

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**A Matemática e a determinação das distâncias e posições dos
astros no Universo.**

Edson França de Moraes

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Edson França de Moraes

A Matemática e a determinação das distâncias e posições dos astros no Universo.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

USP – São Carlos
Novembro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

F815m França de Moraes, Edson
A Matemática e a determinação das distâncias e
posições dos astro no Universo. / Edson França de
Moraes; orientador Alexandre Casassola Gonçalves. --
São Carlos, 2020.
69 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Sistemas de Coordenadas na Astronomia. 2.
Sistema de Coordenadas Esféricas. 3. Conceitos de
Geometria Esférica e Trigonometria Esférica. 4.
Geometria Esférica. 5. Alguns conceitos de
Astronomia vistos pelo olhar da Matemática. I.
Casassola Gonçalves, Alexandre, orient. II. Título.

Edson França de Morais

**Mathematics and the determination of distances and
positions of stars in the Universe.**

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
Mathematics Professional Master's Program. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree
Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

**USP – São Carlos
November 2020**

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos, cunhados, sobrinhos, em especial à minha esposa Naiana Cândida Pires de Moraes, por compreender a importância deste trabalho em minha vida, e ao meu orientador, professor doutor Alexandre Casassola Gonçalves, por sua postura impecável ao se manter ao meu lado diante das adversidades que o tema apresentava. Muito obrigado.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos principais são direcionados aos professores Alexandre Casassola Gonçalves, Americo Lopez Galvez, Benito Frazão Pires, Geraldine Góes Bosco, Katia Andreia Gonçalves de Azevedo, Michelle Fernanda Pierri Hernandez, Tiago Henrique Picon, Vanessa Rolnik Artioli e todos aqueles que contribuíram de alguma forma para que a produção deste trabalho fosse possível.

Agradecimentos especiais são direcionados ao Instituto de Ciências Matemáticas e Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo localizado no campus de São Carlos - SP e à Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP) que contribuíram e que ainda contribuirão para a evolução da Ciência.

*“Viver é enfrentar um problema atrás do outro.
O modo como você o encara é que faz a diferença.”
(Benjamin Franklin)*

RESUMO

MORAIS, E. F. **A Matemática e a determinação das distâncias e posições dos astros no Universo.** 2020. 69 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

A matemática e a Astronomia estão intimamente ligadas desde a Antiguidade. Os gregos interpretavam a Astronomia como uma parte da matemática, sendo eles os responsáveis pela criação de vários modelos geométricos que determinaram relações entre astros no universo.

A matemática modela a realidade e a descreve. Com sua ajuda, foi possível descobrir, quantificar, sistematizar padrões e até mesmo determinar posições de astros no universo por meio de suas coordenadas. Assim, centenas de dissertações e teses são defendidas todos os anos, porém, poucas são relacionadas à Geometria Esférica e, em grande parte, carentes de um melhor detalhamento.

O interesse em conhecer mais sobre fenômenos ligados à Astronomia surge por meio da curiosidade dos próprios alunos. Nesse sentido, queremos, neste trabalho, reconhecer o papel fundamental que a Matemática tem na Astronomia, por meio da determinação do referenciamento dos astros, e apresentar um modelo matemático de Sistema de Coordenadas que ajude na melhor compreensão de seus conceitos.

Palavras-chave: Matemática; Astronomia; Distâncias; Universo; Coordenadas.

ABSTRACT

MORAIS, E. F. **Mathematics and the determination of distances and positions of stars in the Universe.** 2020. 69 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Mathematics and Astronomy have been closely linked since ancient times. The Greeks interpreted Astronomy as a part of mathematics, and they were responsible for creating various geometric models that determined relationships between stars in the universe.

Mathematics models reality and describes it. With its help, it was possible to discover, quantify, systematize patterns and even determine positions of stars in the universe through their coordinates. Thus, hundreds of dissertations and theses are defended every year, however, few are related to Spherical Geometry and, in great part, lack a better detail.

The interest in knowing more about phenomena related to Astronomy arises through the curiosity of the students themselves. In this sense, we want, in this work, to recognize the fundamental role that Mathematics has in Astronomy, by determining the referencing of the stars, and to present a mathematical model of the Coordinate System that helps in a better understanding of its concepts.

Keywords: Mathematics; Astronomy; Distances; Universe; Coordinates..

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – V postulado de Euclides.	21
Figura 2 – Georg Bernhard Riemann.	22
Figura 3 – Circunferência máxima e arco de circunferência máxima.	23
Figura 4 – Elementos da esfera.	24
Figura 5 – Triângulo esférico ABC	24
Figura 6 – Triedro.	25
Figura 7 – Representação de triedro em uma esfera.	26
Figura 8 – Construção utilizada na demonstração da lei dos cossenos para triângulos esféricos.	26
Figura 9 – Triângulo polar $A_pB_pC_p$ do triângulo esférico ABC	28
Figura 10 – Relação entre o triângulo ABC e o seu triângulo polar $A_pB_pC_p$	28
Figura 11 – Triângulo esférico ABC e seu triângulo polar $A_pB_pC_p$	29
Figura 12 – Representação da lei dos cossenos para ângulos.	30
Figura 13 – Triângulos esféricos congruentes.	31
Figura 14 – Representação da área de um fuso esférico.	32
Figura 15 – Triângulo esférico de ângulos α, β, γ	33
Figura 16 – Desigualdade triangular em triângulos esféricos.	34
Figura 17 – Os triedros $OABC$ e $OABC'$ utilizados na demonstração.	36
Figura 18 – Pirâmide COEDF de base OEDF.	37
Figura 19 – Imagens de Geometria Euclidiana presentes na primeira coluna e de Geometria Esférica na segunda coluna.	38
Figura 20 – Regra da mão direita como orientação no equador (e).	40
Figura 21 – Distância angular entre os pontos A e B	41
Figura 22 – Ponto P nos sistemas esféricos de coordenadas 1 e 2.	42
Figura 23 – Triângulo esférico N_1N_2P	44
Figura 24 – Sistema de Coordenadas Geográficas.	46
Figura 25 – Sistema de Coordenadas Equatorial Celeste.	47
Figura 26 – Sistema de Coordenadas Equatorial Horário.	48
Figura 27 – Representação da hora sideral.	49
Figura 28 – Sistema de Coordenadas Horizontal.	50
Figura 29 – Sistema de Coordenadas Eclíptico.	51
Figura 30 – Triângulo de posição no hemisfério norte.	52
Figura 31 – Sistema de Coordenadas Celeste e Eclíptico.	53

Figura 32 – Triângulo esférico <i>ABC</i>	56
Figura 33 – Representação da distância entre São carlos/SP (Brasil) e París (França). . .	57
Figura 34 – Visualização do Stellarium à partir da localização do autor.	58
Figura 35 – Visualização das constelações.	58
Figura 36 – Ascensão Reta e Declinação de Júpiter e Saturno em determinado momento. .	59
Figura 37 – Determinação das coordenadas celestes do Sol ao longo do ano.	60
Figura 38 – Sistemas de coordenadas Horário e Horizontal.	62
Figura 39 – Sistema de Coordenadas Celeste e Eclíptico.	63
Figura 40 – Dados e visualização da estrela Mirach no céu.	64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ESFÉRICAS	21
2.1	Geometria Esférica	22
2.2	Trigonometria Esférica	24
2.3	Área	32
2.4	Algumas diferenças e semelhanças entre as geometrias Euclidiana e a Esférica	37
3	SISTEMAS ESFÉRICOS DE COORDENADAS NA ASTRONOMIA	39
3.1	Sistema de coordenadas esféricas	39
3.2	Distância angular	40
3.3	Mudanças de coordenadas	41
3.4	Aplicações na Astronomia	44
3.4.1	<i>Sistema de Coordenadas Geográficas</i>	45
3.4.2	<i>Sistema de Coordenadas Equatorial Celeste</i>	46
3.4.3	<i>Sistema de Coordenadas Equatorial Horário</i>	47
3.4.4	<i>Sistema de Coordenadas Horizontal</i>	49
3.4.5	<i>Sistema de Coordenadas Eclípticas</i>	50
3.5	Mudanças de coordenadas astronômicas	51
3.5.1	<i>Transformação de coordenadas horárias em celestes e vice-versa</i> . .	52
3.5.2	<i>Transformação de coordenadas horizontais em horárias e vice-versa</i>	52
3.5.3	<i>Transformação de coordenadas celestes em eclípticas e vice-versa</i>	53
4	APLICAÇÕES	55
4.1	Das propriedades de um triângulo esférico	55
4.2	Da distância angular	57
4.3	Dos sistemas de coordenadas esféricos	60
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
	REFERÊNCIAS	69

INTRODUÇÃO

A pesquisa educacional na área da Matemática vem registrando um aumento considerável na última década. Centenas de dissertações e teses são defendidas todos os anos, porém, poucas são relacionadas a Geometria Esférica e em grande parte, carentes de um melhor detalhamento.

Os alunos anseiam por novidades e uma delas poderia vir de aplicações da matemática na Astronomia. O interesse em conhecer mais sobre fenômenos ligados à Astronomia surge por meio da curiosidade dos próprios alunos. Pensando nisso, a matemática aparece como ferramenta importantíssima para melhor compreensão de seus conceitos. Há uma forte demanda para que a Astronomia seja inserida como disciplina na grade curricular do ensino básico.

“Os assuntos referentes à Astronomia chamam a atenção das pessoas em qualquer faixa etária e, além disso, estes fazem parte da matriz curricular proposta pelos PCN dos ensinos fundamental e médio. Porém, constata-se que grande parte dos alunos da rede pública de ensino deixam o ciclo básico de estudos sem conhecimento de assuntos de Astronomia que são pertinentes a sua formação”. (DIAS; RITA, 2008)

Um dos métodos mais primitivos de orientação acontece através das observações dos astros no céu. Além de servir de mapa, o céu era utilizado para a determinação de calendário e relógio. Tal método de orientação vem perdendo o sentido com o tempo. A Matemática através dos seus sistemas de coordenadas contribui fortemente para que as tecnologias, possam nos fornecer dados mais precisos.

A Matemática possui funções transformadoras, quebra barreiras através dos números e descreve o universo em que vivemos. Pensando assim, queremos neste trabalho, reconhecer o papel fundamental que a Matemática tem no referenciamento de astros no universo e apresentar um modelo matemático de sistema de coordenadas que ajude a melhor compreensão de seus conceitos.

O capítulo 2 inicia-se com uma breve reflexão motivada pela não-demonstrabilidade do postulado das paralelas da Geometria Plana. A supressão ou substituição deste postulado, trabalho iniciado por eminentes matemáticos ainda no séc. XIX, originou o estudo de Geometrias Não Euclidianas cuja principal característica é *a curvatura intrínseca do espaço*. Diversos modelos dessas geometrias foram propostos, entre eles o da geometria elíptica, representada atualmente pela Geometria Esférica. Neste capítulo apresentamos alguns rudimentos dessa geometria, que embora bastante importantes, não necessitam do Cálculo Diferencial para sua demonstração.

Assim são apresentados e desenvolvidos elementos da *Trigonometria Esférica*: circunferências máximas, triângulos esféricos e seus elementos, culminando na Lei dos Cossenos e na Lei dos Senos para tais triângulos. Algumas noções de congruência de triângulos esféricos também são apresentadas.

No capítulo 3 introduzimos os principais conceitos de base astronômica relevantes para nossas aplicações. Apresentamos uma formalização matemática do que entendemos em Astronomia por um “sistema de coordenadas”, e desenvolvemos, utilizando a Geometria Esférica, uma estratégia para realizar mudanças de coordenadas entre dois sistemas. Procedemos então a exposição de alguns dos sistemas de coordenadas mais usados em Astronomia, e realizamos as mudanças entre eles.

O Capítulo 4 é dedicado a aplicações, nas quais apresentamos exercícios resolvidos para ilustrar os conceitos anteriormente apresentados. Tais exercícios também podem compor atividades propostas em salas de aula, para turmas ou grupos de alunos que se interessem pela temática da Astronomia e pelos aspectos matemáticos da localização dos astros.

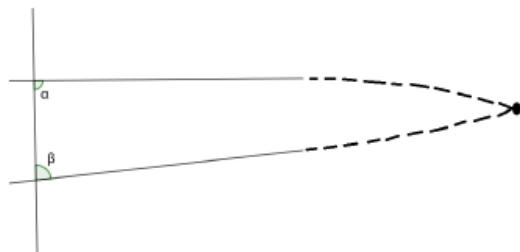
TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ESFÉRICAS

Na Geometria Euclidiana (Geometria Plana), o postulado das paralelas nos diz o seguinte:

“Se uma reta, ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então essas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão esses ângulos.”

Durante muito tempo, vários matemáticos tentaram transformar o postulado de Euclides em um **teorema**, ou seja, um resultado deduzido dos demais axiomas e postulados de Euclides para a Geometria Plana. A figura (1) é uma representação deste postulado.

Figura 1 – V postulado de Euclides.



Fonte: Autor (baseado no enunciado do postulado das paralelas).

Todas essas tentativas resultaram infrutíferas, pois utilizavam de uma forma ou de outra o postulado das paralelas. Não eram, portanto, autênticas *demonstrações* do postulado. Contudo, esse esforço desenvolvido para a demonstração redundou no surgimento de novas ideias a respeito da natureza do espaço e sua geometria.

Alguns matemáticos começaram a conceber novas formas da Geometria que *dispensassem* o postulado das paralelas. Surgia então os germens da Geometria Não Euclidiana. Nomes como Georg Friedrich Bernhard Riemann, Johann Carl Friedrich Gauss, Nicolai Ivanovich Lobachevski e János Bolyai trabalharam incessantemente para desenvolver as idéias axiomáticas dessas geometrias, que podemos agrupar em duas classes principais: as geometrias elípticas e as hiperbólicas.

Na Geometria Elíptica não existe, por um ponto fora de uma reta (geodésica), uma outra reta que não intercepte à primeira. Já na Geometria Hiperbólica pode-se mostrar que, por um ponto fora de uma reta existem várias retas que não interceptam aquela primeira.

As geometrias não euclidianas constituem um vasto campo da pesquisa matemática, em franca expansão na atualidade. Não obstante, as técnicas para o desenvolvimento pleno dessa área situam-se frequentemente além daquelas empregadas na Geometria Plana tradicional, pois necessitam do Cálculo Diferencial e Integral, Topologia, Álgebra Abstrata, entre outras técnicas desconhecidas pelos antigos gregos.

Felizmente, o modelo de Geometria Esférica desenvolvido por Riemann, caso mais bem estudado de Geometria Elíptica, pode ser satisfatoriamente conhecido com as técnicas usuais da Geometria Plana e Espacial e da Álgebra. Neste capítulo apresentamos os principais elementos no estudo dessa geometria.

A figura (2) é dedicada a imagem Georg Bernhard Riemann.

Figura 2 – Georg Bernhard Riemann.



Fonte: ([WIKIPÉDIA](#), 2019).

2.1 Geometria Esférica

Definição 1. A *Esfera* é o lugar geométrico dos pontos do espaço cujas distâncias a um mesmo ponto O (centro da esfera) são constantes. Ressaltamos que no presente trabalho a esfera é uma *superfície*, e não um sólido maciço, como definido por alguns autores.

Na Geometria Euclidiana o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta determinado por eles. Uma idéia análoga existe nas geometrias não euclidianas, em geral, através do conceito de **geodésica**. Uma *curva geodésica* ligando dois pontos de um espaço é uma curva de comprimento mínimo, entre todas as curvas do espaço que ligam esses pontos.

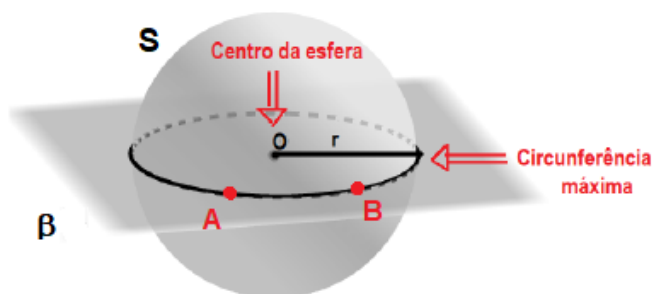
A existência de geodésicas, em geral, é um fato não trivial que demanda uso de certo maquinário da Geometria Diferencial para ser demonstrado. No caso da esfera, contudo, mostra-se que as geodésicas sempre existem, e são precisamente os arcos de *circunferências máximas*, ou seja, circunferências cujo raio é igual ao raio da esfera. Vide figura (3).

A demonstração para a próxima proposição pode ser encontrada em (FILHO, 2014).

Proposição 1. A interseção de uma esfera com um plano é ou um ponto ou uma circunferência de raio menor que ou igual ao raio da esfera. A igualdade dos raios ocorre se e somente se o plano passar pelo centro da esfera.

Definição 2. Sejam A, B pontos da esfera S . O arco de circunferência máxima que liga A e B é uma geodésica.

Figura 3 – Circunferência máxima e arco de circunferência máxima.



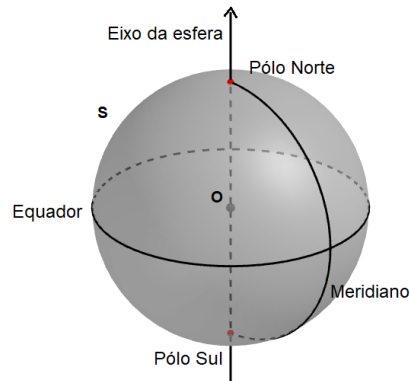
Fonte: Autor.

Definição 3. Seja S uma esfera de centro O . Chamamos de:

- Eixo: qualquer reta que passa por O .
- Diâmetro: segmento que liga os dois pontos de interseção de um eixo com S .
- Equador associado a um eixo: é uma circunferência máxima de S cujo plano é perpendicular ao eixo.
- Polos: as duas extremidades de um diâmetro.
- Meridiano: é um semicírculo máximo que contém os polos Norte e Sul da esfera.

Estes elementos estão representados na figura (4).

Figura 4 – Elementos da esfera.

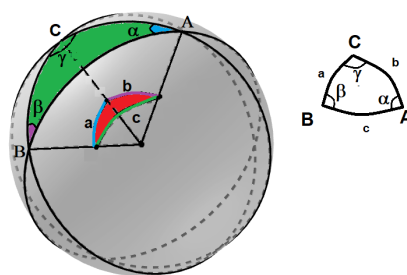


Fonte: Autor.

2.2 Trigonometria Esférica

Nesta seção definiremos o *triângulo esférico* como uma generalização do conceito de triângulo da Geometria Plana, e desenvolvemos algumas relações entre seus lados e ângulos internos que serão essenciais no estudo da Astronomia de posição. Uma representação de triângulo esférico encontra-se na figura (5).

Figura 5 – Triângulo esférico ABC .

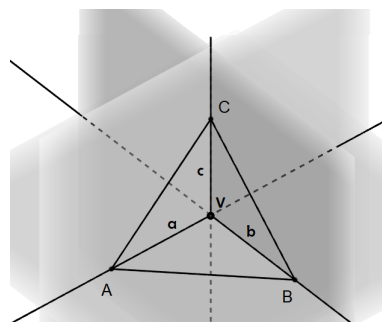


Fonte: Adaptado de (SARAIVA, 2004).

Definição 4. Um diedro é a região do espaço limitada por dois semiplanos com aresta comum. Já um triedro, com vértice V , é uma de 8 regiões do espaço delimitadas por três planos que concorrem no ponto V . Vide figura (6).

Sejam Γ e Γ' duas circunferências máximas, distintas, na esfera S . Se A é um ponto na interseção dessas circunferências, vamos fazer sentido no *ângulo* de vértice A e lados sobre Γ e Γ' .

Figura 6 – Triedro.



Fonte: Adaptado de Wikipédia.

Tomamos os planos β e β' , tais que $\Gamma \subset \beta$ e $\Gamma' \subset \beta'$. Esses planos definem 2 pares de regiões diedrais congruentes. Sejam também B e B' pontos sobre Γ e Γ' , respectivamente, distintos de A . Definimos o ângulo diedral como sendo o ângulo da região formada pelos semiplanos de β e β' e que contém os pontos B e B' . Este ângulo possui o mesmo valor ao ângulo de vértice em A e lados AB e AB' .

Mantendo a notação acima, pode ser mostrado que:

Definição 5. A medida de $\widehat{BAB'}$ é igual à medida do ângulo plano formado pelas semirretas tangentes a Γ e Γ' em A , e contidas nos semiplanos do diedro de $\widehat{BAB'}$.

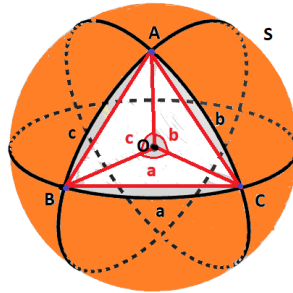
Definição 6. Triângulo esférico é a região da esfera limitada por três arcos de circunferências máximas menores do que uma semicircunferência, que se intersectam dois a dois. Os arcos são chamados de lados e os vértices dos três ângulos esféricos são os vértices do triângulo esférico.

Observação 1. Se X, Y são pontos de uma esfera de raio r e centro O , a retificação do arco máximo que liga X e Y tem comprimento $r \cdot X\hat{O}Y$, em que o ângulo é dado em radianos. Torna-se natural nos referirmos a um comprimento ou distância sobre a esfera como sendo um ângulo com vértice no seu centro, especialmente quando o raio é unitário. Adotaremos a convenção de denotar os comprimentos dos lados de um triângulo esférico como sendo tais ângulos.

A proposição seguinte estabelece uma relação natural entre os conceitos de triângulo esférico e triedros. Sua demonstração é imediata com o uso das definições (4) e (6), e da proposição (5).

Proposição 2. Seja S uma esfera de centro O . Há uma correspondência entre os triedros com vértice em O e os triângulos esféricos sobre S , e que associa a um dado triedro o triângulo esférico cujos lados são as interseções das faces do triedro com S . Os lados desse triângulo correspondem aos ângulos internos das faces do triedro, e os ângulos desse triângulo são os ângulos diedrais do triedro. Vide figura (7).

Figura 7 – Representação de triedro em uma esfera.



Fonte: Adaptado de (FILHO, 2014).

Teorema 1 (Lei dos cossenos para lados de triângulos esféricos). Considere um triângulo esférico de lados a, b, c e ângulo interno α oposto ao lado a . Então

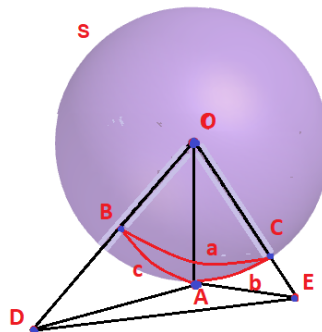
$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha). \quad (2.1)$$

Demonstração. Considere uma esfera S de centro O e os segmentos \overline{AD} e \overline{AE} tangentes a S no ponto A . Isto implica $\overline{OA} \perp \overline{AD}$ e $\overline{OA} \perp \overline{AE}$. Considere também os pontos B e C , tais que $\overline{OD} \cap S = B$ e $\overline{OE} \cap S = C$. De acordo com a proposição (2),

$$D\hat{O}A = \widehat{AB} = c, \quad E\hat{O}A = \widehat{AC} = b \quad \text{e} \quad D\hat{O}E = \widehat{BC} = a. \quad (2.2)$$

Vide figura (8).

Figura 8 – Construção utilizada na demonstração da lei dos cossenos para triângulos esféricos.



Fonte: Adaptado de (SARAIVA, 2004).

Como \widehat{AB} e \widehat{AC} estão contidos, respectivamente, nos planos (DAO) e (EAO) , o ângulo esférico oposto ao lado a do triângulo esférico ABC é $\alpha = D\hat{A}E$.

Fazendo $\overline{OA} = r$, nos triângulos AOD e AOE encontramos $\overline{AE} = r \cdot \tan(b)$, $\overline{OD} = r \cdot \sec(c)$, $\overline{AD} = r \cdot \tan(c)$ e $\overline{OE} = r \cdot \sec(b)$. Portanto, em DAE temos

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos(\alpha) \\ \Rightarrow \overline{DE}^2 &= r^2 \cdot \tan^2(c) + r^2 \cdot \tan^2(b) - 2 \cdot r^2 \cdot \tan(c) \cdot \tan(b) \cdot \cos(\alpha) \\ \Rightarrow \overline{DE}^2 &= r^2 [\tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \cdot \tan(c) \cdot \tan(b) \cdot \cos(\alpha)]\end{aligned}\quad (2.3)$$

Analogamente, fazendo $\widehat{DOE} = \widehat{BC} = a$ em DOE , temos que

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \cos(a) \\ \Rightarrow \overline{DE}^2 &= r^2 \cdot \sec^2(c) + r^2 \cdot \sec^2(b) - 2 \cdot r^2 \cdot \sec(c) \cdot \sec(b) \cdot \cos(a) \\ \Rightarrow \overline{DE}^2 &= r^2 [\sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(c) \cdot \sec(b) \cdot \cos(a)]\end{aligned}\quad (2.4)$$

Igualando-se os segundos membros das últimas equações em (2.3) e (2.4), obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{DE}^2 &= r^2 [\sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(c) \cdot \sec(b) \cdot \cos(a)] \\ &= r^2 [\tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \cdot \tan(c) \cdot \tan(b) \cdot \cos(\alpha)], \\ \Rightarrow \frac{(\overline{DE})^2}{r^2} &= \sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \sec(b) \sec(c) \cos(a) = \\ &= \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \tan(b) \tan(c) \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Sabendo que $1 = \cos^2(x) + \sen^2(x) \Rightarrow \sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$, da equação anterior resulta

$$\begin{aligned}1 + \tan^2(c) + 1 + \tan^2(b) - 2 \sec(b) \sec(c) \cos(a) &= \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \tan(b) \tan(c) \cos(\alpha) \\ \Rightarrow 2 - 2 \sec(b) \sec(c) \cos(a) &= -2 \tan(b) \tan(c) \cos(\alpha) \\ \Rightarrow 1 - \sec(b) \sec(c) \cos(a) &= -\tan(b) \tan(c) \cos(\alpha) \\ \Rightarrow 1 - \frac{\cos(a)}{\cos(b) \cdot \cos(c)} &= -\frac{\sen(b)}{\cos(b)} \cdot \frac{\sen(c)}{\cos(c)} \cdot \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(b) \cdot \cos(c) - \cos(a)}{\cos(b) \cdot \cos(c)} &= -\frac{\sen(b) \cdot \sen(c) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(b) \cdot \cos(c)} \\ \Rightarrow \cos(b) \cdot \cos(c) - \cos(a) &= -\sen(b) \cdot \sen(c) \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

o que implica (2.1), concluindo a demonstração. \square

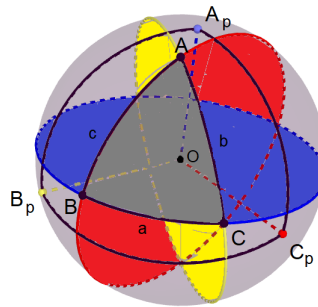
Seja Γ uma circunferência máxima na esfera S . Os **polos** de Γ são as interseções do único eixo de S ortogonal a Γ com S . Pode-se mostrar que os polos satisfazem a propriedade seguinte: P é um polo de Γ se e somente se $\widehat{PX} = 90^\circ$ para todo $X \in \Gamma$.

Para apresentarmos e demonstrarmos a *Lei dos cossenos para os ângulos* será indispensável o conceito apresentado a seguir.

Definição 7. Seja ABC um triângulo esférico. O *triângulo polar* de ABC é o triângulo esférico que tem por vértices os polos de cada circunferência máxima que contém um lado de ABC e que estejam no mesmo hemisfério (relativo aquele lado) que ABC .

Denotaremos por $A_pB_pC_p$ o triângulo polar de ABC , em que $\widehat{BC} = a$, $\widehat{AC} = b$ e $\widehat{AB} = c$, e A_p é o polo da circunferência que contém o lado a , B_p é o polo da circunferência que contém o lado b e C_p é o polo da circunferência que contém no lado c . Vide figura (9).

Figura 9 – Triângulo polar $A_pB_pC_p$ do triângulo esférico ABC .

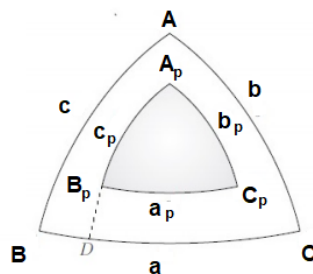


Fonte: Autor (construído à partir da definição de triângulo polar).

Teorema 2. Se $A_pB_pC_p$ é o triângulo polar de ABC , então ABC é o triângulo polar de $A_pB_pC_p$.

Demonstração. Tomaremos como referência a figura (10). Pela definição, o ponto A dista 90° de B_p , pois B_p é polo de uma circunferência máxima que passa por A . Similarmente, $\widehat{AC_p} = 90^\circ$. Portanto A é um dos polos da circunferência máxima que contém o arco B_pC_p . Seja A' o outro polo dessa mesma circunferência.

Figura 10 – Relação entre o triângulo ABC e o seu triângulo polar $A_pB_pC_p$.



Fonte: Adaptado de (FILHO, 2014).

Devemos mostrar que desses dois polos $\{A, A'\}$, o que está no mesmo hemisfério de A_p é A . Isso decorre de uma análise das distâncias. Como A_p é o polo da circunferência máxima

passando por B e C que está no mesmo hemisfério de A então $\widehat{A_p A} < 90^0$. Em particular, A_p está no mesmo hemisfério relativo ao arco $B_p C_p$ que A está, e portanto, no hemisfério oposto a A' . Então o vértice do triângulo polar de $A_p B_p C_p$ relativo ao lado $B_p C_p$ é o ponto A .

Repetindo esse argumento com os demais lados de $A_p B_p C_p$ reobtemos os vértices B e C , caracterizando ABC como o triângulo polar de $A_p B_p C_p$. \square

A próxima proposição estabeleça uma importante relação entre os lados de um triângulo esférico e os ângulos do triângulo polar associado.

Proposição 3. Seja ABC um triângulo esférico, com ângulos internos α, β e γ nos vértices A, B e C , respectivamente. Seja $A_p B_p C_p$ o triângulo polar do triângulo ABC , e $a_p = \widehat{B_p C_p}$, $b_p = \widehat{C_p A_p}$ e $c_p = \widehat{A_p B_p}$ as medidas dos lados de $A_p B_p C_p$. Então

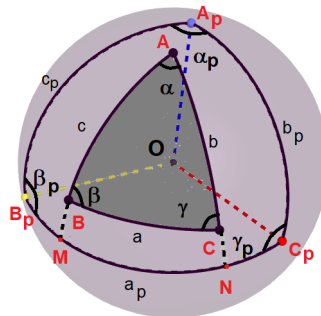
$$\alpha + a_p = 180^0, \quad \beta + b_p = 180^0 \quad \text{e} \quad \gamma + c_p = 180^0. \quad (2.5)$$

Demonstração. Considere a figura (11) e nela o ângulo esférico no vértice A igual a α e os lados $\widehat{BC} = a$, $\widehat{AC} = b$, $\widehat{AB} = c$ e $\widehat{B_p C_p} = a_p$. Por outro lado, considere também M e N as intersecções das circunferências máximas que contêm os lados c e b com a circunferência máxima que contém o lado a_p . Pelo fato de B_p e C_p serem polos, respectivamente, de b e c , temos que $\widehat{B_p N} = 90^0$ e $\widehat{M C_p} = 90^0$. Por outro lado, $\widehat{B_p M} + \widehat{MN} + \widehat{N C_p} = a_p$. Portanto,

$$\begin{aligned} 90^0 + 90^0 &= \widehat{B_p N} + \widehat{M C_p} \\ 180^0 &= \widehat{B_p N} + \widehat{M C_p} \\ \Rightarrow 180^0 &= \widehat{B_p M} + \widehat{MN} + \widehat{N C_p} + \widehat{MN} \\ \Rightarrow 180^0 &= a_p + \alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

As demais relações são demonstradas de forma análoga.

Figura 11 – Triângulo esférico ABC e seu triângulo polar $A_p B_p C_p$.



Fonte: Adaptado de (FILHO, 2014).

O Teorema (2) permite deduzir da proposição anterior o seguinte resultado. \square

Corolário 1. Com a mesma notação da Proposição (3), e denotando a, b, c os lados de ABC e $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ os ângulos internos de $A_p B_p C_p$, valem as identidades:

$$\alpha_p + a = 180^0, \quad \beta_p + b = 180^0 \quad \text{e} \quad \gamma_p + c = 180^0. \quad (2.7)$$

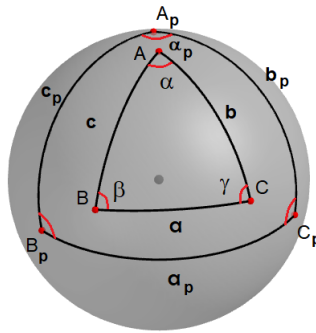
Corolário 2. (Lei dos Cossenos para os ângulos) Considere α, β e γ os ângulos de um triângulo esférico ABC , de lado a oposto a α . Então,

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma) \cdot \cos(a).$$

Demonstração. De posse da figura (12) e do teorema (1), temos que

$$\cos(a_p) = \cos(b_p) \cdot \cos(c_p) + \text{sen}(b_p) \cdot \text{sen}(c_p) \cdot \cos(\alpha_p). \quad (2.8)$$

Figura 12 – Representação da lei dos cossenos para ângulos.



Fonte: Autor (construído para o teorema).

Em vista da Proposição (3) obtém-se de imediato

$$\cos(180^0 - \alpha) = \cos(180^0 - \beta) \cdot \cos(180^0 - \gamma) + \text{sen}(180^0 - \beta) \cdot \text{sen}(180^0 - \gamma) \cdot \cos(180^0 - a).$$

$$\Rightarrow -\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cdot (-\cos(\gamma)) + \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma) \cdot (-\cos(a)).$$

$$\therefore \cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\gamma) \cdot \cos(a),$$

que é o resultado do corolário. □

Quando estabelecemos uma *correspondência biunívoca* entre os vértices de dois triângulos, estabelecemos também uma correspondência entre seus lados, e seus ângulos. Recordamos que na Geometria Plana dois triângulos são congruentes se tal correspondência pode ser estabelecida e os lados e ângulos que se correspondem são **congruentes**, isto é, têm a mesma medida. O fato notável é que, para determinarmos se dois triângulos planos são congruentes não é necessário *a priori* que todos os elementos (entre lados e ângulos) sejam congruentes, mas apenas alguns dentre esses. Nisso reside o conteúdo de todos os chamados **casos** (teoremas) de congruência de triângulos, sendo os mais importantes: os três lados de um triângulo serem

congruentes, respectivamente, aos três lados do outro (caso LLL); dois lados e o ângulo entre eles, serem congruentes a dois lados no outro triângulo, e o ângulo entre eles (caso LAL); e dois ângulos e o lado adjacente, num triângulo, serem congruentes a dois ângulos e um lado adjacente, no outro (caso ALA).

Pode-se mostrar que todos os casos de congruência de triângulos planos ocorrem também para triângulo esféricos. Para uma prova disso recomendamos (ADAMES *et al.*, 2005). Mas curiosamente, há um caso que ocorre para os triângulo esféricos e não tem análogo na Geometria Plana.

Teorema 3. Caso (AAA): Se os triângulos esféricos ABC e $A'B'C'$ têm ângulos internos congruentes, então eles são congruentes.

Demonstração. Considere na figura (13) que os triângulos esféricos ABC e $A'B'C'$ possuem os mesmos ângulos internos nos vértices correspondentes A, A', B, B' e C, C' . O corolário (2) nos diz que

$$\cos(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)} \quad \cos(a') = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)}$$

$$\cos(b) = \frac{\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\gamma)} \quad e \quad \cos(b') = \frac{\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\gamma)}$$

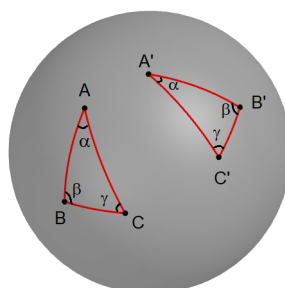
$$\cos(c) = \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)} \quad \cos(c') = \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}.$$

Das relações anteriores, temos que

$$\cos(a) = \cos(a'), \quad \cos(b) = \cos(b') \quad e \quad \cos(c) = \cos(c').$$

Mas, como o cosseno é unicamente definido em $]0, \pi[$ temos que $a = a', b = b'$ e $c = c'$. Portanto, os triângulos são congruentes.

Figura 13 – Triângulos esféricos congruentes.



Fonte: Adaptado de (ADAMES *et al.*, 2005).

2.3 Área

Uma das coisas que mais intriga os estudantes é a demonstração da fórmula de cálculo da área da esfera. A maioria das demonstrações encontradas em livros utilizam a ideia de integral. Em (NETO, 2013) encontramos uma demonstração que utiliza conceitos básicos de Geometria Espacial, e fornece:

Teorema 4. A área de uma esfera E de raio $r > 0$ é

$$A(E) = 4\pi r^2. \quad (2.9)$$

Definição 8. Um fuso esférico é a região da esfera limitada por dois meridianos com eixo comum. Pode ser visto como a interseção de dois hemisférios.

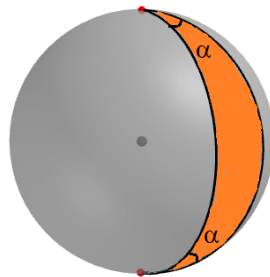
Corolário 3. Em uma esfera de raio r , a área de um fuso esférico (A_f) de ângulo α é dada por

$$A_f = 2\alpha r^2.$$

Demonstração. Considere a figura (14). Por regra de três simples, temos que

$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow A_f = \frac{4\pi r^2 \alpha}{2\pi} \Rightarrow A_f = 2\alpha r^2.$$

Figura 14 – Representação da área de um fuso esférico.



Fonte: Adaptado de (ABREU; OTTONI, 2015).

□

Observação 2. Para cada fuso esférico, há um fuso esférico oposto associado no qual os arcos são os prolongamentos dos arcos do fuso dado. Sendo assim, a área do fuso esférico com a área do fuso oposto é

$$2A_f = 4\alpha r^2.$$

O teorema seguinte relaciona a soma dos ângulos de um triângulo esférico com sua área. Ele servirá como ferramenta para a demonstração do teorema (6) que relaciona a soma desses ângulos ao seu intervalo. Para isso, tomaremos como referência (ABREU; OTTONI, 2015).

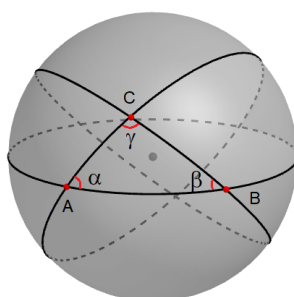
Teorema 5. Se α, β e γ são ângulos internos de um triângulo esférico ABC , então

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$$

em que a é a área de ABC e r o raio da esfera.

Demonstração. Considere na figura (15), o triângulo esférico ABC de ângulos esféricos α, β e γ nos vértices A, B e C , respectivamente. Considere também os fusos esféricos gerados pelo prolongamento dos seus lados. As intersecções desses prolongamentos que definiremos por A', B' e C' são extremidades dos diâmetros nos quais A, B e C pertencem. Pelo caso de congruência de triângulos esféricos (LLL), têm-se que $ABC \equiv A'B'C'$.

Figura 15 – Triângulo esférico de ângulos α, β, γ .



Fonte: Adaptado de (KEPLER; SARAIVA, 2012).

É fácil de se notar que a união dos três fusos esféricos que mencionamos anteriormente e seus opostos cobrem toda a esfera. Porém, cada um dos triângulos esféricos ABC e $A'B'C'$ foram contados duas vezes a mais. Logo, dado a a área dos dois triângulos e o corolário (3), temos que

$$\begin{aligned} 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 - 4.a &= 4\pi r^2 \\ \Rightarrow 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 &= 4\pi r^2 + 4.a \\ \Rightarrow 4r^2(\alpha + \beta + \gamma) &= 4r^2\left(\pi + \frac{a}{r^2}\right) \\ \therefore \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \frac{a}{r^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

como queríamos demonstrar. \square

Observação 3. Do teorema (5) deduzimos uma relação direta entre a área de um triângulo esférico e a soma de seus ângulos internos. Esse fato, que não tem análogo à Geometria Plana, nos permite reobter a equação da soma dos ângulos do triângulo plano quando consideramos o caso limite $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha + \beta + \gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \pi + \frac{a}{r^2} = \pi .$$

Teorema 6. Seja α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC , então

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi .$$

Demonstração. Do teorema (5) resulta que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2} \Rightarrow \pi < \alpha + \beta + \gamma.$$

Convém ressaltar que todo triângulo esférico está contido em um dos hemisférios definidos pelo círculo máximo que contém um de seus lados. Logo, sua área é sempre menor que a área do hemisfério. Designando a como a área do triângulo esférico e r o raio da esfera, implica que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2} < \pi + \frac{2\pi r^2}{r^2} = 3\pi.$$

Portanto,

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi, \quad (2.11)$$

como queríamos demonstrar. \square

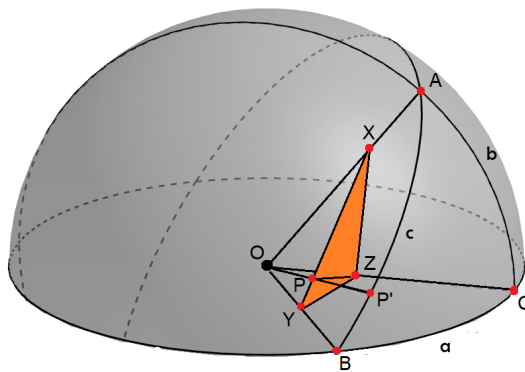
Teorema 7. Cada lado de um triângulo esférico é menor que a soma dos outros dois lados.

Demonstração. Considere na figura (16), um triângulo esférico ABC de lados $a, b < c$ tal que

$$c = \widehat{AB} = A\hat{O}B, \quad b = \widehat{AC} = A\hat{O}C \quad e \quad a = \widehat{BC} = B\hat{O}C.$$

Considere o triedro $OABC$. Sobre \overline{OA} tome um ponto X qualquer, sobre \overline{OB} tome um ponto Y e sobre \overline{XY} um ponto P de modo que $X\hat{O}P = A\hat{O}C$. Por último, sobre \overline{OC} tome um ponto Z de modo que $\overline{OZ} = \overline{OP}$.

Figura 16 – Desigualdade triangular em triângulos esféricos.



Fonte: Adaptado de (ABREU; OTTONI, 2015).

Da união de X, Y e Z obtemos o triângulo XYZ , no qual $\overline{XP} = \overline{XZ}$, pois os triângulos $XOZ \equiv XOP$ (caso LAL). Imediatamente, da desigualdade triangular para triângulos planos, resulta que

$$\overline{XZ} + \overline{ZY} > \overline{XP} + \overline{PY} = \overline{XY} \Rightarrow \overline{ZY} > \overline{PY} \quad \therefore \quad Z\hat{O}Y > P\hat{O}Y. \quad (2.12)$$

Como na Geometria Euclidiana determinamos o maior lado do triângulo como lado oposto ao maior ângulo, o segundo maior lado como lado oposto ao segundo maior ângulo e o menor lado como lado oposto ao menor ângulo, da desigualdade (2.12) temos que

$$\begin{aligned}\overline{XZ} + \overline{ZY} &> \overline{XP} + \overline{PY} = \overline{XY} \\ \Rightarrow X\hat{O}Z + Z\hat{O}Y &> X\hat{O}P + P\hat{O}Y = X\hat{O}Y \\ \Rightarrow A\hat{O}C + C\hat{O}B &> A\hat{O}B\end{aligned}$$

Por outro lado, pela proposição (2) temos que $\hat{O}B = \hat{A}B$, $A\hat{O}C = \hat{A}C$ e $B\hat{O}C = \hat{B}C$. Logo,

$$\hat{A}C + \hat{B}C > \hat{A}B,$$

o que nos leva a

$$b + a > c$$

como queríamos demonstrar. \square

Corolário 4. Cada lado de um triângulo esférico é maior que o valor absoluto da diferença dos outros dois lados.

Demonstração. Isto decorre de propriedades dos números reais e da função módulo. Se a, b, c são números positivos tais que a soma de dois sempre excede o terceiro, então:

$$\begin{aligned}a + b > c &\Rightarrow a > c - b && \Rightarrow a > |b - c|. \\ a + c > b &\Rightarrow a > b - c\end{aligned}\tag{2.13}$$

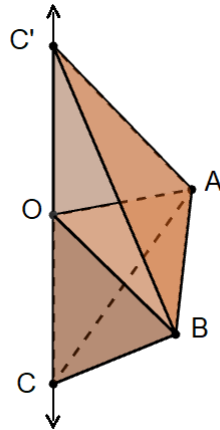
Repetindo o argumento para b e c no lugar de a , obtemos a afirmação do corolário. \square

Teorema 8. A soma dos três lados de um triângulo esférico está compreendida entre 0 e 2π .

Demonstração. É óbvio que a soma dos lados de um triângulo esférico é maior do que 0. Construindo o triedro $OABC$ e usando a proposição (2), mostraremos que a soma dos ângulos das suas faces é menor do que 2π .

Considere na figura (16), $\overrightarrow{OC'}$ uma semirreta oposta a \overrightarrow{OC} . Por construção, obtemos o triedro $OABC'$. Pelo teorema (7), temos que

$$A\hat{O}B < B\hat{O}C' + A\hat{O}C'.\tag{2.14}$$

Figura 17 – Os triedros $OABC$ e $OABC'$ utilizados na demonstração.

Fonte: Adaptado de (FILHO, 2014).

Observe que \widehat{BOC} e $\widehat{BOC'}$ são adjacentes suplementares, e o mesmo ocorre com \widehat{AOC} e $\widehat{AOC'}$. De sorte, utilizando (2.14) em

$$\widehat{BOC} + \widehat{BOC'} + \widehat{AOC} + \widehat{AOC'} = 2\pi,$$

implica que

$$0 < \widehat{BOC} + \widehat{AOC} + \widehat{AOB} < 2\pi. \quad (2.15)$$

□

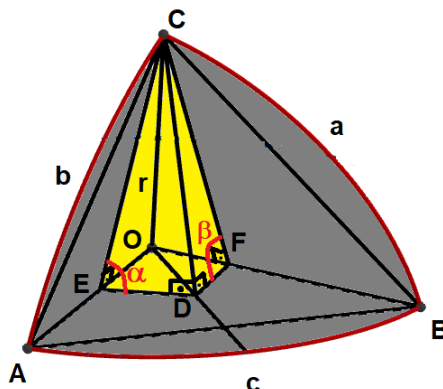
Teorema 9 (Lei dos senos para triângulos esféricos). Seja ABC triângulo esférico com ângulos internos α, β e γ nos vértices A, B e C , e lados opostos a, b e c , respectivamente, aos mesmos vértices. Então

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(c)}. \quad (2.16)$$

Demonstração. Considere na figura (18), a pirâmide $COEDF$ de base $(OEDF)$, sendo O o centro da esfera, e vértice em C . Os pontos $E \in \overline{OA}$ e $F \in \overline{OB}$ e $D \in (OAB)$ são construídos de forma que $\overline{CE} \perp \overline{OA}$, $\overline{CF} \perp \overline{OB}$ e \overline{CD} é ortogonal ao plano (OAB) . Note que os ângulos do triângulo esférico ABC ocorrem como ângulos diedrais entre algumas das faces da pirâmide.

É imediato que as seguintes faces da pirâmide são triângulos retângulos: CEO (retângulo em E), CED (retângulo em D), CDF (retângulo em D) e CFO (retângulo em F).

Figura 18 – Pirâmide COEDF de base OEDF.



Fonte: Adaptado de (ABREU; OTTONI, 2015).

Como b é o arco que corresponde ao ângulo $C\hat{O}E$ e a é o arco que corresponde a $C\hat{O}F$, segue

$$\text{sen}(b) = \frac{\overline{CE}}{\overline{CO}} \quad \text{e} \quad \text{sen}(a) = \frac{\overline{CF}}{\overline{CO}}. \quad (2.17)$$

E como $C\hat{E}D = \alpha$ e $C\hat{F}D = \beta$, temos

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CE} \cdot \text{sen}(\alpha) \quad \text{e} \quad \text{sen}(\beta) = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CF} \cdot \text{sen}(\beta). \quad (2.18)$$

De (2.17) e (2.18) resulta que

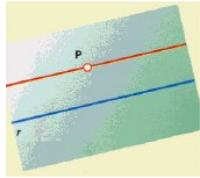
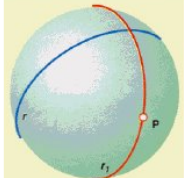
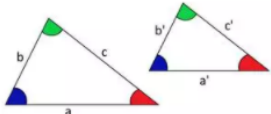
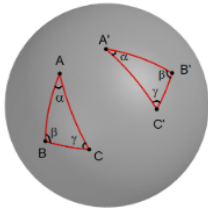
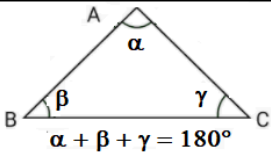
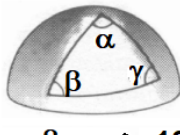
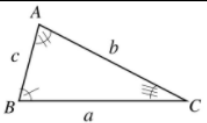
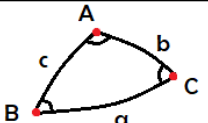
$$\begin{aligned} \overline{CE} \cdot \text{sen}(\alpha) &= \overline{CF} \cdot \text{sen}(\beta) \Rightarrow \overline{CO} \cdot \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\alpha) = \overline{CO} \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\beta) \\ &\Rightarrow \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(b)}. \end{aligned}$$

Utilizando uma pirâmide com vértice em B e repetindo o mesmo procedimento, chegamos a uma igualdade análoga a obtida acima mas com os ângulos α e γ , e lados a e c . Dessas duas segue a conclusão estabelecida na identidade (2.16). \square

2.4 Algumas diferenças e semelhanças entre as geometrias Euclidiana e a Esférica

Nesta seção apresentamos algumas diferenças entre a geometria Euclidiana e Esférica, de forma que o leitor tenha uma visão melhor do que já foi exposto. A figura (19) apresenta uma tabela formada por quatro linhas e duas colunas, na qual, a coluna da esquerda apresenta imagens referentes à Geometria Euclidiana e a da direita, imagens concernentes à Geometria Esférica.

Figura 19 – Imagens de Geometria Euclidiana presentes na primeira coluna e de Geometria Esférica na segunda coluna.

Algumas diferenças e igualdades entre Geometria Euclidiana e Geometria Esférica	
Espaço Euclidiano	Espaço Esférico
	
<p>Na Geometria Plana, dois triângulos que possuem lados proporcionais e ângulos congruentes são semelhantes.</p> 	<p>Na Geometria Esférica, dois triângulos são semelhantes se os seus lados e ângulos forem congruentes.</p> 
 <p>$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$</p>	 <p>$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$</p>
 <p> $a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$ </p>	 <p> $a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$ </p>

Fonte: Imagens do google e da dissertação adaptadas para a figura.

Na primeira linha da tabela anterior, representamos o postulado das paralelas presente na Geometria Euclidiana e um caso particular de sua negação presente na Geometria Esférica. Na Geometria Esférica, não existe nenhuma outra geodésica que passa por este ponto e é paralela, ou seja, não intersecta a geodésica inicial.

Na segunda linha da tabela representamos um par de triângulos planos e um par de triângulos esféricos. Na geometria esférica, diferentemente da euclidiana, dois triângulos são semelhantes se, e somente se, forem congruentes. Tal fato foi demonstrado no presente trabalho.

Na terceira linha construímos triângulos e seus ângulos internos nos espaços euclidiano e esférico. Na geometria euclidiana a soma sempre é igual a π . Por outro lado, na geometria esférica a soma é maior que π . Demonstramos através do teorema (6) que essa soma na geometria esférica pertence ao intervalo $]\pi, 3\pi[$.

E para finalizar, na quarta linha colocamos algo em comum entre a geometria euclidiana e a geometria esférica. A soma de dois lados de um triângulo sempre é maior que o terceiro lado.

SISTEMAS ESFÉRICOS DE COORDENADAS NA ASTRONOMIA

Para realizarmos as aplicações à Astronomia é indispensável termos um modelo matemático para “representar” os objetos que estudamos, e seu conjunto. Nosso interesse é compreender como localizar um astro no céu, e como essa localização se modifica com o passar do tempo, e com a mudança de posição (observador) da qual o astro é observado.

O modelo que adotamos é essencialmente o mesmo usado pelos gregos há mais de dois mil anos: A Abóboda Celeste, que chamaremos de **Esfera Celeste**. Nesse modelo interpretamos os astros como sendo pontos em uma esfera de raio muito grande. Qualquer observador localiza-se no centro dessa esfera.

A cada observador corresponde um plano, que idealmente passa pelo centro da Esfera Celeste e nada mais é que o plano horizontal do local geográfico da Terra onde esse observador pisa. Cada observador percebe apenas a metade da Esfera Celeste que está “acima” (no sentido contra a Gravidade vista pelo observador) desse plano.

É preciso localizar cada ponto da Esfera Celeste de uma forma não ambígua, e que permita que diferentes observadores em diferentes momentos possam dialogar sobre os mesmos pontos (astros) observados. É com esse objetivo que estabeleceremos os diferentes *sistemas de coordenada esféricas*.

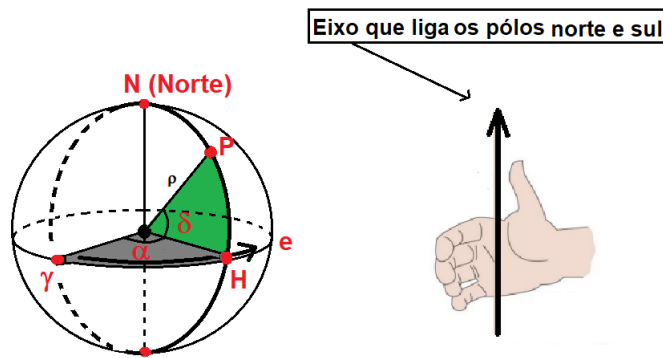
3.1 Sistema de coordenadas esféricas

Seja N (Norte) um ponto da esfera. Existe um único círculo máximo e (equador), perpendicular ao eixo da esfera que contém N . Fixe um ponto $\gamma \in e$, e considere a orientação do equador dada pela *Regra da mão direita*: com a mão no centro da esfera e apontando o dedo polegar para o Norte os demais dedos indicam o sentido crescente do equador.

A um ponto P na esfera, que seja distinto dos polos Norte (N) e Sul ($-N$), podemos associar um único par de coordenadas (α, δ) da seguinte forma: baixamos a perpendicular de P ao equador, cujo pé designamos por H . O ângulo δ será em módulo o valor do arco \widehat{PH} , e seu sinal será positivo se P estiver no mesmo hemisfério que N , negativo em caso contrário. O ângulo α será em módulo o menor dos arcos máximos entre γ e H , e seu sinal será positivo se saindo de γ percorre-se este arco no sentido da orientação do equador. Caso se deva percorrer esse arco no sentido contrário à orientação do equador, tomamos o sinal negativo para α . Vide figura (20).

É válido observar que esse sistema de coordenadas também está completamente determinado se apenas tivermos dois pontos, N e γ , distando 90° um do outro, pois há um único círculo máximo que passa por γ e é perpendicular ao eixo por N .

Figura 20 – Regra da mão direita como orientação no equador (e).



Fonte: Mão extraída de (ALVES, 2015) e adaptada para a figura.

Um ponto P da esfera existe independentemente de qualquer par de coordenadas que se lhe associe. Não diremos que P é o par (α, δ) , mas que as coordenadas de P , num certo sistema de coordenadas esféricas s , são (α, δ) . Isso será denotado por

$$[P]_s = (\alpha, \delta). \quad (3.1)$$

3.2 Distância angular

Distância angular é o ângulo entre as duas direções que se originam no observador e apontam para esses dois objetos. Em Astronomia esse ângulo é usado para descrever a *aparente* distância entre os astros na Esfera Celeste, sem levar em conta a distância radial ao observador.

Teorema 10. Sejam A e B pontos na esfera, cujas coordenadas num sistema s são $[A]_s = (\alpha(A), \delta(A))$ e $[B]_s = (\alpha(B), \delta(B))$, a distância angular entre esses pontos é dada por

$$\cos(\widehat{AB}) = \sin(\delta(A)) \cdot \sin(\delta(B)) + \cos(\delta(A)) \cdot \cos(\delta(B)) \cdot \cos(\alpha(A) - \alpha(B)).$$

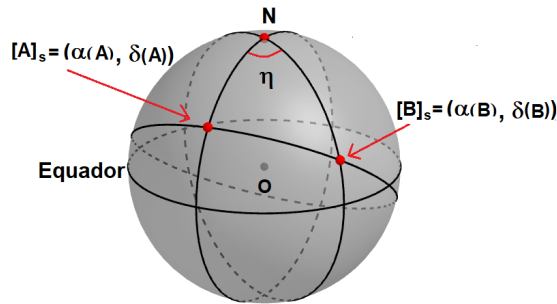
Demonstração. Considere representado na figura (21), um sistema de coordenadas esférico s de pontos A , B e N tais que N seja o Pólo Norte deste sistema. Sendo assim,

$$[A]_s = (\alpha(A), \delta(A)) \quad \text{e} \quad [B]_s = (\alpha(B), \delta(B)).$$

Logo,

$$\widehat{AN} = 90^0 - \delta(A), \quad \widehat{BN} = 90^0 - \delta(B) \quad \text{e} \quad \eta = (\alpha(A) - \alpha(B)). \quad (3.2)$$

Figura 21 – Distância angular entre os pontos A e B .



Fonte: Adaptado de (ABREU; OTTONI, 2015).

Como $\cos(90^0 - \delta) = \sin(\delta)$ e $\sin(90^0 - \delta) = \cos(\delta)$, de (3.2) temos que

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{AN}) &= \sin(\delta(A)), & \cos(\widehat{BN}) &= \sin(\delta(B)), & \sin(\widehat{AN}) &= \cos(\delta(A)), & \sin(\widehat{BN}) &= \cos(\delta(B)) \\ \text{e} \quad \cos(\eta) &= \cos(\alpha(A) - \alpha(B)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cosseno é uma função par, ou seja, $\cos(\eta) = \cos(-\eta)$. Logo, de (1) e de (3.2) resulta que

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{AB}) &= \cos(\widehat{AN}) \cdot \cos(\widehat{BN}) + \sin(\widehat{AN}) \cdot \sin(\widehat{BN}) \cos(\eta) \\ \therefore \cos(\widehat{AB}) &= \sin(\delta(A)) \cdot \sin(\delta(B)) + \cos(\delta(A)) \cdot \cos(\delta(B)) \cdot \cos(\alpha(A) - \alpha(B)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

como queríamos demonstrar. □

3.3 Mudanças de coordenadas

Nesta seção desenvolvemos a principal ideia relativo ao uso da trigonometria esférica na Astronomia: como realizar a mudança de coordenadas entre dois sistemas diferentes ?

Para situar o problema, consideramos um ponto P na esfera, e dois sistemas de coordenadas definidos, respectivamente, pelos pares de pontos N_1 e γ_1 , e N_2 e γ_2 . Ou seja, para cada $i = 1, 2$, N_i é um polo Norte de um sistema de coordenadas e γ_i é um ponto de referência no equador desse sistema.

O ponto P terá coordenadas no sistema 1, que serão (α_1, δ_1) , e coordenadas (α_2, δ_2) no sistema 2. Qual a relação entre esses dois pares de coordenadas? A resposta está contida no Teorema (11) abaixo. Antes de o enunciarmos, vamos apresentar um fato elementar bastante útil em seguida. Denotemos por $\alpha_i(\cdot)$, $\delta_i(\cdot)$, as funções que fornecem as coordenadas de um ponto no sistema i , para $i = 1, 2$.

Proposição 4. Dados N_1 e N_2 os pólos nortes dos sistemas de coordenadas de equadores e_1 e e_2 respectivamente, então

$$\delta_2(N_1) = \delta_1(N_2). \quad (3.5)$$

Demonstração. Com base na figura (22), em que $H_2(N_1)$ é a projeção ortogonal de N_1 em e_2 e $H_1(N_2)$ é a projeção ortogonal de N_2 em e_1 , temos $N_1 \widehat{N_2} + N_2 \widehat{H_1(N_2)} = 90^\circ$ e $N_2 \widehat{N_1} + N_1 \widehat{H_2(N_1)} = 90^\circ$. Logo,

$$\begin{aligned} N_1 \widehat{N_2} + N_2 \widehat{H_1(N_2)} &= N_2 \widehat{N_1} + N_1 \widehat{H_2(N_1)} \\ \Rightarrow N_2 \widehat{H_1(N_2)} &= N_1 \widehat{H_2(N_1)}. \end{aligned}$$

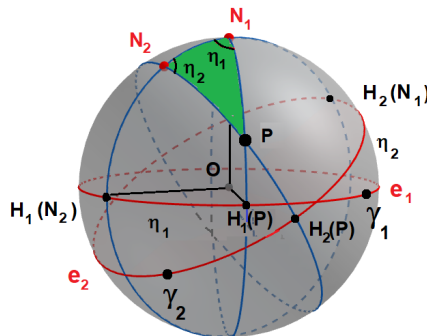
Como $\widehat{N_2 H_1(N_2)} = \delta_1(N_2)$ e $\widehat{N_1 H_2(N_1)} = \delta_2(N_1)$, o resultado (3.5) segue imediato. \square

Teorema 11. Se PN_1N_2 é um triângulo esférico, com N_1 e N_2 representando os nortes dos sistemas 1 e 2, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \text{sen}(\delta_2(P)) &= \text{sen}(\delta_1(N_2))\text{sen}(\delta_1(P)) + \cos(\delta_1(N_2))\cos(\delta_1(P))\cos(\alpha_1(P) - \alpha_1(N_2)), \\ \cos(\alpha_2(P) - \alpha_2(N_1)) &= \text{sen}(\delta_1(P))\sec(\delta_1(N_2))\sec(\delta_2(P)) - \tan(\delta_1(N_2))\tan(\delta_2(P)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Demonstração. Considere na figura (22), o triângulo esférico PN_1N_2 tal que N_1 e N_2 sejam nortes dos sistemas esféricos 1 e 2, respectivamente. Considere também, $H_1(N_2)$ a projeção ortogonal de N_2 no equador e_1 , $H_2(N_1)$ a projeção ortogonal de N_1 no equador e_2 , $H_1(P)$ a projeção ortogonal de P no equador e_1 e $H_2(P)$ a projeção ortogonal de P no equador e_2 .

Figura 22 – Ponto P nos sistemas esféricos de coordenadas 1 e 2.



Fonte: Adaptado à partir de figuras encontradas em (SARAIVA, 2004).

Definiremos aqui η_1 e η_2 , com sendo os ângulos esféricos com vértices em N_1 e N_2 , respectivamente.

Fazendo $N_2\widehat{H}_1(N_2) = \delta_1(N_2)$, $N_1\widehat{H}_2(N_1) = \delta_2(N_1)$, $P\widehat{H}_1(P) = \delta_1(P)$ e $P\widehat{H}_2(P) = \delta_2(P)$, implica que os lados do triângulo PN_1N_2 são

$$N_1\widehat{N}_2 = 90^\circ - \delta_1(N_2), \quad N_1\widehat{P} = 90^\circ - \delta_1(P) \quad \text{e} \quad N_2\widehat{P} = 90^\circ - \delta_2(P).$$

Como $\cos(90^\circ - \eta) = \sin(\eta)$ e $\sin(90^\circ - \eta) = \cos(\eta)$, da lei dos cossenos para lados de triângulos esféricos resulta que

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{N}_1P) &= \cos(\widehat{N}_1N_2)\cos(\widehat{N}_2P) + \sin(\widehat{N}_1N_2)\sin(\widehat{N}_2P)\cos(\eta_2) \\ \Rightarrow \sin(\delta_1(P)) &= \sin(\delta_1(N_2))\sin(\delta_2(P)) + \cos(\delta_1(N_2))\cos(\delta_2(P))\cos(\eta_2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{N}_2P) &= \cos(\widehat{N}_1N_2)\cos(\widehat{N}_1P) + \sin(\widehat{N}_1N_2)\sin(\widehat{N}_1P)\cos(\eta_1) \\ \Rightarrow \sin(\delta_2(P)) &= \sin(\delta_2(N_1))\sin(\delta_1(P)) + \cos(\delta_2(N_1))\cos(\delta_1(P))\cos(\eta_1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como consequência de (3.7) e (3.8) implica que

$$\cos(\eta_2) = \sin(\delta_1(P))\sec(\delta_1(N_2))\sec(\delta_2(P)) - \tan(\delta_1(N_2))\tan(\delta_2(P)). \quad (3.9)$$

e

$$\cos(\eta_1) = \sin(\delta_2(P))\sec(\delta_2(N_1))\sec(\delta_1(P)) - \tan(\delta_2(N_1))\tan(\delta_1(P)). \quad (3.10)$$

Das definições de diedro e de ângulo esférico, podemos concluir a partir da proposição (2) que

$$H_1(N_2)\widehat{H}_1(P) = \eta_1 \quad \text{e} \quad H_2(N_1)\widehat{H}_2(P) = \eta_2.$$

Logo, como a orientação no equador obedecerá a regra da mão direita, temos que

$$\eta_1 = \alpha_1(P) - \alpha_1(N_2) \quad \text{e} \quad -\eta_2 = \alpha_2(P) - \alpha_2(N_1). \quad (3.11)$$

Assim, de (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11) resultam as coordenadas de P nos sistemas 1 e 2 representados por

$$[P]_1 = (\alpha_1, \beta_1) \quad \text{e} \quad [P]_2 = (\alpha_2, \beta_2).$$

□

Observação 4. O triângulo PN_1N_2 utilizado no teorema anterior, assim como todo triângulo esférico utilizado de forma que dois de seus vértices sejam nortes de sistemas distintos, é definido em Astronomia como Triângulo de Posição.

Observação 5. Não é difícil ver que as quantidades angulares $\alpha_1(P) - \alpha_1(N_2)$ e $\alpha_2(P) - \alpha_2(N_1)$ têm sempre sinais opostos. Isto porque essas quantidades medem a *ascensão reta* de P em relação ao mesmo *meridiano*, ou seja, o círculo máximo que passa por N_1 e N_2 . Mas enquanto P está no hemisfério *ocidental* em relação a um desses nortes, estará no hemisfério *oriental* em relação ao outro, o que causa a inversão de sinal mediante as convenções que adotamos na definição dos sistemas de coordenadas genéricos.

Proposição 5. Seja PN_1N_2 um triângulo de posição de ângulos esféricos η_1 e η_2 nos vértices N_1 e N_2 nortes dos sistemas de coordenadas 1 e 2, respectivamente. Então

$$\frac{\cos(\delta_2(P))}{\text{sen}(\eta_1)} = \frac{\cos(\delta_1(P))}{\text{sen}(\eta_2)}. \quad (3.12)$$

Demonstração. A figura (23) é uma representação do triângulo de posição PN_1N_2 de ângulos η_1 e η_2 nos vértices N_1 e N_2 , respectivamente. Logo, temos que

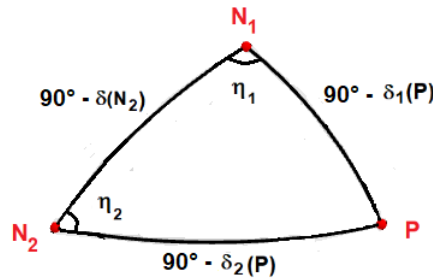
$$\widehat{N_1P} = 90^\circ - \delta_1(P) \quad \text{e} \quad \widehat{N_2P} = 90^\circ - \delta_2(P).$$

Portanto, do teorema (9) resulta que

$$\frac{\text{sen}(90^\circ - \delta_2(P))}{\text{sen}(\eta_1)} = \frac{\text{sen}(90^\circ - \delta_1(P))}{\text{sen}(\eta_2)} \Rightarrow \frac{\cos(\delta_2(P))}{\text{sen}(\eta_1)} = \frac{\cos(\delta_1(P))}{\text{sen}(\eta_2)}, \quad (3.13)$$

de onde obtemos a identidade (3.12).

Figura 23 – Triângulo esférico N_1N_2P .



Fonte: Triângulo esférico encontrado na figura (22).

□

3.4 Aplicações na Astronomia

“A Astronomia e a Matemática têm, desde os tempos mais remotos, uma ligação muito próxima. Desde o início da Humanidade, que se começou a prestar atenção aos padrões encontrados na Natureza e, de um modo particular, no céu. Esta curiosidade ajudou o Homem a descobrir a Matemática à medida que ia conhecendo melhor o mundo e o espaço que o rodeava. [...]” (TEIXEIRA; SOBRINHO, 2017)

A Geometria Esférica foi de suma importância durante as “Grandes Navegações”. Apesar de sua influência na Astronomia e no descobrimento de novas terras, hoje é desconhecida por muitos professores de matemática.

O modelo que utilizamos assume duas esferas concêntricas: a esfera terrestre e a esfera celeste. Uma semi-reta com origem no centro comum dessas esferas intercepta cada uma delas em um ponto. Os dois pontos assim obtidos estabelecem uma correspondência, que se traduz numa função invertível que associa cada ponto da esfera terrestre a um ponto da esfera celeste. Assim temos por exemplo, o Polo Norte Celeste (associado ao Polo Norte Geográfico) e o Equador Celeste (associado ao Equador Terrestre).

Uma consequência dessa correspondência é que qualquer sistema de coordenadas esféricas visto em uma das esferas naturalmente se transpõe para a outra. Há porém um obstáculo a essa transposição: as duas esferas possuem um movimento relativo de rotação, sendo a reta Norte-Sul o eixo comum desse movimento. Por isso essa correspondência se modifica ao longo do tempo. Torna-se conveniente trabalhar com sistemas de coordenadas diferentes em cada esfera, mas que podem ser convertidos um no outro se acrescentarmos o parâmetro *tempo*.

Na esfera terrestre será usado o *Sistema de coordenadas geográficas*. Na esfera celeste utilizamos os sistemas de coordenadas: *equatorial celeste*, *equatorial horário*, *horizontal* e *eclíptico*.

3.4.1 Sistema de Coordenadas Geográficas

Como pode ser visto na figura (24), neste sistema o plano fundamental é o plano que contém o Equador Terrestre, e os representantes de e , N e γ , são:

- O Equador Terrestre.
- O Pólo Norte Geográfico (intersecção do eixo de rotação da Terra com sua superfície no Hemisfério Norte).
- A origem $\gamma(0, 0)$ (Intersecção do Equador terrestres com o meridiano de Greenwich) no Equador Terrestre.

Já os representantes de α e δ , assim como a orientação no Equador, são:

- Os ângulos θ (Longitude) e ϕ (Latitude), respectivamente, em que

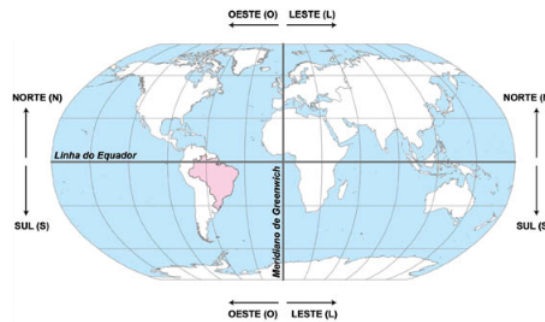
$$\theta \in [-180^0, 180^0] \quad \text{e} \quad \phi \in [-90^0, 90^0].$$

- Orientação obedecendo a *regra da mão direita*.

As coordenadas geográficas de P serão denotadas por

$$[P]_g = (\theta, \phi).$$

Figura 24 – Sistema de Coordenadas Geográficas.



Fonte: (VELA, 2019).

3.4.2 Sistema de Coordenadas Equatorial Celeste

O ponto $\gamma(A)$ (Ponto de Áries, também conhecido como Ponto Vernal) é representado pela posição do Sol no Equador Celeste, durante o Equinócio de Primavera no hemisfério norte (e de Outono no Hemisfério Sul). Este momento acontece aproximadamente no dia 21 de março de cada ano.

Neste sistema, o plano fundamental é o plano que contém o Equador Terrestre. Como pode ser visto na figura (25), os respectivos representantes de e , N e γ , são:

- O Equador Celeste (círculo máximo que representa a intersecção do plano fundamental com a esfera celeste).
- O Pólo Norte Celeste (N_C) (intersecção da reta que contém o eixo de rotação da Terra com a “superfície” da esfera celeste no Hemisfério Norte).
- A origem $\gamma(A)$ (ponto de Áries).

Já os respectivos representantes de α e δ , assim como a orientação no Equador, são:

- Os ângulos α (Ascensão Reta) e δ (Declinação), respectivamente, em que

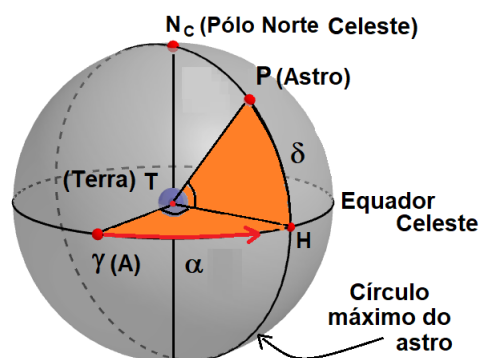
$$\alpha \in [0, 360^0[= [0h, 24h[\quad e \quad \delta \in [-90^0, 90^0].$$

- Orientação obedecendo a regra da mão direita.

As coordenadas celestes de P serão denotadas por

$$[P]_c = (\alpha, \delta).$$

Figura 25 – Sistema de Coordenadas Equatorial Celeste.



Fonte: Adaptado de (SANTIAGO; SALVIANO, 2005).

3.4.3 Sistema de Coordenadas Equatorial Horário

A posição do observador na esfera celeste é chamada de *Zênite* (ponto interceptado por um eixo vertical traçado à partir da cabeça do observador (localizado na superfície terrestre) e que se prolonga até a esfera celeste). Assim, definimos o meridiano do observador como sendo o semi-círculo máximo que liga o norte e o sul do sistema de coordenadas utilizado e passa pelo Zênite.

Neste sistema, o plano fundamental também é o plano que contém o Equador Terrestre. Como pode ser visto na figura (26), os respectivos representantes de e , N e γ , são:

- O Equador Celeste.
- O Polo Norte Celeste (N_C).
- A origem $\gamma(\text{Ob})$ (intersecção do círculo máximo que contém o Polo Norte Celeste, o Zênite (observador) e o Polo Sul Celeste com o Equador Celeste no hemisfério do observador). Este ponto é a projeção ortogonal do ponto do observador sobre o Equador Celeste.

Já quanto aos representantes de α e δ , e a orientação no Equador, são:

- Os ângulos χ (Ângulo Horário) e δ (Declinação), respectivamente, em que

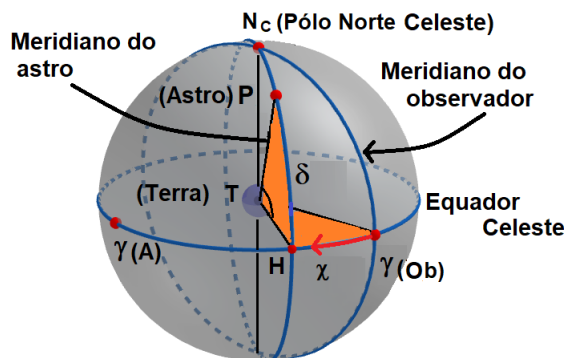
$$\chi \in [0h, 24h[= [0^0, 360^0[\quad \text{e} \quad \delta \in [-90^0, 90^0].$$

■ Orientação contrária a *regra da mão direita*.

As coordenadas horárias de P serão denotadas por

$$[P]_{ho} = (\chi, \delta).$$

Figura 26 – Sistema de Coordenadas Equatorial Horário.



Fonte: Adaptado de (SARAIVA, 2004).

Uma aplicação muito útil, é a determinação do tempo de duração dos astros no hemisfério observável de uma determinada localidade.

“[...]para qualquer astro, o tempo de permanência acima do horizonte será duas vezes o ângulo horário desse astro no momento do nascer ou ocaso.”(SARAIVA, 2004)

Fórmula fundamental da Astronomia de Posição

Dia solar é o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol pelo meridiano local de um observador. Por outro lado, dia sideral é o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas de uma estrela pelo meridiano local do observador. O dia sideral possui um intervalo médio de $23h : 56m4s$ e o dia solar de $24h$.

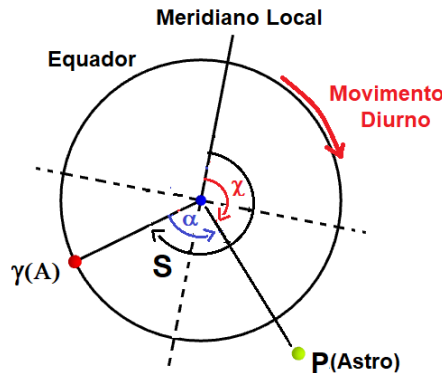
O fato de haver uma definição de tempo sideral e de tempo solar, ocorre pelo fato do sol mudar de posição na esfera celeste de um dia para o outro, devido ao movimento da Terra em sua órbita ao seu redor.

Conhecida como Fórmula Fundamental da Astronomia de Posição, a Hora Sideral (S) é definida como o ângulo horário, medido em horas, do ponto de Áries para determinado observador ($S = \chi(\gamma(A))$), ou seja,

$$S = \chi + \alpha$$

em que χ e α são, respectivamente, o ângulo horário e a ascensão reta de um astro na esfera celeste. Vide figura (27).

Figura 27 – Representação da hora sideral.



Fonte: Adaptado de (KEPLER; SARAIVA, 2016).

A Hora Solar (M) é definida como o ângulo horário do Sol, medido em horas. Porém, para fazer com que a passagem meridiana do Sol ($\chi(\text{Sol}) = 0h$) corresponda ao meio-dia ($12h$) e não à meia-noite, é dado um acréscimo de 12 horas, ou seja, a Hora Solar (M) é

$$M = \chi(\text{Sol}) + 12h.$$

3.4.4 Sistema de Coordenadas Horizontal

Neste sistema, o plano fundamental é o plano que passa pelo centro da Esfera Celeste e é paralelo ao plano tangente à Esfera Terrestre no ponto geográfico desse observador. Para efeitos astronômicos, uma vez que a distância entre esses dois planos (que é o raio da Esfera Terrestre) é desprezível comparada com o raio da Esfera Celeste, é comum tomar esse plano como o plano horizontal no ponto do observador.

Como pode ser visto na figura (28), os representantes de e , N e γ são:

- O Equador Horizontal (intersecção do plano horizontal com a esfera celeste).
- O Pólo Norte Horizontal (N_H) (Zênite).
- A origem $\gamma(H)$ (intersecção do círculo máximo que passa pelo Zênite, Polo norte Celeste e Nadir (ponto diametralmente oposto ao Zênite) com o Equador Horizontal). Este ponto é a *projeção ortogonal* do Polo Norte Celeste sobre o Equador Horizontal.

Já os representantes de α e δ , assim como a orientação no Equador, são dados por:

- Os ângulos μ (Azimute) e σ (Altura), respectivamente, em que

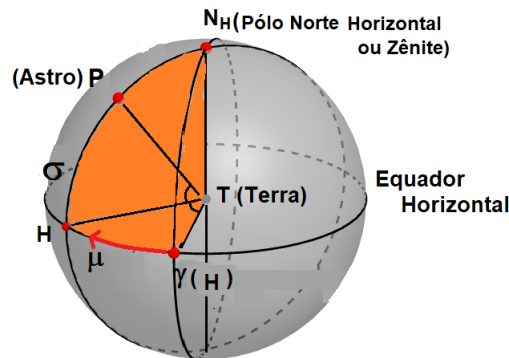
$$\mu \in [0, 360^0[\quad e \quad \sigma \in [-90^0, 90^0].$$

- Orientação: contrária à *regra da mão direita*.

As coordenadas horizontais de P serão denotadas por

$$[P]_{hz} = (\mu, \sigma).$$

Figura 28 – Sistema de Coordenadas Horizontal.



Fonte: Adaptado de (SARAIVA, 2004).

3.4.5 Sistema de Coordenadas Eclípticas

Se marcarmos sobre a Esfera Celeste a posição do Sol ao meio-dia durante um ano, ele vai descrever uma circunferência máxima, inclinada $23,5^{\circ}$ em relação ao Equador Celeste. Essa órbita aparente do Sol na esfera celeste se chama Eclíptica.

Neste sistema, o plano fundamental é o plano que contém a Eclíptica. Como pode ser visto na figura (29), os respectivos representantes de e , N e γ , são:

- O Equador Eclíptico (a própria trajetória do Sol, que é intersecção do plano da Eclíptica com a esfera celeste).
- O Pólo Norte Eclíptico (N_{Ec}).
- A origem $\gamma(A)$ (Ponto de Áries).

Já os representantes de α e δ , assim como a orientação no Equador, são:

- Os ângulos λ (longitude Eclíptica) e β (Latitude Eclíptica), respectivamente, em que

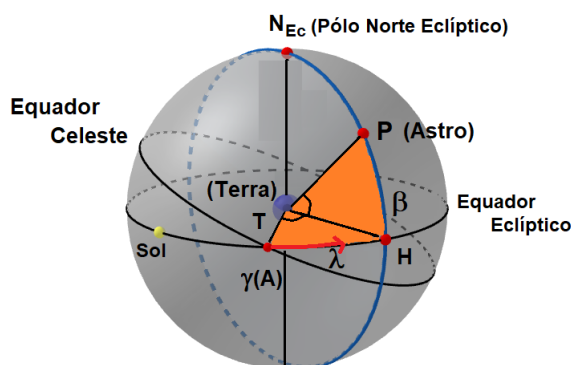
$$\lambda \in [0, 360^{\circ}[\quad \text{e} \quad \beta \in [-90^{\circ}, 90^{\circ}].$$

- Orientação obedecendo à *regra da mão direita*.

As coordenadas eclípticas de P serão denotadas por

$$[P]_{ec} = (\lambda, \beta).$$

Figura 29 – Sistema de Coordenadas Eclíptico.



Fonte: Adaptado de (SARAIVA, 2004).

Observação 6. Nos sistemas de coordenadas Equatorial Horário e Horizontal a posição dos pontos de referência (γ) depende da posição do observador. Isto é proposital, uma vez que se deseja referenciar a posição dos astros em função da posição do observador. No sistema Equatorial Horário o ângulo horário do observador é sempre 0. Um astro cujo ângulo horário, num certo instante, é $\chi = 3h$, esteve sobre o meridiano do observador há três horas atrás, e deslocou-se devido ao movimento de rotação da Esfera Terrestre (em relação à Celeste!).

No sistema Horizontal, o Azimute de um astro que se situa “na direção” do Polo Norte Geográfico (como a estrela Polar) é aproximadamente zero. Já o observador sempre será o seu próprio Polo Norte (Zênite). Assim como o ângulo horário, o Azimute também aumenta com o passar do tempo.

O fato da Terra girar no sentido ao da regra da mão direita faz com que o meridiano ao qual o Zênite pertence se desloque no mesmo sentido. Como os astros na esfera celeste são fixos por um bom período de tempo, a distância do meridiano do Zênite aumenta em relação ao meridiano do astro no sentido contrário. Como tal meridiano determina as origens nos equadores dos sistemas horário e horizontal, isso justifica a escolha de orientação oposta para esses sistemas.

3.5 Mudanças de coordenadas astronômicas

“O triângulo de posição é usado para derivar as coordenadas do astro quando conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando conhecidas as coordenadas do astro. Também permite fazer as transformações de um sistema de coordenadas para outro.” (SARAIVA, 2004)

Esse tipo de triângulo citado por Saraiva (2004), foi utilizado no teorema (11) e será usado nas transformações que veremos a seguir.

3.5.1 Transformação de coordenadas horárias em celestes e vice-versa

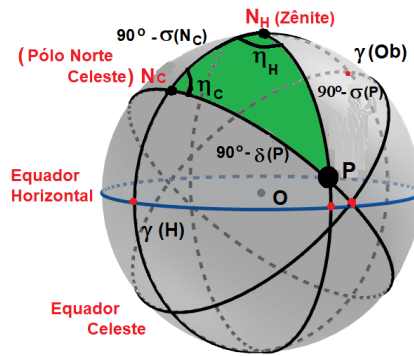
Ambos os sistemas admitem a Declinação (δ). Assim, a transformação entre os dois sistemas se resume em relacionar o ângulo horário e ascensão reta do astro em função da hora sideral através da equação

$$S = \chi + \alpha. \quad (3.14)$$

3.5.2 Transformação de coordenadas horizontais em horárias e vice-versa

Tomando como base os sistemas horário e horizontal representados na figura (30), considere o Pólo Norte Celeste (N_C), Pólo Norte Horizontal (N_H) (Zênite) e o Astro (P) vértices de PN_HN_C .

Figura 30 – Triângulo de posição no hemisfério norte.



Fonte: Adaptado à partir da figura (22).

A origem destes sistemas está no círculo máximo que liga o Pólo Norte Celeste e o Zênite. Convém ressaltar que a orientação nestes sistemas é contrário a regra da mão direita. Sendo assim, temos que

$$\chi(P) = \eta_C, \quad \mu(P) = -\eta_H \quad \text{e} \quad \widehat{\gamma(H)N_C} = \sigma(N_C).$$

Da proposição (4) e do teorema (11) resulta que

$$\text{sen}(\sigma(P)) = \text{sen}(\sigma(N_C))\text{sen}(\delta(P)) + \cos(\sigma(N_C))\cos(\delta(P))\cos(\eta_C) \quad (3.15)$$

$$\cos(\eta_C) = \text{sen}(\sigma(P)) \sec(\sigma(N_C)) \sec(\delta(P)) - \tan(\sigma(N_C)) \tan(\delta(P)). \quad (3.16)$$

$$\text{sen}(\delta(P)) = \text{sen}(\sigma(N_C)) \text{sen}(\sigma(P)) + \cos(\sigma(N_C)) \cos(\sigma(P)) \cos(\eta_H) \quad (3.17)$$

e

$$\cos(\eta_H) = \text{sen}(\delta(P)) \sec(\sigma(N_C)) \sec(\sigma(P)) - \tan(\sigma(N_C)) \tan(\sigma(P)). \quad (3.18)$$

Observação 7. A proposição (9) nos mostra uma outra alternativa para determinar η_C e η_H . De sorte,

$$\frac{\text{sen}(90^\circ - \delta(P))}{\text{sen}(\eta_H)} = \frac{\text{sen}(90^\circ - \sigma(P))}{\text{sen}(\eta_C)} \Rightarrow \frac{\cos(\delta(P))}{\text{sen}(\eta_H)} = \frac{\cos(\sigma(P))}{\text{sen}(\eta_C)}.$$

Portanto,

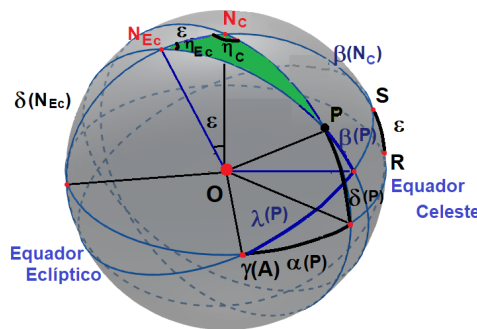
$$\text{sen}(\eta_H) = \frac{\cos(\delta(P)) \text{sen}(\eta_C)}{\cos(\sigma(P))} \quad e \quad \text{sen}(\eta_C) = \frac{\cos(\sigma(P)) \text{sen}(\eta_H)}{\cos(\delta(P))}. \quad (3.19)$$

3.5.3 Transformação de coordenadas celestes em eclípticas e vice-versa

Tomando como referência a figura (31), considere o Pólo Norte Celeste (N_C), o Pólo Norte Eclíptico (N_{Ec}) e o Astro (P) vértices do triângulo PN_CN_{Ec} . Considere também S e R as intersecções do círculo máximo que liga o norte celeste e o norte eclíptico com os seus equadores. O ângulo representado por \widehat{RS} é a obliquidade da eclíptica, ou seja, $\widehat{SR} = \varepsilon = 23,5^\circ$. Logo,

$$\widehat{SR} = \widehat{N_{Ec}N_C} = 23,5^\circ \Rightarrow \delta(N_{Ec}) = 66,5^\circ.$$

Figura 31 – Sistema de Coordenadas Celeste e Eclíptico.



Fonte: Adaptado à partir da figura (22).

Dado que a orientação nos equadores destes sistemas obedecem a regra da mão direita e que a origem neles é o ponto de Áries ($\gamma(A)$), temos que

$$\alpha(P) = \eta_C - 90^\circ \quad e \quad \lambda(P) = -\eta_{Ec} + 90^\circ. \quad (3.20)$$

Portanto, da proposição (4) e do teorema (11) resulta que

$$\text{sen}(\beta(P)) = \text{sen}(\delta(N_{Ec}))\text{sen}(\delta(P)) + \cos(\delta(N_{Ec}))\cos(\delta(P))\cos(\eta_C) \quad (3.21)$$

$$\cos(\eta_C) = \text{sen}(\beta(P))\sec(\delta(N_{Ec}))\sec(\delta(P)) - \tan(\delta(N_{Ec}))\tan(\delta(P)). \quad (3.22)$$

$$\text{sen}(\delta(P)) = \text{sen}(\delta(N_{Ec}))\text{sen}(\beta(P)) + \cos(\delta(N_{Ec}))\cos(\beta(P))\cos(\eta_{Ec}) \quad (3.23)$$

e

$$\cos(\eta_{Ec}) = \text{sen}(\delta(P))\sec(\delta(N_{Ec}))\sec(\beta(P)) - \tan(\delta(N_{Ec}))\tan(\beta(P)). \quad (3.24)$$

Observação 8. De modo análogo a observação (7), temos que

$$\text{sen}(\eta_{Ec}) = \frac{\cos(\beta(P))\text{sen}(\eta_C)}{\cos(\delta(P))} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\eta_C) = \frac{\cos(\delta(P))\text{sen}(\eta_{Ec})}{\cos(\beta(P))} \quad (3.25)$$

é uma alternativa para se determinar η_C e η_{Ec}

APLICAÇÕES

O objetivo deste capítulo é abordar a realização de algumas aplicações concernentes ao conteúdo do trabalho demonstrando a sua importância.

4.1 Das propriedades de um triângulo esférico

Nesta seção colocamos em prática alguns conceitos e propriedades de Geometria Esférica e Trigonometria Esférica aplicadas em triângulos.

Aplicação 01: Determine a área de um triângulo presente na superfície de uma esfera de raio 4 cm sabendo que seus ângulos esféricos são $\alpha = 84,62^\circ$, $\beta = 68,18^\circ$ e $\gamma = 56,27^\circ$.

Resolução: De acordo com os dados anteriores, temos que

$$\alpha = 84,62^\circ = \frac{8462}{18000}\pi, \quad \beta = 68,18^\circ = \frac{6818}{18000}\pi, \quad \gamma = 56,27^\circ = \frac{5627}{18000}\pi \quad \text{e} \quad r = 4\text{cm}.$$

Logo, de (2.10) temos que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2} &\Rightarrow \frac{8462}{18000}\pi + \frac{6818}{18000}\pi + \frac{5627}{18000}\pi = \pi + \frac{a}{4^2} \\ &\Rightarrow \frac{2323}{2000}\pi = \pi + \frac{a}{16} \\ &\Rightarrow a = \frac{323}{125}\pi \quad \therefore a \approx 8,12\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Aplicação 02: Determine as medidas dos lados a , b e c de um triângulo esférico, opostos aos ângulos $\alpha = 84,62^\circ$, $\beta = 68,18^\circ$ e $\gamma = 56,27^\circ$, respectivamente.

Resolução: Utilizando a lei dos cossenos para os ângulos esféricos, temos que

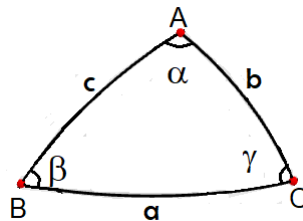
$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= -\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \operatorname{sen}(\beta) \cdot \operatorname{sen}(\gamma) \cdot \cos(a) \\ \Rightarrow \cos(84,62^0) &= -\cos(68,18^0) \cos(56,27^0) + \operatorname{sen}(68,18^0) \operatorname{sen}(56,27^0) \cos(a) \\ \Rightarrow 0,0937607909083 &= -0,206393072603 + 0,7720799081756 \cos(a) \\ \Rightarrow \cos(a) &= \frac{0,3001538635113}{0,7720799081756} \\ \Rightarrow \cos(a) &= 0,3887601015554 \\ \Rightarrow a &= 67,12^0.\end{aligned}$$

Para facilitar os cálculos, do teorema (2.16) referente a Lei dos senos para lados de triângulos esféricos temos que

$$\frac{\operatorname{sen}(84,62^0)}{\operatorname{sen}(67,12^0)} = \frac{\operatorname{sen}(68,18^0)}{\operatorname{sen}(b)} = \frac{\operatorname{sen}(56,27^0)}{\operatorname{sen}(c)} \quad \therefore b = 59,22^0 \quad \text{e} \quad c = 50,32^0.$$

Aplicação 03: Dado $a = 52^0 05' 50''$, $b = 66^0 06' 10''$ e $c = 68^0 13' 00''$ os lados do triângulo esférico representado na figura (32), determine os valores de seus ângulos esféricos.

Figura 32 – Triângulo esférico ABC.



Fonte: Autor.

Resolução: De acordo com os dados do enunciado, temos que

$$a = 52^0 05' 50'' \approx 52,1^0, \quad b = 66^0 06' 10'' \approx 66,1^0 \quad \text{e} \quad c = 68^0 13' 00'' \approx 68,2^0.$$

Portanto, de (2.1) temos que

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \operatorname{sen}(c) \cos(\alpha) \\ \Rightarrow \cos(52,1^0) &= \cos(66,1^0) \cos(68,2^0) + \operatorname{sen}(66,1^0) \operatorname{sen}(68,2^0) \cos(\alpha) \\ \Rightarrow \cos(\alpha) &= 0,5464059758903 \\ \alpha &= 56,88^0.\end{aligned}$$

Logo, de (2.16) resulta que

$$\frac{\operatorname{sen}(56,9^0)}{\operatorname{sen}(52,1^0)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(66,1^0)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(68,2^0)} \Rightarrow \beta = 76^0 \quad \text{e} \quad \gamma = 80,2^0.$$

4.2 Da distância angular

A maioria de nós alguma vez na vida já pesquisou na internet a distância entre duas cidades ou ficou curioso em saber a distância entre algumas estrelas no universo. A partir do teorema (10), elaboramos duas aplicações, uma referente a distância entre dois pontos da esfera terrestre e outro referente a distância entre dois pontos da esfera celeste.

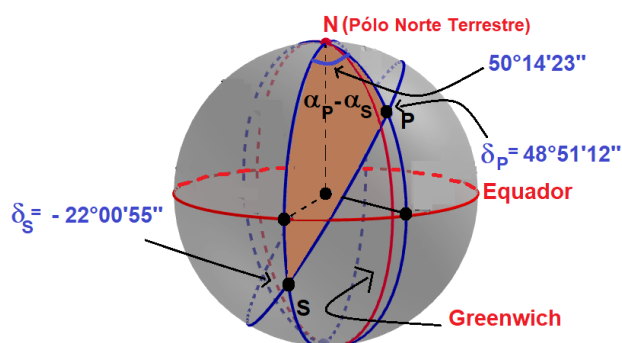
Aplicação 01: Determine a distância entre as cidade de São Carlos/SP (Brasil) e Paris (França). (Considere: raio da Terra igual 6370 km, São Carlos/SP (Brasil) $(-47^{\circ}53'28'', -22^{\circ}00'55'')$ e Paris (França) $(02^{\circ}20'55'', 48^{\circ}51'12'')$).

Resolução: Tomando como referência a figura (33), considere $S(-48^{\circ}, -22^{\circ})$ o ponto que representa a cidade de São Carlos e $P(2^{\circ}, 49^{\circ})$ a cidade de Paris. Portanto, do teorema (10) resulta que

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{SP}) &= \text{sen}(\delta(S)) \cdot \text{sen}(\delta(P)) + \cos(\delta(S)) \cdot \cos(\delta(P)) \cdot \cos(\alpha(P) - \alpha(S)) \\ \Rightarrow \cos(\widehat{SP}) &= \text{sen}(-22^{\circ}) \cdot \text{sen}(49^{\circ}) + \cos(-22^{\circ}) \cdot \cos(49^{\circ}) \cdot \cos(2^{\circ} - (-48^{\circ})) \\ \Rightarrow \cos(\widehat{SP}) &= \text{sen}(-22^{\circ}) \cdot \text{sen}(49^{\circ}) + \cos(-22^{\circ}) \cdot \cos(49^{\circ}) \cdot \cos(50^{\circ}) \\ \Rightarrow \cos(\widehat{SP}) &= 0,1082803799802\end{aligned}$$

$$\therefore \widehat{SP} \approx 83,78^{\circ}.$$

Figura 33 – Representação da distância entre São carlos/SP (Brasil) e Paris (França).



Fonte: Autor.

Como o raio da Terra é 6370km, da fórmula do comprimento da circunferência resulta que

$$c = 2\pi r \Rightarrow c \approx 40024km.$$

Assim, por regra de três simples temos que

$$\frac{40024}{\widehat{SP}} = \frac{360^{\circ}}{83,78^{\circ}} \Rightarrow \widehat{SP} = 9314km.$$

Aplicação 02: Esta aplicação foi colocada na forma de roteiro para que professores possam utilizar o software Stellarium com os alunos em sala de aula. Siga a sequência abaixo para determinar a distância angular entre os planetas Júpiter e Saturno.

Roteiro de aplicação:

- 1) Baixe o software Stellarium através do site <https://stellarium.org/pt_BR/>;
- 2) Abra o software. A figura (34) mostra uma localização próxima a cidade a Jacuí/MG, cidade em que foi acessado. Na parte inferior da figura aparece várias ferramentas do software. A ferramenta circulada, quando acionada, deixa o céu claro;

Figura 34 – Visualização do Stellarium à partir da localização do autor.



Fonte: Software Stellarium.

- 3) Escureça o céu desativando a ferramenta de número 1;
- 4) Faça aparecer o formato e os nomes das constelações ativando as ferramentas de números 2 e 3, respectivamente;

Figura 35 – Visualização das constelações.



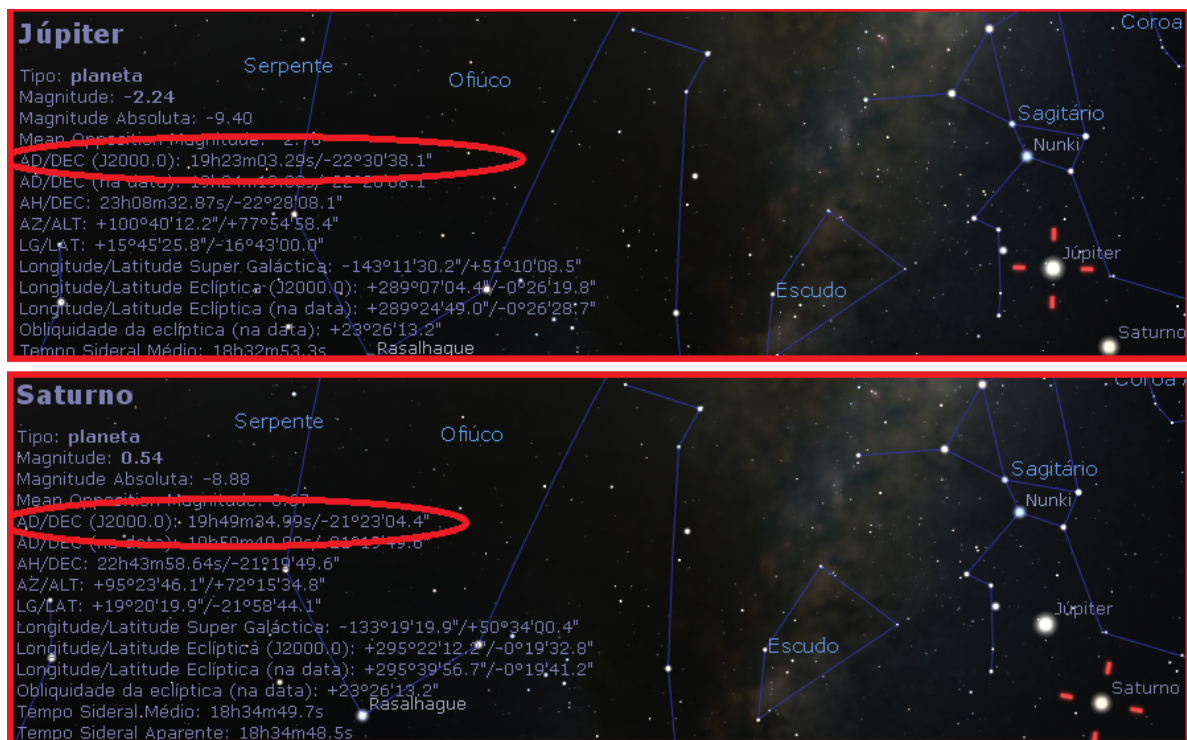
Fonte: Software Stellarium.

5) Utilize o mouse ou as setas do teclado para direcionar a visualização e encontrar os planetas Júpiter e Saturno. Ao encontrar, clique sobre eles e anote as suas coordenadas celestes.

6) Para finalizar, realize as operações a seguir utilizando os dados anotados.

As coordenadas celestes de Júpiter e Saturno no momento em que foi utilizado o Stellarium estão circuladas na figura (36).

Figura 36 – Ascensão Reta e Declinação de Júpiter e Saturno em determinado momento.



Fonte: Software Stellarium.

Na figura anterior nota-se que Júpiter possui coordenadas $J(19h23m03,29s; -22^{\circ}30'38,1'')$ e Saturno $S(19h49m34,99s; -21^{\circ}23'04'')$. Utilizando regra de três simples para transformar a Ascensão Reta (α) de horas para graus, temos

$$J(290,7^{\circ}; -22,5^{\circ}) \quad \text{e} \quad S(297,4^{\circ}; -22,4^{\circ}).$$

Ao abrir o software no seu computador, as coordenadas serão diferentes das encontradas na figura (36) mas o procedimento a ser realizado, deverá ser o mesmo.

Para determinar a distância angular entre os dois planetas, utilizamos estas coordenadas no teorema (10) e como resultado temos que

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{SJ}) &= \sin(-22,4^{\circ})\sin(-22,5^{\circ}) + \cos(-22,4^{\circ})\cos(-22,5^{\circ})\cos(297,4^{\circ} - 290,7^{\circ}) \\ \Rightarrow \cos(\widehat{SJ}) &= 0,9941650563845 \quad \therefore \widehat{SJ} = 6,19^{\circ}; \end{aligned}$$

Observação 9. Stellarium é um software livre de astronomia para visualização do céu nos moldes de um planetário. Neste exercício, este software foi utilizado como base de coleta de dados. Ele pode ser baixado gratuitamente em <https://stellarium.org/pt/>.

4.3 Dos sistemas de coordenadas esféricas

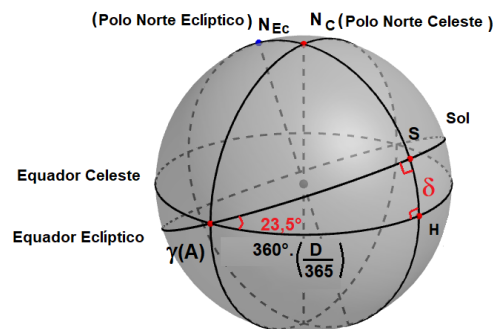
Há milhares de anos, os astrônomos sabem que o Sol muda sua posição no céu ao longo do ano. As determinações referentes a posição do Sol na esfera celeste contribuíram para que a sociedade pudesse prever as melhores épocas para plantio e colheita.

No hemisfério sul, o solstício de Inverno ($\delta_{Sol} = 23,5^0$) ocorre por volta de 21 de junho e o de Verão ($\delta_{Sol} = -23,5^0$) por volta de 21 de dezembro. Por outro lado, os equinócios de Primavera e Verão ($\delta_{Sol} = 0^0$) ocorrem por volta de 21 de Março e 21 de Setembro, respectivamente. Assim, o intervalo referente a declinação do Sol ao longo do ano é dado por

$$\delta = [-23,5^0; 23,5^0].$$

Aplicação 01: As coordenadas celestes do Sol ao longo do ano (365,25 dias) são facilmente determinadas através da Geometria Esférica. Para melhor visualização desta aplicação, tomaremos como referência a figura (37).

Figura 37 – Determinação das coordenadas celestes do Sol ao longo do ano.



Fonte: Autor.

Considere S a posição do Sol no hemisfério norte da esfera celeste e H a sua projeção ortogonal no equador. De acordo com as nossas definições de sistemas esféricos, temos que $\widehat{HS} = \delta(S)$ e $\widehat{\gamma(A)H} = \alpha(S)$. Logo,

$$\frac{D}{365,25} = \frac{\alpha(S)}{360^0} \Rightarrow \alpha(S) = 360^0 \frac{D}{365,25} \quad (4.1)$$

em que D é o número de dias decorridos a partir da data que em que o Sol se encontra no ponto $\gamma(A)$.

A trajetória do Sol define o equador do sistema eclíptico. Logo, no triângulo esférico $\gamma(A)SH$ o ângulo no vértice S é reto. Por outro lado, de acordo com a proposição (2), o ângulo no vértice $\gamma(A)$ é o mesmo da obliquidade da Eclíptica, ou seja, $23,5^0$. Portanto, da proposição (5), temos que

$$\frac{\text{sen}(360^0 \cdot (\frac{D}{365,25}))}{\text{sen}(90^0)} = \frac{\text{sen}(\delta(S))}{\text{sen}(23,5^0)} \Rightarrow \sin(\delta(S)) = \text{sen}(23,5^0) \cdot \text{sen}(360^0 \cdot (\frac{D}{365,25})). \quad (4.2)$$

Portanto,

$$[S]_c = (\alpha, \delta).$$

Aplicação 02: Determine aproximadamente as coordenadas celestes do Sol no dia 7 de maio de 2020.

Resolução: No ano de 2020, o ponto de Áries é representado pela posição do Sol no dia 20 de Março. Logo, do dia 20 de março ao dia 7 de Maio, decorrem 48 dias. Assim, da equação (4.1) temos que

$$\alpha(S) = 360^0 \left(\frac{48}{365,25} \right) \Rightarrow \alpha(S) = 47,31^0.$$

Já da equação (4.2), temos que

$$\begin{aligned} \text{sen}(\delta(S)) &= \text{sen}(23,5^0) \cdot \text{sen}(360^0 \cdot (\frac{48}{365,25})) \\ \Rightarrow \text{sen}(\delta(S)) &= 0,2930939931892 \\ \Rightarrow \delta(S) &= 17,04^0. \end{aligned}$$

Portanto, a coordenada celeste do sol no dia 7 de maio de 2020 é

$$[S]_c = (47,31^0; 17,04^0).$$

Aplicação 03: Dado $[P]_{hz} = (-115,23^0; 29,67^0)$, determine as coordenadas horárias de P , sabendo que o Polo Norte Celeste (N_C) possui $\sigma = 54,45^0$ no sistema horizontal.

Resolução: A figura (38) foi construída para visualizar esta aplicação. Da equação (3.17), temos que

$$\begin{aligned} \text{sen}(\delta(P)) &= \text{sen}(\sigma(N_C))\text{sen}(\sigma(P)) + \cos(\sigma(N_C))\cos(\sigma(P))\cos(\eta_H) \\ \Rightarrow \text{sen}(\delta(P)) &= \text{sen}(54,45^0)\text{sen}(29,67^0) + \cos(54,45^0)\cos(29,67^0)\cos(115,23^0) \\ \Rightarrow \text{sen}(\delta(P)) &= 0,1874028218170 \end{aligned}$$

$$\therefore \delta(P) = 10,8^0.$$

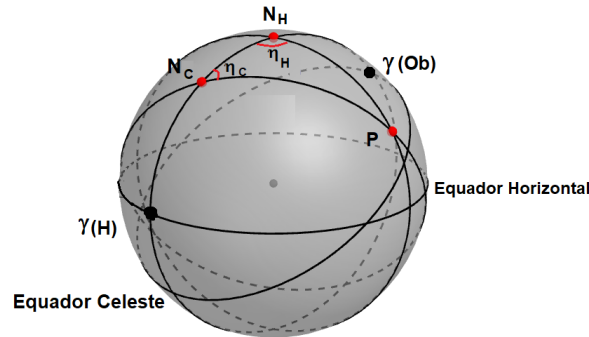
Logo, de (3.16) resulta que

$$\begin{aligned}\cos(\eta_C) &= \text{sen}(\sigma(P)) \sec(\sigma(N_C)) \sec(\delta(P)) - \tan(\sigma(N_C)) \tan(\delta(P)) \\ \Rightarrow \cos(\eta_C) &= \text{sen}(29,67^0) \sec(54,45^0) \sec(10,8^0) - \tan(54,45^0) \tan(10,8^0) \\ \Rightarrow \cos(\eta_C) &= 0,5997897275422 \Rightarrow \eta_C = 53,15^0 \\ \therefore \chi(P) &= 53,15^0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$[P]_{ho} = (53,15^0; 10,8^0) \quad \text{ou} \quad [P]_{ho} = (3h33m; 10,8^0).$$

Figura 38 – Sistemas de coordenadas Horário e Horizontal.



Fonte: Adaptado à partir da figura (22).

Aplicação 04: Dado $[P]_c = (10,83^0; 15,11^0)$, determine as coordenadas eclípticas de P , sabendo que $\eta_C = 100,83^0$.

Resolução: De acordo com o enunciado, os sistemas em questão são os eclíptico e celeste. Tomando como referência a figura (39), temos que

$$\lambda(N_C) = 90^0, \quad \alpha(N_{Ec}) = -90^0 \quad e \quad \beta(N_C) = \delta(N_{Ec}) = 66,5^0.$$

Da equação (3.23), temos que

$$\begin{aligned}\text{sen}(\beta(P)) &= \text{sen}(\delta(N_{Ec})) \text{sen}(\delta(P)) + \cos(\delta(N_{Ec})) \cos(\delta(P)) \cos(\eta_C) \\ \Rightarrow \text{sen}(\beta(P)) &= \text{sen}(66,5^0) \text{sen}(15,11^0) + \cos(66,5^0) \cos(15,11^0) \cos(100,83^0) \\ \Rightarrow \text{sen}(\beta(P)) &= 0,1667199190258 \\ \Rightarrow \beta(P) &= 9,6^0.\end{aligned}$$

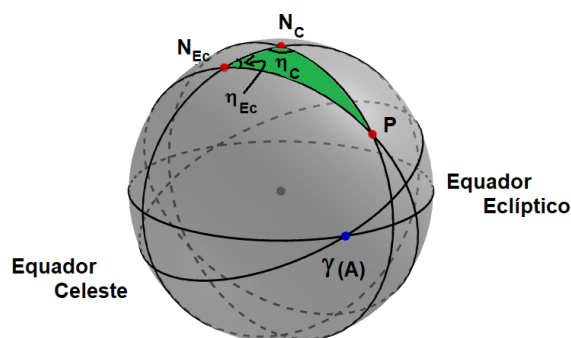
Logo, de (3.24) resulta que

$$\begin{aligned}\cos(\eta_{Ec}) &= \text{sen}(\delta(P)) \sec(\delta(N_{Ec})) \sec(\beta(P)) - \tan(\delta(N_{Ec})) \tan(\beta(P)) \\ \Rightarrow \cos(\eta_{Ec}) &= \text{sen}(15,11^0) \sec(66,5^0) \sec(9,6^0) - \tan(66,5^0) \tan(9,6^0) \\ \Rightarrow \cos(\eta_{Ec}) &= 0,2740224884960 \\ \Rightarrow \eta_{Ec} &= 74,1^0.\end{aligned}$$

De (3.20), temos que $\lambda(P) = 15,9^0$. Portanto,

$$[P]_{ec} = (15,9^0; 9,6^0).$$

Figura 39 – Sistema de Coordenadas Celeste e Eclíptico.



Fonte: Adaptado à partir da figura (22).

Aplicação 05: Considere P uma estrela, tal que $[P]_c = (1h10m54s; 35^044')$. Determine as coordenadas eclípticas de P no momento em que $\eta_C = 59,5^0$.

Resolução: A orientação nos equadores Celeste e Eclíptico obedece a *regra da mão direita*. Assim sendo,

$$\lambda(N_C) = +90^0, \quad \alpha(N_{Ec}) = -90^0 \quad \text{e} \quad \beta(N_C) = \delta(N_{Ec}) = 66,5^0.$$

Como $35^044' = 35,7^0$, resulta da equação (3.21) que

$$\begin{aligned} \text{sen}(\beta(P)) &= \text{sen}(\delta(N_{Ec}))\text{sen}(\delta(P)) + \cos(\delta(N_{Ec}))\cos(\delta(P))\cos(\eta_C) \\ \Rightarrow \text{sen}(\beta(P)) &= \text{sen}(66,5^0)\text{sen}(35,7^0) + \cos(66,5^0)\cos(35,7^0)\cos(59,5^0) \\ \Rightarrow \text{sen}(\beta(P)) &= 0,6994921760385 \\ \Rightarrow \beta(P) &= 44,39^0. \end{aligned}$$

Logo, de (3.24) resulta que

$$\begin{aligned} \cos(\eta_{Ec}) &= \text{sen}(\delta(P))\sec(\delta(N_{Ec}))\sec(\beta(P)) - \tan(\delta(N_{Ec}))\tan(\beta(P)) \\ \Rightarrow \cos(\eta_{Ec}) &= \text{sen}(35,7^0)\sec(66,5^0)\sec(44,39^0) - \tan(66,5^0)\tan(44,39^0) \\ \Rightarrow \cos(\eta_{Ec}) &= -0,203470634906 \\ \Rightarrow \eta_{Ec} &= 101,74^0. \end{aligned}$$

De (3.20) resulta que $\lambda(P) = -11,74^0$. Portanto,

$$[P]_{ec} = (-11,74^0; 44,39^0).$$

Aplicação 06: Determine as coordenadas horárias da estrela Mirach (M) da constelação de Andrômeda sabendo que em determinado momento, na localidade de São Carlos, ela possui $[M]_c = (1h10m54s; 35^0 44')$ e hora sideral $S = 0h40m16s$.

Resolução: Nesta aplicação basta aplicarmos a equação (3.14). Logo,

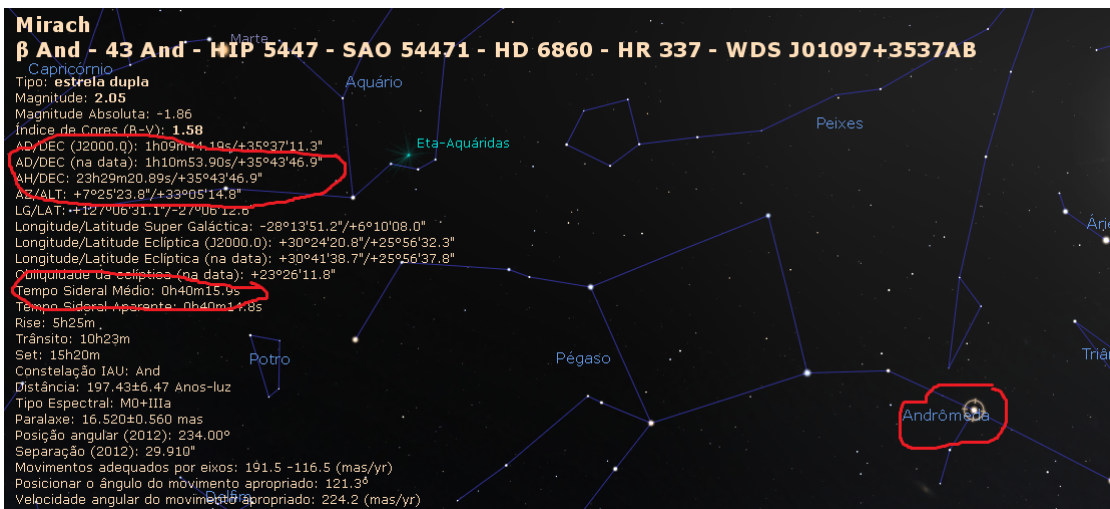
$$\begin{aligned} S &= \chi + \alpha \\ \Rightarrow 0h : 40m16s &= \chi + 1h : 10m54s \\ \Rightarrow \chi &= 23h : 29m22s. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[M]_{ho} = (23h : 29m22s; 35,7^0).$$

A nossa referência para esta aplicações foi a figura (40) que foi construída a partir do software Stellarium.

Figura 40 – Dados e visualização da estrela Mirach no céu.



Fonte: Software Stellarium.

Aplicação 07: Determine o Azimute, o ângulo horário e o tempo de duração do Sol no horizonte de São Carlos/SP em 21 de Dezembro. (Dados: São Carlos possui $\phi = -22^0$ e o sol possui $\delta = -23,5^0$ nesta data.)

Resolução: A representação da posição de um observador da Terra na esfera celeste é dado pelo Zênite (N_H). Sendo assim, considerando os sistemas horizontal e horário, temos que $\phi = \delta(N_H) = \sigma(N_C)$.

Considere S o Sol. No momento em que ele esta se pondo no horizonte, ele possui $\delta = 0^0$.

Como $\sin(0^0) = 0$, de (3.16) resulta que

$$\begin{aligned}\cos(\eta_C) &= \sin(\sigma(S)) \sec(\sigma(N_C)) \sec(\delta(S)) - \tan(\sigma(N_C)) \tan(\delta(S)) \\ \Rightarrow \cos(\eta_C) &= -\tan(-22^0) \tan(-23,5^0) = -0,1753 \\ \Rightarrow \eta_C &= 100,1^0 \\ \Rightarrow \chi(S) &= 100,1^0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$2\chi = 200,2^0 \approx 13h20min$$

é o seu tempo de duração no horizonte de São Carlos em 21 de Dezembro.

Determinaremos agora o Ângulo Horário e o Azimute. Assim, dado $\sec(0^0) = 1$ e $\tan(0^0) = 0$, de (3.18) resulta que

$$\begin{aligned}\cos(\eta_H) &= \sin(\delta(S)) \sec(\sigma(N_C)) \sec(\sigma(S)) - \tan(\sigma(N_C)) \tan(\sigma(S)) \\ \Rightarrow \cos(\eta_H) &= \sin(\delta(S)) \sec(\sigma(N_C)) \sec(0^0) - \tan(\sigma(N_C)) \tan(0^0) \\ \Rightarrow \cos(\eta_H) &= \sin(\delta(S)) \sec(\sigma(N_C)) \\ \Rightarrow \cos(\eta_H) &= \sin(-23,5^0) \sec(-22^0) \\ \Rightarrow \cos(\eta_H) &= -0,430064724446 \\ \Rightarrow \eta_H &= 115,47^0.\end{aligned}$$

Como $\mu(S) = -\eta_H$ e o fato da localização ser no hemisfério sul, o Azimute no ocaso é

$$\mu(S) = -115,47^0.$$

Logo, o Azimute no nascer é

$$\begin{aligned}\eta_H = \mu(S) - \mu(N_C) &\Rightarrow -115,47^0 = \mu(S) - 180^0 \\ \Rightarrow \mu(S) &= -115,47^0 + 180^0 \\ \Rightarrow \mu(S) &= 64,53^0.\end{aligned}$$

Observação 10. De acordo com o site sunrise-and-sunset.com/pt/sun/brasil/sao-carlos/2019/dezembro, o Sol possui uma duração de 13h26m no horizonte de São Carlos em 21 de Dezembro. A diferença dos 6 minutos ocorre porque consideramos que o dia começa assim que aparece a borda superior do Sol no horizonte e não o seu centro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve por objetivo apresentar aos professores, alunos e amantes da Astronomia um modelo matemático de posicionamento dos astros no universo. É inquestionável o grande interesse que o mundo tem em descobrir os segredos do universo e em tentar responder indagações como, onde estamos, de onde viemos ou para onde vamos.

A matemática busca descrever com exatidão e precisão o mundo que vivemos, possuindo um papel fundamental e essencial na vida do ser humano, e por seu lado, a Astronomia é a ciência que estuda a evolução e a formação dos corpos celestes.

Com o auxílio de cálculos matemáticos foi possível quantificar as quatro estações, os doze meses do ano e as vinte quatro horas do dia. A descoberta desta relação entre a Astronomia e a Matemática pode fazer com que um apaixonado por Astronomia queira compreender mais a matemática presente nela, e vice-versa ampliando a contribuição que esta interdisciplinaridade pode trazer para a sociedade.

A Astronomia é uma ciência imensa, tão grande quanto o Universo que é o seu objeto de estudo. O que impossibilita que, neste momento, ela seja implantada na grade curricular do Ensino Básico. Porém, ela pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com as disciplinas de Ciências Naturais (Física, Química e Biologia) ou em projetos com grupos específicos de alunos, o que, despertará o interesse nestes, dada a relevância do tema e a sua presença no nosso cotidiano. As ligações telefônicas que fazemos, os programas que assistimos, os destinos que pesquisamos no GPS só são possíveis pelos milhares de satélites que orbitam a Terra.

Muitas práticas em sala de aula relacionadas à presente pesquisa podem ser desenvolvidas com os alunos entusiastas do tema, o que só não foi possível em 2020, devido ao fechamento das escolas, ocasionado pela Pandemia da Covid-19, mas que serão realizadas a fim de dar uma maior contribuição a Pesquisa e possibilitar o nascimento de novos pesquisadores e desenvolvedores de tecnologias essenciais em nossas vidas.

finalizar, destaco a sua importância em minha vida. Sempre me perguntava a relação do Sol a pico com o meio-dia, sobre os eclipses e os movimentos dos astros e depois deste trabalho realizado me sinto um profissional mais realizado e capacitado para dar a minha parcela de contribuição com a sociedade.

REFERÊNCIAS

- ABREU, S. M. de; OTTONI, J. E. **Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição**. Tese (Doutorado) — dissertação Profmat, 2015. Citado nas páginas 32, 34, 37 e 41.
- ADAMES, M. R. *et al.* Geometria esférica. 2005. Citado na página 31.
- ALVES, L. R. Mancais magnéticos. 2015. Citado na página 40.
- DIAS, C. A. C.; RITA, J. R. S. Inserção da astronomia como disciplina curricular do ensino médio. **Revista Latino-americana de educação em astronomia**, n. 6, p. 55–65, 2008. Citado na página 19.
- FILHO, A. E. P. d. S. A trigonometria esférica e o globo terrestre. 2014. Citado nas páginas 23, 28 e 36.
- FILHO, A. E. P. D. S. A trigonometria esférica e o globo terrestre. 2014. Citado nas páginas 26 e 29.
- KEPLER, S.; SARAIVA, M. d. F. O. **Trigonometria esférica**. 2012. Último acesso em 03 de Maio de 2020. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/trigesf/trigesf.htm>>. Citado na página 33.
- _____. **Medidas de Tempo**. 2016. Último acesso em 03 de Maio de 2020. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/fis2016/tempo/tempo.htm>>. Citado na página 49.
- NETO, A. C. M. Geometria. **Rio de Janeiro: SBM**, 2013. Citado na página 32.
- SANTIAGO, B.; SALVIANO, A. Astronomia geodésica-posicionamento pelas estrelas. **Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul**, 2005. Citado na página 47.
- SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia & Astrofísica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004. Citado nas páginas 24, 26, 42, 48, 50 e 51.
- TEIXEIRA, H.; SOBRINHO, J. **Matemática e Astronomia**. 2017. Citado na página 44.
- VELA, J. M. **Coordenadas geográficas**. 2019. Último acesso em 03 de Maio de 2020. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/geografia/coordenadas-geograficas/>>. Citado na página 46.
- WIKIPÉDIA. **Bernhard Riemann** — **Wikipédia, a enciclopédia livre**. 2019. [Online; accessed 14-outubro-2019]. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Bernhard_Riemann&oldid=56469647>. Citado na página 22.

