CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

CARLOS EDUARDO LADEIRA VIDIGAL

DEMONSTRANDO PROPRIEDADES DA GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES

Belo Horizonte
2020

CARLOS EDUARDO LADEIRA VIDIGAL

DEMONSTRANDO PROPRIEDADES DA GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora:
Fernanda Aparecida Ferreira

Banca Examinadora:
Eliane Scheid Gazire
Marcos Antônio Gonçalves Júnior
Gilmer Jacinto Peres

Belo Horizonte
2020

Vidigal, Carlos Eduardo Ladeira
V653d Demonstrando propriedades da geometria plana no ensino fundamental: uma proposta de atividades / Carlos Eduardo Ladeira Vidigal. – 2020.
124 f.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.
Orientadora: Fernanda Aparecida Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Ensino fundamental. I. Ferreira, Fernanda Aparecida. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 516

Elaboração da ficha catalográfica pelo Bibliotecário Jeferson N. Auto de Oliveira, CRB-6 2825 / BIB-NG / CEFET-MG

CARLOS EDUARDO LADEIRA VIDIGAL

DEMONSTRANDO PROPRIEDADES DA GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obter o título de Mestre.

APROVADA: 11 de novembro de 2020.

____
Carlos Eduardo Ladeira Vidigal
(Autor)

____
Fernanda Aparecida Ferreira
(Orientadora)

Belo Horizonte

2020

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus.

Agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, cooperaram na caminhada e conquista deste trabalho, incentivando sempre, especialmente:

à minha família e meus amigos, bens tão preciosos.

à Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira, pela preocupação, atenção, paciência, confiança e insistência, que não desistiu de mim, mesmo quando eu já tinha desistido.

a todos os colegas que participaram dessa jornada.

ao corpo docente do PROFMAT/CEFETMG pela dedicação, competência, apoio e todo conhecimento compartilhado.

aos professores membros da banca, Prof. Dra. Eliane Scheid Gazire, Prof. Dr. Marcos Antônio Goncalves Junior, Prof. Dr. Gilmer Jacinto pelas contribuições pertinentes que engradeceram esse estudo.

a todos meus professores do Ensino Básico que foram exemplos de grandes profissionais e me inspiraram na escolha da carreira docente. Em especial, à “tia” Kátia, Fred, Geraldo, Delmarli, Jaime Daniel e Graça.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho pretendemos destacar a importância da compreensão dos alunos e professores do ensino fundamental acerca da prova e da demonstração em Geometria Euclidiana. Para isso, elaboramos um material didático de apoio ao professor apresentando três roteiros de atividades de caráter exploratório, com e sem o uso de recursos computacionais, para que os alunos, nas aulas de Geometria, possam explorar e discutir três propriedades geométricas: ângulos formados por paralelas cortadas por uma transversal, o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras. Tais atividades exploratórias foram desenvolvidas de modo em que é possível criar e testar conjecturas com o objetivo de levar o aluno a verificar a veracidade/falsidade das mesmas, sem o rigor de uma demonstração formal, a partir de questões dirigidas em que os educandos possam exercitar suas argumentações matemáticas. O referencial teórico desta pesquisa baseia-se em trabalhos que destacam a importância da demonstração em Geometria para a Matemática e para o seu ensino, tais como: Balacheff (1987), Villiers (2001), Ferreira (2016), Gazire (2000) e Garbi (2010). Para o design das atividades, utilizamos alguns pressupostos de atividades investigativas e exploratórias. Apresentamos, também, uma análise descritiva da aplicação remota de uma das atividades para 31 alunos de uma turma do 8° ano do Ensino fundamental. A coleta de dados foi realizada por um aplicativo de gerenciamento de questionários e conversa com os alunos em uma aula síncrona. Com o auxílio de recurso computacionais, os alunos puderam explorar um *applet* do GeoGebra e foram direcionados, através dos questionamentos da atividade, a desenvolver conjecturas e comprovar o Teorema de Pitágoras. Embora as conjecturas sejam, frequentemente, baseadas na percepção visual, vários alunos produziram conjecturas viáveis e alguns forneceram uma boa justificativa para suas conclusões. Esperamos que o material desenvolvido e a experiência de ensino retratada possam servir de referência para professores que atuam no ensino fundamental e tenham interesse em trabalhar as demonstrações matemáticas.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Demonstrações. Atividades exploratórias. Argumentação Matemática. Educação Matemática.

ABSTRACT

In this paper we intend to highlight the importance of understanding students and teachers of elementary school about the test and demonstration in Euclidean Geometry. For this, we developed a didactic material to support the teacher, presenting three exploratory activity scripts, with and without the use of computational resources, so that students, in Geometry classes, can explore and discuss three geometric properties: angles formed by parallel lines cut by a transversal, the Tales Theorem and the Pythagorean Theorem. Such exploratory activities were developed in such a way that it is possible to create and test conjectures with the objective of leading the student to verify their veracity / falsity, without the rigor of a formal demonstration, based on questions directed in which the students can exercise their mathematical arguments. The theoretical framework of this research is based on works that highlight the importance of demonstration in Geometry for Mathematics and for its teaching, such as: Balacheff (1987), Villiers (2001), Ferreira (2016), Gazire (2000) and Garbi (2010). For the design of the activities, we used some assumptions of investigative and exploratory activities. We also present a descriptive analysis of the remote application of one of the activities for 31 students in an 8th grade class of elementary school. Data collection was carried out by a questionnaire management application and a conversation with students in a synchronous class. With the aid of computational resources, students were able to explore a GeoGebra applet and were directed, through questioning the activity, to develop conjectures and prove the Pythagorean Theorem. Although conjectures are often based on visual perception, several students have produced viable conjectures and some have provided a good justification for their conclusions. We hope that the material developed and the teaching experience portrayed can serve as a reference for teachers who work in elementary school and are interested in working on mathematical demonstrations.

Keywords: Geometry teaching. Demonstrations. Exploratory activities. Mathematical Argumentation. Mathematics Education.

LISTA DE ABREVIATURAS

CEFET/MG – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede

ERE – Ensino Remoto Emergencial

SGD - Softwares de Geometria Dinâmica

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Algumas habilidades da BNCC 21
Figura 2 – Esboço do Teorema de Pitágoras 27
Figura 3 – Ângulos opostos pelo vértice 28
Figura 4 - Ângulos colaterais internos 30
Figura 5 - Retas concorrentes 30
Figura 6 - Entrar no GeoGebra Tube 39
Figura 7 - Cadastro no GeoGebra Tube 40
Figura 8 - Acesso ao GeoGebra Tube via aplicativo 40
Figura 9 - Exportar arquivo do GeoGebra 41
Figura 10 - Descrição do *applet* 42
Figura 11 - Compartilhar no GeoGebra 42
Figura 12 - Compartilhar link 43
Figura 13 - Duas retas cortadas por uma transversal 78
Figura 14 - Retas não paralelas 79
Figura 15 - Teorema 4.2 80
Figura 16 - Retas paralelas cortada por transversal 80
Figura 17 - Divisão de segmentos comensuráveis 82
Figura 18 - Outra divisão de segmentos comensuráveis 83
Figura 19 - Divisão de segmentos incomensuráveis 84
Figura 20 - Aproximação de segmentos incomensuráveis 85
Figura 21 – Triângulo retângulo em B 87
Figura 22 - Altura do triângulo retângulo em B 88
Figura 23 - Tela inicial no *Moodle* 93
Figura 24 - Índice de atividades de familiarização com o GeoGebra 94
Figura 25 - Tela inicial do formulário no *smartphone* 95
Figura 26 - Tela inicial do formulário no navegador 95
Figura 27 - Orientações para a atividade 97
Figura 28 - Figura inicial do *applet* 101

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Algumas respostas para a questão 2 104
Quadro 2 – Algumas conclusões 107
Quadro 3 – Observações apresentadas pelos alunos 115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Questões OBMEP de caráter de argumentação 19
Tabela 2 – Quantitativo de exercícios 20
Tabela 3 – Algumas respostas para a questão 1 101
Tabela 4 – Algumas respostas para questão 3 106
Tabela 5 – Valores apresentados pelos Alunos 27 e 30 106
Tabela 6 – Dados da questão 1 110
Tabela 7 – Dados apresentados pelo Aluno 24 na questão 1 111
Tabela 8 – Dados apresentados pelos Alunos 14, 18, 22 e 27 na questão 1 111
Tabela 9 - Dados apresentados pelos Alunos 14, 18, 22 na questão 2 112
Tabela 10 - Dados apresentados pelos Alunos 5, 25 na questão 2 112
Tabela 11 – Dados apresentados pelos Alunos 14, 18, 22 e 27 na questão 3 113

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

1.1 Justificativa e objetivos do trabalho 18

1.2 Estrutura da dissertação 22

2 AS DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA: CONSIDERAÇÕES SOBRE SEU PAPEL NA MATEMÁTICA E NO ENSINO 23

2.1 Demonstrações Matemáticas: de experimentos a bases lógicas da Geometria Euclidiana 23

2.2 Por que precisamos de uma demonstração? 26

2.3 Alguns métodos de demonstração formal 27

2.3.1 Demonstração Direta 28

2.3.2 Demonstração por absurdo 29

2.4 Demonstrações no contexto da escola básica 31

2.4.1. Algumas perspectivas 31

2.4.2 O computador como ferramenta de apoio 33

3 ATIVIDADES 35

3.1 O que pensamos sobre as atividades 35

3.2 A importância do GeoGebra nas atividades 37

3.3 Atividades 43

3.3.1 Atividade 1: Um corte nas paralelas 43

3.3.1.1 Roteiro da atividade 45

3.3.1.2 Uma proposta sem o GeoGebra 52

3.3.2 Atividade 2: Um feixe de proporcionalidade 53

3.3.2.1 Roteiro da atividade 55

3.3.2.2 Uma proposta sem o GeoGebra 60

3.3.3 Atividade 3: Enquadrando Pitágoras 64

3.3.3.1 Roteiro da Atividade 66

3.3.3.2 Uma proposta com o GeoGebra 70

4 DEMONSTRAÇÕES 77
4.1 O Teorema das paralelas........ 77
4.1.1 Demonstração 78
4.2 O Teorema de Tales........ 81
4.2.1. Demonstração 81
4.3 O Teorema de Pitágoras 86
4.3.1 Demonstração 86
5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE “ENQUADRANDO PITÁGORAS” 91
5.1. Aplicação da atividade........ 91
5.1.1. Cenário da aplicação........ 92
5.2 Análise dos dados 98
5.2.1. Primeiros dados 99
5.2.2. Análises do desenvolvimento do Roteiro 1 100
5.2.3 Análise do desenvolvimento do Roteiro 2........ 109
5.3 Após a aplicação........ 116
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS........ 119
REFERÊNCIAS........ 123

1 INTRODUÇÃO

Apesar de todo o meu apreço pela Matemática desde as séries iniciais, nunca fiz uma demonstração Matemática na escola básica. Na minha percepção todo o conteúdo era baseado em manipulações de algoritmos a serem realizadas, padrões gráficos a serem descobertos e outro amontoado de regras e propriedades aritméticas, algébricas e geométricas que pouco faziam sentido, a não ser para a própria Matemática. Em raríssimos momentos da minha trajetória como aluno na educação básica, meus professores demonstravam ou tentavam justificar alguma dessas regras/propriedades. Para a maioria dos meus colegas essa prática pouco importava. Percebia que para eles, o desejo de conseguir boas notas e ser aprovado superava algum interesse por tais justificativas. Para mim era um pouco diferente. Sempre tive a curiosidade do porquê de algumas propriedades funcionarem e isso meu ajudou muito nos estudos. Muitas vezes trocava a “decoreba” das fórmulas por inferências e deduções.

Esse meu apreço pela Matemática me levou a seguir a área. Escolhi fazer graduação em Matemática Computacional e, logo que iniciei o curso, embora não fosse o seu objetivo, tive contato com as primeiras demonstrações formais. Foi na disciplina de Matemática Discreta que ouvi falar pela primeira vez em “hipótese” e “tese”. Me encantava muito todas as demonstrações e argumentos lógicos que estudava.

Porém, às vezes me sentia sem rumo. O que vou fazer quando formar? Essa era uma pergunta que passava constantemente pelos meus pensamentos. Estava naquele curso por gostar muito de Matemática e de computadores. Não entrei logo na graduação em Matemática por influências familiares. Muitas vezes ouvi que eu nunca ia conseguir ser um professor por conta do meu jeito tímido e muito explosivo.

Mas o que eu queria era estar no lugar dos bons professores que eu tive e tanto admirava. De alguma forma, tinha que conseguir superar minhas dificuldades. Aquele curso não me agradava mais com tantas disciplinas voltadas para a programação de computadores. Na reopção de curso, permitida pela universidade, encontrei a saída para um desanimo que tomava conta de mim a cada dia.

E, já na licenciatura, a pergunta que eu ouvia muitas vezes era: por que você não foi para o bacharelado? A resposta era simples e direta: porque eu quero ser professor! Mas eu percebia que era visto como o “diferentão”, aquele aluno que escolheu a disciplina optativa de Equações Diferenciais Parciais enquanto o restante da sala escolheu Educação Física. Me encantava com as disciplinas de Geometria Plana e Espacial - e ainda queria cursar a disciplina de Geometria Moderna - enquanto percebia que a maior parte dos meus colegas preferiam a disciplina de Sociologia.

Demorou mais que o previsto, mas formei!

E formado, pude fazer uma pós-graduação que me encantou muito por todo conteúdo matemático que pude aproveitar. Tive muita vontade de emendar logo o mestrado. Mas toda essa trajetória conturbada na Matemática Computacional, imagino, pesou contra meu aceite direto naquela instituição. Além disso, propostas de trabalho e outros interesses particulares pesaram contra eu me dedicar mais naquele momento a tentar ingressar em algum outro mestrado.

Alguns anos depois, conheci o mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Logo fiquei muito animado com a proposta que previa muitas disciplinas específicas de Matemática e não só as relacionadas à Educação. A instituição que eu trabalhava fornecia bolsa o que era uma enorme ajuda naquele tempo. Tive a felicidade de ser aprovado e aprender muito.

Nessa mesma época, o PROFMAT foi criado e me chamava muita atenção pela elevada carga horária de disciplinas relacionadas estritamente à Matemática. Porém, o polo mais perto estava a cerca de 100 km de distância com aulas que ocupavam bastante do fim de semana e coincidiam com meu horário de trabalho.

Em 2017, já não trabalhava mais em uma instituição de ensino superior e não tinha nenhuma perspectiva de retorno já que a procura pelos cursos de Engenharia tinha diminuído bastante. Desde o começo desse ano, decidi aproveitar as horas vagas, que não eram muitas e retomar alguns estudos. Cursei uma disciplina isolada no programa de doutorado em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG). Mas não consegui conciliar os horários para prosseguir no segundo semestre. Foi quando fiquei sabendo que o CEFET-MG iria oferecer o PROFMAT, com horários que seriam possíveis de conciliar e decidi me candidatar a uma vaga, embora tenha enfrentado alguma resistência no meio familiar, novamente.

Mais uma vez, a Matemática me encantava. Tentei aproveitar da melhor forma: fazer amizades, relembrar alguns conceitos, me espelhar em alguns professores e, principalmente, pensar em novas práticas, uma vez que como professor, estava preocupado em como transmitir o conhecimento matemático para meus alunos. E as reflexões sobre essas práticas, ocorridas durante as aulas das disciplinas do PROFMAT, especialmente na disciplina de TCC, me fizeram lembrar do meu ensino básico, onde muitas vezes o programa anual não era cumprido e o conteúdo de Geometria ficava em segundo plano.

No contexto da minha prática profissional, percebi, e ainda percebo, que não é incomum que alguns professores de Matemática terminem o ano letivo de forma que parte da proposta curricular tenha sido deixada para trás, seja por motivo da própria estruturação da grade, da formação do professor, entre outros. Em geral, a parte referente à Geometria é a mais afetada.

É notório que o ensino de Geometria na escola básica tem papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, mas, muitas vezes, é deixado de lado em favor do ensino da Álgebra. Segundo Gazire (2000), o movimento da Matemática Moderna tem sua parcela de contribuição no caos que se instaurou no ensino da Geometria, uma vez que a proposta de algebrizar a Geometria não se manteve criando uma lacuna, principalmente, nas práticas pedagógicas.

Além disso, na maioria das vezes em que é ofertada, a geometria escolar, baseada na Geometria Euclidiana, é apresentada de maneira sucinta e superficial, com foco em processos lógico-dedutivos formais que, em geral, levam a resolução de problemas algébricos. Por outro lado, muitas pesquisas retratam a importância de promover a descoberta "Matemática" em sala de aula por outros meios criativos, nas quais os alunos possam inferir, conjecturar, validar e refutar, abstrair e generalizar proposições.

Permitir que os alunos vivenciem um momento criativo é fundamental no ensino-aprendizagem, uma vez que aproxima o estudante da verdadeira criação da Matemática enquanto ciência. Dessa forma, contribuímos para despertar nos alunos o seu lado questionador, crítico e investigativo.

Nesse contexto de importância do ensino de Geometria na educação básica julgamos que ferramentas tecnológicas possam ser grandes aliadas ao processo de ensino e aprendizagem que tenham por finalidade facilitar experimentações no ambiente de sala de aula. Destacamos, também, o potencial para se trabalhar com práticas pedagógicas diferenciadas e criativas, o que permite ao aluno interagir com os conceitos matemáticos, propiciando a descoberta, inferindo resultados, levantando e testando hipóteses, permitindo verificar a veracidade (ou não) de determinada proposição. Dentre várias ferramentas disponíveis, o software GeoGebra[1] tem se mostrado um grande aliado, ao oferecer para o aluno um ambiente no qual ele pode vivenciar o "fazer" Matemática.

---

[1] O GeoGebra (aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um software livre de geometria dinâmica bem conhecido e popular na literatura. Ele combina conceitos de geometria e álgebra em interfaces que interagem entre si. Pode ser usado em várias plataformas e dispositivos.

Além dessa percepção, todo o aprendizado e reflexões possibilitadas durante as disciplinas básicas do PROFMAT me fizeram buscar por alternativas para a minha prática pedagógica e que poderiam ajudar os meus alunos a exercitar a argumentação Matemática e compreender melhor os conceitos geométricos.

1.1 Justificativa e objetivos do trabalho

Diante do exposto na seção anterior a presente dissertação tem por **objetivo principal** trabalhar alguns conteúdos específicos de Geometria Euclidiana, por meio de uma sequência didática de atividades que tenham como prerrogativa a experimentação e exploração de propriedades geométricas, de tal forma que as atividades possam aproximar os alunos da demonstração Matemática.

Para alcançar nosso objetivo, as atividades foram pensadas a partir dos seguintes objetivos específicos:

Elaborar atividades sobre conceitos geométricos trabalhados nos 8º e 9º anos do ensino fundamental II.

- Desenvolver atividades que levem o aluno a formular e verificar conjecturas recorrendo a experimentação.
- Apresentar o GeoGebra e utilizá-lo como instrumento mediador nas atividades.
- Contribuir para o desenvolvimento da argumentação Matemática, essencial para o processo demonstrativo.
- Estimular a redação Matemática de argumentos e “demonstrações”.
- Apresentar as atividades desenvolvidas em forma de um produto educacional para auxiliar outros professores de Matemática no ensino de Geometria.

Podemos dizer que esse trabalho se **justifica** por contribuir com possíveis práticas no ensino de Geometria que despertem nos alunos a curiosidade, a criatividade e a vontade em saber a natureza dos conhecimentos que lhes são ensinados, já que as atividades propostas vão além de meras rotinas de memorização e repetição de processos.

Além disso, na minha experiência em escolas públicas, sempre fui um incentivador dos alunos para participação na Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e muito me chamava atenção a dificuldade relatada por eles nas provas da 2ª fase. Várias vezes ouvi alunos relatando que não conseguiram fazer questões que envolviam comandos como “mostre que”, “explique”, entre outros comandos que solicitavam que o aluno argumentasse ou justificasse a sua resposta.

Em um levantamento que realizamos em 2019, observamos que, em 2005, primeiro ano da OBMEP, apenas um item tinha caráter argumentativo e/ou justificativo na prova da 2ª fase do nível 2 (para alunos do 8º e 9º anos). Já no ano seguinte, em 2006, foram três itens dessa natureza e, nos anos seguintes, percebemos um aumento desse tipo de questão. Na Tabela 1, a seguir, explicitamos o quantitativo de itens que necessitavam da elaboração de argumentos nas provas da OBMEP, realizadas entre 2005 e 2019, de todos os níveis.

Tabela 1 – Questões OBMEP de caráter de argumentação

Ano	Nível 1	Nível 2	Nível 3
2005	1	1	1
2006	2	3	3
2007	5	7	8
2008	2	6	2
2009	6	8	10
2010	3	4	5
2011	2	4	6
2012	5	2	3
2013	5	5	3
2014	4	3	4
2015	3	3	4
2016	4	6	6
2017	4	5	4
2018	6	2	2
2019	3	4	3

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Esses dados nos mostram um aumento na quantidade de questões da OBMEP que buscam a elaboração de argumentos. Tal aumento evidencia a importância de se trabalhar com exercícios que explorem a elaboração e redação de argumentos matemáticos na prática diária do professor, além daqueles que exploram apenas cálculos numéricos e algébricos.

Uma reflexão sobre esses dados nos instigou a fazer um levantamento análogo no livro didático. Por isso, pesquisamos no livro didático, do 8º e 9º anos, adotado[2] nas escolas em que lecionava, exercícios propostos que utilizavam os termos: verifique, mostre, prove, demonstre, justifique. Os dados obtidos estão dispostos na Tabela 2.

Tabela 2 – Quantitativo de exercícios

	Demonstre	**Mostre**	**Prove**	**Justifique**	**Verifique**
8º ano	5	0	2	1	2
9º ano	0	0	1	2	2

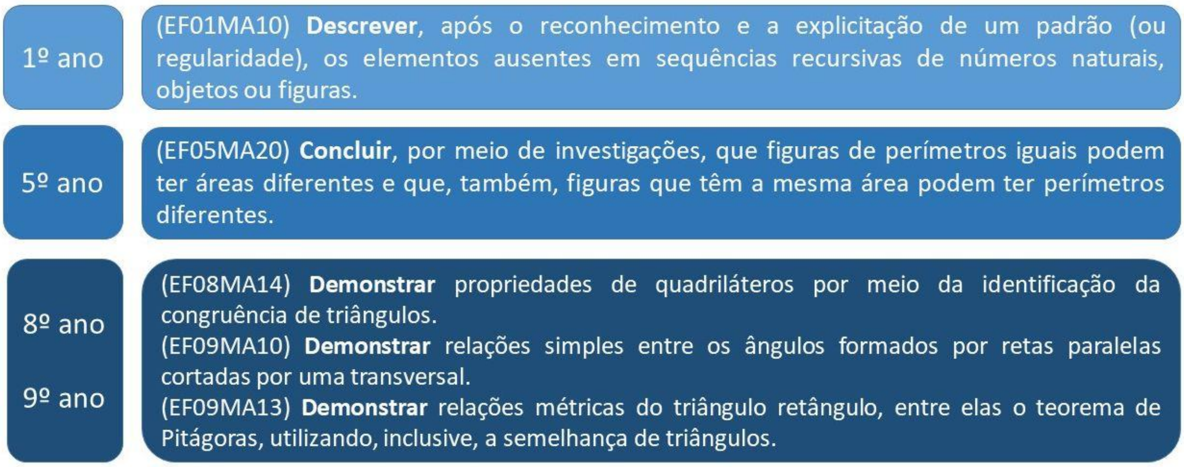
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Uma análise mais detalhada mostra que dos 10 exercícios com as características citadas, no livro do 8º ano, 4 estão relacionados ao conteúdo de Geometria. Já no livro do 9º ano, todos esses exercícios estão relacionados à Geometria, embora o exercício que utiliza o comando "Prove" solicite uma demonstração para a fórmula da área de uma região triangular equilátera, necessitando apenas de manipulações algébricas. Mais uma vez, vimos a necessidade de se trabalhar as demonstrações no contexto do ensino de Geometria, promovendo outras formas para a elaboração de conjecturas e justificativas que ultrapassem a manipulação algébrica.

Na BNCC, também encontramos respaldo para a relevância do tema desse trabalho. Desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, algumas habilidades propostas evidenciam a importância de se trabalhar a redação e a argumentação matemática como mostra a Figura 1.

[2] DANTE, L. R. **Matemática:** Projeto Teláris. São Paulo. Editora Ática, 2015

Figura 1 – Algumas habilidades da BNCC



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Destacamos aqui que as habilidades possuem um nível crescente de dificuldade e que, desde o 1º ano do Ensino Fundamental o aluno deve desenvolver habilidades que favorecem a escrita matemática culminando com três habilidades que utilizam diretamente o comando “Demonstrar”.

Ademais, esse tema, além de se mostrar relevante no contexto da Educação Matemática, verificamos que, no contexto do PROFMAT, poucos trabalhos foram produzidos nessa perspectiva. Um fichamento que realizamos no repositório desse programa, em 2019, sobre pesquisas com enfoque semelhante ao nosso, mostrou que, até 2018, constava no repositório de dissertações do PROFMAT, 30 dissertações que abordavam o tema demonstrações. Dessas dissertações, 12 envolviam demonstrações no contexto da Geometria.

Chamou nossa atenção o fato de que das 12 dissertações citadas, 7 envolviam o Teorema de Pitágoras, sendo que, apenas 4, apresentavam propostas de atividade para a demonstração desse famoso teorema e, apenas uma, sugeria o uso do aplicativo GeoGebra.

Tais fatores expõe uma realidade na qual julgamos que nosso trabalho se mostra relevante por suprir uma demanda de ações pedagógicas e didáticas que contribua para o ensino de Geometria, por meio de propostas de atividades que colocam em evidência a elaboração de argumentos matemáticos que diminuem a distância entre a produção das justificativas dos alunos com a demonstração feita pelos matemáticos.

Na seção seguinte, retratamos como essa dissertação está estruturada.

1.2 Estrutura da dissertação

Primeiramente, no capítulo 2, apresentamos uma breve revisão bibliográfica, com o intuito de aprimorar nossos conhecimentos em relação as demonstrações Matemáticas no contexto da Matemática e do ensino da Matemática, principalmente no ensino e aprendizagem da Geometria Euclidiana. Nesse sentindo, algumas considerações sobre a utilização das experimentações como estratégia de ensino, da importância da argumentação nas aulas de Matemática para o desenvolvimento de habilidades de provas e de demonstrações, e da utilização do aplicativo GeoGebra como ferramenta de ensino são apresentadas

Após reflexão sobre a revisão bibliográfica realizada, no capítulo 3 apresentamos as três atividades elaboradas e planejadas levando em consideração o que foi aprendido com as leituras do capítulo anterior. Nesse capítulo, além das atividades, o leitor encontrará a concepção do modelo utilizado para elaboração das atividades e propostas para sua aplicação e desenvolvimento.

Adiantamos que as atividades elaboradas versam sobre as seguintes propriedades geométricas:

- Atividade 1: Ângulos entre paralelas cortadas por transversal
- Atividade 2: Teorema de Tales
- Atividade 3: Teorema de Pitágoras

O quarto capítulo trata de demonstrar formalmente as propriedades abordadas no capítulo anterior. A intenção desse capítulo é que ele possa servir de material de apoio para o professor que quiser explorar as demonstrações formais com seus alunos, além de servir de fonte de estudos e aprimoramento.

No capítulo 5, apresentamos uma análise descritiva da aplicação, feita no ensino remoto emergencial (ERE), de uma das atividades em uma turma de 8º ano e finalizamos com as conclusões da trajetória de elaboração dessa dissertação no capítulo 6.

2 AS DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA: CONSIDERAÇÕES SOBRE SEU PAPEL NA MATEMÁTICA E NO ENSINO

Nesse capítulo, apresentamos um breve panorama sobre as demonstrações Matemáticas no contexto da Geometria Euclidiana.

Considerações sobre a importância das demonstrações para a Matemática, os métodos/técnicas de demonstração, o seu papel na Educação básica e o uso de tecnologias como suporte pedagógico para práticas demonstrativas no contexto escolar são retratadas nas seções que se seguem.

2.1 Demonstrações Matemáticas: de experimentos a bases lógicas da Geometria Euclidiana

Podemos dizer que muito do conhecimento geométrico foi obtido por meio de indução de um grande número de observações e experimentos realizados por nossos antepassados. No entanto, à medida que os fatos geométricos se acumularam ficou evidente que muitos deles podiam ser obtidos a partir de outros fatos de raciocínio e por dedução, fazendo de alguns experimentos, algo desnecessário (EVES, 1992).

Foram os gregos que insistiram que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos por raciocínios dedutivos o que levou a uma transformação de uma geometria empírica[3] para uma geométrica “sistemática” ou demonstrativa (EVES, 1992).

Na geometria demonstrativa, provar que algo era verdadeiro era feito por meio da demonstração.

Então, podemos nos perguntar: o que é uma demonstração?

Suponha que você esteja tentando convencer um amigo de certa observação que fez e tem certeza de que ela está correta. Cada uma das afirmações que você fez para convencer seu amigo é um argumento. Porém, cada argumento deve ser convincente, baseado em fatos do nosso cotidiano, propriedades dos objetos ao nosso redor ou até experiências já comprovadas por outros.

---

[3] Na geometria empírica indução, ensaio e erro eram instrumentos de descobertas. Já na geometria demonstrativa os fatos geométricos devem ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínio dedutivo.

Quando o estabelecimento dos argumentos conclusivos parte da observação de inúmeros casos específicos, estamos utilizando da indução. Mas, quando estamos cientes de algumas leis gerais e queremos aplicar esse conhecimento a casos específicos, este processo de convencimento segue o que denominamos de dedução.

Mas afinal, o que é uma demonstração Matemática?

Essa resposta, longe de ser um consenso entre matemáticos e educadores matemáticos, suscitou e ainda suscita vários debates sobre o seu papel na Matemática e no seu ensino. Uma boa fonte de informações sobre concepções de demonstração pode ser encontrada na tese de doutorado de Ferreira (2016), na qual a autora apresenta um panorama de pesquisas internacionais acerca das demonstrações Matemáticas no contexto da Educação Matemática.

Considerando seu significado para a Matemática, uma demonstração pode ser vista como um processo pelo qual, partindo exclusivamente de definições, conceitos primitivos e postulados, comprova-se a veracidade de uma afirmação por meio de uma sequência lógica válida (GARBI, 2010).

Em uma demonstração Matemática, buscamos argumentos para provar alguma proposição com base na experiência, nas observações, nos fatos e nas proposições estabelecidas que já foram comprovadas. Com base em resultados assim obtidos, chega-se a uma conclusão sobre a validade, ou falsidade, da proposição que está sendo provada. É importante destacar que essas experiências, observações e fatos ocorrem internamente no campo da própria Matemática enquanto ciência, e não na evidência física, como ocorre com as ciências empíricas.

Nesse sentido, podemos afirmar que uma demonstração é um tipo de discurso retórico que visa convencer alguém (no caso, os matemáticos) de que uma afirmação Matemática é verdadeira ou válida. Nesse tipo de "discurso retórico" para provar que alguma afirmação nova é verdadeira é necessário relacioná-la com uma afirmação antiga que já foi demonstrada anteriormente.

Mas como essa afirmação foi demonstrada anteriormente?

Ora, a partir da ideia da retórica - foi necessário relacioná-la com outra afirmação anterior a ela. E assim, seguindo nessa sequência repetidamente, chegamos nas verdades primeiras, das quais chamamos de axiomas.

Um axioma (ou postulado) é uma afirmação Matemática que é considerada auto evidente e que não se prova. Um axioma incorpora uma afirmação Matemática tão óbvia e plausível para os matemáticos que nenhuma prova é necessária.

É por isso que em Matemática, antes de se estabelecer propriedades e relações em um determinado campo teórico, estabelecemos as definições e axiomas. A partir dessas, são propostas e demonstradas as ideias que surgem sobre aquele assunto. Em particular, antes de nos esforçarmos para obter resultados, devemos nos engajar em uma certa quantidade de trabalho preparatório.

A prova de uma proposição geométrica, por exemplo, visa estabelecer sua validade por meio de dedução lógica de fatos conhecidos ou estabelecidos como verdadeiros anteriormente.

Observações e experiências podem nos convencer que uma e apenas uma linha reta passa por quaisquer dois pontos. Uma consequência dessa afirmação é o fato que duas linhas retas diferentes podem não ter mais do que um ponto em comum.

Um raciocínio simples nos permite argumentar sobre essa afirmação a fim de comprová-la sem muitas observações e experiências. De fato, quando se assume que duas linhas retas diferentes possuem dois pontos em comum, conclui-se que duas retas diferentes podem passar por dois pontos, e isso contradiz a afirmação já conhecida anteriormente.

No percurso da humanidade, um grande número de propriedades geométricas que refletem o conhecimento fora sendo estabelecidos. Com a evolução da ciência, estudos mais cuidadosos destas propriedades mostraram que algumas delas podiam ser obtidas das anteriores como conclusões lógicas. Isso levou à ideia de que se podia escolher dentre os fatos geométricos um subconjunto com alguns fatos mais simples e gerais que poderiam ser aceitos sem demonstrações. Tais fatos, denominados axiomas (do grego *áksios*: digno, confiável), seriam então usados para deduzir o resto das propriedades geométricas (GARBI, 2010).

Assim, os geômetras da Grécia antiga começaram a sistematizar fatos geométricos conhecidos por eles deduzindo-os de poucas proposições fundamentais. E foi Euclides (c. 323 - 283 a.C.) que fez o mais completo tratado de Geometria do seu tempo, *Os Elementos*, que incluiu um seleto grupo de proposições que foram aceitas sem provas.

Em *Os Elementos,* Euclides parte de três princípios: as definições, os postulados e as noções comuns (axiomas) – herança da lógica de Aristóteles (c. 384 – 322 a.C.). Utilizando-se desses princípios, Euclides coloca em funcionamento a "máquina dedutiva" para, a partir do rigor lógico, "descobrir" as verdades Matemáticas, mediante as demonstrações. É fato que as noções comuns (axiomas) eram baseadas na auto-evidência e na experiência, o que vai de acordo com a concepção aristotélica de que as noções comuns são percebidas por meio da intuição. "Logo, o empreendimento de Euclides é um todo racional, baseado em evidências empíricas" (FERREIRA, 2016, p. 46).

É importante destacar que a obra de Euclides se perpetuou por vários séculos como a metodologia a ser seguida no "fazer" Matemática. Seu grande empreendimento de sistematização do conhecimento matemático em bases lógico-dialéticas em que, partindo de verdades evidentes e, prosseguindo por meio de demonstrações rigorosas (o rigor está associado ao uso das inferências lógicas), chegava-se a um conhecimento certo, objetivo e eterno, parece não ter sido questionado pela comunidade Matemática, que até meados do século XIX, seguia o método axiomático-dedutivo de Euclides como método (FERREIRA, 2016).

2.2 Por que precisamos de uma demonstração?

Física, Química e Biologia, por exemplo, tendem a usar experimentos, muitas vezes controlados e em laboratórios, para verificarem e validarem suas conjecturas. A partir dessas experiências, cientistas destas áreas descrevem o que descobriram e como realizaram seus testes, comparando com resultados previamente obtidos. Todo esse processo é denominado de empírico e a verificação ocorre de maneira prática e direta, sendo os resultados mais importantes divulgados e utilizados por toda comunidade científica.

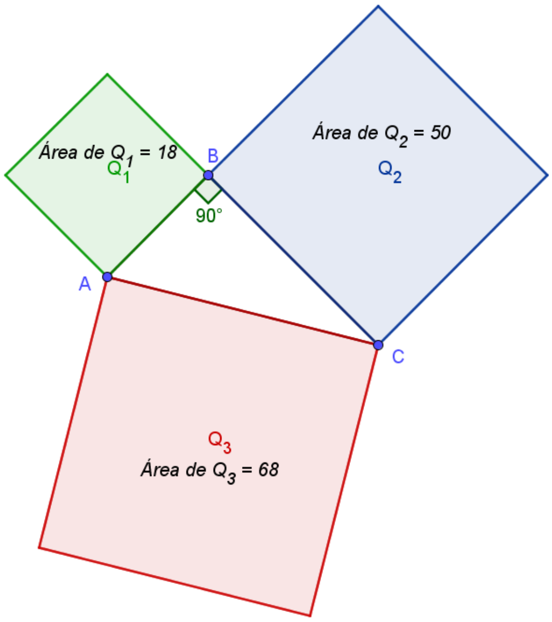
Em Matemática, são as demonstrações que fazem esse papel de validação. Qualquer afirmação que não tenha uma prova Matemática não tem valor (isso é questionável) e, portanto, não será aceita como válida. Uma vez demonstrada a afirmação, ela é válida em qualquer lugar sob suas determinadas hipóteses, não sendo possível contradizê-la (caso os argumentos lógicos estiverem corretos). Sendo assim, outros poderão utilizar dessa afirmação em seus trabalhos sem a necessidade de demonstrá-la novamente.

Na Geometria Euclidiana, as demonstrações alinham os fatos geométricos em um sistema de conhecimento científico que garante as conexões existentes entre um último teorema demonstrado e teoremas comprovados anteriormente aos axiomas considerados como fundamentais no desenvolvimento de toda essa Geometria.

A necessidade de uma demonstração em Geometria Euclidiana está atrelada ao princípio de que determinada proposição possa ser utilizada para estabelecer propriedades especiais de determinados objetos geométricos. Utilizando-se da dedução lógica, ao realizar uma inferência correta e baseada em proposições iniciais corretas, podemos ter certeza de que a proposição que provamos é válida. Dessa forma, por exemplo, temos certeza que o Teorema de Pitágoras (propriedade especial) é válido para qualquer triângulo retângulo (objeto geométrico).

Matemáticos na Idade Média representavam as proposições geométricas com desenhos expressivos, mas não demonstravam tais proposições usando argumentos lógica (BOYER, 2019). Dessa maneira, as figuras tinham um papel importante para a “demonstração” de propriedades e relações que ainda não podiam ser comprovadas por processos lógicos dedutivos. A Figura 2, ilustrada abaixo, servia, naquela época como uma prova para o que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras.

Figura 2 – Esboço do Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Podemos observar a Figura 2, de forma que não ponderemos sobre seu significado geométrico e cheguemos à mesma conclusão de que a soma das áreas dos quadrados Q_1 e Q_2, representam a mesma área do quadrado Q_3.

Com esse exemplo, queremos destacar o papel desempenhado pela figura na demonstração de um teorema geométrico. A Figura 2 é apenas um exemplo, apenas um caso específico de triângulos retângulo. É claro que poderíamos nos perguntar: Seria o teorema válido então para todos os triângulos desse tipo? Nesse sentido, a demonstração formal tem fator determinante para nos convencermos de que, independente do triângulo retângulo, o Teorema de Pitágoras será sempre válido.

2.3 Alguns métodos de demonstração formal

Em geral, existem várias maneiras de se demonstrar um teorema. Vamos dar destaque a dois métodos muito utilizados em Geometria e que podem ser trabalhadas no contexto da Educação Básica. A “demonstração direta” e a “demonstração por absurdo”.

2.3.1 Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais natural para se demonstrar. Como muitos teoremas são apresentados da forma $p \rightarrow q$ [4], a demonstração direta de uma sentença desse tipo consiste em assumir que a hipótese *p* é verdadeira e, por meio de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, chegar à conclusão de que *q* é verdadeira.

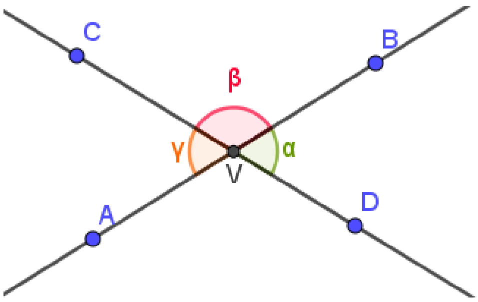
Por exemplo, vamos demonstrar a seguinte Proposição 2.1:

Proposição 2.1: Se dois ângulos são opostos pelo vértice então eles são congruentes.

Nessa proposição, temos, por hipótese (*p*), dois ângulos opostos pelo vértice e, a tese (*q*) de que esses ângulos são congruentes.

Como relatado na seção anterior, as figuras podem desempenhar um papel importante para a observação de elementos e propriedades que acabam por auxiliar a elaboração de uma demonstração formal, dessa forma, vamos esboçar a Figura 3 da proposição dada:

Figura 3 – Ângulos opostos pelo vértice



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Demonstração:

Nessa situação, temos a seguinte implicação lógica:

---

[4] O símbolo → é usado em lógica proposicional para indicar uma implicação. A sentença p → q é lida como "se *p* então *q*". Por exemplo, a sentença "se está chovendo, então a rua está molhada" seria indicada por "está chovendo → a rua está molhada". De acordo com (Craven 2007), o símbolo de seta → para a implicação lógica foi usado pela primeira vez em 1922 por David Hilbert.

$$\underbrace{A\hat{V}C \text{ e } D\hat{V}B \text{ são o.p.v.}}_{Hipótese} \Rightarrow \underbrace{A\hat{V}C \equiv D\hat{V}B}_{Tese}$$

Considerando $A\hat{V}C$ de medida γ , $D\hat{V}B$ de medida α e $B\hat{V}C$ de medida β , temos:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=180^{\circ}\\ \gamma+\beta=180^{\circ}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\gamma \Rightarrow A\hat{V}C \equiv D\hat{V}B$$

c.q.d

Essa sequência de implicações prova nossa proposição 2.1 de uma forma direta, pois ao considerarmos a hipótese verdadeira, chegamos na veracidade da tese.

2.3.2 Demonstração por absurdo

Para demonstrar uma proposição em que $p \to q$, no método por absurdo, assumimos a negação de q (indicado por $\sim q$) [5] e mostramos que isso leva a uma contradição de p , ou seja, de que a hipótese é falsa, gerando um resultado absurdo. Logo, como $\sim q$ implica em um argumento falso, conclui-se que a proposição é verdadeira.

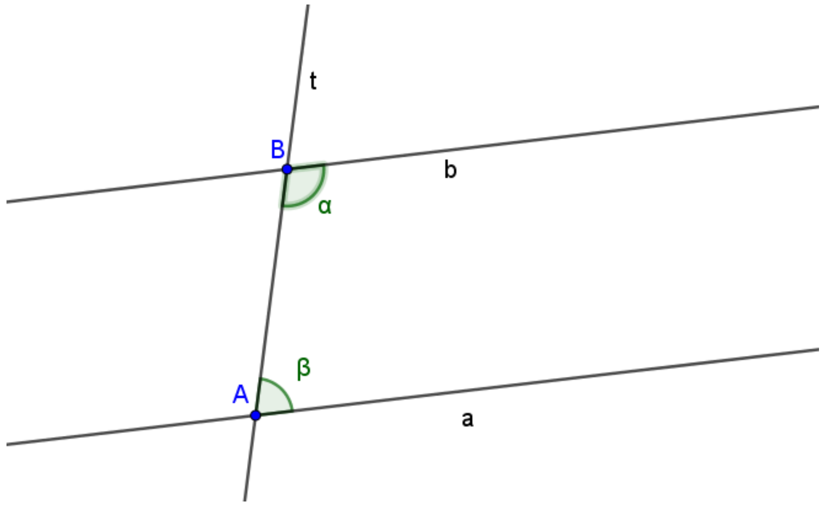
Por exemplo, vamos demonstrar a Proposição 2.2:

Proposição 2.2: Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos colaterais internos suplementares, então essas duas retas são paralelas.

Assim como na demonstração da Proposição 2.1, vamos recorrer ao auxílio de um esboço, conforme a Figura 4 abaixo:

[5] De acordo com Craven(2007) o til para negação foi usado por Peano em 1897 no seu trabalho "*Studii di logica matematica*" e aparece em 1908 no artigo "*Mathematical logic as based on the theory of types*" de Bertrand Russell sendo usado também por esse mesmo autor no primeiro volume de *Principia mathematica.*

Figura 4 - Ângulos colaterais internos



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

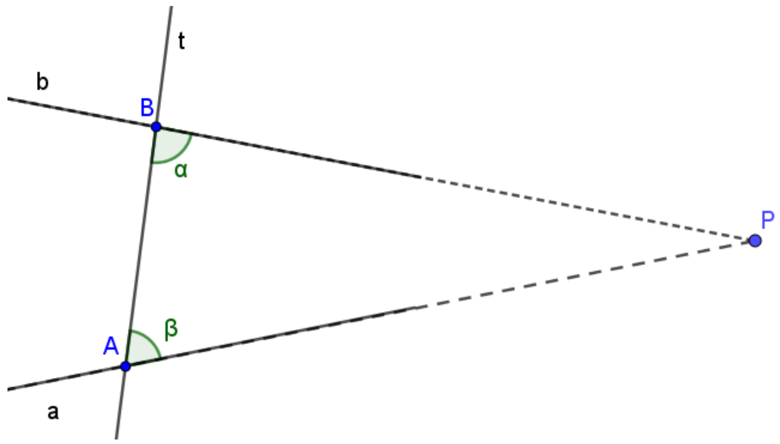
Demonstração:

Temos que, por hipótese (p), são dadas duas retas coplanares distintas, a e b, e uma transversal t formando ângulos colaterais internos suplementares, α e β, e a tese (q) de que as retas a e b são paralelas.

Vamos supor que a tese seja falsa ($\sim q$).

De fato, se a e b não fossem paralelas, existiria um ponto P em comum. Desse modo, teríamos as interseções $a \cap b = \{P\}, a \cap t = \{A\}$ e $b \cap t = \{B\}$ formando o triângulo ABP, conforme a Figura 5 abaixo.

Figura 5 - Retas concorrentes



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Mas sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Isso contradiz a hipótese ($\sim p$) que afirma que os ângulos α e β são suplementares. Absurdo.

Logo, as retas a e b são paralelas.

c.q.d

2.4 Demonstrações no contexto da escola básica

Nas seções anteriores fizemos um relato breve sobre o papel da demonstração para a Matemática, em especial, na Geometria Euclidiana. Como se opera uma demonstração formal, a sua importância no contexto de verificação de proposições Matemáticas/geométricas, além de apresentar duas técnicas comuns de demonstração.

Como nosso trabalho tem foco na educação básica, objetivando disponibilizar atividades que promovam nos alunos a elaboração de argumentos que contribuam para a demonstração de propriedades geométricas, mesmo que de maneira exploratória, nessa seção discutimos, suscintamente, as demonstrações no contexto da escola básica.

2.4.1. Algumas perspectivas

As demonstrações Matemáticas como meio de validar o conhecimento podem e devem ser incorporadas ao ensino de acordo com cada nível de escolaridade. Balacheff (1987) faz uma distinção entre "demonstração" e "prova" em termos de validação. Para o autor, podemos dizer que a Matemática desenvolve o primeiro, enquanto os professores de Matemática lidam apenas com o segundo (BALACHEFF, 1987).

No ensino básico, não se busca em uma prova dar uma explicação explicitamente rigorosa para um fato matemático utilizando uma estrutura organizada com base em inferência de argumentos dedutivos. A prova em uma sala de aula desse nível é baseada em argumentos que têm como principal função convencer os alunos da validade de determinada proposição. Demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo (FOSSA, 2009).

Além disso, o declínio da Geometria Euclidiana escolar muito se deve às dificuldades conceituais, e até mesmo cognitivas, causadas pelas argumentações lógicas que constituem a essência da Geometria Euclidiana. A maioria das dificuldades que se observam nos alunos em sala de aula está relacionada com a maneira de organizarem o seu raciocínio e construírem argumentações lógicas (LINDQUIST; SHULTE, 1994).

A abordagem axiomática da Geometria Euclidiana é uma forma de decifrar as relações entre diferentes fatos e exibir a sua lógica estrutural, porém, numa abordagem construtiva do pensamento geométrico, guiado pela intuição, uma verdadeira fonte da dinâmica Matemática pode trazer elementos que torna o conhecimento geométrico comparável à música e à arte (COURANT; ROBBINS, 2000).

Para isso, julgamos que, em níveis fundamentais de ensino é preciso aceitar que uma prova pode só explicar e convencer, independentemente dos argumentos utilizados. Em ambientes formais de ensino, as provas Matemáticas que ali ocorrem deveriam ser exploradas como um meio para se chegar às demonstrações formais da Matemática (ou quase). Dessa forma, muito da Geometria Euclidiana, área da Matemática na qual as demonstrações são comuns, teria mais sentido para os alunos e contribuiria para o desenvolvimento de um raciocínio que transitaria para a evolução de uma prova em uma demonstração.

Podemos constatar as observações feitas acima, com os resultados encontrados em uma pesquisa realizada por Ferreira (2016) em seu doutoramento. A autora fez um mapeamento sobre a produção internacional em Educação Matemática com o objetivo de compreender o que estava sendo discutido sobre a temática “Provas e Demonstrações Matemáticas”. Dentre as várias compreensões trazidas em seu trabalho, chamamos atenção especial para aqueles que tratam das provas e demonstrações no âmbito da Educação Básica.

Ferreira (2016) constatou, em seu levantamento, que as pesquisas voltadas para esse nível de escolaridade sugerem que é preciso explorar “novas possibilidades para tornar o ensino da prova Matemática significativa e necessária para os alunos” (FERREIRA, 2016, p. 309). É necessário levar em conta, em situações de aprendizagem, que não existem provas melhores do que outras, apenas públicos diferentes, capazes de compreender, em determinados contextos (comunidades), os argumentos apresentados por um expositor (CHATEUBRIAND, 2005).

Ainda, de acordo com Ferreira (2016), seu trabalho indica que há uma necessidade de discutir o ensino das provas Matemáticas desde a Educação Básica, levando em conta as diferentes funções que uma demonstração exerce. “A visão tradicional de que a única função da prova é a verificação de afirmações Matemáticas parece ignorar o real papel da experimentação na Matemática” (FERREIRA, 2016, p. 309). A referência primária a respeito da função “verificação” da prova em contexto escolar, em muitas pesquisas analisadas se apoiam nas ideias de Villiers (2001).

De acordo com Villiers (2001), a demonstração tem as seguintes funcionalidades, as quais podem ser resumidas em:

> (i) verificação (diz respeito à verdade de uma afirmação); (ii) explicação (fornece explicações do porquê certa afirmação ser verdadeira); (iii) sistematização (organiza os resultados/argumentos em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos primários e teoremas); (iv) descoberta (evidencia a descoberta ou invenção de novos resultados); (v) comunicação (transmite o conhecimento produzido); (vi) desafio intelectual (reflete a gratificação pessoal, resultante da construção de uma demonstração) (FERREIRA, 2016, p.310).

Para Ferreira (2016), as pesquisas que trazem alternativas para o ensino das provas na Educação básica afirmam que um trabalho significativo deve levar em consideração as funções descritas acima, não apenas como características da prova Matemática, mas também como funções das provas que emergem em situação de ensino, “promovendo, sempre que possível, uma relação entre essas formas de justificação, e a evolução das ações de verificação empírica para a exigência de uma prova rigorosa” (FERREIRA, 2016, p. 310).

Nesse sentido, o uso de tecnologias pode ser um forte aliado para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que levem em consideração novas formas de justificação de proposições, estreitando argumentos elaborados em contextos de ensino com a demonstração Matemática.

2.4.2 O computador como ferramenta de apoio

Ferreira (2016) destaca que uma abordagem mais experimental para o ensino das demonstrações acaba por colocar em evidência as funções descritas por Villiers (2001), sejam na elaboração de conjecturas, na verificação ou refutação de argumentos, na busca de alternativas para entender determinadas percepções e, até mesmo, na tentativa de comunicar as ações e os resultados empreendidos em uma atividade exploratória de prova.

Nesse sentido, julgamos que os aplicativos de Geometria Dinâmica são excelentes suportes na medida em que permitem explorar novas formas de interação com objetos matemáticos com a possibilidade para fazer generalizações a partir de casos específicos.

As experimentações em aplicativos de Geometria Dinâmica assumem uma posição comprobatória para aqueles que lidam com elas, levando à transformação de uma conjectura em prova e permitindo essa comprovação sem a necessidade de produzir justificativas com deduções, como nas chamadas demonstrações. Porém, um trabalho em sala de aula não deve ignorar a demonstração formal de uma constatação feita por meio do recurso tecnológico. Nesse momento, é importante que o aluno compreenda a necessidade de formalizar os seus resultados, por meio de uma demonstração mais rigorosa.

Nesse contexto do uso de aplicativos, as pesquisas mapeadas por Ferreira (2016) que focam em práticas de ensino com o uso de Softwares de Geometria Dinâmica (SGD) destacam as possibilidades exploratórias que o uso desse recurso permite aos estudantes. Um dos pontos destacados pela autora remete à contribuição dos SGD para que os alunos evoluam do nível empírico para o dedutivo, "já que as argumentações elaboradas nesses ambientes dinâmicos aos poucos vão se revelando, insuficientes, dada a quantidade de situações possíveis de serem exploradas, culminando assim, na necessidade de uma prova dedutiva para explicar as argumentações elaboradas " (FERREIRA, 2016, p. 312).

Nos chamou atenção o fato de que, dentre as pesquisas levantadas por Ferreira (2016), poucas se reportaram ao uso de SGD, mesmo sendo reconhecido o potencial do uso desses recursos no ensino de Matemática. Dentre esses trabalhos, destaca-se que a utilização desses recursos pode ser um mediador na transição entre a argumentação e a prova dedutiva, principalmente, pela utilização da função "arrastar".

Notamos, nos trabalhos, que a função "arrastar" é concebida numa perspectiva que abre novas "rotas" para o conhecimento teórico, por meio de um ambiente concreto com muito significado para os estudantes.

> A função "arrastar", aparentemente, permite a introdução "infinita" de exemplos e contraexemplos para apoiar ou refutar uma conjectura. Ademais, os estudantes, arrastando, costumam "passar" de figuras para conceitos, bem como de processos indutivos para dedutivos. As possibilidades exploratórias permitidas pela função "arrastar" podem ser vistas como uma contrapartida perceptível para relações lógicas e algébricas, uma vez que, ao "arrastar", os alunos estabelecem associações entre os objetos geométricos em níveis perceptível, lógico e algébrico (FERREIRA, 2016, p. 313).

Diante o exposto, não há que questionar o papel das demonstrações para a Matemática e para o seu ensino. Contudo, a prática do "fazer" Matemática (enquanto ciência) não pode ser assumida como um único caminho para o "fazer" Matemática em contexto escolar.

Sendo as demonstrações Matemáticas o caminho para se chegar a "verdade" em Matemática, há que se assumir, quando pensamos em ensino, que é possível chegar nas "verdades" por caminhos distintos. As experimentações podem permitir a elaboração de conjecturas, a comprovação ou refutação das mesmas, além de contribuir no desenvolvimento de formas de comunicar os argumentos elaborados. Cabe o professor encontrar estratégias para promover uma transição desses argumentos elaborados em sala de aula (provas) para as demonstrações Matemática.

3 ATIVIDADES

Nesse capítulo apresentamos as atividades de ensino elaboradas com a intenção de levar o aluno a trilhar um processo de experimentação que culmine na elaboração de argumentos lógico – matemáticos, estreitando a relação dos argumentos discentes produzidos em contexto escolar com a demonstração Matemática.

Infelizmente, nossa prática mostra que nem sempre é tão fácil para os alunos perceberem padrões matemáticos simples em situações geométricas, tais como uma constatação Matemática pronta e acabada, com algumas “mostrações” confusas e sem muita possibilidade de experimentação, principalmente a visual. Por isso, nessas atividades procuramos levar o estudante a fazer experimentações em que possa observar relações/propriedades visualmente, permitindo a elaboração de raciocínios dificilmente suscitados com uma proposta mais tradicional de ensino.

Não é nossa intenção levar o aluno a demonstrar rigorosamente teoremas e propriedades, mas sim, levá-lo a vivenciar experiências Matemáticas e perceber que determinadas relações são válidas.

As demonstrações formais das atividades propostas nesse capítulo são apresentadas no capítulo 4 constituindo-se de um material de apoio e aprofundamento ao professor.

Na seção seguinte apresentamos algumas das nossas convicções que nortearam a elaboração das atividades, bem como um “esquema” generalizado dos processos envolvidos para o desenvolvimento das atividades.

Destacamos que os conteúdos abordados nas atividades são assuntos normalmente trabalhados no 8º e 9º anos do ensino fundamental e contemplados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento oficial que norteia os currículos e programas das escolas de educação básica do país.

3.1 O que pensamos sobre as atividades

As atividades que compõem esta pesquisa foram criadas com a finalidade de propor situações motivadoras em relação à aprendizagem de novos conteúdos por meio de explorações Matemáticas. Por isso, antes da realização dessas atividades é importante verificar alguns conhecimentos prévios dos alunos em relação aos novos conteúdos que serão trabalhados para que os estudantes tenham condições de atuarem como sujeitos ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Como dinâmica para o desenvolvimento das atividades em sala de aula, sugerimos que os alunos sejam agrupados em duplas, caso seja possível e viável de acordo com as particularidades de cada turma, para que durante a realização de cada atividade os alunos possam argumentar, conjecturar, elaborar estratégias e discutir sobre os caminhos e resultados encontrados para resolução das atividades e, ainda, sanar as dificuldades que por ventura possam ocorrer na interpretação dos enunciados, entre outras. Tal tipo de agrupamento é defendido por Coll (1997) quando afirma que se deve dar ênfase às relações que se estabelecem entre aluno-aluno. O mesmo autor defende a utilização de alunos em pares se referindo a pesquisas que mostraram que as relações entre alunos incidem de formas decisivas sobre aspectos como a socialização, a aquisição de competências, o aumento do nível de desempenho e o rendimento escolar.

É importante orientar os alunos que eles devem ler as instruções e segui-las antes de pedir ajuda a alguém. Permitir que os alunos façam perguntas ao professor ou a qualquer outra pessoa sobre as instruções, antes de tentar compreende-las, pode comprometer o trabalho de experimentação. Por isso, é necessário que, antes de tirar dúvidas sobre os passos das atividades, tente-se garantir que os alunos fizeram a leitura em uma tentativa de compreender o que se solicita.

Caso as dúvidas apareçam, uma estratégia utilizada pode ser a chamada "três antes"[6], que leva o aluno a pedir ajuda a três colegas de sala sobre um problema antes de perguntar ao professor. Isso contribui para a mudança de papel do professor tornando-o um mediador da aprendizagem. Essa postura de professor-mediador ao mesmo tempo em que motiva, estimula e ajuda os alunos a percorrerem a atividade de forma mais autônoma, oferecendo uma orientação gerencial que os levam a interpretar as informações, relacioná-las e contextualizá-las.

Outra postura do professor em relação as dúvidas dos alunos sobre as atividades, é tentar respondê-los com outros questionamentos, inclusive pedindo que eles leiam as instruções, mais uma vez, agora em voz alta. Nesse momento, o foco é leva-los a encontrar respostas para suas próprias perguntas através das possibilidades argumentativas/experimentais oferecidas.

---

[6] A estratégia "três antes" é utilizada frequentemente pelo autor da dissertação como forma de aumentar a colaboração entre os alunos tanto em aulas no laboratório de informática como na sala de aula usual.

Como as atividades tem por finalidade explorar situações Matemáticas para estabelecimento de relações/propriedades, utilizamos bastante do recurso visual. Dessa forma, para viabilizar a visualização e a experimentação, optamos em elaborar duas das atividades com o auxílio do aplicativo GeoGebra.

Contudo, o Censo Escolar (2017) mostra que apenas 46,8% das escolas de ensino fundamental dispõem de laboratório de informática. Por esse motivo, apresentamos também uma alternativa às atividades sem a necessidade de recursos computacionais.

Ao final de cada atividade, é importante que os questionamentos dos alunos, as dificuldades e entraves percebidos e quaisquer episódios relevantes decorridos durante o desenvolvimento das atividades sejam trabalhados pelo professor durante um momento de socialização no encerramento de cada atividade. Essa é uma postura importante quando pensamos em desenvolver atividades que contemplem práticas Matemática experimentais e/ou investigativa.

3.2 A importância do GeoGebra nas atividades

Dado as potencialidades do GeoGebra em situações de ensino e de melhorias significativas no envolvimento e entendimento dos alunos, utilizamos esse *software* em duas atividades propostas. Acreditamos que a utilização desse aplicativo impulsiona os alunos para que investiguem, explorem, questionem e descubram propriedades Matemáticas. Além disso, a utilização de recursos computacionais, tais como o GeoGebra, tem se mostrado eficiente em melhorar o ambiente de aprendizado em uma sala de aula de Matemática na medida em que promovem a investigação e o entendimento conceitual nos alunos quando usados com uma abordagem bem administrada e centrada no discente. Ponte afirma que:

> As TIC poderão ajudar na aprendizagem de muitos conteúdos, recorrendo a técnicas sofisticadas de simulação e de modelação cognitiva baseadas na inteligência artificial. No entanto, não me parece que será desse modo que elas vão marcar de forma mais forte as instituições educativas, mas sim pelas possibilidades acrescidas que trazem de criação de espaços de interação e comunicação, pelas possibilidades alternativas que fornecem de expressão criativa, de realização de projetos e de reflexão crítica. (PONTE, 2000, p. 75)

Nesse contexto, a relação professor-aluno toma uma dimensão diferente daquela que ocorre normalmente na sala de aula, pois o professor e aluno cooperam no desenvolvimento e na construção de novos conhecimentos. Canavarro (1994) classifica a utilização dos computadores por professores de Matemática como elementos de motivação, modernização, facilitação e mudança.

Devemos salientar que durante o desenvolvimento das atividades, o professor deverá considerar vários fatores dentre os quais destacamos o envolvimento e engajamento dos alunos. Isto porque, os alunos podem não estar familiarizados com atividade de experimentação e, assim, tenderem a desistir da tarefa na primeira dificuldade que encontrarem. Por isso, uma boa organização e planejamento por parte do professor são fundamentais, além de tenacidade para trabalhar com dificuldades que normalmente não ocorrem num contexto de ensino mais tradicional.

Destacamos, ainda, que as vantagens da utilização do GeoGebra como recurso didático não reduzem a importância do professor de Matemática. A introdução da tecnologia em si não resolve o "desengajamento" de alguns alunos. A utilização desse recurso pode ser vista como uma estratégia que busque promover o engajamento dos alunos na(s) atividade(s) e proporcione uma maior aproximação entre as partes envolvidas ao apresentar novas metodologias e estimulando a criatividade e a autonomia do estudante.

Uma dessas, especificamente com o uso do GeoGebra, é tentar propiciar alguma experiência, anterior as atividades, em manipular as construções permitidas com o uso do *software*. Devemos considerar aqui uma atividade inicial como "hora de brincar" em que os alunos possam explorar ferramentas básicas do aplicativo. Como exemplo, depois de ensinar aos alunos como criar linhas, segmentos, perpendiculares, círculos e arcos, pode-se pedir que eles criem figuras à vontade e explorem algumas propriedades e relações.

Por ser um software já bem conhecido pela comunidade de educadores matemáticos e matemáticos, tanto nacional como internacionalmente, acreditamos que professores de Matemática precisam ter algum conhecimento dessa ferramenta. Um bom manual para iniciantes pode ser encontrado na *wiki*[7] do aplicativo, auxiliando o trabalho do professor.

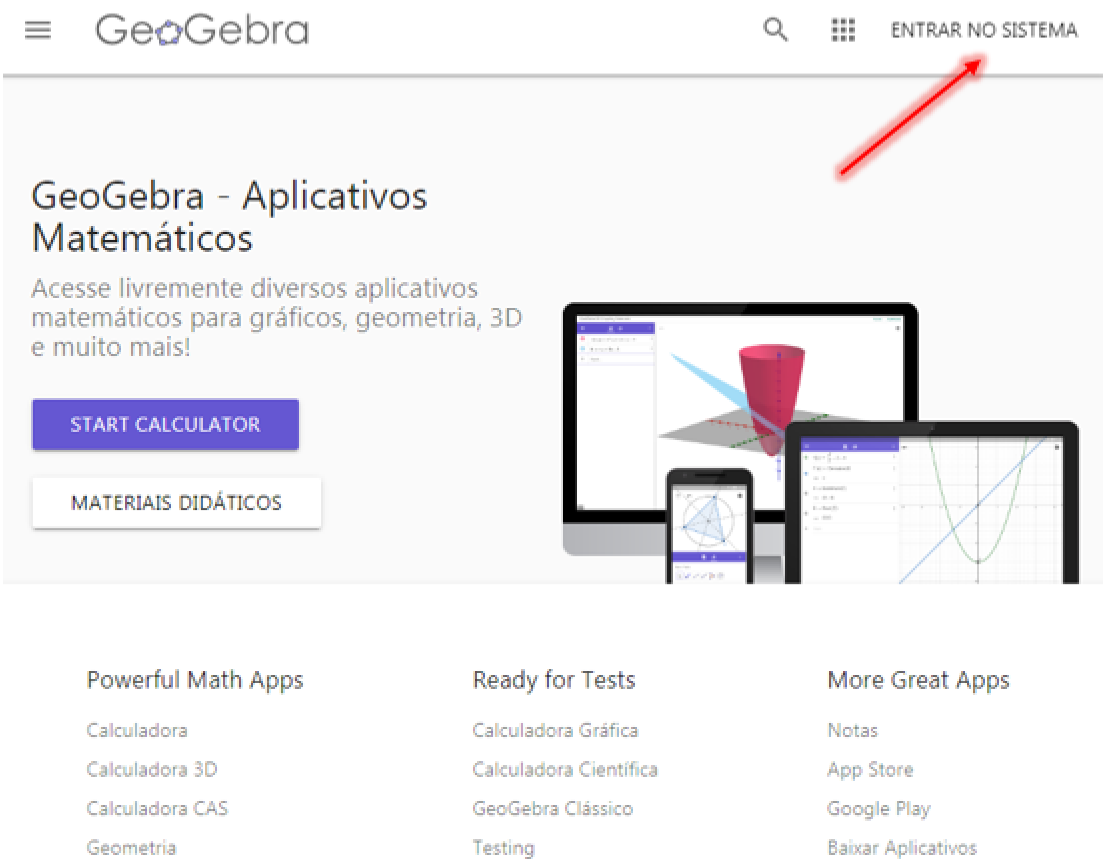
Além disso, o GeoGebra apresenta uma funcionalidade muito útil para promover a interatividade e as investigações: a criação de *applets* e um espaço virtual para a disponibilização gratuita de tal recurso. A partir de um *applet* disponibilizado é possível revisar todo o arquivo da construção que o desenvolvedor tenha disponibilizado, inclusive, promovendo modificações e gerando novos *applets*.

---

[7] Em uma plataforma *wiki* os utilizadores modificam colaborativamente conteúdo sobre determinado assunto. A página mais conhecida desse tipo é a Wikipedia. Porém, o GeoGebra mantém sua própria *wiki* com o manual e tutoriais, entre outros, que pode ser acessada em https://wiki.geogebra.org/.

Para isso, o interessado deve criar a sua conta no GeoGebra *Tube* acessando o site https://www.geogebra.org/ e clicando na opção "entrar no sistema". A Figura 6 mostra a tela para qual somos direcionados ao entrar no site.

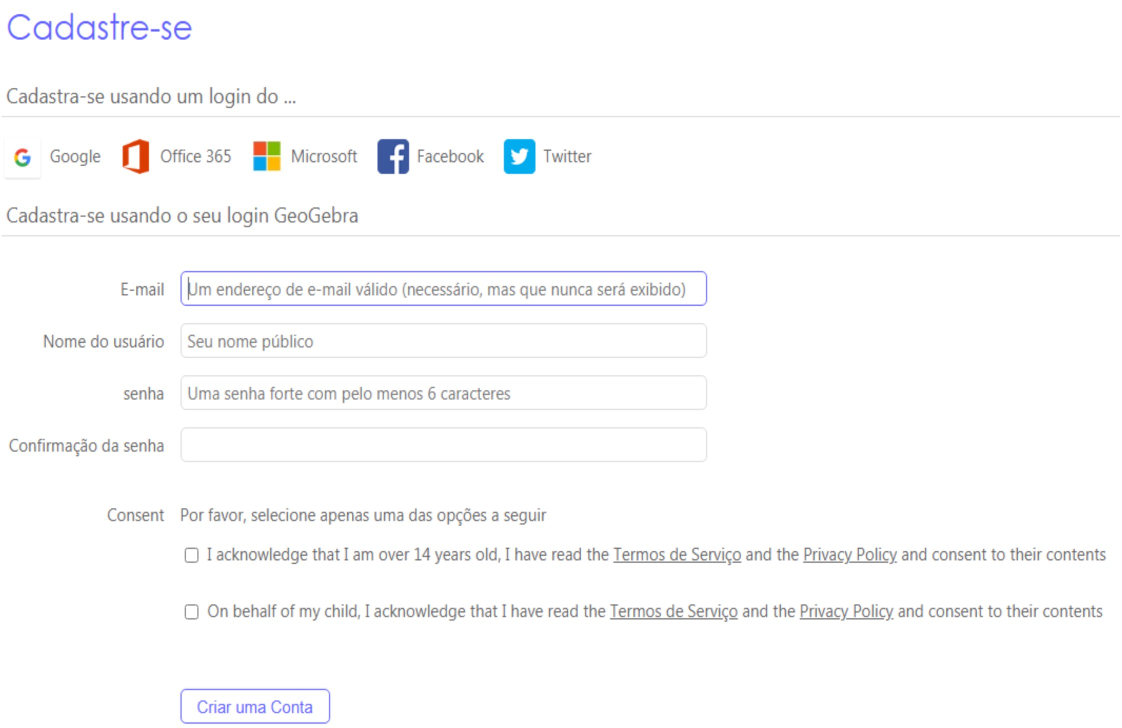
Figura 6 - Entrar no GeoGebra Tube



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Para os usuários que ainda não possuem um cadastro, será necessário realizar antes de seu primeiro acesso ou utilizar uma conta do *Google* ou da *Microsoft*. Na Figura 7, temos a tela para a realização do cadastro.

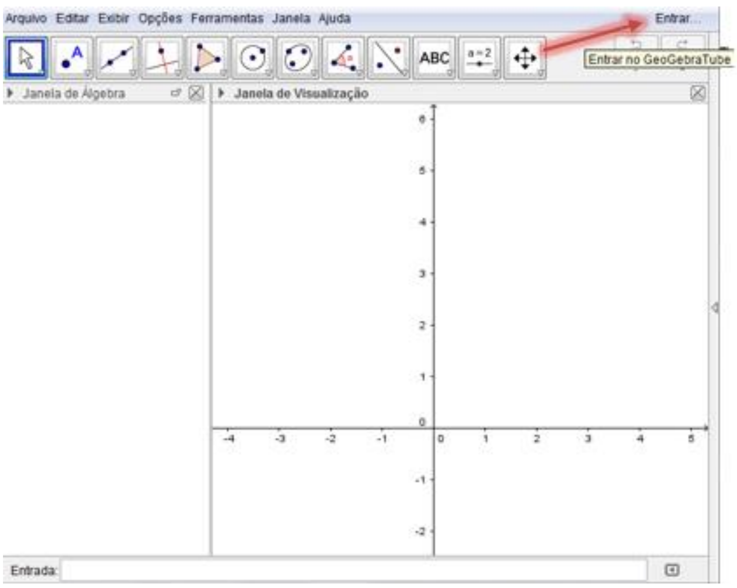
Figura 7 - Cadastro no GeoGebra Tube



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

A Figura 8 destaca o link pelo qual também é possível acessar sua conta no GeoGebra Tube pela barra de comandos dentro do próprio aplicativo GeoGebra.

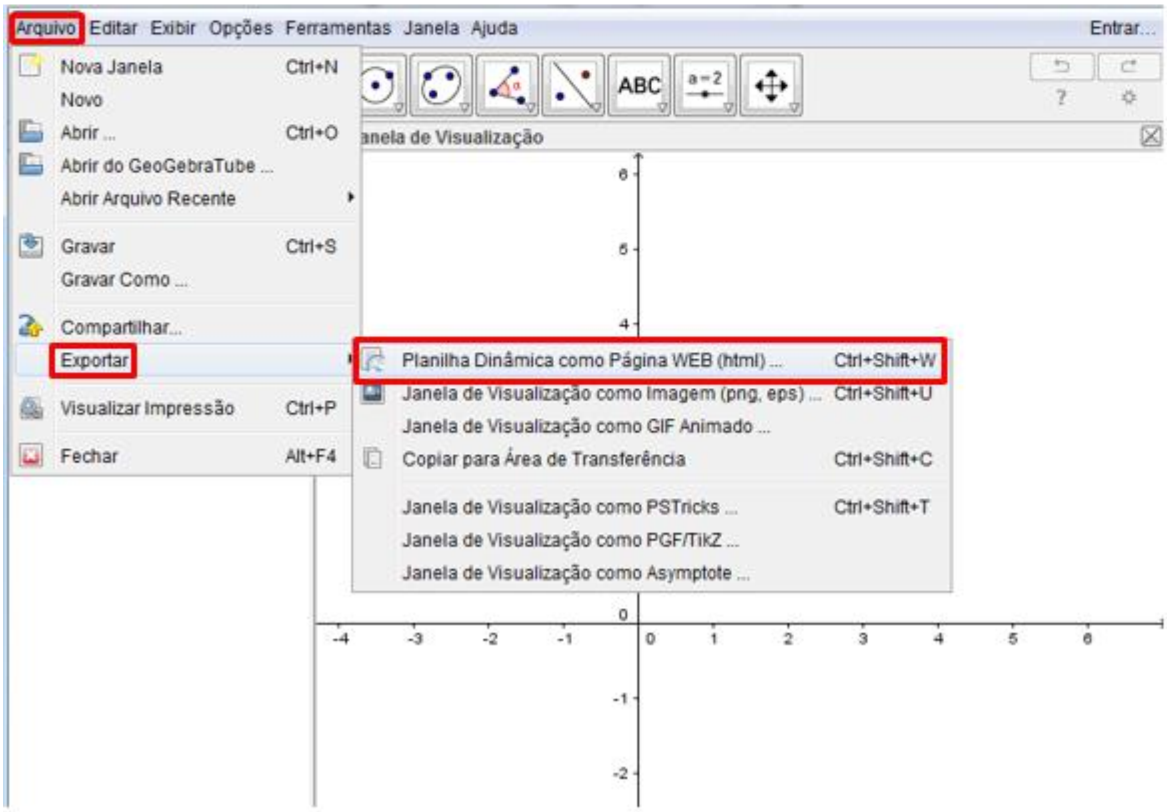
Figura 8 - Acesso ao GeoGebra Tube via aplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O processo de criação de um *applet* é simples, bastando escolher a opção salvar. Isso permite que os professores com conhecimentos básicos de informática possam construir seus próprios *applets* exportando as construções do GeoGebra para sua conta no GeoGebra Tube. No menu principal, clique em “Arquivo”. A seguir, pause o mouse em “Exportar” e clique na opção “Planilha Dinâmica como Página WEB (html) ...”. A Figura 9 mostra esse passo.

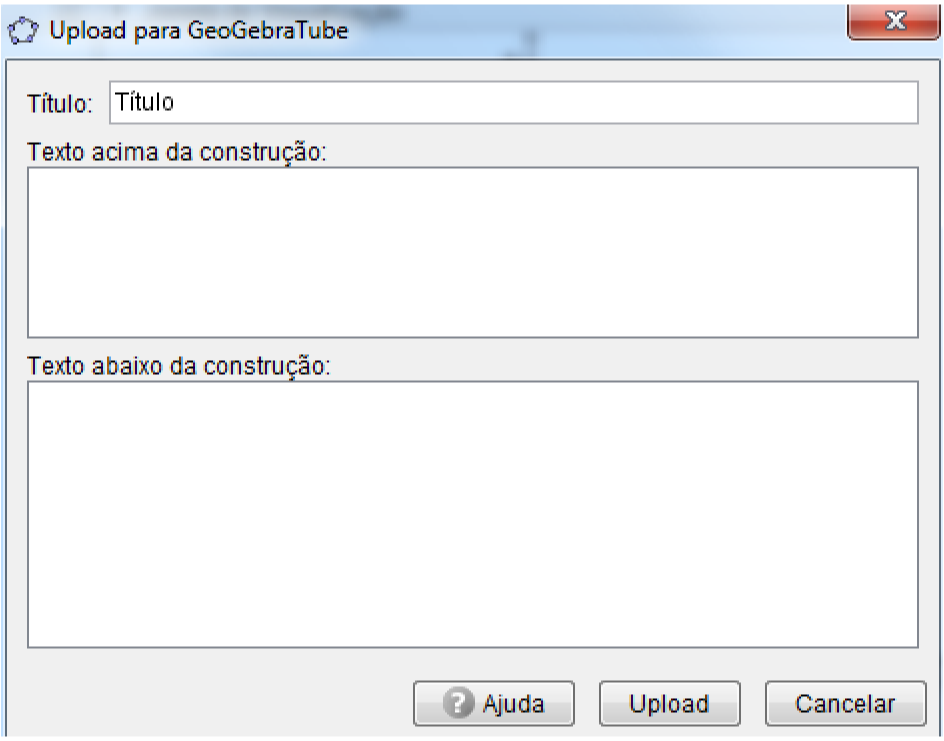
Figura 9 - Exportar arquivo do GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Na janela que aparece (Figura 10), o usuário deve preencher as descrições para seu *applet*: no campo “Título”, escreve-se o nome do *applet* e nos campos “texto acima da construção” e “texto abaixo da construção” pode-se apresentar orientações de uso do *applet*.

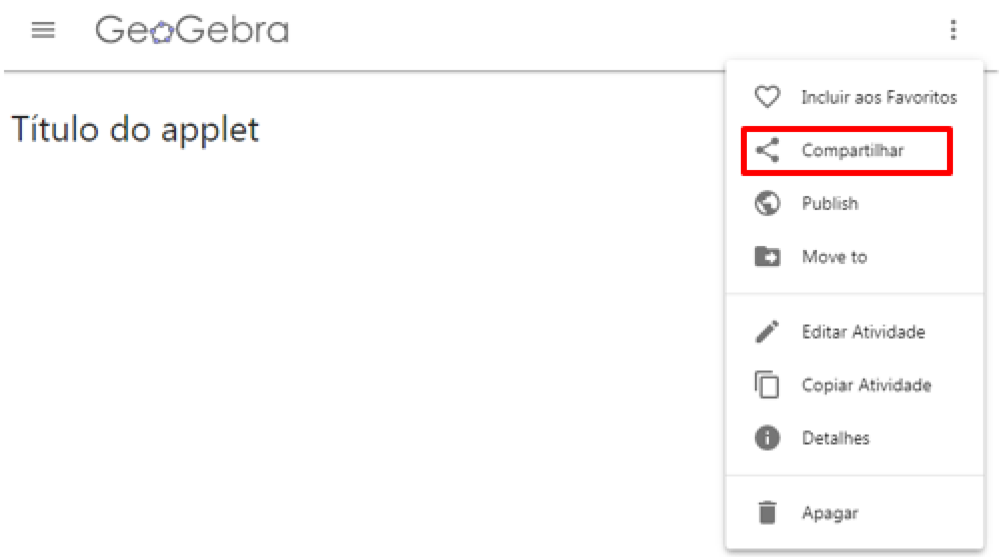
Figura 10 - Descrição do *applet*



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Na janela criada é possível escolher a opção de compartilhar para deixar o *applet* disponível para outros usuários. Conforme apresentado na Figura 11.

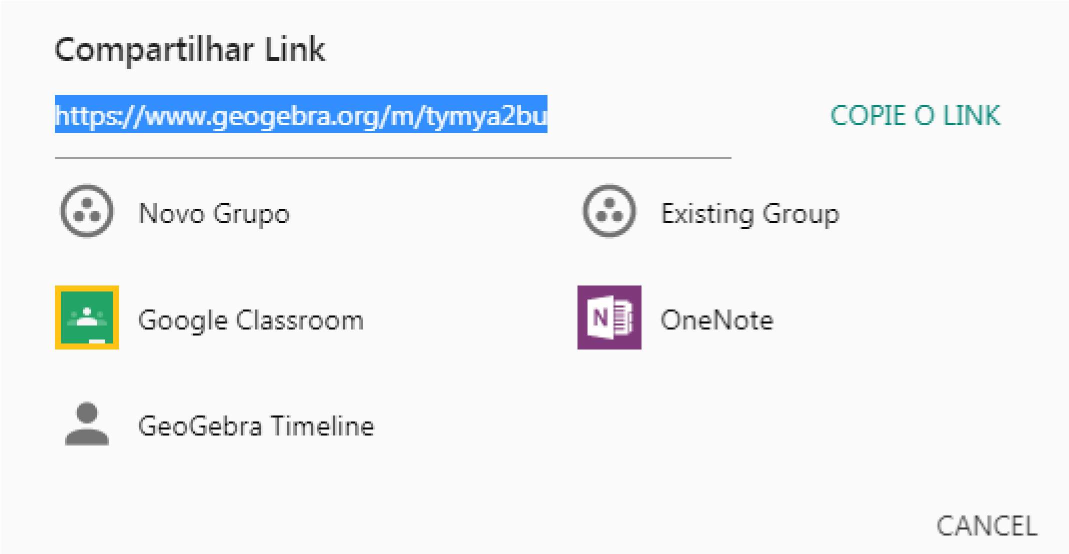
Figura 11 - Compartilhar no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Feito isso, o usuário poderá escolher a melhor maneira para compartilhar sua construção no GeoGebra. Veja a Figura 12.

Figura 12 - Compartilhar link



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Destacamos na Figura 12 o link criado pelo próprio ambiente e que será utilizado como forma de compartilhar as atividades propostas a seguir. Utilizamos em nossas atividades essa funcionalidade do GeoGebra visto que, no *applet*, é possível realizar ações diversas, mas, ao fechá-lo, esse retornará ao seu estado original, ou seja, não é possível salvar modificações no próprio *applet*. Dessa forma, cada aluno, ao acessar o link, terá disponível sempre o estado inicial da atividade proposta pelo professor.

3.3 Atividades

3.3.1 Atividade 1: Um corte nas paralelas

Nessa atividade vamos explorar as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Os padrões que são determinados quando as linhas paralelas são cortadas por uma transversal são simples de serem reconhecidos e uma exploração visual nos leva a entender por que os ângulos formados nessa construção são congruentes ou complementares. Assim, ensinar aos alunos sobre transversais oferece uma grande oportunidade de reforçar com eles a prática de sempre procurar padrões em Matemática.

A atividade foi planejada utilizando-se de um roteiro didático com instruções para realização das tarefas propostas. Sua elaboração contou com o auxílio do software GeoGebra e as perguntas contidas no roteiro, buscam levar os alunos a utilizar argumentos, mesmo que informais, para estabelecer relações/padrões sobre os ângulos criados quando as linhas paralelas são cortadas por uma transversal.

No desenvolvimento da atividade o aluno deverá descrever a relação entre ângulos em linhas paralelas cortadas por uma transversal.

Essa atividade contempla a habilidade EF07MA23 da BNCC: Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.

Após esta atividade, espera-se que os alunos sejam capazes de:

- Identificar ângulos congruentes quando uma linha cruza linhas paralelas;
- Definir linhas transversais, paralelas e ângulos congruentes;
- Demonstrar um entendimento das regras geométricas que se aplicam às transversais.

3.3.1.1 Roteiro da atividade

UM CORTE NAS PARALELAS

PRÉ-REQUISITOS:

Notações:

- $\overleftrightarrow{AB}$: reta que passa por A e B.
- $ABC = ABC = \angle ABC$: ângulo com vértice em B e lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

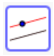
Definições:

- Ângulos congruentes: ângulos que possuem a mesma medida.
- Ângulos opostos pelo vértice: ângulos não adjacentes formados pelo encontro de duas retas concorrentes.
- Ângulos suplementares: dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é igual a 180º.
- Retas paralelas: retas que não possuem um ponto de intersecção.
- Reta transversal: reta que possui um único ponto em comum com outra(s).

Siga cuidadosamente os passos de construção no GeoGebra e responda, de forma detalhada, às questões propostas.

Construções e questionamentos

1. Use o comando  para construir uma reta $\overleftrightarrow{AB}$.

2. Sob o menu , selecione o comando de retas paralelas  e construa uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Para fazer essa construção clique em um ponto qualquer fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e, depois, clique sobre a reta[8]. A Figura I mostra como deverá ficar sua construção.

---

[8] O GeoGebra já apresenta o comando para construção de paralelas. Porém, o aplicador pode substituir esse segundo passo por uma instrução para o aluno construir retas paralelas utilizando estratégias usadas quando se possui apenas régua e compasso.

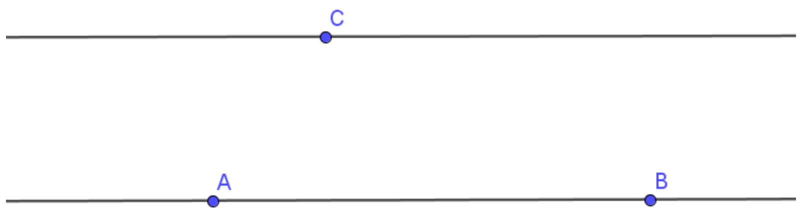


Figura I

3. Novamente, use o comando  para construir uma terceira reta $\overleftrightarrow{AC}$ passando pelos pontos A e C já existentes.

4. Selecione a opção  para arrastar o ponto C até que sua construção fique parecida com a Figura II.

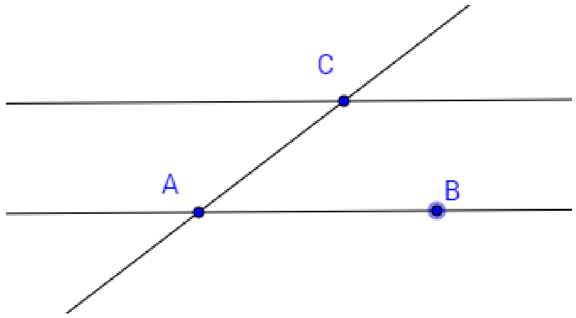


Figura II

5. Com o comando  marque os pontos D, E, F, G e H conforme mostrado na Figura III.

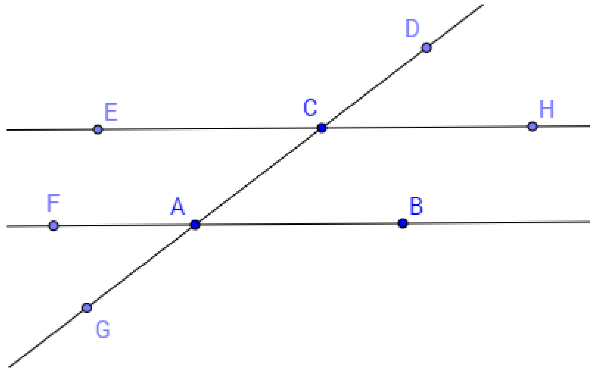


Figura III

DICA: *Se sua construção ficar muito embaralhada, você pode mover os objetos no seu desenho utilizando o comando*  *: selecione o objeto que deseja mover e arraste-o para um lugar diferente.*

6. A reta trasversal $\overleftrightarrow{AC}$ criada no passo 3, determina com cada uma das paralelas , quatro ângulos distintos com vértices nas interseções: o ponto A e o ponto C. Por exemplo, BÂG é um desses ângulos.

Nomeie os outros ângulos.

RESPOSTA:

7. Utilize o comando  para criar e medir os oito ângulos criados na sua construção. Para isso, após clicar no comando , selecione três pontos do ângulo: o vértice e um ponto em cada semirreta. Os ângulos serão destacados como na Figura IV e as medidas dos ângulos serão mostradas no lugar do símbolo "**?**" da mesma Figura.

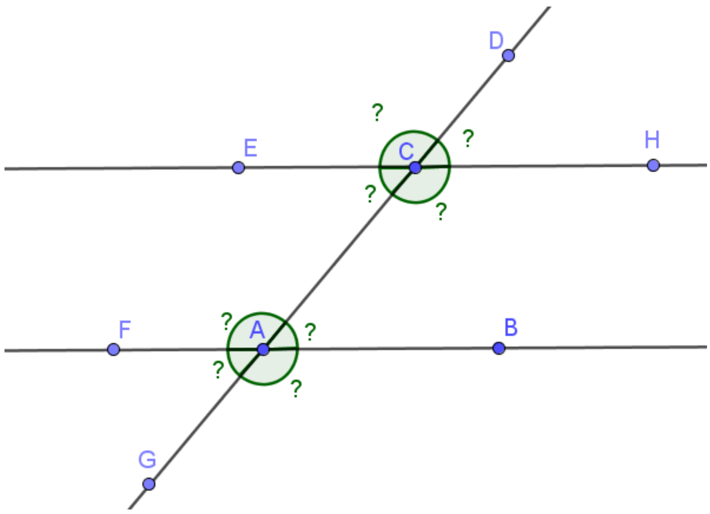
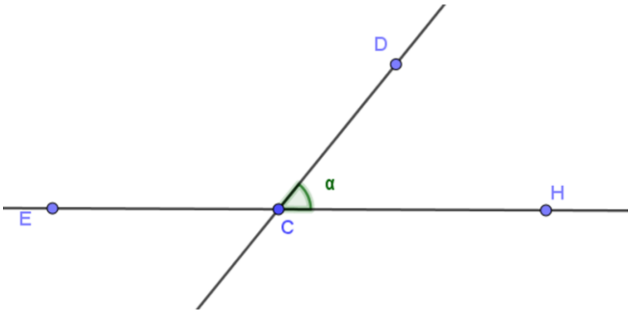


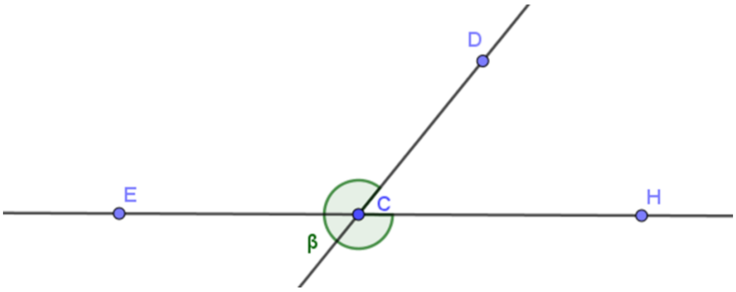
Figura IV

Observação: No GeoGebra, os ângulos são criados usando a orientação anti-horária. Portanto, a ordem em que os pontos são selecionados é importante!

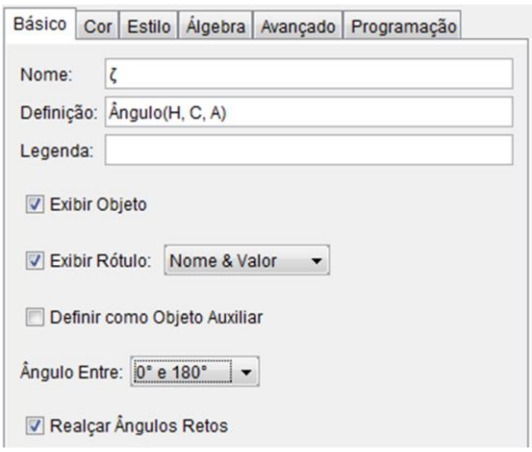
Por exemplo, se clicarmos nos pontos H, C e D nessa ordem, medimos o menor dos ângulos HCD.



Porém, se clicarmos nos pontos D, C e H nessa ordem, marcamos o suplementar do ângulo anteriormente citado.



Caso você queira limitar a amplitude de um ângulo para o valor máximo de 180°, pode-se clicar com o botão direito e, na opção ***"Propriedades"*** alterar a opção "***Ângulo Entre:"*** para "***0º e 180º"***



O que você pode perceber sobre as medidas dos ângulos marcados?

RESPOSTA:

8. Use o comando  para mover as retas criadas clicando e arrastando os pontos A, B e C.

As medidas dos ângulos mudaram?

RESPOSTA:

Existem ângulos congruentes?

RESPOSTA:

9. Cada ângulo destacado terá uma cor diferente, conforme mostra a Figura VI. Clique com o botão direito sobre cada ângulo e, no menu “Propriedades” altere, na aba “Cor”, a cor de cada ângulo deixando ângulos congruentes com as mesmas cores.

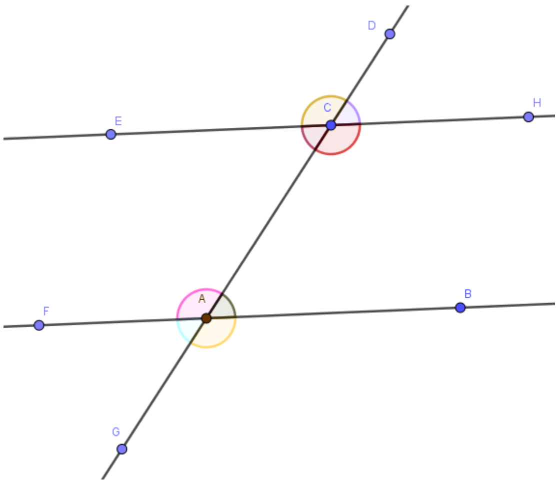


Figura VI

Quantas cores diferentes foram necessárias?

RESPOSTA:

10. Use o comando  para mover as retas criadas.

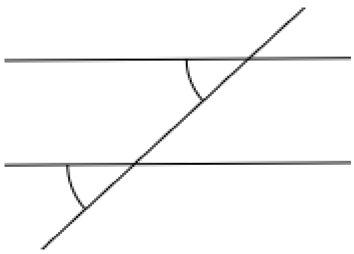
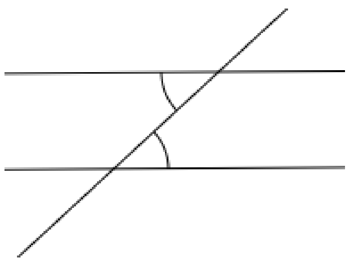
Os ângulos congruentes deixaram de ser congruentes?

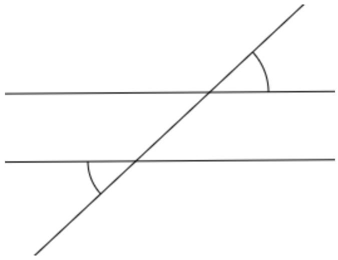
RESPOSTA:

Formalizando o que foi observado

Os diferentes pares de ângulos congruentes formados pelas duas paralelas e a reta transversal possuem nomes especiais.

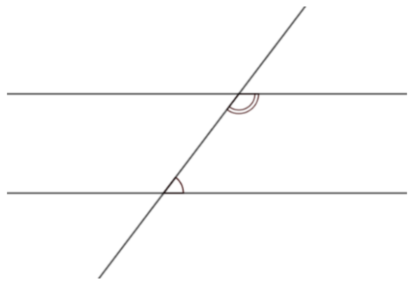
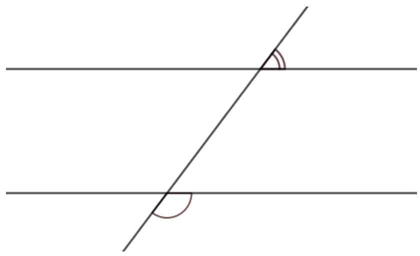
Para cada nome especial dado, escreva, utilizando a linguagem Matemática apropriada, o nome de um par de ângulos congruentes da sua construção que se encaixa na mesma descrição.

Nome	Figura	Exemplo
CORRESPONDENTES *Estão localizados de um mesmo lado da transversal, e em uma mesma posição em relação às retas paralelas.*		
ALTERNOS INTERNOS *Estão localizados em lados opostos da transversal, na região entre as duas paralelas.*		

ALTERNOS EXTERNOS *Estão localizados em lados opostos da transversal, na região exterior às duas paralelas.*		

Além desses ângulos congruentes, podemos destacar outros pares de ângulos que possuem um relação especial entre eles.

Observe a nomenclatura desses ângulos e para cada nome especial dado, escreva, utilizando a linguagem Matemática apropriada, o nome de um par de ângulos congruentes da sua construção que se encaixa na mesma descrição

Nome	Figura	Exemplo
COLATERAIS INTERNOS *Estão localizados de um mesmo lado da transversal, na região entre as duas paralelas.*		
COLATERAIS EXTERNOS *Estão localizados de um mesmo lado da transversal, na região exterior às duas paralelas.*		

Observe agora as **<u>medidas</u>** dos pares de ângulos colaterais, internos e externos, na sua construção.

Qual a relação entre esses ângulos?

RESPOSTA:

Utilizando o botão  para mover sua construção, a relação que você citou acima, se modificou?

Justifique, matematicamente, esse fato.

RESPOSTA:

3.3.1.2 Uma proposta sem o GeoGebra

Como alternativa à falta de acesso ao *GeoGebra* apresentamos a seguinte atividade que pode ser utilizada na discussão dos resultados obtidos com a atividade em que se utilizou essa ferramenta computacional.

Observe a Figura I abaixo em que as retas m e n são paralelas.

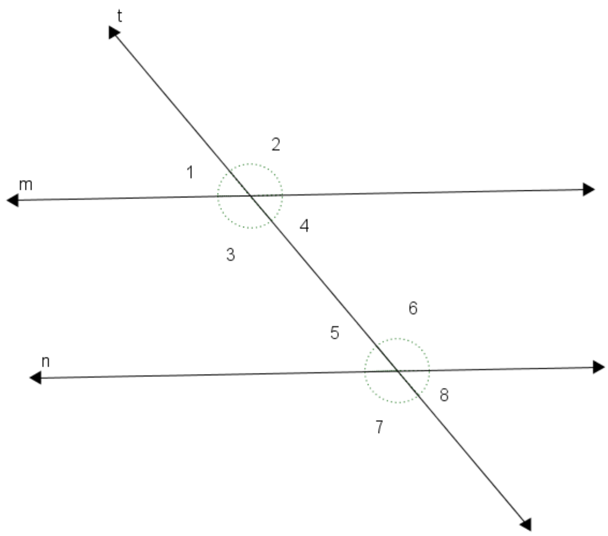


Figura I

Utilize o transferidor e faça o que se pede:

1. Focalizando os ângulos localizados entre as retas paralelas m e n, encontre o ângulo congruente com o ângulo 3. Em seguida, pinte ambos os ângulos da mesma cor.

2. Focalizando os ângulos localizados entre as retas paralelas m e n, encontre o ângulo congruente com o ângulo 4. Use um lápis de cor diferente do usado na pergunta 1 e pinte os dois ângulos da mesma cor.

3. Os pares de ângulos congruentes encontrados nos passos 1 e 2 têm um nome especial.

Como você nomearia esses ângulos?

RESPOSTA:

4. Focalizando os ângulos localizados na parte externa das retas paralelas m e n, encontre o ângulo congruente com o ângulo 1. Em seguida, pinte ambos os ângulos da mesma cor.

5. Focalizando os ângulos localizados na parte externa das retas paralelas m e n, encontre o ângulo congruente com o ângulo 2. Use um lápis de cor diferente e pinte os dois ângulos da mesma cor.

6. Os pares de ângulos congruentes encontrados nos passos 4 e 5 têm um nome especial.

Como você nomearia esses ângulos?

RESPOSTA:

3.3.2 Atividade 2: Um feixe de proporcionalidade

A BNCC (2018) de Matemática do ensino fundamental propõe na habilidade EF09MA14 a “resolução e elaboração de problemas de aplicação das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes” (BNCC, p 319). Nesse contexto, encontra-se o Teorema de Tales, atribuído a Tales de Mileto (624 a.C. a 546 a.C.), cerca de 300 anos antes de Euclides, que propõe tais relações de proporcionalidade e ainda tem grande importância no estudo da teoria de semelhança de triângulos, conteúdo proposto na habilidade EF09MA12.

Ferreira (2017) afirma que em alguns livros didáticos a demonstração do Teorema é feita de maneira incompleta o que prejudica, de certa forma, a construção do conhecimento, principalmente, se considerarmos demonstrações em livros didáticos destinados para a educação em nível de escolarização básica. O autor também destaca que algumas demonstrações são realizadas utilizando propriedades de semelhança de triângulos, porém, em muitos casos, esse assunto é apresentado posteriormente ao Teorema de Tales.

Uma demonstração formal desse Teorema será apresentada no capítulo 4. Não acreditamos que seja uma demonstração de fácil entendimento para alunos do 9º ano do ensino fundamental - público alvo das nossas propostas de atividades - visto que envolve o conceito de comensurabilidades, assunto nem sempre trabalhado nesse ano da educação básica.

3.3.2.1 Roteiro da atividade

UM FEIXE DE PROPORCIONALIDADE

PRÉ-REQUISITOS:

Notações:

- $\overleftrightarrow{AB}$: reta que passa por A e B.
- $\overline{AB}$: segmento de extremidades de A e B

Definições:

- Segmentos congruentes: segmentos que possuem a mesma medida.
- Retas paralelas: retas que não possuem um ponto de intersecção.
- Feixe de retas paralelas: conjunto de 3 ou mais retas paralelas.
- Reta transversal: reta que cruza um feixe de retas paralelas (s).

Apresentamos uma proposta de atividade que leva o aluno a explorar situações em que feixes de retas paralelas são intersectadas por retas transversais verificando a validade/veracidade do teorema. O objetivo dessa exploração é favorecer a compreensão do Teorema de Tales e não apenas sua mera memorização

Passos para construção no GeoGebra

1. Use o comando para construir uma reta $s = \overleftrightarrow{AB}$.

2. Sob o menu , selecione o comando de retas paralelas e construa duas retas, *s* e *t*, paralelas à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Para fazer essa construção, clique em um lugar qualquer fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e depois clique sobre a reta. Serão criandas retas paralelas que passam pelo ponto C e pelo ponto D, respectivamente, conforme mostra a Figura I.

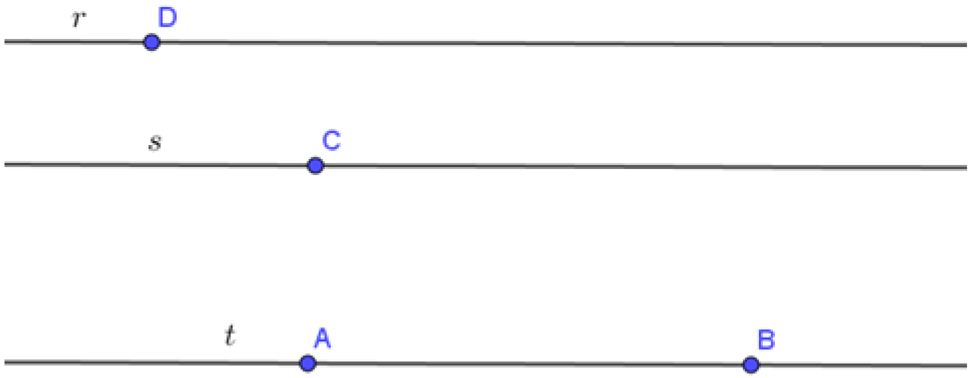


Figura I

3. Novamente, use o comando  para construir outras duas retas, *u* e *v*, que interserctem esse feixe de paralelas, *r*, *s* e *t*. Feito isso, sua construção deve estar parecida com a Figura II.

Nota: As retas u e v são concorrentes às retas r, s e t. pois estão em um mesmo plano e possuem um único ponto em comum.

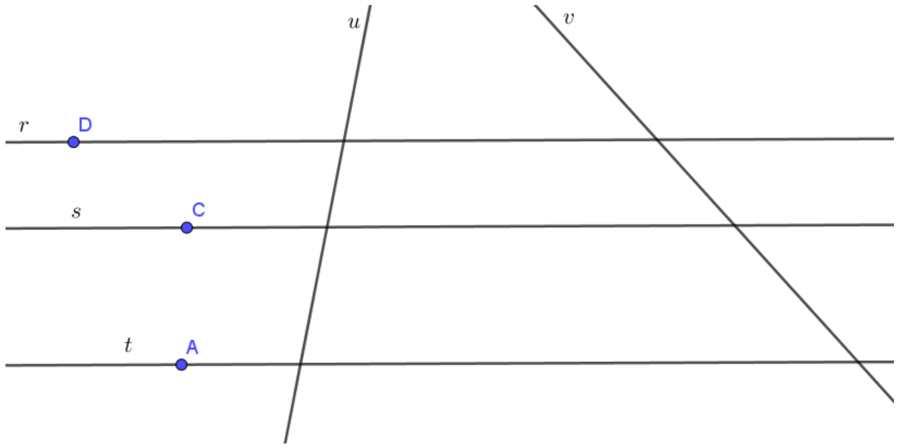
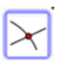


Figura II

4. Use o comando  para destacar os pontos de intersecção entre retas, nomeando-os pontos I, J, K, L, M e N, como na Figura III: $\begin{cases} u \cap r = \{I\} \\ u \cap s = \{J\} \\ u \cap t = \{K\} \\ v \cap r = \{L\} \\ v \cap s = \{M\} \\ v \cap t = \{N\} \end{cases}$

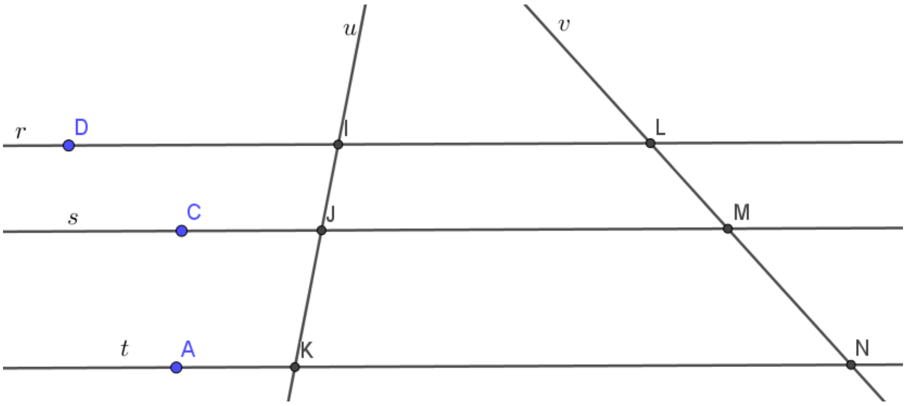


Figura III

Em relação às retas *u* e *v* que você criou, responda:

Elas são concorrentes entre si?

RESPOSTA:

Podem ser paralelas?

RESPOSTA:

Se forem paralelas, o que ocorre com a medida dos segmentos formados?

RESPOSTA:

5. Com o comando , meça os segmentos criados $\overline{IJ}, \overline{JK}, \overline{IK}, \overline{LM}, \overline{MN}$ e $\overline{LN}$. As medidas serão mostradas na tela do aplicativo conforme o exemplo retratado abaixo.

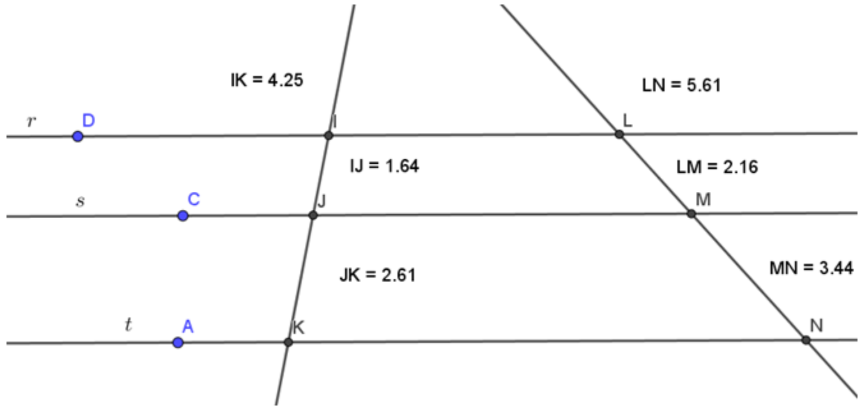


Figura IV

Com o auxílio de uma calculadora, calcule as seguintes razões entre os segmentos e complete o quadro.

$\dfrac{\overline{IJ}}{\overline{LM}} =$	$\dfrac{\overline{JK}}{\overline{MN}} =$	$\dfrac{\overline{IK}}{\overline{LN}} =$

Utilize o botão  para modificar sua construção. Novamente com o auxílio de uma calculadora, calcule as razões entre as novas medidas dos segmentos e complete o quadro.

$\dfrac{\overline{IJ}}{\overline{LM}} =$	$\dfrac{\overline{JK}}{\overline{MN}} =$	$\dfrac{\overline{IK}}{\overline{LN}} =$

O que você pôde observar em relação a essas razões?

RESPOSTA:

6. Agora, utilize a caixa de entrada 

para calcular a razão entre segmentos correspondentes. Por exemplo, para calcular a razão entre os segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{LM}$:

.

Os valores dessas razões são mostrados na janela de álgebra, como ilustrado na Figura V abaixo:

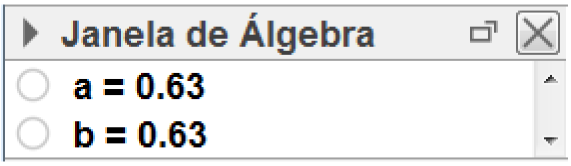


Figura V

Você pode exibi-los junto a sua construção utilizando o comando texto . Para isso, ao selecionar esse comando, clique no lugar da tela onde deseja inserir o texto e, na caixa de diálogo que aparece, digite o texto desejado e escolha o objeto do GeoGebra a que ele se refere, como mostra a Figura VI

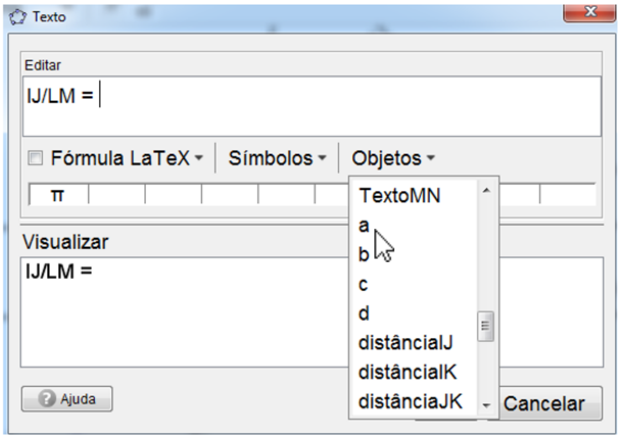


Figura VI

Repita esse procedimento para calcular a razão entre outros segmentos, Na Figura VII temos um exemplo de como irá aparecer na tela.

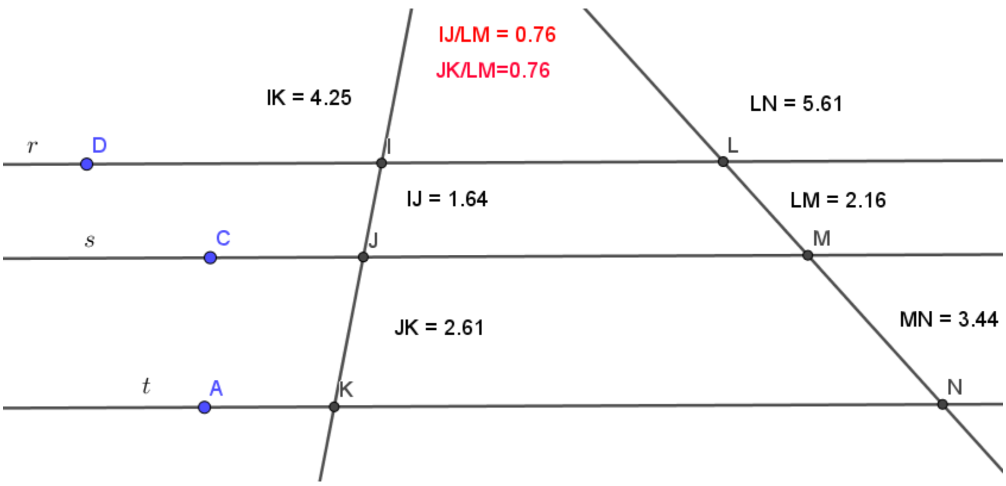


Figura VII

Mova os pontos A, C e D.

Relate o que você pode perceber sobre as razões entre os segmentos? Compare com a sua resposta dada no item 5

RESPOSTA:

3.3.2.2 Uma proposta sem o GeoGebra

Para a realização dessa atividade devemos dispor dos seguintes materiais:

- Uma folha de papel branco
- Uma folha de papel colorido
- Um pedaço de papelão
- Cola
- Régua, compasso, esquadro.

Procedimentos:

Passo 1: Cole a folha de papel branco no papelão,

Passo 2: Construa um segmento de reta $\overline{PQ}$ = 10 cm neste papel. Em P desenhe um segmento de reta $\overline{MP}$ perpendicular a $\overline{PQ}$ e em Q desenhe um segmento $\overline{NQ}$ perpendicular à $\overline{PQ}$, como mostra a Figura I abaixo.

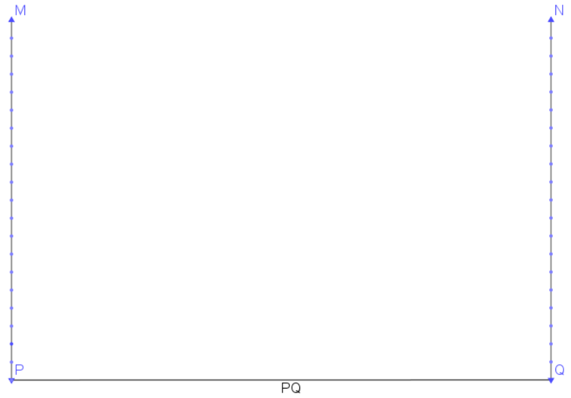


Figura I

Passo 3: Construa um segmento de reta $\overline{XY}$ paralelo a $\overline{PQ}$, tomando os pontos X e Y a uma distância igual de P e Q, respectivamente, ligando-os.

Figura II

Passo 4: recorte um trapézio ABCD do papel colorido e o cole no papel branco de modo que sua base maior (AB), seja menor que a medida do segmento $\overline{XY}$ e fique sobre ele. A Figura III ilustra um exemplo de como deverá ficar sua construção após esse passo.

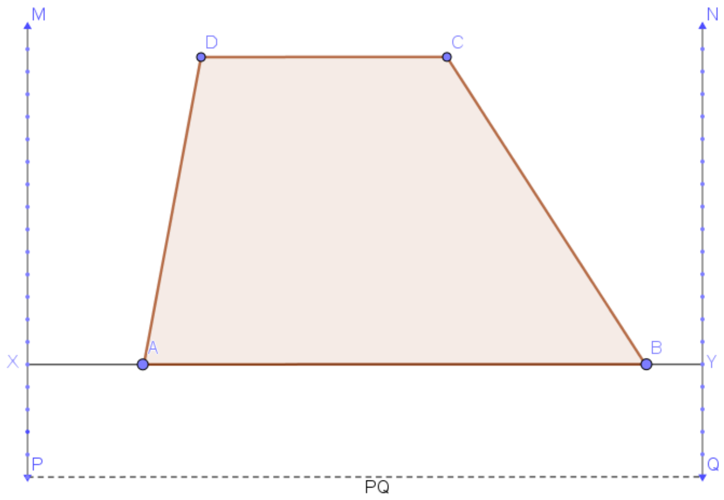


Figura III

Passo 5: Construa duas retas $\overleftrightarrow{X_1Y_1}$ e $\overleftrightarrow{X_2Y_2}$ ambas paralelas à reta PQ, da mesma maneira que no passo 3, de modo que a reta $\overleftrightarrow{X_1Y_1}$ intersecta os lados AD e BC nos pontos A_1 e B_1, respectivamente, e a reta $\overleftrightarrow{X_2Y_2}$ intersecta os lados AD e BC nos pontos A_2 e B_2, respectivamente. Na Figura IV, temos uma das possíveis figuras geradas com esse procedimento.

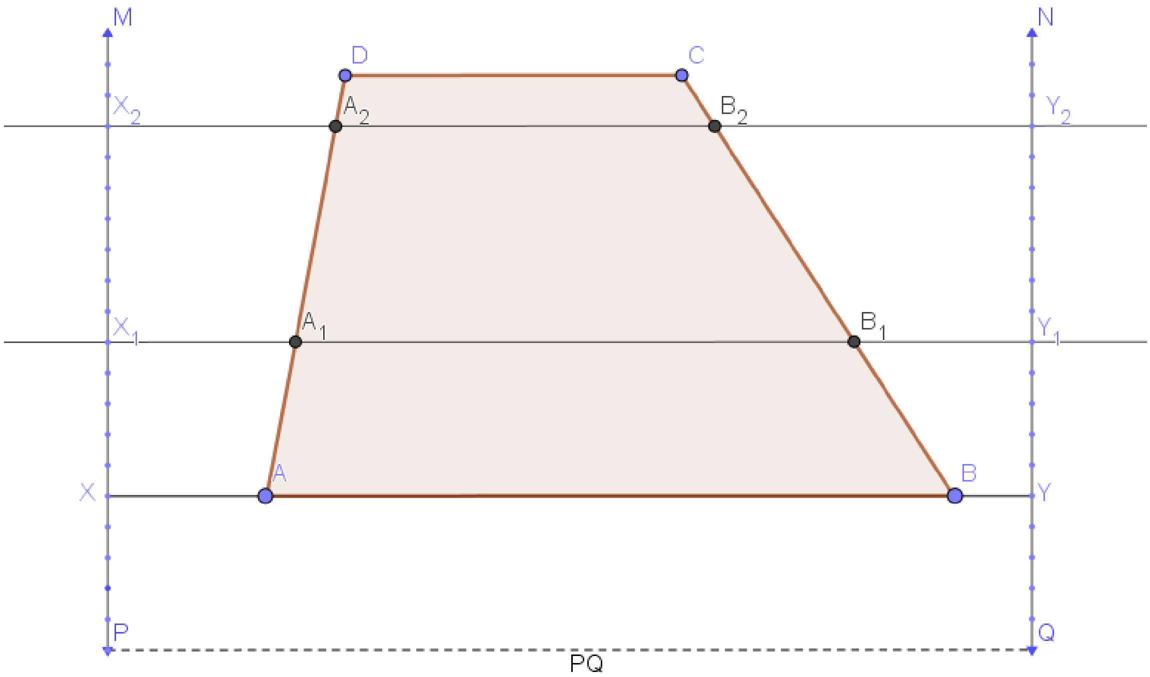


Figura IV

Passo 6: Meça os comprimentos dos segmentos de reta $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2D}$, $\overline{AA_2}$, $\overline{A_1D}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2C}$, $\overline{BB_2}$, $\overline{B_1C}$ e registre-os na tabela de observação.

$\overline{AA_1}$	$\overline{A_1A_2}$	$\overline{A_2D}$	$\overline{AA_2}$	$\overline{A_1D}$
$\overline{BB_1}$	$\overline{B_1B_2}$	$\overline{B_2C}$	$\overline{BB_2}$	$\overline{B_1C}$

Passo 7: Calcule as razões estre os comprimentos dos segmentos correspondentes e registre os valores na tabela a seguir. Você pode utilizar uma calculadora para efetuar as divisões

$\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}} =$	$\dfrac{\overline{A_2D}}{\overline{B_2C}} =$	$\dfrac{\overline{A_1D}}{\overline{B_1C}} =$
$\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} =$	$\dfrac{\overline{AA_2}}{\overline{BB_2}} =$	

Relate o que você pode perceber sobre as razões entre os segmentos?

RESPOSTA:

Por que você acha que isso ocorre?

RESPOSTA:

Para quaisquer retas traçadas isso ocorre? Em quais casos você acha que isso ocorre?

RESPOSTA:

Será que se as retas não fossem paralelas isso ocorreria? Justifique.

RESPOSTA:

Como você pode verificar uma proporcionalidade?

RESPOSTA:

Verifique se os segmentos são proporcionais.

RESPOSTA:

3.3.3 Atividade 3: Enquadrando Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos mais famosos teoremas da Matemática estudado no ensino básico. São várias demonstrações desse teorema embora não se saiba qual foi a prova dada por Pitágoras e se foi ele mesmo que demonstrou o teorema que leva seu nome (KAHN, 2017, p.52).

Essa atividade tem por finalidade levar o aluno a desenvolver a habilidade EF09MA13 que propõe demonstrar o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos proposta na BNCC a partir de investigações Matemática por meio de problemas. Os alunos terão que mobilizar conhecimentos adquiridos anteriormente, além de estratégias de resolução de problemas matemáticos, para verificar/validar o Teorema proposto com a atividade. Com tantos conceitos matemáticos envolvidos, o foco é levar nossos alunos a compreender a ideia, por meio de manipulações concretas, de que a soma dos quadrados das medidas dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

O objetivo desta terceira atividade é propor uma prática diferenciada das comumentes utilizadas em sala de aula para apresentar o Teorema de Pitágoras. Optamos por incluir materiais manipuláveis e concretos para explicar/validar visualmente esse Teorema, visto que nem sempre estão disponíveis recursos computacionais para a utilização por parte dos alunos.

Além disso, como exposto no capítulo anterior, tal opção compartilha da importância de se trabalhar com materiais manipuláveis - concretos e com o recurso da visualização, principalmente na Educação de Nível Fundamental, já que tais práticas contribuem para aproximar os alunos do fazer Matemática e da elaboração de argumentos plausíveis.

3.3.3.1 Roteiro da Atividade

ENQUADRANDO PITÁGORAS

PRÉ-REQUISITOS:

Notações:

- $\overline{AB}$: segmento de reta com extremidades A e B.
- $|\overline{AB}|$ = med($\overline{AB}$): medida do segmento $\overline{AB}$.
- $ABC = ABC = \angle ABC$: ângulo com vértice em B e lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Definições:

- Ângulos congruentes: ângulos que possuem a mesma medida.
- Ângulos opostos pelo vértice: ângulos formados pelo encontro de duas retas concorrentes.
- Ângulos suplementares: dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é igual a 180º.
- Retas paralelas: retas que não possuem um ponto de intersecção.
- Reta transversal: reta que possui um único ponto em comum com outra(s).

Para a realização dessa atividade devem ser disponibilizadas folha impressas com a duas Figuras I e duas Figuras II para cada dupla. Aconselhamos que essas figuras sejam impressas de diversos tamanhos para que se possa explorar a ideia de que não se trata de um caso particular para determinados triângulos.

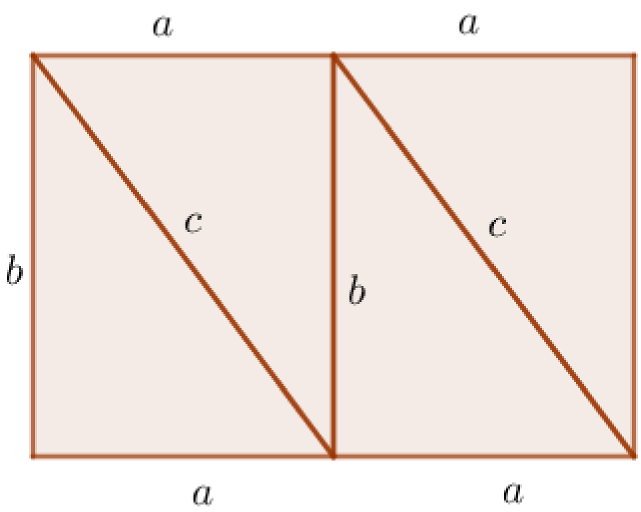


Figura I

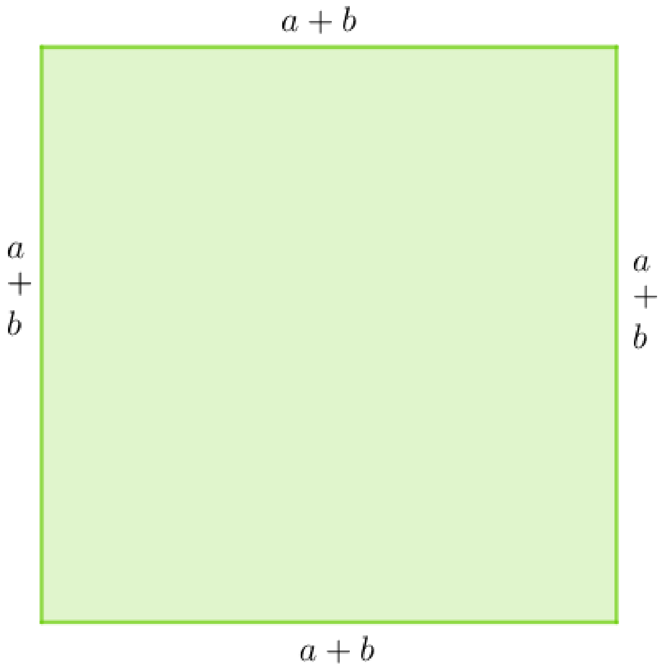


Figura II

A ideia dessa exploração é verificar, por meio de reconfigurações de figuras, que é possível formar quadrados de lados a e b que tenham juntos a mesma área que um quadrado de lado c.

Procedimentos:

Passo 1: Recortar quatro triângulos de lados de medida a, b e c e responder as perguntas a seguir.

Qual a classificação desses triângulos quanto aos ângulos? Que propriedade Matemática garante sua classificação?

RESPOSTA:

Esses triângulos são congruentes? Justifique citando qual o caso de congruência.

RESPOSTA:

Passo 2: Sobreponha os quatro triângulos recortados da Figura I sobre o quadrado da Figura II de forma que, no interior da Figura II, eles formem um quadrado de lado c, como na Figura III.

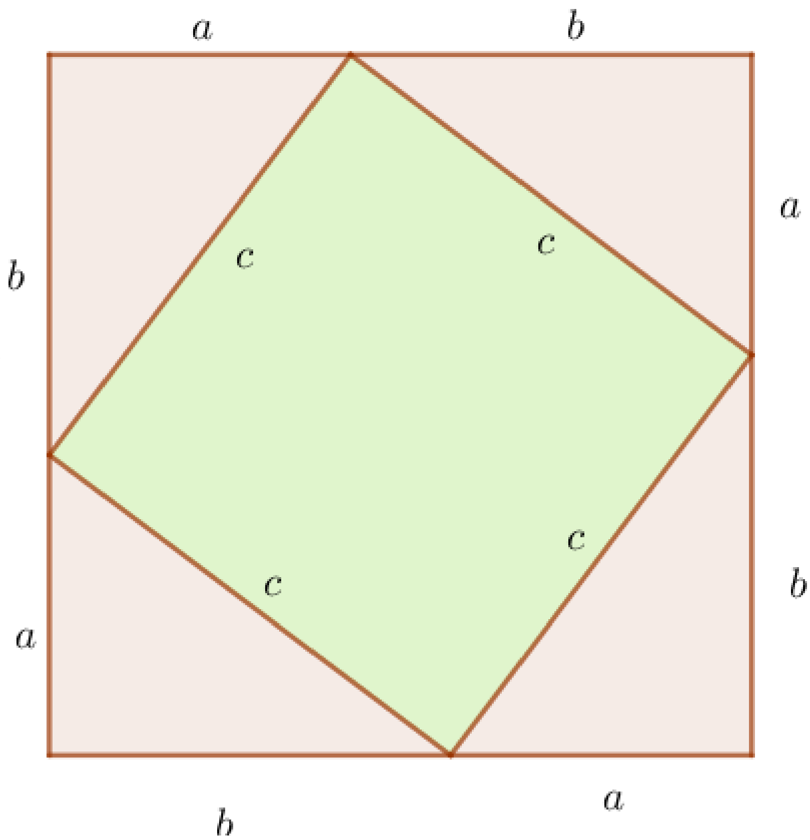


Figura III

Qual a área do quadrado maior?

RESPOSTA:

Qual a área do quadrado menor (verde)?

RESPOSTA:

Note que com os triângulos colocados dessa maneira, eles formarão um quadrado menor dentro do quadrado maior com lado c, a hipotenusa de cada triângulo.

Passo 3: Reorganize os mesmos quatro triângulos de forma que eles formem agora dois quadrados um de lado *a* e outro de lado *b*, dentro do quadrado da Figura II.

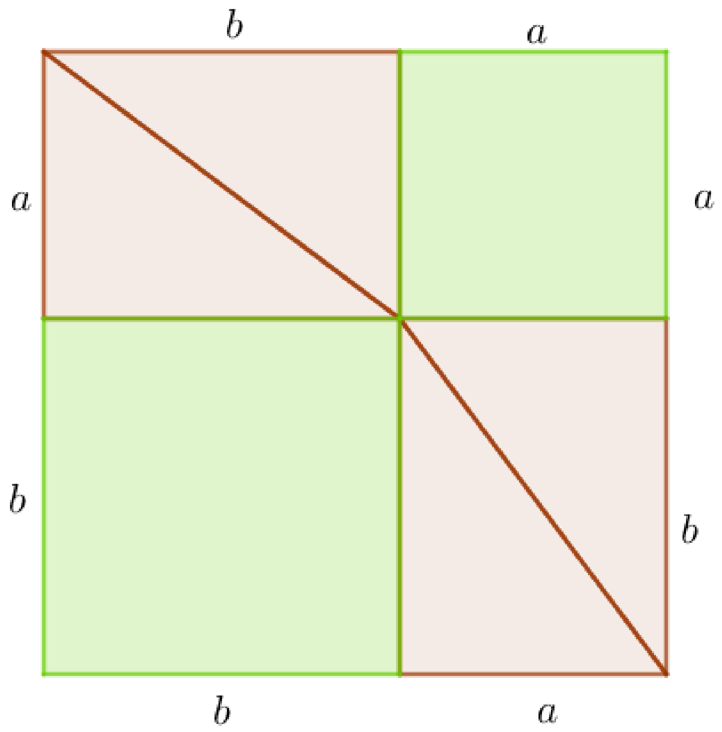


Figura IV

Qual é a área de cada quadrado verde?

RESPOSTA:

As áreas verdes do passo 2 e do passo 3 são iguais? Escreva com seus argumentos a relação que você estabeleceu entre elas.

RESPOSTA:

3.3.3.2 Uma proposta com o GeoGebra

A recíproca do teorema de Pitágoras que nos diz que se o quadrado de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é um triângulo retângulo.

Então, essa propriedade pode ser usada para de determinar se um triângulo é um triângulo retângulo. Logo, substituindo os valores das medidas dos comprimentos de cada lado de um triângulo à equação de Pitágoras e obtendo uma sentença verdadeira, o triângulo será um triângulo retângulo.

Como alternativa ao uso do material concreto, apresentamos aqui uma possibilidade de utilização do GeoGebra para a explorar essa propriedade.

Roteiro – Parte 1

Acesse o *applet* disponível em https://www.GeoGebra.org/m/vbgxgbhx e responda às questões propostas.

1. Existem três quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo ABC na figura. Observe a figura e anote as áreas dos três quadrados.

Quadrado vermelho __________

Quadrado Azul __________

Quadrado Verde __________

Adicione a área do quadrado azul à área do quadrado verde e anote o resultado abaixo

Área do quadrado azul + área do quadrado verde = ____________________

Qual a relação da soma das áreas encontrada com a área do quadrado vermelho?

RESPOSTA:

2. Movimente a figura, modificando o triângulo retângulo ABC. Cuidado para não modificar a medida do ângulo que determina que o triângulo é retângulo. Para fazer isso, clique no ponto C e o arraste na direção e sentido que você quiser.

Nessa nova figura que você criou, anote as áreas dos três quadrados.

Quadrado vermelho _________

Quadrado Azul _________

Quadrado Verde _________

Adicione a área do quadrado azul à área do quadrado verde

Área do quadrado azul + área do quadrado verde = ____________________

Qual a relação da soma das áreas encontrada com a área do quadrado vermelho?

RESPOSTA:

3. Assim como no item 2, arraste mais uma vez o ponto C criando um novo triângulo retângulo.

Agora anote as áreas dos três quadrados.

Quadrado vermelho _________

Quadrado Azul _________

Quadrado Verde _________

Adicione a área do quadrado azul à área do quadrado verde

Área do quadrado azul + área do quadrado verde = ____________________

Qual a relação da soma das áreas encontrada com a área do quadrado vermelho?

RESPOSTA:

4. Escreva com suas próprias palavras que conclusões podem ser tiradas tendo por base suas construções, observações e as respostas às perguntas 1, 2 e 3.

Se achar necessário, fique à vontade para explorar mais antes de escrever suas conclusões.

CONCLUSÕES:

5. Se a área do quadrado vermelho é a^2, a área do quadrado azul é b^2 e a área do quadrado verde é c^2, podemos concluir que $a^2 = b^2 + c^2$?

____

6. Se a área do quadrado vermelho é a^2, a área do quadrado azul é b^2 e a área do quadrado verde é c^2, podemos concluir que $b^2 = a^2 + c^2$?

____

7. Se a área do quadrado vermelho é a^2, a área do quadrado azul é b^2 e a área do quadrado verde é c^2, podemos concluir que $c^2 = a^2 + b^2$?

____

8. O item 2 pede que você "movimente a figura, modificando o seu triângulo retângulo".

O que acontece em relação à soma das áreas dos quadrados quando o triângulo não é retângulo?

RESPOSTA

Roteiro – Parte 2

Acesse o *applet* disponível em https://www.GeoGebra.org/m/vbgxgbhx e responda às questões propostas.

1. Observe as medidas dos segmentos indicados e registre a seguir:

$\left|\overline{AC}\right|$ = ______

$\left|\overline{AB}\right|$ = _______

$\left|\overline{BC}\right|$ = _______

Com o auxílio de uma calculadora, calcule:

(Use duas casas decimais)

$\left|\overline{AC}\right|^2$ = ______

$\left|\overline{AB}\right|^2$ = _______

$\left|\overline{BC}\right|^2$ = _______

Usando a calculadora, verifique se $\left|\overline{AC}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2$.

Essa afirmação é verdadeira? ________

Observe a figura e escreva a medida do ângulo ∠ABC.

|∠ABC| = ___________

2. Usando o mouse  arraste o ponto C para uma posição diferente da inicial.

Registre as medidas dos segmentos.

$\left|\overline{AC}\right|$ = ______

$\left|\overline{AB}\right|$ = _______

$\left|\overline{BC}\right|$ = _______

Com o auxílio de uma calculadora, calcule:

(Use duas casas decimais)

$\left|\overline{AC}\right|^2 =$ ______

$\left|\overline{AB}\right|^2 =$ _______

$\left|\overline{BC}\right|^2 =$ _______

Usando a calculadora, verifique se $\left|\overline{AC}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2$.

Essa afirmação é verdadeira? ________

Observe na janela do GeoGebra e escreva a medida do ângulo ∠ABC.

|∠ABC| = ___________

3. Repita o passo 2 e anote suas observações.

Registre as medidas dos segmentos.

$\left|\overline{AC}\right| =$ ______

$\left|\overline{AB}\right| =$ _______

$\left|\overline{BC}\right| =$ _______

Com o auxílio de uma calculadora, calcule:

(Use duas casas decimais)

$\left|\overline{AC}\right|^2 =$ ______

$\left|\overline{AB}\right|^2 =$ _______

$\left|\overline{BC}\right|^2 =$ _______

Usando a calculadora, verifique se $\left|\overline{AC}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2$.

4. De acordo com as respostas dos passos 1, 2 e 3, **escreva uma conclusão para o que foi observado.**

RESPOSTA:

5. Usando o mouse  , movimente os pontos da figura e observe se, em algum momento, a relação expressa em nos itens 1, 2 e 3 é verdadeira.

Se isso ocorrer, que característica você pode observar no triângulo?

RESPOSTA:

6. Marque a caixa ***Ver enunciado*** para revelar o Teorema de Pitágoras.

Você chegou à essa conclusão?

RESPOSTA:

7. Caso não tenha chegado à essa conclusão, o que você acha que pode ter acontecido?

RESPOSTA:

4 DEMONSTRAÇÕES

Como mencionado anteriormente, nesse capítulo iremos apresentar as demonstrações formais para os teoremas explorados nas atividades elaboradas.

Silva (2002) salienta que as demonstrações não são objetos de ensino nos cursos de licenciatura. Nesses cursos, geralmente se faz a demonstração diante dos alunos para que acompanhem, copiem e repitam técnicas, levando o futuro professor a memorização de uma sequência de procedimentos.

Balacheff (1988) ressalta que, com esse tipo de conduta, a prática em sala de muitos professores da Educação básica não ultrapassa as experiências vivenciadas na formação durante a universidade, visto que a reprodução de técnicas faz com que seus alunos não percebam a necessidade de demonstrar. Osório (2002) destaca que os professores da Educação básica entendem que não se deve propor aos alunos processos que exijam recursos intelectuais equivalentes ao de um matemático, como é o caso de uma demonstração formal. Muito dessa percepção está apoiada no fato dos próprios professores não dominarem alguns processos formais e tão pouco, se sentirem seguros para trabalhar com as demonstrações Matemáticas (FERREIRA, 2016).

Nesse sentindo, não temos a intenção que as demonstrações retratadas nesse capítulo, sejam apresentadas formalmente a todos os alunos, pois acreditamos, como ressalta Silva (2010), que o ato de demonstrar matematicamente (estamos falando aqui da demonstração formal), necessita de domínio do assunto abordado e para compreender uma demonstração é necessária muita abstração.

Apoiamos que as demonstrações que propomos, possam ser trabalhadas em aulas investigativas com pequenos grupos como, por exemplo, em preparações para olimpíadas de Matemática e que também, sirva como material de apoio didático para professores que se interessam em aprofundar seus estudos, contribuindo para sua formação profissional.

4.1 O Teorema das paralelas

O Teorema das paralelas afirma que “se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos internos alternados são congruentes” e foi proposto por Euclides (300 a.C.) em sua obra *Os Elementos*: “Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si, o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos" (COMANDINO, 1944, p. 29).

Ao lidar com linhas paralelas é importante ter em mente que muitos resultados são válidos apenas para a Geometria Euclidiana, dado que invocamos muitas vezes o quinto postulado de Euclides.

Postulado (das Paralelas) 1: Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta.

4.1.1 Demonstração

Teorema 4.1: Sejam r e s duas retas cortadas por uma transversal t. As retas r e s são paralelas quando elas determinam com a reta t ângulos correspondentes (ou ângulos alternos internos) de mesma medida.

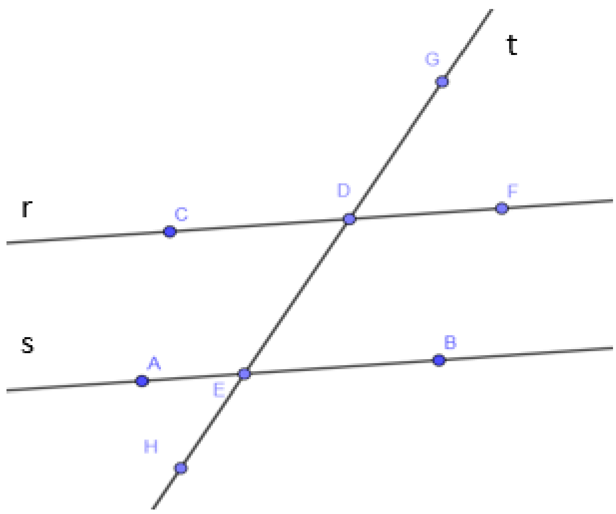
Demonstração:

Hipótese:

São dadas duas retas r e s cortadas por uma transversal t nos pontos D e E.

A Figura 13 mostra uma construção dessa afirmativa e nos auxilia na escrita da demonstração

Figura 13 - Duas retas cortadas por uma transversal



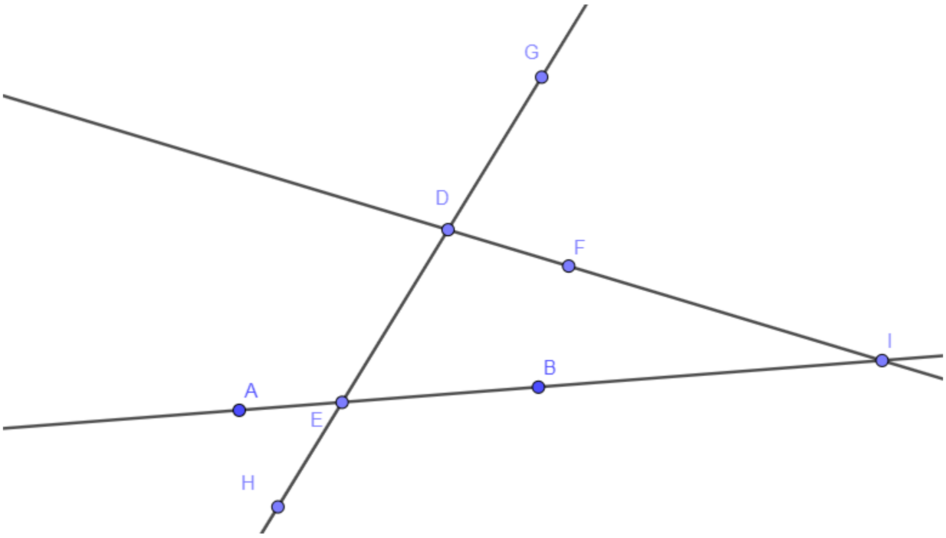
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Tese:

Os ângulos correspondentes são congruentes.

Em primeiro lugar, vamos demonstrar que se $\angle\ FDG = \angle BED$, então as retas r e s são paralelas. De fato, se as retas r e s não fossem paralelas, existiria um ponto I de intersecção entre elas e consequentemente teríamos um triângulo ΔIED, conforme Figura 14 abaixo.

Figura 14 - Retas não paralelas



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Nesse caso, o ângulo $\angle FDG$ seria um ângulo externo ao triângulo ΔIED e, portanto, seria igual à soma dos dois ângulos internos do triângulo não adjacentes a ele. Porém, isso contradiz nossa hipótese de que $\angle FDG = \angle BED$.

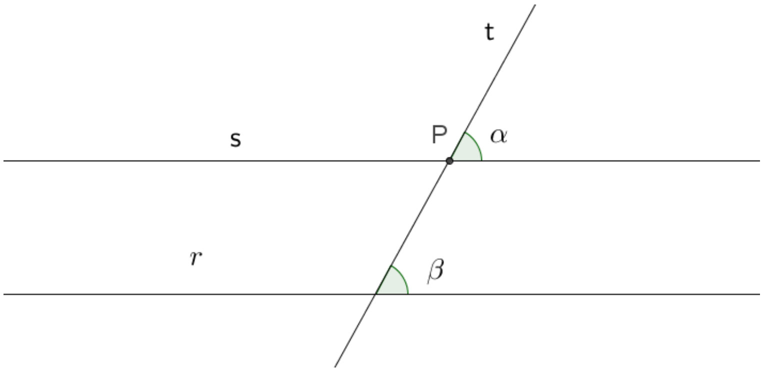
c.q.d.

Vamos demonstrar agora uma recíproca da proposição anterior.

Teorema 4.2: Se duas retas r e s forem paralelas então os ângulos correspondentes são iguais.

Hipótese		Tese
$r \parallel s,\ r \neq s$	$\Longrightarrow$	$\alpha = \beta$

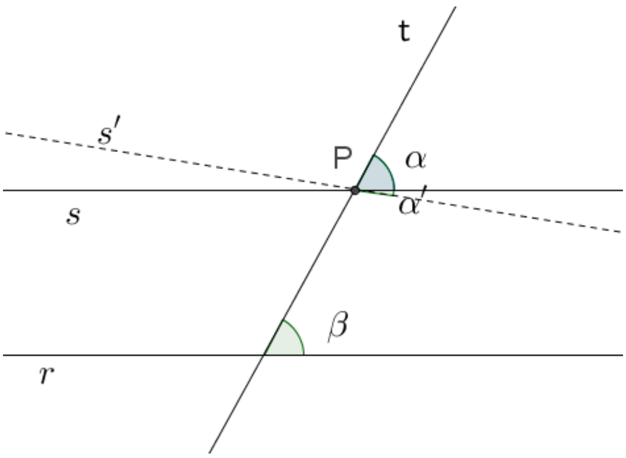
Figura 15 - Teorema 4.2



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Para essa demonstração, considere uma reta s` passando pelo ponto P e formando com a transversal t quatro ângulos iguais aos ângulos correspondentes formados pela reta r com a mesma transversal, em particular $\alpha' = \beta$. De acordo com o teorema 4.1, r e s` são paralelas.

Figura 16 - Retas paralelas cortada por transversal



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Como r e s são paralelas, por transitividade, r também é paralela à s'. Mas, pelo postulado das paralelas, existe apenas uma paralela à *r* passando por P. Segue que s e s' são coincidentes e, portanto, $\alpha' = \alpha$.

Logo os ângulos correspondentes formados são iguais. Assim, $\alpha = \beta$.

c.q.d

4.2 O Teorema de Tales

O Teorema de Tales apresenta-se como um dos temas centrais no estudo da Geometria Euclidiana visto que envolve conceitos de paralelismo e proporcionalidade. Observa-se sua presença tanto na Geometria plana quanto na espacial como, por exemplo, no tratamento da teoria da semelhança, construções por homotetia e estudo das secções de um sólido.

Atribui-se o teorema a Tales de Mileto, por ter usado a propriedade dos segmentos proporcionais para o cálculo de distâncias inatingíveis, porém a primeira demonstração do Teorema de Tales foi feita por Euclides em seu livro *Elementos*, utilizando-se da teoria das proporções.

A seguir demonstraremos que "se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais". Tal demonstração envolve o conceito de comensurabilidade e, por isso, uma opção para demonstrar o Teorema de Tales no ensino básico seria a prova incompleta dos pitagóricos que supõe todos os segmentos comensuráveis.

4.2.1. Demonstração

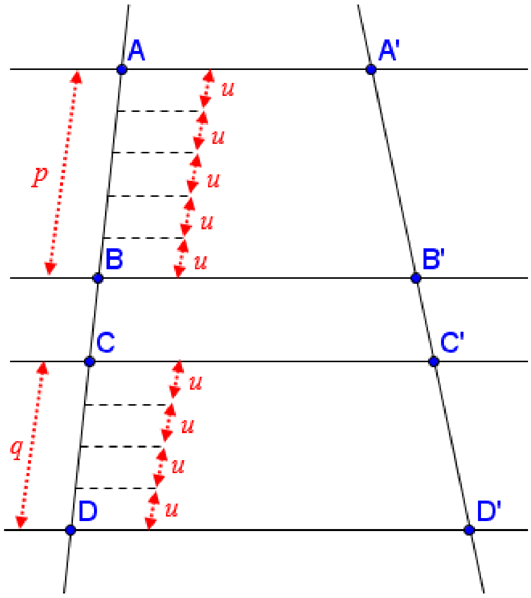
Teorema 4.3 (Tales): Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.

Hipótese		Tese
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos correspondentes da outra.	$\Rightarrow$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$

Vamos considerar $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos de uma transversal e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos segmentos correspondentes da outra transversal. Vamos provar que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$ para dois casos: se os segmentos forem comensuráveis e se os segmentos forem incomensuráveis.

1º caso: Nesse caso, vamos supor $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis. Desse modo, existe um segmento *u* que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Ou seja, existem p e q inteiros tais que $\overline{AB}$ = p*u* e $\overline{CD}$ = q*u*.

Figura 17 - Divisão de segmentos comensuráveis

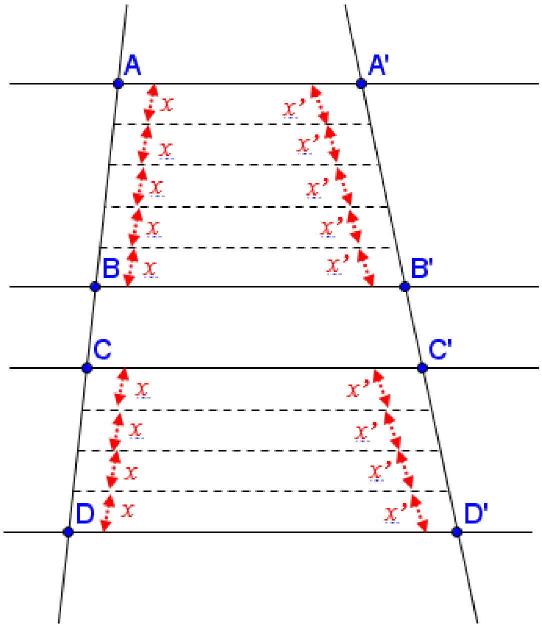


Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Assim podemos escrever que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{pu}{qu}$ e, consequentemente, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q}$.

Observe que podemos traçar paralelas pelos pontos de divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de tal forma que dividem os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ em segmentos iguais.

Figura 18 - Outra divisão de segmentos comensuráveis



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

De maneira análoga, temos que a razão entre esses dois segmentos nos dá que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{px'}{qx'}$ e, simplificando, obtemos que também $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q}$.

Portanto, como as razões são iguais, temos a proporção:

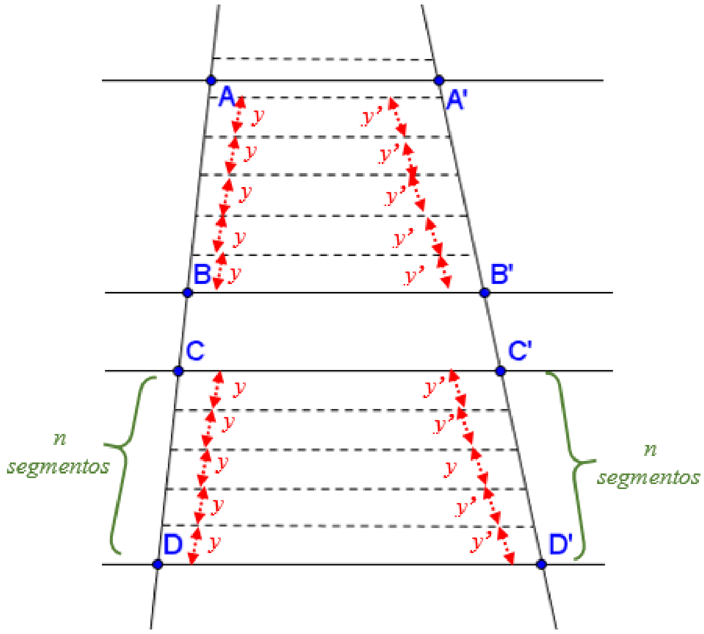
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

2º Caso: No segundo caso, vamos demonstrar que a igualdade das razões acima se mantém quando um dos membros da mesma for um número irracional. Isto é, não existe submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Para isso, vamos tomar um segmento y submúltiplo de $\overline{CD}$. Assim, y cabe um certo número inteiro n de vezes em $\overline{CD}$, ou seja:

$$\overline{CD} = \text{n}.y \tag{5.1}$$

Figura 19 - Divisão de segmentos incomensuráveis

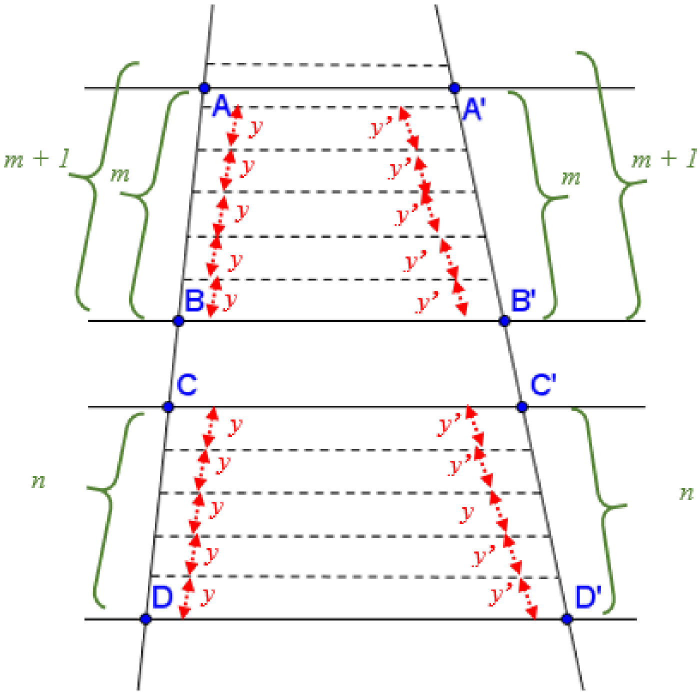


Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Mas como nesse caso estamos considerando $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, ao marcar sucessivamente segmentos de medida *y* sobre $\overline{AB}$, teremos que

$$\mathrm{m}.y < \overline{AB} < (\mathrm{m}+1).y,\ m \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Figura 20 - Aproximação de segmentos incomensuráveis



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Dividindo todos os termos da desigualdade (5.2) por $\overline{CD} = n.y$ obtemos:

$$\frac{\text{m}.y}{\text{n}.y} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{(\text{m}+1).y}{\text{n}.y} = \frac{\text{m}}{\text{n}} + \frac{1}{\text{n}}$$

Analogamente, traçando retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ obtemos

$$\begin{aligned} &\overline{C'D'} = \text{n}.y' \qquad \text{e} \\ &\text{m}.y' < \overline{A'B'} < (\text{m}+1).y' \end{aligned} \quad . \tag{5.3}$$

Dividindo todos os termos da desigualdade (5.3) por $\overline{C'D'} = \text{n}.y'$ obtemos:

$$\frac{\text{m}.y'}{\text{n}.y'} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{(\text{m}+1).y'}{\text{n}.y'} = \frac{\text{m}}{\text{n}} + \frac{1}{\text{n}} \quad .$$

Como y foi um segmento escolhido arbitrariamente, podemos escolher *y* tão pequeno quanto quisermos, o que implica que aumentamos o valor de n e, consequentemente, $\frac{1}{n}$ fica tão próximo de zero quanto desejarmos. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

c.q.d.

4.3 O Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é um tópico importante na Geometria Euclidiana do ensino fundamental que relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Esse Teorema é utilizado para encontrar as medidas dos lados de um triângulo retângulo e também serve de base para a definição da distância entre dois pontos.

Para enunciar essa relação devemos lembrar dos nomes atribuídos aos lados dos triângulos retângulos. O maior lado desse tipo de triângulo é chamado de hipotenusa e está sempre oposto ao ângulo reto. Os outros dois lados, aqueles que formam o ângulo reto, são chamados de catetos. Assim, podemos dizer que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Representando a medida da hipotenusa por *a* e as medidas dos catetos por *b* e *c*, escrevemos a sentença Matemática $a^2 = b^2 + c^2$.

Vamos apresentar a seguir uma[9] das maneiras de demonstrar a veracidade do teorema de Pitágoras. Usaremos propriedades de semelhança de triângulos contempladas na habilidade EF09MA12 da BNCC. Desse modo, tal demonstração pode ser feita em uma sala de aula de 9º ano.

4.3.1 Demonstração

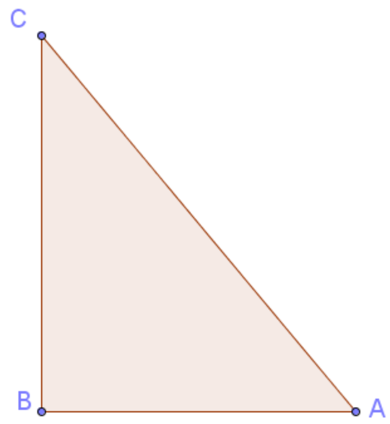
Teorema 4.4 (Pitágoras): Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

[9] O site http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ apresenta uma coleção de 118 abordagens para provar o Teorema de Pitágoras, muitas das quais acompanhadas de ilustrações interativas.

Hipótese		Tese
ΔABC é um triângulo retângulo	$\Longrightarrow$	$\lvert\overline{AC}\rvert^2 = \lvert\overline{AB}\rvert^2 + \lvert\overline{BC}\rvert^2$

Dado um triângulo ABC retângulo em B, como na Figura 21, queremos mostrar que $\lvert\overline{AC}\rvert^2 = \lvert\overline{AB}\rvert^2 + \lvert\overline{BC}\rvert^2$.

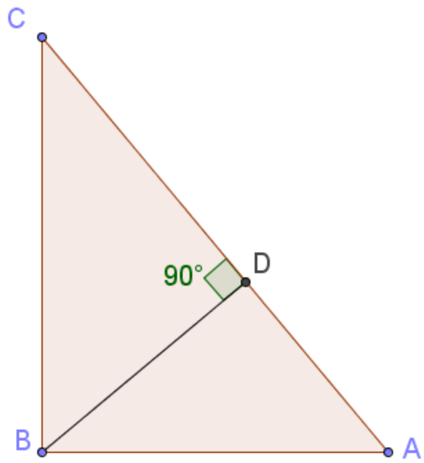
Figura 21 – Triângulo retângulo em B



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Primeiro, vamos traçar a altura $\overline{BD}$ relativa ao lado $\overline{AC}$, como mostra a Figura 22. Ou seja, o segmento $\overline{BD}$ que é perpendicular ao lado $\overline{AC}$.

Figura 22 - Altura do triângulo retângulo em B



Fonte: elaborado pelo autor 2020

Os triângulos ADB e ABC são semelhantes pois possuem dois ângulos congruentes, a saber, um ângulo reto e o ângulo Â que é comum a ambos os triângulos. Portanto, pela proporcionalidade dos lados, temos que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Ou seja,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}. \tag{5.4}$$

Além disso, os triângulos BDC e ABC também são semelhantes pois possuem dois ângulos congruentes: um ângulo reto e o ângulo $\hat{B}$, que é comum aos triângulos. Novamente pela proporcionalidade dos lados, temos que $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. Logo,

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD} \times \overline{AC}\ . \tag{5.5}$$

Adicionando as equações (5.4) e (5.5) obtemos,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CD} \times \overline{AC} + \overline{AD} \times \overline{AC}\ .$$

Que é equivalente a

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \left(\overline{CD} + \overline{AD}\right) \times \overline{AC} .$$

Observando que, $\overline{CD} + \overline{AD} = \overline{AC}$ ficamos com

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC} \times \overline{AC} .$$

Isto é

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 .$$

c.q.d.

5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE “ENQUADRANDO PITÁGORAS”

Nesse capítulo, iremos relatar a aplicação de uma das atividades proposta em nosso trabalho – Enquadrando Pitágoras - descrita no Capítulo 3 e apresentaremos nossas interpretações com os fatos e resultados observados.

Toda metodologia empregada para a realização da aplicação e os critérios utilizados para a análise também estão retratados nesse capítulo.

5.1. Aplicação da atividade

Como exposto no capítulo 3, as atividades por nós elaboradas foram pensadas para serem aplicadas presencialmente, uma vez que a dinâmica de interação entre os alunos incorpora os princípios de uma aprendizagem ativa, engajada, significativa e socialmente interativa. Porém, devido ao isolamento social por conta da pandemia causada pelo COVID-19, não foi possível a aplicação nos parâmetros pretendidos.

Mas como era de nossa vontade vivenciar essa experiência com nossos alunos, resolvemos aplicar uma das atividades remotamente, mesmo sabendo dos prejuízos que teríamos com relação as observações que seriam permitidas caso a aplicação da atividade fosse realizada em um laboratório de informática e mediada pelo do professor, presencialmente.

Além disso, sabíamos de antemão de outros prejuízos que de alguma forma poderiam comprometer nossas observações do experimento e estão relacionados às atitudes e motivações dos alunos que podem ter sido diferentes daqueles vivenciadas em uma situação habitual de aprendizagem[10] e também ao gerenciamento e controle dos alunos que participavam do desenvolvimento da atividade por meio de uma ferramenta de aprendizagem online em suas casas ou em outros lugares.

Em uma sala de aula ou laboratório de informática o professor é capaz de fazer um acompanhamento mais detalhado podendo observar também o comportamento dos alunos, seus argumentos verbais e as respostas não-verbais, como expressões faciais e corporais. Nessa perspectiva, queremos chamar atenção para o fato de que compreender o outro, no caso nosso

[10] Entendemos com situação habitual de aprendizagem as atividades vivenciadas em sala aula ou laboratórios durante o ensino exclusivamente presencial.

aluno, não se restringe em apenas entender sua fala (oral ou escrita), mas também suas expressões e manifestações corporais. Conforme Machado e Miranda (2006), expressões e manifestações corporais são elementos fundamentais na comunicação entre indivíduos e muito podem dizer sobre as experiências vivenciadas em uma situação de interação, como proposta para nossa atividade.

Por outro lado, com uma nova realidade de ensino remoto tomando conta do cenário mundial, vimos uma oportunidade de criar um ambiente de aprendizagem de conceitos geométricos diferente do imaginado, mas com potencialidade de evidenciar nossos alunos como protagonistas maiores do seu conhecimento.

Para a aplicação da atividade, ao aliar uma plataforma de um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) ao uso de um software e a uma ferramenta de questionário online, buscamos oferecer ao estudante a oportunidade de dar autonomia aos seus estudos, desafiando-o a buscar e construir seu conhecimento com seus próprios recursos cognitivos e orientações oferecidas na atividade. A interação presencial com o professor foi, assim, substituída por uma interação em um fórum de discussão, onde todos os alunos envolvidos poderiam compartilhar suas dúvidas de forma que todos pudessem aprender por meio de comentários e ideias de outros alunos.

Nas seções que se seguem, retratamos essa experiência em detalhes.

5.1.1. Cenário da aplicação

- **Sujeitos e *locus***

Durante o mês de julho de 2020, a atividade “Enquadrando Pitágoras” foi aplicada remotamente para os alunos de uma escola da região metropolitana de Belo Horizonte, em que o professor de Matemática é o pesquisador desse trabalho.

Os sujeitos da pesquisa foram alunos de duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, ambas com 25 estudantes. Dos 50 alunos matriculados nessas turmas, 31 realizaram a atividade e a desenvolveram até o final. Os demais não acessaram a atividade por motivos que não foram relatados. Vale ressaltar que tal atividade não tinha caráter avaliativo.

- **Recurso**

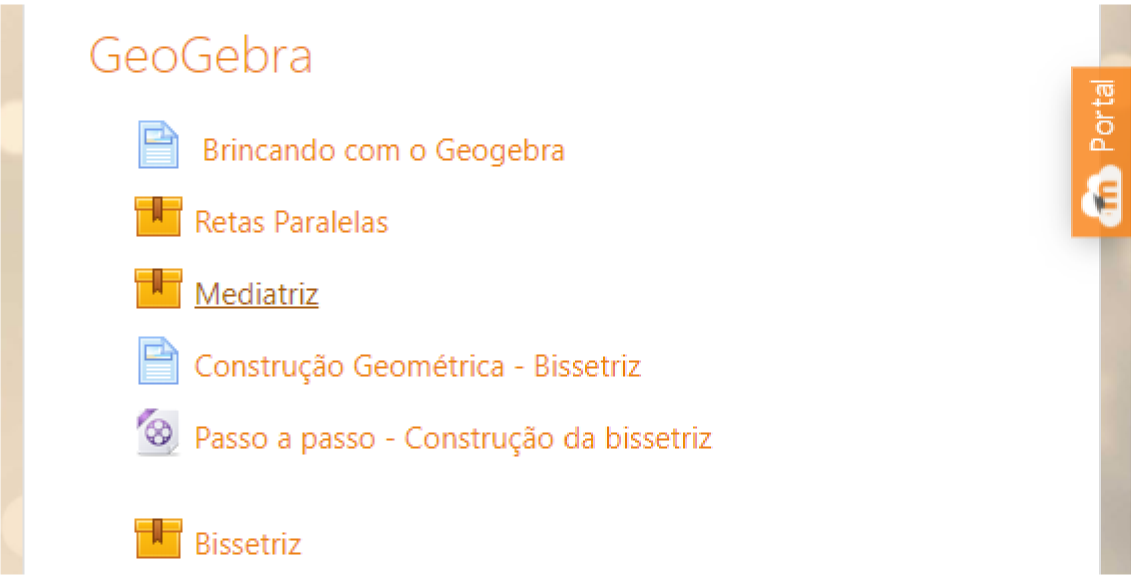
A atividade foi disponibilizada pela plataforma *Moodle*, um ambiente virtual de aprendizagem já conhecido dos alunos e com o qual eles já estavam bastante familiarizados, visto que o professor pesquisador já utilizava deste ambiente antes mesmo do ensino remoto emergencial. A Figura 23, abaixo, mostra a tela de acesso à atividade dentro do ambiente.

Figura 23 - Tela inicial no *Moodle*

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Vale destacar que todos os alunos já haviam realizado outras atividades utilizando o AVA citado, inclusive em anos anteriores. Isso contribuiu bastante para que não houvessem dúvidas quanto à navegação dentro do ambiente. Destacamos, também, que dentre as atividades realizadas anteriormente no presente ano, estão atividades de exploração e manipulação do GeoGebra que tinham como objetivo tornar o aluno familiarizado com esse aplicativo de tal forma que em atividades posteriores não ocorressem muitas dúvidas quanto ao uso básico do *software*. A Figura 24 a seguir, mostra um índice de algumas dessas atividades.

Figura 24 - Índice de atividades de familiarização com o GeoGebra



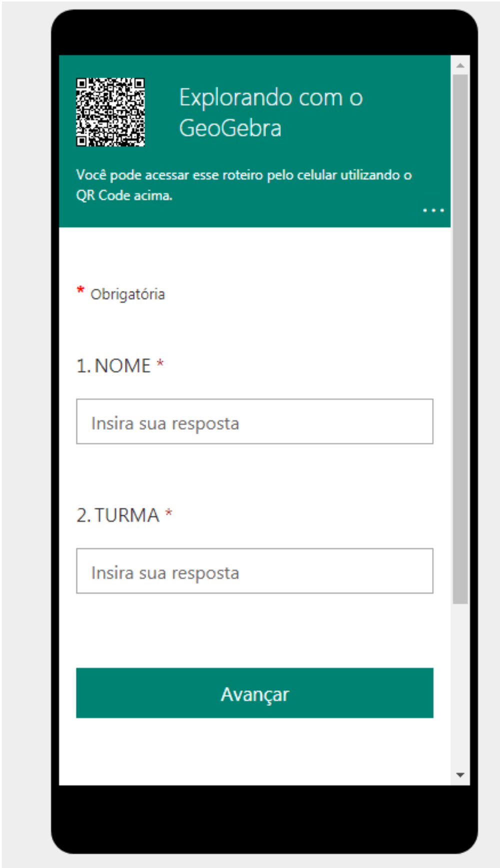
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

- **Coleta de dados**

Para que as respostas dos alunos durante a realização da atividade pudessem ser coletadas de forma mais dinâmica, utilizamos como ferramenta de coleta de dados um questionário elaborado no *Microsoft Forms*[11], no qual colocamos todo o roteiro da atividade, exatamente como descrita no capítulo 3. Esse questionário pôde ser acessado pelo computador ou por um *smartphone* utilizando o link disponibilizado ou *qrcode*. As Figura 25 e Figura 26 mostram a visualização que o aluno tinha, de acordo com o dispositivo utilizado.

[11]https://forms.office.com/Pages/ResponsePage.aspx?id=DQSIkWdsW0yxEjajBLZtrQAAAAAAAAAAAAMAAM7a8JZUQkxBVlpRTlBYSlZXT05DMEVEUko2QVkyUi4u

Figura 25 - Tela inicial do formulário no *smartphone*



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Figura 26 - Tela inicial do formulário no navegador

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Devido às limitações para inserção de textos matemáticos no *Microsoft Forms*, alguns textos precisaram de ser reescritos usando uma outra simbologia. Por exemplo, a igualdade

$\left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\overline{AC}\right|^2$, nas questões 1, 2 e 3 do Roteiro 2, foi reescrita como $[med(AC)]^2 = [med(AB)]^2 + [med(BC)]^2$.

- **Sobre a aplicação**

Inicialmente, durante uma aula síncrona[12] de 50 minutos, dois dias antes da data prevista para a aplicação da atividade, o professor aplicador usou 15 minutos para orientar os alunos sobre as características da atividade que seria disponibilizada bem como o tempo que ela permaneceria disponível para realização. Nesse encontro virtual, os alunos foram avisados que deveriam tentar dar respostas “completas” para os questionamentos, relatando o máximo de detalhes possíveis. Além disso, foram avisados que a atividade ficaria disponível durante dois dias para que pudessem realizá-la e que eles deveriam preparar o material usual de aula (caderno para anotações, livro, etc.) antes de iniciar a atividade. Foram orientados a escolher um lugar e horário em que não seriam interrompidos, de preferência, pois mesmo o questionário estando disponível por dois dias, o aluno só poderia fazê-lo uma única vez, embora não existisse limite de tempo para realização da atividade e quantidade de acessos[13]. Assim, o aluno poderia começar em um dia e finalizar no outro.

Destacamos que, anteriormente à data de aplicação das atividades, o conteúdo estudado envolvia as propriedades dos triângulos bem como suas classificações segundo a medida dos lados e a medida dos ângulos. Portanto, as definições e os símbolos matemáticos utilizados nessa atividade já eram conhecidos por parte dos estudantes.

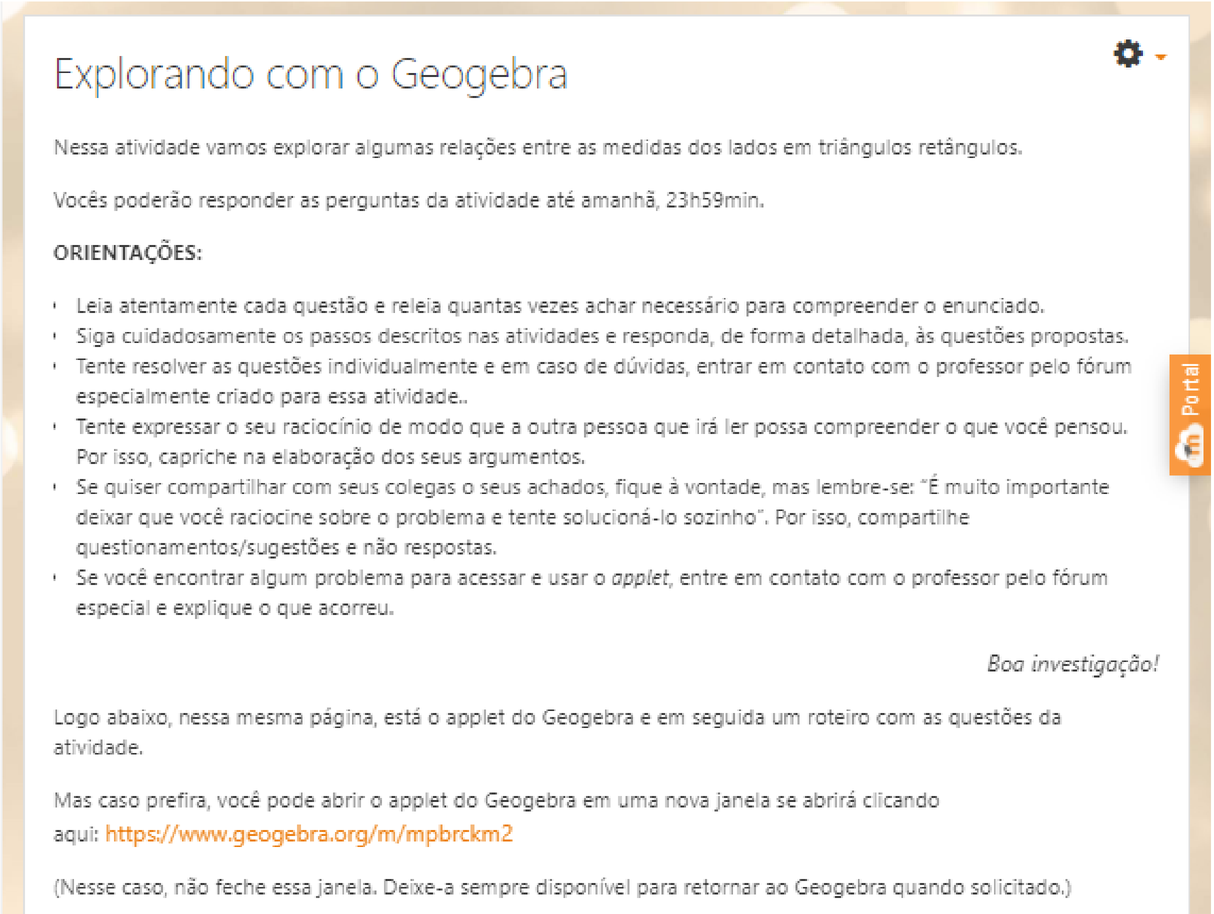
- **Design da Atividade**

No dia determinado para a disponibilização e a realização da atividade assíncrona, orientações foram disponibilizadas no ambiente *Moodle*. Na Figura 27 apresentamos como essas orientações estavam expressas.

[12] Também chamadas de aulas online, as aulas síncronas são oferecidas em tempo real através de uma plataforma virtual de videoconferência, como por exemplo o *Google Meet* ou o *Zoom*. A realização de tarefas por si só incluindo assistir a uma vídeo-aula já gravada são chamadas de aulas assíncronas e necessitam de plataformas específicas como por exemplo o *Moodle* ou *Google Classroom*.

[13] Embora o aluno só pudesse realizar a atividade uma única vez, ele poderia deixar o ambiente, desligando o computador, por exemplo, e retornando posteriormente, dentro do período de disponibilização da atividade, para dar continuidade, visto que todo o progresso nas atividades e as respostas registradas ficavam gravadas.

Figura 27 - Orientações para a atividade



Fonte: elaborado pelo autor (2020)

Após as orientações, no próprio AVA dos alunos, foram disponibilizados também o *applet* do GeoGebra utilizado para as experimentações e o questionário no *Microsoft Forms.* Também foi disponibilizado um link para acessar o *applet*[14] e outro para acessar o questionário em uma página fora do ambiente caso o aluno preferisse ou encontrasse algum problema técnico.

Destacamos que, mesmo os alunos conhecendo as notações Matemáticas utilizadas na atividade, conforme relatado acima, na aula online anterior à aplicação das atividades, os alunos foram relembrados dessas notações.

---

[14] https://www.geogebra.org/m/mpbrckm2

5.2 Análise dos dados

Após a aplicação da atividade foi possível verificar as respostas dos alunos no relatório fornecido pela plataforma do *Microsoft Forms*. A seguir, apresentamos os dados qualitativos e quantitativos resultantes da participação dos alunos no desenvolvimento da atividade.

Estamos chamando aqui, de dados quantitativos, dados objetivos que incluem, por exemplo, informações relacionadas ao tempo gasto para realização das atividades, percentual de acertos e erros das respostas das atividades e quantidade de alunos que deram respostas para cada uma das questões da atividade.

É importante destacar que por detrás de cada número, existe uma qualidade a ser explorada ao olhar de um pesquisador. Assim, os dados qualitativos incluem nossas interpretações elaboradas a partir dos dados objetivos, em uma tentativa de articulações com nosso referencial teórico, com os objetivos da atividade, além de relatos dos alunos sobre o desenvolvimento nessa atividade.

Para garantir a confidencialidade dos dados e seus sujeitos usaremos uma numeração para indicar os alunos e suas respostas ao longo das análises. Essa numeração foi atribuída de acordo com uma planilha elaborada pelo próprio recurso do *Forms* na medida em que os alunos iam terminando a atividade. Dessa forma, o primeiro aluno que finalizou a atividade denotamos por Aluno 1 e o último aluno a terminar a atividade denotamos por Aluno 31.

Optamos em fazer a análise separada de cada um dos dois roteiros que compõem a atividade, uma vez que no Roteiro 1 utilizamos das áreas dos quadrados para explorar o teorema de Pitágoras e, no Roteiro 2, utilizamos da medida dos lados do triângulo ABC para provocar nos alunos a elaboração de argumentos que os levassem (ou aproximassem) do Teorema de Pitágoras.

Mesmo que as estratégias utilizadas sejam diferentes, no que tange o objeto matemático e suas propriedades utilizados para as explorações durante a atividade (área de quadrado e medida de lado do triângulo) é importante destacar que a intenção é fazer com que os alunos possam estabelecer relações entre as duas estratégias para fazer suas inferências.

Organizamos os dados em tabelas, quadros e gráficos a fim de facilitar nossa leitura das informações obtidas com as respostas dos questionários e, assim, elaborar algumas análises.

Nas seções que seguem, apresentamos nossas interpretações.

5.2.1. Primeiros dados

Para permitir uma interação (mesmo que virtual) dos alunos, já que a realização da atividade aconteceu individualmente, os alunos tiveram um fórum exclusivo para comunicarem-se com o professor caso encontrassem alguma dificuldade ao longo do desenvolvimento da atividade.

Essa possibilidade de interação está de acordo com a concepção de elaboração da atividade moldada em preceitos de uma atividade exploratória, em que a interação entre os envolvidos (alunos e professores) se mostra fundamental para a elaboração de argumentos a partir da socialização dos achados. Os argumentos expressos ao longo da atividade, sejam em forma de dúvidas ou conjecturas, ajudam os alunos a irem refinando seus raciocínios e elaborando novas inferências até que se entenda que a tarefa foi concluída. Nesse processo, muito conhecimento é produzido, cabe ao professor enquanto mediador da atividade ir direcionando seus alunos para a consolidação do conhecimento.

Infelizmente, pouca interação ocorreu com a aplicação feita remotamente. Essa afirmação está baseada no fato de que apenas um dos alunos fez uso do fórum disponibilizado pelo professor para as dúvidas. Abaixo, segue a mensagem do Aluno 17

Mensagem do Aluno 17: “Não consegui fazer a avaliação pois quando alterava o d1 e d2 quando foi pedido a soma das áreas dos quadros verde e azul não dava igual a medida da área do quadrado vermelho assim como no primeiro exemplo.”

Diante desse questionamento, percebemos que o Aluno17 estava tentando alterar os controles *d1* e *d2* para que a soma das medidas das áreas dos quadrados verdes e azul ficasse igual à medida da área do quadrado vermelho. Em menos de uma hora, o professor respondeu ao Aluno 17 no fórum:

Mensagem do professor: “Olá! O fato de a soma das áreas ser igual nem sempre vai acontecer. Leia com atenção as perguntas. Detalhe: não se esqueça que nesse momento da atividade que você descreve, é pedido que você crie novos triângulos <u>retângulos</u>. Isto é, modifique o triângulo, mas construa novos triângulos retângulos. Ah! E fique atento às perguntas!!! Leia e releia quantas vezes for necessário.”

Além dessa interação, nenhum outro aluno relatou algum problema ou dúvida pelo fórum. Vale ressaltar que essas mensagens deixadas no fórum ficaram visíveis para que outros alunos pudessem consultar as dúvidas dos outros.

Dos 31 alunos que responderam até o final, a média de tempo gasto para realização da atividade foi de 109 minutos com mediana 59 minutos. O aluno que gastou menos tempo precisou de 13 minutos para finalizar a atividade. Pelas respostas apresentadas podemos inferir que ele realizou tudo o que foi pedido, porém, talvez por se tratar de um aluno repetente e já conhecer o Teorema de Pitágoras, tenha realizado a atividade já sabendo de qual assunto se tratava.

Dois alunos (Aluno 30 e Aluno 31) gastaram 150 minutos para realizar a atividade, tendo iniciado e terminado no mesmo horário. Destacamos que as respostas fornecidas por esses dois alunos são idênticas. O tempo gasto por esses dois alunos só é superado pelo aluno que gastou 1407 minutos, ou seja, quase um dia.

Das conclusões possíveis, podemos dizer que esses dois alunos fizeram a atividade juntos, mostrando que interagiram durante a atividade para elaboração dos argumentos, já que gastaram um tempo razoável para o desenvolvimento. Dizer que um copiou as conclusões do outro também é uma possibilidade, mas nosso conhecimento desses alunos, e pelos dados registrados de data e tempo de realização da atividade, nos faz inferir que eles desenvolveram a tarefa discutindo cada um dos passos.

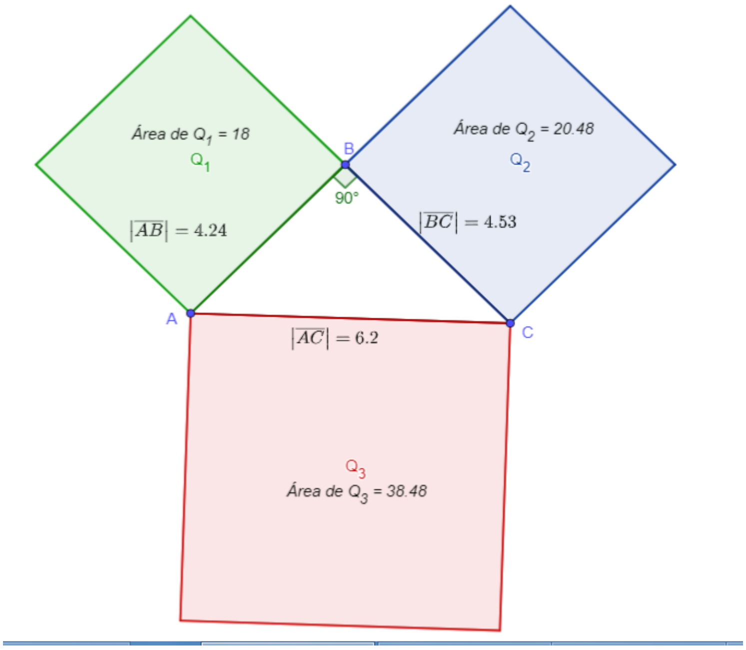
5.2.2. Análises do desenvolvimento do Roteiro 1

Na questão 1 (Roteiro 1) é solicitado que o aluno observe a figura do *applet* e anote a área dos 3 quadrados construídos e depois efetue a soma de dois desses quadrados (Q_1 e Q_2) para depois estabelecer uma relação com a área do terceiro quadrado (Q_3).

Como nessa atividade os alunos usam os dados que já se apresentam no *applet* (Figura 27), as respostas da grande maioria (aproximadamente 91%) para as medidas das áreas e da soma foram iguais e corretas, o que já era esperado.

Apenas em três respostas tivemos que os valores diferiam na parte decimal do que eram apresentados inicialmente pelo *applet*, como mostra a Figura 28

Figura 28 - Figura inicial do *applet*



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Quando elaboramos as atividades, configuramos o *applet* de tal forma que as medidas tivessem aproximação de 2 casas decimais. Não entendemos o motivo para os achados das respostas de 3 alunos, apresentadas na Tabela 3:

Tabela 3 – Algumas respostas para a questão 1

Aluno	Área quadrado 3	Área quadrado 2	Área Quadrado 1	Soma áreas 2 e 1
30	38,44	20,5209	17,9776	38,4985
31	38,44	20,5209	17,9776	38,4985
23	38.44	20.5209	17.9776	34.8697

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Talvez, problemas de configurações ou uso de navegadores podem ter ocasionado a alteração nos dados. Mas, o que mais nos chamou atenção, foi o fato dos valores das áreas dos quadrados serem exatamente os mesmos, algo que não soubemos explicar. No caso das respostas dos Alunos 30 e 31, sabemos que esses, conforme relatado mais acima, responderam todas as questões da atividade com mesmas respostas, mas o Aluno 23, não.

A soma efetuada pelo Aluno 23, nos faz inferir que o aluno cometeu um erro "bobo" na hora de efetuar a soma, mas que compromete a sua conclusão para elaboração de um argumento plausível com a proposta da atividade.

Ainda na questão 1, quando solicitados para estabelecer uma relação entre a soma das áreas de dois dos quadrados (Q_1+Q_2) com a área do terceiro (Q_3), os três alunos que apresentaram valores diferentes daqueles estabelecidos na Figura 27 para as áreas dos quadrados, chegaram em conclusões diferentes da esperada.

O Aluno 30 e o Aluno 31 concluíram que o valor da soma das áreas de Q_1 e Q_2 era “semelhante” ao valor da área do Q_3. Esse argumento evidência um conflito a respeito do que se entende por semelhança. Ao analisar as outras respostas desses alunos, observamos que os argumentos que são elaborados na conclusão do Roteiro 1 da atividade evidencia que os alunos entendem semelhança como igualdade de valores.

Isso é preocupante e destacamos dois pontos a serem considerados: primeiro se refere a comparação dos valores encontrado pelos alunos 38,4985 (soma das áreas de Q_1 e Q_2) e 38,44 (área de Q_3) serem considerados “iguais”, mostrando que esses alunos entendem que números com partes decimais próximas podem ser considerados números idênticos; segundo, se refere ao sentido sintático de semelhança na língua materna (muito parecido, idêntico) e o sentido na Matemática (proporcionalidade). Nossa interpretação é de que os alunos utilizaram o sentido dado na língua materna e, que esse, pode ter sido absorvido como o sentido dado na Matemática, levando os alunos a cometerem, futuramente, erros em outros conteúdos matemáticos.

Já o Aluno 23 concluiu que as áreas calculadas na atividade eram “quase” a mesma. Argumento que se mostrou lógico durante o desenvolvimento de toda a atividade, já que esse aluno em particular, não conseguiu observar a relação de Pitágoras com os resultados que ele encontrou nas explorações.

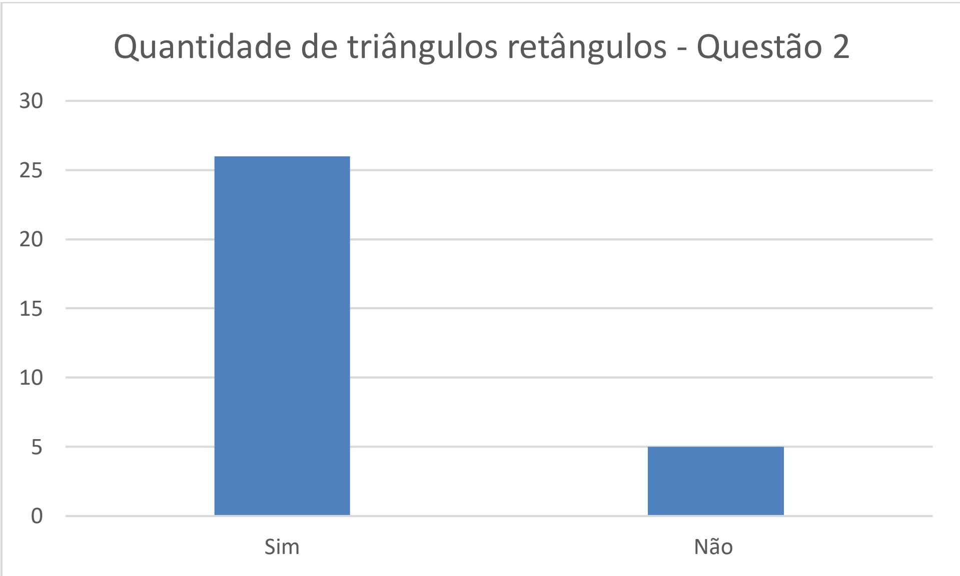
Destacamos que um dos alunos deu uma resposta que não se relacionava ao enunciado da questão “Qual a relação da soma das áreas encontrada com a área do quadrado vermelho? ”. Sua resposta foi:

Aluno 28: *76.96*

Fica claro que o aluno não entendeu o enunciado ou simplesmente fez uma leitura rápida e se baseou na pergunta anterior que solicitava as somas das áreas. Isso pode mostrar um descomprometimento em relação ao desenvolvimento da atividade, o que acarreta em uma análise prejudicada. Como dito no início, talvez se a atividade fosse aplicada nos parâmetros pretendidos com sua elaboração (presencialmente), teríamos mais controle de problemas ocorridos durante a aplicação.

Na segunda parte da exploração (Questões 2, 3 e 4) os alunos são motivados a mover alguns segmentos criando um novo triângulo retângulo. Pelos dados obtidos podemos perceber que apenas um aluno não seguiu as instruções e repetiu as respostas da primeira parte. Todos os demais apresentaram valores que indicam que exploraram e manipularam os elementos do *applet* do GeoGebra, embora em 5 respostas os valores apresentados não correspondem às medidas que indicam que os alunos criaram triângulos retângulos, mesmo que essa condição estivesse expressa na pergunta. O Gráfico 1 evidencia essa informação:

Gráfico 1 – Quantidade de triângulos retângulos na questão 2



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Ao final da questão 2, os alunos são solicitados, novamente, a verificar e descrever "qual a relação da soma das medidas das áreas encontrada com a medida da área do quadrado vermelho" encontrada por eles.

Como esperado, o Aluno 23 afirmou que não observou nenhuma relação, o que está de acordo com os valores apresentado por ele para as medidas das áreas dos quadrados. Todos os outros alunos relataram verificar a igualdade entre as medidas, inclusive aqueles que encontraram valores diferentes, como é o caso dos Alunos 30 e 31, já relatado nas observações acima. O que nos chama atenção desse fato é que dos 5 alunos que não construíram triângulos retângulos, conforme orientação da questão, 3 alunos afirmaram que as medidas eram quase iguais. Isso remete, novamente, a inferir que alguns alunos não prestaram atenção no que era solicitado e não fizeram relações corretas com seus achados. Além da falta de atenção, esses alunos podem ter utilizado somente a informação da primeira exploração, na qual todos os alunos tinham triângulos retângulos nas suas construções.

No Quadro 1, apresentamos algumas das respostas dos alunos.

Quadro 1 – Algumas respostas para a questão 2

Aluno	Respostas
2	Novamente, ambos têm o mesmo valor
4	A área do vermelho e igual a área do azul +verde
6	A relação é a medida das somas das áreas dos quadrados azul e verde ser a mesma que a área do quadrado vermelho
13	A soma da área do quadrado verde e o quadrado azul resulta na área do quadrado vermelho
14	a soma das áreas dos quadrados, azul e verde é equivalente a área quadrado vermelho
18	Área do quadrado verde + do vermelho = área do quadrado vermelho
22	A soma da área dos dois catetos é igual a área quadrado vermelho
23	não há nenhuma relação
24	relação de igualdade
25	A relação é que a medida da área dos 2 menores quadrados é quase igual à área do quadrado maior.
30	O resultado é semelhante.
31	O resultado é semelhante.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

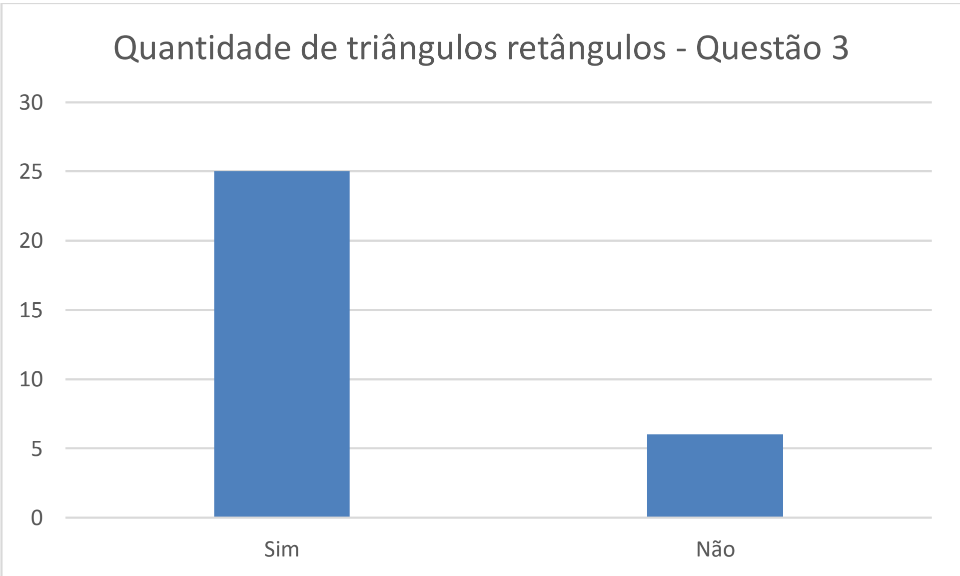
A resposta de alguns dos alunos expressa no Quadro 1 chamou-nos atenção. Os Alunos 4 e 18 utilizam uma escrita em que “misturam” língua materna e linguagem Matemática para expressar seus argumentos. Em nossas referências sobre o ensino das demonstrações os autores falam da importância dos alunos apresentarem seus argumentos em linguagem natural para depois realizarem uma transposição para a linguagem Matemática, de forma a tornar compreensível uma prova Matemática. Mesmo que de maneira simplista, a articulação entre duas linguagens pelos Alunos 4 e 18, evidencia uma compreensão entre dois campos linguísticos distintos e como eles podem ser articulados na apresentação de argumentos lógicos.

O Aluno 22 apresenta uma redação em que observamos um erro ao falar em “área de cateto”. Destacamos que de alguma forma ele já começou a associar as áreas dos quadrados com a medida dos lados dos catetos do triângulo ABC, pois não acreditamos que ao citar a “área do cateto" o aluno esteja se referindo a área ocupada pelo cateto e sim à área do quadrado sobre o cateto. Vale ressaltar que a observação realizada pelo aluno nesse sentido é necessária para a demonstração do Teorema de Pitágoras.

O Aluno 25 fala em quadrados "menores" e quadrado "maior" mesmo sem que usássemos esse atributo no enunciado das questões. Isso é relevante, uma vez que no Teorema de Pitágoras os catetos são lados de medidas menores do que a hipotenusa, o que garante a condição para o Teorema ser verificado. De alguma forma, o aluno observa informalmente essa condição.

Na terceira questão da segunda parte dessa investigação, novamente um aluno limitou-se a repetir os valores e as respostas. Os demais apresentaram dados que compravam a exploração e manipulação das figuras do *applet*, embora alguns valores mostrem que os triângulos construídos não eram triângulos retângulos.

Gráfico 2 - Quantidade de triângulos retângulos na questão 3



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

A pergunta final da terceira questão, novamente pedia a relação da soma das medidas das áreas dos quadrados azul e verde encontrada no item anterior com a medida da área do quadrado vermelho. Duas respostas se destacam por apresentarem relações verificadas pelos alunos, conforme dados da Tabela 4, porém que não eram esperadas como objetivo dessa atividade.

Tabela 4 – Algumas respostas para questão 3

Aluno	Área Quadrado 3	Área Quadrado 2	Área Quadrado 1	Soma áreas 2 e 1
5	39.08	15.08	18	33.08
23	9	9	17.9776	26.9776

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Aluno 5: *a diferença não passa de 7*

Aluno 23: *se você multiplicar ele por 2 dará o resultado dos dois juntos*

Uma possível interpretação para a afirmação do Aluno 23 da qual devemos multiplicar por 2 a área do Quadrado 1 para encontrar o resultado da soma das áreas dos Quadrados 2 e 3s é a utilização do número 18 como aproximação para o valor 17,9776, apresentado por ele como área do Quadrado 1. Aqui, mas uma vez, observamos a condição de "igualar" números racionais em sua forma decimal, com a parte inteira mais próxima. Ressaltamos que a instrução da questão pedia para o aluno comparar o resultado da soma das medidas de área dos Quadrados 2 e 1 com a medida de área do Quadrado 3.

Destacamos aqui o Aluno 22 usa novamente a expressão "área do cateto" equivocadamente, embora já demonstre a associação que faz com as áreas dos quadrados observados.

Os Alunos 27 e 30 utilizam os termos "próximo" e "semelhante" em suas respostas, muito provavelmente pelo fato de terem utilizados aproximações que levassem aos valores apresentados por eles., embora o resultado do Aluno 27 apresente uma diferença maior que duas unidades. A Tabela 5 retrata esses valores:

Tabela 5 – Valores apresentados pelos Alunos 27 e 30

Aluno	Área Quadrado 3	Área Quadrado 2	Área Quadrado 1	Soma áreas 2 e 1
27	31.36	15.76	18	33.76
30	18,0625	0,0784	17,9776	18,056

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

No Quadro 2, apresentamos algumas das respostas dos alunos para a relação estabelecida entre a soma das áreas do quadrados azul e verde com a área do quadrado vermelho:

Quadro 2 – Algumas conclusões

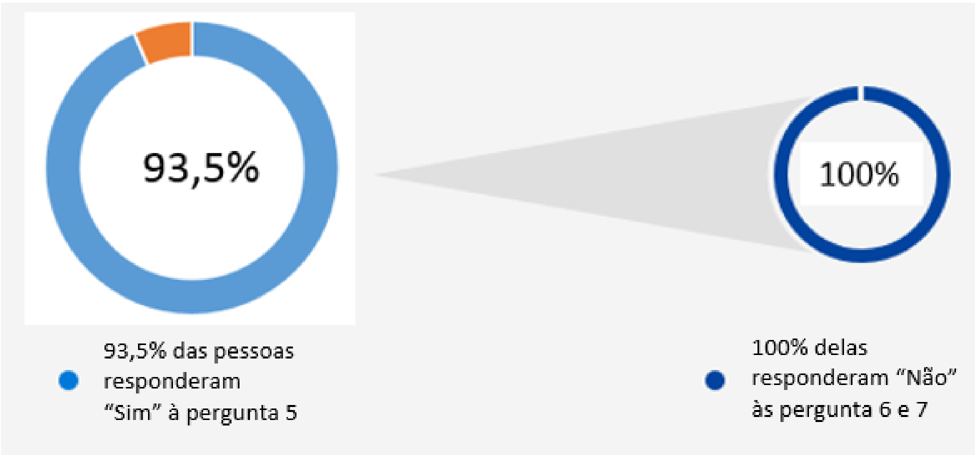
Aluno	Respostas
3	a área do quadrado vermelho é igual a soma do verde e do azul
4	a area do vermelho e igual a azul+verde
5	A diferença não passa de 7
6	A relação é a medida da somas das áreas dos quadrados azul e verde ser a mesma que a área do quadrado vermelho
8	Ambos são iguais a 21.38.
13	A soma da área do quadrado verde e do quadrado azul resulta na área do quadrado vermelho
14	a soma das áreas dos quadrados,azul e verde é equivalente a área quadrado vermelho
15	a relacao do azul mais do vermelho e igual a 68
16	A relação é que a soma das áreas dos quadrados (verde e azul) é a mesma do que a área do quadrado vermelho
17	as duas medidas tem o mesmo valor
18	Área do quadrado verde+do vermelho= área do quadrado vermelho
19	que ambas dão o mesmo resultado
20	A soma da área dos dois catetos é igual a área da hipotenusa
21	a relaçao é que elas tem a mesma medida
22	A soma da area dos dos catetos e igual a area do quadrado vermelho
23	se voce multiplicar ele por 2 dara o resultado dos dois juntos
25	A relação é que a soma da área dos 2 quadrados menores é igual à área do quadrado maior.
26	a soma da área de azul + verde é igual a área de vermelho
27	O número da área é próximo
29	A soma da área dos quadrados azul e verde é igual à área do quadrado vermelho.
30	O resultado é semelhante.
31	O resultado é semelhante.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Na terceira e última parte do roteiro 1, pedimos que os alunos chegassem em uma conclusão a respeito das equações $a^2 = b^2 + c^2$, $b^2 = a^2 + c^2$ e $c^2 = a^2 + b^2$, sendo a área do quadrado vermelho a^2, a área do quadrado azul b^2 e a área do quadrado verde c^2 .

Uma grande porcentagem de alunos respondeu "**Sim**" à pergunta 5 (Se a área do quadrado vermelho é a^2, a área do quadrado azul é b^2 e a área do quadrado verde é c^2, podemos concluir que $a^2 = b^2 + c^2$?) e todos responderam "**Não**" às perguntas 6 e 7. O Gráfico 03 abaixo evidencia esse percentual.

Gráfico 3 – Comparação das respostas das questões 5, 6 e 7



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O Aluno 23 afirma que sua "conclusão é que a área do quadrado verde sempre é a mesma". Os demais alunos apresentam conclusões esperadas para a atividade proposta, como por exemplo, o Aluno 9 que descreve que "quando você muda o tamanho da área dos quadrados, mas o ângulo é mantido, a soma dos quadrados menores é igual à do maior".

Destacamos a resposta do Aluno 24 que, mesmo não chegando as conclusões esperadas nas questões anteriores e afirmando que não via relação alguma entre a soma das áreas dos quadrados azul e verde com a área do quadrado vermelho, ele respondeu "sim" a questão 5, alegando que a equação $a^2 = b^2 + c^2$ era verdadeira.

Os Alunos 5 e 15 alegram que não se podia concluir que $a^2 = b^2 + c^2$. No caso do aluno 5 é compreensível sua conclusão, uma vez que quando ele manipulou o *applet* para gerar outros triângulos retângulos nas questões anteriores e verificar a relação entre as áreas, ele fez as observações em triângulos não-retângulos.

Já o Aluno 15, para nossa surpresa, apesar de afirmar que a relação era falsa, suas observações anteriores mostram que ele concluiu que a soma das áreas dos triângulos azul e verde era igual a área do triângulo vermelho. Pode ser que ao se expressar a relação em uma linguagem Matemática, o aluno não conseguiu fazer a transposição adequada, entendendo a notação Matemática desvinculada do sentido que ele deu ao se expressar na língua materna.

5.2.3 Análise do desenvolvimento do Roteiro 2

No Roteiro 2 da atividade, nas questões 1, 2 e 3, os alunos utilizaram o *applet* do GeoGebra para comparar as medidas dos lados do triângulo ABC. Modificando o triângulo, que agora não precisava ser necessariamente retângulo, os alunos foram levados a verificar se a relação do Teorema de Pitágoras era válida em três momentos. Os dados coletados e expressos na Tabela 6 mostram que os alunos criaram, na questão 1, triângulos com diversas medidas para o ângulo $\angle ABC$ do triângulo construído e apresentado no *applet* do GeoGebra.

Tabela 6 – Dados da questão 1

Aluno	|AB|	|AC|	|BC|	∠ABC
1	4.24	5.43	3.39	90
2	4.24	3.61	3.93	52.31
3	4.24	5.02	5.25	B=62,74
4	4.24	8.25	7.07	97
5	4.24	5.12	3.34	83.93
6	4.24	6.28	3.77	102,99º
7	4.24	5.39	1.61	127.87
8	4.24	3.36	5.01	41.57 graus
9	4.24	6.32	3.67	105.64º
10	4.24	3.92	1.84	67.38
11	4.24	5.02	5.25	62.74
12	4.24	3.52	5	43.85
13	4.24	6.65	3.26	124,38
14	4.24	5.35	3.25	12.84
15	4.24	8.25	7.07	18
16	4.24	5,73	4,5	81,87°
17	4.24	3.54	3.54	53.13
18	4.24	7	5.57	87.88
19	4.24	7.61	5.33	104.59
20	4.24	5.48	5.42	67.78
21	4.24	8.44	5.01	131.57º
22	4.24	4.28	0.57	111.8
23	4.24	2.98	2.3	45
24	4.24	8,25	7,07	90
25	4.24	8.3	5.06	125.91°
26	4.24	5.11	5.28	63.78
27	4.24	2.91	4.96	12.11
28	4.24	8.38	5.02	129,29
29	4,24	5,13	2,16	101,31°
30	4,24	3,26	2,41	49,76
31	4,24	3,26	2,41	49,76

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

De todos as medidas apresentadas, apenas duas são, exatamente, iguais a 90º. Uma dessas respostas foi apresentada pelo Aluno 1 que, como já mencionamos anteriormente, não movimentou os comandos do *applet* para criar novos triângulos.

O Aluno 24, que também afirmou que a medida do ângulo pedido na questão 1 era igual a 90º, não apresentou dados coerentes com o quadrado da medida dos lados o que o levou a negar que a soma dos quadrados das medidas dos dois lados de menor comprimento era igual ao quadrado da medida do maior lado. A Tabela 7 mostra esses valores.

Tabela 7 – Dados apresentados pelo Aluno 24 na questão 1

Aluno	$\|AB\|^2$	$\|AC\|^2$	$\|BC\|^2$	$\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|AB\|^2$
24	17,9776	68,0625	58,3275	Não

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Nessa segunda questão, observamos que 4 alunos afirmaram que a relação pitagórica era verdadeira. Mas nenhum dos dois alunos que citaram que a medida do ângulo ∠ABC era de 90º figura entre esses 4, como mostra a Tabela 8.

Tabela 8 – Dados apresentados pelos Alunos 14, 18, 22 e 27 na questão 1

Aluno	Ângulo	$\|AB\|^2$	$\|AC\|^2$	$\|BC\|^2$
14	12.84	17,97	28,62	12.25
18	87.88	17,97	49	32,49
22	111.8	17,9776	18,3184	0,3249
27	12.11	2,.......	1......	2,......

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Com a aplicação da atividade de forma assíncrona não foi possível discutir, durante a realização da atividade sobre fato desses alunos afirmarem que a relação era válida sem que o triângulo fosse retângulo. Por isso, supomos que tais alunos fizeram consultas a algum documento, colega ou até mesmo familiares.

Na questão 2 dessa segunda etapa desse, foi solicitado que os alunos criassem novos triângulos, não necessariamente retângulos, e comparassem o quadrado das medidas dos lados e a medida dos ângulos. Pela primeira vez, o Aluno 1 apresentou medidas diferentes daquelas mostradas inicialmente pelo *applet.*

Observamos aqui que três dos quatro alunos que afirmaram ter verificado a relação no primeiro momento, afirmaram novamente que a relação era verdadeira, embora os valores apresentados do quadrado das medidas dos lados e o valor da medida do ângulo não confirmassem a relação. Novamente, como não acompanhamos presencialmente a realização da atividade, não podemos verificar o porquê dessas afirmações. Na Tabela 9 trazemos alguns desses dados:

Tabela 9 - Dados apresentados pelos Alunos 14, 18, 22 na questão 2

Aluno	Ângulo	$\|AB\|^2$	$\|AC\|^2$	$\|BC\|^2$
14	19.59	17.97	68.06	49.98
18	73.39	17,97	25,50	17,72
22	26.22	17,9776	5,7121	27,8784

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Ainda nessa etapa, dois alunos afirmaram que o ângulo pedido era um ângulo reto, mas que a relação não se verificava. Na Tabela 10 temos as respostas desses dois alunos:

Tabela 10 - Dados apresentados pelos Alunos 5 e 25 na questão 2

Aluno	Ângulo	$\|AB\|^2$	$\|AC\|^2$	$\|BC\|^2$
5	90	17.97	21.34	3.38
25	90	17.9776	37.21	19,1844

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Na questão 3 desse roteiro, foi pedido pela última vez que os alunos modificassem os triângulos apresentados no *applet*. Mais uma vez, verificamos que o Aluno 1 relatou medidas que comprovam que ele modificou os triângulos e fez explorações, de acordo com o objetivo da atividade.

Depois dessa nova alteração dos triângulos, nenhum aluno afirmou que a medida do ângulo ABC era de 90º. Porém, os quatro alunos que, no primeiro momento, afirmaram que a relação proposta era válida, também o fizeram aqui, mesmo que os dados mostrassem o contrário, conforme a Tabela 11

Tabela 11 – Dados apresentados pelos Alunos 14, 18, 22 e 27 na questão 3

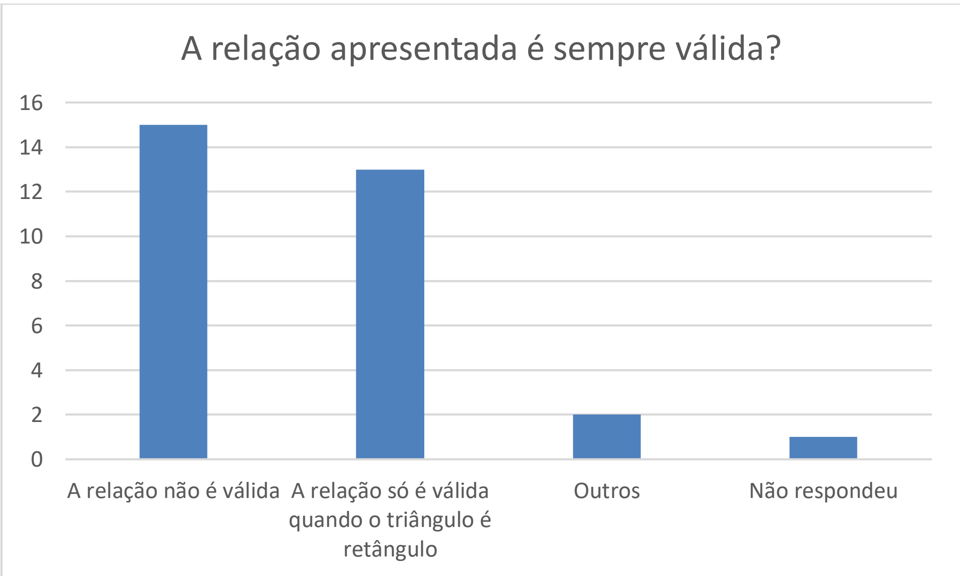
Aluno	Ângulo	$\|AB\|^2$	$\|AC\|^2$	$\|BC\|^2$
14	12.84	17.97	28.62	10.56
18	27,47	17,97	3,88	15,84
22	123,63	17,9776	27,5625	2,3409
27	10,04	2,…….	1,………….	1,………

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

É preciso buscar entender quais motivos levaram esses mesmos alunos a inferirem que o Teorema de Pitágoras era verdadeiro, mesmo que os valores encontrados por eles revelem que a identidade não era válida. Falta de compreensão da linguagem Matemática pode ser uma delas, mas os dados também nos mostram que os alunos cometeram erros no cálculo da medida dos lados do triângulo ao serem elevados ao quadrado. Juntando isso, como as orientações solicitavam que os alunos utilizassem duas casas decimais de aproximação, julgamos que isso pode ter sido relevante para algumas das conclusões obtidas.

Por último, os alunos foram orientados a usar o mouse e movimentar os pontos da figura do *applet*, observando se, em algum momento, a relação $[med(AC)]^2 = [med(AB)]^2 + [med(BC)]^2$ era verdadeira. A maioria afirmou que a relação não era válida, como mostra o Gráfico 4:

Gráfico 4 – Conclusão sobre a validade da propriedade investigada



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O Aluno 17 foi o único aluno que não respondeu essa questão mas deixa uma observação para esse fato.

Aluno 17: *não tive conclusão pois aparentemente não mexi no GeoGebra corretamente.*

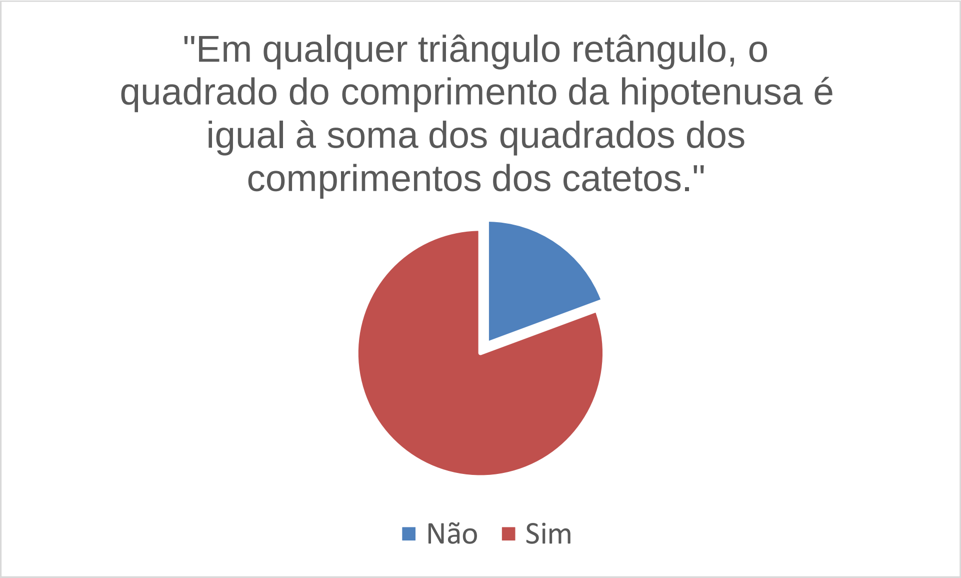
Os Alunos 5 e 28 apresentaram respostas discrepantes dos demais:

Aluno 5: *Isso raramente ocorre.*
Aluno 28: *O triângulo é isósceles.*

Em particular, no caso do Aluno 28, as medidas apresentadas por ele na questão, não correspondem às medidas dos lados de um triângulo isósceles. Essa incoerência demonstra uma total falta de domínio do que é ser isósceles.

Em seguida, nessa última etapa, o enunciado do Teorema de Pitágoras é apresentado e os alunos devem responder, com base nas suas observações descritas no desenvolvimento dessa atividade, se verificaram essa afirmação. Embora na etapa anterior desse segundo roteiro a maioria ter afirmado que a relação não ocorreu, nesse momento a maior parte dos alunos respondeu afirmativamente.

Gráfico 5 – Alunos que verificaram o Teorema de Pitágoras



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Acreditamos que esse percentual que observou que o Teorema de Pitágoras é válido, teve como referência os achados com o Roteiro 1 e suas relações com o desenvolvimento do Roteiro 2.

Para os alunos que não conseguiram verificar a relação foi pedido que registrassem a opinião sobre o que pode ter levado à não verificarem. No Quadro 3, destacamos essas observações.

Quadro 3 – Observações apresentadas pelos alunos

Aluno	Respostas
1	não sei
4	não entendi a relação da afirmação de pitagoras com as minhas observações nesta atividade
5	Eu acho que pode ter acontecido problemas como: meu computador, ou que a afirmação é falsa
8	Não sei o que pode ter acontecido.
15	não achei muito bem os pontos corretos
23	não sei o que pode ter acontecido porem nenhum deu isso

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Chamamos atenção para o fato de que o Aluno 4 fez uma observação que associa seus achados com a conclusão. De certa forma, os valores que ele encontrou ao realizar as explorações o levaram a não validade do Teorema de Pitágoras, o que se mostrou coerente. Infelizmente, os passos não foram seguidos corretamente e suas observações não contemplaram o que esperávamos com a atividade.

As observações dos outros alunos evidenciam uma falta de compreensão sobre o que pode ter ocorrido, mesmo que eles não soubessem que o Teorema fosse válido, uma vez que eles ainda não tinham visto essa matéria. Mas, dentre a observação desses alunos, a do Aluno 15 evidencia um "*mea-culpa*" por não ter chegado a conclusão esperada, algo preocupante, já que se responsabiliza pelo ocorrido, mesmo que sem argumentos lógicos.

Ainda, o Aluno 3 afirmou que conseguiu verificar a relação, mas escreveu uma observação que nos deixou em dúvida se ele conseguiu aproveitar essa atividade ou não redigiu sua observação corretamente.

Aluno 3 *Cheguei a essa conclusão mas entendi muito bem*.

Os Alunos 28, 29, 30 e 31, que responderam afirmativamente à questão anterior, utilizaram o espaço para afirmarem novamente que chegaram à conclusão. Outros alunos que afirmaram ter observado a propriedade pitagórica também fizeram considerações:

Aluno 11: *Eu cheguei a essa conclusão. Na questão em que eu escrevi que não tinha achado a relação, o triângulo não devia ser retângulo.*

Notamos nessa fala, a observação de que a relação não se aplica em triângulos não retângulos, mesmo que ainda insegura.

Aluno 25: *Eu acho bem estranho, porém que é tudo pura Matemática*.

A fala do Aluno 25 evidencia uma relação com Matemática e, mais ainda com as demonstrações Matemáticas, muito presente no Ensino. Uma fala que distância a Matemática do campo do "possível" e a coloca em um lugar quase de "magia" e "mistério", no qual as relações e propriedades dos seus objetos de estudo surgem do nada ou de mentes Matemáticas brilhantes que controlam como a Matemática se cria, se faz.

5.3 Após a aplicação

Na aula online seguinte à realização da atividade foi reservado um momento para discussão. Todos os alunos foram convidados a relatar suas percepções sobre a atividade, mas apenas dois alunos participaram, voluntariamente.

Segue a fala desses dois alunos.

Aluno 15: *Foi muito divertido usar o GeoGebra. Meu pai é engenheiro e sempre ouço ele falar do Teorema de Pitágoras*.

Aluno 25: *Não gostei muito de ficar fazendo a atividade no computador. Prefiro lista de exercícios pra fazer no caderno!*

O Aluno 3 foi chamado, nominalmente, para que pudesse explicar a observação deixada na atividade. Nesse momento, o Aluno explicou que apesar de ter chegado à conclusão que era o objetivo da atividade ele não conseguiu entender muito bem como aquela relação podia ser verdadeira e aplicável.

Dos 6 alunos que afirmaram não ter chegado à conclusão, dois alunos (Aluno 4 e Aluno 23) não participaram dessa aula online. Os outros 4 alunos foram chamados a participar e interagir, mas não quiseram responder.

Destacamos, aqui, que alguns alunos que não realizaram a atividade, pediram para que fosse dada uma nova oportunidade. Como grande parte dos alunos já tinham participado e os resultados já haviam sido coletados, foi disponibilizado um *link* para o *applet*, juntamente com o roteiro para a atividade para que eles pudessem realizá-la sem que houvesse a coleta de dados. Esse *link* também ficou disponível para todos aqueles que fizeram e quisessem acessar novamente atividade.

Em seguida, nessa mesma aula online, o Teorema de Pitágoras foi apresentado formalmente com alguns exemplos de aplicação.

Queremos registrar que, mesmo diante das dificuldades em realizar remotamente uma atividade com características exploratórias, achamos a experiência válida e, conseguimos, em parte, atingir os objetivos com a aplicação.

Colocar em evidência o aluno como construtor do seu conhecimento, permitindo que ele “crie” Matemática, o ajuda a estabelecer uma relação melhor com as demonstrações Matemáticas e elas passam a fazer mais sentido. Além disso, os alunos experimentam uma sensação de protagonismo quando elaboram argumentos que justificam relações e propriedades matemáticas, sentido mais seguros para inferir e conjecturar novas proposições.

Importante destacar que o uso do GeoGebra e outros recursos computacionais foram fundamentais para todo o desenvolvimento e se mostraram importantes para o processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, não podemos negar que o uso desses recursos precisam fazer parte da atividade profissional dos professores, que podem encontrar nesses, outros meios para ajudá-los em seu dia-a-dia escolar.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou três atividades experimentais para o ensino de propriedades geométricas no ensino básico. Ao iniciarmos essa pesquisa, com a revisão de literatura, procuramos analisar os objetivos norteadores desta dissertação, em especial a criação dessas atividades, com o intuito de promover, a partir de atividades com pressupostos de investigações/explorações Matemáticas, reflexões sobre tais propriedades geométricas e contribuir para o exercício da escrita de argumentos matemáticos, aproximando nosso aluno da escrita de uma demonstração.

A construção das atividades considerou a aplicação das mesmas em duas realidades: em escolas que dispõem de um laboratório de informática e também em escolas com menos recursos. Por esse motivo, cada uma das três atividades é apresentada subdividida em uma possibilidade de aplicação utilizando o aplicativo GeoGebra e uma outra possibilidade, sem a utilização desse aplicativo, em que seria possível realizar uma investigação sem a necessidade de recursos didáticos mais elaborados.

Embora as duas possibilidades de cada atividade fossem diferentes entre si, a construção de cada uma dessas possibilidades considerou a exploração de uma manipulação geométrica que pudesse colocar os alunos diante de uma situação de verificação/demonstração da propriedade. Além disso, a utilização de atividades investigativas pretendia contribuir para a escrita e argumentação Matemática.

Assim, direcionamos a construção dessas atividades para estimular o pensamento argumentativo geométrico dos alunos com a criação e verificação de hipótese, mas sem a intenção de buscar um formalismo lógico. Nesse sentido, as propostas buscaram oportunizar os alunos de vivenciarem uma experiência Matemática explorando, experimentando, conjecturando, refletindo e interpretando as relações entre os objetos buscando justificativas para tais propriedades.

Destacamos novamente aqui que avaliamos como necessário o conhecimento do docente acerca das demonstrações formais. Gazire (2000) afirma que se um professor sistematicamente não ensina geometria, o provável será que seu aluno (futuro professor) também não o faça. Por isso, consideramos que além do ensino da Geometria, o professor deve estimular o pensamento dedutivo e argumentativo em seus alunos contribuindo para a construção de conceitos e propriedades geométricas. Nesse sentido, acreditamos que as atividades expressas nessa dissertação cumprem esse papel e podem muito auxiliar o trabalho de outros professores.

Infelizmente, por conta do distanciamento social imposto em virtude da pandemia do coronavírus, não foi possível realizar a aplicação dessas atividades como era nossa intenção inicial. Em um primeiro momento, pensávamos que teríamos que abrir mão dessa aplicação, pois as atividades eram baseadas na estratégia de um trabalho colaborativo entre alunos e professor, segundo a proposta de investigação Matemática de Ponte (1991). Porém, como era de nosso interesse que tal aplicação ocorresse, decidimos por aplicar a atividade envolvendo o Teorema de Pitágoras utilizando dos recursos disponíveis para nossa comunicação online com os alunos.

Avaliamos quais os recursos computacionais (que muitas vezes também estão presentes nos dispositivos móveis) estavam disponíveis para os alunos e decidimos por aplicar tal atividade englobando três recursos: o ambiente virtual *Moodle*, a plataforma de colaboração do GeoGebra e a ferramenta de criação de questionário *Forms.* O uso dessas ferramentas, bem como de seus recursos, possibilitou uma aplicação que consideramos a ideal para o momento de distanciamento social, visto que não limitou aos encontros síncronos o acesso ao conteúdo mas, em consonância com a realidade atual da sociedade, possibilitou que o aluno escolhesse o momento ideal para a realização da atividade dentro do prazo estabelecido.

É claro que as perdas nesse tipo de aplicação foram grandes. Por exemplo, não foi possível garantir que os alunos não se comunicaram com todos os outros da sala, ou ainda, que não consultaram fontes que interfeririam negativamente no processo de investigação. Também não podemos afirmar que os resultados apresentados comprovam (ou não) desenvolvimento de experiências Matemáticas e das investigações propostas. Mesmo por que, em várias respostas, notamos afirmações ambíguas e conflitantes. O que não quer dizer que, em experiências e investigações matemáticas, ambiguidades e conflitos não ocorram, inclusive são situações comuns nessas estratégias metodológicas. O que queremos dizer é que devido ao caráter de aplicação online da atividade, tivemos poucos instrumentos analíticos para chegar em uma conclusão mais legitima sobre os achados.

Embora não consideramos esse tipo de aplicação como a ideal para as atividades propostas, foi possível perceber que o uso dessas ferramentas se mostrou positivo, uma vez que elas possuem interface amigável e os alunos, sujeitos da pesquisa, têm fácil acesso a todas elas. Dessa forma, entendemos que tais ferramentas podem ser aliadas ao ensino presencial representando novas possibilidades para a prática pedagógica como, por exemplo, em situações de sala de aula invertida.

Durante o estudo dessas ferramentas, também foi possível verificar que os usos dessas tecnologias podem simplificar algumas tarefas no cotidiano escolar do professor. Por exemplo, ferramentas de criação de questionários fornecem, além da correção automática, possibilidades de relatórios que podem ser estudados de modo a verificar possíveis dificuldades e defasagens. Muito embora, o uso de novas ferramentas requer que o professor dispenda parte de seu tempo útil no desenvolvimento de novas habilidades, acreditamos que, quando mescladas com outras metodologias, tais ferramentas possam ampliar os resultados da aprendizagem.

Com esse trabalho, percebemos que é necessário cada vez mais no mundo moderno enfatizar o uso de tecnologias digitais (móveis ou não) para produtividade, comunicação, colaboração, criatividade, análise de dados, avaliação e resolução de problemas, sobretudo na sala de aula.

Na análise da atividade aplicada, foi possível constatar que as respostas das questões discursivas foram apresentadas de maneira muito resumida e superficial. Como a atividade proposta não era obrigatória nem avaliativa, não acreditamos que as respostas dadas foram apenas para "agradar o professor", embora consideramos que isso possa ter acontecido.

Talvez, por se tratar da disciplina de Matemática, em que os alunos não têm contato com tantas questões discursivas, haja, por parte deles, um bloqueio intrínseco quanto a dar respostas longas em atividades dessa disciplina. Isso pode ser evidenciado em um momento da discussão da atividade, na aula síncrona, em que um aluno relatou que "textos 'grandes" ele só escreve na aula (disciplina) de Português e História".

Dada a especificidade da linguagem Matemática, percebemos que se faz necessário estimular a escrita para a aquisição de novas habilidades que contribuam para o aprimoramento do raciocínio lógico matemático e para a compreensão e escrita de demonstrações. Carvalho (2006) afirma que o aprendizado dirigido permite a criação de um ambiente escolar no qual os estudantes são encorajados a desenvolver o conhecimento matemático por meio de questionamentos, de dúvidas, das percepções e sem se restringir aos formalismos matemáticos de todos os problemas advindos da comunicação. Por isso, a autora justifica que é necessário incluir a elaboração de discussão em que os alunos experienciem a construção e a comunicação de argumentos matemáticos sólidos, na defesa de ideias Matemáticas, constituindo assim uma prática cultural que pode encontrar em si mesma os conteúdos e mecanismos para a construção de significados.

Nesse sentido Klusener (2000) destaca que

> Temos ensinado Matemática de maneira a não privilegiar linguagem em suas diferentes expressões – oral, escrita, visual – mas enfatizando fundamentalmente os códigos escritos. Esse procedimento pode ser creditado à metodologia utilizada no ensino e que não tem possibilitado, via de regra, nem o desenvolvimento da linguagem em todos os seus aspectos, nem a formação de conceitos, já que vem se utilizando um vocabulário básico limitado, restritivo e específico. Esta tem sido, quem sabe, uma das causas para implementar-se a distância entre a Matemática ensinada na escola e a realidade Matemática vivenciada pelo nosso aluno (KLÜSENER, 2000, p.179).

Algumas questões complementam e ficam em aberto para futuras pesquisas:

- Como trabalhar as habilidades relativas à argumentação e escrita em outros campos da Matemática de forma a contribuir para o aprimoramento do pensamento lógico dedutivo?
- Quais ferramentas tecnológicas podem contribuir na melhoria das práticas pedagógicas em um cenário pós pandemia?

Entendemos que essa pesquisa não possui um fim em si mesma. A partir dessas novas questões e em busca de outros esclarecimentos que, porventura, venham a ser necessários, torna-se importante a ampliação dos conhecimentos discutidos nesta pesquisa, procurando examinar novas possibilidades, propor novas hipóteses e gerar novas conclusões.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. **Processus de preuve et situations de validation:** Educational Studies in Mathematics.Springer: 1987

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática.** São Paulo: Blucher, 2019

CANAVARRO, A. P. **Concepções e práticas de professores de Matemática: três estudos de caso.** 1993. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Lisboa, Lisboa, 1994

CARVALHO, A. M. F. T. de **Os problemas da solução: dificuldades com a metodologia da "resolução de problemas"**. In: PIRES, M. N. M. et al. Fundamentos Teóricos do Pensamento Matemático. Curitiba: IESDE, 2006.

CHATEAUBRIAND, O. **Logical forms. Part II:** logic, language, and knowledge. Campinas: Unicamp, 2005.

COMANDINO, F. E. **Elementos de Geometria**. São Paulo: Cultura, 1944

COURANT, R., ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

COLL, C. O **Construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 1997

CRAVEN, T. C, **Earliest Uses of Symbols of Set Theory and Logic** set. 2017. Disponível em: http://www.math.hawaii.edu/~tom/history/set.html. Acesso em: 19 ago. 2020

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria.** São Paulo: Atual, 1992.

FERREIRA, F. A. **Provas e Demonstrações:** Compreensões de dez anos da produção em Educação Matemática (2003-2013). 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

FERREIRA, L. S. **Como o teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano**. 2017. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus., 2017.

FOSSA, J. **Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GARBI, G. G. **C.Q.D. Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria.** São Paulo: Livraria da Física, 2010

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP.

KAHN, C. H. **Pitágoras e os pitagóricos: uma breve história.** Tradução Luís Carlos Borges. São Paulo: Loyola, 2007.

KLÜSENER, R. **Ler, escrever e compreender a Matemática, ao invés de tropeçar nos símbolos.** In: NEVES, I. C. B. (Org.) Ler e escrever: compromisso de todas as áreas. 3. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2000

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

MACHADO, F. B.; MIRANDA, L. L. **O uso do construtivismo e da afetividade nas metodologias de ensino à distância**. 2006. Especialização (Trabalho de Conclusão de Curso). Pontifica Universidade Católica, Rio de Janeiro. 2006.

OSÓRIO, V. L. **Demostraciones y conjeturas en la escuela media.** Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas. Ano 2, num.3. Janeiro, 2002.

PONTE, J. P. **Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios?** Revista Ibero-americana de Educação, n. 24, p.63-90, 2000. Disponível em: http://www.rieoei.org/rie24a03.htm . Acesso em: 18 out.2019

SILVA, J. J. **Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática**. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p.68-78. Rio Claro: UNESP, 2002.

VILLIERS, M**. Papel e função da demonstração no trabalho com o Sketchpad**. Educação Matemática, nº 62. Março/Abril de 2001