los em dinheiro antes da data do vencimento; nesse caso, o detentor poderá negociar com um agente financeiro que lhe antecipará um valor inferior ao valor nominal (PUCCINI, ERNESTO; 2011, p. 45).

Assim, o desconto é uma operação financeira destinada a possuidores de títulos que vislumbrem a demanda de transformá-los em dinheiro para fins variados. Pode-se considerar, por exemplo, que devido a necessidade de capital de giro uma empresa desconte seus títulos em uma instituição financeira realizando, portanto, uma operação de desconto.

Definição 1.7.1. *A quantia de desconto, em qualquer regime de juros e espécie de desconto, é equivalente à diferença entre o valor nominal e o valor atual do título. Portanto, sendo* D *o desconto,* N *o valor nominal e* A *o valor atual, tem-se que* $D = N - A$.

1.7.1 Desconto Comercial ou Desconto "Por Fora" Simples

Definição 1.7.2. *O desconto comercial -* D_C *- ou desconto "Por Fora" simples é diretamente proporcional ao valor nominal -* N *-, sendo a taxa de desconto -* i *- o fator de proporcionalidade. Portanto,* $D_C = Ni$.

Lema 1.7.3. *O desconto comercial -* D_c *- é diretamente proporcional ao valor nominal -* N *- e ao tempo -* n *- que falta para o vencimento do título, sendo a taxa -* i *- de desconto o fator de proporcionalidade, então* $D_c = Nin$.

Demonstração. Temos que, no primeiro instante, o desconto comercial simples é dado, pela Definição 1.7.2, por Ni e, por outro lado, como o regime em análise é o de juros simples, então segue que em cada um dos intervalos seguintes os descontos comerciais são idênticos a Ni. Daí, usando a recorrência, obtemos:

$D_{C_1} = Ni.$

$D_{C_2} = D_{C_1} + Ni = Ni + Ni = N \cdot i \cdot 2.$

$\vdots$

$D_{C_n} = D_{C_{n-1}} + Ni = \underbrace{Ni + Ni + \cdots + Ni}_{\text{(n-1)-termos}} + Ni = N \cdot i \cdot n.$

Portanto, o desconto comercial simples é da forma $D_{C_n} = Nin$. □

Exemplo 1.7.4. *[5] Uma duplicata*[7] *com valor de face igual a R$ 15.000,00 será descontada 4 meses antes de seu vencimento, à taxa de desconto comercial simples de 6% a.a. Determine o valor do desconto.*

Solução: Primeiramente, vamos colocar a taxa e o prazo de vencimento na mesma unidade de tempo. Ou seja, $n = 4$ m e $i = 6\%$ a.a.$=\frac{6\%}{12}$a.m. $= 0,5\%$ a.m. Agora,

[7]**Duplicata:** Título privado de crédito mediante o qual o comprador de um bem se compromete a pagar ao vendedor, no prazo fixado, a importância estipulada. Corresponde a uma cópia da fatura que, nas vendas comerciais a prazo, o vendedor é obrigado a entregar ao comprador; este devolverá ao vendedor a duplicata assinada, caso as condições da transação atendam ao combinado, segundo Sandroni [34].

pelo Lema 1.7.3, temos que $D_c = 15.000 \cdot \frac{0,5}{100} \cdot 4 = R\$\ 300,00$. Portanto, o valor do desconto da duplicata é de $R\$\ 300,00$.

Teorema 1.7.5. *No sistema de juros simples, um valor nominal - N - aplicado a uma taxa - i - de desconto comercial, no instante - n - que falta para o vencimento do título, transforma-se em um valor atual $A = N(1 - in)$.*

Demonstração. Como, por definição, $D_c = N - A$ e, pelo Lema 1.7.3, $D_c = Nin$, temos que $Nin = N - A$. Daí, $A = N - Nin$. Logo, colocando N em evidência, obtemos $A = N(1 - in)$.

□

Exemplo 1.7.6. *Uma empresa descontou em um banco uma duplicada de $R\$\ 3.000,00$ um mês e meio antes do seu vencimento, a uma taxa de desconto comercial de $0,6\%$ a.m. Determine o valor atual da duplicata.*

Solução: Aplicando o Teorema 1.7.5 e utilizando as informações do exemplo, obtemos $A = 3.000(1 - 0,006 \cdot 1,5) = R\$\ 2.973,00$. Por conseguinte, o valor atual da duplicata é de $R\$\ 2.973,00$.

1.7.2 Desconto Racional ou Desconto "Por Dentro" Simples

Definição 1.7.7. *O desconto racional - D_R - é diretamente proporcional ao valor atual - A -, sendo a taxa de desconto - i - o fator de proporcionalidade. Portanto, $D_R = Ai$.*

Lema 1.7.8. *O desconto racional ou desconto "Por Dentro" - D_r - é diretamente proporcional ao valor atual - A - e ao tempo - n - que falta para o vencimento do título, sendo a taxa - i - de desconto o fator de proporcionalidade, então $D_r = Ain$.*

Demonstração. Temos que, no primeiro instante, o desconto racional é dado, pela Definição 1.7.7, por Ai e, por outro lado, como o regime em análise é o de juros simples, então segue que em cada um dos intervalos seguintes os descontos racionais são idênticos a Ai. Daí, usando recorrência, obtemos:

$D_{R_1} = Ai$.

$D_{R_2} = D_{R_1} + Ai = Ai + Ai = A \cdot i \cdot 2$.

$\vdots$

$D_{R_n} = D_{R_{n-1}} + Ai = \underbrace{Ai + Ai + \cdots + Ai}_{\text{(n-1)-termos}} + Ai = A \cdot i \cdot n$.

Portanto, o desconto racional simples é da forma $D_{R_n} = Ain$. □

Exemplo 1.7.9. *O valor atual de um título é de* $R\$ \; 30.000,00$. *Ele sofreu um desconto simples por dentro de* W *reais,* 3 *meses antes do seu vencimento e a uma taxa de desconto de* 2% *ao mês. Qual o valor de* W*?*

Solução: Temos, pelo Lema 1.7.8, que $D_R = A \cdot i \cdot n$. Como $A = R\$ \; 30.000,00$, $i = 2\%$ a.m.$= 0,02$ a.m. e $n = 3$ meses, obtemos $D_R = 30.000 \cdot 0,02 \cdot 3 = R\$ \; 1.800,00$. Portanto, o valor de W é $R\$ \; 1.800,00$, que representa o valor do desconto.

Teorema 1.7.10. *No sistema de juros simples, um valor nominal - N - aplicado a uma taxa - i - de desconto racional, no instante - n - que falta para o vencimento do título, transforma-se em um valor atual* $A_n = \frac{N}{1+in}$.

Demonstração. Como, por definição, $D_r = N - A$ e, pelo Lema 1.7.8, $D_r = Ain$, temos que $N - A = Ain$. Daí, $N = Ain + A$. Logo, colocando A em evidência, obtemos $A(in+1) = N$, que equivale a $A = \frac{N}{1+in}$.

□

Exemplo 1.7.11. *Um título com vencimento em 19/02/2019, no valor de* $R\$ \; 7.865,00$, *foi descontado em 22/11/2018. Caso a taxa racional de desconto simples seja de* $0,7\%$ *a.m., qual será o valor do título?*

Solução: Primeiramente, perceba que o período compreendido de 22/11/2018 até 19/02/2019 equivale a 90 dias, isto é, a 3 meses. Desse modo, como $N = R\$ \; 7.865,00$ e $i = 0,7\%$ a.m., segue que $A = \dfrac{7.865}{(1 + 3 \times 0,007)} = \dfrac{7.865}{1,021} \approx R\$ \; 7.703,23$. Por conseguinte, caso a taxa de desconto racional simples seja de $0,7\%$ a.m., o valor atual do título será de aproximadamente $R\$ \; 7.703,23$.

Exemplo 1.7.12. *Determine o desconto racional simples em função do valor nominal.*

Solução: Basta substituir o Teorema 1.7.10 no Lema 1.7.8, gerando:

$$D_r = \frac{Nin}{1+in}, \tag{1.1}$$

como queríamos determinar.

1.7.3 Relação entre Desconto Racional e Comercial Simples

Experimentalmente, ou seja, através da resolução de exercícios, conjectura-se que o desconto comercial simples é maior do que o desconto racional simples, *Ceteris Pa-*

ribus[8]. Podemos, de fato, ir além, isto é, afirmar que, para mesma taxa e mesmo prazo que falta para o vencimento do título, sempre o desconto comercial é maior que o racional, bastando analisar o teorema abaixo.

Teorema 1.7.13. *O desconto comercial - D_c -, em relação ao desconto racional simples, é dado por $D_c = D_r(1 + in)$, onde i e n são, respectivamente, a taxa e o prazo que falta para o vencimento do título de ambos os descontos.*

Demonstração. Pelo Lema 1.7.3, temos que:

$$D_c = Nin. \tag{1.2}$$

Por outro lado, pela Equação (1.1), segue que:

$$D_r = \frac{Nin}{1 + in}. \tag{1.3}$$

Portanto, das equações (1.2) e (1.3), obtemos:

$$D_r = \frac{D_c}{1 + in}.$$

Logo,

$$D_c = D_r(1 + in).$$

□

Assim, pelo teorema anterior, de fato, o desconto comercial é maior do que o desconto racional simples para mesma taxa e mesmo prazo que falta para o vencimento do título.

Exemplo 1.7.14. *Uma nota promissória*[9] *sofre um desconto comercial de* $R\$\ 12.000,00$*,* 5 *meses antes do seu vencimento, a uma taxa de desconto de* $0,4\%$ *ao mês. Se fosse*

[8]**Ceteris Paribus:** Expressão em latim que significa "permanecendo constante todas as demais variáveis". Muito utilizado em economia quando se deseja avaliar as consequências de uma variável sobre outra, supondo-se as demais inalteradas, segundo Sandroni [34].

[9]**Nota Promissória:** Instrumento de crédito representado por uma promessa incondicional por escrito entre dois agentes, assinada por aqueles que se comprometem a pagar em determinada data uma soma determinada de dinheiro ao primeiro, ou ao portador da nota promissória, segundo Sandroni [34].

um desconto racional simples, qual seria o valor do desconto correspondente à mesma taxa?

Solução: Aplicando o Teorema 1.7.13 e sabendo que $D_c = R\$\ 12.000,00$, $n = 5m$ e $i = 0,004$ a.m., temos que $12.000 = D_R \cdot 1,02$. Daí, $D_R \approx R\$\ 11.764,70$. Logo, caso fosse um desconto racional simples, o valor do desconto correspondente à mesma taxa seria de aproximadamente $R\$\ 11.764,70$.

1.7.4 Desconto Bancário Simples

Consoante Mathias [23], o desconto bancário corresponde ao desconto comercial acrecido de uma taxa prefixada, cobrada sobre o valor nominal. O autor acrescenta que esta taxa de despesas bancárias é referida frequentemente como sendo as despesas administrativas do banco ou instituição que faz a operação. Para ele, em Matemática Financeira (1993, p. 64), o desconto bancário pode ser entendido como uma extensão do desconto comercial.

Por sua vez, Assaf Neto [1], expõe sua visão sobre desconto bancário, conforme a citação seguinte.

> É importante registrar que em operações de desconto com bancos comerciais são geralmente cobradas taxas adicionais de desconto a pretexto de cobrir certas despesas administrativas e operacionais incorridas pela instituição financeira. Estas taxas são geralmente prefixadas e incidem sobre o valor nominal do título uma única vez no momento do desconto (ASSAF, 2012, p. 44).

Então, o estudo do desconto bancário é relevante dentro do Cálculo Financeiro, pois as operações de descontos de títulos realizadas em instituições financeiras acarretam uma parcela extra, atrelada as despesas administrativas e operacionais dos bancos, portanto, entender as operações envolvidas em tal desconto enriquecerá os conhecimentos dos professores do ensino médio.

Definição 1.7.15. *Desconto bancário é dado pela soma do desconto comercial com uma taxa prefixada, cobrada em relação ao valor nominal. Logo, sendo h a taxa de despesa administrativa e D_b o desconto bancário, tem-se que $D_b = D_c + Nh$.*

Utilizando o Lema 1.7.3, temos, como consequência da Definição 1.7.15, que:

$$D_b = N(in + h). \tag{1.4}$$

Teorema 1.7.16. *O valor atual (ou valor descontado bancário) - A -, incluindo a cobrança da taxa administrativa - h -, é $A = N[1 - (in + h)]$, em que i é a taxa de desconto comercial e n é o número de períodos antes do vencimento.*

Demonstração. Como, pela Definição 1.7.1, $D = N - A$ e, pela Equação 1.4, $D_b = N(in+h)$, então $N(in+h) = N - A$. Daí, $A = N - N(in+h)$. Logo, colocando N em evidência, temos que $A = N[1 - (in + h)]$. □

Exemplo 1.7.17. *[23] Um título de $R\$$ 5.500,00 foi descontado no Banco X, que cobra 2% como despesa administrativa. Sabendo que o título foi descontado 3 meses antes do seu vencimento e que a taxa corrente em desconto comercial é de 40% a.a., responda os itens abaixo:*

a) Qual o desconto bancário?

b)Quanto recebeu o proprietário do título?

Solução:

(a) Temos que $h = 0,02$, $N = R\$\ 5.500,00$, $i = \dfrac{0,4}{12}$ e $n = 3$ m. Consequentemente, pela Equação (1.4), segue que:

$$\begin{aligned} D_b &= 5.500 \cdot \left(\frac{0,4}{12} \cdot 3 + 0,02\right) \\ &= 5.500 \cdot (0,10 + 0,02) \\ &= 5.500 \cdot (0,12) \\ &= R\$\ 660,00. \end{aligned}$$

Logo, o desconto bancário é de $R\$$ 660,00.

(b) Utilizando o Teorema 1.7.16 e substituindo os dados do exemplo, obtemos:

$$\begin{aligned} A_b &= 5.500 \cdot \left[1 - \left(\frac{0,4}{12} \cdot 3 + 0,02\right)\right] \\ &= 5.500 \cdot [1 - (0,10 + 0,02)] \end{aligned}$$

$$= 5.500 \cdot 0,88$$

$$= R\$\ 4.840,00.$$

Assim, o proprietário do título recebeu $R\$\ 4.840,00$.

1.8 Taxa Equivalente no Regime de Juros Simples

Definição 1.8.1. *Taxas equivalentes são aqueles que quando aplicadas em capitais iniciais coincidentes, por períodos iguais, geram montantes idênticos. Por conseguinte, geram, também, juros iguais.*

Teorema 1.8.2. *No regime de juros simples, se I é uma taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e caso $T = n \cdot t$, então $I = i.n$.*

Demonstração. Assumindo C como o valor inicial de uma grandeza. Depois de um período de tempo T, o valor da grandeza será $C(1 + I \cdot 1)$. Como, por hipótese, um período de tempo T equivalente a n períodos de tempo iguais a t, segue que o valor da grandeza será também igual a $C(1 + ni)$. Daí, temos que $C(1 + I \cdot 1) = C(1 + in)$. Com isso, como $C > 0$, temos que $1 + I = 1 + in$. Portanto, $I = in$. □

Como consequência do teorema, temos que, no regime de juros simples, as taxas de juros equivalentes correspondem as taxas de juros proporcionais.

Exemplo 1.8.3. *Um aluno do 1°ano do Ensino Médio, ao observar duas formas de investimento, no regime de juros simples, decide verificar se ambas são equivalentes. Os casos são:*

1. *Caso: Um capital de* $R\$\ 2.000,00$ *é aplicado à taxa de* $0,3\%$ *a.m. em* 1 *ano.*

2. *Caso: Um capital de* $R\$\ 2.000,00$ *é aplicado à taxa de* $3,6\%$ *a.a. em* 1 *ano.*

Solução: Para resolver esse problema, vamos comparar os juros (rendimentos) em ambos os casos. Para o primeiro caso, temos $J_1 = 2.000 \cdot 0,003 \cdot 12 = R\$ \ 72,00$. Já para o segundo caso, segue que $J_2 = 2.000 \cdot 0,036 \cdot 1 = R\$ \ 72,00$. Logo, como $J_1 = J_2$, o aluno concluiu que os dois casos são equivalentes, tratando-se de um caso de taxas equivalentes.

1.9 Equivalência de Capitais no Regime de Juros Simples

Definição 1.9.1. *Fixada um taxa, no sistema de juros simples, dois ou mais capitais são equivalentes quando suas quantias medidas em qualquer data de referência (focal) são idênticas.*

A definição seguinte é uma generalização de valor atual proposta anteriormente.

Definição 1.9.2. *No regime de juros simples, dados os seguintes capitais C, C_1, C_2, $\cdots$, C_n associados, respectivamente, as seguintes épocas $0, 1, 2, \cdots, n$, fixada um taxa de juros i, chama-se de valor atual A, na data de referência zero, a soma das quantias desses capitais na data de referência zero. Isto é,*

$$A = C + \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+2 \cdot i)} + \cdots + \frac{C_n}{(1+n \cdot i)}$$

.

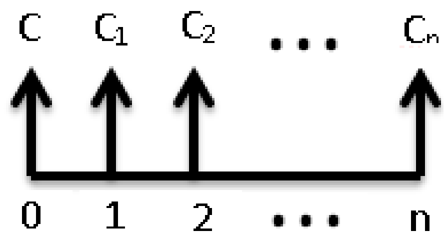

Figura 1.5: *Diagrama de Valor Atual na Data Zero*

Fonte: Autor

Exemplo 1.9.3. *Um universitário de Brasília decide comprar uma bicicleta Caloi e se depara com duas alternativas. A primeira corresponde a compra, à vista, por $R\$$ 1.000,00, já a segunda sai, a prazo, em duas prestações de $R\$505,00$, sendo a cobrança da primeira prestação realizada somente no mês seguinte a compra. Nessa situação, qual a melhor opção de compra para o estudante, tendo em vista que ele pode investir seu dinheiro, a juros simples, a uma taxa de 3% ao mês no banco Capital Federal e tem recursos suficientes para comprá-la à vista?*

Solução: Olhando as alternativas em diagrama, temos:

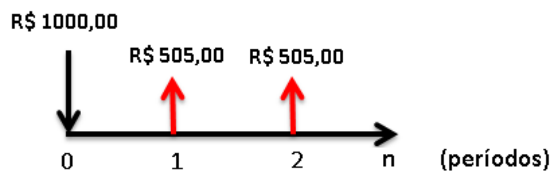

Figura 1.6: *Diagrama de Pagamentos da Bicicleta no Decorrer do Tempo*

Fonte: Autor

Para comparar as duas alternativas de pagamentos e tirar uma conclusão, vamos trazer as parcela de $R\$$ 505,00, atreladas aos tempos 1 e 2, para a data de referência zero. Procedendo, temos:

$$A = \frac{505}{(1+0,03\cdot 1)} + \frac{505}{(1+0,03\cdot 2)} = \frac{505}{1,03} + \frac{505}{1,06} \approx R\$\ 966,71.$$

Portanto, como à vista a bicicleta sairia por $R\$\ 1.000,00$, a forma mais vantajosa para o universitário é a parcelada, que custará na data zero $R\$\ 966,71$.

Propriedade 1.9.4. *No regime de juros simples, caso dois ou mais capitais sejam equivalentes na data de referência (data focal) zero, então eles serão iguais em outra data focal que antecede ou procede de n períodos a data de referência zero.*

A demonstração a seguir tem como norte Costa [8].

Demonstração. Faremos a análise apenas da equivalência de capitais para o desconto comercial simples, pois o caso do desconto racional simples é semelhante. Desse modo, temos que:

$A_1 = A_2$. Com isso, $N_1(1-n_1\cdot i) = N_2(1-n_2\cdot i)$. Agora, multiplicando $(1-n\cdot i)$ em ambos os lados da última equação, obtemos:

$$N_1(1-n_1\cdot i)\cdot(1-n\cdot i) = N_2(1-n_2\cdot i)\cdot(1-n\cdot i).$$

Assim,

$$A_1' = A_2'.$$

□

Exemplo 1.9.5. *Um título no valor de $R\$\ 15.000,00$ por 30 dias foi permutado por outro de $R\$\ 20.000,00$ por 450 dias. Qual a taxa de juros comercial simples que foi usada para que esses títulos sejam equivalentes?*

Solução: Como, por hipótese, os títulos são equivalentes, temos que $A_1 = A_2$. Daí, $N_1(1-i\cdot n_1) = N_2(1+i\cdot n_2)$. Com isso, pelas demais informações do problema, temos que $N_1 = R\$\ 15.000,00$, $n_1 = 1$ mês, $N_2 = R\$\ 20.000,00$ e $n = 15$ meses. Daí, $15.000(1-i\cdot 1) = 20.000(1-i\cdot 15)$. Agora, fazendo a operação distributiva na última equação, obtemos $15.000 - 15.000\cdot i = 20.000 - 300.000\cdot i$. Logo, $-5 = -285\cdot i$. Assim, $i = \dfrac{5}{285} = \dfrac{1}{57} \approx 1,75\%$. Portanto, a taxa de juros comercial simples para que esses títulos sejam equivalentes é de aproximadamente $1,75\%$.

No desenrolar deste capítulo foi realizada a análise da estrutura do cálculo financeiro no que se refere ao regime de juros simples. Os conceitos abordados e os exemplos analisados visaram deixar mais clara a compreensão, do assunto discorrido, para os professores do ensino médio, especialmente para os professores do 1º ano.

Assim, concluído este capítulo, haverá, no seguinte, a abordagem da estrutura teórica voltada para o regime de juros compostos, da capitalização contínua e discreta e das diversas taxas de juros.

Capítulo 2

Cálculo Financeiro - Parte 2

Grande parte do arcabouço formal e teórico do Cálculo Financeiro relacionado ao regime de juros compostos está representado neste capítulo. Ele servirá de base para o professor do ensino médio, em geral do 2° ano, desenvolver, de forma contundente e aprofundada, com qualidade e rigor, os conteúdos matemáticos que achar relevante abordar no seu ambiente escolar. Além disso, contribuirá, também, para sanar eventuais dúvidas e questionamentos que o docente tenha sobre os assuntos teóricos, discutidos nele, que surjam em sala de aula.

No desenvolvimento do capítulo 2 há uma extrapolação de conceitos abordados no ensino médio, porém como o material é voltado para professores, que devem ter um grau de conhecimento maior que os discentes, para eventuais questionamentos e origem das estruturas matemáticas, houve a utilização de conceitos de limites e integrais ao longo do capítulo 2, ainda assim, não descaracterizando os objetivos traçados, pois o material é voltado exatamente para professores do ensino médio, como fonte também de pesquisa e dúvidas nos tratos dos assuntos do Cálculo Financeiro. Além do que, existem alunos que questionam várias demonstrações e se interessam em aprofundamento dos conteúdos. Para tanto, o professor do ensino médio necessita destes conhecimentos ainda que, por ventura, não venha a utilizá-los em seu dia a dia.

Os resultados teóricos contidos neste capítulo podem ser encontrados em diversos livros, tais como: Matemática Financeira de Mathias e Gomes [23], Matemática Financeira de Barros [5], Matemática Financeira e suas Aplicações de Assaf Neto [1], Fundamentos da Matemática Elementar de Iezzi [18], Matemática Financeira Aplicada: Mercado de Capitais, Adminstração Financeira, Finanças Pessoais e Tesouro Direto de Ferreira [13], Álgebra Financeira de Vilanova [40], Matemática Discreta de Morgado [24], Progressões e Matemática Financeira de Morgado e Wagner [24], Princípios e Aplicações do Cálculo Financeiro de Faro [12], Análise 1 de Figueiredo [14], Matemática Financeira e suas Aplicações de Neto [26], Mercado Financeiro de Assaf Neto [2], Novíssimo Dicionário de Economia de Sandroni [34] e A matemática do Ensino Médio de Lima [20].

2.1 Regime de Juros

2.1.1 Regime de Juros Compostos

Conforme Barros [5], em seu livro Matemática Financeira (2014, p. 3-4), temos que: "O regime de juros compostos é aquele que os juros de cada período são calculados levando-se em conta os juros auferidos nos períodos anteriores, ou seja, os rendimentos anteriormente ganhos são incorporados ao capital inicial, incidindo os juros sobre o montante, daí dizer-se que há incidência de juros sobre juros. Aos juros assim calculados damos o nome de juros compostos".

Como se observa nas palavras do autor acima, o juro composto é aquele que é calculado levando em consideração os juros obtidos nos períodos anteriores, visto que eles são incorporados ao capital inicial. Nesse caso, apenas no primeiro período é que os juros são calculados sobre o capital inicial.

2.2 Juros Compostos

Na mesma perspectiva do capítulo anterior, abordar-se-á, de início, visões fundamentais de alguns autores, tais como Assaf Neto [1] e Vilanova [40], a respeito do tema, e, *a posterior*, mostraremos toda estrutura matemática teórica envolvida nos tópicos do capítulo.

Nesse sentido, Assaf Neto, em seu livro Matemática Financeira e suas Aplicações (2012, p. 6), expõe algumas aplicações da lei de juros compostos, conforme o seguinte trecho: "...outros segmentos além do mercado financeiro também seguem as leis dos juros compostos, tais como o estudo do crescimento demográfico, do comportamento dos índices de preços da economia, da evolução do faturamento e de outros indicadores empresariais de desempenho, dos agregados macroeconômicos, da apropriação contábil de receita e despesa financeiras, etc". Já Vilanova, em Álgebra Financeira (1980, p. 19), apresenta outra aplicação de juros compostos citando " ...no cálculo de letra de câmbio com correção monetária são adotados juros compostos mesmo que o prazo da operação seja de um dia".

Portanto, percebe-se, de fato, a relevância de abordar os conceitos de Cálculo Financeiro atrelados ao regime de juros compostos, visto que eles são aplicados no mercado financeiro, nos índices de preços da economia, nos indicadores de desempenhos empresariais, nos cálculos de letra de câmbio, etc. Assim, adiante, os leitores encontrarão os conceitos matemáticos atrelados aos juros compostos.

Lema 2.2.1. *Juros compostos aplicado a um capital - C - incidindo em uma taxa de juros - i -, no instante - n -, é igual a* $J_{c_n} = C[(1+i)^n - 1]$.

Demonstração. Temos que, no primeiro instante, os juros compostos são dados, pela Definição 1.1.1, por Ci e, por outro lado, como no regime de juros compostos, em cada um dos intervalos seguintes tem-se juros sobre juros. Daí, usando a recorrência e o Binômio de Newton, além de tomar C como capital inicial, segue que:

$J_{c_1} = Ci.$

$J_{c_2} = (2C + J_{c_1})i = (2C + Ci)i = C(2+i)i = C[(1+i)^2 - 1].$

$J_{c_3} = (3C + J_{c_1} + J_{c_2})i = [3C + Ci + C(2+i)i]i = [3C + 3Ci + Ci^2]i = C(3 + 3i + i^2)i = C[(1+i)^3 - 1].$

$\vdots$

$J_{c_n} = (nC + J_{c_1} + J_{c_2} + J_{c_3} + \cdots + J_{c_{n-1}})i = C[(1+i)^n - 1].$

Portanto, os juros compostos são da forma $J_{c_n} = C[(1+i)^n - 1]$.

□

Exemplo 2.2.2. *Um capital de R\$ 50.000,00 foi aplicado num fundo de investimento por 6 meses a uma taxa de juros compostos de 0,25% ao mês. Qual o rendimento financeiro (juros) apurado por esta operação?*

Solução: Pelo Lema 2.2.1, segue que $J = C[(1+i)^n - 1]$. Como $i = 0,25\% = 0,0025$ a.m, $C = R\$ \ 50.000,00$ e $n = 6$ meses, temos que:

$$J = 50.000 \cdot [(1,0025)^6 - 1] \approx R\$ \ 754,70.$$

Portanto, o rendimento financeiro (juros) apurado por esta operação é de aproximadamente $R\$ \ 754,70$.

Teorema 2.2.3. *No sistema de juros compostos, um capital C aplicado a uma taxa i, no instante n, transforma-se em um montante $M_n = C(1+i)^n$.*

Demonstração. Observe que $M_1 = C(1+i)$, pois, por definição, $M = C + J$ e $J = Ci$. Daí, como no sistema de juros compostos temos juros sobre a dívida inicial, segue que $M_2 = M_1(1+i)$, ou seja, $M_2 = C(1+i)(1+i)$. Procedendo de forma análoga para M_3, obtemos $M_3 = C(1+i)(1+i)(1+i)$, e assim por diante. Com isso, a sequência $(M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão igual a $(1+i)$. Logo, $M_n = M_1.(1+i)^{n-1}$, que equivale a $M_n = C(1+i)(1+i)^{n-1}$. Portanto, $M_n = C(1+i)^n$. $\square$

Exemplo 2.2.4. *Um estudante aplicou, em uma instituição financeira, $R\$ \ 10.000,00$ a uma taxa de juros compostos de $0,15\%$ ao mês durante 3 meses. Determine o valor total resgatado (montante) pelo estudante.*

Solução: Temos, pelo Teorema 2.2.3, que $M = C(1+i)^n$. Daí, como $C = R\$ \ 10.000,00$, $i = 0,15\% = 0,0015$ e $n = 3$ meses, temos que:

$$M = 10.000 \cdot (1 + 0,0015)^3 = 10.000 \cdot (1,0015)^3 \approx R\$ \ 10.045,07.$$

Portanto, o valor resgatado (montante) pelo estudante é de aproximadamente $R\$ \ 10.045,07$.

Corolário 2.2.5. *O instante de tempo n, no regime de juros compostos, é da forma:*

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}, \tag{2.1}$$

onde M, C e i são, respectivamente, o montante, o capital e a taxa.

Demonstração. Segundo o Teorema 2.2.3, segue que $M_n = C(1+i)^n$. Com isso,

$$(1+i)^n = \frac{M}{C} \ (*).$$

Como $i > 0$, temos que $(1+i)^n > 0$. Por outro lado, $M > 0$, pois $M = C + J$ e J e C são maiores que zero. Daí, aplicando logaritmo natural a ambos os lados da igualdade (*), encontra-se $\ln(1+i)^n = \ln\left(\frac{M}{C}\right)$. Daí, utilizando as propriedades de logaritmo, $n \cdot ln(1+i) = \ln\left(\frac{M}{C}\right)$. Assim,

$$n = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{2.2}$$

□

Exemplo 2.2.6. *Uma aplicação de* $R\$ \ 25.000,00$ *rende* $R\$ \ 4.000,00$ *de juros no regime composto. Informe o tempo que esse capital permanece aplicado à taxa de* 5% *ao semestre.*

Solução: Temos que $M = R\$ \ 29.000,00$. Daí, pelo Corolário 2.2.5, segue que:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{29.000}{25.000}\right)}{\ln(1+0,05)} = \frac{\ln(1,16)}{\ln(1,05)} \approx \frac{0,1484}{0,0488} \approx 3 \text{ semestres.}$$

Logo, o tempo que esse capital permanece aplicado à taxa de 5% ao semestre é de aproximadamente 3 semestres.

2.3 Capitalização

Para Costa [8],

Definição 2.3.1. *Chamamos de capitalização ao procedimento de acrescentar juros ao capital. De um modo geral, no regime de capitalização composta o valor inicial deve ser corrigido período a período. Essas correções são agregadas e sucessivas por n períodos em função de uma taxa de juros contratada.*

2.3.1 Capitalização Discreta ou Descontínua

Definição 2.3.2. *A capitalização discreta é aquela em que os juros incorrem só no final de cada período de capitalização.*

Segundo Securato [35], segue que:

> Quando operamos com regime de capitalização discreta, os juros gerados são incorporados ao capital somente no fim de cada intervalo de tempo a que se refere a taxa de juros considerada (SECURATO, 2008, p. 30).

O maior exemplo é a caderneta de poupança que rende juros, a partir do mês seguinte, somente na data do aniversário mensal da aplicação.

Clovis de Faro [12], no Tópico 4.2, utiliza-se da nomenclatura capitalização descontínua, em detrimento de capitalização discreta, em relação a última definição, conforme citação abaixo:

> Suponha-se agora que seja convencionado que o juros só seja formado no fim de cada período (finito) de tempo a que se refere a taxa de juros considerada. Por esta convenção, que, por exemplo, na prática corrente, é adotada ao pé da letra no cálculo dos rendimentos das chamadas Cadernetas de Poupança, o capital passa a evoluir de uma maneira descontínua (...) (FARO, 1990, p. 8).

Dessa forma, a capitalização discreta é aquela em que os juros ocorrem de maneira descontínua, como o que ocorre nas Cadernetas de Poupança.

2.3.2 Capitalização Contínua

Para elucidar o processo de capitalização contínua introduziremos, abaixo, um exemplo gancho para facilitar o ensino-aprendizagem.

Um aluno da educação básica, dispondo de um capital C, decide investi-lo em uma aplicação financeira atrelada a uma taxa de $k\%$ ao ano. Assim, tomando $\epsilon = \frac{k}{100}$, tem-se que, para cada real investido, em intervalos anuais, ele receberá um ganho de $1 + \epsilon$ reais. Daí, no final de um ano, o montante assegurado será de $C(1 + \epsilon)$. Porém, com o intuito de aumentar a lucratividade, o estudante analisa e percebe que, caso resgate o dinheiro nos seis primeiros meses, disporá de metade dos juros anuais, portanto receberá $C\left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right)$ reais. Logo, decide reinvestir a soma por mais um semestre e, ao final de um ano, terá $C\left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right)^2$ reais, correspondendo a uma quantia maior que o caso introdutório, pois desfrutando dos conhecimentos da desigualdade de Bernoulli[10], o qual aprendera em aulas de Matemática Financeira, o mesmo concluiu, escorreitamente, que $\left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right)^2 > \left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right)$.

Raciocinando melhor, o discente decide reinvestir o capital inicial mensalmente adquirindo, no final de um ano, uma importância de $\left(1+\dfrac{\epsilon}{12}\right)^{12} > \left(1+\dfrac{\epsilon}{2}\right)^2$.

Empolgado com o desfecho, o estudante conjecturou que resgatando e reinvestindo seu capital inicial num número y (período de capitalização), cada vez maior, de instantes iguais, conseguirá alargar seu capital ilimitadamente. Todavia, procedendo conforme o seu pensamento, no final de um ano, ele auferirá um valor igual a:

$$C.\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{\epsilon}{y}\right)^y = Ce^{\epsilon}$$

.

Assim, o aluno estava correto, em sua análise, quando pensava no seguinte caso:

- $\forall$ y $\in \mathbb{N}^*$ e todo $\epsilon > 0$, tem-se:

$$\left(1+\frac{\epsilon}{y}\right)^y < \left(1+\frac{\epsilon}{y+1}\right)^{y+1}$$

.

Demonstração. Tome $a_y = \left(1+\dfrac{\epsilon}{y}\right)^y$. Daí, $a_y = \left(1+\dfrac{\epsilon}{y}\right)^y = \left(\dfrac{y+\epsilon}{y}\right)^y$.

[10]**Desigualdade de Bernoulli:** Se i $\in \mathbb{R}$, com i $\geq$ -1, então $(1+i)^n \geq (1+in)$, para todo inteiro n $\geq$ 1.

Assim, seque que:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{y+1}}{a_y} &= a_{y+1} \cdot \left(\frac{1}{a_y}\right) \\
&= \frac{(y+\epsilon+1)^{y+1}}{(y+1)^{y+1}} \cdot \frac{y^y}{(y+\epsilon)^y} = \frac{(y+\epsilon+1)^y}{(y+1)^y} \cdot \frac{y+\epsilon+1}{y+1} \cdot \frac{y^y}{(y+\epsilon)^y} \\
&= \frac{(y+\epsilon+1)}{(y+1)} \cdot \left(\frac{y[y+\epsilon+1]}{(y+1)\cdot(y+\epsilon)}\right)^y \\
&= \frac{(y+\epsilon+1)}{(y+1)} \cdot \left(\frac{y^2+\epsilon y+y}{y^2+\epsilon y+y+\epsilon}\right)^y \\
&= \frac{(y+\epsilon+1)}{(y+1)} \cdot \left(\frac{y^2+\epsilon y+y+\epsilon-\epsilon}{y^2+\epsilon y+y+\epsilon}\right)^y \\
&= \frac{(y+\epsilon+1)}{(y+1)} \cdot \left(1+\frac{-\epsilon}{y^2+\epsilon y+y+\epsilon}\right)^y
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Como $\left(\frac{-\epsilon}{y^2+\epsilon y+y+\epsilon}\right) \geq -1$, pois $y \geq 1$ e $\epsilon > 0$, segue, pela desigualdade de Bernoulli, que:

$$\frac{(y+\epsilon+1)}{(y+1)} \cdot \left(1+\frac{-\epsilon}{y^2+\epsilon y+y+\epsilon}\right)^y \geq \frac{(y+\epsilon+1)}{(y+1)} \cdot \left(1+\frac{-\epsilon y}{y^2+\epsilon y+y+\epsilon}\right)$$

Com isso, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{y+1}}{a_y} &\geq \frac{(y+\epsilon+1)}{(y+1)} \cdot \left(\frac{y^2+\epsilon y+y+\epsilon-\epsilon y}{y^2+\epsilon y+y+\epsilon}\right) \\
&= \frac{y^3+y^2\epsilon+2y^2+2y\epsilon+y+\epsilon+\epsilon^2}{y^3+y^2\epsilon+2y^2+2y\epsilon+y+\epsilon} \\
&= 1+\frac{\epsilon^2}{y^3+y^2\epsilon+2y^2+2y\epsilon+y+\epsilon} \\
&> 1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(1+\frac{\epsilon}{y}\right)^{y} < \left(1+\frac{\epsilon}{y+1}\right)^{y+1}.$$

$\square$

Entretanto, o aluno se equivocou ao conjecturar que o procedimento de capitalização contínua levaria à um lucro ilimitado, pois todos os termos de $\left(1+\frac{\epsilon}{y}\right)^{y}$ são menores do que e^{ϵ}.

Para deixar o estudo completo, até esse momento, do exemplo gancho, e como forma de complementação teórica para os professores em sala de aula, vamos mostrar formalmente que:

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}} = e$$

e, posteriormente, como um caso particular, que $\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{\epsilon}{y}\right)^{y} = e^{\epsilon}$, onde e é chamado de número de Euler.

Para tal demonstração introduziremos, a seguir, alguns conceitos de logaritmos, primordiais, baseados em Figueiredo [14].

Conforme Figueiredo, em seu Livro de Análise 1, (1996, p. 147) podemos considerar:

$$F(x) = \int_1^x \tfrac{1}{t}dt,$$

sendo $f(x) = \frac{1}{x}$, contínua em qualquer intervalo $[a, b]$ e com $x \in (0, \infty)$.

Ainda, segundo Figueiredo [14], o valor da função F no ponto x, com $x > 1$, pode ser interpretado graficamente como a área entre o eixo x, a curva $\frac{1}{x}$, a reta vertical que passa pelo ponto 1 e a reta vertical que passa pelo ponto x.

Assim, conforme Figueiredo [14], se $x < 1$, $F(x)$ é o oposto da área, pois, neste caso,

$$\int_1^x \tfrac{1}{t}dt = -\int_x^1 \tfrac{1}{t}dt.$$

Definição 2.3.3. *Uma função F, com as mesmas características da definida acima, é nomeada função logarítmica natural, sendo $F(x)$ o logaritmo natural de x e sua representação é $\ln x$. Perceba que $\ln x$ está definida $\forall x > 0$. Logo:*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \text{ com } x > 0.$$

Por consequência da definição anterior, temos que:

1. $\ln 1 = 0$;

2. Se $\ln x > 0$, então $x > 1$;

3. Se $\ln x < 0$, então $x < 1$.

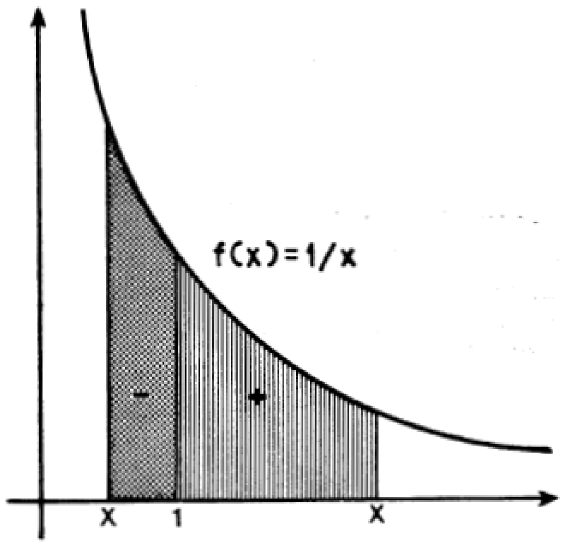

Figura 2.1: *Gráfico de* $\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dt$ *e* $lnx = -\int_x^1 \frac{1}{x} dt$

Fonte: (FIGUEIREDO, 1996, p. 148)

Suponha, por sua vez, que $x_0 > 0$ seja preestabelecido. Daí, a razão incremental associada é dada por:

$$p(x) = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{1}{t} dt. \tag{2.4}$$

Com isso, caso $x > x_0$, obtemos, fazendo uma análise através de áreas e majorando a integral, que:

$$\frac{1}{x}(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{x_0}(x - x_0), \tag{2.5}$$

pois, visualizando o gráfico a seguir, temos que a área hachurada está entre a área $R_2 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ e $R_1 = \frac{1}{x}(x - x_0)$.

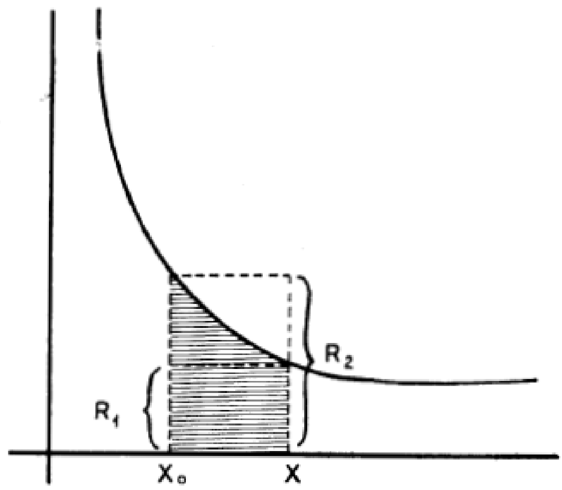

Figura 2.2: *Gráfico de* $\ln x - \ln x_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\ dt$ *em Relação as Áreas* R_1 *e* R_2

Fonte: (FIGUEIREDO, 1996, p. 149)

Logo, de (2.4) e (2.5), segue que:

$$\frac{1}{x} \leq p(x) \leq \frac{1}{x_0}, \tag{2.6}$$

o que implica no seguinte fato.

$$\lim_{x \to x_0^+} p(x) = \frac{1}{x_0}.$$

Procedendo da mesma forma para $x_0 > x$, obtemos:

$$\frac{1}{x_0}(x_0 - x) \leq \int_x^{x_0} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{x}(x_0 - x). \tag{2.7}$$

Assim, de (2.7) e (2.4), temos que:

$$\frac{1}{x_0} \leq p(x) \leq \frac{1}{x}, \tag{2.8}$$

o que implica em:

$$\lim_{x \to x_0^-} p(x) = \frac{1}{x_0}.$$

Diante do exposto, tomando $x_0 = 1$ e $x = 1 + h$, com $h > 0$, na desigualdade (2.6), temos que:

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{\ln(1+h)}{h} \leq 1. \tag{2.9}$$

Fazendo uso da inequação (2.8), encontramos uma desigualdade semelhante à inequação (2.9) para $h < 0$. Tais relações implicam em:

$$p(x_1) = \frac{1}{x} \cdot f(x_1) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + x),$$

com $x > -1$, $x_0 = 1$, $x_1 = x + 1$ e $x \neq 0$.

Além disso,

$$\lim_{x \to 0^+} p(x_1) = \lim_{x \to 0^-} p(x_1) = 1.$$

Com isso,

$$p(x_1) \to 1, \text{ quando } x \to 0.$$

Daí, como $p(x_1) = \ln(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, obtemos que:

$$\ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} \to 1, \text{ quando } x \to 0.$$

Consequentemente, elevando a relação anterior a e, encontra-se:

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} \to e, \text{ quando } x \to 0.$$

Então,

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}. \tag{2.10}$$

Desse modo, fazendo uma mudança de variável da forma $x = \frac{1}{y}$, temos que

$$x \to 0 \Leftrightarrow y \to \infty.$$

Logo,

$$e = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y. \tag{2.11}$$

Portanto, de (2.10) e (2.11), temos que:

$$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

como queríamos mostrar.

O corolário seguinte mostrará o caso particular proposto anteriormente.

Corolário 2.3.4. *São verdadeiras as seguintes igualdades* $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *e para* $x \neq 0$.

$$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{\epsilon}{y}\right)^y = \lim_{x \to 0} (1 + \epsilon \cdot x)^{\frac{1}{x}} = e^{\epsilon}.$$

Demonstração. Fazendo $x = \frac{\epsilon}{y}$, temos, invertendo a igualdade, que $\frac{1}{x} = \frac{y}{\epsilon}$. Com isso, quando $x \to 0$ $y \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{\epsilon}{y}\right)^y = \lim_{y \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{y}\right)^{\frac{y}{\epsilon}}\right]^{\epsilon} = \lim_{x \to 0} \left[(1 + x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\epsilon} = e^{\epsilon}.$$

Para a outra parte, basta tomar $w = \epsilon \cdot x$, fazer $x \to 0$ e proceder de forma análoga a anterior. □

Agora, ficou evidente que o processo fictício de resgatar e reinvestir a cada momento o capital inicial nos levará à ideia de capitalização contínua em juros compostos.

Segue, portanto, a definição de capitalização contínua.

Para Neto [26]

Definição 2.3.5. *A capitalização contínua é um regime que se processa em intervalos de tempo bastante reduzidos - caracteristicamente em intervalos de tempo infinitesimal - promovendo grande frequência de capitalização.*

Assaf Neto, em Matemática Financeira e suas Aplicações (2012, p. 6), retrata muito bem a capitalização contínua no cotidiano no seguinte trecho: "A capitalização contínua, na prática, pode ser entendida em todo fluxo monetário distribuído ao longo do tempo e não somente num único instante. Por exemplo, o faturamento de um supermercado, a formação do custo de fabricação no processamento fabril, a formação de depreciação de um equipamento etc. são capitalizações que se formam continuamente e não somente ao final de um único período (mês, ano)".

Teorema 2.3.6. *Um capital C investido a uma taxa nominal ϵ contínua em um período anual n capitalizados y vezes em intervalos infinitesimais, no regime de capitalização mensal, transforma-se em um montante $M_n = C.e^{\epsilon n}$*

Demonstração. Como o período de capitalização é contínuo, segue que:

$$M = C \cdot \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{y}\right)^{y \cdot n} \right],$$

onde y é o período de capitalização e n é o período de aplicação do capital.

Por sua vez, fazendo manipulações algébricas, temos que:

$$M = C \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{y}{\epsilon}}\right)^{\frac{y}{\epsilon}} \right]^{\epsilon \cdot n}.$$

Dado que a capitalização é realizada em intervalos infinitesimais, então:

$$M = C \cdot \lim_{y \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{y}{\epsilon}}\right)^{\frac{y}{\epsilon}} \right]^{\epsilon \cdot n}.$$

Como $\lim_{y \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{y}{\epsilon}}\right)^{\frac{y}{\epsilon}} \right] = e$, segue que:

$$M_n = C.e^{\epsilon n}.$$

$\square$

Exemplo 2.3.7. *(FCC-SEFAZ SP-2009) Considere que o logaritmo neperiano de* $1,8$ *é igual a* $0,6$*. Aplicando um capital de* $R\$ \ 25.000,00$ *a uma taxa de* 4% *ao mês, com capitalização contínua, verifica-se que o montante, no momento do resgate, é igual a* $R\$ \ 45.000,00$*. O período de aplicação é igual a:*

(A) 12 meses.

(B) 15 meses.

(C) 18 meses.

(D) 21 meses.

(E) 24 meses.

Solução: Temos que $C = R\$ \ 25.000,00$, $\epsilon = 4\%$ a.m. e $M = R\$ \ 45.000,00$. Com isso, pelo Teorema 2.3.6, obtemos:

$$M_n = C.e^{\epsilon n} \Leftrightarrow 45.000 = 25.000 \cdot e^{0,04 \cdot n} \Leftrightarrow 1,8 = e^{0,04 \cdot n}.$$

Aplicando logaritmo natural, em ambos os lados da última equação, temos:

$$\ln 1,8 = \ln e^{0,04 \cdot n}.$$

Como $\ln 1,8 = 0,6$, segue que:

$$0,6 = 0,04 \cdot n \cdot \ln e \Leftrightarrow 0,6 = 0,04 \cdot n \cdot 1 \Leftrightarrow n = 15 \ meses.$$

Logo, o período de aplicação é igual a 15 meses e, assim, a resposta é a letra B.

2.4 Valor Atual, Valor Nominal e Valor Futuro em Juros Compostos

As mesma definições, introduzidas em tópicos anteriores, usadas para os três conceitos permanecem idênticas, porém a estrutura matemática, nesse caso, baseia-se no regime de juros compostos.

Vamos analisar um exemplo de valor futuro.

Exemplo 2.4.1. *[29] O financiamento de produtos com juros a longo prazo é uma das principais estratégias usadas pelo sistema capitalista para o aumento de vendas. As instituições financeiras exercem importante papel nesse processo, ao remunerar capitais de terceiros. Nesse contexto, considere que um cliente tenha comprado um carro a prazo, para pagar em 50 prestações mensais e consecutivas, devendo a primeira prestação de* $R\$ \ 1.000,00$ *ser quitada um mês após a data da compra e as demais reajustadas a uma taxa de juros compostas de* $i\%$ *ao mês. Considere, ainda, que o valor a ser pago na décima prestação seja de* $R\$ \ 1.200,00$. *Com base nessas informações, calcule o valor da décima nona prestação a ser paga pelo cliente.*

Solução: Tomando C como o valor da prestação na data zero, temos que, no primeiro mês, o cliente pagou $R\$ \ 1000,00$, que podemos representar da seguinte forma:

$$1.000 = C \cdot (1+i)^1 \Leftrightarrow C = \frac{1.000}{(1+i)}. \tag{2.12}$$

No 10 mês, ele pagou $R\$ \ 1.200,00$ de prestação. Ou seja,

$$1.200 = C \cdot (1+i)^{10} \Leftrightarrow 1.200 = \left[\frac{1.000}{(1+i)}\right] \cdot (1+i)^{10} \Leftrightarrow 1.200 = 1.000 \cdot (1+i)^9. \tag{2.13}$$

Procedendo de forma análogo para o $19^{\underline{o}}$ mês e considerando VF a prestação a ele associado e as equações (2.12) e (2.13), segue que:

$$VF = C \cdot (1+i)^{19} = \left[\frac{1.000}{(1+i)}\right] \cdot (1+i)^{19} = 1.000 \cdot (1+i)^9 \cdot (1+i)^9 = 1.200 \cdot (1+i)^9. \tag{2.14}$$

Porém, da equação (2.13), obtemos que:

$$(1+i)^9 = 1,2. \tag{2.15}$$

Assim, de (2.14) e (2.15), temos que:

$$VF = 1.200 \cdot 1,2 = R\$\ 1.440,00.$$

Portanto, o valor da prestação (valor futuro) no 19 mês, paga pelo cliente, é de $R\$$ 1.440,00.

2.5 Descontos no Regime de Juros Compostos

A Definição 1.7.1 é análoga para todas as espécies de descontos atreladas aos juros compostos.

2.5.1 Desconto Comercial ou "Por Fora" Composto

Definição 2.5.1. *O desconto comercial composto ou "Por Fora" é o abatimento que tem como base de cálculo o valor nominal do título.*

Teorema 2.5.2. *No regime de juros compostos, um valor nominal - N - aplicado a uma taxa - i - de desconto comercial, no instante - n - que falta para o vencimento do título, transforma-se em um valor atual $A = N(1-i)^n$.*

A demonstração a seguir foi retirada de Costa [8].

Demonstração. Para cada k, seja A_k o valor atual após k períodos de tempo. Temos $A_{k+1} = A_k - iA_k = A_k \cdot (1-i)$. Daí, (A_k) é uma progressão geométrica de razão $1-i$ e, portanto, $A_n = N(1-i)^n$, onde $N = A_0$. □

Exemplo 2.5.3. *Uma empresa descontou em um banco uma duplicata de $R\$$ 3.000,00 um meses e meio antes do seu vencimento, a uma taxa de desconto comercial composto de 0,6% a.m. Determine o valor atual da duplicata.*

Solução: Aplicando o Teorema 2.5.2 e utilizando as informações do exemplo, obtemos $A = 3.000(1 - 0,006)^{1,5} \approx R\$\ 2.973,04$. Por conseguinte, o valor atual da duplicata é de aproximadamente $R\$\ 2.973,04$.

Corolário 2.5.4. *No regime de juros compostos, o desconto comercial é dado por* $D_c = N[1-(1-i)^n]$*, onde* i *é a taxa e* n *o tempo que falta para o vencimento do título.*

Demonstração. Substituindo o Teorema 2.5.2 na Definição 1.7.1, obtemos:

$$D_c = N - N(1-i)^n.$$

Portanto, colocando N em evidência, segue que:

$$D_c = N[1-(1-i)^n].$$

□

Exemplo 2.5.5. *[5] Uma duplicata com valor de face igual a* $R\$\ 15.000,00$ *será descontada* 4 *meses antes de seu vencimento, à taxa de desconto comercial composto de* 60% *a.a. Determine o valor do desconto.*

Solução: Primeiramente, vamos colocar a taxa e o prazo de vencimento na mesma unidade de tempo. Ou seja, $n = 4$ meses e $i = 60\%$ a.a.$=$ 5% a.m. Agora, pelo Corolário 2.5.4, temos que $d = 15.000 \cdot [1-(1-0,05)^4] \approx R\$\ 2.782,41$. Portanto, o valor do desconto da duplicata é de aproximadamente $R\$\ 2.782,41$.

2.5.2 Desconto Racional ou "Por Dentro" Composto

Definição 2.5.6. *O desconto racional composto ou "por dentro" é o abatimento que tem como base de cálculo o valor atual do título.*

Teorema 2.5.7. *No regime de juros compostos, um valor nominal -* N *- aplicado a uma taxa -* i *- de desconto racional, no instante -* n *- que falta para o vencimento do título, transforma-se em um valor atual* $A = \dfrac{N}{(1+i)^n}$.

A demonstração[11] a seguir tem como base Costa [8], porém com alguns incrementos do autor.

Demonstração. Para cada k, seja A_k o valor atual após k períodos de tempo. Temos que $A_k = A_{k+1} \cdot (1+i)$. Daí, (A_k) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{1+i}$ e $A_n = \dfrac{A_0}{(1+i)^n}$, onde $N = A_0$. Logo, $A = \dfrac{N}{(1+i)^n}$. $\square$

Exemplo 2.5.8. *Um título com vencimento em 18/02/2019, no valor de $R\$\ 7.865,00$, foi descontado em 21/11/2018. Caso a taxa racional de desconto composto seja de $0,7\%$ a.m., qual será o valor do título?*

Solução: Primeiramente, perceba que o período compreendido de 21/11/2018 até 19/02/2019 equivale a 90 dias, isto é, a 3 meses. Desse modo, como $N = R\$\ 7.865,00$ e $i = 0,7\%$ a.m., segue que $A = \dfrac{7.865}{(1+0,007)^3} = \dfrac{7.865}{1,02114} \approx R\$\ 7.702,12$. Por conseguinte, caso a taxa de desconto racional composto seja de $0,7\%$ a.m., o valor atual do título será de aproximadamente $R\$\ 7.702,12$.

Corolário 2.5.9. *No regime de juros compostos, o desconto racional é dado por $D_r = N \cdot \left[1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}\right]$, onde i é a taxa, N é o valor nominal do título e n o tempo que falta para o vencimento do título.*

Demonstração. Substituindo o Teorema 2.5.7 na Definição 1.7.1, obtemos:

$$D_r = N - \frac{N}{(1+i)^n}.$$

Portanto, colocando N em evidência, segue que:

$$D_r = N \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

$\square$

Exemplo 2.5.10. *O valor nominal de um título é de $R\$\ 30.000,00$. Ele sofreu um desconto composto "por dentro" de W reais, 3 meses antes do seu vencimento e a uma taxa de desconto de 2% ao mês. Qual o valor de W?*

[11] **Demonstração:** Como forma de ampliar os conhecimentos teóricos, nesse tópico, a sugestão é que os professores de ensino médio desenvolva também as demonstrações dos teoremas 2.5.7 e 2.5.2 utilizando-se recorrência.

Solução: Temos, pelo Corolário 2.5.9, que $D_r = N \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$.
Como $N = R\$ \ 30.000,00$, $i = 2\%$ a.m.$= 0,02$ a.m. e $n = 3$ meses, obtemos:

$$D_r = 30.000 \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+0,02)^3}\right] \approx R\$ \ 1.730,33.$$

Portanto, o valor de W é de aproximadamente $R\$ \ 1.730,33$, que representa o valor do desconto.

2.6 Equivalência de Capitais no Regime de Juros Compostos e Equação Generalizada de Valor Atual em Juros Compostos

Definição 2.6.1. *Fixada uma taxa, no sistema de juros compostos, dois ou mais capitais são equivalentes quando suas quantias, medidas em qualquer data de referência (focal), são idênticas.*

Definição 2.6.2. *No regime de juros compostos, dados os seguintes capitais C, C_1, C_2, $\cdots$, C_n associados, respectivamente, as seguintes épocas $0, 1, 2, ..., n$, fixada uma taxa de juros, chama-se de valor atual A, na data de referência zero, a soma das quantias desses capitais na data de referência. Ou seja, $A = C + \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$.*

Propriedade 2.6.3. *No regime de juros compostos, caso dois ou mais capitais sejam equivalentes na data de referência (data focal) zero, então eles serão iguais em outra data focal que antecede ao procede de n períodos a data de referência zero.*

A demonstração dessa proposição foi extraída de Costa [8].

Demonstração. Faremos a análise apenas da equivalência de capitais para o desconto comercial simples, pois o caso do desconto racional simples é semelhante. Desse modo, temos que:

$A_1 = A_2$. Com isso, $N_1(1-i)^{n_1} = N_2(1-i)^{n_2}$. Agora, multiplicado ambos os lados da última igualdade por $(1-i)^n$, obtemos:

$$N_1(1-i)^{n_1} \cdot (1-i)^n = N_2(1-i)^{n_2} \cdot (1-i)^n.$$

Ou seja,

$$N_1(1-i)^{n_1+n} = N_2(1-i)^{n_2+n}.$$

Então,

$$A'_1 = A'_2.$$

□

Exemplo 2.6.4. *[10] Você tem dinheiro aplicado à taxa de* 10% *ao mês. Suponha que, com esse dinheiro, deseja comprar um bem e você tem duas opções de pagamento:*

(I) A vista no valor de $R\$$ 3.500, 00.

(II) Em 2 *prestações mensais fixas de* $R\$$ 2.000, 00*, vencendo a primeira um mês após a compra.*

Qual das opções é a mais vantajosa financeiramente?

Solução: Temos que a taxa é de 10% ao mês. Como queremos comprar um bem e temos duas opções, vamos analisá-las. A primeira custa à vista $R\$$ 3.500, 00. Já na segunda opção, temos duas prestações mensais de $R\$$ 2.000, 00, vencendo a primeira um mês após a compra. Trazendo as parcelas da segunda opção para o mês inicial (zero) podemos comparar as duas opções. Daí, aplicando a Definição 2.6.2 na 2º opção, temos:

$$A = \frac{2.000}{(1,1)^1} + \frac{2.000}{(1,1)^2} = \frac{2.000}{1,1} + \frac{2.000}{1,21}.$$

Como,

$$\frac{2.000}{(1,1)^1} = 1.818, 1818... \text{ e } \frac{2.000}{1,21} \approx 1.652, 89,$$

temos que $A = 1.818, 1818... + 1.652, 89 \approx 3.471, 07$, ou seja, menor do que a primeira opção.

Logo, a opção mais vantajosa financeiramente é a segunda, isto é, 2 prestações mensais fixas de $R\$$ 2.000, 00, vencendo a primeira um mês após a compra.

Exemplo 2.6.5. *(Enem-2019) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de* 1% *ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de* $R\$\ 202,00$*.O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de* $R\$204,02$*. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.*

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

1. *(A) 398,02.*
2. *(B) 400,00.*
3. *(C) 401,94.*
4. *(D) 404,00.*
5. *(E) 406,02.*

Solução: O valor do produto à vista é análoga a trazer as duas prestações para a data zero. Assim, utilizando a Definição 2.6.2, temos que:

$$A = \frac{202}{1,01} + \frac{204,02}{(1,01)^2} = 200 + 200 = 400,00. \tag{2.16}$$

Portanto, o valor à vista, em reais, que deverá constar na nota fiscal é de $400,00$, sendo o item B a resposta da questão.

2.7 Convenções no Regime de Juros Compostos

Sendo rigoroso, analisando a convenção da capitalização descontínua, os juros somente seriam realizados ao final de cada período de tempo tendo como base a taxa combinada. Nesse sentido, conforme ocorre nas cadernetas de poupanças, não poderia haver pagamentos de juros em aplicações financeiras com prazos menores a um período, isto é, prazos fracionários. Porém, à exceção da Poupança, o usual é o pagamento de juros mesmo para situações com prazos não inteiros. Para tais casos, no regime de juros compostos, iremos utilizar a convenção linear ou a exponencial. Neste trabalho abordar-se-á somente a convenção linear.

2.7.1 Convenções Lineares

Com o intuito de uma abordagem genérica, considere, por hipótese, que um capital inicial C seja aplicado em uma instituição financeira a uma taxa de juros $i\%$ e por um prazo igual a m períodos. Tomando $n = [m]$, ou seja, n é a parte inteira de m tal que $m = n + f$, com $0 \leq f < 1$. Caso f seja igual a zero, segue imediatamente o caso do prazo inteiro, por conseguinte, pode-se aplicar diretamente o Teorema 2.2.3 para o cálculo do montante. Por outro lado, se $f > 0$, a chamada convenção linear permite que o montante evolua linearmente entre as épocas n e $n + 1$. Com isso, procedendo a interpolação linear, segundo a imagem abaixo, temos que:

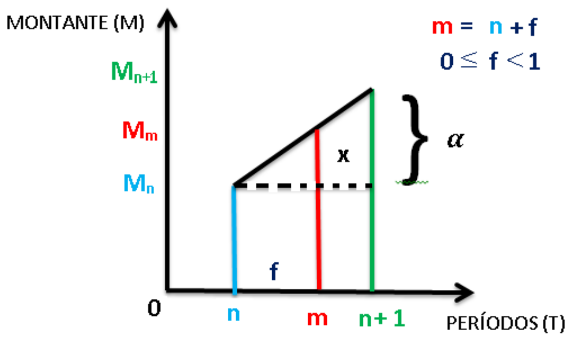

Figura 2.3: *Interpolação Linear no Caso de Prazos Fracionários*

Fonte: Autor

$$M_m = M_n + x.$$

Daí, utilizando a semelhança de triângulos, obtemos:

$$\tfrac{\alpha}{x} = \frac{n+1-n}{m-n} = \frac{1}{f}.$$

Com isso, como $\alpha = M_{n+1} - M_n = i \cdot M_n$, tem-se que $M_m = M_n + f \cdot \alpha = M_n + f \cdot i \cdot M_n$. Portanto, utilizando o Teorema 2.2.3, segue que:

$$M_m = C \cdot (1+i)^n \cdot (1 + f \cdot i), \tag{2.17}$$

que corresponde a equação da convenção linear para o regime de juros compostos.

Sob a ótica específica financeira, pode-se enunciar que a convenção linear implica uma união de juros simples e juros compostos. Isso porque, pela última equação, interpreta-se que, para a parte inteira do período imediatamente anterior ao estudado, tudo se realiza conforme à aplicação normal do regime de juros compostos, encontrando, pelo teorema 2.2.3, o montante M_n. Por sua vez, para o prazo remanescente, que representa a fração f do período da taxa i, o total M_n rentabiliza juros simples a mesma taxa i anterior.

Exemplo 2.7.1. *[11] Um capital de* $R\$100.000,00$ *é aplicado a juros compostos à taxa de* 18% *ao semestre. Calcule o valor do montante ao fim de quinze meses usando a convenção linear. (Dados:* $1,18^2 = 1,392400$*).*

Solução: Usando uma regra de três simples, vamos transformar, primeiramente, 15 meses em semestres. Com isso, segue que:

1 semestre ———— 6 meses
T semestres ———— 15 meses

Daí, $T = 2,5$ semestres. Que equivale a 2 semestres mais $0,5$ semestre. Portanto, a parte inteira do período (n) é 2 e a parte fracionária do período (f) é $0,5$. Assim, aplicando os conceitos de convenção linear, obtemos:

$$
\begin{aligned}
M &= C \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot f) \\
M &= 100.000 \cdot (1 + 0,18)^2 . (1 + 0,18 \cdot 0,5) \\
M &= 100.000 \cdot (1,18)^2 \cdot (1,09) \\
M &= R\$\ 151.771,60.
\end{aligned}
$$

Logo, o montante ao fim de quinze meses usando a convenção linear é $R\$\ 151.771,60$.

2.8 Períodos de Capitalizações

Chama-se período de capitalização aos intervalos de tempo em que incorrem os juros. Segue abaixo alguns exemplos:

1. **Capitalização Mensal:** Capitalização em que o período de atuação dos juros é mensal, ou seja, os juros são calculados uma vez por mês;

2. **Capitalização Bimestral:** Capitalização em que o período de atuação dos juros são bimestrais, isto é, os juros são calculados uma vez por bimestre;

3. **Capitalização Semestral:** Capitalização em que o período de atuação dos juros são semestrais, isto é, os juros são calculados uma vez por semestre;

4. **Capitalização Anual:** Capitalização em que o período de atuação dos juros são anuais, isto é, os juros são calculados uma vez por ano.

Nem sempre o período de capitalização é igual à unidade de tempo referente à taxa.

Exemplo 2.8.1. *Um capital C foi aplicado à taxa de juros compostos de 60% a.a com capitalização bimestral.*

Percebe-se, no exemplo acima, que o período de capitalização é bimestral e o tempo referente à taxa é anual. Quando ocorrer tais situações, deve-se utilizar *taxas equivalentes*. Além disso, na falta de informação explícita sobre o período de capitalização, nas variadas questões, adota-se, por conversão, o período de capitalização côngruo a unidade de tempo referente à taxa.

2.9 Taxas de Juros

2.9.1 Taxa Proporcional

Definição 2.9.1. *Duas taxas*[12] i_1 *e* i_2 *são proporcionais se, e somente se:*

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

[12]**Taxas Proporcionais:** O conceito de taxas proporcionais é indiferente quanto ao regime de juros, ou seja, aplica-se a ambos da mesma forma.

onde t_1 e t_2 são, por sua vez, os instantes padrões das taxas i_1 e i_2, representados em iguais unidades de tempo.

Exemplo 2.9.2. *Determine a taxa trimestral proporcional à taxa anual de $4,8\%$.*

Solução: Como 1 ano é igual a 4 trimestres, pela definição acima, temos que:

$$\frac{i_a}{i_b} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow i_b = \frac{i_a}{4} \Leftrightarrow i_b = \frac{4,8\%}{4} = 1,2\% \; a.t.$$

Então, a taxa trimestral proporcional à taxa anual de $4,8\%$ é $1,2\%$ $a.t.$.

2.9.2 Taxa Equivalente

A definição de taxa equivalente é análoga a do capítulo anterior, mudando somente a forma de calculá-la.

Teorema 2.9.3. *Se I é uma taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e caso $T = nt$, então $1 + I = (1+i)^n$.*

Demonstração. Assumido C como o valor inicial de uma grandeza. Depois de um período de tempo T, o valor da grandeza será $C(1+I)^1$. Como, por hipótese, um período de tempo T equivale a n períodos de tempo igual a t, segue que o valor da grandeza será também igual a $C(1+i)^n$. Daí, temos que $C(1+I)^1 = C(1+i)^n$. Portanto, $1 + I = (1+i)^n$. □

Exemplo 2.9.4. *Um aluno do 2°ano do Ensino Médio, ao observar duas formas de investimento, no regime de juros compostos, decide verificar se ambas são equivalentes. Os casos são:*

1. *Caso: Um capital de R\$ 2.000,00 é aplicado à taxa de $0,3\%$ a.m. em 1 ano.*

2. *Caso: Um capital de R\$ 2.000,00 é aplicado à taxa de $3,6599\%$ a.a. em 1 ano.*

Solução: Para resolver esse problema, vamos comparar os juros (rendimentos) em ambos os casos. Para o primeiro caso, temos $J_1 = 2.000 \cdot [(1,003)^{12} - 1] \approx R\$\ 73,20$. Já para o segundo caso, segue que $J_2 = 2.000 \cdot [(1,036599)^1 - 1] \approx R\$\ 73,20$. Logo, como $J_1 = J_2$, o aluno concluiu que os dois casos são equivalentes, tratando-se de um caso de taxas equivalentes.

2.9.3 Taxa Nominal e Taxa Efetiva

Definição 2.9.5. *Taxa nominal é aquela cuja unidade de referência de tempo não coincide com o período de capitalização e que é proporcional à taxa efetiva.*

Definição 2.9.6. *Taxa efetiva*[13] *é aquela cuja unidade de referência de tempo coincide com o período de capitalização.*

Exemplo 2.9.7. *[5] Um capital de* $R\$ \ 2.000,00$ *é aplicado no regime de juros compostos, à taxa nominal de* 120% *a.a., com capitalização mensal, pelo prazo de* 3 *anos. Determine o montante ao final da aplicação.*

Solução: Como a taxa nominal é de 120% a.a., temos que a taxa efetiva é $\dfrac{120\%}{12} = 10\%$ a.m.. Por outro lado, o período aplicado é de 3 anos com capitalização mensal. Logo, fazendo a mudança, segue que $n = 3 \cdot 12 = 36$. Por sua vez, o montante ao final dos três anos é:

$$M = 2.000 \cdot (1 + 0,1)^{36} \approx R\$ \ 61.825,36.$$

Então, o montante ao final da aplicação é de aproximadamente R$ 61.825,36.

2.9.4 Taxa por Dia Útil (Taxa Over)

A denominada *taxa over* é uma taxa de juros nominal com capitalização diária, porém válida somente para dias úteis, ou seja, sua capitalização ocorre unicamente em dia de funcionamento do mercado financeiro, segundo Assaf [2]. A taxa costuma ser expressa ao mês, obtida pela simples multiplicação da taxa ao dia por 30, vide Assaf [2]. Já, a expressão básica de cálculo da taxa efetiva com base na taxa over mensal, consoante Assaf [2], é dada por:

$$EFF(i) = \left[1 + \frac{over}{30}\right]^{du} - 1, \qquad (2.18)$$

em que **over** é igual a taxa mensal over; **du** corresponde ao número de dias úteis previstos no prazo da operação.

[13]**Taxas Efetivas:** As taxas nominais e efetivas são proporcionais. Logo, para todos os efeitos, em eventuais questões, ao fornecer a taxa nominal, o algoritmo é, para o cálculo dos juros e montante, encontrar inicialmente a taxa efetiva.

Além disso, conforme Assaf [2], a transformação de uma taxa efetiva em taxa over, ambas as taxas referenciadas em bases mensais, é efetuada pela seguinte expressão matemática:

$$Over = [(1 + EFE)^{\frac{1}{du}} - 1] \cdot 30. \tag{2.19}$$

Exemplo 2.9.8. *Admita que em determinado mês a taxa over esteja fixada em 2,7%, sendo computados 22 dias úteis no período. Determine a taxa efetiva apurada na capitalização composta do período.*

Solução: Primeiramente, devemos encontrar a taxa over diária, isto é, a taxa de juros diária. Para tanto, vamos fazer a seguinte divisão:

$$\frac{2,7\%}{30} = \frac{0,027}{30} = 0,0009\ a.d.$$

Agora, para encontrarmos o valor da taxa efetiva apurada na capitalização composta do período, aplicamos a Equação (2.18), com $\frac{over}{30} = 0,0009$ a.d. e $du = 22$ dias úteis. Daí, temos que:

$$EFE(i) = (1 + 0,0009)^{22} - 1 \approx 0,019988 \approx 1,9988\% \text{ a.m.}$$

Portanto, a taxa efetiva apurada na capitalização composta do período é de aproximadamente 1,9988% a.m.

Exemplo 2.9.9. *Sendo de 2,4% a.m. a taxa efetiva e sabendo que no período existam 21 dias úteis. Determine a taxa over mensal.*

Solução: Aplicando a Equação (2.19), com $EFE = 0,024$ a.m. e $du = 21$ dias úteis, temos que:

$$Over = \left[(1 + 0,024)^{\frac{1}{21}} - 1\right] \cdot 30 \approx 0,03389 \text{ a.m.}$$

Portanto, o valor da taxa over mensal é de aproximadamente 3,389%

2.9.5 Relação entre Taxa Aparente, Taxa Real e Taxa de Inflação.

Definição 2.9.10. *A taxa de juros aparente é aquela calculada com base no valor aplicado sem considerar os efeitos da inflação*[14].

Definição 2.9.11. *A taxa de juros real é aquela calculada com base no valor aplicado corrigido pela inflação.*

Teorema 2.9.12. *Para Morgado e Wagner [25], se i_a é a taxa aparente de juros, i_r a taxa real de juros e θ a taxa de inflação, todas referidas ao mesmo período de tempo, então $(1+i_a) = (1+\theta).(1+i_r)$.*

A demonstração a seguir foi retirada de Morgado e Wagner [25].

Demonstração. Se A u.m. compraram $\dfrac{A}{p}$ artigos de preço p, $[(1+i_a)\cdot A]$ u.m. comprarão $\left[(1+i_a)\cdot\dfrac{A}{(1+\theta)\cdot p}\right]$ artigos de preços $[(1+\theta)\cdot p]$. Logo, a taxa de crescimento da quantidade comprada é:

$$i_r = \left[(1+i_a)\cdot\frac{A}{(1+\theta)\cdot p} - \frac{A}{p}\right] : \frac{A}{p} = \frac{1+i_a}{1+\theta} - 1.$$

Daí, $1+i_r = \dfrac{1+i_a}{1+\theta}$ e a tese segue facilmente. □

Exemplo 2.9.13. *Um graduando da UFG comprou um lote de ações e o revendeu, dois anos depois, por um valor 40% superior ao preço de compra. Se a inflação do período foi de 5%, e não houve incidência de tributo nessa operação, determine a taxa de ganho real do graduando.*

Solução: Temos que a taxa aparente é de $40\% = 0,4$ e, por sua vez, a taxa de inflação é igual a $5\% = 0,05$. Com isso, pelo teorema anterior, segue que:

[14]**Inflação:** Aumento persistente dos preços em geral, de que resulta uma contínua perda do poder aquisitivo da moeda. É um fenômeno monetário, e isso coloca uma questão básica: se é a expansão da oferta de moeda que tem efeito inflacionário ou se ela ocorre com resposta à maior demanda de moeda provocada pela inflação. A inflação, normalmente, pode resultar de fatores estruturais (inflação de custo), monetário (inflação de demanda) ou de uma combinação de fatores, consoante Sandroni [34].

$$(1+i_a) = (1+\theta)\cdot(1+i_r) \Leftrightarrow (1+0,4) = (1+0,05).(1+i_r) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1,4 = 1,05 + 1,05 \cdot i_r \Leftrightarrow 0,35 = 1,05 \cdot i_r \Leftrightarrow i_r = 0,3333...$.

Logo, a taxa de ganho real do graduando é de aproximadamente $33,33\%$.

No desenvolvimento deste capítulo foram vistos e analisados tópicos referentes à dinâmica dos juros compostos, tais como: o montante nos juros compostos, os descontos comerciais e racionais compostos, a convenção linear, dentre outros. O objetivo foi proporcionar aos professores do ensino médio, em especial do 2° ano, uma compreensão mais clara sobre esses assuntos.

Assim, encerrado este capítulo, o capítulo seguinte trará os últimos conteúdos teóricos propostos para os professores do ensino médio, são eles: séries uniformes, amortizações e análise de investimentos.

Capítulo 3

Cálculo Financeiro - Parte 3

Este capítulo abordará séries uniformes, amortizações e análise de investimento. Os pré-requisitos teóricos são os capítulos 1 e 2, porque as demonstrações matemáticas farão menções àqueles conhecimentos, em especial ao segundo. O público alvo são, essencialmente, os professores do $3^{\underline{o}}$ ano do ensino médio, que necessitam do conhecimento teórico para a abordagem dos conteúdos e para sanar eventuais dúvidas.

Os resultados teóricos contidos neste capítulo podem ser encontrados em diversos livros, tais como: Matemática Financeira de Mathias e Gomes [23], Matemática Financeira de Barros [5], Matemática Financeira e suas Aplicações de Assaf Neto [1], Fundamentos da Matemática Elementar de Iezzi [18], Matemática Discreta de Morgado [24], Progressões e Matemática Financeira de Morgado e Wagner [24], Princípios e Aplicações do Cálculo Financeiro de Faro [12], Matemática Financeira e suas Aplicações de Neto [26], Mercado Financeiro de Assaf Neto [2], Novíssimo Dicionário de Economia de Sandroni [34], A matemática do Ensino Médio de Lima [20], Matemática Financeira de Frank Alves [15] e Cálculo Financeiro de Tesouraria: Bancos e Empresas de Securato [35].

Existem duas espécies de exercícios recorrentes em eventos financeiros. Uma delas se refere ao cálculo da prestação em relação a um financiamento em valores iguais no regime de juros compostos, tendo em mãos o valor financiado, a taxa de juros e o número de rendas uniformes utilizadas. A outra está relacionada ao cálculo do montante pelo processo de sucessão de depósitos iguais ao regime de juros compostos, informando o valor de cada depósito, a taxa de juros associada e o respectivo número de depósitos.

As duas situações enumeradas no parágrafo anterior são nomeadas de sequência uniforme de capitais.

Richard Price foi uma referência na utilização desta temática para cálculos de aposentadorias e pensões. Com o fim didático e para ressaltar a importância da História da Matemática, iremos abordar um pouco da história de Richard Price.

Assim, segundo Iezzi, em seu livro Fundamentos da Matemática Elementar (2011, p. 76-77), a história de Richard Price é narrada da seguinte forma: "Nascido na Inglaterra em Tyntan, Glamorgan, em fevereiro de 1723, foi educado em sua cidade natal até a morte de seu pai, depois mudou-se para Londres em 1740. Nessa cidade, recebeu sólidos conhecimentos de Matemática, e foi discípulo de John Eanes. Em 1769, a pedido da seguradora inglesa Sociedade Equitativa, Price publicou um trabalho na área de Estatística e Atuária chamada *Tabela de mortalidade de Northampton*, que serviu para o cálculo das probabilidades de morte e sobrevivência de um indivíduo em função da idade. Essas tabelas serviram de base para o cálculo de seguros e aposentadorias".

Por fim, ainda no livro de Iezzi [18], observa-se a contribuição de Richad Price na área financeira, conforme segue: "Em 1771, publicou sua mais famosa obra da área financeira e atuarial intitulado *Observações sobre pagamentos reversíveis*. Nessa obra, Price elaborou tabelas para o cálculo de juros compostos, explicou o financiamento por meio da sequência uniforme de pagamentos, o montante gerado por depósito em sequência uniforme, rendas vitalícias em aposentadorias e cálculo de prêmio de seguros de vida. Price faleceu em Hackney, próximo de Londres, em abril de 1791, aos 68 anos de idade".

Nota-se, portanto, que Price foi um dos pioneiros na utilização dos juros compostos para calcular aposentadorias e prêmio de seguros de vida. Dessa maneira, mostrou uma utilização inovadora por meio de tabelas para fazer o cálculo dos juros compostos.

3.1 Séries Uniformes

Uma quantidade de valores - nomeadas constantemente de pagamentos ou termos -, relacionadas a períodos variados, é chamado de série, anualidade ou renda. Caso tais pagamentos sejam idênticos e similarmente intervalados no tempo, a série é intitulada uniforme.

Teorema 3.1.1. *O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a* $A_n = P \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Demonstração. Trazendo o valor da série para o tempo zero, tem-se que ele é dado por:

$$A_n = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Como a equação acima se trata da soma dos n termos de uma progressão geométrica finita de razão $\frac{1}{1+i}$, segue que:

$$A_n = \frac{P}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{1+i}}.$$

Logo,

$$A_n = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

□

Exemplo 3.1.2. *[6] Em um fundo de investimento, que rende juros compostos mensais líquidos de $0,55\%$, Renata faz 12 aplicações mensais, iguais e consecutivas, tendo a última ocorrido na presente data, totalizando o montante de R\$ $8.160,00$. A partir do próximo mês, Renata fará resgates mensais, iguais e consecutivos de forma a zerar o saldo de aplicações em 5 meses.*

Considerando $1,068$ e $0,97$ como valores aproximados para $1,0055^{12}$ e $1,0055^{-5}$, respectivamente, julgue o item que se segue acerca dessa aplicação.

1. *Renata fará 5 desgastes mensais de R\$ $1.496,00$ cada.*

Solução: Temos que o valor atual, a taxa e o tempo são, respectivamente, $R\$ \ 8.160,00$, $i = 0,55\%$ e 5 meses. Daí, pelo Teorema 3.1.1, temos que $A = P \cdot \dfrac{1-(1+i)^n}{i}$. Com isso, substituindo as informações do problema, segue que:

$$8.160 = P \cdot \frac{1-(1+0,0055)^{-5}}{0,0055} \Leftrightarrow 8.160 = P \cdot \frac{1-(1,0055)^{-5}}{0,0055}.$$

Agora, como $(1,0055)^{-5} = 0,97$, obtemos:

$$8.160 = P \cdot \frac{[(1-0,97)]}{0,0055} \Leftrightarrow 8.160 = P \cdot \frac{[0,03]}{0,0055} \Leftrightarrow 44,88 = P \cdot 0,03 \Leftrightarrow P = R\$ \ 1.496,00.$$

Portanto, Renata fará 5 resgates mensais de $R\$ \ 1.496,00$ cada. Sendo o item verdadeiro.

O corolário a seguir se refere ao valor de uma renda perpétua. Assim, conforme Lima, Carvalho, Wagner e Augusto [20], temos que:

> Rendas perpétuas aparecem em locações. Com efeito, quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então, o conjunto dos aluguéis constitui uma renda perpétua ou perpetuidade (LIMA, 2016, p. 48).

Além disso, segundo Frank Alves [15], segue que:

> Uma perpetuidade ou renda perpétua é uma anuidade cujos pagamentos começam numa data fixada e continuam indefinidamente. Na hipótese de que uma companhia nunca vá à falência os dividendos sobre uma ação da sua categoria preferencial podem ser considerados uma perpetuidade. (FRANK ALVES, 1972, p. 165).

Corolário 3.1.3. *O valor de uma perpetuidade de parcelas idênticas a P, um instante antes do primeiro pagamento, é, tomando i como a taxa de juros, igual a $\dfrac{P}{i}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1, sabemos que:

$$A_n = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Agora, fazendo n tender ao infinito, segue que

$$A = \lim_{n \to +\infty} P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Ou seja:

$$A = \lim_{n \to +\infty} P \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^{+\infty}}{i}.$$

Daí, como $\left(\dfrac{1}{1+i} \right)^{+\infty}$ tende a zero, então

$$A = \tfrac{P}{i}.$$

$\square$

Exemplo 3.1.4. *[20] Se o dinheiro vale* 1% *ao mês, por quanto deve ser alugado um imóvel que vale* 40.000, 00 *reais.*

Solução: Quando se trata de aluguel imobiliário, o proprietário cede a posse do imóvel e, em contrapartida, recebe uma renda perpétua em que os termos são equivalentes ao valor do aluguel.

Logo, o valor do imóvel corresponde à importância do conjunto de aluguéis. Com isso, segundo o Corolário 3.1.3, temos que

$$A = \frac{P}{i}$$

Com isso,

$$P = 40.000 \cdot 0,01 = 400,00 \; reais.$$

Assim, o imóvel deve ser alugado por 400, 00 reais.

3.2 Sistemas de Amortizações

Para Sandroni [34],

Definição 3.2.1. *A amortização é a redução gradual de uma dívida por meio de pagamentos periódicos combinados entre o credor e o devedor. Os empréstimos e hipotecas bancárias são, em geral, pagos dessa forma. No caso de empréstimos a longo prazo, a amortização se faz mediante tabelas especiais nas quais se incluem os juros relativos ao capital a reembolsar. Na técnica contábil usa-se o termo para designar as parcelas retiradas anualmente pelo proprietário da empresa a fim de atender à depreciação de certos bens ativos como móveis, máquinas e outros.*

Exemplo 3.2.2. *(OBEF[15]) "Mecanismo de extinção de uma incumbência através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do capital" O texto acima refere-se essencialmente ao conceito de:*

A) Amortização

B) Juros Composto

C) Fluxo de caixa

D) Descontos Comerciais

E) Montante

Solução: Resposta letra A, pois, consoante a Definição 3.2.1, a amortização é a redução gradual de uma dívida por meio de pagamentos periódicos combinados entre o credor e o devedor. Conceito esse análogo ao apresentado no comando da questão.

3.2.1 Sistema de Amortização Constante

Teorema 3.2.3. *No sistema de Amortização Constante - SAC -, sendo k uma época qualquer e tomando n e i , respectivamente, como o número de pagamentos e a taxa de juros, temos que:*

$$A_k = \frac{D_0}{n},\ D_k = \frac{n-k}{n}D_0,\ J_k = iD_{k-1},\ P_k = A_k + J_k,$$

em que A_k, J_k, P_k, D_k são, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida (isto é, o valor da dívida após o pagamento da prestação) na época k.

A demonstração a seguir foi retirada de Morgado, Wagner e Zani [25].

Demonstração. Se a dívida D_o é amortizada em n quotas iguais, cada quota vale $A_k = \dfrac{D_o}{n}$ e o estado da dívida, após k amortizações, é:

$$D_k = D_o - k \cdot A_k = D_o \cdot \frac{n-k}{n}.$$

As duas últimas fórmulas são diretas. □

[15] **OBEF:** Olimpíadas Brasileiras de Educação Financeira - Nível 5 - Fase 1 de 2019.

Exemplo 3.2.4. *Paulo, servidor público de Brasília, comprou um apartamento na Asa Sul por* $R\$ \ 800.000,00$. *A forma de pagamento realizou-se pelo sistema de amortização constante - SAC -, em 5 anos, com juros de* 3% *ao ano. Diante desse contexto, elabore a planilha de amortização para o devido controle financeiro por Paulo.*

Solução: Como o sistema é o de amortização constante, então cada amortização será dada por $\dfrac{800.000}{5} = R\$ \ 160.000,00$.

Assim, a planilha de amortização, para o devido controle financeiro por Paulo, será da forma:

K	P_k	A_K	J_K	D_k
0	-	-	-	R$ 800.000
1	R$ 184.000	R$ 160.000	R$ 24.000	R$ 640.000
2	R$ 179.200	R$ 160.000	R$ 19.200	R$ 480.000
3	R$ 174.400	R$ 160.000	R$ 14.400	R$ 320.000
4	R$ 169.600	R$ 160.000	R$ 9.600	R$ 160.000
5	R$ 164.800	R$ 160.000	R$ 4.800	-

Tabela 3.1: Amortização Constante

Fonte: Autor

3.2.2 Sistema de Amortização Francês

Teorema 3.2.5. *No Sistema de Amortização Francês, sendo* k *uma época qualquer e tomando* n *e* i*, respectivamente, como o número de pagamentos e a taxa de juros, temos que:*

$$P_k = D_0 \cdot \tfrac{i}{1-(1+i)^{-n}},\ D_k = D_0 \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}},\ J_k = iD_{k-1},\ A = P_k - J_k.$$

A demonstração a seguir foi retirada de Morgado, Wagner e Zani [25].

Demonstração. A primeira fórmula é simplesmente o Teorema 3.1.1 e as duas últimas são diretas. Quanto à segunda, observe que a dívida D_k será liquidada, por $n-k$

pagamentos, sucessivos e postecipados, iguais a P_k. Portanto, novamente pelo Teorema 3.1.1, temos:

$$D_k = P_k \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de P_k, obtemos a segunda fórmula. $\square$

Exemplo 3.2.6. *Maria, estudante da Universidade de Brasília (UnB), comprou um celular smartphone no valor de R\$ 1.200,00 e a forma de pagamento foi realizada pelo sistema de amortização francês, em 3 meses, com juros de 1% ao mês. Nessas condições, esboce a planilha de amortização, pois Maria necessita saber de todos os gastos da operação por motivos orçamentários.*

Solução: Como no sistema de amortização francês as prestações são constantes, então cada uma delas será dada por $P_k = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 1.200 \cdot \frac{0{,}01}{1-(1+0{,}01)^{-3}} \approx 408{,}03$.

Assim, a planilha[16] de amortização, para orçamento de Maria, será da forma:

K	P_k	A_K	J_K	D_k
0	-	-	-	R\$ 1.200,00
1	R\$ 408,03	R\$ 396,03	R\$ 12,00	R\$ 803,97
2	R\$ 408,03	R\$ 399,99	R\$ 8,04	R\$ 403,98
3	R\$ 408,03	R\$ 403,98	R\$ 4,04	-

Tabela 3.2: Amortização Francês

Fonte: Autor

3.2.3 Sistema de Amortização Misto

Definição 3.2.7. *Sistema de Amortização Misto é aquele em que as prestações são as médias aritméticas entre as prestações obtidas no sistema da amortização constante e o sistema de amortização francês.*

Através deste sistema metade da dívida é amortizada pelo sistema francês e a restante pelo SAC.

[16]**Observação:** Na construção da tabela anterior, foram feitas aproximações de duas casas decimais com o intuito de facilitar o entendimento.

Exemplo 3.2.8. *[25] Um sistema de amortização também usado é o sistema de amortizações mistas (SAM). No SAM, metade da dívida é amortizada pelo sistema francês e a outra é amortizada pelo SAC. Faça a planilha de amortização de uma dívida de* 200 *u.m., com juros de* 10% *ao mês, em* 5 *meses, pelo SAM.*

Solução: A planilha[17] de amortização é da seguinte forma:

K	P_k	A_K	J_K	D_k
0	-	-	-	R$ 200,00
1	R$ 56,4	R$ 36,4	R$ 20,0	R$ 163,6
2	R$ 54,4	R$ 38,0	R$ 16,4	R$ 125,6
3	R$ 52,4	R$ 39,8	R$ 12,6	R$ 85,8
4	R$ 50,4	R$ 41,8	R$ 8,6	R$ 44,00
5	R$ 48,4	R$ 44,0	R$ 4,4	-

Tabela 3.3: Amortização Misto

Fonte: Autor

Perceba que as prestações correspondem às médias aritméticas em cada período de capitalização K.

3.2.4 Sistema de Amortização Americano

Definição 3.2.9. *Sistema de Amortização Americano é aquele que o principal é pago em um único período de capitalização, posterior ao período de carência*[18]*. Em relação aos juros, esses podem ser pagos no decorrer do período de carência ou capitalizados e pagos ao final, juntamente, com o principal.*

Exemplo 3.2.10. *Lorena foi a um feirão imobiliário da Caixa Econômica Federal e comprou uma casa por* $R\$$ 500.000, 00 *com período de carência de* 5 *anos com juros de* 4% *ao ano pagos durante a carência através do sistema de amortização americano. Nessa perspectiva, elabore o diagrama de amortização, pois ela precisa de todo informe financeiro para efeitos da declaração de imposto de renda anual.*

[17]**Observação:** Na construção da planilha anterior, foram feitas aproximações de uma casa decimal com o intuito de facilitar o entendimento.

[18]**Carência:** Período de tempo, concedido pelo credor, durante o qual o devedor não paga o principal da dívida, mas apenas os juros, segundo Sandroni [34].

Solução: Como se trata do sistema de amortização americano e os juros serão pagos no decorrer do período de carência, então o diagrama de amortização ficará da seguinte forma:

K	P_k	A_K	J_K	D_k
0	-	-	-	R$ 500.000,00
1	R$ 20.000,00	-	R$ 20.000,00	R$ 500.000,00
2	R$ 20.000,00	-	R$ 20.000,00	R$ 500.000,00
3	R$ 20.000,00	-	R$ 20.000,00	R$ 500.000,00
4	R$ 20.000,00	-	R$ 20.000,00	R$ 500.000,00
5	R$ 520.000,00	R$ 500.000,00	R$ 20.000,00	0

Tabela 3.4: Amortização Americano

Fonte: Autor

3.3 Análise de Investimentos

Diversos são os tópicos debatidos para fazer-se uma análise adequada da viabilidade de um investimento, dentre eles podemos listar: os riscos associados, a análise comparativa entre investimentos, o entendimento já agregado do investidor, etc. Nesta seção, estudaremos o aspecto financeiro dos investimentos, através das entradas (aplicações) e saídas (recebimentos) de capitais no decorrer do tempo, isto é, pelo fluxo de caixa. Lembrando que o conhecimento não se limita ao abordado na dissertação, existindo outros métodos e procedimentos trabalhados na análise de investimento. Logo, focaremos em três métodos para análise de investimentos, que são: Método do Valor Atual Líquido (VAL), Método da Taxa Interna de Retorno (TIR) e o Payback.

> Os administradores de empresas, independente do tamanho delas é do seu campo de atuação, sempre se defrontam com a necessidade de avaliar projetos de investimentos. Os métodos para realizar essa avaliação variam desde a pura intuição do administrador aos mais satisfatórios modelos matemáticos (SECURATO, 2008, p. 49).

Antes de lidar com os métodos devemos entender o conceito de taxa mínima de atratividade.

> A taxa de custo do capital e a taxa de juros do mercado financeiro (custo de oportunidade) constituem-se, cada uma a seu tempo, em referenciais para determinar a taxa mínima de atratividade (TMA) de um projeto e caracterizam parâmetros para sua aceitação ou rejeição (SECURATO, 2008, p. 49).

A taxa mínima de atratividade é, portanto, um índice de juros que é fundamental analisar para avaliar qualquer investimento ou financiamento. Isso porque, essa taxa demonstra o mínimo que é esperado de retorno financeiro para uma aplicação para que o negócio seja viável. Sendo assim, ela é essencial para a escolha entre as várias opções de investimento disponíveis.

3.3.1 Método do Valor Presente Líquido

A definição a seguir foi retirada de Barros [5].

Definição 3.3.1. *O valor atual líquido*[19] *(VAL) ou valor presente líquido (VPL) corresponde à diferença entre os valores atuais (ou valores presentes), em uma determinada data, das entradas e das saídas de capital, calculadas utilizando-se a taxa correspondente ao custo de oportunidade do capital, isto é, a remuneração que o investidor poderia obter em outros investimentos disponíveis.*

De acordo com a definição acima, temos que a equação associada ao VPL é da forma:

$$VPL = \sum_{j=0}^{n} \frac{C_j}{(1+i)^j},$$

onde as entradas e as saídas de caixa são, representadas, ao longo do tempo, por $C_0, C_1, \cdots, C_n$ e a taxa mínima de atratividade (custo de oportunidade) do projeto é representada por i.

Tendo em vista a análise do VPL, podemos encontrar três situações, são elas:

1°) VPL > 0: O saldo positivo significa que o projeto será economicamente favorável à taxa de juros considerada. Portanto, quanto maior o VPL, mais positivo será o projeto de investimento.

[19]**Observação:** Em termos gerais, o valor presente líquido é calculado na data focal zero, tornando-se essa a referência na ausência de disposições contrárias.

2°) VPL = 0: Nesta situação, não necessariamente devemos descartar o projeto na perspectiva financeira, porque as entradas futuras são iguais aos desembolsos realizados com ele. Ou seja, o investimento gera retorno igual à taxa mínima de atratividade da empresa.

3°) VPL < 0: O saldo negativo significa que o projeto será economicamente desfavorável à taxa de juros considerada. Logo, em tal situação não há nem a recuperação do investimento realizado.

Exemplo 3.3.2. *A um analista financeiro é proposto a seguinte alternativa de investimento: aplicar $R\$$ 20.000,00 daqui a 1 mês e mais $R\$$ 2.000,00 daqui a 5 meses, devendo receber $R\$$ 23.000,00 daqui a 8 meses e mais $R\$$ 4.000,00 daqui a 10 meses. Assumindo que o custo de oportunidade do capital é de 0,5% a.m., estude, pelo método do valor presente líquido, se a proposta apresentada é viável ou não.*

Solução: O fluxo de caixa que representa a situação apresentada é:

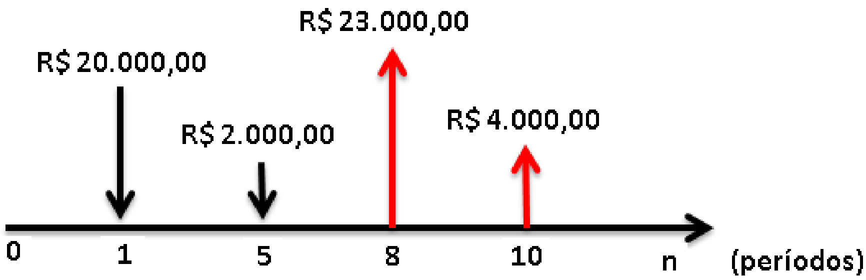

Figura 3.1: *Fluxo de Caixa de uma Alternativa de Investimento Proposto para um Analista Financeiro*

Fonte: Autor

Como, pela definição anterior, o valor presente líquido, no fluxo de caixa, é da forma:

$$VPL = \sum_{j=0}^{10} \frac{C_j}{(1+i)^j},$$

onde $C_0 = C_2 = C_3 = C_4 = C_6 = C_7 = C_9 = 0, C_1 = -R\$\, 20.000,00$, $C_5 = -R\$\, 2.000,00$, $C_8 = R\$\, 23.000,00$ e $C_{10} = R\$\, 4.000,00$ temos que:

$$VPL = \frac{23.000}{(1+0,005)^8} + \frac{4.000}{(1+0,005)^{10}} - \left(\tfrac{20.000}{(1+0,005)^1}\right) - \left(\frac{2.000}{(1+0,005)^5}\right),$$

$$VPL = 22.100,36 + 3.805,39 - 19.900,50 - 1.950,74 = 4.054,51 > 0.$$

Logo, devido o VPL ser positivo, então a proposta é viável.

3.3.2 Taxa Interna de Retorno

Definição 3.3.3. *Taxa Interna de Retorno (TIR) é aquela em que deixa nulo o valor atual líquido.*

A equação que representa a taxa interna de retorne é da forma:

$$0 = C + \frac{C_1}{(1+\lambda)} + \frac{C_2}{(1+\lambda)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+\lambda)^n},$$

em que $C, C_1, C_2, \ \ldots \ , C_n$ são os desembolsos ou recebimentos financeiros e λ é a TIR.

> O projeto será considerado rentável e, portanto, atraente do ponto de vista econômico se sua TIR for, no mínimo, igual à TMA. Ou seja, TIR deve ser maior, ou igual, a TMA. (SECURATO, 2008, p. 54)

Exemplo 3.3.4. *A um investidor da NYSE*[20] *foi oferecido um investimento da seguinte forma: desembolso inicial de 10.000,00 dólares e o recebimento de 12.000,00 dólares após o terceiro ano, sendo o custo de oportunidade do capital igual a* 9% *a.a. . Analise, baseado na TIR, se é vantajoso o negócio para o investidor.*

Solução: Como, por definição, a taxa interna de retorno é aquela que anula o valor atual líquido, então vamos supor que a TIR $= \lambda$. Daí, temos que:

$$VAL(\lambda) = 0 \Rightarrow \frac{12.000}{(1+\lambda)^3} - 10.000 = 0 \Rightarrow \frac{12.000}{(1+\lambda)^3} = 10.000 \Rightarrow (1+\lambda)^3 = 1,2.$$

Extraindo a raiz cúbica, de ambos os lados da última igualdade, obtemos:

$$1 + \lambda = \sqrt[3]{1,2},$$

que implica em $1 + \lambda \approx 1,06$. Portanto, λ é aproximadamente $0,06$, ou seja, 6%. Logo, como a TIR é menor do que o custo de oportunidade, então o investimento não é vantajoso.

[20]**NYSE:** Bolsa de Valores de Nova York.

3.3.3 Payback

Definição 3.3.5. *Payback é a nomenclatura utilizada para representar o tempo que se leva para recuperar o capital investido.*

Existem duas espécies de Payback: o simples e o descontado.

> **Payback Simples:** É aquele que não se importa com as taxas de juros cobradas nas entradas e saídas dos recursos financeiros. Para tanto, não representa aspecto significativo na prática, pois não respeita o princípio maior da Matemática Financeira de que o dinheiro modifica-se de valor ao longo do tempo.
>
> **Payback Descontado:** É aquele que ajusta os valores do fluxo de caixa tendo em vista a taxa de juros referente ao custo de oportunidade[21] do capital.

> ... o período de retorno do investimento é um dos métodos de avaliação mais largamente difundidos entre os administradores de empresas. O método consiste, basicamente, na determinação do número de períodos necessários para recuperar o capital investido. A partir desse dado, a empresa decide sobre a implementação do projeto, comparando-o com os seus referenciais de tempo para a recuperação do investimento (SECURATO, 2008, p. 50).

Exemplo 3.3.6. *Pedro, acionista da B_3[22], investiu em um projeto que prevê uma aplicação de $R\$\ 180.000,00$, inicialmente, seguido de 4 recebimentos anuais de $R\$\ 60.000,00$, sendo o custo de oportunidade do capital igual a 3% a.a.. Diante do ambiente, determine o payback simples e o payback descontado para saber a partir de quando ele irá obter lucro.*

[21] **Custo de Oportunidade:** Conceito de custos utilizado por Marshall. Segundo esse conceito, os custos não devem ser considerados absolutos, mas iguais a uma segunda melhor oportunidade de benefício não aproveitada. Ou seja, quando a decisão para as possibilidades de utilização de A exclui a escolha de um melhor B, podem-se considerar os benefícios não aproveitados decorrentes de B como opportunity costs, custos de oportunidade, segundo Sandroni [34].

[22] **B_3:** A B_3 é uma das principais empresas de infraestrutura de mercado financeiro no mundo, com atuação em ambiente de bolsa e de balcão. Sociedade de capital aberto - cujas ações (B3SA3) são negociadas no Novo Mercado -, a Companhia integra os índices Ibovespa, IBrX-50, IBrX e Itag, entre outros. Reúne ainda tradição de inovação em produtos e tecnologia e é uma das maiores em valor de mercado, com posição global de destaque no setor de bolsas. As atividades incluem criação e administração de sistemas de negociação, compensação, liquidação, depósito e registro para todas as principais classes de ativos, desde ações e títulos de renda fixa corporativa até derivativos de moedas, operações estruturadas e taxas de juro e de commodities [3].

Solução:

A) Pelo projeto, o acionista irá desembolsar, no começo, $R\$ \ 180.000,00$. Por outro lado, receberá $R\$ \ 60.000,00$ a cada ano, retornando parte do investimento. Assim, pela definição de payback simples, temos que:

$$P_s = \frac{180.000}{60.000} = 3 \ anos.$$

Logo, o payback simples é de 3 anos.

B) Para o payback descontado, devemos trazer para o instante inicial (zero) todas as parcelas referentes à quantia de $R\$ \ 60.000,00$ de tal forma a chegarmos no momento em que a soma dessas quantias se iguale a $R\$ \ 180.000,00$. Assim, para cada ano, podemos calcular o valor presente líquido (VPL) do fluxo de caixa, sendo o payback descontado o instante em que o $VPL = 0$. Daí, temos que:

Ano	*Valor*	*Valor Descontado*	*VPL*
0	- R\$ 180.000,00	- R\$ 180.000,00	- R\$ 180.000,00
1	R\$ 60.000,00	R\$ 58.252,42	- R\$ 121.747,58
2	R\$ 60.000,00	R\$ 56.555,75	- R\$ 65.191,83
3	R\$ 60.000,00	R\$ 54.908,50	- R\$ 10.283,33
4	R\$ 60.000,00	R\$ 53.309,22	R\$ 43.025,89

Tabela 3.5: Tabela do Cálculo do Valor Presente Líquido do Fluxo de Caixa

Fonte: Autor

A terceira coluna, da tabela anterior, foi construída, a partir do 1° ano, dividindo-se o valor da 2° coluna por $(1,03)^1$, ... , $(1,03)^4$, respectivamente, aos anos associados.

Agora, para encontrarmos o instante exato em que o VPL = 0, vamos fazer uma interpolação linear da forma:

3	Z	4
- R\$ 10.283,33	0	R\$ 43025,89

Tabela 3.6: Interpolação Linear

Fonte: Autor

Com isso, obtemos:

$$\frac{Z-3}{0-(-10.283,33)} = \frac{4-3}{43025,89-(-10283,33)} \Leftrightarrow \frac{Z-3}{10.283,33} = \frac{1}{53309,22} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z-3 = 0,192899652 \Leftrightarrow z \approx 3,19 \Leftrightarrow z \approx 3 \; anos + 2 \; meses + 9 \; dias.$$

Logo, o payback descontado é de aproximadamente três anos dois meses e nove dias. Assim, Pedro passará a ter lucro a partir desse período.

Nesse capítulo foram abordados temas referentes aos aspectos do Cálculo Financeiro que estão relacionados à série uniforme, às amortizações e à análise de investimentos. O objetivo foi proporcionar aos professores do ensino médio, especialmente do 3° ano, uma compreensão mais clara sobre tais assuntos.

Integralizado este capítulo, os leitores encontrarão no próximo sete problemas mais práticos que envolvem a utilização de alguns conceitos teóricos propostos até então, bem como outros, com fins didáticos, úteis para o professor de ensino médio apresentar aos alunos a importância do entendimento teórico do Cálculo Financeiro.

Capítulo 4

Problemas

Este capítulo tem como finalidade a resolução de sete problemas sobre a utilização de alguns conceitos teóricos do Cálculo Financeiro, anteriormente apresentados, caso o professor de ensino médio, eventualmente, na dificuldade de justificar, para os alunos do ensino médio, a importância e relevância do teor teórico na abordagem em sala, queira, em princípio, desfrutar de um incremento mais usual do tema. Assim, os problemas podem ser trabalhados, utilizando-se dos conceitos teóricos expostos nos três capítulos anteriores desta dissertação, como propostas de atividades.

4.1 Comparação de Preços

Os dois problemas envolvendo comparação de preços, a seguir, têm como intuito a abordagem do princípio maior da Matemática Financeira, ou seja, de que o dinheiro modifica de valor ao longo do tempo. Para tanto foi utilizado a teoria envolvendo a definição de valor atual do Capítulo 2 para resolução dos problemas.

1º Problema: Pedro tem três opções de pagamento na compra de um tênis da Nike que custa 249,00 reais:

a) À vista, com 5% de desconto.

b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor e a pior opção para Pedro, se o dinheiro vale, para ele 1,2% ao mês?

Solução: Construindo o diagrama de fluxo de caixa para as opções a, b e c, respectivamente, obtemos:

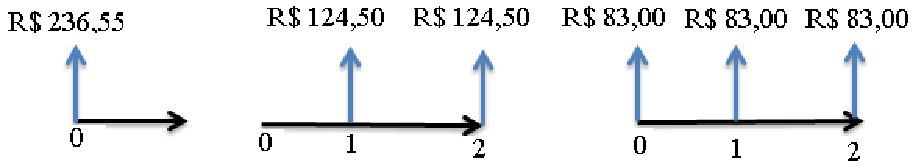

Figura 4.1: *Fluxo de Caixa para as opções a, b e c*

Fonte: Autor

Comparando os valores na época 0, ou seja, aplicando a Definição 2.6.2, temos:

$$A_1 = 236,55 \; reais.$$
$$A_2 = \frac{124,5}{1,012} + \frac{124,5}{(1,012)^2} \approx 244,59 \; reais.$$
$$A_3 = 83 + \frac{83}{1,012} + \frac{83}{(1,012)^2} \approx 246,06 \; reais.$$

Portanto, a melhor alternativa para Pedro é a compra à vista e a pior é a compra em três prestações.

2º Problema: Renata tem duas opções de pagamento na compra de um celular, Smartphone Samsung Galaxy S10 128GB:

a) Duas prestações mensais de 2.114,55 reais cada, ou

b) Cinco prestações mensais de 820,30 reais cada.

Se o dinheiro vale 1,4% ao mês, qual a melhor forma de pagamento para Renata?

Solução: Construindo o diagrama de fluxo de caixa para a opção (a) e (b), respectivamente, obtemos:

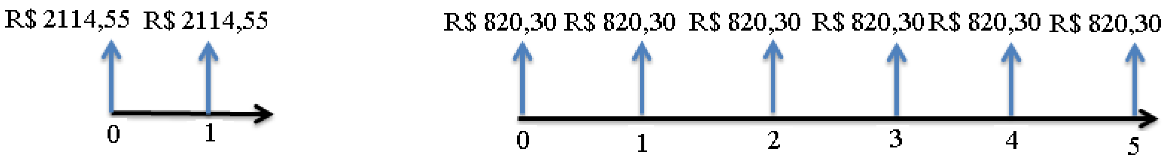

Figura 4.2: *Fluxo de Caixa para as opções a, b*

Fonte: Autor

Para comparar as opções, determinamos o valor dos conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo, na época 1 e aplicamos a Definição 2.6.2, fazendo os ajustes para a primeira época. Assim, temos:

$A_1 = 2.114,55 \cdot (1 + 0,014) + 2.114,55 \approx 4.258,70$ reais.

$$A_2 = 820,30 \cdot (1 + 0,014) + 820,30 + \frac{820,30}{(1+0,014)} + \frac{820,30}{(1+0,014)^2} + \frac{820,30}{(1+0,014)^3} + \\ + \frac{820,30}{(1+0,014)^4} \approx 4.821,59 \text{ reais.}$$

Portanto, Renata deve preferir o pagamento em duas prestações.

4.2 Tesouro Direto

No problema do tesouro direto, a seguir, haverá uma aplicação do Teorema 2.2.3 com algumas particularidades envolvendo o período, pois aqui os cálculos se desenvolvem tendo como base o tempo em dias úteis, para tanto, por padrão, consideramos o ano com 252 dias úteis, além disso será utilizado o diagrama de fluxo de caixa para um melhor entendimento da proposta. Portanto, com fins didáticos, houve também cálculos atrelados a rentabilidade e comparação de taxas na compra e venda do título Selic Prefixado 2023.

O Tesouro Direto é um programa criado pelo Tesouro Nacional, que autoriza, qualquer pessoa com um CPF, investir em títulos públicos, pela internet. Eles são investimentos de renda fixa, portanto o investidor já conhece, na hora de investir, qual será a regra de rentabilidade e como serão os pagamentos dos juros. O Tesouro Direto é uma excelente alternativa de investimento, pois oferece títulos com diferentes tipos de rentabilidade (prefixada, ligada à variação da inflação ou à variação da taxa de juros básica da economia - Selic), diferentes prazos de vencimento e também diferentes fluxos de remuneração [37].

Há impostos cobrados sobre as operações realizadas no Tesouro Direto, eles são os mesmos que incidem sobre as operações de renda fixa, como fundos de investimento e CDBs: o Imposto Sobre Operações Financeiras (IOF), para resgates da aplicação em menos de 30 dias, e o Imposto de Renda (IR), com alíquota regressiva a depender do prazo do investimento, da seguinte maneira [37]:

i. 22,5% para aplicações com prazo de até 180 dias;
ii. 20% para aplicações com prazo de 181 dias até 360 dias;
iii. 17,5% para aplicações com prazo de 361 dias até 720 dias;
iv. 15% para aplicações com prazo acima de 721 dias.

Logo, os dias para efeito de incidência de imposto de renda são contados a partir da data de liquidação. Portanto, com relação aos cupons de juros, serão aplicadas as alíquotas do Imposto de Renda previstas, com o prazo contado a partir da data de início da aplicação.

O Tesouro Prefixado 2023 vence em 01/01/2023. Ele é indicado para aqueles que querem realizar investimentos de longo prazo. Título prefixado é aquele que no momento da compra, você já sabe exatamente quanto irá receber no futuro (sempre R$ 1.000 por unidade de título) [37]. É mais interessante para quem pode deixar o seu dinheiro render até o vencimento do investimento, pois não paga juros semestrais. Em caso de resgate antecipado, o Tesouro Nacional garante sua recompra pelo seu valor de mercado [37].

3º Problema: Suponha que João - professor do ensino médio - tenha investido no tesouro prefixado 2023, com uma taxa de 4,19% a.a., no dia 12/06/2020 (643 dias úteis da data da compra do título até a data de resgate 01/01/2023) e recebido ao final 1.000,00 reais. Sabendo que o ano tem 252 dias úteis, são propostas as questões abaixo:

(I) Qual é o diagrama de fluxo de caixa da situação financeira? Esse diagrama facilita o entendimento da situação apresentada?

(II) Qual o preço desse título na data da compra, ou seja, no dia 12/06/2020?

(III) Agora, imagine que João queira vender o título no dia 30/07/2021, antes da data de vencimento do título, sabendo que a taxa de mercado , nesse dia, vale 4% a.a. Qual o preço de venda do título?

(IV) Determine a rentabilidade bruta no período tendo em vista a situação anterior, bem como a rentabilidade bruta anual.

(V) Faça uma comparação da taxa contratada na compra (12/06/2020) com a taxa de mercado no dia da venda (30/07/2021) e verifique se houve ou não rentabilidade no período.

(VI) Determine o imposto de renda retido ao resgatar o título no dia 01/01/2023.
Solução: (I)- O diagrama de fluxo de caixa para o investimento no tesouro prefixado 2023 realizado por João é dado por:

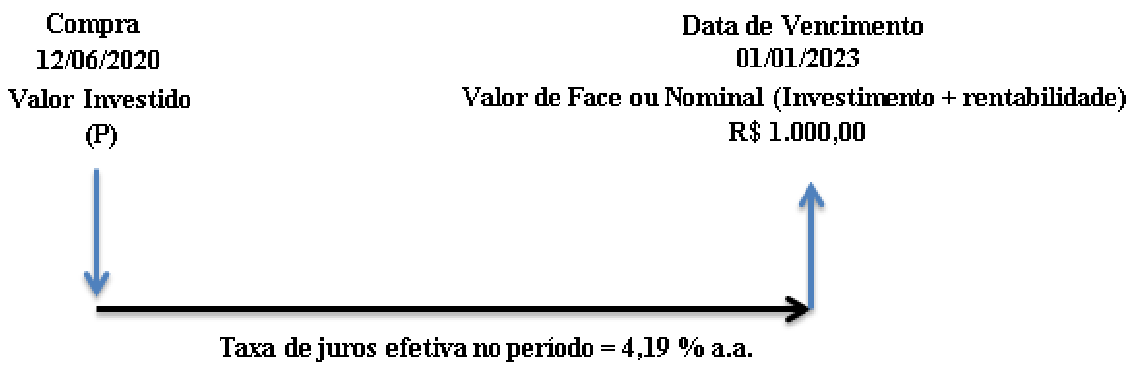

Figura 4.3: *Fluxo de Caixa para o Tesouro Selic 2023*

Fonte: Autor

Logo, o diagrama facilita e ajuda a exposição teórica tornando a representação do problema mais didática.

(II)- Como, no vencimento, o investimento terá um valor final de R$ 1.000,00, então para encontrarmos o valor do título na data da compra (12/06/2020), utilizaremos o Teorema 2.2.3, com n (período) $= \frac{y}{252}$, onde y é a quantidade de dias úteis entre a data da compra e a data do vencimento e 252 é a quantidade de dias úteis anuais, adotado como padrão. Assim, temos que:

$$M = C \cdot (1+i)^{\dfrac{y}{252}},$$

com $M = 1.000,00$, $i = 0,0419$, $y = 638$ e C = P = preço do título na data da compra. Daí,

$$P = \frac{1.000}{(1+0,0419)^{\frac{643}{252}}} \approx 900,57 \; reais.$$

Portanto, o preço do título na data da compra foi de aproximadamente 900,57 reais.

(III)- Para calcular o preço do título na venda, vamos utilizar o Teorema 2.2.3, com $i = 0,04$, $C = 1.000,00$ e $n = \dfrac{286}{252} \approx 1,135$, onde 286 é a quantidade de dias úteis, entre a compra, inclusive, até a venda e 252 é a quantidade padrão de dias úteis anuais. Daí, temos que:

$$\text{Preço do título} = \frac{1.000,00}{(1+0,04)^{1,135}} \approx 956,46 \text{ reais.}$$

Portanto, o preço de venda do título no dia 30/07/2021 é de aproximadamente 956,46 reais.

(IV)- A rentabilidade bruta do período (RT) é dado por:

$$RT = \frac{PV}{PC} - 1,$$

em que PV = Preço do compra do Título e PC= Preço de venda do Título.

Portanto, temos que:

$$RT = \frac{956,46}{900,57} - 1 \approx 0,062.$$

Logo, a rentabilidade bruta do período é de aproximadamente 6,20%.

Por outro lado, para encontrarmos a rentabilidade anual, utilizamos a seguinte equação:

$$(1+I)^{\frac{y}{252}} = \frac{PV}{PC},$$

em que y é a quantidade de dias úteis entre a data da compra e a data do vencimento, que nesse caso é de 286 dias úteis e I é a taxa anual de rentabilidade.

Assim, resolvendo a equação acima, com PV= R$ 956,46 e PC= R$ 900,57 encontramos uma rentabilidade anual aproximada de 5,44%.

(V)- Sabendo que a taxa contratada na compra foi de 4,19% a.a. e, por sua vez, a taxa anual de mercado na venda, dia 30/07/2021, foi de 4,00%, ou seja, menor que a contratada na compra, então João teve rendimento no período, pois mantendo a taxa de compra constante, ao vender o título, com uma taxa anual menor, em relação a contratada, ele terá rentabilidade no período, por outro lado, se a taxa anual de mercado na venda for maior que a contratada na compra, João terá um prejuízo no período.

(VI)- De 12/06/2020 a 01/01/2023 houve 933 dias. Além disso, o título foi comprado a um valor de 900,57 reais e resgatado por 1.000,00 reais. Logo, houve um lucro bruto de 99,43 reais, que será a base de cálculo para o imposto retido. Por outro lado, como se passaram 933 dias da compra até o vencimento, pela tabela regressiva de imposto de renda, a alíquota incidente é de 15% sobre o rendimento. Daí, o imposto devido é dado por:

$$IR = 99,43 \cdot 0,15 \approx 14,92 \; reais.$$

Portanto, o imposto devido na operação é de aproximadamente 14,92 reais.

4.3 Desconto de Duplicata e Notas Promissórias

No problema envolvendo desconto de duplicata e notas promissórias será utilizado os conceitos teóricos de desconto comercial simples, porém o mesmo pode ser resolvido desfrutado dos conceitos de desconto bancário simples. Além disso, com o viés didático, calcularemos o imposto sobre operações financeiras (IOF), bem como a taxa de abertura de crédito (TAC), o valor líquido liberado ao descontar o título e, por fim, o custo efetivo mensal do desconto de um título.

As operações bancárias de desconto costumam usar o conceito de desconto simples por fora, no qual o juros incide sobre o montante da dívida, e não sobre o principal solicitado de empréstimo, segundo Assaf [2]. Dessa forma, é apurada uma taxa implícita na operação superior à taxa de desconto considerada. As operações de desconto costumam cobrar, além do juro antecipado, impostos sobre operações financeiras (IOF) e uma taxa de abertura de crédito (TAC) com o intuito de cobrir despesas operacionais dos bancos, conforme Assaf [2].

O IOF incide sobre: as operações de crédito, câmbio e seguros; a compra e venda de títulos e valores mobiliários e o ouro. São contribuintes do imposto: os tomadores de crédito, os compradores de moeda estrangeira; os segurados e os adquirentes de títulos e valores mobiliários, segundo Silva [36].

É comum, ainda, o uso do prazo médio por bancos e empresa de *factoring*[23] no caso de operações com duplicata, conforme Securato [35].

4º Problema: Um título de R$ 50.000,00 é descontado junto a um banco 40 dias antes de seu vencimento. A taxa de desconto cobrada é de 1,7% a.m., sendo de 0,0041% ao dia o IOF incidente sobre a operação. O banco cobra ainda uma taxa de abertura de crédito (TAC) de 0,18% sobre o valor nominal do título no ato da liberação dos recursos. Diante dessas informações, responda os itens propostos abaixo:

(I) Qual o valor do desconto sem a TAC?

(II) Determine o valor do IOF.

(III) Qual seria o valor da TAC?

(IV) Determine o valor líquido liberado.

(IV) Determine o custo efetivo mensal da operação.

[23]**Factoring:** Atividade pela qual uma instituição financeira especializada compra e administra as duplicatas de outras empresas, ou outros títulos a receber. Com esse sistema, cria-se a possibilidade de uma redução no custo do dinheiro (ou do crédito) das empresas, uma vez que se elimina a intermediação dos bancos nos descontos de duplicatas. Ao mesmo tempo, as empresas passam a ter maior capital de giro, uma vez que as instituições que operam com factiring adiantam os valores das duplicatas (de 50 a 80%, por exemplo) antes de seus vencimentos , cobrando pelo adiantamento menos do que os bancos em termos de taxas de juros [34].

Solução:
(I)- Para encontrarmos o desconto, vamos aplicar o Lema 1.7.3. Daí, segue que:

$$D_c = N \cdot i \cdot n,$$

em que $N = 50.000,00$ reais, $i = \dfrac{0,017}{30}$ a.d. e $n = 40$ dias.
Com isso,

$$D_c = 50.000,00 \cdot \frac{0,017}{30} \cdot 40 \approx 1.133,33 \; reais.$$

Logo, o desconto, sem a TAC, é de aproximadamente 1.133,33 reais.

(II)- O cálculo do IOF é dado pela seguinte equação:

$$IOF = N \cdot l \cdot n,$$

em que $N = 50.000,00 \; reais$, $l = 0,000041$, IOF diário, e $n = 40 \; dias$.

Assim, segue que:

$$IOF = 50.000 \cdot 0,000041 \cdot 40 = 82,00 \; reais.$$

Logo, o valor do IOF da operação é de 82,00 reais.

(III)- O valor da TAC é dado por:

$$TAC = N \cdot h,$$

em que N =50.000,00 reais e h = 0,0018. Daí, temos que:

$$TAC = 50.000,00 \cdot 0,0018 = 90 \; reais.$$

Portanto, o valor da TAC é de 90,00 reais.

(IV)- O valor líquido liberado (VLL) é dado por:

$$VLL = N - D_c - IOF - TAC \approx 50.000,00 - 1.133,33 - 82,00 - 90,00 \approx 48.694,67\, reais.$$

Logo, o valor líquido liberado é de aproximadamente 48.694,67 reais.

(V)- Para encontrarmos o custo efetivo mensal, utilizamos o teorema 2.2.3, com $M = 50.000,00$, $C = 48.694,67$ e $n = \dfrac{40}{30}$.

Assim, segue que:

$$50.000,00 = 48.694,67 \cdot (1 + i_e)^{\frac{40}{30}}.$$

Daí, $(1 + i_e)^{1,333...} \approx 1,0268$. Então, $i_e \approx 2\%$ a.m.

Em razão do exposto, o custo efetivo (i_e) é de aproximadamente 2% ao mês.

4.4 Hot Money

No problema do *hot money*, apresentado posteriormente, será utilizado os conceitos teóricos do Capítulo 1, envolvendo juros simples e do Capítulo 3, envolvendo a TIR. Além disso, com fins didáticos, será calculado o IOF, o *spread*[24] e, por fim, o custo efetivo mensal de uma operação de *hot money*.

Hot money é uma expressão inglesa que significa literalmente "dinheiro quente", isto é, são aplicações em títulos ou no câmbio, atraídas por taxas de juros elevadas ou diferenças cambiais significativas, de curtíssimo prazo, podendo deslocar-se de um mercado para outro com grande agilidade. Esse tipo de operação pode provocar grandes turbulências, especialmente, no equilíbrio cambial de um país, conforme observado em Sandroni [34].

[24]**Spread:** O spread bancário é medido pela diferença entre o custo de um empréstimo e a remuneração paga ao poupador. Há inúmeros fatores que definem o *spread* cobrado pelo banco, destacando-se principalmente a liquidez, risco da operação e garantias oferecidas e maturidade, segundo Assaf [2].

Alexandre Assaf Neto [2], destaca que o *hot money* são operações de curtíssimo prazo (um dia), visando atender às necessidades imediatas de caixa das empresas. O *hot money* tem como referencial a taxa CDI, acrescida de um *spread* cobrado pela instituição intermediadora, ainda segundo Assaf [2]. A operação incorre também em IOF calculado sobre a repactuação da taxa de juro.

Esta modalidade é vantajosa para empresas que necessitem rapidamente de certa quantia, sem possuir capital de giro no momento [17]. Isso pode acontecer devido a uma grande quantidade de vendas a prazo por parte do negócio. Porém, este método de obter fundos, que podem ser considerados para emergência, devem ser evitados para que o negócio não consuma parte do seu capital com juros elevados [17]. Assim, se a empresa passa por um problema mais grave, o ideal é tomar créditos em que seja possível o reembolso em um tempo maior e com taxas mais acessíveis para o negócio [17].

5º Problema: Admita que uma empresa necessita rapidamente de certa quantia e realiza uma operação de *hot money* contratada por dois dias no valor de 1.000.000,00 de reais. Além disso, as taxas over mensais estabelecidas para cada dia são, respectivamente, de 1,2% e 1,8%. São computados 15 dias úteis no período da operação. A instituição financeira cobra um *spread* de 0,04% ao dia, incidindo também IOF de 0,0041% ao dia, descontado antecipadamente. Por fim, o IOF é pago diariamente e os juros e o *spread* são acumulados ao montante da dívida e liquidados ao final da operação (2º dia). Determine os valores envolvidos na operação e o custo efetivo:
Solução:
Para o primeiro dia, temos que:

$$IOF = 1.000.000 \cdot 0,000041 = 41,00 \text{ reais.}$$

$$Spread = 1.000.000 \cdot 0,0004 = 400,00 \text{ reais.}$$

$$Juros = 1.000.000 \cdot \frac{0,012}{30} \cdot 1 = 400,00 \text{ reais.}$$

Empréstimo Liberado = 1.000.000 - IOF = 1.000.000 - 41,00 = 999.959,00 reais.

Portanto, o saldo devedor (SD_1) é dado por:

SD_1 = 1.000.000 - IOF +Juros +Spread = 1.000.000,00 -41,00 +400,00 +400,00= = 1.000.759,00.

Logo, o saldo devedor do primeiro dia é de 1.000.759,00 reais.

Já para o segundo dia, utilizaremos como base de cálculo do IOF, do *Spread* e do Juro, o saldo devedor do dia anterior. Com isso, temos:

$IOF = 1.000.759,00 \cdot 0,000041 \approx 41,03$ reais.

$Spread = 1.000.759,00 \cdot 0,0004 \approx 400,30$ reais.

$Juros = 1.000.759,00 \cdot \dfrac{0,018}{30} \cdot 1 \approx 600,46$ reais.

Renovação do Empréstimo = 1.000.759,00 - IOF = 1.000.759,00 -41,03 = 1.000.717,97 reais.

Portanto, o saldo devedor (SD_2) é dado por:

$SD_2 = 1.000.759 - IOF + Juros + Spread.$
Com isso,
$SD_2 \approx 1.000.759,00 - 41,03 + 400,30 + 600,46 \approx 1.001.718,73.$

Logo, o saldo devedor do segundo dia é de aproximadamente 1.001.718,73 reais.

Assim, o fluxo de caixa, sob o ponto de vista do tomador de empréstimo, apresenta-se da forma seguinte:

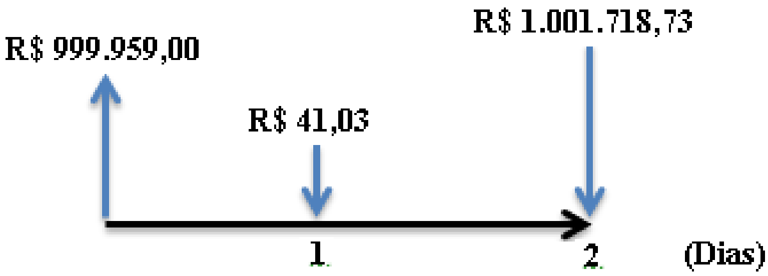

Figura 4.4: *Fluxo de Caixa sob o Ponto de Vista do Tomador de Empréstimo.*

Fonte: Autor

Daí, a taxa efetiva (custo da operação), por dia útil, é a taxa interna de retorno do fluxo de caixa do empréstimo, ou seja:

$$999.959,00 = \frac{41,03}{(1+i)} + \frac{1.001.718,73}{(1+i)^2}$$

Logo, resolvendo a equação anterior, encontra-se uma TIR aproximada de 0,09%.

Por fim, capitalizando-se essa taxa para o período da operação (dois dias), o custo efetivo será:

$$i = (1 + 0,0009)^2 - 1 \approx 0,18\%.$$

Logo, o custo efetivo para o período da operação é de aproximadamente 0,18%.

4.5 Depósito de Poupança

No problema do depósito de poupança, apresentado a seguir, serão utilizados os conceitos teóricos do Capítulo 2 envolvendo montante nos juros compostos, taxas equivalentes e a relação entre a taxa aparente, a taxa real e a taxa de inflação.

Tem-se que de acordo com a legislação atual, ou seja, art. 12 da Lei nº 8.177, de

$1^{\underline{o}}$ de março de 1991, com a redação dada pela Lei $n^{\underline{o}}$ 12.703, de 7 de agosto de 2012, e art. $7^{\underline{o}}$ da Lei $n^{\underline{o}}$ 8.660, de 28 de maio de 1993, a remuneração dos depósitos de poupança é composta de duas parcelas [4]:

I - a remuneração básica, dada pela Taxa Referencial - TR, e

II - a remuneração adicional, correspondente a:

a) 0,5% ao mês, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for superior a 8,5%; ou

b) 70% da meta da taxa Selic ao ano, mensalizada, vigente na data de início do período de rendimento, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for igual ou inferior a 8,5%.

$6^{\underline{o}}$ Problema: Maria depositou R$ 50.000,00, em sua caderneta de poupança, no dia 01/04/2019. No entanto, devido a um imprevisto financeiro, ela precisou resgatá-lo no dia 10/06/2019. A rentabilidade da TR no período analisado foi de 0%. Determine:

(I) Quantos períodos houve de rentabilidade e suas, respectivas, taxas Selic's.

(II) As taxas Selic's anuais associadas aos períodos anteriores.

(III) O valor da renumeração adicional em porcentagem nos dois períodos do item (I).

(IV) O valor total resgatado.

(V) A taxa real de ganho ou perda no resgate, assumindo que a inflação no período, de 01/04/2019 a 10/06/2019, foi de 1,66%

Solução:

(I)- Houve 2 períodos de rentabilidade. São eles, com a respectiva taxa Selic[25]:

$1^{\underline{o}}$ - 01/04/2019 - 01/05/2019 - Selic 0,52% a.m.

$2^{\underline{o}}$ - 01/05/2019 - 01/06/2019 - Selic 0,54% a.m.

(II)- Para encontrarmos a taxa selic anual, de cada período, vamos utilizar o teorema 2.9.3. Ou seja,

$$(1+i)^n = (1+I).$$

Para o $1^{\underline{o}}$ período, temos: n=12, i= 0,52% a.m. e I= taxa anual.

[25]**Selic:** Taxas Selic's [33].

Daí,

$$(1 + 0,0052)^{12} = (1 + I) \Leftrightarrow I \approx 0,0642 \ a.a.$$

Portanto, a taxa selic anual, para o primeiro período, é de aproximadamente 6,42%.

Para o 2º período, temos: n=12, i= 0,54% a.m. e I'= taxa anual.

Daí,

$$(1 + 0,0054)^{12} = (1 + I') \Leftrightarrow I' \approx 0,0667 \ a.a.$$

Portanto, a taxa selic anual, para o segundo período, é de aproximadamente 6,67%.

(III)- Como a taxa selic anual aproximada é menor do que 8,5% nos dois períodos, então a remuneração adicional será dada por:

1º Período: $70\% \cdot 0,52\% = 0,7 \cdot 0,0052 = 0,364\% \ a.m.$

Logo, o valor da remuneração adicional é 0,364% a.m.

2º Período: $70\% \cdot 0,54\% = 0,7 \cdot 0,0054 = 0,00378 = 0,378\% \ a.m.$

Logo, o valor aproximado da remuneração adicional é 0,378% a.m.

(IV)- O valor total resgatado será dado pela aplicação do Teorema 2.2.3.

Daí, temos que:

1º Período:

$$M = 50.000 \cdot (1 + 0,00364)^1 = 50.182,00 \ reais.$$

2º Período:

$$M = 50.182,00 \cdot (1 + 0,00378)^1 \approx 50.371,69 \ reais.$$

Portanto, o valor total resgatado é de aproximadamente 50.371,69 reais.

(V)- A taxa aparente de ganho na operação, ou seja, nos dois períodos, é dada por:

$$i_a = (1 + 0,00364) \cdot (1 + 0,00378) - 1 \approx 0,74\%.$$

Por outro lado, como a taxa de inflação - θ - nos dois período é de 1,66%, temos, aplicando o Teorema 2.9.12, que:

$$(1 + 0,0074) = (1 + 0,0166) \cdot (1 + \theta_r) \Leftrightarrow \theta_r \approx -0,90\%.$$

Portanto, houve uma perda real, no período de 01/04/2019 até 10/06/2019, de aproximadamente 0,90%.

4.6 Perpetuidade

No problema da perpetuidade, apresentado a seguir, serão utilizados os conceitos teóricos do Capítulo 3 para calcular uma situação envolvendo ações.

Uma perpetuidade ou renda perpétua é uma anuidade cujos pagamentos começam numa data fixada e continuam indefinidamente, conforme Frank [15] . Na hipótese de que uma companhia nunca vá à falência os dividendos sobre uma ação de sua categoria preferencial podem ser considerados uma perpetuidade, segundo Frank [15].

7º Problema: Um investidor está avaliando uma ação cujos dividendos esperados são de R$0,252 por ação, indeterminadamente. A taxa de retorno exigida para esse investimento é de 14% ao ano no mínimo. Com isso, determine o preço máximo que o investidor pagaria por esta ação, sabendo que a mesma está sendo negociada no mercado por R$ 2,10.

Solução: O preço máximo que o investidor poderia pagar por essa ação, considerando suas projeções de dividendos e a taxa de retorno requerida, é de R$1,8.

Pois:

$$P = \frac{0,252}{0,14} = \text{R\$ 1,8 por ação.}$$

Agora, comparando esse valor teórico com o preço de negociação do mercado, percebe-se que a ação está cara para os padrões estipulados pelo investidor, o qual obteria somente 12% a.a. de retorno se decidisse adquiri-la, basta verificar o desenvolvimento abaixo.

$$2,1 = \frac{0,252}{x}$$

$$x = 12\% \text{ a.a.}$$

Portanto, como o retorno desejado, no mínimo, de 14% a.a. é superior ao esperado, de 12% a.a., então o investimento não é aconselhável.

Nesse último capítulo foram resolvidos, de forma dialogada, sete problemas que abarcam os conceitos utilizados nos três capítulos anteriores. O objetivo foi proporcionar aos professores do ensino médio atividades que possam auxiliá-los a proporcionarem uma melhor compreensão da teoria para seus alunos.

Considerações Finais

Ao finalizar esta dissertação pode-se afirmar que o objetivo deste trabalho foi alcançado, visto que foi disponibilizado um material teórico de pesquisa para professores de Matemática do ensino médio acerca de diversos conceitos de Cálculo Financeiro que são possíveis de serem trabalhados com os alunos do ensino médio.

Ao idealizar o tema da dissertação, deparei-me com a importância de fornecer um material teórico e não prático de Cálculo Financeiro para professores da educação básica que tenham dificuldades com alguns conceitos mais formais da disciplina, bem como suas demonstrações e, portanto, servindo de fonte de pesquisa em eventuais questionamentos sobre o tema, dado que o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT [31], visa atender prioritariamente professores de Matemática em exercício na Educação Básica, especialmente de escolas públicas, que buscam aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência.

Além disso, o trabalho de conclusão final do PROFMAT deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica com impacto na sala de aula. Mesmo porque, entende-se que os professores necessitam de material de apoio para sua formação continuada, mesmo que ela seja feita de maneira informal, por meio de leituras sobre os temas abordados em sala de aula.

Tal compreensão é de fundamental importância, pois a finalidade da educação é tornar os indivíduos críticos, conscientes e cientes do que querem perante a sociedade desigual, no qual todos têm direitos ao aprendizado sem medo de errar para aprender, fortalecendo seu potencial. Por isso, o professor deve possibilitar ao aluno analisar o mundo, compreendê-lo e agir sobre ele. Mas, para isso, o professor necessita de material variado que o auxilie no planejamento de suas aulas.

Como a temática da Educação Financeira na educação básica ainda é muito recente (foi introduzida nas escolas a partir de 2017 pela BNCC), faz-se necessário que os professores façam uma atualização de seus conhecimentos a fim de levar aos alunos conhecimentos atuais e que possam ter utilidade prática. Por isso, o conhecimento do professor deve ser amplo e adequado a fim de sanar as dúvidas de seus alunos.

Ressalto que haverá a continuidade da produção de materiais na perspectiva financeira para docentes da educação básica, propostas por mim, com a construção de dois artigos cujos temas são: Finanças Pessoais para Professores do Ensino Médio e Cálculo Comercial para Professores do Ensino Fundamental. Por conseguinte, pretendo também publicar um livro baseado nesta dissertação.

Portanto, espero ter contribuído, com os tópicos apresentados, ao longo dos quatro capítulos, para sanar as dúvidas e dificuldades enfrentadas pelos professores do ensino médio em relação aos conceitos teóricos-formais do Cálculo Financeiro e suas demonstrações, quando em eventuais pesquisas ao material aqui exposto.

Referências Bibliográficas

[1] ASSAF NETO, Alexandre . **Matemática financeira e suas aplicações**. Vol. 12. São Paulo: Atlas, 2012.

[2] ASSAF NETO, Alexandre . **Mercado financeiro**. Vol. 4. São Paulo: Atlas, 2001.

[3] B3. **Uma das principais empresas de infraestrutura de mercado financeiro do mundo**. Institucional, 2020. Disponível em <http://www.b3.com.br/pt_br/b3/institucional/quem-somos/>. Acesso em 28/01/2020.

[4] BACEN. **Remuneração dos Depósitos de Poupança**. Banco Central do Brasil. Disponível em <https://www4.bcb.gov.br/pec/poupanca/poupanca.asp?frame=1>. Acesso em 23/06/2020.

[5] BARROS, Dimas Monteiro de. **Matemática financeira**. Vol. 5. São Paulo: Rideel, 2014.

[6] CEBRASPE. **Concursos**. Cebraspe, 2020. Disponível em <https://www.cebraspe.org.br/concursos/>. Acesso em 23/01/2020.

[7] CORREIO BRASILIENSE. **Unicamp abre vagas para medalhistas; USP e UNESP também estudam medida**. Correio Braziliense, 2018. Disponível em <https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/eu-estudante/ensino_ensinosuperior/2018/12/24/ensino_ensinosuperior_interna,727152/unica abre-vaga-para-medalhistas.shtml>. Acesso em 23/01/2020.

[8] COSTA, Jonathan Lavor de. **O uso de exponencial e logaritmo no setor de finanças**. Dissertação de mestrado profissional em matemática em rede

nacional: PROFMAT. Universidade Federal do Piauí: UFPI. Teresina: UFPI - PROFMAT, 2013.

[9] DISSERTAÇÃO. **Dissertações do PROFMAT**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. DISPONÍVEL EM <https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em 15/08/2020.

[10] ENQ. **Exame nacional de qualificação**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020. DISPONÍVEL EM <http://www.profmat-sbm.org.br/exame-nacional-de-qualificacao/>. Acesso em 23/01/2020.

[11] ESAF. **Provas ESAF**. PCI Concursos, 2020. DISPONÍVEL EM <https://www.pciconcursos.com.br/provas/esaf/>. Acesso em 23/01/2020.

[12] FARO, CLOVIS DE. **Princípios e aplicações do cálculo financeiro**. Rio de Janeiro: LTC- livros técnicos e científicos, 1990.

[13] FERREIRA, ROBERTO G.. **Matemática financeira aplicada: mercado de capitais, administração financeira, finanças pessoais e tesouro direto**. Vol.8 São Paulo: Atlas, 2014.

[14] FIGUEIREDO, DJAIRO GUEDES. **Análise 1**. Vol. 2. Rio de Janeiro:LTC-Livros técnicos e científicos, 1996.

[15] FRANK ALVES, JR.. **Matemática financeira**. São Paulo - Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1972.

[16] GOUVEIA, RHEILA CRISTINA BORGES. **Educação financeira no ensino médio**. Dissertação de mestrado profissional em matemática em rede nacional: PROFMAT. Universidade de Goiás:UFG. Jataí-GO: UFG- PROFMAT, 2019.

[17] HOT. **O que é Hot Money**. Dicionário Financeiro. DISPONÍVEL EM <https://www.dicionariofinanceiro.com/o-que-e-hot-money/>. Acesso em 21/06/2020.

[18] IEZZI, GELSON; DOLCE, OSVALDO; MURAKAMI, CARLOS . **Fundamentos da matemática elementar**. Vol. 5. São Paulo: Atual Editora, 2011.

[19] IMPA. **Reportagem da Veja destaca vagas olímpicas na Unicamp**. impa. DISPONÍVEL EM <https://impa.br/noticias/reportagem-da-veja-destaca-vagas-olimpicas-na-unicamp/>. Acesso em 23/06/2020.

[20] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio**. Vol. 7. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[21] LEMA. **Definição**. n.18 - Alguns Termos. Disponível em <https://www.comp.uems.br/ fhna/ca/180613/Alguns%20termos.pdf>. Acesso em 29/06/2020.

[22] MÁRCIO, Luis da. **Educação financeira na educação básica**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional: PROFMAT. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro-RJ: PROFMAT, 2018.

[23] MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática financeira**. Vol. 2. São Paulo: Atlas, 1993.

[24] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[25] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C.. **Progressões e Matemática Financeira**. Vol. 6. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[26] NETO, A. A., **Matemática financeira e suas aplicações**. Vol. 6. São Paulo: Atlas, 2001.

[27] OBF. **Comitê de Seleção Olímpica Internacional**. Olimpíada Brasileira de Física. Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/v1/olimpiada/2020/index.php/comite-internacional>. Acesso em 15/08/2020.

[28] OBM. **A OBM**. Olimpíada Brasileira de MAtemática. Disponível em <https://www.obm.org.br/quem-somos/pagina-exemplo/>. Acesso em 15/08/2020.

[29] PAS. **Primeira Etapa Subprograma 2016**. Programa de Avaliação Seriada, 2020. Disponível em <http://www.cespe.unb.br/pas/arquivos/PAS1247_001_01.pdf?p=13635a>. Acesso em 25/01/2020.

[30] PINHEIRO, Gabriel. **Escolas vão ensinar a lidar com dinheiro**. Correio Braziliense, Brasília, 02/02/2020. Educação. Seção: Economia, p. 9.

[31] PROFMAT. **Apresentação**. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em <https://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/>. Acesso em 11/06/2020.

[32] PUCCINI, Ernesto Coutinho . **Matemática financeira e análise de investimentos**. Florianópolis-UFSC: CAPES- UAB, 2011.

[33] RECEITA. **Taxas de Juros Selic**. Receita Federal - Ministério da Economia. Disponível em <https://receita.economia.gov.br/orientacao/tributaria/pagamentos-e-parcelamentos/taxa-de-juros-selic>. Acesso em 23/06/2020.

[34] SANDRONI, Paulo, **Novíssimo Dicionário de Economia**, Vol. 2. São Paulo: Best Seller, 1999.

[35] SECURATO, José Roberto, **Cálculo financeiro das tesourarias: bancos e empresas**. Vol. 4. São Paulo: Saint - Paul, 2008.

[36] SILVA, De Plácito e. **Vocabulário Jurídico**. Vol. 31. Rio de Janeiro: Forense, 2014.

[37] TESOURO. **Tesouro Selic**. Tesouro Direto. Disponível em <https://www.tesourodireto.com.br/>. Acesso em 21/06/2020.

[38] UFRGS. **1º Olimpíada Brasileira de Educação Financeira registra participação de 349 estudantes**. FCE - UFRGS. Disponível em <https://www.ufrgs.br/fce/1a-olimpiada-brasileira-de-educacao-financeira-registra-participacao-de-349-estudantes/>. Acesso em 23/06/2020.

[39] UNICAMP. **Medalha que vale vaga na universidade**. Atualidade. Disponível em <https://www.unicamp.br/unicamp/noticias/2019/04/03/medalha-que-vale-vaga-na-universidade>. Acesso em 15/08/2020.

[40] VILANOVA, Wilson. **Álgebra Financeira**. São Paulo: Pioneira, 1980.