



Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Faculdade de Formação de Professores.

Rodrigo Valmont Andrade

Matemática aplicada na dinâmica populacional de algumas  
espécies de abelhas nativas

São Gonçalo

2020

Rodrigo Valmont Andrade

**Matemática aplicada na dinâmica populacional de algumas espécies de  
abelhas nativas**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao , da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores..

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa García Márquez  
Coorientador: Prof. Dr. Jorge Corrêa de Araújo

São Gonçalo  
2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

---

A553  
TESE

Andrade, Rodrigo Valmont

Matemática aplicada na dinâmica populacional de algumas espécies de abelhas nativas / Rodrigo Valmont Andrade. – São Gonçalo, 2020-90 f.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa García Márquez.

Coorientador: Prof. Dr. Jorge Corrêa de Araújo.

Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Dinâmica das Populações. 2. Modelagem Matemática. 3. Abelhas indígenas. I. Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa García Márquez. II. Prof. Dr. Jorge Corrêa de Araújo. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores. IV. Título.

CRB/7 - 6150

CDU 51.07

---

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Rodrigo Valmont Andrade

**Matemática aplicada na dinâmica populacional de algumas espécies de  
abelhas nativas**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao ,  
da Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Faculdade de Formação de Professores..

Aprovada em 30 de setembro de 2020.

Banca Examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa García Márquez (Orientadora)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof. Dr. Jorge Corrêa de Araújo (Coorientador)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Tatiana Chrysostomo Santos  
Universidade Salgado de Oliveira – Universo

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Ana Luiza de Oliveira Nascimento  
Programa de Pós-graduação em Educação – UFF

São Gonçalo

2020

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, em especial a senhora Luiza de Oliveira Valmont, que sempre me propiciou condições de estudo. estando presente em todas as minhas graduações. Não poderia ser diferente neste momento, muito obrigado mãe.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela dádiva da vida, saúde e paz no coração, só desta forma seria possível completar essa incrível etapa de aprendizado.

Agradeço a minha esposa Fabiana e meu filhote Bernardo por serem os alicerces que me direcionam e motivam sempre na busca de conhecimento, sem vocês não conseguiria chegar até aqui.

Agradeço a meu irmão Luiz, meus pais Luiz, Luiza e Alício a quem tenho amor paternal. Vocês me proporcionam segurança e sempre estiveram ao meu lado.

Agradeço a minha orientadora Dra. Rosa G. Márquez e ao coorientador Dr. Jorge C. Araújo pela sapiência, paciência e orientação que possibilitou o conhecimento e um olhar mais amplo para a prática docente.

Agradeço aos professores do PROFMAT polo UERJ-FFP em São Gonçalo por proporcionarem este curso, pela troca de experiência e oportunidade de aprimorar meu conhecimento.

Agradeço aos colegas do curso por proporcionarem momentos agradáveis e pela troca de experiências.

Agradeço a meliponicultora Raquel Santos Rodrigues, responsável pelo Meliponário Nativas de Ouro e Gestora do grupo de WhatsApp Criar para preservar ANSF. A sua contribuição com as belas imagens em muito contribuiu na ilustração deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo bolsa de estudos, algo muito importante que me permitiu conciliação entre o estudo e o trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Na semente minúscula reside o germe do tronco benfeitor. Educa e transformarás a irracional idade em inteligência, a inteligência em humanidade e a humanidade em angelitude. Educa e edificarás o paraíso na Terra."

*Emmanuel*

"A Matemática é o próximo microscópio da biologia, só que melhor. A Biologia é próxima física da matemática, só que melhor.."

*Cohen, 2004*

## RESUMO

ANDRADE, Rodrigo Valmont *Matemática aplicada na dinâmica populacional de algumas espécies de abelhas nativas*. 2020. 90 f. Dissertação. (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT ) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores., São Gonçalo, 2020.

A humanidade faz uso do mel, da própolis e da cera produzidos pelas abelhas desde a pré-história. Esses produtos, apesar de sua importância do ponto de vista econômico, não constituem o principal benefício realizado por elas, quando comparados aos impactos no equilíbrio do meio ambiente devido à polinização. O objetivo desse trabalho é representar de forma aproximada, a dinâmica populacional de certas espécies de abelhas nativas encontradas no país. Para isso, utilizando dados semi-empíricos de uma divisão artificial de um enxame, é usada a equação de recorrência de primeira ordem e o modelo discreto de Beverton-Holt a fim de obter estimativas de sobrevivência e tamanho de sua população. Também é incluído nesse estudo o modelo clássico de metapopulação de Levins para tomada de decisão sobre a preservação de certas espécies de abelhas sem ferrão. Cabe ressaltar que qualquer esforço no sentido de proteger as abelhas passa necessariamente pela conscientização da população, iniciando com os nossos discentes. Com esse objetivo um projeto piloto foi desenvolvido sob a coordenação do professor autor junto a uma turma do Ensino Médio da Rede Pública de Ensino. Com a finalidade de desenvolver habilidades em Matemática dentro da grade curricular, foram realizadas atividades de forma, interdisciplinar como, por exemplo, determinar o volume de um octaedro truncado e de um elipsoide de revolução que são uma caracterização aproximada dos potes de alimentos construídos por abelhas nativas. Os resultados desta prática pedagógica, embora sejam preliminares, evidenciaram um maior interesse dos alunos sobre questões ambientais e sobre as aplicações da Matemática.

Palavras-chave: Dinâmica das Populações. Modelagem Matemática. Abelhas indígenas.  
Prática pedagógica.



## ABSTRACT

ANDRADE, Rodrigo Valmont *Applied mathematics in the population dynamics of some species of native bees*. 2020. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT em ) –  
, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores., São Gonçalo, 2020.

Humanity has made use of honey, propolis and wax produced by bees since prehistory. These products, despite their importance from an economic point of view, do not constitute the main benefit realized by them, when compared to the impacts on the balance of the environment due to pollination. The objective of this work is to represent, in an approximate way, the population dynamics of certain species of native bees found in the country. For this, using semi-empirical data from an artificial division of a cluster, the first order recurrence equation and the discrete Beverton-Holt model are used in order to obtain estimates of survival and size of its population. Also included in this study is the classic Levins metapopulation model for decision making on the preservation of certain species of stingless bees. It should be noted that any effort to protect the bees necessarily involves the awareness of the population, starting with our students. With this objective in mind, a pilot project was developed under the coordination of the author teacher with a high school class from the Public Education Network. In order to develop skills in Mathematics within the curriculum, interdisciplinary activities were carried out, such as, for example, determining the volume of a truncated octahedron and a revolution ellipsoid, which are an approximate characterization of food pots built by bees native. The results of this pedagogical practice, although preliminary, showed a greater interest of students on environmental issues and on the applications of Mathematics.

Keywords: Population Dynamics. Mathematical Modeling. Indigenous bees. Pedagogical practice.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Polinizadores . . . . .	18
Figura 2	- Principais Polinizadores . . . . .	18
Figura 3	- Páginas do Códex Maia . . . . .	20
Figura 4	- Classificação taxonômica Superfamília Apoidea . . . . .	22
Figura 5	- Abelhas das tribos Euglossini e Bombini . . . . .	23
Figura 6	- Abelhas das tribos Meliponini e Apini . . . . .	23
Figura 7	- Fases de desenvolvimento de uma <i>Melipona</i> sp . . . . .	24
Figura 8	- Abelha Operária . . . . .	25
Figura 9	- Distribuição geográfica dos Meliponini nas Regiões Tropicais e Subtropicais. . . . .	27
Figura 10	- Algumas espécies de abelhas sem ferrão (Hymenoptera, Apidae, Meliponini) no Brasil . . . . .	28
Figura 11	- Estrutura de uma Colmeia de abelha sem ferrão . . . . .	29
Figura 12	- Entradas de colônias de abelha sem ferrão . . . . .	30
Figura 13	- Discos de cria . . . . .	30
Figura 14	- Potes de mel . . . . .	31
Figura 15	- Esquema simplificado de modelagem matemática . . . . .	34
Figura 16	- Crescimento logístico . . . . .	37
Figura 17	- Modelo de fragmentos florestais . . . . .	41
Figura 18	- Persistência local para alguns períodos de tempo $T$ . . . . .	43
Figura 19	- Persistência regional para $n$ subpopulações . . . . .	44
Figura 20	- Sólidos platônicos . . . . .	45
Figura 21	- Cinco sólidos arquimedianos . . . . .	45
Figura 22	- Destaque para elementos e forma do Octaedro truncado . . . . .	46
Figura 23	- Pirâmide regular de base quadrada . . . . .	47
Figura 24	- Transformação do Octaedro truncado . . . . .	48
Figura 25	- Elipsoide de Revolução . . . . .	51
Figura 26	- População de abelhas em diferentes estágios em função do tempo . . . . .	58
Figura 27	- Comparação entre os modelos recursivo e de Beverton-Holt no terceiro estágio . . . . .	60
Figura 28	- Alguns ninhos de abelhas nativas na FFP-UERJ . . . . .	62
Figura 29	- Persistências local para diferentes períodos de tempo $T$ dado em anos . . . . .	63
Figura 30	- Persistências regional em função do número $n$ de populações . . . . .	64
Figura 31	- Comparação entre as Persistências local e regional no período de um ano . . . . .	65
Figura 32	- Resultados da primeira atividade . . . . .	68
Figura 33	- Soluções propostas pelos alunos . . . . .	70

Figura 34 - Resposta de um aluno . . . . .	76
Figura 35 - Octaedros truncados construídos pelos alunos . . . . .	79
Figura 36 - Quantitativo de erros e acertos por atividade . . . . .	81

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Ciclo evolutivo aproximado de duas espécies de abelhas . . . . .	24
Tabela 2	- Divisão do trabalho das operárias de duas espécies . . . . .	26
Tabela 3	- Espécies e dimensões dos potes de mel elipsoidais . . . . .	31
Tabela 4	- Comparação entre os modelos nos três estágios . . . . .	61
Tabela 5	- Persistência local nos primeiros cinco anos . . . . .	63
Tabela 6	- Ciclo de postura mensal da rainha. . . . .	69

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	13
1	<b>ABELHAS</b> . . . . .	17
1.1	<b>A Importância das Abelhas</b> . . . . .	17
1.2	<b>Breve História sobre as relações entre os seres humanos e as abelhas</b> . . . . .	19
1.3	<b>A família Apidae</b> . . . . .	21
1.4	<b>Rainhas, operárias e zangões</b> . . . . .	24
1.4.1	<u>As rainhas</u> . . . . .	24
1.4.2	<u>As operárias e suas funções ao longo da vida</u> . . . . .	25
1.4.3	<u>Os machos ou zangões e seus hábitos</u> . . . . .	26
1.5	<b>A tribo Meliponini</b> . . . . .	26
1.5.1	<u>Características do ninho de abelha sem ferrão</u> . . . . .	29
1.5.2	<u>A enxameação</u> . . . . .	31
2	<b>MODELOS MATEMÁTICOS E A NATUREZA</b> . . . . .	33
2.1	<b>Modelagem Matemática</b> . . . . .	33
2.2	<b>Modelos matemáticos populacionais</b> . . . . .	35
2.2.1	<u>Modelo Malthusiano contínuo</u> . . . . .	35
2.2.2	<u>Modelo Logístico de Verhulst</u> . . . . .	36
2.2.3	<u>Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem</u> . . . . .	37
2.2.4	<u>Modelo Malthusiano discreto</u> . . . . .	39
2.2.5	<u>Modelo logístico discreto de Beverton-Holt</u> . . . . .	40
2.3	<b>Metapopulações</b> . . . . .	41
2.3.1	<u>Risco de extinção local</u> . . . . .	42
2.3.2	<u>Risco de extinção regional</u> . . . . .	43
2.4	<b>Poliedros</b> . . . . .	44
2.4.1	<u>Poliedros regulares</u> . . . . .	45
2.4.2	<u>Poliedros Arquimedianos</u> . . . . .	45
2.4.3	<u>Volume da pirâmide regular</u> . . . . .	46
2.4.4	<u>Volume do octaedro regular</u> . . . . .	47
2.4.5	<u>Volume do octaedro truncado</u> . . . . .	48
2.4.6	<u>Superfície do octaedro truncado</u> . . . . .	49
2.5	<b>Superfícies quádricas</b> . . . . .	49
2.5.1	<u>O elipsoide</u> . . . . .	50
2.5.2	<u>Volume do Elipsoide de Revolução</u> . . . . .	51
2.5.3	<u>Superfície do elipsoide de revolução</u> . . . . .	52

3	<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS SOBRE DINÂMICA POPULA-</b>	
	<b>CIONAL</b> . . . . .	54
3.1	<b>Dinâmica populacional por divisão artificial</b> . . . . .	54
3.2	<b>Simulação populacional por recorrência de primeira ordem</b> . . . . .	55
3.2.1	<u>Primeiro Estágio</u> . . . . .	56
3.2.2	<u>Segundo Estágio</u> . . . . .	57
3.2.3	<u>Terceiro Estágio</u> . . . . .	57
3.3	<b>Simulação populacional pelo modelo de Beverton-Holt</b> . . . . .	59
3.4	<b>Simulação metapolulacional clássica de Levins</b> . . . . .	61
3.4.1	<u>Simulação de persistência local</u> . . . . .	62
3.4.2	<u>Simulação de persistência regional</u> . . . . .	63
4	<b>ATIVIDADES EM SALA DE AULA</b> . . . . .	67
4.1	<b>Conhecendo as abelhas</b> . . . . .	67
4.1.1	<u>Atividade 1 - Pesquisa sobre polinizadores</u> . . . . .	67
4.2	<b>Problemas interdisciplinares</b> . . . . .	69
4.2.1	<u>Atividade 2 - Medida de tendência central</u> . . . . .	69
4.2.2	<u>Atividade 3 - Razões e proporções</u> . . . . .	71
4.2.3	<u>Atividade 4 - Volume do elipsoide de revolução</u> . . . . .	71
4.2.4	<u>Atividade 5 - Área superficial de potes de alimento</u> . . . . .	73
4.2.5	<u>Atividade 6 - Sequências numéricas</u> . . . . .	74
4.2.6	<u>Atividade 7 - Chance de sobrevivência</u> . . . . .	76
4.2.7	<u>Atividade 8 - Problemas de decisão</u> . . . . .	77
4.2.8	<u>Atividade 9 - Octaedro truncado</u> . . . . .	78
4.2.9	<u>Atividade 10 - Culinária das abelhas</u> . . . . .	80
5	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	82
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	84
	<b>GLOSSÁRIO</b> . . . . .	89

## INTRODUÇÃO

A matemática aplicada à biologia ou biomatemática consiste em utilizar equações matemáticas com o objetivo de estudar algum problema de interesse prático ou teórico. Esta área de pesquisa teve início no século XVIII com as contribuições do médico e matemático suíço Daniel Bernoulli (1700-1782), que apresentou um modelo matemático que pudesse representar, de modo aproximado, o crescimento ou o espalhamento da varíola, doença que era uma ameaça à saúde pública da época (PIQUEIRA, 2011). Desde então, vários fenômenos, em particular, biológicos, físicos e químicos serviram de fonte de inspiração para a modelagem dos mesmos usando equações matemáticas que lidavam com equações diferenciais, teoria das probabilidades, estatística e álgebra linear entre outros tipos de conhecimento.

Segundo Batschelet (1978) são vários os ramos da biologia em que podem ser aplicados os modelos populacionais, como por exemplo, na biologia celular, na ecologia, na epidemiologia, na genética, em doenças infecciosas e na biologia da vida selvagem. As taxas de mortalidade, de natalidade, de migração, do clima, das catástrofes naturais, do suprimento de comida e a poluição, ou até mesmo uma severa inundação, são fatores importantes que atuam diretamente sobre a densidade de uma população observada (MURRAY, 2003).

No presente trabalho é enfatizado o estudo da dinâmica populacional das abelhas sem ferrão (Hymenoptera, Apidae, Meliponini), também conhecidas como abelhas nativas ou indígenas do Brasil, que em geral são despercebidas ou desconhecidas por muitas pessoas.

Ultimamente, tem-se observado uma redução drástica das populações de abelhas a nível mundial, sendo esse problema conhecido como desordem do colapso das colônias (CCD) (PIRES, 2016). Esse fato ocorre principalmente nas regiões agrícolas, onde o uso de defensivos químicos em larga escala, juntamente com o desmatamento e incêndios florestais, podem ser a causa principal desse fenômeno, visto que, em particular, a maioria das abelhas indígenas utilizam troncos ocos como substrato para a sua nidificação (LOPES, 2005; LARSEN, 2005). De fato, a degradação ambiental diminui os recursos florais e a sua diversidade genética, tão necessária a esses insetos (LOPES, 2005; LARSEN, 2005). Além disso, a diminuição dessas populações pode estar ligado à competição com outros insetos ou até mesmo ao endocruzamento (VENTURIERI, 2012; GOULSON, 2008). Noventa por cento das árvores tropicais dependem de animais polinizadores, tais como as abelhas, besouros, aves, entre outros. No Brasil existem mais de mil e quinhentas espécies de abelhas (LIFE, 2020), entre as quais aproximadamente trezentas espécies são de abelhas nativas (COSTA, 2019). Porém, algumas destas espécies correm o risco de extinção devido à degradação de seu habitat e ao excesso de agrotóxicos. As abelhas são os principais

insetos polinizadores, sendo responsáveis pelo equilíbrio de vários biomas nacionais como, por exemplo, a Caatinga, que ocupa boa parte da região nordeste, o Pantanal, na região centro-oeste, a Amazônia, na região norte e a Mata Atlântica, que se estende pela costa leste. Nesse sentido, conhecer os hábitos de alimentação e o habitat desses insetos é o primeiro passo para preservá-las.

A modelagem matemática possibilita o ensino da Matemática na Educação Básica através de situações problemas. Entretanto, não é comum a observação de práticas pedagógicas que envolvam, em particular, a biomatemática, pois a própria grade curricular desde os anos iniciais da Educação Básica já é segmentada, o que em geral, resulta na incomunicabilidade entre as diversas disciplinas do programa escolar. Os alunos, por sua vez, acostumaram-se a ver o professor como mediador no processo de ensino e aprendizagem, enquanto este, na maioria das vezes por falta de tempo para estudos adicionais, evita contextualizações interdisciplinares envolvendo situações de interesse prático (BASSANEZI, 2018).

"O saber matemático não deve se restringir ao conhecimento de formas geométricas, fórmulas, algoritmos etc, mas em saber olhar para o mundo com um olhar atento, identificando como este saber pode ter papel decisivo na melhoria da qualidade de vida das pessoas"(CARVALHO, 2011).

Segundo a Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), uma das finalidades do Ensino Médio é a preparação básica do educando para o trabalho e a cidadania, de modo que o mesmo possa continuar em estudo permanente com a finalidade de ser capaz de adaptar as novas condições que o trabalho e a sociedade exigirem. O artigo 26 da referida lei prevê:

"§ 1º Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil"(BRASIL, 1996).

Nesse sentido, a educação ambiental é capaz de exercer forte apelo para o uso ou desenvolvimento de práticas metodológicas que utilizem conhecimentos matemáticos de modo a se “fazer matemática” voltada para a ecologia e a sustentabilidade. Neste “novo” conceito, a matemática e seu estudo passam a ser uma atividade dinâmica, onde o professor associa o conjunto de símbolos e regras de dedução típicas da matemática para serem empregadas de modo ativo, desenvolvendo assim a autonomia, fomentando a pesquisa e a continuidade de aprendizagem de seus discentes. Com a intenção de fazer essa prática pedagógica, o objetivo desse trabalho consiste na apresentação de modelos matemáticos que possam servir como uma aproximação simples de uma dinâmica populacional de uma colônia de abelhas sem ferrão.



No primeiro capítulo é apresentado de forma resumida, parte dos conhecimentos obtidos sobre as abelhas da família Apidae e a sua classificação lineana (MICHENER, 1990). Em particular, são citados alguns fatos históricos sobre a sua relação com a humanidade. As abelhas nativas possuem uma grande importância na polinização de nossas florestas, o que afeta diretamente à produção de recursos alimentares, remédios e cosméticos. Como foi dito anteriormente, as abelhas nativas correm o risco de extinção devido a ações antrópicas (BAWA, 1990; IMPERATRIZ, 2012). Portanto, conhecer os principais hábitos da espécie de abelha objeto de estudo vai na direção das ações que devem ser empregadas na preservação e sustentabilidade da espécie.

No segundo capítulo são apresentados os modelos determinísticos de Malthus e de Verhulst (BOYCE; DIPRIMA, 2015) e o modelo discreto de Beverton-Holt (WEISS, 2009) com o intuito de descrever a dinâmica populacional de certas espécies de abelhas nativas. Também é explorado o conceito de metapopulação (LEVIN, 1968), baseado na probabilidade de persistência local e regional de uma espécie para tomada de decisão sobre a preservação da mesma (GOTELLI, 2006). Por outro lado, devido à configuração geométrica incomum que os potes de alimento das abelhas nativas apresentam (KERR, 2001a; NOGUEIRA, 1997), fez-se necessário um estudo sobre as propriedades geométricas do octaedro truncado (MUNIZ, 2013) e do elipsoide de revolução (APOSTOL, 1996).

No capítulo três apresentamos algumas simulações numéricas. Na primeira simulação são utilizadas as equações de recorrência de primeira ordem e o modelo discreto de Beverton-Holt, com dados semiempíricos, a fim de obter de forma aproximada uma representação sobre a dinâmica populacional após realizar a divisão artificial de uma colmeia de abelhas sem ferrão. São apresentadas também duas simulações metapopulacionais sobre a probabilidade de persistência de uma determinada espécie. Como um produto importante dessa investigação, essas simulações podem ser apresentadas a estudantes do ensino médio, estabelecendo desse modo uma prática pedagógica voltada para o meio ambiente e a sustentabilidade de espécies.

No quarto capítulo são discutidos dez problemas contextualizados, os quais foram desenvolvidos através de um projeto sob a coordenação do professor autor junto a uma turma de alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma Escola Pública do Estado do Rio de Janeiro. As atividades desenvolvidas propõem uma reflexão sobre o meio ambiente e integram o conhecimento matemático com sequências numéricas, média aritmética, unidades de medida, área superficial que são uma caracterização aproximada dos potes de alimentos arquitetados pelas abelhas indígenas. A maior parte destes problemas foram abordados em um ambiente online, onde foi utilizada para esse fim a plataforma *Google Classroom*, os aplicativos *Microsoft Excel*, *Geogebra* e uma lousa virtual *One by Wacon*. Tudo com a finalidade de aproximar a prática docente com uso de novas tecnologias durante o período de isolamento social a que estamos submetidos por conta da pandemia de saúde causada pelo coronavírus.

Com esta ação pedagógica, era esperado que os participantes desse projeto desenvolvessem hábitos de consciência ambiental e, em particular, da preservação das abelhas nativas ou não, através do maior conhecimento sobre os benefícios que elas produzem para a humanidade.

## 1 ABELHAS

“Se as abelhas desaparecerem da face da Terra, a humanidade terá apenas mais quatro anos de existência. Sem abelhas não há polinização, não há reprodução da flora, sem flora não há animais, sem animais, não haverá raça humana.”

*Albert Einstein (1879-1955)*

Este capítulo tem como proposta dissertar sobre as abelhas no tocante à sua origem, trajetória histórica, características e principais classificações, bem como sua importância na polinização, no reflorestamento e outros benefícios com a produção de mel e própolis.

### 1.1 A Importância das Abelhas

As abelhas são insetos voadores da ordem dos Himenópteros. Estes insetos surgiram a partir de uma espécie de vespa, cujas fêmeas passaram a coletar pólen e néctar diretamente das flores para alimentar suas larvas (MELO, 1999). Segundo Silveira (2002), a expansão e a diversidade morfológica e comportamental destes insetos ocorreu juntamente com a propagação das plantas angiospermas<sup>1</sup> no final do período Cretáceo (aproximadamente 66 milhões de anos atrás).

As abelhas podem ser encontradas mesmo em regiões muito frias, como no Hemisfério Norte, bem como, em regiões desérticas, matas tropicais e ilhas oceânicas. De acordo com Griswold (1995), em nosso planeta existem de 20 mil a 30 mil espécies de abelhas, sendo que na região Neotropical<sup>2</sup>, algo em torno de 5,6 mil espécies segundo Michener (1997).

Estes insetos dependem do néctar e do pólen das flores, por isso, as visitam muitas vezes ao longo do dia para coletar suprimentos. Com isso, as flores também se beneficiam, pois algumas plantas necessitam de agentes externos, como ventos ou animais (pássaros, besouros, macacos, etc.) que agem como polinizadores para ocorrer a fecundação e garantir a diversidade genética.

Para Ollerton (2011), o impacto da polinização das abelhas é percebido em mais de 94% da polinização de plantas das comunidades tropicais. Este serviço ecossistêmico contribui para a preservação e reprodução de novas espécies de plantas, que são essenciais, pois elas diminuem a velocidade da erosão do solo e garantem o sustento de outras formas de vida.

A importância da polinização tem estado mais evidente nas últimas décadas, quando

---

<sup>1</sup> Plantas complexas que apresentam raiz, caule, flores, folhas, frutos e sementes.

<sup>2</sup> América do Sul, Central e Ilhas do Caribe.

o setor agrícola se beneficia diretamente dela. Conforme descreve Aizen (2009), algumas abelhas vibram seu corpo e suas anteras para liberação do pólen nessas flores. Isso faz com que ocorra a fecundação e garanta, desse modo, a qualidade dos frutos e das sementes produzidas. Um exemplo é o tomateiro, uma das principais hortaliças cultivadas no território brasileiro, cujos frutos são de melhor qualidade quando polinizados por meio de agentes naturais. A Figura 1 mostra algumas abelhas (Hymenoptera, Apidae) polinizadoras do tomateiro que apresentam o comportamento de vibração para a coleta do pólen (GAGLIANONE, 2015b).

Figura 1 - Polinizadores



Fonte: Adaptado de Gaglianone (2015b)

Na Figura 2 são apresentados os principais polinizadores de cultivos agrícolas. Em 2018, o primeiro relatório da Plataforma Brasileira de Biodiversidade e Serviço Ecosistêmico (BPBES, 2019), estimou que a polinização gerou uma economia próxima de R\$ 43 bilhões, sendo que 80% estão relacionados com a produção de soja, café, laranja e maçã. Esses números mostram o quanto a polinização de áreas agrícolas impactam na economia. Segundo Klein (2007), 75% da alimentação humana depende direta ou indiretamente de plantas polinizadas ou beneficiadas pela polinização animal.

Figura 2 - Principais Polinizadores



Fonte: Adaptado de BPBES (2019)

“Se houver o forte objetivo de perenizar muitas espécies de árvores precisamos preocupar-nos, seriamente, com a polinização cruzada de suas flores para a produção de sementes férteis que, além de manter a diversidade genética, garantam a segunda, terceira e mais gerações. Portanto, quaisquer medidas destinadas a conhecer, e estudar a biologia das abelhas e a produzir detalhes sobre o seu correto manejo, especialmente no que diz respeito à reprodução controlada e divisão de suas colônias, são da mais alta importância para a conservação das espécies de abelhas, das florestas remanescentes e da fauna desta dependente”.

*Warwick E. Kerr(1922-2018)*

## 1.2 Breve História sobre as relações entre os seres humanos e as abelhas

A convivência entre o homem e as abelhas é muito antiga. Certamente elas forneceram uma das primeiras fontes de açúcar da humanidade, já que o mesmo não era encontrado em estado puro na natureza. Segundo Costa (2002), as abelhas estocam mel há pelo menos 20 milhões de anos, ou seja, muito antes da existência humana na Terra.

Dentro dos registros encontrados na literatura, aproximadamente 4 mil anos atrás os egípcios foram um dos primeiros seres humanos a reconhecer a importância do mel e da cera produzidos pelas abelhas. Eles colocavam as abelhas em potes de barro, o que facilitava a coleta, pois, desse modo, era possível mantê-las perto das cidades ou locais de habitação humana. Entretanto, na coleta os egípcios destruíam a colônia prejudicando a produção de mel e cera, que era utilizada na mumificação de cadáveres (CAPPAS, 1995).

Posteriormente os gregos, aproximadamente 2,5 mil anos atrás, absorveram e melhoraram as técnicas egípcias para criação de abelhas. Em 558 a.C., na cidade de Atenas já existiam leis específicas visando a sua proteção. Os gregos passaram a criá-las em um recipiente feito de palha em forma de sino chamado *colmo*. O alto clero ostentava desenhos de abelhas em suas vestimentas e/ou objetos desenhos de abelhas como símbolo de riqueza e prosperidade.

Os Romanos (753 a.C. - 476 d.C.) também se dedicaram à sua criação, utilizando a cera para conservação de insumos e o mel para produção de alimentos e bebidas. As estruturas para criação de abelhas europeias pelos romanos eram variadas, por exemplo, algumas colmeias eram feitas de terra-cota<sup>1</sup>, troncos vazados ou em colmeias retangulares feitas de madeira, demonstrando assim habilidade no manejo destes insetos. O progresso da apicultura, pelo menos no Velho Mundo, só foi notado novamente no final do século

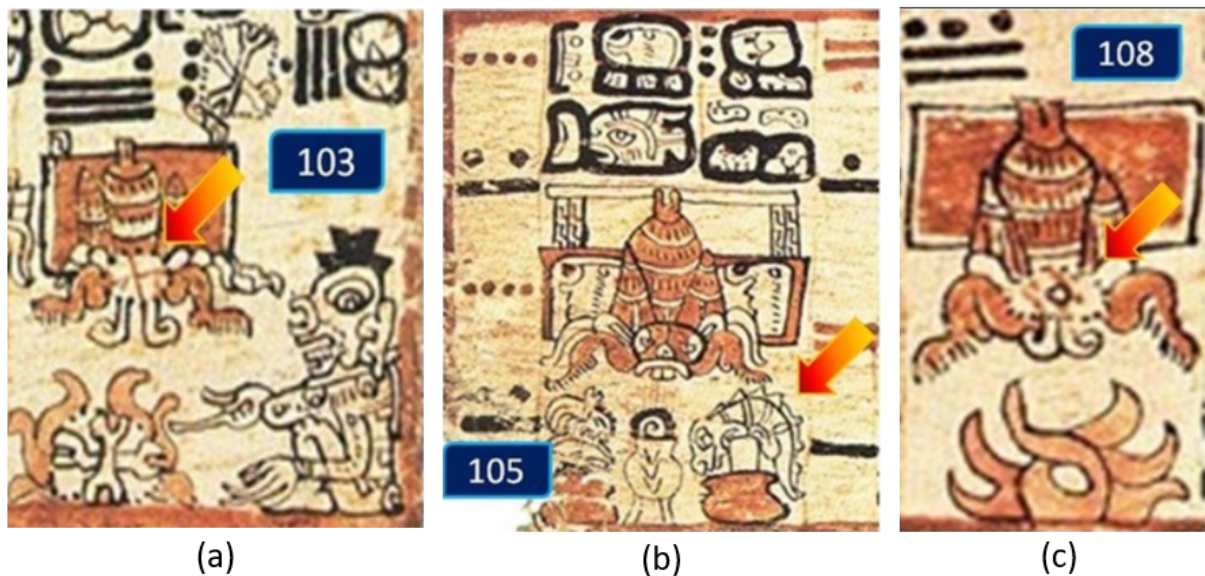
---

<sup>1</sup> Material constituído por argila cozida no forno, sem ser vitrificada e utilizada em cerâmica e construções.

XVI durante o período do Renascimento.

No continente Americano, os Índios *Maias* da Península de Yucatán, no México, mesmo antes da descoberta das Américas, já faziam uso dos produtos das abelhas como fonte alimentar, medicinal, ritualística e comercial. Eles criavam especialmente a abelha *Melipona beecheii* Bennett, 1831 (Apidae, Meliponini). Após a invasão dos conquistadores espanhóis, pouco restou de registros documentais. Segundo a historiadora mexicana Sotelo (2002), nos códices maias ou livros sagrados, feitos com a folha de “amate” (papel indígena usado de VI a. C. até o século XV), estão desenhados 17 tipos de abelhas nativas. Esses documentos indicam o quanto essa civilização conhecia e admirava as abelhas sem ferrão. Para eles as abelhas eram divindades, sendo sempre representadas por cabeças de jaguar<sup>1</sup>, a rainha da colmeia era conhecida por *Balam Cab* (abelha jaguar). A Figura 3 mostra alguns registros do códex maia, segundo Cappas (1995) eles representam: (a) o códex 103 mostra um diário da colmeia, (b) o códex 105 sugere a Balam Cab com dois dentes e indicando que a colmeia possui algum mel e (c) o códex 108 apresenta uma colmeia artificial.

Figura 3 - Páginas do Códex Maia



Fonte: (CAPPAS, 1995)

Na América do Sul as abelhas do gênero *Melipona* também eram muito conhecidas pelos povos indígenas do Brasil. Os índios da tribo indígena brasileira *Pataxós* ofereceram ao navegador e explorador português Pedro Álvares Cabral uma cabaça de mel de Uruçu (Apidae, Meliponini) logo após sua chegada na região de Porto Seguro, no Estado da

<sup>1</sup> O jaguar para os maias representa o poder, sua capacidade de caça o colocava como o senhor dos animais.

Bahia, no ano de 1500 (KERR, 2001a). Outra tribo indígena brasileira, os índios da tribo *Kayapós*, classificaram cinquenta e seis espécies de abelhas nativas sendo que nove delas foram domesticadas para uso alimentar, medicinal e religioso. Essa tribo possui um sistema próprio de identificação das abelhas, onde todo o conhecimento era transmitido de pai para filho oralmente, por observação, tentativa de acerto ou imitação (RODRIGUES, 2005).

Com a chegada dos portugueses em 1500, o Pe. José de Anchieta (1534-1597) foi o primeiro a observar mais de vinte espécies de abelhas desconhecidas pelos europeus. No ano de 1839, por iniciativa do Pe. Antônio Carneiro, no intuito de garantir a produção de cera para fins religiosos, foi introduzido no Brasil uma nova espécie de abelha europeia (*Apis mellifera mellifera* Linnaeus, 1758) no continente, dando início a apicultura no Brasil. Até a década de 50 a produção comercial de mel e cera eram produzidas pelas abelhas Europeias e pelas abelhas Italianas (*Apis mellifera ligustica* Spinola, 1806). Por serem espécies de regiões de clima temperado, a sua produção de mel era baixa em relação ao seu habitat de origem, além de serem mais sensíveis a doenças. No ano de 1956, na intenção de criar uma espécie mais resistente a doenças e com maior a produção de mel, o governo brasileiro solicitou ao então geneticista, Prof. Dr. Warwick Estevam Kerr, um melhoramento genético das espécies locais. Foram importadas cento e quarenta rainhas de abelhas africanas (*Apis mellifera scutellata* Lepeletier, 1836) no interesse de se comparar a produtividade e resistência e assim criar uma raça mais adequada às condições brasileiras. Apenas cinquenta delas resistiram e destas, em março de 1957, trinta e cinco colônias foram levadas para o horto florestal de Camaquã, em Rio Claro, em São Paulo. Quando acidentalmente ocorreu enxameação de vinte e seis colônias com suas rainhas, as quais se expandiram pelo território nacional, norte de Argentina e Centro América, acasalando com espécies do mesmo gênero, formando uma nova espécie que é conhecida hoje por abelha africanizada (SEBRAE, 2006).

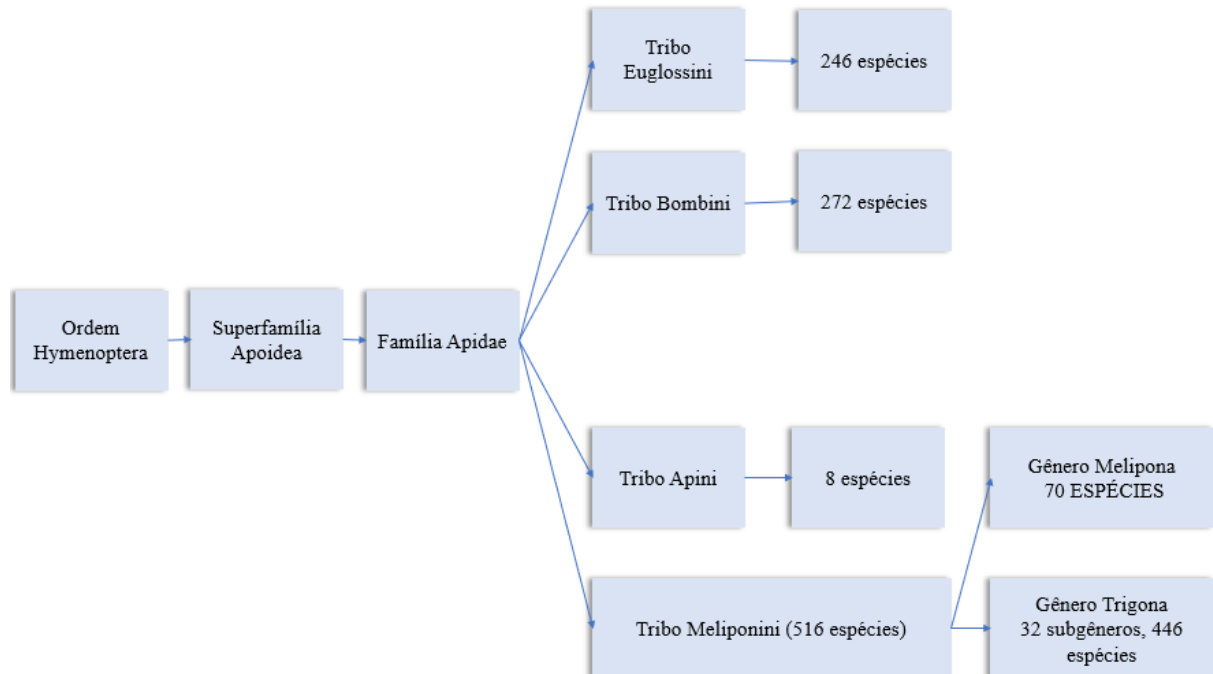
### 1.3 A família Apidae

Essa seção aborda a família Apidae, formada por mais de cinco mil espécies (LIFE, 2020). Neste trabalho adotaremos o modelo proposto na Figura 4 destacando quatro tribos: Euglossini, Bombini, Apini e a tribo Meliponini que para um melhor esclarecimento sobre o seu processo de dispersão, será dividido em dois gêneros, Melipona e Trigona.

Duas características difere as abelhas da família Apidae de outras famílias de abelhas. A primeira é a presença de uma estrutura que permite o transporte de pólen das flores, a corbícula (WITTER; NUNES-SILVA, 2014). A segunda é o desenvolvimento

da eussociabilidade<sup>1</sup>, ou seja, a criação de grupos de trabalho dentro de sua sociedade com zangões, operárias (Figura 8) e rainha.

Figura 4 - Classificação taxonômica Superfamília Apoidea



Fonte: Adaptador de Discovery Life (2020)

As abelhas da tribo Euglossíni são exclusivamente Neotropicais, suas principais características são a presença de cores metálicas e língua longa (MICHENER, 1990). A Figura 5a mostra uma abelha do gênero *Euglossa*. São conhecidas por hábitos solitários e sua preferência por orquídeas, embora algumas espécies do gênero *Eulaema* serem comuns, isto é, duas ou mais fêmeas da mesma geração dividem um ninho, sem a divisão de trabalho (ROUBIK, 1989).

A tribo Bombini formada por abelhas conhecidas popularmente por Mamangava (Figura 5b), são insetos fáceis de serem identificadas devido à diferença morfológica das outras espécies, pois elas normalmente são grandes e cerdas (GAGLIANONE, 2015a). O grau de socialidade das mamangavas é dito primitivo, pois vivem em pequenas populações lideradas por uma única rainha. Antes da rainha se estabelecer, ela coleta recursos, alimentos e constrói sua morada para então fundar seu ninho e exercer sua liderança, passando a cuidar da perpetuação de sua colônia.

As abelhas das tribos Apini e Meliponíni, mostrada na Figura 6, são as que

<sup>1</sup> É o mais alto grau de organização social dos animais presente nas sociedades mais complexas. Três características são fundamentais: sobreposição de gerações em um mesmo ninho, cuidado cooperativo com a prole, divisão de tarefas.



Figura 5 - Abelhas das tribos Euglossini e Bombini



(a) Abelha Euglossini



(b) Abelha Mamangava

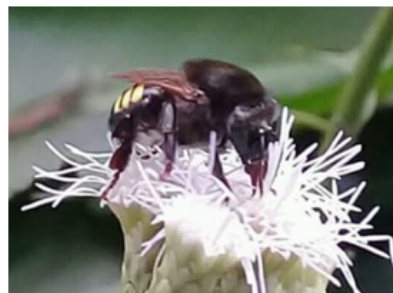
Fonte: O autor

desenvolveram o maior nível de sociedade. Nelas as castas são divididas em operárias, zangões e rainha. Algumas espécies formam colônias com dezenas de milhares de abelhas lideradas por uma rainha, a sua grande diferença com a tribo Bombini é com relação a construção de uma colônia que, neste caso, é feita por abelhas de casta inferior, as operárias, em um processo conhecido por enxameamento.

Figura 6 - Abelhas das tribos Meliponini e Apini



(a) Jataí (*Tetragonisca angustula*  
Latreille, 1811)



(b) Mandaçaia (*Melipona*  
*quadrifasciata*)



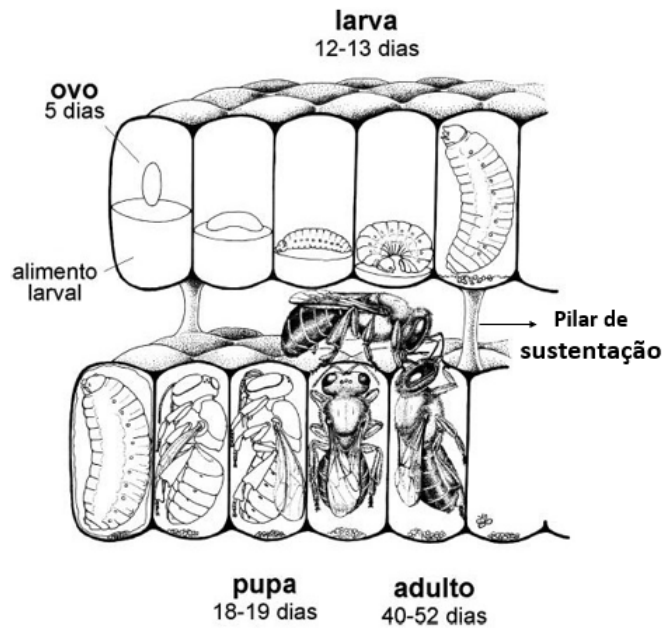
(c) *Apis mellifera*

Fonte: (a) e (b) (RODRIGUES, 2020). (c) O autor

## 1.4 Rainhas, operárias e zangões

Esta seção descreve as características das três castas presentes nas tribos Apini e Meliponini, compara o ciclo evolutivo larval (Figura 7) de duas espécies (Tabela 1) e seu processo de divisão natural.

Figura 7 - Fases de desenvolvimento de uma *Melipona* sp



Fonte: Adaptado de Venturieri (2008).

Tabela 1 - Ciclo evolutivo aproximado de duas espécies de abelhas

Espécie	Ovo até a fase adulta		
	Rainha	Operária	Zangão
Abelha europeia (Apidae, Apini)	16 dias	21 dias	24 dias
Abelha brasileira (Apidae, Meliponini)	32 dias	36 dias	36 dias

Fonte: Adaptado de Hermes (2005), Kerr (1948)

### 1.4.1 As rainhas

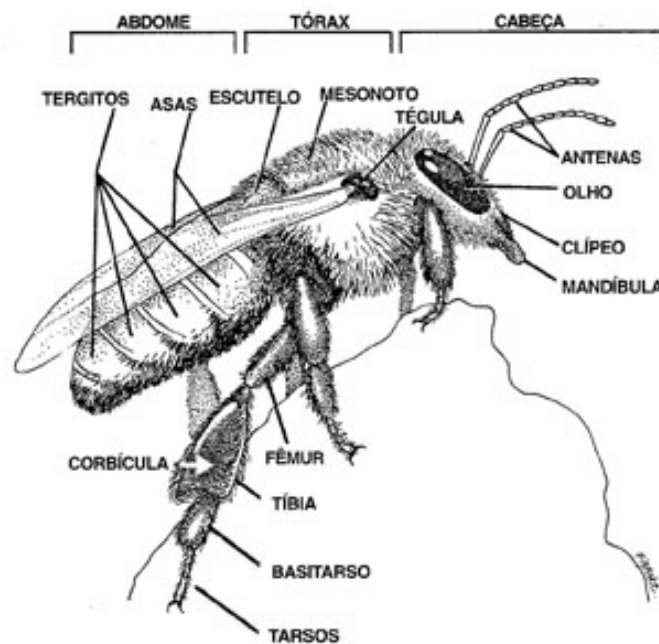
Cabe à rainha a postura de ovos que darão origem a todas as castas. Após o acasalamento, elas ficam com seu abdômen bem desenvolvido e são conhecidas como poedeiras ou fisogástricas (KERR, 1950). Normalmente, cada colônia é dependente de uma única rainha, entretanto algumas espécies aceitam até mais de uma rainha. Um

exemplo é a abelha Guaraipo (*Melipona bicolor* Lepeletier, 1836). Sua longevidade varia entre as espécies. Carvalho-Zilse (2004) estimou a média de 22 meses de vida para Uruçu cinzenta (*Melipona compressipes* Smith, 1854) e 84 meses de vida para Uruçu nordestina (*Melipona scutellaris* Latreille, 1811). A postura diária de ovos depende diretamente do suporte prestado pelas abelhas operárias, variando entre 20 a 41 ovos, como estimou Kerr (1996a) em sua pesquisa.

#### 1.4.2 As operárias e suas funções ao longo da vida

As operárias (Figura 8) são essenciais para a sobrevivência de uma colônia, que para sua existência necessita de muitas delas. Algumas de suas funções são a limpeza do ninho, manutenção de alimentos, construção de novas células de cria, defesa da colônia e busca de recursos no campo. Em algumas espécies, as abelhas operárias também realizam a postura de ovos, mas não é resultando de fecundação com outras abelhas e por isso sempre dará origem a um zangão (NOGUEIRA, 1997). Isso ocorre pois operárias possuem órgão reprodutor atrofiado, resultado de pouca disponibilidade de recursos em sua fase larval e de feromônios liberados pela rainha que inibe o desenvolvimento do sistema reprodutor na fase adulta. Na Tabela 2 se faz uma comparação da divisão de trabalho entre as operárias da espécie *Melipona quadrifasciata* e *Apis mellifera*.

Figura 8 - Abelha Operária



Fonte: Extraído de Nogueira (1997)

Tabela 2 - Divisão do trabalho das operárias de duas espécies

<b>Mandaçaia</b>	<b><i>Apis mellifera</i></b>
Primeiras horas após a eclosão: Limpeza corporal.	1º ao 3º dia: faxineiras; limpeza e reforma das células.
1º ao 11º dia: trabalham com cera; limpam favos; retiram o fundo dos alvéolos.	3º ao 7º dia: alimentam com mel e poluem as larvas com mais de 3 dias.
12º ao 21º dia: constroem novos favos, limpam o ninho, providenciam alimentos e alimentam a rainha.	7º ao 14º dia: cuidam da rainha e alimentam as larvas até 3 dias (babás).
22º ao 26º dia: alimentam a rainha, as operárias jovens e adultas, incubam e trabalham com cera.	14º ao 18º dia: produzem cera e constroem favos.
27º ao 34º dia: são lixeiras, receptoras de néctar e guardas.	19º ao 20º dia: trabalham como guardas.
34º dias em diante passam a ser campeiras e trabalham nos discos de cria.	21º dia até a morte são campeiras.

Fonte: (HERMES, 2005)

O tempo médio de vida das abelhas operárias varia entre cada espécie. A maioria vive em média 60 dias em sua fase adulta. Costa (2016) constatou abelhas operárias da espécie Uruçu Amarela (*Melipona rufiventris* Lepeletier, 1836) vivendo por até 84 dias.

### 1.4.3 Os machos ou zangões e seus hábitos

Embora sejam maiores e mais fortes do que as abelhas operárias, sua função é restrita à perpetuação de sua espécie. Para isso, sua forma morfológica sem ferrão e corbícula é compensada pela visão e olfato mais desenvolvidos. Isso lhes permite maior orientação, percepção e rapidez para a localização de rainhas virgens durante o voo nupcial.

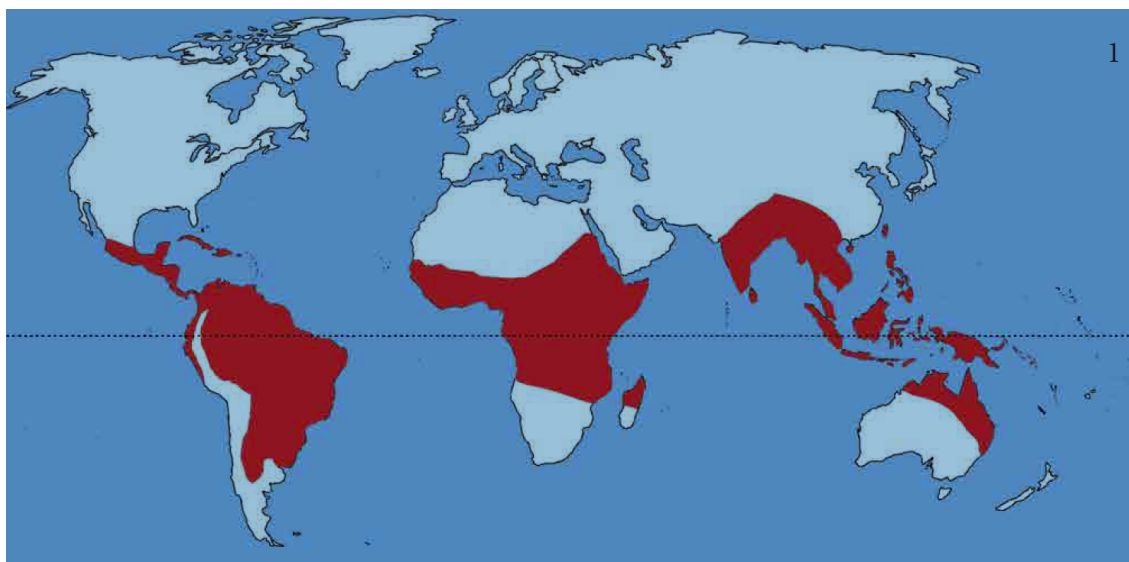
## 1.5 A tribo Meliponini

Nesta seção são apresentadas as características e os hábitos de forrageamento das abelhas presentes nesta tribo conhecida por Meliponíneos. Sua importância para o equilíbrio da flora é notável, uma vez que são as principais polinizadoras da mata nativa do continente onde habitam.

O grupo dos meliponíneos é formado por trinta e três gêneros de abelhas (*Aparatrigona*, *Camargoia*, *Celetrigona*, *Cephalotrigona*, *Dolichotrigona*, *Duckeola*, *Friesella*, *Frieseomelitta*, *Geotrigona*, *Lestrimelitta*, *Leurotrigona*, *Melipona*, *Meliwillea*, *Mourella*,

*Nannotrigona*, *Nogueirapis*, *Oxytrigona*, *Parapartamona*, *Paratrigona*, *Paratrigonoides*, *Partamona*, *Plebeia*, *Proplebeia*, *Ptilotrigona*, *Scaptotrigona*, *Scaura*, *Schwarziana*, *Schwarzula*, *Tetragona*, *Tetragonisca*, *Trichotrigona*, *Trigona*, *Trigonisca*). Para análise da formação de suas rainhas, este grupo será dividido em dois grandes gêneros (Figura 4); o gênero *Melipona* e o gênero *Trigona*, onde a principal diferença é na forma de fecundação de suas rainhas<sup>1</sup>. As *Meliponas* habitam apenas a região neotropical, suas colônias variam entre 500 a 4000 indivíduos enquanto as *Trigonas* são encontradas em todas as regiões tropicais e subtropicais do planeta como exemplifica a Figura 9, suas populações variam de 300 a 80.000 abelhas (MAGALHÃES, 2003). A Figura 10 mostra algumas espécies de meliponíneos por região no Brasil.

Figura 9 - Distribuição geográfica dos Meliponini nas Regiões Tropicais e Subtropicais.



Fonte: (SAKAGAMI, 1982)

A seguir são apresentadas algumas características próprias das abelhas sem ferrão quanto ao hábito de forrageamento.

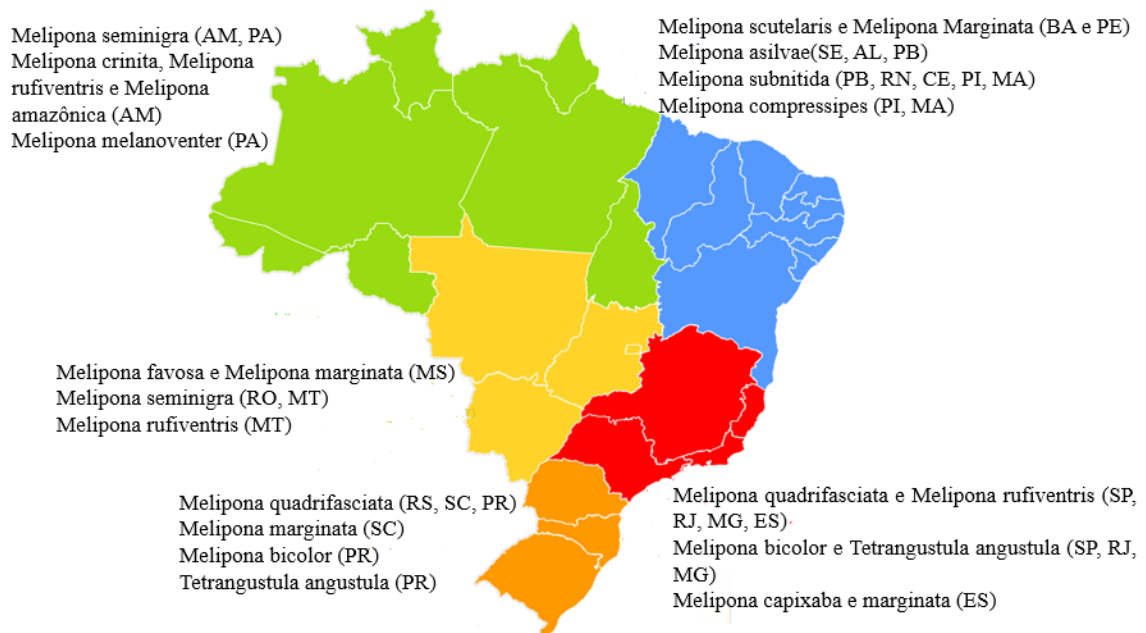
- A alta diversidade de espécies nativas possibilita a polinização de uma gama muito grande de plantas tropicais, muitas das quais são de uso agrícola;
- A ausência de função de ferrão as torna adequadas para manejo na polinização de culturas agrícolas em áreas urbanas e em ambientes fechados, como as estufas;
- Sob condições climáticas adequadas, forrageiam durante todo o ano;

<sup>1</sup> *Trigonas* constroem células reais (realeiras) na periferia das células de cria, são células maiores com possibilidade de receber maior quantidade de alimento, enquanto *Meliponas* aproximadamente 15% das células de cria são abelhas com possibilidade de se tornarem rainhas.

- Algumas espécies de meliponíneos são mais eficientes na polinização que a *Apis mellifera*, já que muitas vezes esta última encontra flores com características que impedem ou limitam sua visita devido ao seu tamanho;
- Muitas espécies das abelhas nativas, em especial as do gênero *Melipona*, são especialistas em coletar o pólen das flores da família Solanaceae (tomate, berinjela, pimenta, pimentão), que precisam vibrar suas flores (NUNES-SILVA; MICHAEL; IMPERATRIZ-FONSECA, 2010; VENTURIERI, 2010), pois elas possuem uma capacidade de vibração abdominal que a *Apis mellifera* não possui.

O comportamento manso em grande parte dessas abelhas faz com que a meliponicultura<sup>1</sup> seja uma prática crescente tanto por *hobby* quanto para o agronegócio. Isso ajuda a diminuir o risco de extinção de alguns meliponíneos. Dentre as espécies de abelhas sem ferrão, a abelha Jataí (*Tetragonisca angustula*) é uma das mais fáceis de se criar, pois seu comportamento generalista para coleta de néctar e pólen permite a sua adaptação em praticamente qualquer ambiente, seja urbano ou rural. Entretanto, deve-se evitar a inclusão de espécies exóticas em uma região, pois além de aumentar a competição por recursos naturais, aumenta o risco de transmissão por agentes patogênicos (PEREZ, 2013).

Figura 10 - Algumas espécies de abelhas sem ferrão (Hymenoptera, Apidae, Meliponini) no Brasil



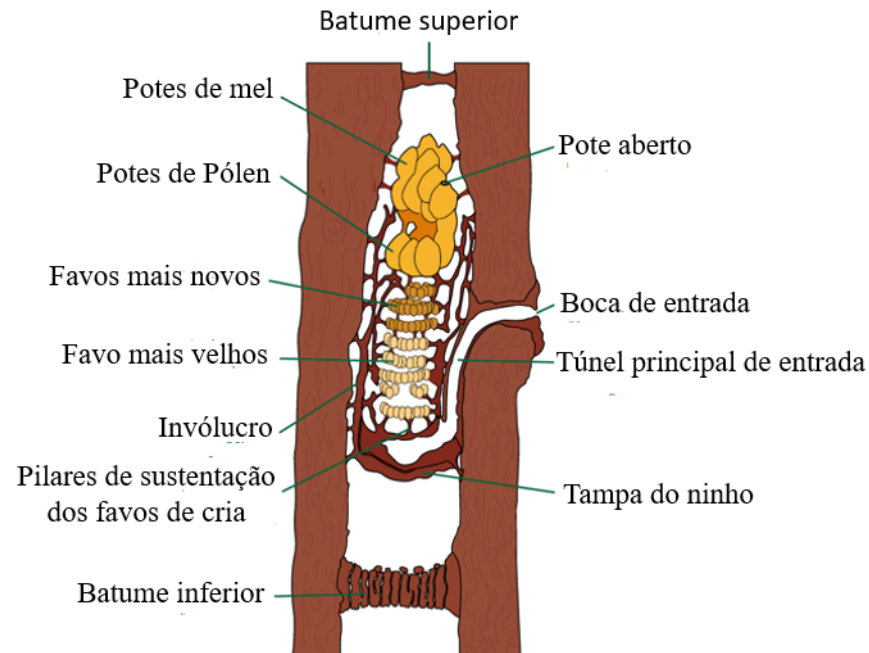
Fonte: Adaptado de Venturieri (2012)

<sup>1</sup> Criação racional de abelhas sem ferrão.

### 1.5.1 Características do ninho de abelha sem ferrão

Os ninhos dos meliponíneos são feitos com diversos materiais encontrados na natureza e por materiais secretados por elas (cera) que, quando misturada com uma resina (própolis) feita de materiais recolhidos de árvores ou arbustos, leva o nome de cerume. A Figura 11 mostra os principais elementos presentes nos ninhos de abelhas sem ferrão.

Figura 11 - Estrutura de uma Colmeia de abelha sem ferrão



Fonte: Adaptação de Pòsey (1985)

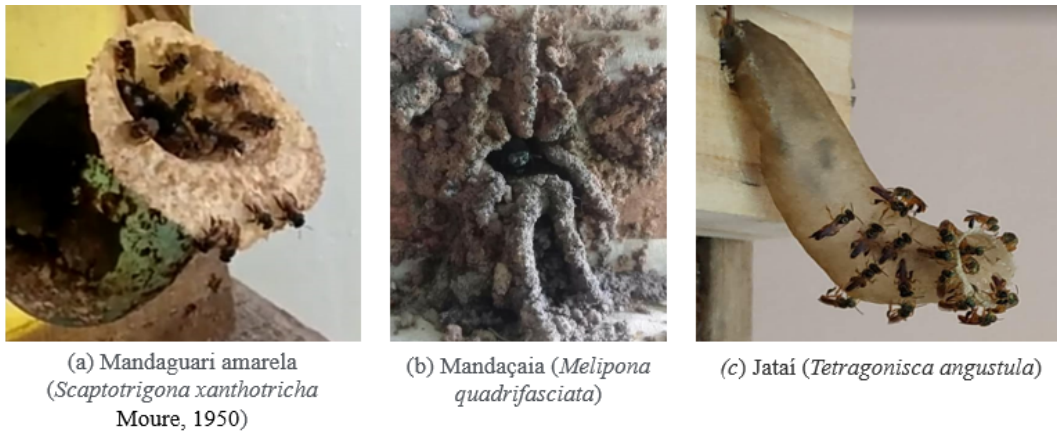
A nidificação ocorre em diversos locais ou substratos, por exemplo, em troncos de madeira, a partir de cavidades já existentes (cupinzeiro), em copas de árvores ou até mesmo abaixo do solo. Cada ninho possui uma entrada característica que varia de acordo com a espécie. Na Figura 12 podemos observar alguns exemplos.

Os principais elementos que estão presentes nos ninhos de abelhas sem ferrão são:

- Células de cria: A maioria das espécies constroem suas células de cria agrupadas em forma de discos sobrepostos e unidos com pilastras de cera ou construídos com uma disposição espiralada como mostram as Figuras 13a e Figura 13b, respectivamente. Porém, algumas espécies constroem suas células de cria em forma que se assemelham a um cachos de uvas (VILLAS-BOAS, 2012), onde as células de cria são unidas com filamentos finos de cerume (Figura 13c).
- Potes de alimento: Neles são armazenados mel e pólen separadamente, em geral eles

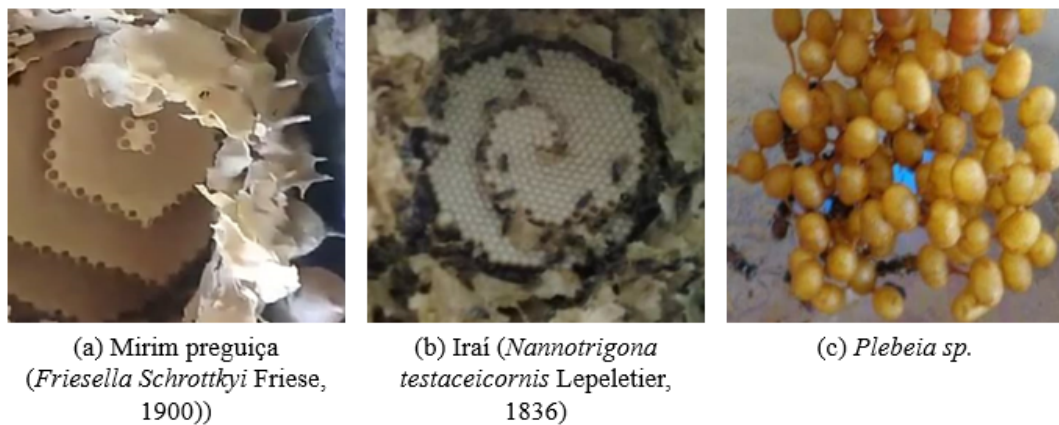


Figura 12 - Entradas de colônias de abelha sem ferrão



Fonte: (a) e (b) (RODRIGUES, 2020), (c) O autor

Figura 13 - Discos de cria



Fonte: (RODRIGUES, 2020)

possuem a forma elipsoidal<sup>1</sup>(Figura 14b) e (Figura 14c), porém algumas abelhas a exemplo da Lambe-olhos<sup>2</sup> (*Leurotrigona muelleri* Friese, 1900), constroem pequenos potes que se assemelham a octaedros truncados quando estão sobrepostos (Figura 14a). Eles são construídos com a cera produzida pelas abelhas operárias, sendo este, um produto valioso, pois para produzir uma parte de cera, as abelhas consomem aproximadamente oito partes de mel (AIDAR, 1996). Na Tabela 3 são apresentados as dimensões de potes de alimentos de algumas espécies.

<sup>1</sup> Forma oval.

<sup>2</sup> A menor abelha conhecida, seu tamanho é aproximadamente 2 mm (MENEZES, 2013).



Figura 14 - Potes de mel



Fonte: (a) Menezes (2013), (b) O autor, (c) Meliponário (2020a)

Tabela 3 - Espécies e dimensões dos potes de mel elipsoidais

Espécie	Altura (cm)	Diâmetro (cm)
Jataí	1,0 - 1,5	1,0
Uruçu amarela	4,0 - 5,0	2,0 - 3,0
Mandaçaia	3,0 - 5,0	2,5
Iraí	2,0 - 3,0	1,0 - 2,0
Mirim-preguiça	0,5	0,5

Fonte: O autor

### 1.5.2 A enxameação

A enxameação ou divisão natural ocorre quando existem condições favoráveis em termo de alimentos, habitat e população suficiente que possam garantir a estabilidade da colônia, que irá se dividir, formando assim um novo enxame. Para as abelhas sem ferrão esse evento tem caráter anual. Ele ocorre normalmente após o inverno quando a oferta de alimentos se torna vasta. Quando isso é possível, as abelhas operárias iniciam a busca por lugares onde possam construir o seu novo lar e, ao encontrarem, elas começam a construir células de cria e potes de alimento para, então, iniciar o processo de transferência de mel, própolis e cerume<sup>1</sup> da colônia mãe que irá se dividir. Segundo Nogueira (1997), este processo é lento e pode durar alguns meses. A partir do momento que o ninho se torna apto a ser povoado, uma rainha virgem parte da colônia mãe em direção à sua nova morada, onde será fecundada através de um ritual conhecido por voo nupcial e, assim, um novo enxame se estabelece. Embora não se possa afirmar quando uma colônia irá se dividir, é possível de forma "artificial" criar condições para uma divisão controlada de um

<sup>1</sup> Substância formada pela mistura de cera e resina coletada nas plantas.

ninho de abelhas sem ferrão. Essa técnica é conhecida por desdobra e será descrita no quarto capítulo.

## 2 MODELOS MATEMÁTICOS E A NATUREZA

“O cientista não estuda a Natureza porque isso é útil; estuda-a porque ele se delicia nela, e ele delicia-se nela porque é bela. Se a Natureza não fosse bela, não valeria a pena ser conhecida, e se a Natureza não valesse a pena ser conhecida, a vida não valeria a pena ser vivida.”

*Henri Poincaré (1854-1912)*

Com o intuito de descrever o crescimento populacional das abelhas indígenas, neste capítulo são apresentados os modelos determinísticos de Malthus e Verhulst e o modelo discreto de Beverton-Holt. Para analisar a probabilidade de persistência de uma colmeia é apresentado o modelo simplificado de metapopulações. Finalmente revisamos alguns conceitos sobre poliedros e elipsoides com vista ao cálculo de volume dos potes de alimento construídos pelas abelhas nativas.

### 2.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática na prática pedagógica é uma importante ferramenta que motiva discentes e docentes a interagir com problemas reais que, aparentemente, são externos à própria matemática.

A ciência, em sua constante evolução, frequentemente utiliza a modelagem matemática como, por exemplo, na epidemiologia, a ecologia, a neurologia, a genética, a política ou até mesmo no comportamento humano das redes sociais; sempre na intenção de aprimorar uma teoria ou prever resultados. Existem diversas formas de modelagem, entre elas, podemos destacar as equações diferenciais, que são amplamente utilizadas nos diversos campos do conhecimento humano (WEISS, 2009; BOYCE; DIPRIMA, 2015).

“O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (BASSANEZI, 2018).”

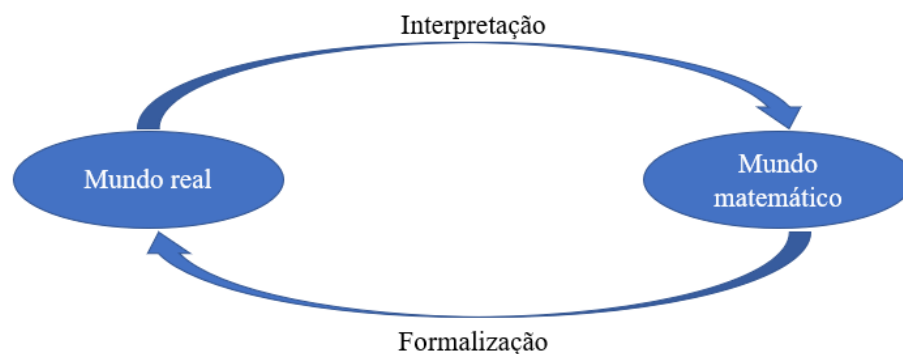
A seguir é apresentada a modelagem matemática nas populações de abelhas nativas visando a interdisciplinaridade. Na prática ocorrem mudanças no tamanho populacional por diversos motivos. Nosso propósito é isolar algum aspecto de interesse para um estudo teórico. Essas diferenças entre o modelo teórico e modelo real podem em certos casos, ser negligenciáveis levando, desse modo, a resultados aceitáveis quando comparados com a realidade observável.

Segundo Bassanezi (2018), um modelo matemático consiste essencialmente das seguintes etapas:

- Escolha do tema: Agricultura, Lazer, Industrialização, Transporte e Ecologia.
- Coleta de dados: Consiste em obter informações qualitativas ou numéricas através pesquisa bibliográfica, entrevistas ou experiências.
- Análise de dados e formulação de modelos: Nessa etapa são selecionadas as variáveis essenciais para descrição do estudo.
- Validação: Devem ser testados os modelos para verificar se correspondem aos que se obtém na experiência real. Os resultados podem ser dados em forma de gráficos ou tabelas. Caso os resultados sejam diferentes dos esperados, o modelo precisa ser reajustado ou mesmo abandonado.
- Modificação: A modelagem eficiente permite a compreensão, a participação e a interação de situações observáveis, nenhum modelo é definitivo. Se um modelo for bom, ainda assim é possível formar novos modelos mais precisos. Se o modelo for insuficiente, pode se considerar algumas hipóteses:
  - A coleta de dados pode ser insuficiente ou obtida de maneira incorreta;
  - A nossa leitura da realidade estudada é inadequada;
  - Foi cometido algum erro no desenvolvimento matemático formal.

Na Figura 15 é dada uma representação simplificada dessas etapas.

Figura 15 - Esquema simplificado de modelagem matemática



Fonte: Adaptado de (BASSANEZI, 2018)

## 2.2 Modelos matemáticos populacionais

Nesta seção serão tratados os modelos contínuos para, em seguida, serem apresentados os modelos discretos.

### 2.2.1 Modelo Malthusiano contínuo

O economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834), considerado o pai da demografia, foi o primeiro a propor uma teoria para descrever o crescimento da população humana. Seu ensaio se baseava em duas premissas.

1. "O alimento é necessário à subsistência do homem";
2. "A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em estado permanente".

Com essas hipóteses, em 1798 ele publicou o seu primeiro trabalho de forma anônima, intitulado *An Essay on the Principle of Population*. Nesse trabalho, Malthus faz críticas aos filósofos socialistas de sua época que defendiam uma sociedade próspera e igualitária (DAMIANI, 2002). Para Malthus, guerra, pobreza e doenças são exemplos de inibidores positivos de crescimento de uma população, pois esta, quando não obstaculizada, cresce em razão geométrica, enquanto seus meios de subsistência crescem em razão aritmética (SANTOS, 2015).

O modelo contínuo Malthusiano é representado pelo seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta P(t), & t > 0 \\ P(0) = P_0 & P_0 > 0 \end{cases}, \quad (1)$$

onde  $\beta \in \mathbb{R}^*$  é a taxa de proporcionalidade e  $P_0$  representa a população inicial.

Esse modelo indica que a taxa de variação populacional é proporcional à população em cada instante. A solução do PVI (1) é obtida pelo método de separação de variáveis, tendo como solução analítica:

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

### 2.2.2 Modelo Logístico de Verhulst

O matemático belga Pierre François Verhulst (1804-1849) em 1837 propõe um novo modelo aprimorado a partir do modelo malthusiano. Neste modelo, ele supõe que toda população é predisposta a sofrer inibições naturais em seu crescimento por um fator denominado logístico. Segundo o modelo, uma população cresce até um limite sustentável, quando então tende a um certo equilíbrio. O fator logístico é descrito pela função  $\beta(P) = r \left(1 - \frac{P}{K}\right)$ , onde  $r > 0$  representa a taxa de crescimento intrínseco,  $K$  indica a capacidade máxima de sustentabilidade e  $\left(1 - \frac{P}{K}\right)$  é a taxa de resistência do meio. Sendo assim,  $\beta(P)$  tende a zero quando  $P$  tende a  $K$ . Portanto podemos representar o modelo considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população a cada instante.

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P. \quad (3)$$

Substituindo a função  $\beta(P)$  na Equação (3) e supondo  $P(0) = P_0$  obtemos o problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), & t > 0 \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (4)$$

Os pontos de equilíbrio da Equação (4) são encontrados fazendo  $\frac{dP}{dt} = 0$ , o que equivale a resolver uma equação algébrica simples para obter  $P = 0$  ou  $P = K$ . Portanto as soluções triviais ou soluções de equilíbrio são as funções  $P(t) = 0$  e  $P(t) = K$ , para todo  $t$  positivo, representadas na Figura 16. A solução analítica da Equação (4) é obtida pelo método de separação de variáveis como será visto a seguir.

Se  $P \neq 0$  e  $P \neq K$ , podemos separar variáveis na Equação (4) e integrando em ambos lados, tem-se:

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/K)} = \int r dt, \quad (5)$$

reescrevendo a Equação (5) em frações parciais,

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1/K}{1 - P/K} \right) dP = \int r dt, \quad (6)$$

e integrando em ambos lados da Equação (6) temos:

$$\ln |P(t)| - \ln \left| 1 - \frac{P(t)}{K} \right| = rt + c, \quad (7)$$

$$\ln \left| \frac{P(t)}{1 - P(t)/K} \right| = rt + c, \quad (8)$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária.

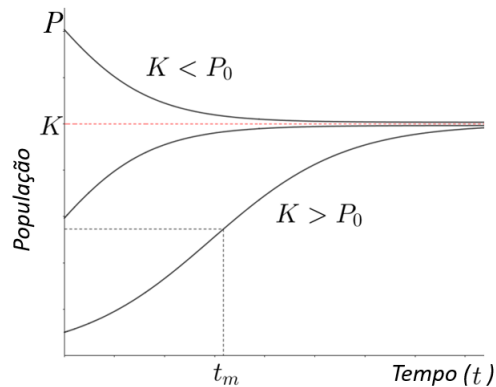
Considerando a condição inicial  $P(0) = P_0$ , é possível determinar o valor da constante de integração  $c$  dada por:

$$c = \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{K}} \right|. \quad (9)$$

Substituindo a Equação (9) na Equação (8) e simplificando os termos, obtemos a solução analítica do PVI na forma:

$$P(t) = \frac{KP_0}{(K - P_0)e^{-rt} + P_0}, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Figura 16 - Crescimento logístico



Fonte: O autor

### 2.2.3 Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem

Uma forma de representar os modelos dinâmicos é a forma discreta, isto é, o crescimento ou decréscimo populacional é dado em instantes discretos e são descritos pelas equações de diferença a partir de dois tipos de variáveis, uma dependente e uma independente (em geral dependem do tempo) podendo ser representados por uma função:

$$y = f(t)$$

onde  $t$  é a variável independente e  $y$  a variável dependente.

As equações de diferenças são equações com variáveis discretas<sup>1</sup>, sendo muito utilizadas quando se estuda populações e suas gerações ao longo do tempo e podem ser até mais naturais que os modelos determinísticos (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Uma maneira de se obter estas equações é através de métodos indutivos ou programação.

Neste trabalho são apresentadas as equações de diferenças de primeira ordem. O seguinte PVI representa uma equação linear de primeira ordem.

$$\begin{cases} y_t = ay_{t-1}, & t \geq 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (11)$$

onde  $a$  representa uma taxa de variação,  $y_0$  é conhecido, a função  $y_t$  descreve o tamanho da população no tempo  $t$  e  $y_{t-1}$  representa o tamanho da população no período anterior. Os períodos de tempo podem ser dados em dias, semanas, meses ou anos.

A solução da Equação (11) é obtida pelo processo recursivo, isto é, sendo conhecido  $y_0$  podemos obter  $y_1$  e assim sucessivamente.

$$y_1 = ay_0, \quad (12)$$

$$y_2 = ay_1 = a^2y_0, \quad (13)$$

$$\vdots \quad (14)$$

$$y_t = ay_{t-1} = a^t y_0. \quad (15)$$

Portanto, a solução da Equação (11) é dada por.

$$y_t = a^t y_0, \quad \text{para } t \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

De forma geral, podemos descrever uma equação de diferença quando houver um acréscimo ou decréscimo constante de indivíduos em uma população,

$$\begin{cases} y_t = ay_{t-1} + b, & t \geq 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (17)$$

onde  $a$  representa uma taxa de variação, a constante não nula  $b$  representa o nascimento ou morte de novos indivíduos e  $y_0$  conhecido. O PVI (17) admite duas soluções:

---

<sup>1</sup> Intervalos regulares de tempo.



- Se  $a = 1$

$$y_1 = y_0 + b, \quad (18)$$

$$y_2 = y_1 + b = y_0 + 2b, \quad (19)$$

$$y_3 = y_2 + b = y_0 + 3b, \quad (20)$$

$$\vdots \quad (21)$$

$$y_t = y_{t-1} + b = y_0 + tb, \quad t \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

- Se  $a \neq 1$

$$y_1 = ay_0 + b, \quad (23)$$

$$y_2 = ay_1 + b = a^2y_0 + ab + b, \quad (24)$$

$$y_3 = ay_2 + b = a^3y_0 + a^2b + ab + b, \quad (25)$$

$$\vdots \quad (26)$$

$$y_t = y_{t-1} + b = a^t y_0 + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{t-1}). \quad (27)$$

Usando o fato que  $(1 + a + a^2 + \dots + a^{t-1})$  é a soma de uma progressão geométrica de  $t$  termos e razão  $a$ , tem-se

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{t-1} = \frac{1 - a^t}{1 - a}. \quad (28)$$

Portanto, a solução da Equação (17) para  $t \geq 1$  é da forma:

$$y_t = \begin{cases} y_0 + bt, & \text{se } a = 1 \\ y_0 a^t + b \left( \frac{1 - a^t}{1 - a} \right), & \text{se } a \neq 1. \end{cases} \quad (29)$$

#### 2.2.4 Modelo Malthusiano discreto

O modelo matemático discreto baseado nas ideias de Malthus é obtido considerando um intervalo de tempo. Sendo  $r$  a taxa de natalidade e  $s$  a taxa de mortalidade com  $r, s$  constantes reais; e que não exista fatores inibidores de crescimento, como predadores, competidores ou variações sazonais (BOYCE; DIPRIMA, 2015; BATSCHELET, 1978). Denotamos por  $\alpha = r - s$  ao número real que representa a taxa de crescimento ou decrescimento específico da população no momento  $P_t = P(t)$ , com  $t \in \mathbb{N}$ . O modelo Malthusiano discreto supõe que a variação entre os instantes  $t$  e  $t + 1$  é proporcional à população no instante  $t$ , isto é:

Considerando a população inicial  $P(0) = P_0$ , com  $P_0 > 0$ , temos o PVI

$$P_{t+1} = (1 + \alpha)P_t. \quad (30)$$

A solução do PVI (30) também é obtida recursivamente e é dada por:

$$P_t = (1 + \alpha)^t P_0, \quad t \geq 0. \quad (31)$$

Da Equação (31) podemos obter a variação média da população conhecendo dois censos populacionais  $P_0$  e  $P_{\bar{t}}$  (BASSANEZI, 2018).

$$(1 + \alpha)^{\bar{t}} = \frac{P_{\bar{t}}}{P_0}. \quad (32)$$

Isolando  $\alpha$  na Equação (32), tem-se:

$$\alpha = \sqrt[\bar{t}]{\frac{P_{\bar{t}}}{P_0}} - 1, \quad \bar{t} \in \mathbb{N}^*. \quad (33)$$

### 2.2.5 Modelo logístico discreto de Beverton-Holt

Da solução analítica do modelo de Verhulst, é determinado o modelo logístico discreto conhecido por Equação de Beverton-Holt<sup>1</sup> (WEISS, 2009; BARRETO, 2013).

Sendo  $P_0 > 0$  e  $r > 0$ , a Equação (10) pode ser escrita como

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}, \quad t \geq 0. \quad (34)$$

Ao considerar  $A = \frac{K-P_0}{P_0}$ , e  $y_t = P(t)$  com  $t \in \mathbb{N}$ , na Equação (34) obtemos

$$y_t = \frac{K}{1 + A e^{-rt}}, \quad (35)$$

da Equação (35) tem-se

$$A e^{-rt} = \frac{K - y_t}{y_t}. \quad (36)$$

Denotando por  $\lambda = e^r$ , das Equações (35) e (36) tem-se

$$y_{t+1} = \frac{\lambda K}{\lambda + A e^{-rt}}. \quad (37)$$

---

<sup>1</sup> Raymond J. H. Beverton e Sidney Holt são fundadores da ciência da pesca. Em 1957 publicaram o livro *On the Dynamics of Exploited Fish Populations*, apresentando novos modelos discretos para o crescimento logístico de espécies marinhas.

Substituindo a Equação (36) na Equação (37), obtém-se:

$$y_{t+1} = \frac{\lambda K}{\lambda + \frac{K - y_t}{y_t}} = \frac{\lambda y_t}{1 + y_t \left( \frac{\lambda - 1}{K} \right)}. \quad (38)$$

Fazendo  $a = \frac{\lambda - 1}{K}$ , tem-se a equação logística de Beverton-Holt, dada por

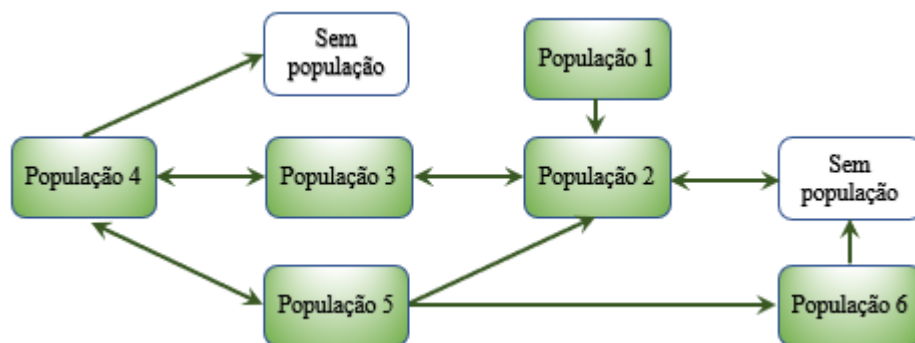
$$y_{t+1} = \frac{\lambda y_t}{1 + a y_t}. \quad (39)$$

### 2.3 Metapopulações

Nesta seção vamos explorar o conceito de metapopulações através de dois modelos simplificados. Na Biologia, define-se população ao conjunto de indivíduos de uma mesma espécie que vive em uma região em um determinado momento do tempo (PERONI; HERNÁNDEZ, 2011).

Segundo o biólogo e matemático Richard Levins (1930-2016), o termo metapopulação clássica ou população de populações é formada por um conjunto de subpopulações (da mesma espécie) que ocupam "ilhas" de habitat apropriados separados por um habitat inapropriado. O termo ilhas pode ser entendido também como "manchas" ou "pequenas regiões fragmentadas" de um habitat apropriado. Na Figura 17 é apresentado um diagrama representando a interação entre as subpopulações e as ilhas apropriadas.

Figura 17 - Modelo de fragmentos florestais



Fonte: O autor

A importância desta teoria tem aumentado a partir da década de 90, pois tem se mostrado clara sua vasta aplicação no estudo de Ecologia de Populações e Biologia de Conservação (WEISS, 2009; BATSCHELET, 1978).

O conceito de metapopulação clássica obedece as seguintes premissas (BARRETO, 2013):

- As manchas devem ter áreas e isolamento iguais;
- As populações locais devem ter dinâmica totalmente independente, ou não-correlacionadas;
- A taxa de troca de indivíduos entre as populações locais deve ser tão baixa a ponto de não influir na dinâmica local, isto é, a dinâmica local ocorre em uma escala de tempo mais rápida do que a dinâmica da metapopulação.
- As populações devem apresentar a mesma probabilidade de extinção.

A seguir são apresentadas duas estimativas sobre a probabilidade de persistência de uma determinada espécie, onde não é necessário conhecer o tamanho da população nem as taxas intrínsecas de crescimento ou decrescimento.

### 2.3.1 Risco de extinção local

Este modelo retrata a sobrevivência de uma metapopulação de forma simplificada através da estimativa de extinção local de uma determinada espécie (WEISS, 2009; BARRETO, 2013). Denotando por  $P_e$  a probabilidade de extinção e sabendo que

$$P_e \in [0, 1], \quad (40)$$

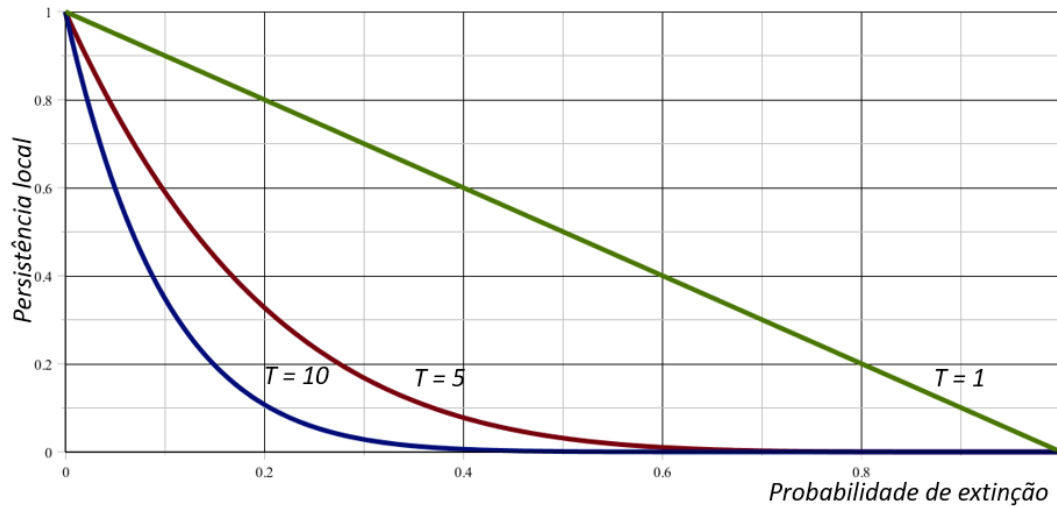
pode-se definir a probabilidade de persistência local  $P_T$ , em um período de tempo  $T$  (semanas, meses, anos), com  $T > 0$ , pela seguinte equação (GOTELLI, 2006):

$$P_T = (1 - P_e)^T, \quad T \in \mathbb{N}. \quad (41)$$

Na Equação (41), pode se observar que, se  $P_e = 0$ , então a a probabilidade de persistência local  $P_T$  é 1, isto é, 100%. Se substituirmos  $P_e = 1$  na Equação (41), então a a probabilidade de persistência local  $P_T$  é 0, isto é, desaparece a espécie.

A Figura 18 representa a taxa de persistência local  $P_T$  após  $T$  períodos de tempo em função da probabilidade de extinção  $P_e \in [0, 1]$ . Nela é possível observar que, para um tempo  $T$  estipulado, é observado a relação entre a chance de persistir e de extinguir de uma espécie.

Figura 18 - Persistência local para alguns períodos de tempo  $T$ .



Legenda: Relação entre a chance de persistir e de extinguir de uma espécie para um tempo  $T$ .

Fonte: Adaptado de (BARRETO, 2013)

### 2.3.2 Risco de extinção regional

Seja  $n$  o número de todas as subpopulações de uma metapopulação. A probabilidade de extinção das  $n$  subpopulações é dada por  $(P_e)^n$ .

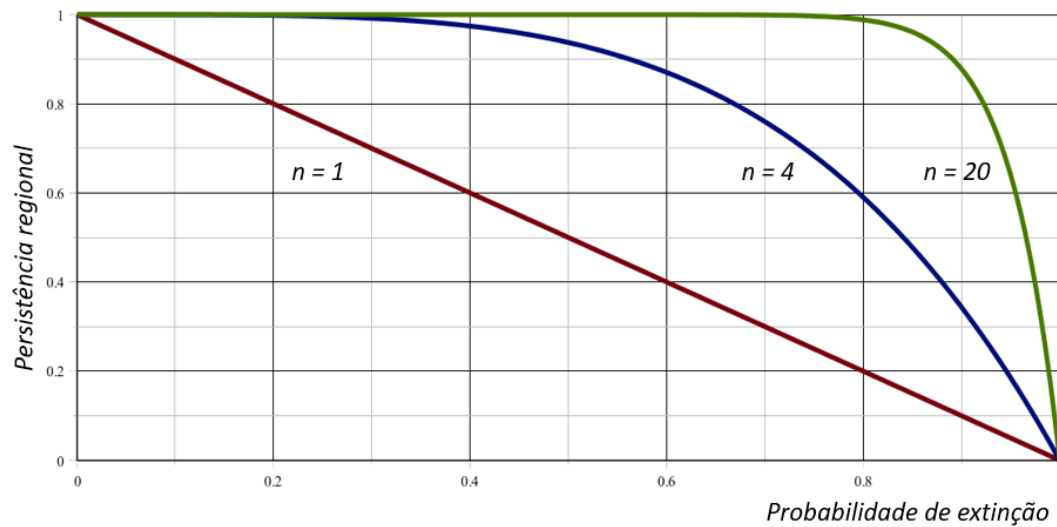
A probabilidade de que ao menos uma subpopulação regional persista é dada pelo complementar da probabilidade  $(P_e)^n$  (GOTELLI, 2006), isto é:

$$P_n = 1 - (P_e)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (42)$$

Observe que, se na Equação (42) a probabilidade de extinção é nula, isto é,  $P_e = 0$ , então a persistência regional de uma metapopulação é absoluta. Assim como, se a probabilidade de extinção é máxima, isto é,  $P_e = 1$ , então a espécie não possui chances de sobrevivência.

A Figura 19 representa a taxa de persistência regional de uma metapopulação formada por  $n$  subpopulações em função de  $P_e \in [0, 1]$ .

Figura 19 - Persistência regional para  $n$  subpopulações



Legenda: Se o número de  $n$  subpopulações aumenta, maior a chance de preservação da metapopulação.

Fonte: Adaptado de (GOTELLI, 2006)

## 2.4 Poliedros

Após a invasão espanhola na América Central, o Bispo Diego de Landa<sup>1</sup> (1524-1579), deixou um extenso relato sobre as características das abelhas do gênero *Meliponas* em comparação às do gênero *Apis* que eram criadas na Europa. O biólogo e geneticista Kerr (2001b) descreve o relato do Bispo Landa:

"Existem duas espécies de abelhas e ambas muito menores que as nossas. A espécie maior é mantida em colmeias. Elas não fazem favos como as nossas, porém algo como potes de cera, semelhantes a nozes, ..."

Como os potes de alimento construídos pelas abelhas nativas têm um formato semelhante ao octaedro truncado e outros com o elipsoide de revolução, revisaremos alguns conceitos sobre poliedros e elipsoides (DOLCE, 2011a; STEINBRUSH, 1987) a fim de estimar o volume de mel e a quantidade de cera utilizada nos potes de alimentos que são produzidos por essas abelhas.

Um poliedro é um sólido limitado por superfícies planas poligonais. Cada um desses polígonos chama-se uma face do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também definido vértice do poliedro.

Existem duas classes de poliedros; os poliedros convexos e os poliedros não convexos. Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta

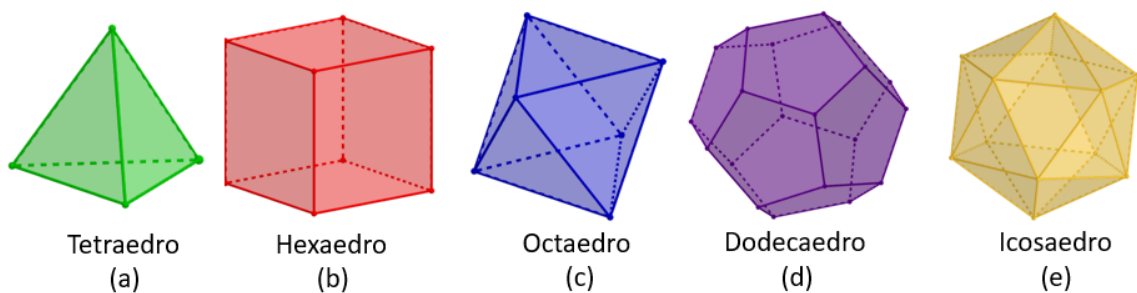
<sup>1</sup> Ele é considerado como o primeiro pesquisador da civilização maia.

em, no máximo, dois pontos (ELON, 2016).

### 2.4.1 Poliedros regulares

Um poliedro regular é aquele cujas faces são todos polígonos regulares e o ângulos poliédricos<sup>1</sup> são todos iguais. Existem cinco poliedros, e somente cinco, classes de poliedros regulares (DOLCE, 2011a; ELON, 2016), também conhecidos como sólidos de Platão, exibidos na Figura 20.

Figura 20 - Sólidos platônicos

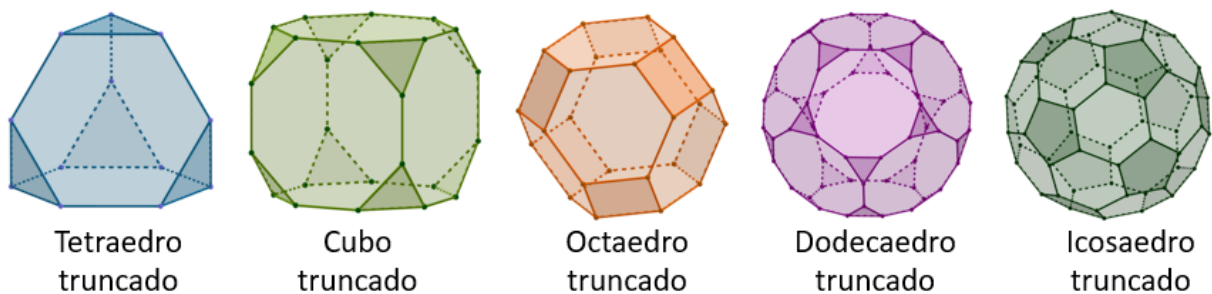


Fonte: O autor

### 2.4.2 Poliedros Arquimedianos

Os poliedros Arquimedianos, também chamados sólidos de Arquimedes, são poliedros semirregulares, isto é, são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo de polígono (SAUTOY, 2013; DOLCE, 2011a).

Figura 21 - Cinco sólidos arquimedianos

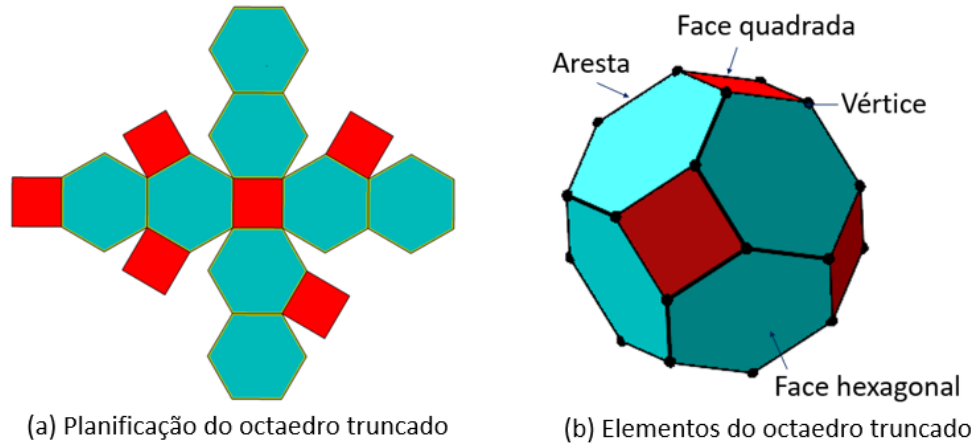


Fonte: O autor

<sup>1</sup> Ângulos poliédricos são os ângulos formados entre dois planos de um diedro, triedro ou poliedro.

Existem apenas treze destes poliedros, os mais conhecidos são: tetraedro truncado, hexaedro truncado, octaedro truncado, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, os quais podem ser vistos na Figura 21. Os outros poliedros Arquimedianos são: cubo snub, cuboctaedro, dodecaedro snub, icosidodecaedro, rombicuboctaedro, gran rombicuboctaedro, rombicododecaedro e gran rombicododecaedro.

Figura 22 - Destaque para elementos e forma do Octaedro truncado



Fonte: O autor

O sólido de Arquimedes, objeto de nosso estudo é o octaedro truncado. Ele surge a partir da truncadura do octaedro regular (Figura 20c). Na Figura 22 apresentamos o octaedro truncado indicando seus elementos e a sua planificação.

### 2.4.3 Volume da pirâmide regular

O volume de uma pirâmide regular<sup>1</sup> é equivalente a um terço do volume de um prisma de mesma altura e base (ELON, 2016), isto é,

$$V = \frac{1}{3}(\text{Área da base}).(\text{altura}). \quad (43)$$

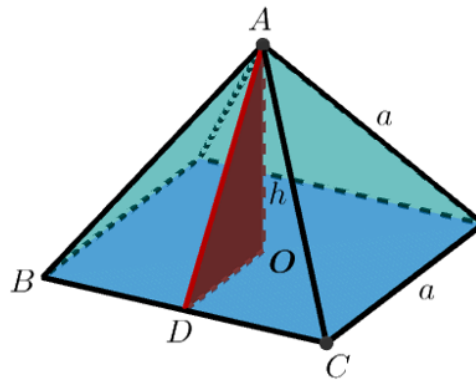
Seu valor é dado em unidades cúbicas de medidas de comprimento ( $u.c.^3$ ). Considere uma pirâmide regular de base quadrada com todas as suas arestas com medida  $a$  ( $a > 0$ ).

Para obter as relações métricas que permitem o cálculo do volume da pirâmide de base quadrada, como mostra a Figura 23, determinamos a medida da altura  $\overline{OA}$  a partir

<sup>1</sup> Uma pirâmide é regular quando a sua base é formada por um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com o centro desta.



Figura 23 - Pirâmide regular de base quadrada



Fonte: O autor

da trigonometria do triângulo retângulo  $AOD$  (DOLCE, 2011b), sendo:

$$\overline{OD} = \frac{a}{2}, \quad (44)$$

a altura do triângulo equilátero  $ABC$  é,

$$\overline{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad (45)$$

pelo Teorema de Pitágoras a altura é igual a,

$$\overline{AO} = \sqrt{(\overline{AD})^2 - (\overline{OD})^2}, \quad (46)$$

então,

$$\overline{AO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (47)$$

Denotemos por  $V_1$ , ao volume da pirâmide regular de base quadrada e aresta com medida  $a$ . Das equações (43), (47) e da área da base, tem-se:

$$V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \text{ u.c.}^3. \quad (48)$$

#### 2.4.4 Volume do octaedro regular

O octaedro regular, também chamado de bipirâmide quadrada, é formado por duas pirâmides regulares com base quadrada (Figura 20c) (MUNIZ, 2013). Denotemos por  $V_2$  ao volume do octaedro regular cuja aresta mede  $3a$  unidades,  $a > 0$ . O valor de  $V_2$  é

calculado utilizando a Equação (43) e é dado por

$$V_2 = 2 \cdot \frac{(3a)^3 \sqrt{2}}{6}. \quad (49)$$

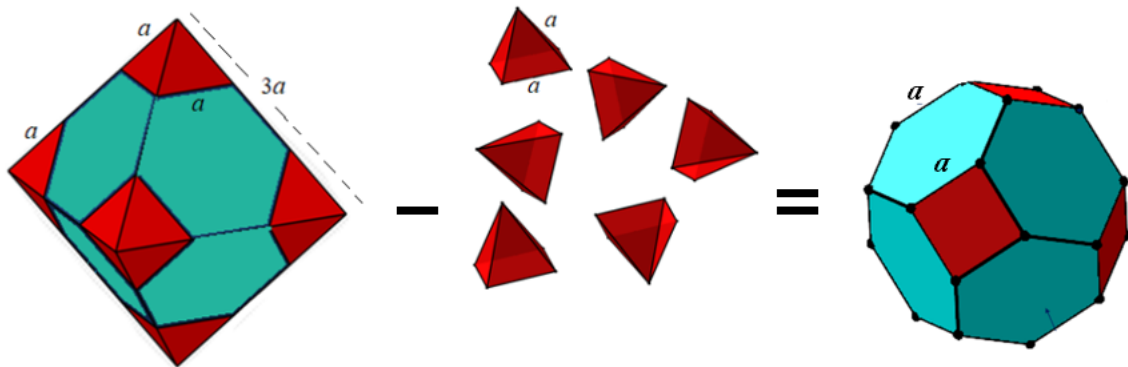
Assim, o volume do octaedro regular é dado por:

$$V_2 = 9a^3 \sqrt{2} u.c.^3. \quad (50)$$

#### 2.4.5 Volume do octaedro truncado

Da truncadura do octaedro regular de aresta  $3a$  é possível obter seis pirâmides regulares congruentes de base quadrada e aresta medindo  $a$  unidades, conforme mostra a Figura 24. Denotando por  $V_3$  ao volume do octaedro truncado, o valor de  $V_3$  é resultado da diferença entre o volume do octaedro regular pelo sêxtuplo do volume das pequenas pirâmides.

Figura 24 - Transformação do Octaedro truncado



Fonte: O autor

Das Equações (50) e (48) segue:

$$V_3 = V_2 - 6V_1 = 9a^3 \sqrt{2} - 6 \left( \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \right), \quad (51)$$

logo, o volume do octaedro truncado com aresta medindo  $a$  unidades é dado por:

$$V_3 = 8a^3 \sqrt{2} u.c.^3. \quad (52)$$

### 2.4.6 Superfície do octaedro truncado

Na planificação do octaedro truncado (Figura 22a), é possível observar as seis faces quadradas e oito faces hexagonais, todas de lado  $a$ . A área  $A_h$  do hexágono regular é formada pela composição de seis triângulos equiláteros de lado  $a$ , a área  $A_t$  de cada triângulo equilátero é calculada pela metade do produto das medidas de sua base pela altura (DOLCE, 2011a), então:

$$A_t = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad (53)$$

Logo, a área do hexágono regular é:

$$A_h = 6A_t = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}. \quad (54)$$

Da Equação (54) e da área dos quadrados, obtemos

$$A = 6a^2 + 8 \left( \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \right), \quad (55)$$

logo a área superficial<sup>1</sup>  $A$  do octaedro truncado é dada por:

$$A = 6a^2(1 + 2\sqrt{3}) u.c.^2. \quad (56)$$

## 2.5 Superfícies quádricas

Chama-se superfície quádrica o conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^3$  cujas coordenadas cartesianas verificam a seguinte equação de segundo grau (HOWARD, 1999; STEINBRUSH, 1987):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (57)$$

onde as constantes reais  $A, B, C, D, E$ , ou  $F$  não são todas nulas e  $x, y, z$  são variáveis reais. O conjunto da solução da Equação (57) pode representar diferentes formas geométricas. Neste trabalho, vamos determinar o volume e a área superficial do elipsoide de revolução.

---

<sup>1</sup> Onde  $u.c.^2$  representa unidades de medida da área

### 2.5.1 O elipsoide

Ao considerar, na Equação (57),  $D, E, \dots, I$  iguais a zero e  $A, B, C$  e  $-J$  constantes reais positivas e denotando por:  $a = \sqrt{\frac{-J}{A}}$ ,  $b = \sqrt{\frac{-J}{B}}$  e  $c = \sqrt{\frac{-J}{C}}$ , temos um elipsoide com centro na origem representado pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (58)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes reais positivas e representam as medidas dos semieixos das três elipses obtidas no corte do elipsoide pelos planos coordenados  $z = 0$ ,  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente.

Pensando no formato dos potes de alimento das abelhas nativas (VILLAS-BOAS, 2012; NOGUEIRA, 1997), daqui para frente vamos considerar um caso particular do elipsoide dado na Equação (58), com

$$a = b. \quad (59)$$

Substituindo a Equação (59) na Equação (60), temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (60)$$

Também, vamos supor que

$$c > a. \quad (61)$$

A superfície descrita pela Equação (60) é chamada de esferoide ou elipsoide de revolução em torno do eixo  $z$ .

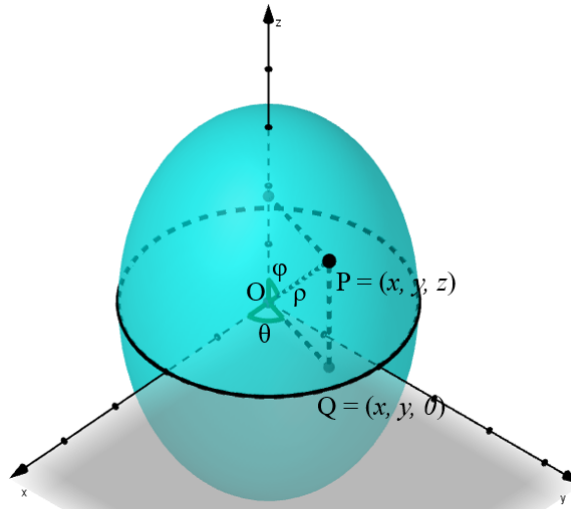
Uma forma de se obter a superfície e o volume do elipsoide de revolução (Figura 25) é utilizando a mudança das coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  para as coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  (STEWART, 2013; APOSTOL, 1996).

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases} \quad (62)$$

com  $\rho > 0$ ,  $0 \leq \phi < \pi$  e  $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$  para algum  $\theta_0$ .

A coordenada  $\rho$  mede a distância entre a origem  $O$  e um ponto  $P = (x, y, z)$  da superfície, a coordenada  $\phi$  é o ângulo entre o eixo  $z$  e o segmento que une a origem ao ponto  $P$ , e a coordenada  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $x$  positivo e a projeção do segmento  $OP$  no plano  $xy$ .

Figura 25 - Elipsoide de Revolução



Fonte: O autor

### 2.5.2 Volume do Elipsoide de Revolução

Para determinar o volume do sólido limitado pelo esferoide descrito pela Equação (60), utilizamos as integrais triplas (GUIDORIZZI, 2019).

$$V(E) = \iiint_E dV, \quad (63)$$

onde  $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ .

$$\begin{cases} x = a \rho \cos \theta \sen \phi \\ y = a \rho \sen \theta \sen \phi \\ z = c \rho \cos \phi. \end{cases} \quad (64)$$

Com  $0 < \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \phi < \pi$ , portanto, um paralelogramo retangular no espaço  $\rho\theta\phi$  transforma-se no sólido  $E$  (APOSTOL, 1996).

O jacobiano da transformação dado na Equação (64) é definido por

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = -a^2 c \rho^2 \sen \phi. \quad (65)$$

Como  $\sen \phi \geq 0$  no intervalo  $[0, \pi[$ , temos que

$$|J(\rho, \phi, \theta)| = a^2 c \rho^2 \sen \phi. \quad (66)$$

Pela fórmula de transformação de integrais triplas (GUIDORIZZI, 2019), o volume do esferoide  $E$  é igual a:

$$V(E) = \iiint_E dV = \iiint_{E_{\rho\phi\theta}} a^2 c \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta. \quad (67)$$

A integral tripla do lado direito da Equação (67) pode ser calculada mediante integrais ordinárias separadamente em cada intervalo e, depois, multiplicando-as:

$$V(E) = a^2 c \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi. \quad (68)$$

Integrando em relação a  $\theta$  temos,

$$V(E) = 2\pi a^2 c \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi, \quad (69)$$

agora integrando em relação a  $\rho$ ,

$$V(E) = \frac{2}{3}\pi a^2 c \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi d\phi. \quad (70)$$

Finalmente, integrando novamente em relação a  $\phi$ , obtemos o volume do elipsoide de revolução  $E$ , dado pela Equação (60):

$$V(E) = \frac{4}{3}\pi a^2 c. \quad (71)$$

### 2.5.3 Superfície do elipsoide de revolução

Denotemos por  $A(E)$  a área da superfície de  $E$ . Um método para determinar  $A(E)$  é utilizando a representação paramétrica da superfície (APOSTOL, 1996) e é definida pela integral dupla

$$A(E) = \int \int \|r_u \times r_v\| du dv, \quad (72)$$

onde  $r = r(u, v)$  é uma parametrização da superfície de  $E$ . Uma parametrização desta superfície é da forma:

$$r(u, v) = (a \cos u \operatorname{sen} v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos v), \quad (73)$$

onde  $(u, v) \in T = [0, 2\pi[ \times [0, \pi[$ .

Calculando as derivadas parciais da função vetorial dada na Equação (73) em

relação a  $u$  temos:

$$r_u = (-a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \operatorname{cos} u \operatorname{sen} v, 0). \quad (74)$$

Calculando a derivada parcial da função vetorial dada na Equação (73) em relação  $v$  obtemos:

$$r_v = (a \operatorname{cos} u \operatorname{cos} v, a \operatorname{sen} u \operatorname{cos} v, -c \operatorname{cos} v). \quad (75)$$

Determinando o produto vetorial das Equações (74) e (75) e simplificando, temos

$$r_u \times r_v = (-ac \operatorname{cos} u \operatorname{sen}^2 v, -ac \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -a^2 \operatorname{sen} v \operatorname{cos} v). \quad (76)$$

Calculando a norma da função vetorial dada na Equação (76) e simplificando segue-se que,

$$\|r_u \times r_v\| = a \operatorname{sen} v \sqrt{c^2 - (c^2 - a^2) \operatorname{cos}^2 v}. \quad (77)$$

Substituindo a Equação (77) na Equação (72), tem-se

$$A(E) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a \operatorname{sen} v \sqrt{c^2 - (c^2 - a^2) \operatorname{cos}^2 v} \, du \, dv. \quad (78)$$

Integrando a Equação (78) em relação a  $u$ .

$$A(E) = 2a\pi \int_0^\pi \operatorname{sen} v \sqrt{c^2(1 - \operatorname{cos}^2 v) + a^2 \operatorname{cos}^2 v} \, dv. \quad (79)$$

Considerando a Equação (61), a integral do lado direito da Equação (79) pode ser resolvida por meio da substituição  $w = \operatorname{cos} v$ . Desse modo, obtemos a área superficial do esferoide  $E$  dado pela Equação (60),

$$A(E) = 2a\pi \left\{ a + \frac{c^2}{2\sqrt{c^2 - a^2}} \left[ \arccos \left( \frac{-\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right) - \arccos \left( \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \right) \right] \right\}. \quad (80)$$

### 3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS SOBRE DINÂMICA POPULACIONAL

Neste capítulo é apresentada uma simulação em relação à dinâmica populacional das abelhas sem ferrão após a divisão de um enxame com a intervenção de um meliponicultor. São realizadas algumas estimativas sobre a sobrevivência de uma colônia e de uma metapopulação de abelhas de uma determinada região. Os modelos de representação desse fenômeno são discretos e as informações apresentadas foram estimadas através de observação e obtidas através de entrevistas com meliponicultores.

#### 3.1 Dinâmica populacional por divisão artificial

A prática da meliponicultura tem crescido muito na última década, seja por *hobby*, agronegócio ou para comercialização do mel de características exóticas e diversos aromas. Na internet existe uma grande disponibilidade de materiais sobre o assunto, seja através de livros, sites ou vídeos, (VILLAS-BOAS, 2012; NOGUEIRA, 1997; SOUZA, 2009; GAGLIANONE, 2015a; MENEZES, a).

Os meliponicultores, quando pretendem aumentar a quantidade de enxames, utilizam um método artificial de divisão de colônias conhecido por *desdobra*. Esse método possui algumas vantagens em relação à divisão natural, que normalmente ocorre apenas uma vez ao ano (NOGUEIRA, 1997). Além disso, através da *desdobra* é possível substituir as rainhas velhas quando estas não estimulam a produção de mel na forma esperada.

Uma condição importante para a realização da divisão artificial ou multiplicação de uma colônia, que comumente é chamada de "colônia mãe", é a sua capacidade de regeneração. Este processo é realizado durante a primavera e parte do verão. Para a divisão artificial o meliponicultor coleta alguns discos de cria nascentes<sup>1</sup> de uma colônia mãe que tenham a possibilidade de nascer pelo menos uma rainha virgem e cede para uma nova caixa onde será formado um novo enxame (colônia filha). Neste processo é esperado que essa rainha, ao nascer nesta nova morada, seja fecundada tornando-se a nova rainha, e inicie a postura de ovos para formação do novo enxame. Na literatura existem vários métodos para formação artificial de um novo enxame (AIDAR, 1996; KERR, 1996a), assim como também vários meliponicultores postam frequentemente seus vídeos na internet exibindo a sua experiência prática na divisão da uma colmeia de abelhas nativas, veja por exemplo em Embrapa (2020), Menezes (b) e Meliponário (2020b)

---

<sup>1</sup> Discos prestes e serem eclodidos dando origem a jovens abelhas



### 3.2 Simulação populacional por recorrência de primeira ordem

Suponhamos que o meliponicultor adquiriu uma nova caixa racional de madeira<sup>1</sup> e tem uma colmeia mãe pronta para desdobra. Ele coloca na nova caixa alguns suprimentos como cera e potes de alimento intactos junto com setecentas (700) células de cria contidos em três discos de cria nascentes.

A caixa da colônia filha (nova) é deixada no local onde estava a colônia mãe, com o objetivo de capturar abelhas campeiras que ajudarão na formação do novo ninho. Cabe ressaltar que a colônia mãe deve ser isolada a uma distância mínima de 10 metros (VILLAS-BOAS, 2012) para não atrapalhar o processo de desdobra, pois é esperado que as abelhas campeiras, ao retornar para o ninho, ingressem em sua nova morada. Se, neste processo, entram 200 abelhas operárias e admitindo que seu tempo de vida seja em média 55 dias, então consideraremos uma taxa de sobrevivência igual a  $1 - \frac{1}{55}$ .

No processo de formação do ninho após a desdobra são considerados três períodos que correspondem aos seguintes estágios:

1. O nascimento de abelhas doadas da colônia que foi dividida;
2. O período em que não nascerão novas abelhas, pois os discos doados terão todos eclodidos;
3. O nascimento das abelhas oriundas da jovem rainha.

Para uma análise da dinâmica populacional iremos considerar as seguintes hipóteses:

- Início da oviposição<sup>2</sup> da jovem rainha: Após 20 dias da divisão da colmeia;
- Capacidade de oviposição diária da rainha: 25 ovos por dia;
- Tempo para nascimento de uma abelha: 35 dias;
- A taxa de mortalidade das abelhas é proporcional à sua população em cada instante.

A partir destas hipóteses são adaptados os dois modelos populacionais discretos apresentados no Capítulo 2. Denotando por  $a$  a taxa de sobrevivência e considerando as hipóteses anteriores, temos que:

$$a = 1 - \frac{1}{55} = \frac{54}{55}. \quad (81)$$

---

<sup>1</sup> A Caixa racional é o compartimento para acondicionamento de colmeias de abelhas silvestres sem ferrão utilizados na meliponicultura

<sup>2</sup> Ato de expelir os ovos realizado por fêmeas de animais invertebrados.

Denotemos por  $b$  o número de abelhas que nascem diariamente das células de cria, isto é,

$$b = 25. \quad (82)$$

A seguir são descritos os três estágios da variação populacional de uma colônia de abelha sem ferrão em formação.

### 3.2.1 Primeiro Estágio

Considerando que foram doadas 700 células de cria e que cada dia nascem 25 abelhas, então ao dividir 700 por 25 vemos que, em 28 dias, todas as células de cria terão eclodido. Portanto, neste estágio há um crescimento populacional. Utilizando a Equação de recorrência (17) tem-se o PVI:

$$\begin{cases} p_{t+1} = a p_t + b, & 0 < t \leq 28 \\ p_0 = 200 \end{cases}, \quad (83)$$

onde  $p_t$  representa o número de abelhas para  $0 \leq t \leq 28$ ,  $a = \frac{54}{55}$  e  $b = 25$ . A Equação (83) gera a sequência:

$$p_0 = 200, \quad (84)$$

$$p_1 = \left(\frac{54}{55}\right) p_0 + 25 \approx 221, \quad (85)$$

$$p_2 = \left(\frac{54}{55}\right) p_1 + 25 \approx 242, \quad (86)$$

$$\vdots \quad (87)$$

$$p_{28} = \left(\frac{54}{55}\right) p_{27} + 25 \approx 672. \quad (88)$$

Como  $a \neq 1$ , pela Equação (29b), a solução da Equação (83) é dada por:

$$p_t = p_0 a^t + b \left( \frac{1 - a^t}{1 - a} \right). \quad (89)$$

Substituindo os valores de  $a$ ,  $b$  e  $p_0$  na Equação (89), segue-se que

$$p_t = 1375 - 1175 \left( \frac{54}{55} \right)^t, \quad 0 \leq t \leq 28. \quad (90)$$

### 3.2.2 Segundo Estágio

Esta segunda etapa corresponde ao período em que haverá diminuição da população da colônia a uma taxa  $a = \frac{54}{55}$ , pois todos os ovos dos discos coletados terão nascido e os ovos produzidos pela jovem rainha só nascerão após o 55º dia. O PVI que descreve este estágio é da forma:

$$\begin{cases} p_{t+1} = a p_t, & 28 < t \leq 55 \\ p_{28} = 672 \end{cases}, \quad (91)$$

O PVI (91) gera a seguinte sequência:

$$p_{28} \approx 672, \quad (92)$$

$$p_{29} = \left(\frac{54}{55}\right) p_{28} \approx 659, \quad (93)$$

$$p_{30} = \left(\frac{54}{55}\right) p_{29} \approx 647, \quad (94)$$

$$\vdots \quad (95)$$

$$p_{55} = \left(\frac{54}{55}\right) p_{54} \approx 409. \quad (96)$$

A solução do PVI (91) é dada por:

$$p_t = 672 \left(\frac{54}{55}\right)^{t-28}, \quad 28 < t \leq 55. \quad (97)$$

### 3.2.3 Terceiro Estágio

Nesta fase começam a eclodir os ovos colocados pela nova rainha, isto é, após o 55º dia. Supondo que nascem 25 abelhas por dia, temos que o novo modelo discreto é dado por:

$$\begin{cases} p_{t+1} = a p_t + b, & t > 55 \\ p_{55} = 409 \end{cases}, \quad (98)$$

Assim temos a sequência:

$$p_{55} \approx 409, \quad (99)$$

$$p_{56} = \left(\frac{54}{55}\right) p_{55} + 25 \approx 427, \quad (100)$$

$$p_{57} = \left(\frac{54}{55}\right) p_{56} + 25 \approx 444, \quad (101)$$

$$\vdots$$

$$(102)$$

$$p_{365} = \left(\frac{54}{55}\right) p_{364} + 25 \approx 1372. \quad (103)$$

Denotemos por  $S$  a solução do PVI (98), representada por:

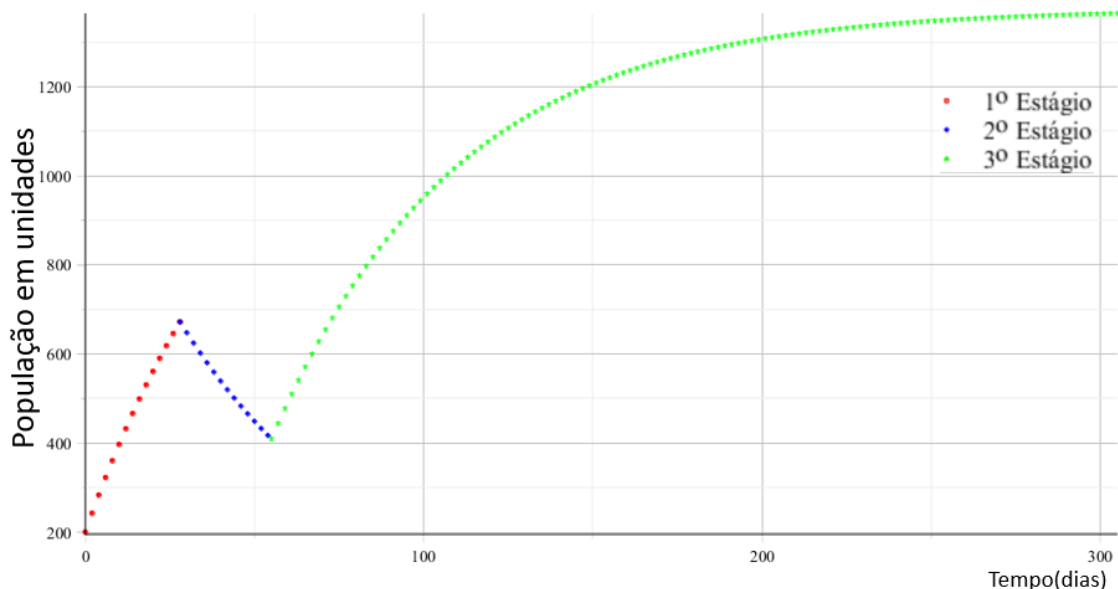
$$S : p_t = 1375 - 966 \left(\frac{54}{55}\right)^{t-55}, \quad t \geq 56. \quad (104)$$

A Figura 26 mostra o gráfico da variação populacional das abelhas estudadas representadas pelas Equações (90), (97) e (104), detalhando a sua variação populacional. Da Equação (104) pode-se estabelecer o limite de sustentabilidade

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} S = 1375, \quad (105)$$

onde  $K = 1375$  representa o número máximo de insetos que a colônia suporta.

Figura 26 - População de abelhas em diferentes estágios em função do tempo



Fonte: O autor

### 3.3 Simulação populacional pelo modelo de Beverton-Holt

Na busca de um modelo mais aproximado no terceiro estágio, escolhemos o modelo de Beverton-Holt, onde o limite de sustentabilidade  $K$  é dado pela Equação (105). Na Figura 26 se observa que a velocidade na dinâmica populacional do terceiro estágio é acelerada no início, o que não reflete a realidade.

Da Equação (39), para  $t > 55$ , temos:

$$p_t = \frac{\lambda p_{t-1}}{1 + a p_{t-1}}, \quad (106)$$

onde

$$\lambda = e^r; \quad r > 0, \quad (107)$$

e

$$a = \frac{\lambda - 1}{K}. \quad (108)$$

Isolando  $\lambda$  na Equação (106), obtemos:

$$\lambda = \frac{p_{t+1}}{p_t} \cdot \left( \frac{K - p_t}{K - p_{t+1}} \right), \quad t > 55. \quad (109)$$

No interesse de ajustar o modelo de Beverton-Holt ao modelo anterior formado pela Equação (104), calculamos uma taxa de crescimento intrínseco  $r$  que torne essa diferença mínima. Uma maneira é através da substituição dos dados gerados pela Equação (104) na Equação (109), obtendo, assim, uma função  $\lambda(t)$  para  $t > 55$ :

$$\lambda(t) = \frac{p_{t+1}}{p_t} \cdot \frac{(K - p_t)}{(K - p_{t+1})}. \quad (110)$$

Combinando os resultados obtidos na Equação (110) e substituindo na Equação (107), obtemos uma nova função  $r[\lambda(t)]$ .

$$r[\lambda(t)] = \ln \lambda(t). \quad (111)$$

Calculando a média aritmética dos parâmetros  $r(t)$  tem-se

$$\bar{r} = \frac{1}{m - 55} \sum_{t=56}^m r(t), \quad m > 55. \quad (112)$$

A constante  $\bar{r}$  determinada na Equação (112) é substituída na Equação (106), obtendo-se

assim, a sequência de Beverton-Holt representada por

$$\bar{B} : p_t = \frac{e^{\bar{r}} p_{t-1}}{1 + \left( \frac{e^{\bar{r}} - 1}{K} \right) p_{t-1}}, \quad t \geq 56. \quad (113)$$

Um critério de parada para a busca do  $\bar{r}$  ideal tal que as sequências geradas pelas Equações (104) e (113) é através da norma infinita, isto é,

$$E(\bar{r}) = \|S - \bar{B}\|_{\infty} = \max_{56 \leq n < 365} |S_n - \bar{B}_n|, \quad (114)$$

onde vamos admitir um erro inferior a 5% do limite de sustentabilidade  $K$ , isto é,

$$E(\bar{r}) \leq 69 \text{ abelhas.} \quad (115)$$

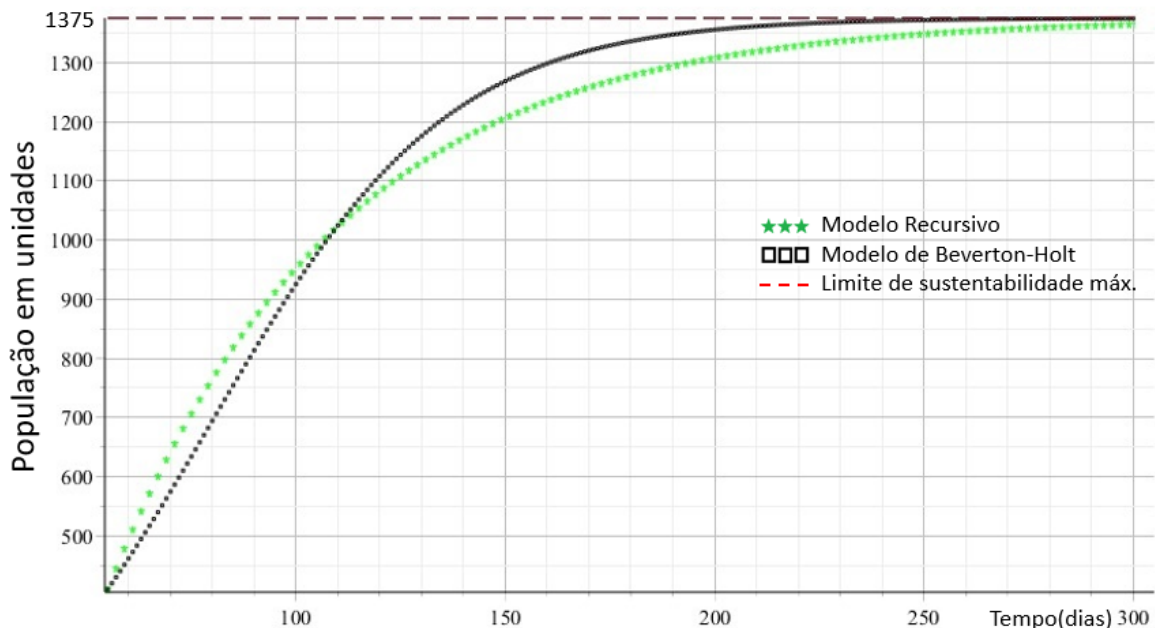
Portanto, utilizando as Equações (112), (113) e (114) é possível estimar o melhor valor de  $r = \bar{r}$ , dado por  $\bar{r} = 0,035$ , cometendo um erro aceitável de 4,7%.

Substituindo, na Equação de Beverton-Holt (106), os valores de  $K = 1375$ ,  $r = 0,035$ , e atribuindo a condição inicial do PVI (98) dada por  $p_{55} = 409$ , obtemos a função discreta:

$$p_t = \frac{e^{0,035} p_{t-1}}{1 + \left( \frac{e^{0,035} - 1}{1375} \right) p_{t-1}}, \quad t \geq 56. \quad (116)$$

Na Tabela 4 são comparados os modelos de recorrência e de Beverton-Holt no terceiro estágio, obtidos pelas Equações (104) e (116). É possível perceber uma diferença máxima de 64 abelhas no 156º dia.

Figura 27 - Comparação entre os modelos recursivo e de Beverton-Holt no terceiro estágio



Fonte: O autor

Nesta modelagem, o objetivo é simular o crescimento populacional de um novo enxame de abelhas sem ferrão. É um processo lento, que pode levar até dois meses aproximadamente para o nascimento de novas abelhas, deixando um ninho em formação fragilizado e suscetível a ações de predadores. O modelo de recorrência que trata o crescimento populacional após o 56º dia mostra uma diminuição na velocidade deste crescimento populacional em todo o seu intervalo, o que pode ser melhorado pelo modelo de Beverton-Holt, pois a velocidade de crescimento populacional tende a aumentar ao longo dos dias após uma rainha se estabelecer e ter controle sobre a colônia. Os dois modelos tendem à mesma capacidade de suporte, mostrando assim condições para o enxameamento. A competição entre espécies tais como moscas, formigas e abelhas, assim como, as condições climáticas e a falta de alimentos também são importantes fatores que determinam a sobrevivência de um enxame (VILLAS-BOAS, 2012), e podem ser considerados para a elaboração de novos modelos de estudo.

Tabela 4 - Comparação entre os modelos nos três estágios

Primeiro estágio $1 \leq t \leq 28$		Segundo estágio $29 \leq t \leq 55$		Terceiro estágio Eq. linear $t \geq 56$		Terceiro estágio Beverton $t \geq 56$	
Tempo (dias)	População (abelhas)	Tempo (dias)	População (abelhas)	Tempo (dias)	População (abelhas)	Tempo (dias)	População (abelhas)
01	221	29	659	56	427	56	427
02	242	30	647	80	764	80	702
03	262	31	636	107	1003	107	1001
10	396	40	539	130	1131	130	1178
15	482	45	491	<b>156</b>	<b>1224</b>	<b>156</b>	<b>1288</b>
20	560	50	448	180	1277	180	1336
27	659	54	417	210	1318	210	1361
28	672	55	409	300	1364	300	1374

Legenda: Dados resumidos nos três estágios com onde  $t \in \mathbb{N}$

Fonte: O autor

### 3.4 Simulação metapopulacional clássica de Levins

A simulação do modelo metapopulacional é analisado utilizando, como motivação, as colônias de abelhas sem ferrão localizadas na região da Faculdade de Formação de Professores - UERJ no município de São Gonçalo-RJ. Nesse campus foi possível observar os ninhos de três espécies de abelhas, entre as quais visualizamos duas colônias de abelhas Jataí (*Tetragonisca angustula*), sendo uma exibida na Figura 28a, uma grande colônia de abelhas

Irapuã (*Trigona spinipes* Fabricius, 1793) e três ninhos de abelhas Iraí (*Nannotrigona testaceicornes* Lepeletier, 1836) como mostra a Figura 28b.

Figura 28 - Alguns ninhos de abelhas nativas na FFP-UERJ



(a) Ninho de abelha Jataí



(b) Ninho de abelha Iraí

Fonte: O autor

As três colônias de Iraí vivem na parte de trás do prédio principal. Elas construíram seus ninhos em três buracos entre a calçada e a parede, correndo risco constante de inundação, predação por formigas, ratos ou até mesmo ação humana caso se realize uma manutenção próxima de onde elas estão inseridas. Elas não estão ali por uma questão natural. Esses insetos constroem seus ninhos em ocós de árvores e, na falta deles, procuram lugares similares, no caso os buracos da calçada.

#### 3.4.1 Simulação de persistência local

Nesta simulação vamos supor que existam três ninhos de abelhas sem ferrão de uma mesma espécie e estão distribuídas em uma determinada região contendo espaços que podem ser colonizados ao longo do tempo. Supomos que, esta região eventualmente sofra com enchentes ocasionada nos períodos de chuva, podendo extinguir os três ninhos lá constituídos. Denotando por  $P_e$  a probabilidade de extinção ao ano, isto é,

$$P_e = \frac{1}{3}, \quad (117)$$

então, pela Equação (41), a sua chance de persistência local em função de um tempo  $T$  é dado por:

$$P_L(T) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^T = (0, \bar{6})^T, \quad T \in \mathbb{N}. \quad (118)$$

Na Tabela 5 é apresentada a distribuição de probabilidade sobre a persistência local nos primeiros cinco anos desta metapopulação.



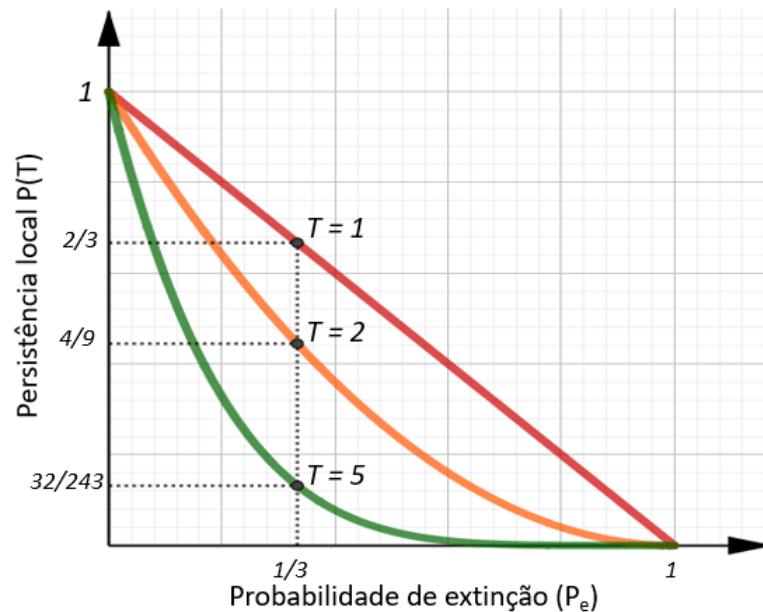
Tabela 5 - Persistência local nos primeiros cinco anos

Tempo (anos)	Chance de persistência	Porcentagem
0	1	100%
1	$0, \bar{6}$	$66, \bar{6}\%$
2	$(0, \bar{6})^2 = 0, \bar{4}$	$44, \bar{4}\%$
3	$(0, \bar{6})^3 \approx 0, 296$	$29, 6 \%$
4	$(0, \bar{6})^4 \approx 0, 1975$	$19, 75\%$
5	$(0, \bar{6})^5 \approx 0, 1317$	$13, 17\%$

Fonte: O autor

A Figura 29 mostra a chance de persistência local em função da probabilidade de extinção  $P_e \in [0, 1]$  para os períodos 1, 3 e 8 anos. Nela é possível verificar que quanto maior for a probabilidade de extinção de uma espécie, diminui mais rapidamente a chance de persistência local ao longo do tempo.

Figura 29 - Persistências local para diferentes períodos de tempo  $T$  dado em anos



Fonte: O autor

### 3.4.2 Simulação de persistência regional

Uma solução para minimizar o risco de extinção das três colônias de abelhas indígenas presentes neste local é extraí-las para caixas racionais, eliminando assim, o risco de extinção por enchentes. Porém, ao fazer isso, o risco de extinção dobra no primeiro

ano, isso se deve ao enfraquecimento de cada um dos ninhos transferidos do seu local de origem. Supomos que a expressão a seguir representa o novo risco de extinção:

$$P_{\bar{e}} = \frac{2}{3}. \quad (119)$$

Embora o risco de extinção local de cada colônia tenha aumentado, devemos considerar a chance de persistência regional de ao menos um dos ninhos retirados da calçada. Para isso, a Equação (120), mostra a chance de extinção dos três ninhos simultaneamente:

$$(P_{\bar{e}})^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad (120)$$

Denotamos por  $P_R$  a chance de persistência regional de ao menos um dos três ninhos. Seu cálculo é obtido a partir da Equação (42).

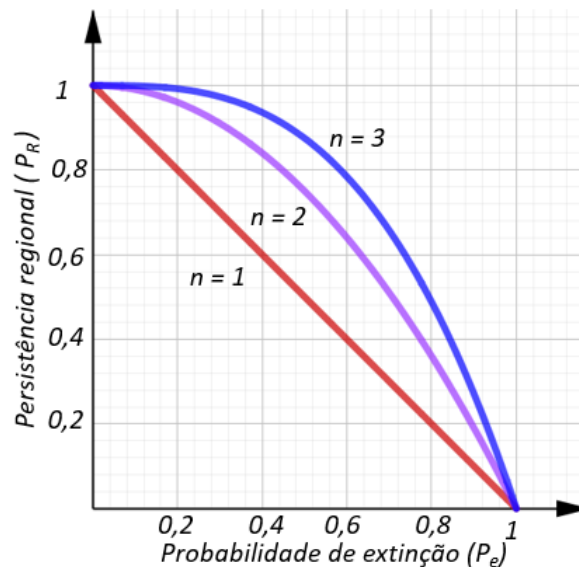
$$P_R = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0,703. \quad (121)$$

Portanto, a chance de persistência regional é aproximadamente de 70%.

$$P_R > P_L. \quad (122)$$

A Figura 30 mostra a capacidade de persistência regional em função no número  $n$  de subpopulações presentes no primeiro ano após a transferência, neste caso uma, duas ou três colônias. Nela é possível observar que, quanto maior o número de colônias transferidas, maior será a taxa de persistência regional  $P_R$ .

Figura 30 - Persistências regional em função do número  $n$  de populações



Fonte: O autor

A expressão (117) mostra a probabilidade de extinção local  $P_e = \frac{1}{3}$  da metapopulação formada pelas três colmeias de abelha sem ferrão. A partir desta informação, vamos determinar a probabilidade máxima de extinção regional ( $P_{\bar{e}}$ ) tolerável para a mudança dos três ninhos.

A escolha da transferência dos ninhos só será adequada caso o risco de persistência regional  $P_R$  seja superior a  $P_L$ :

$$P_R > P_L. \quad (123)$$

A probabilidade de persistência regional é válida apenas para o primeiro ano de observação, portanto:

$$P_L = 0, \bar{6} \quad (124)$$

e

$$P_R = 1 - (P_{\bar{e}})^3. \quad (125)$$

Das Equações (123), (124) e (125) obtemos:

$$1 - (P_{\bar{e}})^3 > 0, \bar{6}, \quad (126)$$

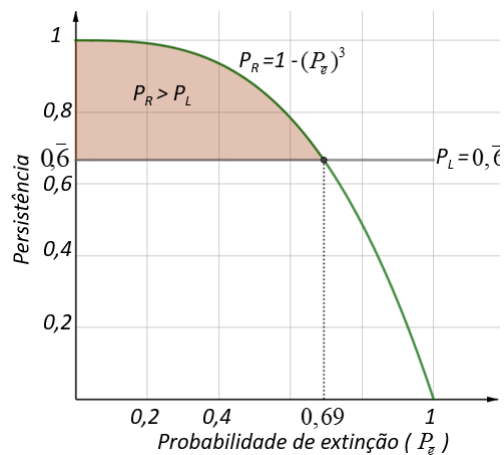
e, simplificando, obtemos

$$P_{\bar{e}} < 0,6933. \quad (127)$$

A comparação entre os modelos de sobrevivência sugere a transferência dos ninhos é a melhor escolha desde que a probabilidade de extinção após a transferência não ultrapasse os 69%.

A Figura 31 compara as chances de persistência regional e local no período de um ano.

Figura 31 - Comparação entre as Persistências local e regional no período de um ano



Fonte: O autor

A finalidade da Biologia de conservação é garantir a diversidade biológica do planeta. Os efeitos causados por distúrbios antrópicos têm provocado a extinção de um grande número de espécies em diferentes ecossistemas do planeta. Estas ações afetam diretamente as abelhas silvestres, pois a perda de seu habitat e sua dependência a regiões restritas podem provocar o seu isolamento a apenas regiões fragmentadas. Os modelos metapopulacionais mais simples permitem constatar que as chances de persistência de uma população são maiores se elas ocuparem mais de uma região fragmentada. Desta maneira, a simplicidade deste modelo propõe elos entre a matemática e a biologia, sendo possível mostrar através da teoria da probabilidade a chance de sobrevivência de espécies com populações que habitam regiões fragmentadas natural ou artificialmente. Modelos populacionais mais complexos podem incluir outros fatores, como taxa de migração, efeitos ocorridos devido ao tamanho dos fragmentos e do seu isolamento em relação a um outro fragmento.

## 4 ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Neste capítulo são apresentadas algumas atividades interdisciplinares desenvolvidas através de um projeto sob a coordenação do professor autor deste trabalho em uma turma de alunos do segundo ano do Ensino Médio, com o objetivo de conscientizá-los sobre os cuidados e respeito à natureza, em especial as abelhas nativas. Os problemas matemáticos contextualizados abrangem: sequências numéricas, média aritmética, geometria espacial e teoria das probabilidades.

### 4.1 Conhecendo as abelhas

A turma piloto atualmente está cursando o segundo ano do Ensino Médio em uma Escola da Rede Pública de Ensino, localizado no município de Itaboraí no estado do Rio de Janeiro. Esta turma é composta por 41 alunos com idades variando entre 15 e 18 anos.

Segundo Jacobi (2003), a falta de conhecimento não estimula hábitos de preservação ambiental. Neste sentido, três semanas antes da paralisação das aulas presenciais e início do período de isolamento proposto pelo Governo do Estado do Rio de Janeiro, foi iniciado um projeto de pesquisa envolvendo as abelhas nativas na escola onde o professor autor leciona. Durante duas aulas totalizando 100 minutos, com o auxílio de um projetor, foi apresentada uma visão geral sobre a importância dos agentes polinizadores, dando ênfase as abelhas nativas, a necessidade de sua preservação e o risco de extinção.

Devido ao período de suspensão das aulas presenciais a partir de 16 de março de 2020 e considerando o distanciamento social, seguindo o Decreto Nº 47027 de 13 de abril 2020, o colégio mencionado optou pelas aulas remotas empregando as ferramentas síncronas e assíncronas.

Durante os meses de abril até a primeira quinzena de julho, foram desenvolvidas dez atividades extracurriculares com duração semanal. A primeira atividade online iniciada em 13 de abril foi uma pesquisa sobre os polinizadores, em especial, as abelhas sem ferrão.

#### 4.1.1 Atividade 1 - Pesquisa sobre polinizadores

A primeira atividade consistiu de um levantamento de dados sobre os principais polinizadores, em especial, sobre as abelhas sem ferrão.

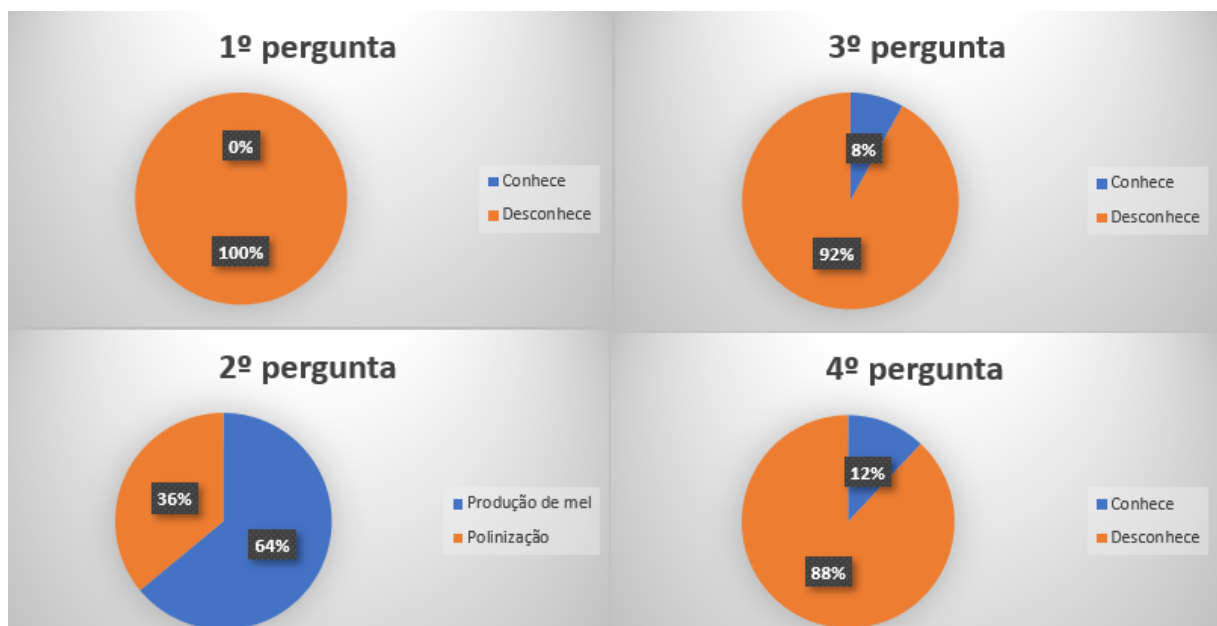
Dos 41 alunos da turma, apenas 25 deles reponderam as perguntas formuladas:

1. Você já conhecia as abelhas sem ferrão?

2. Qual a maior importância das abelhas?
3. Você sabia que as abelhas são responsáveis pela polinização de mais de 70% das frutas e verduras que consumimos?
4. Você sabia que é possível criar abelhas sem ferrão em casa?

Considerando a participação dos 25 discentes, os resultados desta Atividade 1 estão representados na Figura 32 em diagramas de disco.

Figura 32 - Resultados da primeira atividade



Fonte: O autor

**Discussão:** Após responderem o questionário, foi mostrado algumas espécies de abelhas diferentes das tradicionais *Apis mellifera* conhecida por todos. Nesse momento, grande parte dos alunos reconheceu as abelhas popularmente conhecidas por abelha cachorro (*Trigona spinipes*) e as abelhas do gênero *Bombus* relatando, inclusive, seu nome popular "Mamangava". Entretanto não sabiam que se tratava de um gênero de abelha, sendo que a maioria dos alunos moram em zona rural e, portanto, é comum eles avistarem esses insetos em flores próximas de suas residências.

Apesar de existirem mais de 300 tipos de abelhas sem ferrão habitando o território brasileiro, esse questionário mostra o grau de desconhecimento sobre essas espécies revelando a necessidade da divulgação sobre a importância das abelhas para produtores rurais e preservação dos diversos biomas nacionais tais como a Caatinga, o Pantanal, a Amazônia e a Mata Atlântica.

## 4.2 Problemas interdisciplinares

A proposta desta atividade é propor problemas interdisciplinares e contextualizados dentro da Biomatemática. Foram abordados os seguintes tópicos: sequências numéricas, média aritmética, geometria espacial e probabilidades.

Ao elaborar perguntas sobre como interage a Matemática com a natureza das abelhas sem ferrão, não se obteve respostas dos alunos presentes no encontro virtual, porém, ao iniciar perguntas do tipo:

- Qual a forma geométrica dos potes de mel da abelhas nativas?
- De que maneira esses insetos se reproduzem?
- É possível estimar o tamanho de uma população de abelhas?

Surgiram respostas muito vagas como: "tem forma de ovo", "tem que ter uma rainha", "conta os ovos", demonstrando paulatinamente o interesse e curiosidade sobre o assunto. A cada aula realizada de forma remota através do *Google Meet* foi proposta uma atividade para ser entregue na semana seguinte.

### 4.2.1 Atividade 2 - Medida de tendência central

A Melípona é um gênero de abelha, cuja característica é possuir o ferrão atrofiado e, por isso, são conhecidas como abelhas sem ferrão. A nível mundial são classificadas aproximadamente 70 espécies deste gênero, sendo que elas habitam a região Neotropical. O número de abelhas que vivem em uma colônia de melíponas depende da espécie, variando entre 500 a 4000 insetos. Uma característica comum a todas as abelhas desse gênero é que elas vivem subordinadas a uma única abelha rainha, que é a responsável pela postura dos ovos para a perpetuação do enxame. A Tabela 6 exemplifica a quantidade de ovos mensais ovipositados por uma abelha rainha ao longo de um ano. Responda as seguintes perguntas:

Tabela 6 - Ciclo de postura mensal da rainha.

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Postura	930	900	815	600	600	300	465	465	465	775	800	1085

Fonte: O autor

- (a) Qual a média de ovos "diários" produzidos pela rainha no mês de julho?
- (b) Determine a média de ovos diários produzidos pela rainha no período de um ano.

- (c) Observando a tabela, em quais estações climáticas do ano a quantidade de ovos produzidos pela rainha é menor e em qual estação tem maior produção?

**Solução:** (a): A média de ovos diários produzidos no mês de julho é obtida pela razão entre o total produzido pelo número de dias:

$$\frac{465}{31} = 15, \quad (128)$$

isto é, a rainha produziu em média 15 ovos por dia.

(b) A média anual é resultado do somatório de ovos produzidos no ano pelo número de dias:

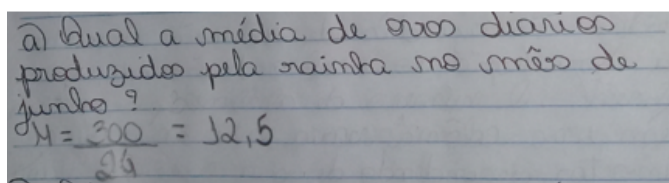
$$\frac{930 + 840 + 775 + \dots + 775 + 900 + 1085}{365} \approx 22, \quad (129)$$

ou seja, ela produz em média 22 ovos por dia.

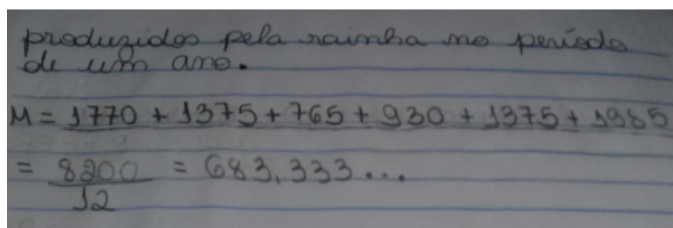
(c) A menor produção de ovos foi na estação climática do inverno, pois corresponde aos meses de junho, julho, agosto e parte de setembro, enquanto a maior produção de ovos ocorre nos meses de novembro, dezembro, janeiro e fevereiro que correspondem em parte a estação climática do verão.

**Discussão:** Apenas 20 alunos responderam as perguntas propostas, sendo que a média geral de acertos foi igual a 60%. No item (b) a maioria considerou média mensal, enquanto o problema solicitava média diária. No item (c) confundiram estação climática com mês, o que mostra a falta de atenção na leitura. No lado esquerdo da Figura 33 é apresentada a solução de um aluno e, do lado direito, a sua transcrição.

Figura 33 - Soluções propostas pelos alunos

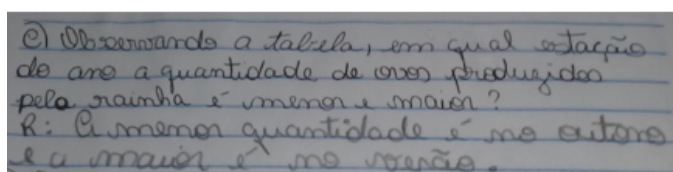


$$M = \frac{300}{24} = 12,5$$



$$M = 1770 + 1375 + 765 + 930 + 1375 + 1865$$

$$= \frac{8200}{12} = 683,333\dots$$



A menor quantidade é no outono e a maior é no verão.



#### 4.2.2 Atividade 3 - Razões e proporções

O mel das abelhas-sem-ferrão, diferenciado devido a um sabor mais ácido que o mel da abelha africanizada (*Apis mellifera*), é muito utilizado hoje na gastronomia. Sabe-se que uma colônia de abelha mandaçaia (*Melipona quadrisfaciata*), com aproximadamente 500 abelhas operárias, é capaz de produzir até 2,5 litros de mel por ano, enquanto um enxame de abelha africanizada com 60 mil abelhas produz até 20 litros de mel por ano.

- (a) Entre as abelhas citadas no texto, qual espécie de abelha produz mais mel? Justifique a sua resposta.
- (b) Qual a proporção de produção de mel entre as abelhas citadas?

**Solução:** (a) Uma maneira de se obter a solução é comparando o trabalho produzido por cada operária das espécies. A produção em litros de mel por cada operária é dada por:

$$\text{Abelha mandaçaia: } \frac{2,5}{500} = 0,005 \text{ litro/abelha,} \quad (130)$$

$$\text{Abelhas africanizadas: } \frac{20}{60\,000} = 0,0003 \text{ litro/abelha.} \quad (131)$$

Comparando a produção de cada espécie de abelha dada nas Equações (130) e (131), conclui-se que cada abelha mandaçaia produz mais mel que cada abelha africanizada, pois  $0,005 > 0,0003$ .

(b) Denotemos por  $k$  a proporção de produção de mel produzido por cada espécie de abelha; Esta razão é dada por:

$$k = \frac{2,5/500}{20/60000} = 15. \quad (132)$$

Isto significa que a produção individual de mel da abelha mandaçaia é quinze vezes superior à produção de mel da abelha africanizada.

**Discussão:** Após uma breve explicação sobre proporção, 20 alunos responderam esta atividade e a média geral de acertos foi igual a 40%. O que ficou evidente foi a dificuldade de argumentação através de operações matemática, pois a maioria dos alunos justificaram os seus resultados através de textos evitando, assim, qualquer comparação entre as gradezas dadas no problema.

#### 4.2.3 Atividade 4 - Volume do elipsoide de revolução

A maioria das espécies de meliponíneos constroem os potes para armazenamento de mel e pólen na forma oval. Em termos matemáticos dizemos que é parecido com um

elipsoide de revolução. A seguinte fórmula permite o cálculo de seu volume:

$$V = \frac{4}{3}a^2c\pi, \quad (133)$$

onde:

$V$ : Volume,

$a$ : metade do diâmetro.

$c$ : metade da altura.

$\pi \approx 3,14$ .

Os potes de mel das abelhas Uruçu cinzenta, também conhecida por abelha Tiúba, possuem em média 2 cm de diâmetro e 3 cm de altura.

- (a) Determine o volume de cada pote de mel.
- (b) Se considerarmos uma produção de 2,5 litros de mel por ano, aproximadamente, quantos potes de mel foram cheios?

**Solução:** (a) Sendo  $a, c$  a metade das medidas do diâmetro e altura, respectivamente, então, aplicando a Fórmula (133), tem-se:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot (3,14) = 6,28 \text{ cm}^3, \quad (134)$$

por equivalência das medidas  $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ , então o volume de cada pote de mel contém:

$$V = 6,28 \text{ ml} \quad (135)$$

(b) Sabe-se que  $2,5 \text{ l} = 2500 \text{ ml}$ . Portanto, ao dividir esse volume de mel pelo volume de cada pote, obtemos:

$$\frac{2500}{6,28} = 398. \quad (136)$$

Conseqüentemente, para coletar 2,5 litros de mel, são necessários cerca de 398 potes de mel.

**Discussão:** Uma das formas de se obter a Equação (133) que permite calcular o volume do elipsoide de revolução é tratada no Capítulo 2, seção 5. Apenas 15 alunos responderam essa atividade, após serem orientados sobre a mudança de volume para capacidade, 67% destes acertaram a resposta, enquanto 33% erraram nos cálculos aritméticos envolvendo operações de divisão e transformação para unidades de capacidade.

#### 4.2.4 Atividade 5 - Área superficial de potes de alimento

Essa atividade foi proposta em uma aula online no intuito de se trabalhar funções matemáticas com o auxílio de uma calculadora científica e planilha eletrônica.

Os potes de mel das abelhas mandaçaia são construídos com cerume, que consiste em uma mistura de cera e própolis. A área superficial do elipsoide de revolução é determinada pela fórmula:

$$A = 2.a.\pi \left\{ a + \frac{c^2}{2\sqrt{c^2 - a^2}} \left[ \arccos\left(\frac{-\sqrt{c^2 - a^2}}{c}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}\right) \right] \right\},$$

sendo,

$a$  : metade do diâmetro.

$c$  : metade da altura.

$\pi \approx 3,14$ .

(137)

Considerando as dimensões médias dos potes de abelhas Mandaçaia iguais a 2 cm de diâmetro e 3 cm de altura.

(a) Substitua os valores de  $a$  e  $c$  na Equação para  $A$ .

O valor obtido corresponde à área superficial de um pote de alimento.

(b) Determine a quantidade de cerume utilizada na construção do pote de alimento, supondo que ele tem uma espessura de 1 mm.

**Solução:** (a) Sendo  $a$  e  $c$  iguais a metade do diâmetro e altura do elipsoide de revolução, então, ao substituir na equação (137), obtém-se:

$$A \approx 2(3,14) \left\{ 1 + \frac{2,25}{2\sqrt{1,25}} \left[ \arccos\left(\frac{-\sqrt{1,25}}{1,5}\right) - \arccos\left(\frac{\sqrt{1,25}}{1,5}\right) \right] \right\}, \quad (138)$$

$$A \approx 6,28 [1 + 2,236(\arccos(-0,745) - \arccos(0,745))], \quad (139)$$

$$A \approx 6,28[1 + 2(2,41 - 0,73)], \quad (140)$$

$$A \approx 16,92 \text{ cm}^2. \quad (141)$$

Portanto o valor da área superficial é aproximadamente  $16,92 \text{ cm}^2$ .

(b) Sendo  $1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$ , então o volume de cerume utilizado na construção do pote de alimento é obtido pela diferença entre o volume de dimensões  $a, c$ , pelo pote de

dimensões internas  $a' = a - 0,1$  e  $c' = c - 0,1$ , então:

$$V = \frac{4}{3}a^2 c \pi - \frac{4}{3}(a - 0,1)^2 (c - 0,1) \pi, \quad (142)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi [a^2 c - (a^2 - 0,2a + 0,01)(c - 0,1)], \quad (143)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(0,1a^2 + 0,2ac - 0,02a - 0,01c + 0,001), \quad (144)$$

substituindo os valores:  $a = 1$ ,  $c = 1,5$  e  $\pi \approx 3,14$  na equação (144), tem-se

$$V \approx \frac{4}{3}(3,14)(0,1 + 0,3 - 0,02 - 0,0015 + 0,001) \quad (145)$$

$$V \approx 1,58 \text{ cm}^3 \text{ de cerume.} \quad (146)$$

**Discussão:** Esse resultado foi obtido durante a aula remota com a participação de 15 alunos. Os cálculos foram realizados através de uma planilha eletrônica disponibilizada gratuitamente pelo *Google*. A maior dificuldade foi ensinar como criar uma função matemática na planilha. Três alunos ajudaram os seus colegas em como criar uma função matemática na planilha. No item b houve uma certa discussão sobre a solução, pois dois alunos argumentaram que:

*"Se considerarmos  $1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$  e multiplicamos o valor da área obtida na equação (144) obtemos o volume equivalente a  $V = 0,1 \cdot 16,92 = 1,692 \text{ cm}^3$  de cerume".*

Embora essa solução seja incorreta, os dois alunos ganharam pontos, pois foi uma elegante solução, visto que é um conteúdo que dificilmente é abordado no segundo ano do Ensino Médio devido à falta de tempo para se cumprir o planejamento anual. A forma correta é determinar o volume do elipsoide e subtrair o volume interno obtido nas equações anteriores.

Seis alunos não conseguiram realizar devido a problemas de conexão durante a aula. A média de acertos da turma foi igual a 60%.

#### 4.2.5 Atividade 6 - Sequências numéricas

As abelhas sem ferrão são espécies que habitam a região tropical e subtropical de nosso planeta. Muitas delas estão ameaçadas de extinção por diversos fatores, em especial a degradação de seu habitat e o uso inadequado de defensivos agrícolas. A maioria das espécies formam um novo enxame uma vez ao ano e este é um processo conhecido por enxameação. Nele, um grupo de abelhas procuram um local adequado e, ao encontrar, começam a levar todos os tipos de recursos da colônia mãe que irá se dividir. Nesta ação, uma nova candidata à rainha deixa a colônia "mãe" em direção ao novo lar com um grupo de abelhas operárias e zangões. Após realizar o voo nupcial, inicia a oviposição, isto é,

inicia a postura de ovos que darão origem a novas abelhas na nova colônia.

1. Suponha que 1000 abelhas operárias acompanham a futura rainha ao novo lar. Pressuponha que cada abelha operária vive em média 50 dias e que todas elas tenham idades equidistribuídas, isto é, a taxa de óbito diário é fixa de  $\frac{1}{50}$  das 1000 abelhas iniciais.
  - (a) Quantas abelhas morreram no primeiro dia?
  - (b) Após dois dias, quantas abelhas operárias estarão vivas nessa nova morada?
  - (c) Quantos dias se passarão para que a população do enxame esteja reduzida a 600 abelhas?
2. Considere agora, neste mesmo grupo de 1000 abelhas, que a taxa diária de óbito seja dada por  $\frac{20}{1000}$  da população do dia anterior. Por exemplo, se no instante inicial  $a_0$  tem-se 1000 abelhas vivas, então:

- Primeiro dia:  $a_1 = 1000 - \frac{20}{1000} \cdot 1000$ ,
- Segundo dia:  $a_2 = a_1 - \frac{20}{1000} a_1$ .

Se considerarmos essa taxa de mortalidade constante, responda:

- (a) Qual sequência numérica descreve a população após  $n$  dias? Determine o valor de sua razão e sua forma geral.
- (b) Quantas abelhas aproximadamente estarão vivas após 10 dias?

**Solução:** (1.a) Sabendo que a taxa de óbito é  $\frac{1}{50}$  de 1000, então a cada dia morrem 20 abelhas.

(1.b) Como a cada dia morrem 20 abelhas, então em dois dias morrem 40, isto é,  $1000 - 2(20) = 960$  abelhas.

(1.c) A cada dia morrem 20 abelhas, então em  $n$  dias morrem  $20n$  abelhas. Portanto, a população restante é dada pela equação  $a_n = 1000 - 20n$ . Sendo  $a_n = 600$ , resolvendo a equação

$$1000 - 20n = 600, \quad (147)$$

obtem-se  $n = 20$ . Portanto o enxame fica reduzido a 600 abelhas após 20 dias.

(2.a) Considerando as hipóteses dadas, tem-se:

$$a_2 = a_1 \left(1 - \frac{20}{1000}\right) = 0,98 a_1 \quad (148)$$

$$a_3 = 0,98 a_2 = (0,98)^2 a_1 \quad (149)$$

$$a_4 = 0,98 a_3 = (0,98)^3 a_1 \quad (150)$$

Desta forma, podemos generalizar para um dia  $n$  maior que 1. Assim:

$$a_n = (0,98)^{n-1} a_1 \quad (151)$$

A sequência da equação (151) que descreve o decréscimo populacional é uma Progressão Geométrica, onde o primeiro termo é  $a_1 = 980$  e a razão é 0,98.

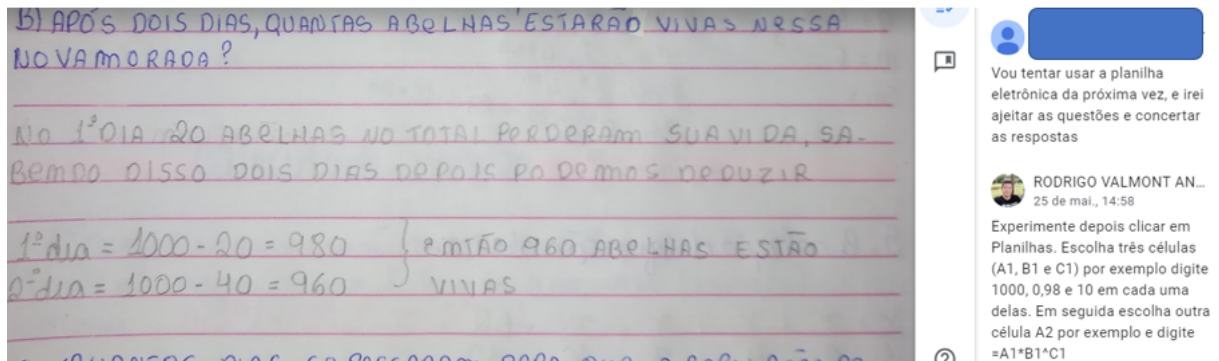
(2.b) Substituindo  $n = 10$  na Equação (151) obtemos

$$a_{10} = (0,98)^9 \cdot 980 = 817. \quad (152)$$

Portanto, após 10 dias estarão vivas 817 abelhas.

**Discussão:** Nesta atividade participaram apenas 12 alunos. Embora esta atividade tenha um maior número de perguntas, a média de acertos foi de 66,6%. Após a correção surgiram perguntas como, "se desta forma é possível estimar tamanho de outras populações" demonstrando assim um interesse maior nas sequências numéricas. Alguns alunos tentaram solucionar o problemas através de planilhas, o que foi proveitoso, visto que muitos alunos não conheciam os aplicativos utilizados. Na Figura 34 é apresentada a solução de um discente muito dedicado e participativo.

Figura 34 - Resposta de um aluno



Fonte: O autor

#### 4.2.6 Atividade 7 - Chance de sobrevivência

Algumas espécies de abelhas sem ferrão vivem em harmonia com mais de uma rainha em uma mesma colônia. A abelha Guaraipo (*Melipona bicolor* Lepeletier, 1836) é um exemplo. Em um ninho podem ser encontradas até cinco rainhas, todas realizando seu trabalho de postura de ovos e garantindo a sobrevivência do enxame. Ela é encontrada no sudeste do Brasil, e suas abelhas normalmente constroem seus ninhos perto do solo em raízes ocas ou troncos de árvores próximos a rios, pois elas são muito sensíveis à umidade do ar. Esta é uma espécie de abelha que dificilmente pode ser avistada devido à destruição

de seu habitat por diversos fatores, tais como o despejo irregular de lixo industrial, esgotos de residências, desmatamento, e agricultura migratória. A meliponicultura pode ajudar a controlar o processo de extinção em que muitas das espécies de melíponas se encontram. Suponha que um grupo de meliponicultores, ao analisar as colônias de abelhas Guaraipo em uma região, observaram que, a cada dez ninhos existentes, dois deles se extinguem no ano seguinte. Sendo assim, estimaram o risco de extinção  $P_e$  por colônia igual a 20% a cada ano. A fórmula:

$$P(t) = (1 - P_e)^t, \quad (153)$$

permite o cálculo de sobrevivência local de cada ninho em função de  $t$  (anos).

1. Encontre a função que relacione a chance de sobrevivência  $P$  de uma colônia em função de um tempo  $t$  dado em anos.
2. Qual a porcentagem de sobrevivência de um destes ninhos após:
  - (a) 1 ano?
  - (b) 2 anos?
  - (c) 3 anos?

**Solução:** (1) Sendo  $20\% = 0,2$  o risco de extinção local ao ano, então  $P_e = 0,2$  e a chance de sobrevivência é dada por:

$$P(t) = (1 - 0,2)^t \quad (154)$$

$$P(t) = (0,8)^t \quad (155)$$

(2) As soluções para os itens  $a$ ,  $b$  e  $c$  são obtidas a partir da Equação (155). Para cada item, deve-se substituir o valor de  $t$  dado. Portanto: (2.a) Sendo  $t = 1$ , então  $P(1) = 0,8$ .

(2.b) Para  $t = 2$ , temos  $P(2) = (0,8)^2 = 0,64$ .

(2.c) Se  $t = 3$ , obtemos  $P(3) = (0,8)^3 = 0,512$ .

Sendo assim, a porcentagem de sobrevivência após 1, 2 e 3 anos respectivamente é de 80%, 64% e 51% aproximadamente.

**Discussão:** Nesta atividade participaram 15 discentes e a média de acertos foi igual a 40%. Grande parte das falhas ocorreram no item 1, pois substituíram  $P(t)$  por 20% confundindo, assim, o risco de extinção com a probabilidade de extinção.

#### 4.2.7 Atividade 8 - Problemas de decisão

Ao observar uma colônia de abelhas Jataí em uma pequena região limitada, o meliponicultor verificou a disponibilidade de muitos discos de cria com realeiras (possi-

bilidade de nascimento de novas rainhas). Então decidiu dividir a colmeia mãe em três partes iguais. Sabe-se que o risco de extinção para cada ninho desta espécie nesta região fragmentada é de 20% ao ano e que, ao realizar a divisão do ninho original, os novos enxames ficam sujeitos a uma nova taxa de extinção de aproximadamente 40% no primeiro ano. Sabe-se que a fórmula que permite o cálculo da chance de persistência de pelo menos uma subpopulação em regiões fragmentadas é dada por.

$$P_n = 1 - (P_e)^n, \quad (156)$$

onde,

$n$  : Quantidade de enxames divididos;

$P_n$  : Chance de sobrevivência de ao menos uma colônia no primeiro ano;

$P_e$  : Risco de extinção de cada colônia.

Se considerarmos a intenção de dividir a colônia inicial em três novos ninhos, podemos dizer que essa foi uma boa ideia? Justifique.

**Solução:** Sendo  $n = 3$  e considerando o risco de extinção igual a  $P_e = 40\%$ , substituindo na fórmula dada acima tem-se:

$$P_3 = 1 - (0,4)^3 = 0,936 \quad (157)$$

Portanto, a chance de sobrevivência de pelo menos um enxame no próximo ano será de 93,6%. Considerando que a chance original de persistência é de 60%, o resultado obtido mostra que houve um aumento de 33,6% aproximadamente na chance de sobrevivência.

**Discussão:** Esta tarefa foi realizada por 10 alunos, onde apenas 2 alunos responderam corretamente. A maioria não deixou nenhum registro de suas resoluções, apenas uma resposta final sem nenhum argumento matemático. Após a correção, muitos disseram não conseguir associar o problema à sua fórmula de resolução, demonstrando, assim, dificuldade em interpretação de texto.

#### 4.2.8 Atividade 9 - Octaedro truncado

A abelha Lambe Olhos é considerada uma das menores abelhas do mundo, medindo aproximadamente 1,5 mm de comprimento. Os pequenos potes de mel e pólen presentes em seu ninho, quando estão agrupados, são semelhantes a uma aglomeração de octaedros truncados. A Figura 35 formada por um agrupamento de octaedros truncados simula a disposição de potes de mel e pólen quando estão agrupados. A área superficial  $A$  e o volume  $V$  do octaedro truncado podem ser calculados a partir das fórmulas:

$$A = 6a^2(1 + 2\sqrt{3}) \text{ u.m}^2 \quad (158)$$



e

$$V = 8a^3\sqrt{2}u.m.^3, \quad (159)$$

onde  $a$  representa a medida de sua aresta.

1. Supondo que a aresta de um pote de alimento mede aproximadamente  $1,5\text{ mm}$ , calcule:
  - (a) O valor aproximado em  $mm^2$  de sua área superficial. (Considere  $\sqrt{3} \approx 1,7$ )
  - (b) Qual a quantidade aproximada de potes de mel equivalente a  $10\text{ ml}$ ? (Considere  $1\text{ dm}^3 = 1\text{ litro}$  e  $\sqrt{2} \approx 1,4$ ).

Figura 35 - Octaedros truncados construídos pelos alunos



Fonte: O autor

**Solução:** (1.a) Aplicando a medida de  $1,5\text{ mm}$  na Equação (158) obtemos:

$$A = 6(1,5)^2[1 + 2(1,7)] \approx 60\text{ mm}^2. \quad (160)$$

(1.b) Inicialmente podemos converter o volume de  $1\text{ litro}$  para a capacidade em milímetros para, em seguida, dividir pelo volume ocupado por um octaedro truncado:

$$1\text{ l} = 1000\text{ ml} = 1\text{ dm}^3 = 10^3\text{ cm}^3 = 10^3 \cdot 10^3\text{ mm}^3 \quad (161)$$

$$1\text{ ml} = 1000\text{ mm}^3. \quad (162)$$

Pela equação (159) obtemos o volume:

$$V = 8(1,5)^3(1,4) = 38 \text{ mm}^3. \quad (163)$$

Portanto, para se preencher 10 mililitros são necessários

$$\frac{10000}{38} \approx 264 \text{ octaedros truncados}. \quad (164)$$

**Discussão:** A construção da estrutura formada pelos octaedros foi feita pelos alunos antes da COVID-19. Os participantes classificaram os sólidos geométricos em relação ao número de vértices, faces e arestas. Participaram desta atividade 15 alunos, sendo que 8 responderam corretamente aos dois problemas.

#### 4.2.9 Atividade 10 - Culinária das abelhas

Maria decidiu fazer barras de cereal para seus 40 colegas do colégio. A receita com os seguintes ingredientes rende 8 barras de cereal. Ingredientes

- 2 bananas (tamanho médio) maduras e amassadas;
- 2 colheres grandes de mel de abelha;
- 1 colher pequena de canela em pó;
- $\frac{1}{2}$  xícara de uva Passa;
- 1 xícara de aveia grossa.

Qual a quantidade de ingredientes ela deve usar para preparar as 40 barras de cereal?

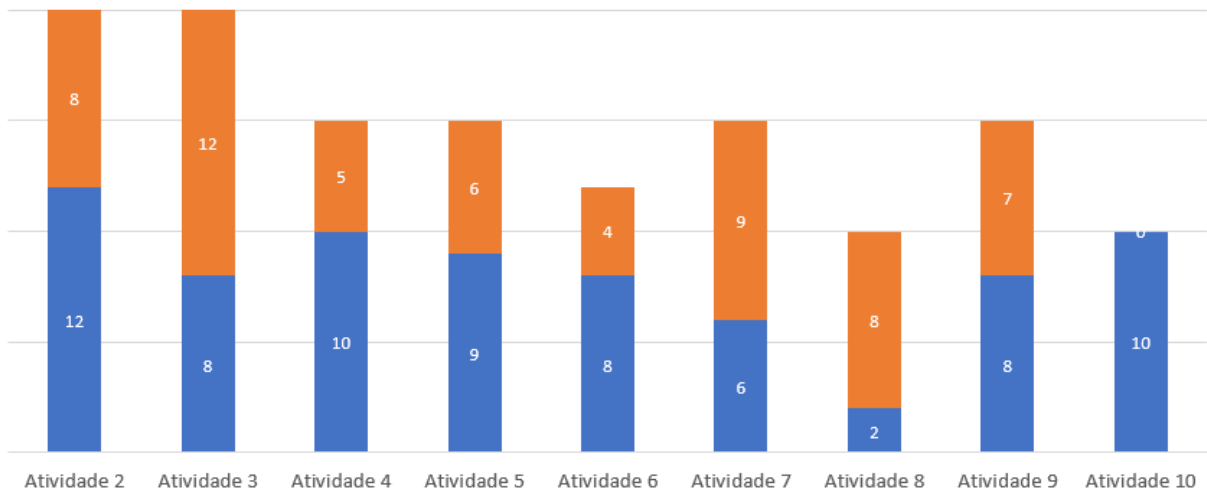
**Solução:** Se em cada receita é possível preparar 8 barras de cereal, então para o preparo de 40 barras é necessário multiplicar a receita por  $40/8 = 5$ , ou seja, 10 bananas, 10 colheres grandes de mel de abelha, 5 colheres pequenas de canela em pó, 2 xícaras e meia de uva passa e 5 xícaras de aveia grossa. Cabe ressaltar que vários alunos utilizaram a regra de três simples em suas soluções.

**Discussão:** Participaram dessa atividade 10 alunos e todos resolveram o problema, que foi descrito por eles o mais fácil de todas as atividades. Por ser uma atividade lúdica, além de ser agradável, pois fabricar doces nunca é uma má ideia, alguns alunos assumiram a dívida de presentear o professor autor com uma barra de cereal no retorno do período de isolamento.

**Comentários Gerais:** É comum, em aulas de matemática perguntas do tipo: "aonde posso utilizar o que estou aprendendo?". Isto se deve muito ao fato dos conteúdos serem pautados no trinômio explicação, exercício e correção. As atividades propostas visavam

contribuir para o conhecimento e importância das abelhas sem ferrão a partir de situações problemas. Cada atividade exigiu uma estratégia diferente para a sua resolução e, assim, incentivou os participantes a prática da pesquisa. A média total de acertos foi de 56% e o quantitativo total de alunos participantes foi igual a 37% do total da turma. O gráfico da Figura 36 mostra o índice de acertos por atividade. Nele, é possível observar o número decrescente de alunos ao longo das semanas. Vários motivos são elencados para a diminuição do fluxo de alunos durante o período das atividades. O mais significativo foi o número de alunos que "aparentemente" desistiram de continuar o ano letivo, muito devido à falta de condições ao acesso da plataforma virtual. Outra parte dos estudantes argumentam que, durante o isolamento, tiveram que trabalhar para complementar a renda doméstica deixando, assim, o estudo em segundo plano. Um terceiro motivo foi a aceleração da inclusão digital, o que acabou provocando um aumento na procura por produtos de informática para realização do *Home Office* durante o período de isolamento. Isso tem causado um aumento significativo nos preços dos produtos de tecnologia e diminuído o poder de consumo de classes de menor renda..

Figura 36 - Quantitativo de erros e acertos por atividade



Fonte: O autor

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, pôde-se conhecer a importância das abelhas sem ferrão e alertar o quanto a urbanização, o desmatamento e a monocultura não só leva à perda de áreas naturais como também à fragmentação de habitats remanescentes. Isto pode causar o declínio na produção de frutos e diversidade de plantas nativas em comunidades locais afetando, assim, a variedade de polinizadores e causando a perda de modos de vida distintos, práticas culturais e tradições em que os meliponíneos ou seus produtos são parte constituinte e também a diminuição da autossuficiência econômica ou dietética de populações tradicionais e tribos indígenas, levando à perda de identidade e de soberania.

A evolução em diversas áreas de conhecimento propõe ao educador novos paradigmas para prática pedagógica. Desta forma, essa dissertação pretende reforçar a biomatemática como estratégia de ensino-aprendizagem na educação básica e, de alguma maneira, despertar o interesse dos docentes e discentes para questões de natureza ambiental. Espera-se, também, que estimule particularmente os professores a utilizarem práticas metodológicas interdisciplinares. Este é um grande desafio, pois as disciplinas, muitas vezes, são ensinadas de forma isolada, não sendo comum ver professores de Matemática familiarizados com aplicações em biologia, bem como, frequentemente professores de Biologia, ao se deparar com alunos com deficiência em cálculos de porcentagem e probabilidade, tenham dificuldades em ensinar as relações entre Biologia e Matemática. Essa integração entre as disciplinas é importante para o desenvolvimento cognitivo dos discentes visto que, mostrar a relação entre as formas de conhecimento faz despertar o interesse dos mesmos em aplicações dos conteúdos estudados. Isto permite ao professor realizar abordagens mais amplas com outras disciplinas, formando alunos mais críticos e aptos para realizar a prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Uma das dificuldades encontradas neste trabalho foi a implementação deste método através do ensino remoto, pois a inclusão digital não contempla todos os alunos da rede pública do Estado do Rio de Janeiro. Quando houve o isolamento social provocado pela COVID-19, acabou ocasionando um aumento na procura por produtos de informática para prática do *home office*, elevando significativamente os preços dos produtos de tecnologia e isolando cada vez mais boa parte da população com baixa renda.

Ainda assim, a partir das experiências obtidas nas práticas pedagógicas na forma remota, foi percebido que boa parte dos alunos desconhecia muitas das aplicações da matemática e as diferentes espécies de abelhas. Portanto, inserir nos livros-textos da educação básica a importância dos meliponíneos é fundamental uma vez que são insetos que estão presentes apenas na região Neotropical, em especial no Brasil, e que, ainda assim, são desconhecidos por grande parte dos brasileiros.

Através da pesquisa foram mostradas algumas aplicações da matemática nas ciências

biológicas. O tema sobre as abelhas sem ferrão proporcionou, a partir de problemas contextualizados, formar novas perguntas por parte dos alunos sobre impactos da poluição e desmatamento em sua vidas, despertando o interesse na matemática como parte de um todo e não apenas conhecimentos adquiridos de forma isolada durante as atividades.

Além disso, com o decorrer das atividades, a prática pedagógica se tornou mais fácil devido ao aumento no interesse em modelagem matemática e também na melhor qualidade da relação professor-aluno em termos de comunicação. Destacamos algumas citações dos alunos durante as aulas: "vamos estudar o período de quarentena inteiro dessa forma professor!" ou "estudar matemática assim é legal". Isso aproxima o professor do aluno e melhora o processo de ensino-aprendizagem.

Com os resultados preliminares obtidos nas atividades, pode-se concluir que a média foi regular. Entretanto, considerando as dificuldades encontradas por muitos educandos da rede pública de ensino, seja na sua formação básica ou até o atual momento atípico em que estamos vivendo, concluímos que a metodologia descrita neste trabalho ajuda na aproximação com outras disciplinas diminuindo, assim, a falsa impressão de que a matemática é algo inacessível para muitos.

Embora os resultados não tenham sido mensurados por instrumentos avaliativos formais como pesquisas estatísticas, ele pode permitir a partir de novos estudos, rever sua metodologia e mensurar seus resultados através de processos bem definidos. Ou seja, avaliar a metodologia através de forma qualitativa e quantitativa.

A prática de Iniciação Científica deve ser estimulada desde os primeiros anos da Educação Básica. Mas infelizmente isso não ocorre. Com o objetivo de incentivar os alunos a novas pesquisas, esse projeto será ampliado em conjunto com a professora de Biologia Tatiana Chrysostomo Santos, esperando que seja presencial no próximo ano.

Diante dos fatos supracitados, esperamos que esta dissertação possa servir como um dos instrumentos de aprendizagem e suporte pedagógico a estudantes, docentes e demais interessados e que também venha a ser fonte de inspiração de mudanças positivas em relação à preservação ambiental, envolvendo em particular as abelhas nativas.

## REFERÊNCIAS

- AIDAR, Davi Said. *A Mandaçaia: Biologia de abelhas, manejo e multiplicação artificial de colônias de *Melipona quadrifasciata**. Rio de Janeiro: Sociedade brasileira de genética, 1996. 61 p.
- AIZEN, M. A.; Garibaldi L. A.; Cunningham S. A. Klein A. M. *How Much Does Agriculture Depend on Pollinators? Lessons from Long-term Trends in Crop Production: Annals of botany*. 103(9). ed. [S.l.]: Oxford Acadmy, 2009. 1579-1588 p.
- APOSTOL, Tom M. *Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear, com aplicações as equações diferenciais e às probabilidades*. 2. ed. [S.l.]: Editora Reverté, 1996. 480 - 500 p.
- BARRETO, Luís Soares. *Ecologia Teórica, Uma Outra Explanação: Populações isoladas*. 1. ed. Costa de Caparica, 2013. 102-103, 342-345 p. Disponível em: <<https://www.repository.utl.pt/handle/10400.5/14231>>. Acesso em: 13/02/2020.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 4. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2018.
- BATSCHELET, E. *Introdução à Matemática para biocientistas*. [S.l.]: Usp, 1978.
- BAWA, K. *Plant-pollinator interactions in tropical rain-forests: Annual review of ecology and systematics*. 21. ed. Boston: University of Massachusetts, 1990. 399-422 p.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 10. ed. [S.l.]: GEN, 2015. 2.9 p.
- BPBES. *Relatório Temático sobre Polinização, Polinizadores e Produção de Alimentos no Brasil*: Plataforma brasileira de biodiversidade e serviços sistêmicos. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/26470203> acessado em 09/03/2019: Rede Brasileira de Interações Planta-Polinizador, 2019. 23 p.
- BRASIL. *Lei N° 9.394 de 20 de dezembro de 1996*. MEC, 1996. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394\\_ldbn1.pdf](http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf)>. Acesso em: 05/05/2020.
- CAPPAS, J. P. Souza. *Os maias e a meliponicultura*. Apicultor, 1995. 15-17 p. Disponível em: <<http://cappas-insectozoo.com.pt/>>. Acesso em: 19/12/2019.
- CARVALHO, Valéria Gonçalves Mônica de Cassio Vieira Waldhelm. *Resolução de Situações-Problema Interdisciplinares: um caminho na formação e prática do professor dos anos iniciais da educação básica*. 23. ed. [S.l.]: Cadernos do IME, 2011.
- CARVALHO-ZILSE, Kerr. *Substituição natural de rainhas fisogástrica e distância de voo dos machos em tiúba e uruçú (Apidae, Meliponini)*. 34. ed. [S.l.]: Acta Amazonica, 2004. 646-652 p.
- COSTA, Luciano. *Guia Fotográfico de Identificação de Abelhas Sem Ferrão para resgate em áreas de supressão florestal*. Belém - PA: Instituto Tecnológico Vale (ITV), 2019. 99 p.

- COSTA, Leticia F. X. *Tempo de vida de operárias de abelha Melipona rufiventris*: V congresso estadual de iniciação científica e tecnológica do if goiano. Iporá: IF Goiano, 2016.
- COSTA, Ricardo R. Camargo. *Produção de Mel*. Teresina: Embrapa, 2002. 13 p.
- DAMIANI, Amélia Luisa. *População e geografia*: Coleção caminhos da geografia. [S.l.]: Editora Contexto, 2002. 11-15 p.
- DOLCE, Osvaldo José Nicolau Pompeo. *Fundamentos da Matemática Elementar 10*: Geometria espacial, posição e métrica. 5. ed. [S.l.]: Editora Atual, 2011. 130 p.
- \_\_\_\_\_. *Fundamentos da Matemática Elementar 9*: Geometria plana. 5. ed. [S.l.]: Editora Atual, 2011. 130 p.
- ELON, Lages. Paulo C. P. Carvalho E. Wagner Augusto C. Morgado. *A Matemática do Ensino Médio*: Volume 2. 7. ed. [S.l.]: SBM, 2016. 223 p.
- EMBRAPA. *Meliponicultura*: Embrapa amazônia oriental. [s.n.], 2020. Disponível em: <<https://youtu.be/sY3XqexaQvg>>. Acesso em: 01/07/2020.
- GAGLIANONE, Maria C. *Polinizadores na agricultura*: Ênfase em abelhas. [S.l.]: Funbio, 2015. 21 p.
- GAGLIANONE, Maria C. et al. *Plano de manejo para os polinizadores do tomateiro*. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundo Brasileiro para a Biodiversidade, 2015. 14-15 p.
- GOTELLI, Nicholas J. *Ecologia*. 4. ed. [S.l.]: Universidade de Vermont - Editota Planta, 2006. 83-87 p.
- GOULSON, G. C. D.; Lye G. C. Darvill B. *Decline and Conservation of Bumble Bees*: Annual review of entomology. 53. ed. [S.l.]: GEN, 2008. 191-208 p.
- GRISWOLD, T. Parker F.D. Hanson P.E. Gauld L.D. *The Hymenoptera os Costa Rica*. [S.l.]: Oxford University Press, 1995. 650-691 p.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo - Volume 2*: Geometria espacial, posição e métrica. 6. ed. [S.l.]: Editora LTC, 2019.
- HERMES, Neri Palumbo. *Nossas brasileiras, As Abelhas Nativas*. 2. ed. [S.l.]: Abril Cultural Ltda, 2005. 19 p.
- HOWARD, Anton. *Cálculo um novo horizonte*. 5, vol.02. ed. [S.l.]: Bookman, 1999. 182-216 p.
- IMPERATRIZ, Fonseca VL Canhos DAL Alves DA Saraiva AM (eds). *Polinizadores no Brasil: contribuição e perspectivas para a biodiversidade, uso sustentável, conservação e serviços ambientais*. São Paulo: USP, 2012. 68, 213 p.
- JACOBI, Pedro. *Educação ambiental, cidadania e sustentabilidade*. [S.l.]: USP, 2003. 189-205 p.
- KERR, W. E. *Estudos Sobre o Gênero Melipona*: Escola superior de agricultura "luiz de queiroz". [S.l.]: Universidade de São Paulo, 1948. 192-193 p.

\_\_\_\_\_. *Biologia e manejo da tiúba: a abelha do Maranhão*. São Luis: EDUFMA, 1996a. 92-96, 156 p.

KERR, W. E. Gislene Almeida Carvalho et al. *Biodiversidade, pesquisa e desenvolvimento na Amazônia: Aspectos pouco mencionados da biodiversidade amazônica*. 12. ed. [S.l.]: INPA, 2001. 20 p.

KERR, W. E. Petrere M. Jr. Felizola J. A. D. *Informações biológicas e estimativa do tamanho ideal da colmeia para a abelha tiúba do Maranhão (Melipona compressipes fasciculata Smith - Hymenoptera, Apidae)*. 1. ed. [S.l.]: Revista bras. Zool., 2001. 47 p.

KERR, W.E. Krause. *Contribuição para o conhecimento da bionomia dos Meliponini: Fecundação da rainha em melipona quadrifasciata lep*. Dusenya v.1. São Paulo: [s.n.], 1950. 275-282 p.

KLEIN, A-M Vaissiere BE Cane JH. *Importance of pollinators in changing Landscapes for world crops*. Proc R Soc B Biol. Sci, 2007. Disponível em: <<https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rspb.2006.3721>>. Acesso em: 05/07/2019.

LARSEN, T. H. et al. *Extinction order and altered community structure rapidly disrupt ecosystem functioning*. 8. ed. [S.l.]: Ecology Letters, 2005. 538-547 p.

LEVIN, R. *Evolution in Changing Environments*. [S.l.]: Princeton University, 1968.

LIFE, Discovery. [Sem título]. [s.n.], 2020. Disponível em: <[https://www.discoverlife.org/mp/20q?guide=Apoidea\\_species&flags=HAS:>](https://www.discoverlife.org/mp/20q?guide=Apoidea_species&flags=HAS:>)>. Acesso em: 07/10/2020.

LOPES, M Ferreira JB Santos G. *Abelhas sem-ferrão: a biodiversidade invisível*. [S.l.]: Agriculturas, 2005. 7-9 p.

MAGALHÃES, Breno Freitas. *Meliponíneo: A vida das abelhas*. Fortaleza: Centro de Ciências Agrárias Departamento de Zootecnia, 2003. 2 p.

MELIPONÁRIO, Carneiro. *Potes de mel gigantes ! ! ! ! ! part-2*. [S.l.: s.n.], 2020. Disponível em: <<https://youtu.be/rMDsJgJe-rg>> (7 min). Acesso em: 10/11/2019.

MELIPONÁRIO, Vila Velha. *O fim das divisões das abelhas sem ferrão*. Vila Velha - ES: [s.n.], 2020. Disponível em: <[https://youtu.be/\\_wselGdWTWU](https://youtu.be/_wselGdWTWU)> (12 min). Acesso em: 05/07/2020.

MELO, G. A. R. *Phylogenetic, relationship and classification of the major lineages of Apoidea (Hymenoptera), with emphasis on the Crabonid wasps*: Scientific papers of the natural history museum of the university of kansas. [S.l.: s.n.], 1999. 1-55 p.

MENEZES, Cristiano. *Curso de meliponicultura - parte 1*. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://youtu.be/MwEyKyBPuiQ>> (22 min). Acesso em: 15/02/2020.

\_\_\_\_\_. *Divisão de uma colônia de mandaguari*. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://youtu.be/wIpDWU-s8bw>> (9 min). Acesso em: 10/07/2020.

\_\_\_\_\_. *Leurotrigona muelleri, a pequena pérola entre as abelhas sem ferrão*. [S.l.]: USP, 2013.



- MICHENER. *Scientific Papers of the Natural History Museum of the University of Kansas: Genus-group names of bees and supplemental family group names*. Division of entomology. University of Kansas: [s.n.], 1997. 1-2 p.
- MICHENER, Charles D. *Classification of the Apidae*. 54.ed.[S.l.] : *University of Kansas Science Bulletin*, 1990.140 – 152 p.
- MUNIZ, Antonio Caminha Neto. *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- MURRAY, J.D. *Mathematical Biology: Ii, spatial models and biomedical applications*. 3. ed. University of Oxford and University of Washington: Springer, 2003. 838 p.
- NOGUEIRA, Paulo Neto. *Vida e Criação de Abelhas Indígenas Sem Ferrão: Pnn - vida e criação de abelhas indígenas sem ferrão*. Nogueirapis. São Paulo: Nogueirapis, 1997. 39-445 p.
- NUNES-SILVA, P.; MICHAEL, Hnrcir; IMPERATRIZ-FONSECA, V. L. *A Polinização por Vibração: Oecologia australis*. 14. ed. São Paulo: USP, 2010. 140-151 p.
- OLLERTON, J Winfree R Tarrant S. *How many flowering plants are pollinated by animals?* [s.n.], 2011. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1600-0706.2010.18644.x>>. Acesso em: 10/05/2019.
- PEREZ, Vicente. *Introducción de bombus terrestris en la región de Magallanes: Potencial riesgo para las abejas nativas*. Punta Arenas - Chile: Universidad de Magallanes, 2013.
- PERONI, Nivaldo; HERNÁNDEZ, Malva I. M. *Ecologia de Populações e Comunidades*. Florianópolis: Univversidade aberta do Brasil, 2011. 12 p.
- PIQUEIRA, José Roberto Castilho Tatiana Rodrigues Nahas. *O sonho de Bernouilli*. USP, 2011. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/ea/v25n72/a22v25n72.pdf>>. Acesso em: 10/07/2020.
- PIRES, Carmen S. S. et al. *Enfraquecimento e perda de colônias de abelhas no Brasil: Há casos de ccd?* v.51. Brasília: Embrapa, 2016. 422-442 p.
- PòSEY, Darrel A. João M. F. Camargo. *O conhecimento dos Kayapó sobre as abelhas sociais sem ferrão*. Ribeirão Preto: USP - Depto? de Zoologia, 1985.
- RODRIGUES, A. S. *Etnoconhecimento sobre as abelhas sem ferrão: Saberes e práticas dos Índios guarani M'BYÁ na mata atlântica*. Dissertação de mestrado - escola superior de agricultura "luiz de queiroz". Piracicaba: ESALQ/USP, 2005. 236 p.
- RODRIGUES, Raquel Santos. *Meliponário Nativas de Ouro: Acervo particular*, 2020. 7 Fotografias, color.
- ROUBIK, DW. *Ecolog y and natural history of tropical bees*. New Yourk: Cambridge University Press, 1989.
- SAKAGAMI, S. F. H. R. Hermann. *Stingless bees: In: Social insects*. Vol. iii. New York: Academic Press, 1982. 361-423 p.

- SANTOS, Carlos E. Bezerra. *Modelos matemáticos para a dinâmica populacional de micro-organismos como motivação para o estudo de potenciação, funções exponenciais e logarítmicas*. Profmat. Rio de Janeiro: UERJ, 2015.
- SAUTOY, Marcus du. *O mistério dos números: Uma viagem pelos grandes enigmas da matemática*. 1. ed. [S.l.]: Zahar, 2013. 48-63 p.
- SEBRAE. *Desafios da apicultura brasileira: Sebrae agronegócios*. 3. ed. [S.l.]: Sebrae, 2006. 10-17 p.
- SILVEIRA, Fernando. *ABELHAS BRASILEIRAS: Sistemática e identificação*. 1. ed. Belo Horizonte: FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA, 2002. 535 p.
- SOTELO, Laura Elena S. *Abejas sagradas entre los mayas*. Ciências, 2002. 118 - 125 p. Nov. 2015, abr. 2016. Disponível em: <<https://www.revistacienciasunam.com/images/stories/Articles/119/pdf/118A11.pdf>>. Acesso em: 15/09/2019.
- SOUZA, Bruno A. et al. *Mundurú (Melipona asilvai): a abelha sestrota*. 1. ed. Cruz das Almas: UFRB, 2009.
- STEINBRUSH, Alfredo Winterle Paulo. *Geometria analítica*. São Paulo: Pearson Education, 1987.
- STEWART, James. *Cálculo Vol. 2*. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. 927 - 931 p.
- VENTURIERI, G. C. *Criação de Abelhas Indígenas Sem Ferrão*. 2. ed. Belém: Embrapa, 2008. 34 p.
- VENTURIERI, G. C. et. al. *Meliponicultura no Brasil: Situação Atual e Perspectivas Futuras para o Uso na Polinização Agrícola.*: Polinizadores no brasil: Contribuição e perspectivas para a biodiversidade, uso sustentável, conservação e serviços. 10. ed. [S.l.]: EDUSP, 2012. 2.9 p.
- VENTURIERI, G.C. Venturieri G.R. et al. *Uso de Melipona (Apidae, Meliponini) na Polinização de Solanáceas em Casa de Vegetação*: In: IX encontro sobre abelhas. [S.l.: s.n.], 2010. 220-224 p.
- VILLAS-BOAS, Jerônimo. *Manual Tecnológico: Mel de abelhas sem ferrão*. 1. ed. Brasília: ISPN, 2012. 12 p.
- WEISS, Howard. *A Mathematical Introduction to Population Dynamics*. Georgia Institute of Technology: IMPA, 2009.
- WITTER, Sidia; NUNES-SILVA, Patricia. *Manual de boas praticas para o manejo e conservação de abelhas nativas: Meliponíneos*. 1. ed. Porto Alegre: Fundação Zoobotânica do Rio Grande do Sul, 2014. 21-24 p.

## GLOSSÁRIO

- Angiosperma - São plantas espermatófitas cujas sementes são protegidas por uma estrutura denominada fruto.
- Anteras - Fica parte masculina das flores onde são produzidos os grãos de pólen
- Antrópico - Resultante da ação do homem, especialmente em relação às modificações no ambiente, na natureza, causadas por essa ação.
- Campeiras - Abelhas operárias que realizam atividades externas à colônia, coletando néctar, pólen, barro, própolis, água e/ou outros materiais
- Célula real - Tipo específico de célula de cria, construído por abelhas do grupo Trigonini, destinado à formação de novas abelhas rainhas.
- Célula de cria - Estrutura construída com cerume, onde a rainha deposita um ovo que dá origem a uma nova abelha.
- Cera - Material de coloração branca, secretado por abelhas operárias jovens, em forma de pequenas placas, por glândulas específicas.
- Cerume - Mistura da cera (branca, pura) com resinas vegetais em uma proporção em que a cera predomina. Principal matéria-prima para construção de elementos dinâmicos de uma colônia, como favos, potes de alimento e invólucro.
- Colmo - Recipiente utilizado para criar abelhas dando origem a palavra Colmeia
- Colônia - Conjunto de determinada população de abelhas e suas estruturas naturais.
- Corbícula - Também conhecida como “cesta de pólen” é uma estrutura presente na tíbia da perna traseira das abelhas operárias, onde elas carregam o pólen das flores para a colmeia.
- Cria nascente - Termo utilizado para designar os favos de cria que abrigam abelhas em desenvolvimento na fase de pré-pupa até abelha adulta. Também é chamada de “cria madura”.
- Cria verde - Termo utilizado para designar os favos de cria que abrigam ovos ou larvas de abelhas, em desenvolvimento, até a fase de pré-pupa. Também é chamada de “postura”.
- Desdobra - Processo de induzir a reprodução e a multiplicação de colônias de abelhas também conhecido por Divisão de colônias.
- Enxameagem - Processo natural pelo qual as colônias de abelhas sem ferrão se reproduzem.
- Eussociabilidade - É o mais alto grau de organização social dos animais presente nas sociedades mais complexas. Três características são fundamentais: sobreposição de gerações em um mesmo ninho, cuidado cooperativo com a prole, divisão de tarefas.
- Hymenoptera - Do grego Hymen = membrana e ptera = asas, é considerado um dos maiores grupos entre os insetos, compreendendo as vespas, abelhas e formigas.

- Invólucro - Lâminas de cerume que envolvem os favos de cria para manutenção de temperatura.
- Kayapó - Povo indígena brasileiro que vive em aldeias dispersas ao longo do curso superior dos rios Iriri, Bacajá, Fresco e de outros afluentes do caudaloso rio Xingu.
- Maias - Civilização mesoamericana pré-colombiana notável por sua cultura nas áreas de conhecimento humano e exatas.
- Meliponário - Local onde são instaladas colônias de abelhas sem ferrão para criação.
- Oviposição - Ato de expelir os ovos realizado por fêmeas de animais invertebrados.
- Néctar - Solução açucarada produzida pelos vegetais em estruturas especializadas.
- Neotrópico - É a região biogeográfica que compreende a América Central, incluindo a parte sul do México e da península da Baja Califórnia, o sul da Florida, todas as ilhas do Caribe e a América do Sul.
- Ninho - Parte da colônia formada pelo conjunto de favos de cria e, quando existente, invólucro.
- Pataxó - Povo indígena brasileiro de língua da família maxakali, do tronco macro-jê. Apesar de se expressarem na língua portuguesa, alguns grupos conservam seu idioma original, a língua maxacali.
- Polinização - É o ato da transferência de células reprodutivas masculinas através dos grãos de pólen que estão localizados nas anteras de uma flor, para o receptor feminino de outra flor, ou para o seu próprio estigma.
- Terra-cota - Material constituído por argila cozida no forno, sem ser vitrificada e utilizada em cerâmica e construções.