SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Charles Wilson Monteiro

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E RECORRÊNCIAS LINEARES APLICADAS NO ENSINO MÉDIO

PORTO VELHO-RO

2020

Charles Wilson Monteiro

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E RECORRÊNCIAS LINEARES APLICADAS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, polo da Universidade Federal de Rondônia-Unir, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº Dr. Flávio Batista Simão.

PORTO VELHO-RO

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Fundação Universidade Federal de Rondônia

Gerada automaticamente mediante informações fornecidas pelo(a) autor(a)

M775s Monteiro, Charles Wilson.

Sequências numéricas e recorrências lineares aplicadas no ensino médio / Charles Wilson Monteiro. -- Porto Velho, RO, 2021.

74 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Flávio Batista Simão

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia

1.Sequências. 2.Recorrências lineares. 3.Aplicações. I. Simão, Flávio Batista. II. Título.

CDU 511.176:376(043.2)

Bibliotecário(a) Marcelo Garcia Cardoso CRB 11/1080

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ATA DE DISSERTAÇÃO

ATA Nº 056
ATA DA QUINQUAGÉSSIMA SEXTA SESSÃO DE DEFESA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DO MESTRADO. POLO UNIR/RO.
MESTRANDO: Charles Wilson Monteiro
INÍCIO DO CURSO: março/2019

Aos vinte e nove dias do mês de dezembro de 2020, às dez horas , por videoconferência no Google Meet , foi realizada a sessão de defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do mestrando **CHARLES WILSON MONTEIRO**,
como requisito obrigatório estabelecido nos termos dos artigos 37, 41, 42 do Regimento Interno do PROFMAT/UNIR. A Comissão Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa, foi composta pelos membros: Prof. Dr. Flávio Batista Simão (Orientador), Prof. Dr. Adeilton Fernandes da Costa (membro interno) e Profª. Drª. Maria das Graças Viana de Sousa (memb ro externo ao Programa), sob a presidência do primeiro , julgou o trabalho intitulado "**Recorrências Lineares e aplicações".** Após a defesa apresentada pelo mestrando e arguições pela Comissão, o trabalho foi considerado "APROVADO" e, em razão das recomendações dos membros da Comissão, o Senhor Presidente se comprometeu a orientar a sequência do processo da elaboração da versão final com a inclusão das recomendações realizadas . Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão e, para constar, foi lavrada a presente ATA, que vai assinada digitalmente pelos membros da Comissão Examinadora e o Mestrando.

Documento assinado eletronicamente por **FLAVIO BATISTA SIMAO**, **Docente**, em 29/12/2020, às 12:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **ADEILTON FERNANDES DA COSTA**, **Docente**, em 29/12/2020, às 12:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **MARIA DAS GRACAS VIANA DE SOUSA**, **Docente**, em 29/12/2020, às 13:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **CHARLES WILSON MONTEIRO**, **Docente**, em 29/12/2020, às 13:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.unir.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0565297** e o código CRC **4811288A**.

Referência: Processo nº 23118.003438/2020-80 SEI nº 0565297

DEDICATÓRIA

À minha esposa Vaneide Monteiro e ao meu único filho Thales Wilson Monteiro, futuro Engº Agrônomo.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do PROFMAT pelo incentivo a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática. Em especial, agradeço ao meu orientador prof. Dr. Flávio Batista Simão e ao Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez,pela sua extraordinária competência do conhecimento e do exercício incondicional do magistério;

Aos meus amigos da turma, pela cooperação mútua, pelos bons momentos de descontração durante o café, conversas sérias e descontraídas, bem como a todos pela amizade e união desta turma incrível, sendo essencial nesta jornada;

Ao Departamento de Matemática (UNIR); pelo incentivo à minha formação, em especial, aos colegas de trabalho, pelo fornecimento de material e por contribuir com valiosas sugestões, para a realização deste trabalho;

Enfim, a minha sincera gratidão, pela contribuição de todos na realização deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho mostra o estudo das sequências numéricas e das recorrências lineares. Será feita uma abordagem em especial as progressões aritmética PA, progressões geométrica PG e recorrências lineares de primeira, segunda e terceira ordem, e ainda, algumas atividades relacionadas ao cotidiano do estudante do ensino médio. E a seguir apresentamos suas aplicações na geometria euclidiana, sequência de Fibonacci, pizza de Steiner, torre de Hanói, desintegração de elementos químicos, eliminação de uma droga do organismo e colônia de bactérias.

Palavras-chave. Sequências. Recorrências lineares. Aplicações.

Abstract

The present work shows the study of numerical sequences and linear recurrences. An approach will be made in particular to PA arithmetic progressions, PG geometric progressions and first order linear recurrences, as well as some activities related to high school studest's daily life. And then we present applications to Euclidean geometry, Fibonacci sequence, Steiner´s pizza, Hanoi tower, disintegration of chemical elements and elimination of a drug from the body an colony of bacteria.

Key words. Sequences. Linear recurrences. Applications.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

1. Introdução

O presente trabalho tem a finalidade de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática. Nele faremos uma abordagem no estudo das sequências numéricas e recorrências lineares, conteúdo este do ensino de matemática, presente nos planos de cursos do ensino médio de professores e dos livros didáticos de matemática, em todo o Brasil.

(Bassanezi, 2018) A ciência é uma atividade essencialmente desenvolvida pelo ser humano que procura entender a natureza por meio de teorias adequadas; ainda que a natureza continue existindo e funcionando independente das teorias científicas, o homem utiliza tais teorias para avançar seus conhecimentos que possibilitam num futuro tomar decisões e agir corretamente.

Segundo, (Aaboe, 2013) nos diz que “a permanência e a universalidade da matemática, sua independência do tempo e do contexto cultural, são conseqüências diretas de sua própria natureza”, devemos mencionar que a matemática é acumulativa, ou seja, nunca perde território, e suas fronteiras estão sempre se expandindo. Isto é em parte conseqüência de seus padrões absolutos.

Atualmente vivemos na sociedade da informação, globalizada, e é de fundamental importância que se desenvolva nos alunos do Ensino Médio a capacidade de: comunicar-se em várias linguagens; investigar, resolver e elaborar problemas; tomar decisões, fazer conjecturas, hipóteses e inferências; criar estratégia e procedimentos; adquirir e aperfeiçoar conhecimentos e valores; e está sempre aprendendo.

> “A educação existe por toda parte e, muito mais do que a escola, é o resultado da ação de todo meio sociocultural sobre os seus participantes. É o exercício de viver e conviver o que educa. A escola de qualquer tipo é apenas um lugar e um momento provisório onde isto pode acontecer”
>
> C. Brandão

Será apresentado no item dois, como fundamentação teórica, o estudo das sequências numéricas e recorrências de primeira ordem homogêneas e não homogêneas, em particular as progressões aritméticas PA e as progressões geométricas PG, veremos também, PA de segunda ordem, progressões aritmético-geométricas AG, o somatório, o teorema fundamental da somação, fatorial, o produtório e princípio da indução finita, estudo das recorrências de segunda e terceira ordem, e ainda uma generalização para recorrências lineares de k-ésima ordem.

Veremos no item três como aplicações: atividades de sequências numéricas, recorrências geométricas euclidiana, sequência numérica de Fibonacci, pizza de Steiner, Torre de Hanói, desintegração de elementos químicos, eliminação de uma droga do organismo e colônia de bactérias, seguido das considerações finais.

Um fato histórico interessante na aplicação das progressões aritméticas e geométricas: o economista, professor e demógrafo inglês, Thomas Robert Malthus, fundador do malthusianismo, teoria segundo a qual o crescimento populacional (que, segundo ele, ocorre em progressão geométrica) é sempre superior à produção de alimentos (por sua vez, ocorre em progressão aritmética), gerando a necessidade de se fazer controle de natalidade a fim de evitar fome e miséria. Ainda segundo essa teoria, a natureza se encarrega de corrigir essa desproporção por meio de epidemias e guerras. Sua teoria, considerada bastante cruel, pregava a não-assistência por parte dos governos na forma de hospitais e asilos e a abstinência sexual, motivos que o fizeram ser bastante criticado. Na segunda edição de sua obra, em 1803, atenuou alguns aspectos radicais de sua teoria. No entanto, na segunda metade do século XX a agricultura intensiva mostrou-se capaz de aumentar a produção de gêneros de subsistência, contrariando suas previsões. Atualmente, na primeira metade do século XXI, podemos corroborar a negação dessa teoria, tendo em vista uma proporcionalidade na produção de alimentos e o crescimento populacional, além do controle aparente, por parte dos governantes, da epidemia mundial da covid-19.

A aprendizagem, no setor educacional, realizada por meio (em particular) das recorrências lineares (modelagem), facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações, fazendo assim o elo entre o empírico e teórico. Isto é, a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios de agir sobre ela e transformá-la. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão: *A educação inspirada nos princípios da liberdade e da solidariedade humana tem por fim o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que lhe permitam utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades do meio.* (Lei 4024 – 20/12/61)

2. Fundamentação Teórica

2.1 Sequências Numéricas e Recorrências Lineares Aplicadas no Ensino Médio

Neste item, faremos: definições acerca de sequências numéricas, progressões aritméticas e progressões geométricas; um estudo sobre recorrências lineares de primeira, segunda e terceira ordem. Veremos que uma sequência numérica é uma aplicação dos números naturais nos números reais, e uma sequência é dita recorrente quando a partir de um certo termo, todos os termos são dados em função dos termos anteriores, e serão classificadas de acordo com a sua ordem, homogeneidade e lineariedade. E principalmente, veremos como encontrar uma fórmula que generaliza essa recorrência, chamada de *fórmula fechada*. É importante observarmos que uma mesma relação de recorrência pode gerar infinitas sequências distintas. Logo, para que uma sequência seja descrita numericamente, a partir da relação de recorrência, é necessário que sejam informados os primeiros termos a partir dos quais os demais elementos serão obtidos. O capítulo encerra com uma generalização de recorrências lineares de ordem k.

2.2 Sequências Numéricas (IEZZI, 1977)

Definição 1. Chama-se sequência finita (ou infinita) toda aplicação f do conjunto

$$N = \{ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots \} \text{ em } R,$$

definida por uma **lei de formação**. Assim, em toda sequência finita (ou infinita), a cada número natural i está associado um número real a_i, e escrevemos

$$f = \{ (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (i, a_i), \ldots \} \text{ ou}$$

$$f = (a_i)_{i \in I} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots).$$

Que se lê " sequência f dos termos a_i onde o conjunto dos índices é I.

Exemplos.

a) $(a_i)_{i \geq 1} = (2, 4, 6, \ldots, 2i, \ldots)$

b) $(b_i)_{i \geq 1} = (1, 3, 5, \ldots, 2i - 1, \ldots)$

Observemos no exemplo (a) uma sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos de 2, onde

$$a_1 = 2,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = 6,\quad a_4 = 8, \ldots$$

e no exemplo (b) uma sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos ímpares, onde

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 7, \ldots$$

Lei de formação de uma sequência

As sequências em que os termos se sucedem obedecendo a certa regra, isto é aquelas que têm uma lei de formação, podem ser representada de três maneiras:

i) por fórmula de **recorrência**;

ii) expressando cada termo em função de sua **posição**;

iii) por **propriedade** dos termos.

Observemos a lei de formação de cada tipo.

i) Uma sequência definida por **recorrência** , consiste em especificar um ou mais termos iniciais da sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, e também uma fórmula para calcular certo termo (a_n) a partir do antecedente (a_{n-1}).

Exemplo 1. Consideremos a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \quad \text{e} \quad a_{n+1} = 5 \cdot a_n - 1, \text{ com } \quad n \geq 1.$$

Fazendo $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, na relação acima, obtemos:

$$a_1 = 2$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_{1+1} = 5 \cdot a_1 - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9 \therefore a_2 = 9$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_{2+1} = 5 \cdot a_2 - 1 = 5 \cdot 9 - 1 = 44 \therefore a_3 = 44$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_{3+1} = 5 \cdot a_1 - 1 = 5 \cdot 44 - 1 = 219 \therefore a_2 = 219$$

Portanto, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) = (2, 9, 44, 219, \ldots, 5 \cdot n - 1, \ldots)$.

Exemplo 2. Uma recorrência do tipo

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n, \text{ com } \mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2 = 1 \qquad (1.1)$$

dada pela sequência infinita

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...)

é chamada de sequência de **Fibonacci** (HEFEZ, 2016).

Podemos determinar cada número de Fibonacci, fazendo recursivamente:

$n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, \ldots$, na equação (1.1). Isto é:

$$n = 1 \Rightarrow \mathrm{F}_3 = \mathrm{F}_{1+2} = \mathrm{F}_{1+1} + \mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_1 = 1 + 1 = 2 \therefore \mathrm{F}_3 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow \mathrm{F}_4 = \mathrm{F}_{2+2} = \mathrm{F}_{2+1} + \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_2 = 2 + 1 = 3 \therefore \mathrm{F}_4 = 3$$

$$n = 3 \Rightarrow \mathrm{F}_5 = \mathrm{F}_{3+2} = \mathrm{F}_{3+1} + \mathrm{F}_3 = \mathrm{F}_4 + \mathrm{F}_3 = 3 + 2 = 5 \therefore \mathrm{F}_5 = 5$$

$$n = 4 \;\Rightarrow\; \mathrm{F}_6 = \mathrm{F}_{4+2} = \mathrm{F}_{4+1} + \mathrm{F}_4 = \mathrm{F}_5 + \mathrm{F}_4 = 5 + 3 = 8 \;\therefore\; \mathrm{F}_6 = 8$$

...

Podemos com a lei de formação F_n determinar posicionalmente cada número de Fibonacci.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{1.2}$$

Observação. A expressão (1.2) será objeto de estudo no capítulo 2, e assim, será mostrada uma técnica para solucionar problemas relacionados a essa fórmula.

Exemplo 3. Define-se o *fatorial* de um número inteiro $n \geq 0$, denotado por $n!$, como:

$$\begin{cases} 0! = 1! = 1 \text{ e} \\ (n+1)! = n! \cdot (n+1), \text{ se } n \geq 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

ii) Para determinar a **posição** de cada termo, é dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.

Exemplo 4. Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g, cujos termos obedecem a lei :

$$a_n = 2^n + 1$$

Solução

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 2^1 + 1 = 3 \quad \therefore \quad a_1 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 1 = 5 \quad \therefore \quad a_2 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2^3 + 1 = 9 \quad \therefore \quad a_3 = 9$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2^4 + 1 = 17 \quad \therefore \quad a_4 = 17$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2^5 + 1 = 33 \quad \therefore \quad a_5 = 33$$

Portanto

$$g = (3, 5, 9, 17, 33, \ldots).$$

iii) Escrever uma sequência pela **propriedade** dos termos.

Exemplo 5. Escrever a sequência finita f de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros dos respectivos índices.

Solução

$$\text{D}(1) = \{ 1, -1 \} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$$

D(2) = { 1, -1, 2, -2 } $\Rightarrow$ $a_2 = 4$

D(3) = { 1, -1, 3, -3 } $\Rightarrow$ $a_3 = 4$

D(4) = { 1, -1, 2, -2, 4, -4 } $\Rightarrow$ $a_4 = 6$

D(5) = { 1, -1, 5, -5 } $\Rightarrow$ $a_5 = 4$

D(6) = { 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6 } $\Rightarrow$ $a_6 = 8$

Portanto $f = (2, 4, 4, 6, 4, 8)$

2.3 Progressões Aritméticas PA (IEZZI, 1977)

Definição 2. Chama-se progressão aritmética (PA) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r, \ \forall n \in N, n \geq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

onde a e r são números reais dados.

Podemos caracterizar recursivamente uma PA pela equação

$$a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}, \ \forall n \geq 1. \tag{1.5}$$

Prova. Pela definição de PA, temos, $a_{n+1} - a_n = r$. Isto é:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = r$$

$$\Rightarrow \ a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

$$\Rightarrow \ a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$$

O termo geral de uma PA (a_n) é dado pela fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \tag{1.6}$$

Prova. Pela soma telescópica, temos:

$$\begin{array}{l} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{array}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_{n-1} + (r + r + r..r)$$

Somando as equações acima membro a membro, e simplificando cada parcela repetida nos 1º e 2º membros, obtemos o resultado desejado. Isto é:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Observemos que a soma das parcelas dos r's , se obtém subtraindo os índices da primeira com a última parcela de cada membro e adicionando 1. Isto é, para a expressão $a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$, temos:

$(n-2)+1 = n-1$ r's, (ou $n-1$ parcelas).

A soma S_n das n parcelas de uma PA , é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \tag{1.7}$$

Prova. Fazendo $S_n + S_n = 2S_n$, segue que:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$$

Propriedade: em uma PA, a soma de dois termos a_p e a_q, equidistantes dos extremos a_1 e a_n, respectivamente, são iguais. Isto é:

$$a_p + a_q = a_1 + a_n .$$

Prova.

$$\begin{aligned} &a_n = a_{n-1} + r \;\Rightarrow\; a_{n-1} = a_n - r \\ &a_{n-1} = a_{n-2} + r \;\Rightarrow\; a_{n-2} = a_{n-1} - r \\ &a_{n-2} = a_{n-3} + r \;\Rightarrow\; a_{n-3} = a_{n-2} - r \\ &\ldots \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} &a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n \\ &a_3 + a_{n-2} = (a_2 + r) + (a_{n-1} - r) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \\ &\ldots \end{aligned}$$

Daí resulta que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_3 + a_{n-2}) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_1 + a_n)$$

$$\Rightarrow\; 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$\Rightarrow\; S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

2.4 Progressão harmônica PH (NOBILI, 2014)

Definição 3. Seja (a_n) uma sequência de termos não nulos, dizemos que: a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma PH se, e somente se, a sequência

$$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \ldots\right) \text{ é uma PA.} \tag{1.8}$$

Exemplo 6. A sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$= $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots\right)$ é um PH, pois: a sequência $\left(\frac{1}{1/5}, \frac{1}{1/7}, \frac{1}{1/9}, \frac{1}{1/11}, \ldots\right) = (5{,}7{,}9{,}11..)$ é uma PA de primeiro termo 5, e razão 2. Observemos que, para cada três termos consecutivos em uma PH, o termo central é a média harmônica dos outros dois, isto è:

$$a_2 = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}} = \frac{2a_1a_3}{a_1 + a_3} \text{ e } a_3 = \frac{2}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}} = \frac{2a_2a_4}{a_2 + a_4}, \ldots$$

Assim, no exemplo 6, temos uma PH onde:

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{9}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \text{ e } a_3 = \frac{2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{11}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

2.5 Progressão Aritmética de Segunda Ordem (MORGADO, 2015)

Definição 4. Dizemos que uma sequência $(a_k)_{k \geq 1}$ é uma PA *de segunda ordem* se a sequência $(b_k)_{k \geq 1}$, dada para $k \geq 1$ por:

$$b_k = a_{k+1} - a_k \ , \tag{1.9}$$

for uma PA não constante.

Para exemplo, vamos considerar uma PA com $b_1 = 3$ e $r = 2$, isto é: $(b_k)_{k \geq 1} = (3, 5, 7, 9, \ldots)$.

Para construir uma PA $(a_k)_{k \geq 1}$ de segunda ordem, escolhemos, por exemplo: $a_1 = 4$ e, a partir daí, calculamos $a_2, a_3, a_4, \ldots$ a partir da relação $b_k = a_{k+1} - a_k$. Isto é:

$$b_1 = a_2 - a_1 \Rightarrow 3 = a_2 - 4 \Rightarrow a_2 = 7$$

$$b_2 = a_3 - a_2 \Rightarrow 5 = a_3 - 7 \Rightarrow a_3 = 12$$

$$b_3 = a_4 - a_3 \Rightarrow 7 = a_4 - 12 \Rightarrow a_4 = 19$$

$$\ldots$$

Obtemos assim, uma PA, $(a_k)_{k \geq 1}$ = (4, 7, 12, 19,...) de segunda ordem.

Exemplo 7.

Obter a soma S_n dos n termos iniciais da sequência dos números ímpares positivos.

Solução. A sequência é dada por (1, 3, 5, ... , $2n-1$), então:

$$S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = \frac{[1+(2n-1)]\cdot n}{2} = \frac{2n\cdot n}{2} = n^2$$

Portanto: $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

2.6 Somatório (NETO, 2014)

Para indicar a soma dos *n* primeiros termos de uma sequência, utilizamos a notação:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad (1.10)$$

que se lê: "somatório de a_i de 1 a n", para $n \geq 2$.

Por definição, se k e n são dois inteiros positivos com $k < n$, então:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Exemplo 8. Determine: $\sum_{i=1}^{3}(2n-1)$.

Solução . $\sum_{i=1}^{3}(2n-1) = (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1) = 1+3+5 = 9$.

Observemos neste exemplo que: $a_n = 2n-1$, é o termo geral da sequência:

$$(1,3,5,\ldots,2n-1,\ldots).$$

Exemplo 9. Determine uma fórmula para a soma: 7 + 10 + 13 +...+ (3n + 4).

Solução. Observemos que a sequência (7, 10, 13,...,3n + 4) é uma PA, onde: o primeiro termo é 7 ($a_1 = 7$) e o n-ésimo termo é 3n + 4 ($a_n = 3n+4$). Aplicando a fórmula para a soma dos n termos de uma PA, obtemos:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = \frac{[7+(3n+4)]\cdot n}{2} = \frac{(3n+11)n}{2}$$

Portanto, 7 + 10 + 13 +...+ (3 n + 4) $= \dfrac{(3n+11)n}{2}$. E dizemos que: $\dfrac{(3n+11)n}{2}$ é uma expressão fechada para esta soma.

Propriedades:

i) $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} a = (n-k+1)\cdot a$

ii) $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} m\cdot a_i = m\cdot\sum_{i=k}^{n} a_i$

iii) $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i$

Exemplo 10. Calcular: $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} (3i^2+2)$.

Solução. $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} (3i^2+2) = \sum_{i=2}^{5} 3i^2 + \sum_{i=2}^{5} 2 = 3\cdot\sum_{i=2}^{5} i^2 + (5-2+1)\cdot 2 =$

$$= 3\cdot(2^2+3^2+4^2+5^2) + 4\cdot 2 = 3\cdot 54 + 8 = 170.$$

Portanto, $\displaystyle\sum_{i=2}^{5} (3i^2+2) = 170.$

Faremos uma prova da propriedade (ii).

Prova. $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} m\cdot a_i = m\cdot a_k + m\cdot a_{k+1} + m\cdot a_{k+2} + \ldots + m\cdot a_{n-1} + m\cdot a_n =$

$$= m\cdot(a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n) = m\cdot\sum_{i=k}^{n} a_i$$

2.7 Teorema Fundamental da Somação (MORGADO, 2015)

Definição 5. Definimos para sequências o operador Δ (letra maiúscula do alfabeto grego, lê-se: delta), chamado de *operador diferença*, por:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n .$$

Observemos que uma sequência (a_n) é uma PA se, e somente se, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante.

O **teorema fundamental da somação** é dado por: $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$.

Prova. $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \ldots + \Delta a_{n-1} + \Delta a_n$. Aplicando o operador diferença, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ em cada parcela do 2º membro desta última equação, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

Após as simplificações, resulta $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$.

Podemos deduzir a fórmula para o termo geral de uma PA, utilizando o teorema fundamental da somação, dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Prova.

(i) $$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[(a_k + r) - a_k \right] = \sum_{k=1}^{n-1} r = (n-1)r$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k = (n-1)r$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k = a_n - a_1$$

Das equações (i) e (ii), obtemos:

$$a_n - a_1 = (n-1)r \,.$$

Portanto: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Exemplo 11. Usar o teorema fundamental da somação para calcular: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k\,!$.

Solução. Cálculo do operador diferença Δ :

$$k \cdot k\,! = [(k+1)-1] \cdot k\,! = (k+1) \cdot k\,! - k\,! = (k+1)! - k\,! = \Delta\, k\,! \quad \therefore \quad \Delta\, k\,! = k \cdot k\,!$$

Logo, $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k\,! = \sum_{k=1}^{n} \Delta\, k\,! = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$

Portanto: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k\,! = (n+1)! - 1$

2.8 Progressões Geométricas PG (IEZZI, 1977)

Definição 6. Chama-se Progressão Geométrica (PG) uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = q \cdot a_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

Podemos caracterizar recursivamente uma PG pela equação

$$a_{n+2} \cdot a_n = a_{n+1}^2, \ \forall\, n \geq 1 \tag{1.12}$$

Prova. Da definição de PG, temos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right]$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 = a_{n+2} \cdot a_n, \ \forall n \geq 1$$

Fórmula do termo geral da PG.

Numa PG de primeiro termo a_1 e razão q, o $n-ésimo$ termo é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \ \forall n \geq 1 \tag{1.13}$$

E a soma S_n dos n primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{1.14}$$

Prova. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Daí resulta:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} \text{ (i)} \\ qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots + a_1 q^n \text{ (ii)} \end{cases}$$

Fazendo $\text{(ii)} - \text{(i)}$, com as devidas simplificações, segue-se que:

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1$$
$$\Leftrightarrow S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$
$$\Leftrightarrow S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Observemos o caso em que $-1 < q < 1$, com uma sequência de infinitos termos ($n \to \infty$). Nesse caso o valor de q^n é zero. Isto é:

$$\lim_{n \to \infty}(q^n) = 0 \tag{1.15}$$

Assim, a soma $S_{n\to\infty} = S$, resulta em,

$$S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{0-1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} \tag{1.16}$$

Portanto: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$, com $-1 < q < 1$ e $n \to \infty$.

Exemplo 12. Mostrar que $0{,}222\ldots = \dfrac{2}{9}$.

Solução. $0{,}222\ldots = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots = \dfrac{2}{10^1} + \dfrac{2}{10^2} + \dfrac{2}{10^3} + \ldots$

Logo, a sequência $\left(\dfrac{2}{10^1}, \dfrac{2}{10^2}, \dfrac{2}{10^3}, \ldots\right)$ é uma PG, onde $a_1 = \dfrac{2}{10}$ e $q = \dfrac{1}{10}$.

Portanto: $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{2/10}{1 - 1/10} = \dfrac{2/10}{9/10} = \dfrac{2}{9}$

2.9 Produtório (NETO, 2014)

Utilizamos o símbolo Π (letra maiúscula do alfabeto grego, lê-se: PI) para indicar, de forma abreviada, o produto (P_n) de n termos de uma PG. Isto é:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \tag{1.17}$$

Exemplo 13. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PG de razão q. Prove que, para $n \geq 1$ inteiro, temos:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{1.18}$$

Solução. $a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_2 = a_1 q^1$, $a_3 = a_1 q^2$, ... e $S_n = \dfrac{(b_1 + b_n)n}{2}$, onde $(b_n)_{n\geq 1}$ é uma PA de n termos, com primeiro termo igual a b_1, e n-ésimo termo igual a b_n.

Logo, $a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1 = a_1^{1+1+1+\ldots+1} = a_1^n$ e $q^1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-1} = q^{\frac{[1+(n-1)]\cdot(n-1)}{2}} = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Com: $b_1 = 1, b_n = n - 1$ e o número de termos é dado por, $[(n-1)-1]+1 = n-1$.

Portanto. $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Propriedades:

P_1: $\prod_{i=k}^{n} a = a^{n-k+1}$.

P_2: $\prod_{i=k}^{n} ha_i = h^{n-k+1} \prod_{i=k}^{n} a_i$.

P_3: $\prod_{i=k}^{n} a_i b_i = \prod_{i=k}^{n} a_i \cdot \prod_{i=k}^{n} b_i$

p_4: $\prod_{i=k}^{n} \dfrac{a_i}{b_i} = \dfrac{\prod_{i=k}^{n} a_i}{\prod_{i=k}^{n} b_i}$

Mostraremos, como exemplo, a propriedade P_2.

Solução.

$$\prod_{i=k}^{n} ha_i = (ha_k)\cdot(ha_{k+1})\cdot(ha_{k+2})\cdot\ldots\cdot(ha_{n-1})\cdot(ha_n) =$$

$$= (h \cdot h \cdot h \cdot \ldots h \cdot h)\cdot(a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n) = h^{n-k+1} \prod_{i=k}^{n} a_i$$

Exemplo 14. Calcular em função de n, o valor de $\prod_{i=1}^{n}\left(3 + \dfrac{3}{i}\right)$.

Solução.

$$\prod_{i=1}^{n}\left(3+\frac{3}{i}\right) = \prod_{i=1}^{n} 3\left(\frac{i+1}{i}\right) \overset{(P_2)}{=} 3^{(n-1)+1}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i}\right) \overset{(P_3)}{=} 3^n \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(i+1)}{\prod_{i=1}^{n} i}$$

$$\Rightarrow 3^n \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(i+1)}{\prod_{i=1}^{n} i} = 3^n \cdot \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n} = 3^n \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = 3^n \cdot \frac{(n+1)n!}{n!} = 3^n (n+1).$$

Portanto, $\prod_{i=1}^{n}\left(3+\frac{3}{i}\right) = 3^n (n+1)$.

De forma análoga à soma telescópica, que simplifica uma soma, podemos utilizar **produtos telescópicos,** para este fim. Isto é, se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência de reais não nulos, então:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{i+1}}{a_1}. \tag{1.19}$$

Prova. Aplicando a definição do produtório e feitas as simplificações, obtemos

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$$

Voltando ao exemplo 14, para calcular o valor de $\prod_{i=1}^{n}\left(3+\frac{3}{i}\right) = 3^n \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i}\right)$, aplicando o produto telescópico, obtemos

$$3^n \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i}\right) = 3^n \cdot \frac{(n+1)}{1} = 3^n (n+1).$$

Onde, $a_{n+1} = n+1$ e $a_1 = 1$.

Portanto, obtemos assim o resultado $\prod_{i=1}^{n}\left(3+\frac{3}{i}\right) = 3^n (n+1)$.

2.10 Recorrências Lineares de Primeira Ordem (MORGADO, 2015)

Definição 7. Uma recorrência é dita de 1ª ordem quando cada termo definido pela equação de recorrência depende do termo imediatamente inferior a ele.

Observemos, inicialmente, que as sequências elementares como: progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG) são casos de recorrências lineares de primeira ordem.

Exemplo 15. É dada a recorrência de 1ª ordem: $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$, com $x_1 = 1$. Determinar os valores de $x_2, x_3, x_4, \ldots$.

Solução. Fazendo, $n=1,\ n=2,\ n=3,\ldots$, com $x_1 = 1$, teremos:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_{1+1} = (1+1)x_1 + 1 = 2\cdot 1 + 1 = 3 \\
x_3 &= x_{2+1} = (2+1)x_2 + 2 = 3\cdot 3 + 2 = 11 \\
x_4 &= x_{3+1} = (3+1)x_3 + 3 = 4\cdot 11 + 3 = 47 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Portanto, a sequência de recorrência, $x_{n+1} = (n+1)x_n + n,\ x_1 = 1$, é dada por:

$$(1, 3, 11, 47, ..)$$

Observemos que, numa recorrência de ordem um (ou 1ª ordem), x_{n+1} é expresso em função de x_n, e ainda, a recorrência é dita **linear** se, e somente se, for do 1º grau.

Uma **forma geral** para recorrências lineares de 1ª ordem, é dada pela equação:

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n), \text{ com } g(n) \neq 0. \tag{1.20}$$

Que será dita **homogênea,** se $h(n) = 0$, e **não-homogênea,** se $h(n) \neq 0$.

Observemos os exemplos abaixo:

a) $x_{n+1} = 5x_n$;

b) $x_{n+1} = 5x_n + 3^n$;

c) $x_{n+1} = 5x_n^2$.

A recorrência (a) é de 1ª ordem, linear e **homogênea.** E a recorrência (b) é de 1ª ordem, linear e **não-homogênea.** Já, a recorrência (c) não é linear. É importante observarmos que em nosso estudo de recorrências, nos interessam apenas as **lineares.**

Resolvendo Recorrências Lineares de 1ª Ordem homogêneas.

Resolver uma recorrência é encontrar uma expressão x_n (fechada) em função de n.

Exemplo 16. Resolver a recorrência: (a) $x_{n+1} = 5x_n$.

Solução. Da recorrência dada, obtemos recursivamente:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 5\cdot x_1 \\
x_3 &= 5\cdot x_2 \\
x_4 &= 5\cdot x_3 \\
&\ldots \\
x_n &= 5\cdot x_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$\cancel{x_2}\cdot\cancel{x_3}\cdot\cancel{x_4}\cdot\ldots\cdot x_n = 5\cdot 5\cdot 5\cdot\ldots\cdot 5\cdot x_1\cdot\cancel{x_2}\cdot\cancel{x_3}\cdot\ldots\cdot\cancel{x_{n-1}}$$

Após multiplicarmos todos os termos de cada equação acima, e feita as devidas simplificações, obtemos

$$x_n = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot x_1 .$$

Contamos os 5's subtraindo os índices, o maior do menor, das equações do 1º membro (ou do 2º membro) e somamos 1 no resultado, o que nos dá: $(n-2)+1 = n-1$. Isto é, obtemos $n-1$ cincos.

Portanto. $x_n = x_1 \cdot 5^{n-1}$.

Importante. Como não foi pré estabelecido um valor para x_1, há uma infinidade de soluções para a recorrência, isto é $x_n = C \cdot 5^{n-1}$, onde C é uma constante arbitrária.

Resolvendo recorrências lineares de 1ª ordem da forma:

$$x_{n+1} = x_n + f(n) . \tag{1.21}$$

Solução. Pela soma telescópica, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(1) \\ x_3 &= x_2 + f(2) \\ x_4 &= x_3 + f(3) \\ &\ldots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1) \\ \hline x_n &= x_1 + \left[f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) \right] \end{aligned}$$

Somando todos os termos de cada equação, e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Exemplo 17. Resolver a recorrência: $x_{n+1} = x_n + 3^n$, com $x_1 = 1$.

Solução. A recorrência é da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$. Logo, sua solução é dada por:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \text{, com } x_1 = 1 \text{, e } \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} (3^k) .$$

Podemos aplicar o teorema fundamental da somação, para encontrar o valor da soma $\sum_{k=1}^{n-1} (3^k)$. Devemos lembrar, inicialmente, que:

$$\begin{cases} \Delta(a_k) = a_{k+1} - a_k, \text{ e} \\ \sum_{k=1}^{n} \Delta(a_k) = a_{n+1} - a_1 \end{cases}$$

Assim , $\Delta(3^k) = 3^{k+1} - 3^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(3^k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^{k+1} - 3^k\right) =$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(3 \cdot 3^k\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^k\right) = 3\sum_{k=1}^{n-1} \left(3^k\right) - 1 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^k\right) = = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^k\right)$$

Logo: $\sum_{k=1}^{n-1} \Delta(3^k) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^k\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \left(3^k\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(3^k) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(3^{(n-1)+1} - 3^1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(3^n - 3^1\right).$$

Daí, $\sum_{k=1}^{n-1} \left(3^k\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(3^n - 3^1\right)$. Voltando a recorrência $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3^k)$, com $x_1 = 1$, e fazendo as devidas substituições, encontramos:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(3^n - 3^1\right) = \frac{3^n - 1}{2}$$

Portanto, $x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Importante. Poderíamos ter resolvido a recorrência, $x_{n+1} = x_n + f(n)$ sem o auxílio do teorema fundamental da somação, aplicando diretamente a soma telescópica.

Resolvendo recorrências lineares de 1ª ordem da forma:

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n), \text{ com } g(n) \neq 0.$$

Para resolvermos recorrências da forma (1.20), inicialmente, mostraremos no teorema a seguir que podemos transformar qualquer recorrência linear de 1ª ordem em outra da forma (1.21).

Teorema 2.1 (MORGADO, 2015).

Se a_n é uma solução não nula da recorrência $z_{n+1} = g(n)z_n$, $g(n) \neq 0, \ \forall n \in N$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n} \tag{1.22}$$

Demonstração.

Por hipótese, a_n é solução da recorrência $z_{n+1} = g(n)z_n$. Logo $a_{n+1} = g(n)a_n$ (i)

Temos que: $x_n = a_n y_n$ (ii) $\Rightarrow$ $x_{n+1} = a_{n+1}y_{n+1}$ (iii)

Substituindo (i) em (iii), obtemos: $x_{n+1} = [g(n)a_n]\cdot y_{n+1}$ (iv)

Finalmente, substituindo (iv) e (ii) na equação $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, obtemos:

$$g(n)a_n \cdot y_{n+1} = g(n)(a_n y_n) + h(n)$$

Portanto, $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h(n)}{g(n)\cdot a_n}$, com $g(n) \neq 0$ e $a_n \neq 0$

Exemplo 18. Resolver a recorrência $x_{n+1} = 5x_n + 3^n$, $x_1 = 1$.

Solução. Do exemplo 16, temos que: $a_n = 5^{n-1}$ (com $a_{n+1} = 5^n$) é uma solução da equação $z_{n+1} = 5z_n$. Então a substituição $x_n = 5^{n-1}y_n$ (com $x_{n+1} = 5^n y_{n+1}$), transforma a recorrência $x_{n+1} = 5x_n + 3^n$ em $5^n \cdot y_{n+1} = 5\cdot 5^{n-1}y_n + 3^n$. Isto é:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Pela soma telescópica, temos

$$\cancel{y_2} = y_1 + \left(\frac{3}{5}\right)^1$$

$$\cancel{y_3} = \cancel{y_2} + \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cancel{y_4} = \cancel{y_3} + \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

...

$$y_n = \cancel{y_{n-1}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$y_n = y_1 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

Na "troca" de variáveis, temos: $x_n = 5^{n-1}y_n$, com $x_1 = 1$. Então, $x_1 = 5^{1-1}y_1$, nos dá $1 = 1\cdot y_1$.

Ou seja $y_1 = 1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$.

Logo, $y_n = \left(\frac{3}{5}\right)^0 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$, é uma PG de n termos, onde o primeiro termo é $a_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^0$, e a razão $q = \frac{3}{5}$. Aplicando a fórmula para a soma dos n termos de uma PG, $S_n = a_1 \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$, obtemos:

$$S_n = 1 \cdot \left(\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{\frac{3}{5} - 1}\right) = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right). \text{ Assim } y_n = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right).$$

Como, a nossa solução é dada por $x_n = 5^{n-1} y_n$. Segue-se que:

$$x_n = 5^{n-1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{5^n}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(5^n - 3^n\right).$$

Portando, $x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(5^n - 3^n\right), \quad \forall n \in N$. Assim, podemos escrever a sequência:

$$(x_n) = (1, 8, 49, \ldots).$$

Exemplo 19. Resolver a recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n + n, \ x_1 = 1.$

Solução. Resolvendo, inicialmente, a equação $x_{n+1} = (n+1)x_n$ (homogênea), temos:

$$\begin{aligned}
\cancel{x_2} &= (1+1) \cdot x_1 \\
\cancel{x_3} &= (2+1) \cdot \cancel{x_2} \\
\cancel{x_4} &= (3+1) \cdot \cancel{x_3} \\
&\ldots \\
x_n &= n \cdot \cancel{x_{n-1}} \\
\hline
x_n &= x_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n
\end{aligned} \qquad \Rightarrow x_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

Isto é, se $a_n = n!$ é uma solução da equação homogênea, então a substituição $x_n = n! \cdot y_n$ (e $x_{n+1} = (n+1)! \cdot y_{n+1}$) transforma a recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n + n, \ x_1 = 1$, em

$$(n+1)! \cdot y_{n+1} = (n+1) \cdot n! \cdot y_n + n.$$

Assim, $y_{n+1} = y_n + \frac{n}{(n+1)!}$. Resolvendo esta última equação, temos:

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{(1+1)!}$$

$$y_3 = y_2 + \frac{2}{(2+1)!}$$

$$y_4 = y_3 + \frac{3}{(3+1)!}$$

$$\ldots$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{n-1}{(n-1+1)!}$$

$$y_n = y_1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$$

Observemos que: (i) $x_1 = 1! \cdot y_1 \;\Rightarrow\; 1 = 1 \cdot y_1 \;\therefore y_1 = 1$ e

(ii) $\dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

Substituindo cada parcela da expressão em y_n por (i) e (ii), encontramos,

$$y_n = 1 + \left(\frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)!}} - \frac{1}{n!}\right) = 2 - \frac{1}{n!} = \frac{2 \cdot n! - 1}{n!}$$

E finalmente voltando a nossa substituição $x_n = n! \cdot y_n$, encontramos,

$$x_n = n! \cdot \frac{2 \cdot n! - 1}{n!} = 2 \cdot n! - 1 .$$

Portanto, $x_n = 2 \cdot n! - 1$, $\forall n \in N$. Assim, podemos escrever a sequência: $(x_n) = (1, 3, 11, \ldots)$.

2.11 Princípio da Indução Finita (HEFEZ, 2016)

O princípio da indução finita é uma ferramenta utilizada para demonstrar a validade, por exemplo, de fórmulas fechadas, desigualdades, ou ainda na aritmética, divisibilidade. A seguir, temos as condições mínimas exigidas (proposição), para tal princípio.

Proposição. Dada uma propriedade $P(n)$ do natural n, temos $P(n+1)$ verdadeira para todo $n \in N$ se, e somente se, as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(a) $P(1)$ é verdadeira;

(b) $P(n)$ verdadeira $\Rightarrow P(n+1)$ verdadeira.

Exemplo 20. Mostrar, por indução, que a recorrência, $x_{n+1} = x_n + 3^n$, com $x_1 = 1$, tem como solução a fórmula fechada $x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Solução. Devemos mostrar que, dada a propriedade $P(n)$: $x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$, com n natural, as condições (a) $P(1)$ é verdadeira, e (b) $P(n)$ verdadeira $\Rightarrow P(n+1)$ verdadeira. Isto é

i) $P(1)$: $x_1 = \dfrac{3^1 - 1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \therefore x_1 = 1$

ii) Seja $P(n): x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ verdadeira . Então $P(n+1)$: $x_{n+1} = x_n + 3^n$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n = \frac{1 \cdot 3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} = \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Como $P(1)$ é verdadeira, e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, com n natural. Portanto a proposição $x_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ é verdadeira para todo n natural.

Exemplo 21. Mostrar, por indução que: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Solução.

i) $P(1): 1 = 1^2$ é verdadeira.

ii) Seja $P(n): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ verdadeira.

Então $P(n+1): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + [2(n+1) - 1] =$

$$= n^2 + [2(n+1) - 1] =$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Como $P(1)$ é verdadeira, e $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, com n natural. Portanto a proposição

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para todo n natural.

2.12 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Vimos que, uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma PA (1.5) ou uma PG (1.12) se, e somente se, satisfazem, respectivamente, uma recorrência da forma

$$a_{k+2} + a_k = 2a_{k+1}$$

$$\text{e } \; a_{n+2} \cdot a_n = a_{n+1}^2, \;\; \forall\, n \geq 1$$

onde o termo geral da PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

e o termo geral da PG é dado por:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

O nosso objetivo, agora, é estudar a classe mais geral das sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ que satisfazem recorrências do tipo:

$$a_{k+2} + ra_{k+1} + sa_k = 0 \tag{1.23}$$

onde r e s são constantes reais dadas, não ambas nulas.

Definição 8 (NETO, 2014)

Uma recorrência do tipo (1.23) é dita *linear, de segunda ordem homogênea* e com coeficientes constantes, se cada termo, a partir do terceiro, é uma combinação linear (isto é, uma soma de múltiplos constantes) dos dois termos imediatamente anteriores.

Para resolvermos equações desse tipo, devemos encontrar a_n em função de n. Veremos a seguir um teorema que resolvem tais equações. Para ilustrar tal teorema, resolveremos, como exemplo, uma equação em que r e s têm valores dados.

Exemplo 22.

Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ a sequência dada por $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$, com $a_{k+2} - 7a_{k+1} + 10a_k = 0$ para $k \geq 1$ inteiro. Calcule a_n em função de n.

Solução. Inicialmente fazemos a substituição de a por α, e temos assim uma equação (1.23) chamada de *equação característica*, veremos maiores detalhes desta equação na seção a seguir. Daí, teremos:

$$a_{k+2} - 7a_{k+1} + 10a_k = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = 5.$$

Logo, $a_{k+2} - 7a_{k+1} + 10a_k = 0 \;\Rightarrow\; a_{k+2} - (2a_{k+1} + 5a_{k+1}) + 10a_k = 0$

$$\Rightarrow\; a_{k+2} - 2a_{k+1} = 5a_{k+1} - 10a_k$$

$$\Rightarrow\; a_{k+2} - 2a_{k+1} = 5(a_{k+1} - 2a_k).$$

Fazendo $b_k = (a_{k+1} - 2a_k)$, na última equação acima, teremos ,

$$b_1 = (a_{1+1} - 2a_1) = (4 - 2\cdot 1) = 2$$

e a expressão $(b_k)_{k\geq 1} = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ se torna uma PG de primeiro termo $b_1 = 2$ e razão $q = 5$. Isto é:

$$\begin{aligned} & b_1 \\ & b_2 = 5b_1 = b_1 5^1 \\ & b_3 = 5b_2 = 5(5b_1) = b_1 5^2 \\ & \ldots \\ & b_k = b_1 5^{k-1} \end{aligned}$$

Portanto: $b_k = 2\cdot 5^{k-1} \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} - 2a_k = 2\cdot 5^{k-1} \quad (i)$

De modo análogo, teremos: $a_{k+2} - 5a_{k+1} = 2(a_{k+1} - 5a_k)$, e fazendo $c_k = a_{k+1} - 5a_k$, com $c_1 = a_2 - 5a_1 = 4 - 5\cdot 1 = -1$, obtemos uma PG $(c_k)_{k\geq 1} = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$ de primeiro termo $c_1 = -1$ e razão $q = 2$, dada por $c_k = -1\cdot 2^{k-1}$. Logo, segue-se o resultado, em que: $c_k = -1\cdot 2^{k-1} \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} - 5a_k = -1\cdot 2^{k-1} \quad \text{(ii)}$.

Portando, para todo $k \geq 1$, temos de (i) e (ii) o sistema de equações

$$\begin{cases} a_{k+1} - 2a_k = 2\cdot 5^{k-1} \\ a_{k+1} - 5a_k = -1\cdot 2^{k-1}, \end{cases}$$

e, subtraindo membro a membro as relações acima, obtemos

$$a_k = \frac{2\cdot 5^{k-1} + 2^{k-1}}{3}, \quad \forall k \geq 1.$$

Onde a_k é o ter geral da recorrência , com os valores inicias $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$.

Portanto, podemos escrever a sequência $(a_n)_{n\geq 1} = (1, 4, 18, 86, \ldots)$.

Teorema 2.2 Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que, para todo $k \geq 1$ inteiros, tenhamos

$$a_{k+2} + ra_{k+1} + sa_k = 0,$$

onde r e s são constantes reais dadas, não ambas nulas. Se a equação $x^2 + r\cdot x + s = 0$ tiver raízes reais α e β, então existem constantes reais A e B, determinadas pelos valores de a_1 e a_2, tais que:

(a) se $\alpha \neq \beta$, então $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

(b) se $\alpha=\beta$, então $a_n=[A+B(n-1)]\alpha^{n-1}$ para todo $n\geq 1$.

Prova. Como α e β são raízes da equação $x^2+r\cdot x+s=0$, temos que:

$$-(\alpha+\beta)=r \text{ e } \alpha\cdot\beta=s.$$

Então:

$$a_{k+2}+ra_{k+1}+sa_k=0 \Rightarrow a_{k+2}-(\alpha+\beta)a_{k+1}+(\alpha\cdot\beta)a_k=0$$

$$\Rightarrow a_{k+2}-\alpha\cdot a_{k+1}-\beta\cdot a_{k+1}+(\alpha\cdot\beta)a_k=0$$

Desta última equação acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a_{k+2}-\alpha\cdot a_{k+1}=\beta\cdot(a_{k+1}-\alpha\cdot a_k) \\ a_{k+2}-\beta\cdot a_{k+1}=\alpha\cdot(a_{k+1}-\beta\cdot a_k) \end{cases}$$

Definindo

$$b_k=a_{k+1}-\alpha\cdot a_k \text{ e } c_k=a_{k+1}-\beta\cdot a_k \quad (i),$$

segue da relação acima que $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$, são PG´s de razões respectivamente iguais a α e β, e termos iniciais respectivamente iguais a $b_1=a_2-\alpha\cdot a_1$ e $c_1=a_2-\beta\cdot a_2$. Assim, pela fórmula do termo geral da PG, temos que:

$$\begin{cases} b_k=b_1\cdot\beta^{k-1} \\ c_k=c_1\cdot\alpha^{k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_k=(a_2-\alpha\cdot a_1)\cdot\beta^{k-1} \\ c_k=(a_2-\beta\cdot a_2)\cdot\alpha^{k-1} \end{cases} \quad (ii)$$

Portanto, de (i) e (ii) resulta

$$\begin{cases} a_{k+1}-\alpha\cdot a_k=(a_2-\alpha\cdot a_1)\cdot\beta^{k-1} \quad (iii) \\ a_{k+1}-\beta\cdot a_k=(a_2-\beta\cdot a_2)\cdot\alpha^{k-1} \quad (iv) \end{cases}.$$

Considerando o caso em que $\alpha\neq\beta$, e fazendo $(iv)-(iii)$, obtemos:

$$\alpha\cdot a_k-\beta\cdot a_k=(a_2-\alpha\cdot a_1)\cdot\beta^{k-1}-(a_2-\beta\cdot a_2)\cdot\alpha^{k-1}$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{(a_2-\beta\cdot a_1)}{\alpha-\beta}\alpha^{k-1}-\frac{(a_2-\alpha\cdot a_1)}{\alpha-\beta}\beta^{k-1}.$$

Denotando

$$A=\frac{(a_2-\beta\cdot a_1)}{\alpha-\beta} \text{ e } B=-\frac{(a_2-\alpha\cdot a_1)}{\alpha-\beta}.$$

Segue se o resultado desejado para o item (a). isto é:

se $\alpha\neq\beta$, então $a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$ para todo $n\geq 1$.

Caso seja $\alpha=\beta$, as duas relações (iii) e (iv) são iguais, de modo que não temos informação para calcular a_k. Usamos, então, o seguinte artifício: é imediato verificar que as sequências $u_k = \alpha^{k-1}$ e $v_k = (k-1)\alpha^{k-1}$ (o mesmo α que antes , raiz da equação $x^2 + rx + s = 0$) satisfazem as recorrências

$$\begin{cases} u_{k+2} + ru_{k+1} + su_k = 0 \\ v_{k+2} + rv_{k+1} + sv_k = 0 \end{cases}$$

(cf. atividade 1. Cap. 2); portanto, fixados $A, B \in C$ a sequência $z_k = Au_k + Bv_k$ satisfaz a recorrência

$$z_{k+2} + rz_{k+1} + sz_k = 0$$

(cf. atividade 2. Cap. 2). Assim, a idéia é procurarmos números reais A e B tais que, para todo inteiro $k \geq 1$, tenhamos $a_k = z_k$. Devemos achar números reais A e B tais que $a_1 = z_1$ e $a_2 = z_2$, ou seja:

$$\begin{cases} a_1 = A \\ a_2 = (A+B)\alpha \end{cases};$$

mas isso pode ser feito, uma vez que $\alpha = -\dfrac{r}{2} \neq 0$.

2.12.1 Equação característica.

Veremos a seguir que, para resolvermos recorrências lineares, utilizamos na prática sua *equação característica*.

Seja uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ dada por a_1, a_2 e para todo inteiro $k \geq 1$,

$$a_{k+2} + ra_{k+1} + sa_k = 0$$

onde r e s são constates reais dadas, não ambas nulas. Se $a_n = \alpha^n$ for uma solução da equação (1.23) com $\alpha \neq 0$. Então: $a_{n+1} = \alpha^{n+1}$ e $a_{n+2} = \alpha^{n+2}$. Substituindo esses valores na equação (1.23), encontramos:

$$\alpha^{n+2} + r\alpha^{n+1} + s\alpha^n = 0 \Rightarrow \alpha^n(\alpha^2 + r\,\alpha + s) = 0,$$

como $\alpha \neq 0$, segue-se que

$$\alpha^2 + r\,\alpha + s = 0 \qquad (1.24)$$

Isto é, temos a equação de segundo grau na variável α, chamada de *equação característica*.

Exemplo 23. Resolver a recorrência $a_{k+2} - 7a_{k+1} + 10a_k = 0$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$, para todo inteiro $k \geq 1$.

Solução. Seja $\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$, sua equação característica. Então: $\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = 7$.

Logo, temos que, $a_n = A\alpha_1^{n-1} + B\alpha_2^{n-1}$. Então:

$$a_n = A\cdot 5^{n-1} + B\cdot 2^{n-1} \qquad (i)$$

Fazendo as substituições, para $a_1 = 1$ e $a_2 = 4$, temos:

$$\begin{cases} a_1 = 1 = A\cdot 5^{1-1} + B\cdot 2^{1-1} \\ a_2 = 4 = A\cdot 5^{2-1} + B\cdot 2^{2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 = A + B \\ a_2 = 4 = A\cdot 5 \ + B\cdot 2 \end{cases} \quad (ii)$$

Resolvendo o sistema de equações (ii), nas variáveis A e B, teremos $A = \frac{2}{3}$ e $B = \frac{1}{3}$.

Substituindo esses valores na equação (i),finalmente, encontramos

$$a_n = \frac{2}{3}\cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3}\cdot 2^{n-1} \; .$$

Que é o resultado esperado. Observemos, ainda, que esta última fórmula acima (de termo geral, a_n) nos fornece a sequência

$$a_1 = \frac{2\cdot 5^0 + 2^0}{3} = \frac{3}{3} = 1$$
$$a_2 = \frac{2\cdot 5^1 + 2^1}{3} = \frac{12}{3} = 4$$
$$a_3 = \frac{2\cdot 5^2 + 2^2}{3} = \frac{54}{3} = 18$$
$$a_4 = \frac{2\cdot 5^3 + 2^3}{3} = \frac{258}{3} = 86$$

....

Isto é: $(a_n)_{n\geq 1} = (1, 4, 18, 86, \ldots)$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Exemplo 24. Resolver a recorrência $a_{k+2} - 6a_{k+1} + 9a_k = 0$, onde $a_1 = 1$ e $a_2 = 6$, para todo inteiro $k \geq 1$.

Solução. Da equação característica: $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$ resulta $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 3$.

Logo,

$$a_n = A\cdot\alpha^{n-1} + B(n-1)\alpha^{n-1}, \text{ com } a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 6$$

Fazendo as substituições, para $a_1 = 1$ e $a_2 = 6$, temos:

$$\begin{cases} a_1 = 1 = A\cdot 3^{1-1} + B\cdot(1-1)\cdot 3^{1-1} \\ a_2 = 6 = A\cdot 3^{2-1} + B\cdot(2-1)\cdot 3^{2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = A \\ 6 = (A+B)\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Assim, $a_n = A\cdot\alpha^{n-1} + B\cdot(n-1)\cdot\alpha^{n-1} \Rightarrow a_n = 1\cdot 3^{n-1} + 1\cdot(n-1)\cdot 3^{n-1} = n\cdot 3^{n-1}$

Portanto: $a_n = n \cdot 3^{n-1}$, nos fornece a sequência $(a_n)_{n\geq 1} = (1, 6, 27, 108, \ldots)$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Se as raízes da equação característica $\alpha^2 + r\alpha + s = 0$, da equação:

$$a_n = A \cdot \alpha_1^{\ n-1} + B \cdot \alpha_2^{\ n-1},$$

forem complexas, as constantes arbitrárias A e B, podem ser escritas de modo a evitar cálculos complexos. Isto é:

pondo as raízes na forma trigonométrica, teremos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \rho(\cos\theta + isen\theta), \quad\quad \alpha_2 = \rho(\cos\theta - isen\theta) \\ \alpha_1^n = \rho(\cos n\theta + isenn\theta), \ \alpha_2^n = \rho(\cos n\theta - isenn\theta) \end{cases}$$

Logo,

$$A \cdot \alpha_1^{n-1} + B \cdot \alpha_2^{n-1} = \rho^n[(A+B)\cos n\theta + i(A-B)senn\theta].$$

Fazendo $A' = A + B$ e $B' = A - B$, como novas constantes, podemos escrever:

$$a_n = \rho^n[(A'\cos n\theta + iB' senn\theta].$$

Atividades. Recorrências lineares de segunda ordem homogênea

1) Se a equação $x^2 + rx + s = 0$ tem duas raízes reais iguais a α, prove que as sequências $u_k = \alpha^{k-1}$ e $v_k = (k-1)\alpha^{k-1}$ satisfazem as relações de recorrências

$$\begin{cases} u_{k+2} + ru_{k+1} + su_k = 0 \\ v_{k+2} + rv_{k+1} + sv_k = 0 \end{cases}$$

2) Se as sequências $(u_n)_{n\geq 1}$ e $(v_n)_{n\geq 1}$ satisfazem as recorrências de segunda ordem $u_{k+2} + ru_{k+1} + su_k = 0$ e $v_{k+2} + rv_{k+1} + sv_k = 0$ para todo $k \geq 1$, prove que a sequência $(z_n)_{n\geq 1}$ dada para $k \geq 1$ por $z_k = Au_k + Bv_k$ (onde A e B são constantes reais) satisfaz uma recorrência análoga, $z_{k+2} + rz_{k+1} + sz_k = 0$.

Resolução. Recorrências lineares de segunda ordem homogênea

1) $\begin{cases} u_{k+2} + ru_{k+1} + su_k = 0 \ \text{(i)} \\ v_{k+2} + rv_{k+1} + sv_k = 0 \ \text{(ii)} \end{cases}$

Como a equação característica $x^2 + rx + s = 0$ de (i) têm duas raízes reais e guias a α, podemos escrever: $x^2 + rx + s = (x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \iff r = -2\alpha$ e $s = \alpha^2$.

Assim, $u_{k+2}+ru_{k+1}+su_k=0 \Rightarrow u_{k+2}-2\alpha u_{k+1}+\alpha^2 u_k=0 \ (i)$

De, $u_k=\alpha^{k-1}$ temos, $u_{k+1}=\alpha^k$ e $u_{k+2}=\alpha^{k+1}$, substituindo estas três últimas igualdades na equação (i), teremos: $\alpha^{k+1}-2\alpha\cdot\alpha^k+\alpha^2\cdot\alpha^{k-1}=2\alpha^{k+1}-2\alpha^{k+1}=0$. A prova para (ii) é análoga a prova de (i).

2) $z_{k+2}+rz_{k+1}+sz_k=0 \Rightarrow (Au_{k+2}+Bv_{k+2})+r(Au_{k+1}+Bv_{k+1})+s(Au_k+Bv_k)=$

$$A(u_{k+2}+ru_{k+1}+su_k)+B(v_{k+2}+rv_{k+1}+sv_k)=A\cdot 0+B\cdot 0=0.$$

Resolvendo recorrências lineares de segunda ordem não homogênea.

Definição 9 (MORGADO, 2015)

Uma recorrência do tipo $x_{n+2}+r\cdot x_{n+1}+s\cdot x_n=f(n)$ com $f(n)\neq 0$, com r e s não ambos nulos, e coeficientes constantes, é chamada de: *recorrência linear de segunda ordem não homogênea*.

Teorema 2.3 Se a_n é uma solução da equação

$$x_{n+2}+r\cdot x_{n+1}+s\cdot x_n=f(n) \ ,$$

então a substituição $x_n=a_n+y_n$ transforma a equação em

$$y_{n+2}+p\cdot y_{n+1}+q\cdot y_n=0.$$

Demonstração.

Como, $x_n=a_n+y_n$. Então: $x_{n+1}=a_{n+1}+y_{n+1}$ e $x_{n+2}=a_{n+2}+y_{n+2}$. Substituindo esses valores na equação

$$x_{n+2}+r\cdot x_{n+1}+s\cdot x_n=f(n) \ ,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
&(a_{n+2}+y_{n+2})+p\cdot(a_{n+1}+y_{n+1})+q\cdot(a_n+y_n)=f(n)\\
&\Leftrightarrow (a_{n+2}+p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n)+(y_{n+2}+p\cdot y_{n+1}+q\cdot y_n)=f(n)\\
&\Leftrightarrow f(n)+(y_{n+2}+p\cdot y_{n+1}+q\cdot y_n)=f(n)\\
&\Leftrightarrow y_{n+2}+p\cdot y_{n+1}+q\cdot y_n=0.
\end{aligned}$$

Observemos que a solução de uma recorrência não homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não homogênea (a_n) e a solução homogênea (y_n).

Já vimos como encontrar a solução da homogênea, veremos, agora, como encontrar a solução da não homogênea. Veremos, no exemplo a seguir, que esta solução será encontrada por tentativas.

Exemplo 25. Resolver a recorrência: $x_{n+2}+x_{n+1}-6x_n=6-8n$; $x_1=4$ e $x_2=8$.

Solução. A equação homogênea $x_{n+2}+x_{n+1}-6x_n=0$, tem equação característica $\alpha^2+\alpha-6=0$ de raízes $\alpha_1=2$ e $\alpha_2=-3$, com $\alpha_1\neq\alpha_2$. Logo**,** uma solução da equação homogênea é:

$$h_n=A\cdot 2^{n-1}+B\cdot(-3)^{n-1}.$$

Procuremos, agora, uma solução particular t_n, da recorrência $x_{n+2}+x_{n+1}-6x_n=6-8n$. Observemos que, se substituirmos t_n em $x_{n+2}+x_{n+1}-6x_n$ devemos encontrar $6-8n$. Portanto, por tentativa, faremos $t_n=Cn+D$, e assim teremos:

$$\begin{aligned}
&t_{n+2}+t_{n+1}-6t_n=6-8n\\
&\Rightarrow [C(n+2)+D]+[C(n+1)+D]-6(Cn+D)=6-8n\\
&\Rightarrow -4C\cdot n+(3C-4D)=-8\cdot n+6\\
&\Rightarrow \begin{cases}-4C=-8\\ 3C-4D=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=2\\ D=0\end{cases};
\end{aligned}$$

uma solução particular $t_n=2n$. A solução da recorrência é a soma de t_n com h_n.

Isto é: $x_n=t_n+h_n$. Segue-se que, uma solução geral da recorrência é:

$$x_n=A\cdot 2^{n-1}+B\cdot(-3)^{n-1}+2n \text{ (i)}$$

Das condições iniciais, temos $x_1=4$ e $x_2=8$, substituindo esses valores na equação (i), encontramos:

$$\begin{cases}x_1=4=A\cdot 2^{1-1}+B\cdot(-3)^{1-1}\\ x_2=8=A\cdot 2^{2-1}+B\cdot(-3)^{2-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\ 2A-3B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\ B=0\end{cases}$$

Portanto,

$$x_n=2^n+2n.$$

Daí, podemos escrever a sequência $(a_n)_{n\geq 1}=(4,8,14,24,\ldots)$.

2.13 Recorrências lineares de terceira ordem homogênea

Definição 10 (NETO, 2014)

Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ que satisfaz uma relação de recorrência da forma

$$a_{k+3} + ra_{k+2} + sa_{k+1} + t_k = 0, \quad (1.25)$$

para todo inteiro $k \geq 1$, onde $r,\ s$ e t são constantes reais dadas, não nulas, é chamada de *recorrência linear de terceira ordem homogênea.*

De forma análoga as recorrências de segunda ordem, definimos a **equação característica** da equação polinomial do terceiro grau pela equação:

$$\alpha^3 + r\alpha^2 + s\alpha + t = 0. \quad (1.26)$$

Teorema 2.4 (NETO, 2014).

Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que, para todo $k \geq 1$ inteiro, tenhamos

$$a_{k+3} + ra_{k+2} + sa_{k+1} + ta_k = 0,$$

onde, $r,\ s$ e t são constantes reais dadas, não todas nulas. Se a equação característica $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ tiver raízes reais $\alpha,\ \beta$ e γ, então existem constantes reais $A,\ B$ e C, determinadas pelos valores de $a_1,\ a_2$ e a_3, tais que:

(a) Se $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, então $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

(b) Se $\alpha = \beta \neq \gamma$, então $a_n = [A + B(n-1)]\alpha^{n-1} + C\gamma^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

(c) Se $\alpha = \beta = \gamma$, então $a_n = [A + B(n-1) + C(n-1)^2]\alpha^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

A prova desse teorema para o item (a) segue de uma generalização das soluções de recorrências de ordem k (cf. item 2.14). E para os itens (b) e (c) veremos os exemplos 26, 27 e 28, que ilustram esse teorema.

Exemplo 26 (LIPSCHUTZ, 2004)

Resolver a seguinte relação de recorrência homogênea de terceira ordem:

$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$, com as condições iniciais $a_0 = 2, a_1 = 3$ e $a_2 = 6$.

Solução. A recorrência dada pode ser escrita como $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0$. E seu polinômio característico (ou equação característica) é dado pela equação

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0$$

Como, $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)$. Obtemos daí, as três raízes reais distintas

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 3$. Isto é, $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$.

Logo, a solução geral da relação de recorrência é:

$$a_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + C_3\alpha_3^n$$

Obervemos que o uso da fórmula acima é conveniente para os termos iniciais $a_0 = 2, a_1 = 3$ e $a_2 = 6$, onde $n = 0, n = 1$ e $n = 2$, respectivamente.

Usando as condições iniciais $a_0 = 2, a_1 = 3$ e $a_2 = 6$, com $n = 0, n = 1$ e $n = 2$. Obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 = C_1 \cdot 1^0 + C_2 \cdot 2^0 + C_3 \cdot 3^0 = 2 \\ a_1 = C_1 \cdot 1^1 + C_2 \cdot 2^1 + C_3 \cdot 3^1 = 3 \\ a_2 = C_1 \cdot 1^2 + C_2 \cdot 2^2 + C_3 \cdot 3^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 3 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 6 \end{cases}$$

de solução: $C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = 0$ e $C_3 = \frac{1}{2}$.

Logo, $a_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + C_3\alpha_3^n n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{3}{2} \cdot 1^n + 0 \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n$

Portanto, a solução única da relação de recorrência com condições iniciais dadas é:

$$a_n = \frac{3^n + 3}{2}$$

Podemos, com isso, escrever a sequência $(a_n)_{n \geq 1} = (2, 3, 6, 15, 42, \ldots)$.

Exemplo 27 (LIPSCHUTZ, 2004)

Resolver a seguinte relação de recorrência homogênea de terceira ordem:

$a_{n+3} = 11a_{n+2} - 39a_{n+1} + 45a_n$, com as condições iniciais $a_0 = 5, a_1 = 11$ e $a_2 = 25$.

Solução. O polinômio característico é $\alpha^3 - 11\alpha^2 + 39\alpha - 45 = (\alpha - 3)^2(\alpha - 5)$.

Existem duas raízes, $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$ de multiplicidade 2 e $\alpha_3 = 5$ de multiplicidade 1.

Logo, a solução geral da recorrência é:

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n \cdot 3^n + C_3 \cdot 5^n = (C_1 + C_2 \cdot n) \cdot 3^n + C_3 \cdot 5^n$$

Observemos novamente, que o uso da fórmula acima é conveniente para os termos iniciais $a_0 = 5, a_1 = 11$ e $a_2 = 25$, onde $n = 0, n = 1$ e $n = 2$, respectivamente.

Assim, para $n = 0, n = 1$ e $n = 2$, obtemos o seguinte sistema linear :

$$\begin{cases} a_0 = C_1 + C_3 = 5 \\ a_1 = 3C_1 + 3C_2 + 5C_3 = 11 \\ a_2 = 9C_1 + 18C_2 + 25C_3 = 25 \end{cases}$$

De soluções reais únicas $C_1 = 4, C_2 = -2$ e $C_3 = 1$.

Portanto, a solução única da relação de recorrência com condições iniciais dadas é

$$a_n = (4 - 2n) \cdot 3^n + 5^n.$$

Exemplo 28 (LIPSCHUTZ, 2004).

Resolver a seguinte relação de recorrência homogênea de terceira ordem:

$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 12a_{n+1} + 8a_n$, com as condições iniciais $a_0 = 3, a_1 = 4$ e $a_2 = 12$.

Solução. O polinômio característico é: $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = (\alpha - 2)^3$.

Existe uma raíz $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2$, de multiplicidade 3. Logo, a solução geral da recorrência é:

$$a_n = (C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n^2) \cdot 2^n$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a_0 = C_1 = 5 \\ a_1 = 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 4 \\ a_2 = 4C_1 + 8C_2 + 16C_3 = 12 \end{cases}$$

Encontramos: $C_1 = 3, C_2 = -2$ e $C_3 = 1$.

Portanto, a solução única da relação de recorrência é:

$$a_n = (3 - 2n + n^2) \cdot 2^n$$

2.14 Recorrências Lineares de Ordem k (MOREIRA, 2009)

Podemos generalizar o resultado encontrado nas recorrências de ordem 2 e ordem 3, para recorrências lineares de uma ordem qualquer.

Definição 11. Uma recorrência linear é dita de "ordem **k**" quando cada termo da sequência recorrente é obtido dos **k** termos imediatamente anteriores a ele. E escrevemos tal recorrência da forma:

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + a_3 x_{n+k-3} + \ldots + a_k x_n + f(n) \tag{1.27}$$

Sendo $a_k \neq 0$ constantes reais. Vimos que, se $f(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea.

Podemos escrever essa equação da forma:

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + a_3 x_{n+k-3} + \ldots + a_k x_n = 0,$$

de equação característica,

$$x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k = 0 \tag{1.28}$$

Teorema 2.6 Se $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k$ são raízes da equação característica (1.28), então:

$$x_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + C_3\alpha_3^n + \ldots + C_k\alpha_k^n \tag{1.29}$$

é solução da recorrência

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + a_3 x_{n+k-3} + \ldots + a_k x_n = 0, \tag{1.30}$$

para quaisquer valores de C_i, $i \in N$ e $1 \le i \le k$.

Prova. Faremos a substituição de $x_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + C_3\alpha_3^n + \ldots + C_k\alpha_k^n$ na equação de recorrência,

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + a_3 x_{n+k-3} + \ldots + a_k x_n = 0.$$

Observemos, inicialmente, que:

$$\begin{aligned}
x_{n+k} &= C_1\,\alpha_1^{n+k} + C_2\alpha_2^{n+k} + \ldots + C_k\,\alpha_k^{n+k}\\
x_{n+k-1} &= C_1\,\alpha_1^{n+k-1} + C_2\alpha_2^{n+k-1} + \ldots + C_k\,\alpha_k^{n+k-1}\\
x_{n+k-2} &= C_1\,\alpha_1^{n+k-2} + C_2\alpha_2^{n+k-2} + \ldots + C_k\,\alpha_k^{n+k-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= C_1\,\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \ldots + C_k\,\alpha_k^n
\end{aligned}$$

Assim, fazendo as substituições das equações acima, na equação de recorrência (1.30), encontramos:

$$(C_1\,\alpha_1^{n+k} + C_2\alpha_2^{n+k} + \ldots + C_k\alpha_k^{n+k}) + a_1(C_1\,\alpha_1^{n+k-1} + C_2\alpha_2^{n+k-1} + \ldots + C_k\alpha_k^{n+k-1}) +$$

$$a_2(C_1\,\alpha_1 + C_2\alpha_2^{n+k-2} + \ldots + C_k\alpha_k^{n+k-2}) + \ldots + a_k(C_1\,\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \ldots + C_k\alpha_k^n) = 0$$

Agrupando convenientemente e fatorando cada parcela, encontramos:

$$\begin{aligned}
&C_1\alpha_1^n(\alpha_1^k + a_1\alpha_1^{k-1} + a_2\alpha_1^{k-2} + \ldots + a_k) +\\
&+ C_2\alpha_2^n(\alpha_2^k + a_1\alpha_2^{k-1} + a_2\alpha_2^{k-2} + \ldots + a_k) + \ldots\\
&+ C_k\alpha_k^n(\alpha_k^k + a_1\alpha_k^{k-1} + a_2\alpha_k^{k-2} + \ldots + a_k) = 0
\end{aligned}$$

Como $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são raízes da equação $x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k = 0$, então:

$$C_1\alpha_1^n \cdot 0 + C_2\alpha_2^n \cdot 0 + \ldots + C_k\alpha_k^n \cdot 0 = 0$$

Teorema 2.7 Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ são raízes distintas e não nulas da equação característica, $x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \ldots + a_k = 0$, então todas as soluções da recorrência

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + a_3x_{n+k-3} + \ldots + a_kx_n = 0$$

são da forma:

$$x_n = C_1\,\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \ldots + C_k\,\alpha_k^n = \sum_{i=1}^{k} C_i\alpha_i^n$$, com C_i constantes, $i \in N$ e $1 \le i \le k$.

Prova. Seja x_n uma solução qualquer da recorrência

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + a_3 x_{n+k-3} + \ldots + a_k x_n = 0$$

Pelo teorema 2.6, para os valores de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, como solução da recorrência, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + \ldots + C_k\alpha_k \\ x_2 = C_1\alpha_1^2 + C_2\alpha_2^2 + C_3\alpha_3^2 + \ldots + C_k\alpha_k^2 \\ x_3 = C_1\alpha_1^3 + C_2\alpha_2^3 + C_3\alpha_3^3 + \ldots + C_k\alpha_k^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = C_1\alpha_1^k + C_2\alpha_2^k + C_3\alpha_3^k + \ldots + C_k\alpha_k^k \end{cases}$$

Se o sistema acima tem raízes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ distintas e não nulas, pela matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_k^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \ldots & \alpha_k^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \alpha_3^k & \ldots & \alpha_k^k \end{bmatrix} = \prod_{1 \le i \le j \le k} (\alpha_j - \alpha_i)$$

seu determinante é também não nulo. Logo, o sistema tem solução.

Seja $z_n = x_n - C_1\alpha_1^n - C_2\alpha_2^n - C_3\alpha_3^n - \ldots - C_k\alpha_k^n$. Para provar o teorema, devemos mostrar que $z_n = 0$.

Substituindo z_n na equação, $x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + a_3 x_{n+k-3} + \ldots + a_k x_n = 0$ encontramos:

$$z_{n+k} + a_1 z_{n+k-1} + a_2 z_{n+k-2} + \ldots + a_k z_n =$$

$$= (x_{n+k} - C_1\alpha_1^{n+k} - C_2\alpha_2^{n+k} - C_3\alpha_3^{n+k} - \ldots - C_k\alpha_k^{n+k}) +$$

$$a_1(x_{n+k-1} - C_1\alpha_1^{n+k-1} - C_2\alpha_2^{n+k-1} - C_3\alpha_3^{n+k-1} - \ldots - C_k\alpha_k^{n+k-1}) +$$

$$a_2(x_{n+k-2} - C_1\alpha_1^{n+k-2} - C_2\alpha_2^{n+k-2} - C_3\alpha_3^{n+k-2} - \ldots - C_k\alpha_k^{n+k-2}) +$$

$$a_3(x_{n+k-3} - C_1\alpha_1^{n+k-3} - C_2\alpha_2^{n+k-3} - C_3\alpha_3^{n+k-3} - \ldots - C_k\alpha_k^{n+k-3}) +$$

$$\ldots$$

$$a_k(x_n - C_1\alpha_1^n - C_2\alpha_2^n - C_3\alpha_3^n - \ldots - C_k\alpha_k^n) =$$

(Aplicando a propriedade distributiva para o fator $a_i \text{ com } i = 1, 2, 3, \ldots, k$, e colocando o fator $-C_i \cdot \alpha_i^n, \text{com } i = 1, 2, 3, \ldots, k$, em evidência, encontramos)

$$= (x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n)$$

$$-C_1\alpha_1^n(\alpha_1^k + a_1\alpha_1^{k-1} + a_2\alpha_1^{k-2} + a_3\alpha_1^{k-3} + \ldots + a_k)$$

$$-C_2\alpha_2^n(\alpha_2^k + a_1\alpha_2^{k-1} + a_2\alpha_2^{k-2} + a_3\alpha_2^{k-3} + \ldots + a_k)$$

$$-C_3\alpha_3^n(\alpha_3^k + a_1\alpha_3^{k-1} + a_2\alpha_3^{k-2} + a_3\alpha_3^{k-3} + \ldots + a_k)$$

...

$$-C_k\alpha_k^n(\alpha_k^k + a_1\alpha_k^{k-1} + a_2\alpha_k^{k-2} + a_3\alpha_k^{k-3} + ... + a_k)$$

Observemos que o primeiro parênteses já é igual a zero, e para os demais parênteses, temos que: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ são raízes da equação característica $x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + ... + a_k = 0$.

Portanto, $z_n = 0$

3. Aplicações

3.1 Sequências Numéricas e Recorrências Lineares

Será proposto, inicialmente, no item (3.1) alguns problemas de sequências numéricas e recorrências lineares de primeira ordem, com suas respectivas resoluções. Pois entendemos que aprender matemática é aprender a resolver problemas, e para resolver problemas é preciso apropriar-se dos significados dos conceitos e procedimentos matemáticos para saber aplicá-los em situações novas. Assim, é fundamental que tais conceitos e procedimentos sejam trabalhados com a total compreensão de todos os significados associados a eles.

"Eu ouço e eu esqueço,
Eu vejo eu lembro,
Eu faço e eu entendo".

Antigo provérbio chinês

O estudo das progressões é uma ferramenta que nos ajuda a entender fenômenos da natureza e fatos do nosso cotidiano, desde situações simples, como tomar um remédio, até situações mais complexas, como proliferação de bactérias. Veremos a partir do item (3.2) que, por meio de técnicas recursivas, podemos criar modelos (ou fórmulas matemáticas) para descrever padrões. É importante observarmos que a exibição de um modelo, exige do modelador o conhecimento de matemática e a capacidade de inferir por raciocínio a descrição destes padrões, podendo assim fazer uso das técnicas recursivas para resolver problemas. Veremos algumas aplicações na geometria, na sequência de Fibonacci, pizza de Steiner, torre de Hanói, desintegração de elementos químicos, eliminação de uma droga do organismo e colônia de bactérias. Segue em todas as aplicações uma demonstração por indução finita, mostrando assim, a validade de cada modelo, para todo n natural.

"... quando tentamos descrever algum aspecto do mundo real percebemos ... que ele oferece mais do que a nossa pobre e finita mente consegue alcançar. Mas se aplicarmos nossos poderes apropriadamente, podemos alcançar um entendimento parcial que se adapte suficientemente para nos dar fidelidade às leis do universo. Para ter uma chance de sucesso, devemos idealizar e simplificar afim de obter uma figura mental que possamos manejar. Quando Chegarmos a uma descrição precisa, pela seleção das características que consideramos essências, temos um modelo matemático".

Rosenblom

3.1.1 Atividades de Sequências Numéricas e Recorrências Lineares

3.1.1.1 Progressões aritméticas PA.

1) Calcular os ângulos internos de um triângulo retângulo, sabendo que estão em progressão aritmética (PA).

2) (UNIFESP) “Números triangulares” são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos eqüiláteros. É conveniente definir 1 como o primeiro número triangular. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares.

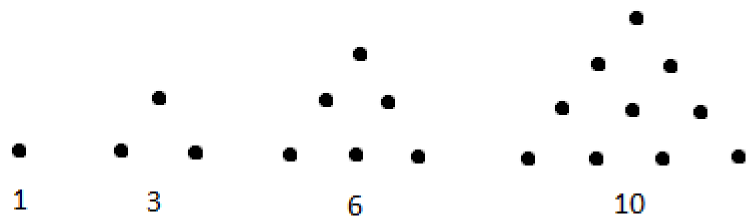

Figura 1. Números triangulares

Se T_n representa o n-ésimo número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante. Dado que $T_n = T_{n-1} + n$, para $n = 2, 3, 4, \ldots$, pode-se deduzir que T_{100} é igual a

a) 5050 b) 4950 c) 2197 d) 1458 e) 729

3) (Técnico - BNDS - 2008 – CESGRANRIO) Uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é tal que a soma dos n primeiros termos é dada pela expressão $S_n = 3n^2 + n.$ O valor do 51º termo é:

(A) 304.
(B) 303.
(C) 302.
(D) 301.
(E) 300.

4) (MACKENZIE) Considere os naturais n, $100 \le n \le 999$, que, divididos por 9, deixam resto 2. A soma deles é:

(A) 49700;
(B) 65450;
(C) 83870;
(D) 54650;
(E) 75550.

5) (Exame Nacional de Acesso-MESTRADO-PROFMAT 2019) A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles T_1 cujos catetos medem l, é o cateto de um triângulo retângulo isósceles T_2. A hipotenusa de T_2 é o cateto de triângulo retângulo isósceles T_3, cuja hipotenusa é o cateto do triângulo retângulo isósceles T_4 e assim por diante. O valor de l que torna a medida da hipotenusa de T_{100} igual a 2^{50} é:

(A) $\sqrt{2}$ (B) 1 (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 2 (E) $2\sqrt{2}$

6) (SBM, 2013) Mostre que: se a_n e a_m são dois termos quaisquer de uma PA de razão r, então:

$$a_n = a_m + (n-m)\cdot r .$$

7) (SBM, 2013) Mostre que, em toda PA tem-se: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot r$

8) (EESCUSP-66) Se numa PA a soma dos m primeiros termos é igual a soma dos n primeiros termos, $m \neq n$, mostre que a soma dos $m+n$ primeiros termos é igual a zero.

9) (SBM, 2013) Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PA de razão não nula e p, q, u, v naturais dados . Prove que

$$a_p + a_q = a_u + a_v \iff p+q=u+v .$$

10) (SBM, 2013) Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma PA tal que $a_p = \alpha$ e $a_q = \beta$, com $p \neq q$. Calcule, em função de p, q, α, β, o termo a_{p+q}.

11) Mostre que o número 111...1 (n algarismos 1) é igual a $\frac{10^n - 1}{9}$.

12) Formam-se a sequência de inteiros positivos:

$$49, 4489, 444889, 44448889, \ldots$$

na qual cada termo resulta de intercalar 48 no centro do interior. Mostrar que todos os termos desta sequência são (a) quadrados perfeitos, (b) e determinar a raíz quadrada do n-ésimo termo.

13) Use o teorema fundamental da somação para mostrar que:

a) $\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot 3^{i-1} = 3^n - 1$;

b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

14) Um *quadrado mágico* de ordem n é uma matriz $n \times n$, cujos elementos são os inteiros $1, 2, 3, \ldots, n^2$, sem repetir nenhum, tal que todas linhas, todas colunas e as diagonais principais tenham a mesma soma. O valor dessa soma é chamada de constante mágica. Por exemplo, os quadrados

(a)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(b)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(c)

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Figura 2. Quadrados mágicos

são mágicos, com constantes mágicas respectivamente iguais a (a) 15, (b) 34 e (c) 65. Determine a constante mágica de um quadrado mágico de ordem n.

15) (SBM,2013) Se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma PA de razão r, prove que a sequência $(b_k)_{k\geq 1}$ definida por $b_k = a_{k+1}^2 - a_k^2$, para todo $k \geq 1$, também é uma PA, e calcule sua razão em função de r.

16) (SBM, 2013) A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfaz $a_1 = 1$ e $a_{k+1} = 3a_k - 1$ para $k \geq 1$.

Faça os seguintes itens:

a) se $b_n = a_n - \frac{1}{2}$, prove que $b_{k+1} = 3b_k$ para $k \geq 1$;

b) escreva os cinco primeiros termos de $(b_k)_{k\geq 1}$ e obtenha, em seguida, a fórmula posicionalmente correspondente;

c) obtenha uma fórmula posicional para a_n.

3.1.1.2 Progressões Geométricas (PG).

17) Se (a_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

18) Se (a_n) é uma progressão aritmética, prove que (b_n) definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica.

19) O rádio-26 tem meia-vida (período de tempo em que metade da massa inicialmente presente se desintegre) de 1600 anos. A taxa de variação da massa é constante. Em quanto tempo a terça parte da massa inicialmente presente se desintegrará?

20) Sejam $a = 111...1$ $(n \text{ dígitos iguais a } 1)$ e $b = 1000...05$ $(n-1 \text{ dígitos iguais a } 0)$. Prove que $ab+1$ é um quadrado perfeito e determine sua raiz quadrada.

21) A sequência $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma *progressão aritmético-geométrica* se, para cada inteiro $k \geq 1$, tivermos $a_k = b_k \cdot c_k$, onde as sequências $(b_k)_{k\geq 1}$ e $(c_k)_{k\geq 1}$ são respectivamente uma PA e uma PG. Mostre que o valor de S_n, em função de n, b_1, c_1 e das razões r, q respectivamente da PA e da PG, para a soma dos n primeiros termos de uma tal sequência $(a_k)_{k\geq 1}$, é dada por:

$$S_n = c_1 b_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + c_1 rq \cdot \frac{\left[1 - nq^{n-1} + (n-1)q^n\right]}{(1-q)^2}$$

22) Utilize a fórmula (S_n) do exercício (21), para mostrar que:

$$2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 + 17 \cdot 3^3 + \ldots + 497 \cdot 3^{99} + 502 \cdot 3^{100} = \frac{1}{4}(999 \cdot 3^{101} + 11)$$

Progressões Aritméticas (PA)

Resolução:

1) Consideremos os ângulos internos $\alpha - r$, α e $\alpha + r$, em PA, onde r é a razão dessa PA. Pelo teorema dos ângulos internos de qualquer triângulo, temos que: a soma dos ângulos internos é igual a 180°.

Logo, $(\alpha - r) + \alpha + (\alpha + r) = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$ e $\alpha + r = 90° \Rightarrow r = 30°$.

Portanto, os ângulos internos, medem respectivamente , $\alpha - r = 60° - 30° = 30°$,

$\alpha = 60°$ e $\alpha + r = 60° + 30° = 90°$. Ver figura abaixo.

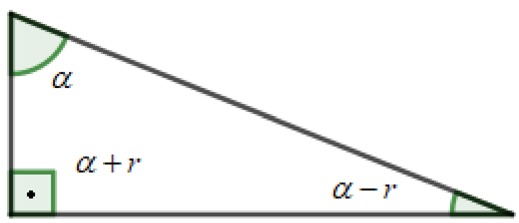

Figura 3. Triângulo retângulo

2) Solução. Dados que $T_n = T_{n-1} + n$, para $n = 2, 3, 4, \ldots$, e $T_1 = 1$, pela soma telescópica, temos

$$\begin{aligned}
\cancel{T_2} &= T_1 + 2 \\
\cancel{T_3} &= \cancel{T_2} + 3 \\
\cancel{T_4} &= \cancel{T_3} + 4 \\
&\ldots \\
T_n &= \cancel{T_{n-1}} + n \\
\hline
T_n &= T_1 + (2+3+4+\ldots+n)
\end{aligned}$$

Então: $T_n = T_1 + (2+3+4+\ldots+n) = 1+2+3+4+\ldots+n \; = \dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

Portanto. $T_{100} = \dfrac{(100+1)\cdot 100}{2} = 5050$.

Resposta. Letra (a) 5050

3) Dados $S_n = 3n^2 + n$. Determinar a_{51}.

Solução. $S_{51} = a_{51} + S_{50} \;\; \Rightarrow \;\; a_{51} = S_{51} - S_{50} \; = \left(3\cdot 51^2 + 51\right) - \left(3\cdot 50^2 + 50\right)$

$$= 3\cdot\left(51^2 - 50^2\right) + 1$$

$$= 3\cdot(51+50)\cdot(51-50) + 1 = 304 .$$

Resposta. (A) 304 .

4) Um número é divisível por 9, quando a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 9.

Logo, os números naturais n , $100 \le n \le 999$ que divididos por 9 deixam resto 2, são termos da sequência $(101, 110, 119, \ldots, 992)$. Vamos determinar, agora, o número de termos (n) desta sequência. Como: $a_1 = 101,\; a_n = 992$ e $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$, então

$$992 = 101 + (n-1)\cdot 9 \;\; \Rightarrow \;\; n = 100 .$$

Temos que, $S_n = \dfrac{(a_n + a_1)}{2}\cdot n$. Então $S_{100} = \dfrac{(992+101)}{2}\cdot 100 = 54650$

Resposta. (D) 54650.

5) Considerando os triângulos T_1, T_2 e T_3 abaixo,temos

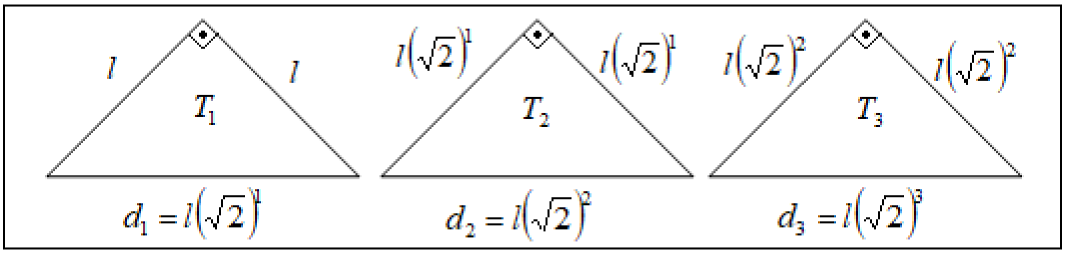

Figura 4. Triângulos retângulos isósceles

$$d_1^2 = l^2 + l^2 \qquad d_2^2 = d_1^2 + d_1^2 = (l\sqrt{2})^2 + (l\sqrt{2})^2 \qquad d_3^2 = d_2^2 + d_2^2$$

$$d_1 = l\cdot(\sqrt{2})^1 \qquad d_2 = l\cdot 2 = l\cdot(\sqrt{2})^2 \qquad d_3^2 = (l\cdot 2)^2 + (l\cdot 2)^2$$

$$d_3 = \sqrt{l^2\cdot 2^3} = l(\sqrt{2})^3$$

Isto é, $T_1 : d_1 = l\cdot(\sqrt{2})^1$, $T_2 : d_2 = l\cdot(\sqrt{2})^2$, $T_3 : d_3 = l\cdot(\sqrt{2})^3$, ... , $T_{100} : d_{100} = l\cdot(\sqrt{2})^{100}$

Como, $d_{100} = 2^{50}$ e $d_{100} = l\cdot(\sqrt{2})^{100} = l\cdot 2^{50}$, então

$$l\cdot 2^{50} = 2^{50} \quad \Rightarrow \quad l = 1$$

Resposta. (B) 1.

6) Devemos mostrar, em toda PA, que $a_n = a_m + (n-m)r$.

Da definição de PA, temos:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)r \ \ \text{(i)} \\ a_m = a_1 + (m-1)r \ \ \text{(ii)} \end{cases}.$$

Fazendo $\text{(i)} - \text{(ii)}$, obtemos: $a_n - a_m = a_1 + (n-1)r - [a_1 + (m-1)r]$

$$\Rightarrow \ a_n - a_m = (n-1)r - (m-1)r$$

$$\Rightarrow \ a_n = a_m + (n-m)r$$

7) Devemos mostrar, em toda PA, que $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot r$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ a_4 &= a_1 + 3r \\ &\dots \\ a_n &= a_1 + (n-1)r \\ \hline S_n &= na_1 + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot r$$

8) Seja uma PA de primeiro termo a_1, e razão r. Devemos mostrar que $S_{m+n} = 0$. Dados que $S_m = S_n$. Da questão (10), segue-se que:

$$S_{m+n} = (m+n)a_1 + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} \cdot r \quad \text{(i)}$$

Temos que: $S_m = S_n \;\Rightarrow\; ma_1 + \dfrac{m(m-1)}{2} \cdot r = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot r$ (ii)

Isolando a_1, por exemplo, na equação (ii),obtemos

$$a_1 = -\frac{(m+n-1)}{2} \cdot r \quad \text{(iii)}$$

e, substituindo a equação (iii) na equação (i), obtemos:

$$S_{m+n} = (m+n)\left[-\frac{(m+n-1)}{2} \cdot r\right] + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} \cdot r$$

$$\Rightarrow \; S_{m+n} = 0$$

9) Seja $r \neq 0$ a razão da PA, dada por $(a_n)_{n \geq 1}$. Devemos mostrar que:

$$a_p + a_q = a_u + a_v \;\Leftrightarrow\; p + q = u + v$$

Pela atividade (9), obtemos as seguinte equações:

$$\begin{cases} a_p = a_u + (p-u) \cdot r \;\; (i) \\ a_q = a_v + (q-v) \cdot r \;\; (ii) \end{cases}$$

Fazendo $(i) + (ii)$, resulta:

$$a_p + a_q = a_u + (p-u) \cdot r + a_v + (q-v) \cdot r \;\Leftrightarrow$$

$$(p-u) \cdot r + (q-v) \cdot r = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(p-u) + (q-v) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$p + q = u + v$$

10) Pelos dados do problema, e aplicando o termo geral da PA, obtemos o seguinte sistema linear, nas variáveis a_1 e r:

$$\begin{cases} \alpha = a_p = a_1 + (p-1) \cdot r \\ \beta = a_q = a_1 + (q-1) \cdot r \end{cases}$$

que tem solução $a_1 = \dfrac{\beta p - \alpha q + \alpha - \beta}{p-q}$ e $r = \dfrac{\alpha - \beta}{p-q}$.

Segue-se que:

$$\begin{aligned} a_{p+q} &= a_1 + (p+q-1) \cdot r \iff \\ a_{p+q} &= \frac{\beta p - \alpha q + \alpha - \beta}{p-q} + (p+q-1) \cdot \frac{\alpha - \beta}{p-q} \iff \\ a_{p+q} &= \frac{\alpha p - \beta q}{p-q} \end{aligned}$$

Portanto, $a_{p+q} = \dfrac{\alpha p - \beta q}{p-q}$.

11)

$$\begin{aligned} &\frac{10^1 - 1}{9} = \frac{9}{9} = 1 \\ &\frac{10^2 - 1}{9} = \frac{99}{9} = 11 \\ &\frac{10^3 - 1}{9} = \frac{999}{9} = 111 \\ &\ldots \\ &\frac{10^n - 1}{9} = \frac{999\ldots9}{9} = 111\ldots1 \end{aligned}$$

12) $N = 444\ldots488\ldots89 = 4 \cdot (111\ldots1000\ldots0) + 8 \cdot (111\ldots10) + 9$. Observemos que no primeiro parênteses temos n uns e n zeros, e no segundo parênteses n – 1 uns e um zero. Logo, pela atividade (14), obtemos:

$$N = 4 \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n \right) + 8 \cdot \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9} \cdot 10^1 \right) + 9 =$$

$$\frac{4 \cdot (10^n)^2 + 4 \cdot 10^n + 1}{9} =$$

$$\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$$

a) Portanto, o valor procurado é: $N=\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$

b) e $\sqrt{N}=\frac{2\cdot 10^n+1}{3}$

13)

(a) Seja, $a_i=2\cdot 3^{i-1}$. Então:

$$\Delta a_i=\Delta(2\cdot 3^{i-1})=2\cdot\Delta(3^{i-1})=2\cdot(3\cdot 3^{i-1}-1\cdot 3^{i-1})=2\cdot(2\cdot 3^{i-1})$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\Delta(2\cdot 3^{i-1})=2\cdot 3^{i-1}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta(2\cdot 3^{i-1})=\sum_{i=1}^{n}2\cdot 3^{i-1}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\Delta(3^{i-1})=\sum_{i=1}^{n}2\cdot 3^{i-1}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}2\cdot 3^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}\Delta(3^{i-1})=3^{(n+1)-1}-3^{1-1}=3^n-1$$

(b) $a_i=\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}=-\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}\right)=-\Delta\left(\frac{1}{i}\right)$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=-\sum_{i=1}^{n}\Delta\left(\frac{1}{i}\right)=-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1}\right)=\frac{n}{n+1}$$

14)

$$S_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+3^2) \cdot 3^2}{2} = 15$$

$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+4^2) \cdot 4^2}{2} = 34$$

$$S_5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{(1+5^2) \cdot 5^2}{2} = 65$$

....

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1+n^2) \cdot n^2}{2} = \frac{(1+n^2) \cdot n}{2}$$

Portanto, $S_n = \dfrac{(1+n^2) \cdot n}{2}$.

15) Devemos mostrar que a diferença $b_{k+1} - b_k$, é constante e não depende de k. Isto é:

$$b_{k+1} - b_k = (a_{k+2}^2 - a_{k+1}^2) - (a_{k+1}^2 - a_k^2) =$$

$$(a_{k+2} - a_{k+1})(a_{k+2} + a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k)(a_{k+1} + a_k) =$$

$$r(a_{k+2} + a_{k+1}) - r(a_{k+1} + a_k) = r \cdot 2r = 2r^2.$$

Portanto, $(b_k)_{k \geq 1}$ é uma PA, e sua razão é $2r^2$.

16) $b_n = a_n - \dfrac{1}{2} \Rightarrow b_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{1}{2}$. Como, $a_{n+1} = 3a_n - 1$. Então:

$$b_{n+1} = (3a_n - 1) - \frac{1}{2} = 3\left(a_n - \frac{1}{2}\right) = 3b_n.$$

(a) Portanto, $b_{n+1} = 3b_n$.

(b) Dados, $a_1 = 1$. Temos que, $b_n = a_n - \dfrac{1}{2} \Rightarrow b_1 = a_1 - \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Então, pelo item (a):

$$b_2 = 3b_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$b_3 = 3b_2 = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$b_4 = 3b_3 = 3\cdot\frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

$$b_5 = 3b_4 = 3\cdot\frac{27}{2} = \frac{81}{2}$$

Para obtermos a fórmula posicional correspondente, fazemos o produto telescópico.

Isto é, multiplicamos membro a membro as equações abaixo,

$$\begin{aligned} b_2 &= 3b_1 \\ b_3 &= 3b_2 \\ b_4 &= 3b_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= 3b_{n-1} \\ \hline b_n &= b_1\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3,\ \text{com}\, b_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Após as devidas simplificações, encontramos: $b_n = \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$.

(c) Dados, $a_{n+1} = 3a_n - 1$ (para evitarmos redundância, resolveremos: $x_{n+1} = 3x_n - 1$). Para encontrarmos uma fórmula posicional para x_n, devemos observar que temos uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea. Invocando o teorema 2.1, teremos: $y_{n+1} = 3y_n$, que pelo item (b), tem solução geral $y_n = 3^{n-1}$, tomando $y_1 = 1$. Obtemos uma solução particular $a_n = 3^{n-1}$. Logo, a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n\ (i)$, transforma a recorrência $x_{n+1} = 3x_n - 1$, em:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{-1}{3^n}$$

Que tem solução geral, $y_n = \frac{1}{2}\left(1 + 3^{-n+1}\right)\ (ii)$. Assim, substituindo (ii) em (i), obtemos:

$$x_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}.$$

Portanto, a fórmula posicional é dada por: $a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}$.

Progressões geométricas (PG)

Resolução:

17) Dados $b_n = \log a_n$, onde (a_n) é uma PG, devemos mostrar que a diferença $b_{n+1} - b_n$ é constante. Isto é:

$b_{n+1} - b_n = \log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log q =$ constante, onde q é a razão da PG (a_n).

18) Dados $b_n = e^{a_n}$, onde (a_n) é uma PA, devemos mostrar que a razão $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ é constante. Isto é:

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1}-a_n} = e^r$ = constante, onde r é a razão da PA (a_n).

19) Sejam M_0 a massa inicial presente, e M a massa após um instante t. Então,

$$M = M_0 \cdot q^t \quad (i) \text{, onde } q \text{ é uma constante real.}$$

Após 1600 anos temos, $M = \frac{1}{2}M_0 \quad (ii)$. Isto é: após 1600 anos a massa final presente é a metade da massa inicial. Observemos que: após 1/3 da massa inicial se desintegrar, sobram 2/3 da massa inicial. Logo, $M = \frac{2}{3}M_0 \quad (iii)$. Assim, substituindo (ii) em (i), para $t = 1600$, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot M_0 = M_0 \cdot q^{1600} \Rightarrow$$

Substituindo (iv) e (iii) em (i), obtemos:

$$\frac{2}{3}\cdot M_0 = M_0\left(2^{-1/1600}\right)^t \quad \Rightarrow \quad t = -1600\cdot\frac{\log(2/3)}{\log 2}$$

O que nos fornece: $t = 936$ anos, aproximadamente.

20)

$$a = \frac{10^n - 1}{9} \text{ e } b = 10^n + 5$$

$$N = ab + 1 = \frac{10^n - 1}{9}\cdot(10^n + 5) + 1$$

$$N = \frac{(10^n)^2 + 4\cdot 10^n + 4}{9}$$

$$N = \frac{(10^n + 2)^2}{3^2}$$

Portanto, $\sqrt{N} = \dfrac{10^n + 2}{3}$

3.2 Encontrando Recorrências em Polígonos Convexos

1) A soma dos ângulos internos (S_n) de um polígono de n lados, é dada pela recorrência

$$S_{n+1} = S_n + 180^{\circ},\ n \geq 3. \text{ Com } S_3 = 180^{\circ}.$$

E o seu termo geral (ou uma fórmula fechada), é dado por: $S_n = (n-2)\cdot 180^0$.

Prova. Pela soma telescópica, temos:

$$\begin{aligned}
&S_4 = S_3 + 180^{\circ}\\
&S_5 = S_4 + 180^{\circ}\\
&S_6 = S_5 + 180^{\circ}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_n = S_{n-1} + 180^{\circ}\\
\hline
&S_n = S_3 + (n-4+1)180^{\circ} = 180^{\circ} + (n-3)180^{\circ}\\
&\Rightarrow\ S_n = (n-2)180^{\circ}
\end{aligned}$$

Prova por induçãofinita :

(i) $n = 3;$ $P(3) \Rightarrow S_3 = (3-2)180° = 180°$, a proposição é verdadeira;

(ii) Supondo que, $P(n);$ $S_n = (n-2)180°$ seja verdadeira para n natural;

(iii) $P(n+1);$ $S_{n+1} = S_n + 180°$

$$\Rightarrow\ S_{n+1} = (n-2)180° + 180°$$

$$\Rightarrow\ S_{n+1} = (n-1)180°$$

Como $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Portanto, a proposição é verdadeira para todo $n \geq 3$ natural.

2) O número de diagonais (D_n) de um polígono convexo é dado pela recorrência

$$D_{n+1} = D_n + (n-1),\ n \geq 3. \text{ Com } D_3 = 0.$$

E o seu termo geral (ou uma fórmula fechada), é dado por: $D_n = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$, $n \geq 3$.

Prova. Pela soma telescópica, temos:

$$\begin{aligned}
&D_4 = D_3 + 2\\
&D_5 = D_4 + 3\\
&D_6 = D_5 + 4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&D_n = D_{n-1} + (n-2)\\
\hline
&D_n = D_3 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) =\\
&\quad = 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2) = \frac{(2+n-2)(n-2-2+1)}{2}\\
&\quad \Rightarrow D_n = \frac{n(n-3)}{2}
\end{aligned}$$

Prova por indução finita:

(i) $n = 3$; $P(3) \Rightarrow D_3 = \dfrac{3(3-3)}{2} = 0$, a proposição é verdadeira;

(ii) supondo que, $P(n) \Rightarrow D_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$, seja verdadeira para $n \geq 3$, natural;

(iii) $P(n+1) \Rightarrow D_{n+1} = D_n + (n-1)$

$$\Rightarrow D_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2} + (n-1)$$

$$\Rightarrow D_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

Como, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Então a proposição é verdadeira para todo $n \geq 3$ natural.

3. O lado de um quadrado Q_1 mede L. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um novo quadrado Q_2. Unindo-se os pontos médios do novo quadrado obtém-se outro quadrado Q_3, e assim sucessivamente. A área (A) do $n-$ésimo quadrado, é dada pela recorrência

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot A_n,\ n \geq 1. \text{ Com } A_1 = L^2.$$

E o seu termo geral (ou uma fórmula fechada), é dado por: $A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot L^2$.

Prova. Pelo produto telescópico, temos:

$$A_2 = \frac{1}{2} A_1$$
$$A_3 = \frac{1}{2} A_2$$
$$A_4 = \frac{1}{2} A_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_n = \frac{1}{2} A_{n-1}$$

$$A_n = A_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = L^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\Rightarrow A_n = L^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Prova por indução finita:

(i) $n = 1$; $P(1) \Rightarrow A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} \cdot L^2 = L^2$, a proposição é verdadeira;

(ii) supondo que, $P(n) \Rightarrow A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot L^2$, seja verdadeira para n natural;

(iii) $P(n+1) \Rightarrow A_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right) A_n$

$$\Rightarrow A_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot L^2$$
$$\Rightarrow A_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot L^2$$

Como, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Então a proposição é verdadeira para todo $n \geq 1$ natural.

4. O número de diagonais internas (D_n) de um prisma cuja base é um polígono convexo de n lados, é dado pela recorrência

$$D_{n+1} = D_n + 2(n-1),\ n \geq 3. \text{ Com } D_3 = 0.$$

E o seu termo geral (ou uma fórmula fechada), é dado por: $D_n = n(n-3)$, $n \geq 3$.

$$D_4 = D_3 + 2 \cdot 2$$
$$D_5 = D_4 + 2 \cdot 3$$
$$D_6 = D_5 + 2 \cdot 4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_n = D_{n-1} + 2 \cdot (n-2)$$

$$D_n = D_3 + 2 \cdot (2 + 3 + 4 + \ldots + (n-2))$$
$$\Rightarrow D_n = 2 \cdot (2 + n - 2)\frac{(n-3)}{2}$$
$$\Rightarrow D_n = n(n-3)$$

Prova por indução finita:

(i) $n = 3$; $P(3) \Rightarrow D_3 = 3(3-3) = 0$, a proposição é verdadeira;

(ii) supondo que, $P(n) \Rightarrow D_n = n(n-3)$, seja verdadeira para $n \geq 3$, natural;

(iii) $P(n+1) \Rightarrow D_{n+1} = D_n + 2(n-1)$
$$\Rightarrow D_{n+1} = n(n-3) + 2(n-1)$$
$$\Rightarrow D_{n+1} = (n+1)(n-2)$$

Como, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Então a proposição é verdadeira para todo $n \geq 3$ natural.

3.3 **Sequência de Fibonacci** (HEFEZ, 2016)

Trata-se do seguinte problema proposto e resolvido por Leonardo de Pisa em seu livro, *Liber Abacci* , de 1202.

Um casal de coelhos recém nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelho produz outro casal e que um casal começa a procriar depois de dois meses após o seu nascimento.

Leonardo apresenta a seguinte solução.

mês	números de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 1. Solução de Leonardo

Portanto, o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais de coelhos do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Denotando o número de casais de coelhos existentes no n-ésimo mês por u_n, teremos uma relação do tipo

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ u_1 = u_2 = 1$$

Tal relação é definida como: uma recorrência de segunda ordem linear homogênea, com condições iniciais $u_1 = u_2 = 1$, logo a recorrência tem solução única. Veremos, a seguir, como encontrar uma solução que determina o n-ésimo termo para essa recorrência, e assim encontrarmos a sequência numérica F_n de Fibonacci. Isto é:

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \Leftrightarrow u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0$, temos o polinômio característico $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ de raízes reais, $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como sua solução geral é dada por :

$$u_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n.$$

Então,

$$u_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

Logo, fazendo por simplicidade $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$, obtemos:

$$\begin{cases} u_0 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \\ u_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Portanto, o n-ésimo termo F_n da sequência de Fibonacci é dado por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Daí, finalmente, podemos escrever:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13,$$
$$F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55, \quad F_{11} = 89, \quad F_{12} = 144, \ldots$$

Prova por indução finita:

(i) $n=1, n=2 \Rightarrow F_1 = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = 1$ e $F_2 = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = 1;$

(ii) supondo que, $F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ e $F_{n+1} = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$,

sejam verdadeira s para $n \geq 1$, inteiro;

(iii) então, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} =$

$$= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

Como, $(F_{n+1} + F_n) \Rightarrow F_{n+2}$. Então a proposição é válida para todo $n \geq 1$, inteiro.

Podemos fazer uma analogia da sequência de Fibonacci com uma espiral logarítimca. Ver figura 5.

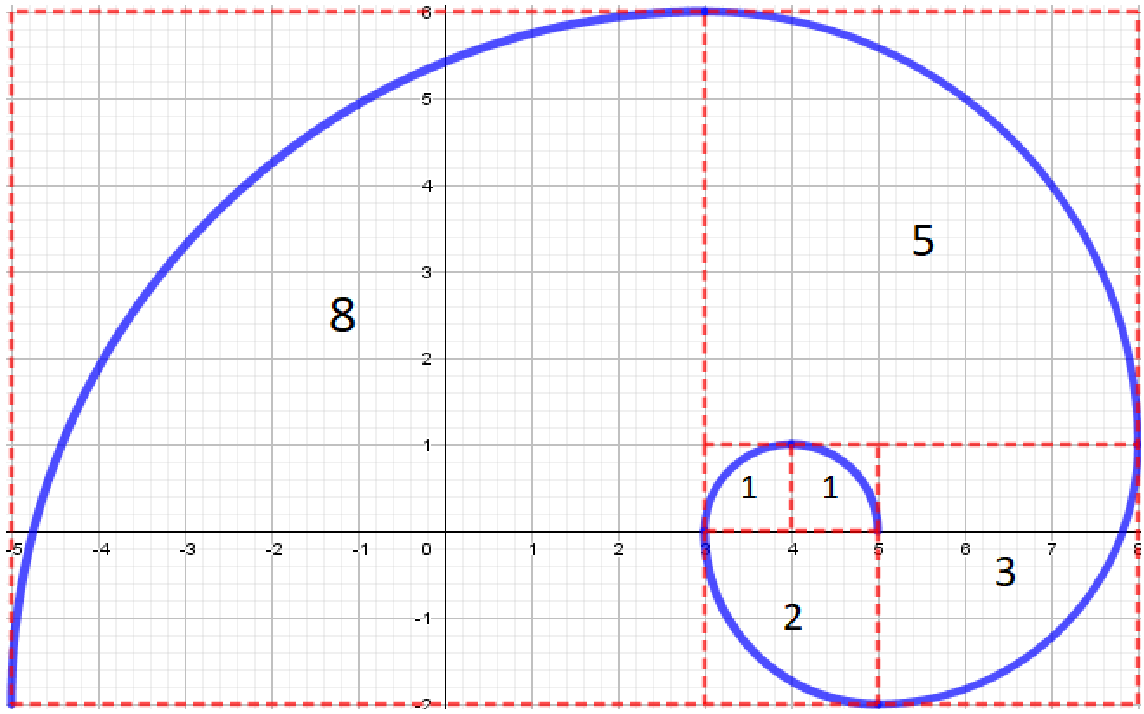

Figura 5. Espiral logarítmica

Curiosidade. Essa espiral, segue um padrão encontrado com muita freqüência na natureza, por exemplo no crescimento de um embrião ou de uma planta, na forma de: uma árvore,um furacão, galáxias, etc...

3.4 Pizza de Steiner (MORGADO, 2015)

Neste problema, devemos encontrar o número máximo de regiões em que n retas pode dividir o plano. Como solução, observemos inicialmente que: para $n=0$, teremos 1 (um) plano, e para $n=1$, teremos 2 (dois) planos. Escrevendo o número de planos por x_n, teremos para $n=0$ e $n=1$, respectivamente, $x_0=1$ e $x_1=2$. Observemos agora, a figura 6, onde as n retas dividem os planos e os asteriscos ($*$) representam o número de planos .

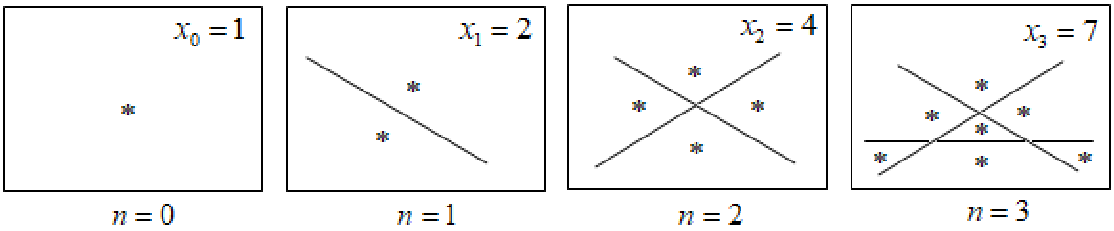

Figura 6. Divisão do plano por retas

Logo, podemos afirmar que: o número máximo de regiões é determinado quando, para cada n, a reta $n+1$ intercepta as n já existentes. Nesse caso, a nova reta subdivide $n+1$ regiões, criando assim $n+1$ novas regiões. Portanto, o número máximo de regiões x_n determinado por n retas, satisfaz

$$x_{n+1}=x_n+(n+1)$$

para $n=0,1,2,3,\dots$, com $x_0=1$. Encontremos, agora, uma solução geral para essa recorrência, com valor inicial $x_0=1$. Pela soma telescópica, temos:

$$\begin{aligned}
&x_1=x_0+1\\
&x_2=x_1+2\\
&x_3=x_2+3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_n=x_{n-1}+n\\
&\overline{}\\
&x_n=x_0+(1+2+3+\dots+n),\ (x_0=1)\\
&\Rightarrow\ x_n=1+\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Assim, para $n=0,1,2,3,\dots$, (n retas) teremos, respectivamente:

$$x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=7,\dots\text{(planos)}.$$

Prova por indução finita:

(i) $n=0$; $P(0) \Rightarrow x_0 = 1 + \frac{0(0+1)}{2} = 1$, a proposição é verdadeira;

(ii) supondo que, $P(n)$, $x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$, seja verdadeira para $n \geq 0$, inteiro;

(iii) $P(n+1), x_{n+1} = x_n + (n+1) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Como $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Então a proposição é válida para todo inteiro $n \geq 0$.

3.5 Torre de Hanói (HEFEZ, 2016)

A torre de Hanói é um jogo que consiste de n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes estão enfiados os discos de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor (veja figura 7 , para $n=3$ discos)

Figura 7. Torre de Hanói

O jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, seja observado a regra de que nenhum disco esteja acima de um de raio menor. Devemos observar, inicialmente, que o jogo tem solução, e em seguida encontraremos uma fórmula para determinar o número mínimo j_n de movimentos para resolver o problema.

Pelo princípio da indução, temos que o número mínimo de movimentos para n discos é: $j_{n+1} = 2j_n + 1$. Assim, temos uma progressão aritmético-geométrica j_n cujo termo geral é:

$$j_n = 2^n - 1.$$

Isto é: para $n=3$ discos, teremos $j_3 = 2^3 - 1 = 7$ movimentos, e para $n=4$ discos, teremos $j_4 = 2^4 - 1 = 15$ movimentos ..., assim sucessivamente.

Prova. Seja $J_{n+1} = 2j_n + 1$ uma recorrência linear de primeira ordem não-homogênea de condição inicial $j_1 = 1$. Fazendo $y_{n+1} = 2y_n$, e resolvendo esta equação homogênea, encontramos $y_n = 2^{n-1}y_1$, tomando, por exemplo, $y_1 = 1$. Teremos $y_n = 2^{n-1}$. Isto é

$a_n = 2^{n-1}$ é uma solução da equação homogênea. Fazendo a substituição de $J_n = a_n y_n$ e $J_{n+1} = a_{n+1} y_{n+1}$ na equação não-homogênea, encontramos

$$2^n \cdot y_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot y_n + 1.$$

Resolvendo esta última equação, obtemos $y_n = 2 - 2^{-n+1}$. Como a solução geral é dada por, $J_n = a_n y_n$, temos que $J_n = 2^{n-1} \cdot (2 - 2^{-n+1}) = 2^n - 1$. Portanto: $j_n = 2^n - 1.$

Prova por indução finita:

(i) $n = 1,\ P(1) \Rightarrow\ j_1 = 2^1 - 1 = 1,$ a proposição é verdadeira;

(ii) supondo que, $P(n),\ j_n = 2^n - 1,$ seja verdadeira para $n \geq 1;$

(iii) $P(n+1),\ j_{n+1} = 2 j_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$

Como, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Então, a proposição é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

3.6 Desintegração de Elementos Químicos

Podemos observar, através de análise química, que substâncias radioativas decaem exponencialmente. É chamado de meia-vida, o tempo que metade da massa inicialmente presente leva para se desintegrar, em uma unidade de tempo.

O mercúrio metálico presente na lâmpada fluorescente na forma gasosa, embora não seja radioativo, é uma substância tóxica aos seres humanos e ao meio ambiente.

Segundo ALMEIDA et al. (2012) apud OLIVEIRA (2014), podemos determinar a quantidade Q_n presente a cada período de dois meses, considerando Q_0 como sendo a quantidade inicialmente presente de mercúrio no ambiente de meia-vida, aproximadamente, de dois meses. Logo, dado Q_0, a quantidade inicial e n um número par, podemos por recorrência escrever:

$$Q_2 = \frac{1}{2} Q_0$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} Q_2$$

$$Q_6 = \frac{1}{2} Q_4$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_n = \frac{1}{2} Q_{n-2}$$

$$Q_2 \cdot Q_4 \cdot \ldots \cdot Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} Q_0 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{n-2}$$

Após as devidas simplificações, obtemos:

$$Q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot Q_0$$

Onde, Q_n é quantidade de mercúrio restante, no instante n.

Prova por indução finita:

(i) $n = 0,\ P(0) \Rightarrow Q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot Q_0$, a proposição é verdadeira;

(ii) supondo que, $P(n), Q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot Q_0$, seja verdadeira para $n \geq 0$, inteiro par;

(iii) $P(n+2),\ Q_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot Q_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot Q_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}} \cdot Q_0$

Como, $P(n) \Rightarrow P(n+2)$. Então a proposição é verdadeira para todo inteiro par $n \geq 0$.

3.7 Eliminação de Uma Droga do Organismo

Segundo HALLET (2004), apud OLIVEIRA (2014), quando se administra uma medicação em um paciente, o remédio entra no fluxo sanguíneo. Quando ele passa pelo fígado e pelos rins, é metabolizado e eliminado a uma taxa que depende da droga em questão. Para o antibiótico ampicilina, 40% da droga são eliminados por hora. Uma dose típica de ampicilina é de 250 mg. Suponha que Q_n, onde Q_n é a quantidade de ampicilina, em mg, no fluxo sanguíneo de n horas depois do remédio ter sido dado.

Em $n = 0$ temos $Q_0 = 250$. Como, em cada hora, a quantidade restante é de 60% da quantidade anterior, temos por recorrência, que:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0{,}6 \cdot Q_0 \\ Q_2 &= 0{,}6 \cdot Q_1 \\ Q_3 &= 0{,}6 \cdot Q_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n &= 0{,}6 \cdot Q_{n-1} \end{aligned}$$

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot \ldots \cdot 0{,}6 \cdot Q_0 \cdot Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}$$

Feitas as devidas simplificações, obtemos:

$$Q_n = Q_0 \cdot (0{,}6)^n \Rightarrow Q_n = 250 \cdot (0{,}6)^n$$

a solução da recorrência linear de primeira ordem homogênea. Exibiremos a seguir uma tabela (tabela 2)e um gráfico (figura 8) que relacionam a quantidade de droga no organismo em função do tempo.

Tempo (horas)	Quantidade (mg)
0	250
1	150
2	90
3	54
4	32,4
5	19,4

Tabela 2. Quantidade de droga em função do tempo

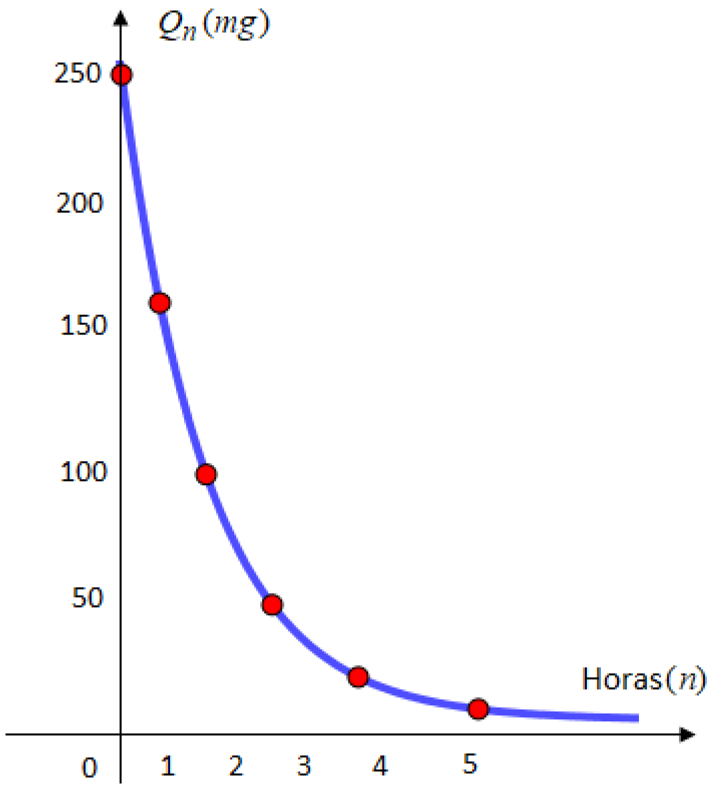

Figura 8. Gráfico: quantidade de droga em função do tempo

Observemos que o Gráfico de $Q_n = 250 \cdot (0,6)^n$, é de uma função exponencial de decaimento.

Prova por indução finita:

$(i)\ n = 0,\ P(0) \Rightarrow Q_0 = 250 \cdot (0,6)^0 = 250,$ a proposição é verdadeira ;

(ii) supondo que, $P(n),\ Q_n = 250 \cdot (0,6)^n$, seja verdadeira para $n \geq 0$, inteiro;

$(iii)\ P(n+1),\ Q_{n+1} = 0,6 \cdot Q_n = 0,6 \cdot 250 \cdot (0,6)^n = 250 \cdot (0,6)^{n+1}$

Como, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Então a proposição é verdadeira para todo inteiro $n \geq 0$.

3.8 Colônia de Bactérias

Considere uma colônia de bactérias que se reproduz assexuadamente, dividindo-se em duas bactérias após a duplicação do seu material genético. Esta divisão se produz a cada hora. Se a população inicial é de 1000 bactérias, qual será o número de bactérias que terá a colônia quando tenha passado 24 horas?

Solução. Seja P_0 a população inicial e P_n a população na hora n. Então uma expressão geral que descreve este modelo de crescimento é:

$$P_{n+1} = 2P_n$$

Aplicando esse modelo recursivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} P_1 &= 2P_0 \\ P_2 &= 2P_1 \\ P_3 &= 2P_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n &= 2P_{n-1} \\ \hline P_n &= 2^n P_0 \end{aligned}$$

Assim, a equação $P_n = 2^n P_0$ nos dá a população de bactérias num período de n horas.

No nosso problema, para n igual 24 horas, teremos:

$P_{24} = 2^{24} \cdot 1000 = 16.777.216.000$ bactérias na colônia.

Prova por indução finita:

$(i)\ n = 0,\ P(0) \Rightarrow P_0 = 1000 \cdot 2^0 = 1000,$ a proposição é verdadeira ;

(ii) supondo que, $P(n),\ P_n = 1000 \cdot 2^n$, seja verdadeira para $n \geq 0$, inteiro;

$(iii)\ P(n+1),\ P_{n+1} = 2 \cdot P_n = 2 \cdot 1000 \cdot 2^n = 1000 \cdot 2^{n+1}$

Como, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Então a proposição é verdadeira para todo inteiro $n \geq 0$.

4. Considerações Finais

Com o objetivo de apresentar uma proposta de estudo das recorrências lineares, principalmente as de primeira e de segunda ordem, este trabalho discorreu os vários tipos de sequências recursivas, com exemplos de aplicações em diversas áreas da matemática no ensino médio.

Tradicionalmente os livros didáticos, para esse nível, apresentam as progressões aritméticas e as progressões geométricas, como únicas sequências recorrentes. Porém, os métodos recursivos podem ser empregados em vários campos como Física, Química, Biologia, Geografia e outras áreas do conhecimento, pois, estas e outras aplicações podem despertar no aluno o interesse à pesquisa, o que irá contribuir positivamente no seu pensamento cognitivo.

Com numerosos exemplos, atividades propostas com soluções e algumas aplicações na busca da interdisciplinariedade e citações bibliográfica, este trabalho pretende contribuir de alguma forma com os professores de matemática do ensino médio , cujo papel é mais do que orientador e facilitador de aprendizagem. Cabe ao professor desenvolver a autonomia do aluno, instigando-o a refletir, investigar e descobrir.

Encerramos esse trabalho ressaltando a importância vital do PROFMAT na qualificação de alto nível de professores no ensino básico em todo Brasil, oportunizando uma possível concretização dos objetivos desta obra.

Referências

[1] AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática.** 3ª edição, SBM, Rio de Janeiro 2013.

[2] BASSANEZE, Rodney Carlos. Ensino-aprendiagem com **Modelagem Matemática.** 4ª edição, 1ª reimpressão. São Paulo 2018.

[3] CARNEIRO, J. P. Moreira, C.G. **Sequências aritmético-geométricas. EUREKA!**, nº 14, 2007.

[4] HEFEZ, Abramo. **ARITMÉTICA.** Coleção PROFMAT, 2ª Ed. Rio de Janeiro 2016.

[5] IEZZI, Gelson. HAZZAN,Samuel. **Sequências Matrizes Determinantes.** Volume 4. 3ª edição. Atual Editora, São Paulo, 1977.

[6] LIPSCHUTZ, Seymourl. LIPSON, Marc Lares. Teorias e Problemas de **MATEMÁTICA DISCRETA.** Trad. Heloisa Bauzer Medeiros – 2ª Ed. – Porto Alegre: Bookman, 2004 (Coleção Schaum).

[7] MOREIRA, Carlos Gustavo. MOTTA, Edmilson. TEGAN,Eduardo. AMÂNCIO, Luiz. SALDANHA, Nicolau. RODRIGUES, Paulo. **Olimpíadas Brasileira de Matemática.** 9ª a I6ª – Problemas e Soluções. Coleção Olimpíadas de Matemática. 2ª edição. Rio de Janeiro 2009.

[8] MORGARDO, Augusto Cesar Pinto. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto Carvalho. **Matemática discreta.** Coleção PROFMAT, 2ª Ed. Rio de Janeiro:SBM 2015.

[9] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar. *Números Reais.*** Volume 1. 2ª edição 2ª impressão. SBM Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro 2014.

[10] NOBILIONI, Giuseppe. KRIKORIAN, Jorge. GRESPAN, Mauro. **MATEMÁTICA.** Coleção Objetivo. Sistemas de Métodos de Aprendizagem. CERED, Centro de Recursos Educacionais, 2014.

[11] OLIVEIRA, Carlos, Alexandre, Santana. **Recorrência Matemática Aplicada à Resolução de Problemas no Ensino Médio.** PROFMAT-UNIFAP, 2014.