



Universidade Estadual Paulista  
"Julho de Mesquita Filho"  
Câmpus de Bauru

Daniel Cassimiro Fernandes

**Otimização matemática com dados incertos: Um olhar para o  
Ensino Médio.**

Bauru  
2020

Daniel Cassimiro Fernandes

**Otimização matemática com dados incertos: Um olhar para o Ensino Médio.**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sônia Cristina Poltroniere Silva

Bauru  
2020

F363o

Fernandes, Daniel Cassimiro

Otimização matemática com dados incertos : Um olhar para o Ensino Médio / Daniel Cassimiro Fernandes. -- São José do Rio Preto, 2020

100 p. : il., tabs. + 1 CD-ROM

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Sônia Cristina Poltronieri Silva

1. Otimização. 2. Incerteza. 3. Ensino. 4. Modelagem Matemática. 5. Resolução de Problemas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Daniel Cassimiro Fernandes

## Otimização matemática com dados incertos: Um olhar para o Ensino Médio.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Bauru.

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sônia Cristina Poltroniere Silva - Orientadora  
FC - UNESP Bauru - São Paulo

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini  
FCA - UNICAMP Limeira - São Paulo

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza  
FC - UNESP - Bauru - São Paulo

BAURU, 25 de Novembro de 2020

# Agradecimentos

Agradeço por ter encontrado em meu caminho tantas pessoas maravilhosas que me ajudaram a me tornar quem sou hoje.

À minha esposa, que sem dúvida é a pessoa mais importante de minha vida, que me incentivou todo o tempo, nunca esmorecendo e me ajudando a superar todos os obstáculos.

À minha mãe, meus pai, minha irmã e minha família pelo apoio incondicional, sempre estando ao meu lado em quaisquer situações.

À todos os professores do Departamento de Computação e do Departamento de Matemática, portodo o apoio e, sem os quais, não seria possível quase nenhuma de minhas realizações.

À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sônia Cristina Poltroniere Silva, por toda sua dedicação, paciência e compreensão.

# Resumo

Na área de ciências exatas, a Resolução de Problemas a partir da Modelagem Matemática é uma ferramenta eficaz na tomada de decisão. Em particular, este trabalho considera a abordagem de situações-problema com dados incertos, a partir de técnicas de Otimização sob Incerteza. O objetivo é ressaltar a relevância do ensino de estatística, probabilidades, álgebra e geometria na Educação Básica. Para tanto, é realizada uma revisão de conceitos de Otimização Linear e Probabilidades, a fim de embasar o conhecimento para que professores da Educação Básica possam elaborar uma sequência didática para aplicações em sala de aula e/ou atividades extracurriculares. São propostas algumas situações-problema, com o intuito de mobilizar e motivar professores e alunos, visando provocar uma reflexão crítica da realidade por meio da utilização de conceitos matemáticos abordados no Ensino Médio.

Palavras-Chave: Otimização, Ensino, Incerteza, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas.

# Abstract

In the exact sciences area, Problem Solving based on Mathematical Modeling is an effective tool in decision-making. In particular, this work considers the approach of problem situations with uncertain data, based on Optimization techniques under Uncertainties. The objective is to highlight the relevance of teaching statistics, probabilities, algebra and geometry in Basic Education. For this, a review of concepts of Linear Optimization and Probabilities is carried out, in order to support the knowledge so that Basic Education teachers can develop a didactic sequence for classroom applications and/or extracurricular activities. Some problem situations are proposed, in order to mobilize and motivate teachers and students, aiming to cause a critical reflection of reality through the use of mathematical concepts addressed in high school.

Keywords: Optimization, Teaching, Uncertainty, Mathematical Modeling, Problem Solving.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelagem Matemática e Otimização</b>	<b>6</b>
2.1	Pontos extremos de uma função . . . . .	8
2.2	Exemplo de um problema de otimização . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Otimização Linear</b>	<b>13</b>
3.1	Generalização de um problema de Otimização Linear . . . . .	17
3.2	Otimização Linear no Ensino Médio . . . . .	22
3.3	Modelagem de problemas de otimização . . . . .	23
3.4	Soluções Gráficas . . . . .	25
3.4.1	Semiplanos . . . . .	27
3.4.2	Interseção de Semiplanos . . . . .	29
3.4.3	Interseção de semiplanos no plano cartesiano . . . . .	30
3.4.4	Determinação de máximos ou mínimos . . . . .	31
3.5	Otimização Linear no contexto do Ensino Médio . . . . .	32
3.5.1	Resolução de problemas sobre Otimização Linear . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Incerteza</b>	<b>38</b>
4.1	Probabilidades . . . . .	39
4.1.1	Probabilidade da União de Eventos . . . . .	41
4.1.2	Probabilidade Complementar . . . . .	42
4.1.3	Probabilidade Condicional . . . . .	43
4.1.4	Probabilidade da Interseção de Eventos . . . . .	43
4.1.5	Definição de Probabilidade . . . . .	44
4.1.6	Definição Subjetiva de Probabilidade . . . . .	45
4.1.7	Definição Frequentalista ou Empírica de Probabilidade . . . . .	45
4.1.8	Lei dos Grandes Números . . . . .	46
4.1.9	Definição Clássica de Probabilidade . . . . .	48
4.1.10	Desenvolvimento de problemas utilizando a Probabilidade Clássica . . . . .	53

---

<b>5</b>	<b>Otimização sob Incerteza</b>	<b>61</b>
5.1	Otimização Linear com coeficientes aleatórios . . . . .	61
5.2	Problemas com Demanda Incerta . . . . .	72
5.2.1	Valor Esperado . . . . .	73
5.2.2	Caso Discreto . . . . .	74
5.2.3	Condição de Otimalidade para o caso discreto . . . . .	74
5.2.4	Caso Contínuo . . . . .	78
5.2.5	Condição de Otimalidade para o caso contínuo . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Otimização sob incerteza no contexto do Ensino Médio</b>	<b>83</b>
6.0.1	Problema 20: Origem do Equipamento . . . . .	83
6.0.2	Problema 21: Análise de proposta . . . . .	84
6.0.3	Problema 22: Otimização Linear com dados incertos . . . . .	87
6.0.4	Problema 23: Problemas com demanda desconhecida e distribuição de probabilidade conhecida: <i>Promoter</i> . . . . .	89
6.0.5	Problema 24: Problema do Jornaleiro . . . . .	92
6.0.6	Problema 25: Overbooking . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>95</b>

# Lista de Figuras

2.1	Ponto de máximo global e valor máximo de $f$ no seu domínio $D$ . . . . .	8
2.2	Ponto de mínimo global e valor mínimo de $f$ no seu domínio $D$ . . . . .	9
2.3	Gráfico da função $f(x) = 2, 4 \cdot x^2 + \frac{4.800}{x}$ . . . . .	11
3.1	Curvas de nível da função $z = 2x - y$ . . . . .	14
3.2	Região de viabilidade do problema de otimização da produção de brinquedos simplificado. . . . .	16
3.3	Região de viabilidade, curvas de nível e vetor gradiente. . . . .	17
3.4	Região de Viabilidade do problema 3 . . . . .	24
3.5	Função Lucro $L(x) = -x^2 + 80x - 700$ . . . . .	26
3.6	Semiplano definido por $x + y > 3$ . . . . .	29
3.7	Lugar geométrico de $x + y < 3$ e $x - y > -3$ . . . . .	30
3.8	Determinação das retas $\alpha : 7x + 3y = 21$ e $\beta : x + y = 5$ . . . . .	31
3.9	Lugar Geométrico pertencente ao primeiro quadrante e determinado pelas inequações $5x + 2y \leq 20$ e $\beta : x + y \leq 7$ pintado em marrom. . . . .	32
3.10	Máximo valor da função objetivo . . . . .	33
3.11	Região Viável do Problema 1 - Otimização Linear para o Ensino Médio . . . . .	35
3.12	Região Viável do Problema 2 - Otimização Linear para o Ensino Médio . . . . .	36
4.1	Simulação: Proporção de resultados "cara" ao final de 100.550 lançamentos . . . . .	50
4.2	Problema 10: Ralo de Pia . . . . .	53
5.1	Otimização do Problema da Mistura . . . . .	65
5.2	Conjunto de probabilidades $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ . . . . .	66
5.3	Otimização do caso Otimista . . . . .	69
6.1	Expectativas de Custo Médio - Problema 23 . . . . .	90
6.2	Distribuição de Probabilidade - Problema 23 . . . . .	92
6.3	Função densidade acumulada Normal para $\mu = 7$ e $\sigma = 3$ . . . . .	94

# Capítulo 1

## Introdução

Com o crescimento das empresas, do comércio, das entidades profissionais públicas e particulares, a quantidade e a complexidade das operações envolvidas sofreram um aumento considerável. Desse modo, a administração dos recursos e do processo de tomada de decisão enfrentam desafios complexos, que exigem que os gestores tomem a melhor decisão possível, tendo como base, em várias situações, apenas a intuição e a experiência. Neste contexto, cada vez mais, torna-se necessária a aplicação de abordagens científicas, com a finalidade de prever aspectos determinantes para a empresa, de forma a desenvolver métodos para se comparar estratégias ou decisões, definindo os objetivos da empresa, considerando as limitações impostas e avaliando as alternativas disponíveis para se realizar a decisão mais eficaz.

Já na revolução industrial, as organizações apresentaram a alta taxa de crescimento de suas atividades, transformando processos de produção quase artesanais em processos de produção industrial, motivadas, principalmente, pelo desenvolvimento das máquinas a vapor, surgindo a necessidade do desenvolvimento de técnicas sistemáticas para o enfrentamento de novas questões, devido ao aumento da problemática dos empreendimentos.

Durante a Segunda Guerra Mundial, devido à demanda de grandes volumes de suprimentos, envolvendo questões logísticas, táticas e estratégicas de gerenciamento de insumos e de numerosas tropas, foram empregadas metodologias avançadas para o enfrentamento de problemas de grande capacidade operacional. Foram contratados profissionais matemáticos com o propósito de fornecerem soluções mais eficientes e que atendessem às novas demandas de gerenciamento surgidas na conjuntura de guerra. Nesse contexto, surgiu o termo *Pesquisa Operacional*, atribuído a A. P. Rowe, o superintendente da *Estação de Pesquisa Bawdsey*, em 1938, devido a estudos de técnicas de operações utilizando radar na eficiência da interceptação de aviões inimigos. O matemático George Dantzig formalizou os métodos de resolução de problemas dessa natureza e foi um dos coordenadores do grupo de pesquisa *Scientific Computation of Optimal Programs* (SCOOP) do Pentágono, com a finalidade de dar apoio decisório para a força aérea americana após o fim da Segunda Guerra Mundial, baseando-se em trabalhos anteriores sobre alocação

ótima de recursos do matemático russo Leonid Kantorovich, ganhador do prêmio Nobel de economia de 1975, por essas contribuições (Arenales et al. (2015)). Com a necessidade de readaptação do parque industrial dos países desenvolvidos em virtude das demandas de crescimento e reconstrução dos países atingidos, além da necessidade de escoamento da produção americana, o aprimoramento das técnicas de Pesquisa Operacional aumentou a percepção da importância desse tipo de gerenciamento estratégico (Luenberger (2010)).

A *Otimização Matemática*, uma das áreas da *Pesquisa Operacional*, engloba a modelagem de problemas complexos, que tratam do controle decisório de recursos escassos e em grandes volumes, de forma sistemática, além do desenvolvimento e aplicação de técnicas computacionais na resolução desses problemas. Dependendo do problema a ser considerado, a abordagem consiste em otimização linear ou não linear, com variáveis reais ou inteiras. Uma outra característica a ser considerada está na natureza dos dados, dividindo os problemas em determinísticos ou probabilísticos. Como exemplo de aplicação dessa teoria, verifica-se que grande parte das indústrias de manufatura produzem diferentes tipos de produtos, em diferentes máquinas, considerando uma demanda a ser atendida em diferentes períodos de um horizonte de planejamento. O planejamento e programação da produção pode ser modelado como um problema de otimização, visando, por exemplo, a minimização de custos e de atrasos na entrega e o controle de estoque. Outras aplicações podem ser encontradas em diferentes ramos: problemas de logística, transportes, telecomunicações, construção civil, computação e saúde.

Por outro lado, devido ao caráter contextualizador da Otimização, a utilização desse ramo da Matemática Aplicada ao Ensino pode propiciar, com as devidas ressalvas e adaptações, um impacto interessante no desenvolvimento cognitivo do estudante, contribuindo com o papel mobilizador e motivador da Educação, podendo-se utilizar as metodologias educacionais de *Modelagem Matemática* e de *Resolução de Problemas*.

Conjectura-se neste trabalho que a Resolução de Problemas de ordem prática seja a força motriz do desenvolvimento de técnicas matemáticas na história da humanidade, mobilizando e sendo capaz de motivar os estudantes. Lopes (2008) ressalta que a resolução de problemas não significa a mera aplicação de conceitos recém apresentados, e sim, a investigação de uma situação que envolva a implementação de uma estratégia de resolução sobre a interpretação de uma situação utilizando o raciocínio, a lógica e a capacidade de inferência que envolvam determinados dados fornecidos.

Em diversos níveis educacionais, é desejável que os estudantes adquiram habilidades e competências de acordo com a expectativa de ensino, em especial uma mudança de paradigma demandada pela sociedade atual que é a capacidade de aprender a aprender. Um dos objetivos atuais é contribuir para a formação de um estudante capaz de inovar, de enfrentar desafios, de analisar o contexto sócio-histórico e de ser o construtor de seu próprio conhecimento. Nesse sentido, a utilização da resolução de problemas busca agregar a reflexão e a investigação à metodologia do ensino, apresentando situações que exijam uma postura ativa frente à proposta estabelecida, de forma autônoma e habitual (Soares

et al. (2001)).

Como afirma Orey et al. (2007), o ensino por meio da *Modelagem Matemática* de situações-problema é um tipo de aprendizado transformatório, que valoriza a reflexão pessoal que alicerça a perspectiva crítica dos alunos. Isso afeta suas próprias experiências pessoais e permite a capacidade de identificação de problemas comuns de forma a, coletivamente, elaborar estratégias de resolução de problemas, procurando reduzir o seu grau de complexidade a um modelo capaz de dar conta da realidade e que, simultaneamente, seja um modelo possível de ser resolvido.

É importante a diferenciação da *Modelagem Matemática* como metodologia de ensino em relação ao processo de modelagem, proveniente da Matemática Aplicada, que, embora tenha o mesmo objetivo de produzir um modelo mais simplificado da realidade, exige grande sofisticação, capacidade computacional e o gerenciamento da precisão. Burak (2016) destaca que, como metodologia de ensino, deve propiciar um visão simplificada da realidade, permitindo que o aluno tenha a capacidade de refletir, teorizar e verificar suas conjecturas de forma natural, promovendo sua autonomia, além de um ensino mais dinâmico.

Vários trabalhos da literatura, consideram a aplicação de conceitos e técnicas de Otimização para a abordagem de situações-problema em sala de aula. Como exemplo, em Silva (2018), as atividades propostas foram abordadas por meio da exploração dos conceitos de máximos e mínimos, sugerindo que o professor tratasse a otimização de forma crescente, respeitando o amadurecimento cognitivo do aluno e preparando-o para o processo de tomada de decisão. Lopes (2017) abordou a teoria básica de Otimização Linear e do método Simplex, e sua aplicação na modelagem e resolução de problemas matemáticos voltados para o ensino médio. Foi proposto um material didático, direcionado aos professores da educação básica, contendo alguns problemas a serem trabalhados em sala de aula ou em atividades extracurriculares. As soluções são apresentadas e comparadas à resolução gráfica e à resolução obtida de forma algébrica ou por meio do solver do Excel.

De acordo com Ferreira (2018), é interessante oferecer algumas possibilidades para potencializar o professor, apresentando conceitos de Otimização sem a utilização de conceitos oriundos do Cálculo Diferencial e Integral, por meio de soluções gráficas e da utilização do software GEOGEBRA, tornando as aulas mais atrativas e dinâmicas. Neste trabalho, a Otimização foi abordada com uma sistematização de técnicas, a fim de obter o melhor resultado, onde sua essência reside em determinar o máximo ou o mínimo de uma função de acordo com a natureza do problema.

Coutinho (2019) considerou os conceitos básicos do problema de corte de estoque, em especial, para o caso unidimensional. Por se tratar de um problema de otimização linear inteira, foi abordado o método *branch-and-bound*, muito utilizado na resolução de problemas de grandes dimensões, que necessitam ser resolvidos por métodos computacionais. O autor destaca as dificuldades ao se resolver um problema de corte de estoque, mesmo de pequenas dimensões, além da sua importante aplicabilidade em problemas re-

ais. Foram propostos e resolvidos graficamente problemas de otimização linear inteira de duas variáveis reais, para serem trabalhados com alunos do ensino médio, a partir do uso de conceitos já vistos em sala de aula. Rech (2019) considerou problemas de otimização aplicados ao ensino, utilizando a taxa de variação para obtenção de extremos locais, mostrando a derivada sem defini-la de maneira formal. Segundo os autores, a sequência didática proposta a partir da utilização do método gráfico e da técnica de tentativa e erro se mostrou eficiente na ampliação da dedicação dos alunos às atividades, melhorando, assim, o seu desempenho e a aprendizagem durante o processo.

O objetivo deste trabalho consiste em abordar conceitos e aplicações da Otimização Linear, considerando problemas com dados incertos, podendo ser também denominados problemas de Otimização Estocástica, com o intuito de desenvolver um material baseado na teoria de probabilidades que possa servir de base para o desenvolvimento de situações a serem trabalhadas em sala de aula e/ou em atividades extracurriculares, com alunos do ensino médio. Pretende-se, assim, proporcionar aos professores e alunos a possibilidade de lidar com situações-problema que permitam relacionar criticamente os dados, percebendo a importância da probabilidade em contraposição à abordagem determinística de problemas.

*”No futuro, o pensamento estatístico será tão necessário para a cidadania eficiente como saber ler e escrever.”*

*Wells (1904).*

Segundo Fernandes (2000), há algumas razões para estudar probabilidade em qualquer nível educacional. Dentre elas: sua utilidade inegável no cotidiano das pessoas para se integrarem plenamente na sociedade atual; sua necessidade para avançar em estudos complexos; seu sentido estético, da apreciação da aplicação de técnicas de probabilidade; sua especificidade, sendo um tipo característico de pensamento, o probabilístico, assim como o pensamento geométrico e o pensamento algébrico. Essas características propiciam ao aluno o questionamento da dicotomia verdade *versus* falsidade. Lopes (2008) também ressalta que a probabilidade é indispensável ao cidadão atual, seu ensino incumbe também ao ensino da matemática, à organização de dados, à interpretação de gráficos e à análises estatísticas. Segundo o autor, propostas curriculares de muitos países, dedicam atenção especial a esse tema, em razão da necessidade de análise, por parte do cidadão, de índices de custo de vida, da tomada de decisão, da capacidade da realização de previsões, entre outras situações do cotidiano. De acordo com de Oliveira et al. (2015), é possível realizar uma associação entre o conteúdo de probabilidades apresentado no Ensino Médio e variáveis aleatórias, investigando-se distribuições estatísticas por meio lógico, com recursos da Análise Combinatória, culminando em uma ampliação considerável da aprendizagem.

A metodologia utilizada neste trabalho foi a revisão bibliográfica com o fim de fomentar a argumentação sobre Educação Matemática, utilizando a Otimização Linear Estocástica como um assunto que possibilite a motivação do aprofundamento de conceitos do Ensino Médio, com o propósito de elaborar um conjunto de atividades que permita trabalhar com aplicações de conceitos adquiridos. A partir desta proposta, pretende-se mobilizar professores e alunos, por meio da modelagem de situações-problema, também com o intuito de colaborar com a construção de conhecimentos mais complexos e níveis educacionais mais elevados. Além disso, optamos pela apresentação de soluções gráficas dos problemas de Otimização Linear por envolver assuntos correlatos abordados no Ensino Médio e por propiciar a abordagem visual, procurando-se incentivar a investigação de conceitos e conhecimentos.

Esta dissertação está organizada como segue. O capítulo 2 aborda aspectos teóricos sobre a metodologia de ensino Modelagem Matemática. Nos capítulos 3 e 4 são apresentados e discutidos conceitos da Otimização Linear como fundamentação da otimização na modelagem de problemas dessa natureza, de forma a desenvolver resoluções no contexto do Ensino Médio. O capítulo 5 fundamenta as noções que definem incerteza e apresenta problemas de cunho real procurando-se utilizar modelos que não sejam provenientes de jogos de azar, embora essa teoria tenha sua origem nesse tipo de problemática. O capítulo 6 discorre sobre o desenvolvimento da otimização sob incerteza, desenvolvendo métodos para se abordar modelos de problemas com coeficientes aleatórios em suas restrições e de problemas com demanda incerta. No capítulo 7 são apresentadas propostas de problemas para municiar o docente no desenvolvimento de problemas dessa espécie. Finalmente, o Capítulo 8 apresenta as considerações finais deste trabalho.

## Capítulo 2

# Modelagem Matemática e Otimização

Pode-se dizer que a Matemática é uma ciência que não possui fronteiras claramente delimitadas, sendo a base das ciências aplicadas, permeando aplicações e abstrações de forma tão elegante que há dificuldade de se discernir se a origem da aplicação gerou a teoria ou se foi a teoria que gerou a aplicação. Nossa sociedade é extremamente dependente de tecnologia e a matemática se apresenta no cotidiano de todos, de cientistas, profissionais e de cidadãos, nos mais diversos contextos, dos mais simples aos mais complexos, dando suporte ou sendo o cerne da necessidade da tecnologia ou das demandas dessa sociedade.

Outras ciências utilizam a construção da lógica-matemática, suas generalizações e abstrações para desenvolver a análise de suas próprias teorias, beneficiando-se de previsões, resultados e informações por ela possibilitados. É evidente a proficiência gerada pela disciplina, embora possa possuir alta complexidade à medida em que suas teorias se ampliam, se fazendo necessário o desenvolvimento de um maior repertório de conceitos e conhecimentos, inclusive em questões aplicadas. Porém, à despeito da delimitação dos assuntos tratados pela disciplina, na prática, não é clara as fronteiras da Matemática. A fragmentação do conhecimento científico entre disciplinas possui fins meramente didáticos, sendo assim, é sensata a percepção da necessidade do compartilhamento de habilidades propiciadas pela modelagem de problemas gerais, tidos como não-matemáticos, convergindo a assuntos ou problemas matemáticos. A utilização da interdisciplinaridade é peça chave na elaboração de modelos reais com o propósito de previsão de determinados aspectos ou na resolução de determinada problemática.

No contexto escolar, a Matemática proporciona formas de reflexão embasadas em dados e informações, introduzindo-se o método científico e à criticidade, contrapondo-se à aceitação obscura de ideias, quaisquer que sejam, colaborando para uma construção de visão de mundo analítica e crítica, inclusive de si mesmo e da realidade. Como base do conhecimento, a disciplina possui papel fundamental para a formação dos estudantes, seja de forma direta ou indireta, baseando-se em seleções ou apenas na necessidade da

abstração como ferramenta do cotidiano.

A importância da disciplina é incontestável, porém, como ressalta Boaler (2017), críticas à construção desse conhecimento e, por conseguinte, à qualidade do ensino da Matemática em todo o mundo trouxe à luz a desconstrução do modo estabelecido de ministrá-la, buscando-se alternativas mais efetivas à prática pedagógica. Nessa perspectiva, a mera memorização de conceitos, fórmulas ou propriedades não é suficiente para abranger o conjunto de habilidades e competências que o ensino deve oferecer frente às necessidades sociais e profissionais do cotidiano moderno. Apenas a operacionalização de expressões numéricas não se fazem mais oportunas, já que há dispositivos eletrônicos portáteis, velozes e precisos que fazem essa habilidade ser obsoleta. Dessa forma, torna-se necessária uma evolução contínua do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, mudando o comportamento para a interpretação de fatos, ações, realidades, situações-problema, e valorizando a interdisciplinaridade, considerando diferentes áreas do conhecimento.

A Modelagem Matemática possui o foco no desenvolvimento de um modelo que seja capaz de prever certos aspectos de determinado fenômeno ou problemática, a partir da verificação de aspectos conhecidos, permitindo uma aproximação razoável da realidade, sem que haja uma complexidade exacerbada em seus pressupostos. Esta metodologia deve visar a aprendizagem do aluno, estabelecendo um planejamento que possibilite o desenvolvimento de um processo de aprendizagem adequado, de forma que o aluno seja capaz de reconhecer a delimitação de uma situação-problema e produzir uma formulação matemática, considerando hipóteses, testando e desenvolvendo suas implicações. Finalmente, deve possibilitar a interpretação dos resultados obtidos, verificando a validade do modelo utilizado e sendo capaz de ajustá-lo, caso necessário (Biembengut et al. (2000)).

No nosso dia a dia, é bastante comum a ideia de melhorar algo significativo no cotidiano das pessoas; busca-se melhorar o tempo, a renda financeira, a produção, os caminhos, entre outros. Este é o principal objetivo da *Otimização*, realizar o melhor, dentro do possível, no que se refere à maximização ou minimização de determinado aspecto. Em uma linha de produção de uma fábrica, por exemplo, busca-se a minimização dos custos de produção por item produzido, de forma a maximizar os lucros, tornando-a viável. Diversos problemas do cotidiano no gerenciamento de instituições e nas ciências aplicadas possuem essa necessidade de se determinar *valores extremos*, máximos ou mínimos, de um conjunto de soluções possíveis.

Um modelo geral de otimização consiste na maximização (ou minimização) de uma função, denominada *função objetivo*, sujeito à um conjunto de limitações impostas pelas circunstâncias do problema, denominada *restrições do problema*, que podem ser representadas por equações e/ou inequações. Sem perda de generalidade, resolver um problema de otimização consiste em determinar, dentre as soluções que satisfazem as restrições, aquela que maximiza (ou minimiza) a função objetivo.

Neste contexto, inicialmente, definimos pontos extremos (de máximo ou de mínimo) de uma função. Tal conceito pode ser trabalhado pelo professor de maneira informal, o

mais próximo possível da realidade dos alunos envolvidos na atividade. A seguir, apresentamos um exemplo de um problema que pode ser modelado como um problema de otimização e resolvido por técnicas simples de matemática, que estão ao alcance de alunos do Ensino Médio.

## 2.1 Pontos extremos de uma função

**Definição 2.1** (*Ponto de máximo e de mínimo globais*). Seja  $f$  uma função de uma variável definida em um domínio  $D \subseteq \mathbb{R}$  e seja um ponto  $c \in D$ .

i) Dizemos que  $c$  é um ponto de máximo global de  $f$  se  $f(c) \geq f(x)$ , para todo  $x \in D$ . Neste caso,  $f(c)$  é o valor máximo global de  $f$ .

ii) Dizemos que  $c$  é ponto de mínimo global de  $f$  se  $f(c) \leq f(x)$ , para todo  $x \in D$ . Neste caso,  $f(c)$  é o valor mínimo global da função  $f$  (Guidorizzi (2000)).

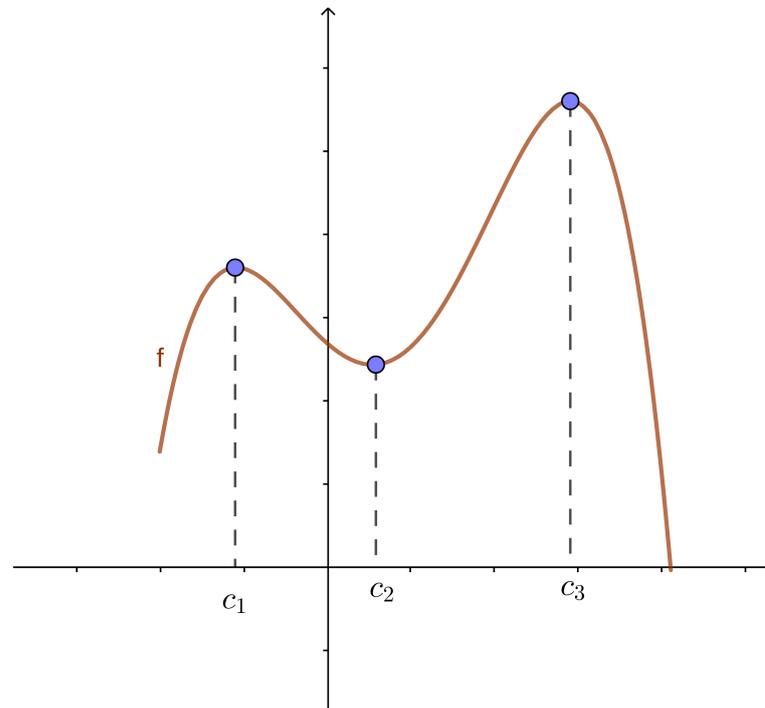


Figura 2.1: Ponto de máximo global e valor máximo de  $f$  no seu domínio  $D$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Definição 2.2** (*Ponto de máximo e de mínimo locais*). Seja  $f$  uma função de uma variável definida em um domínio  $D \subseteq \mathbb{R}$  e seja um ponto  $c \in D$ .

i) Dizemos que  $c$  é um ponto de máximo local de  $f$  se  $f(c) \geq f(x)$ , para todo  $x$  próximo a  $c$ , ou seja, para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(b, d) \subseteq D$  e que contém  $c$ . Neste caso,  $f(c)$  é um valor máximo relativo de  $f$ .

ii) Dizemos que  $c$  é ponto de mínimo local de  $f$  se  $f(c) \leq f(x)$ , para todo  $x$  próximo a  $c$ ,

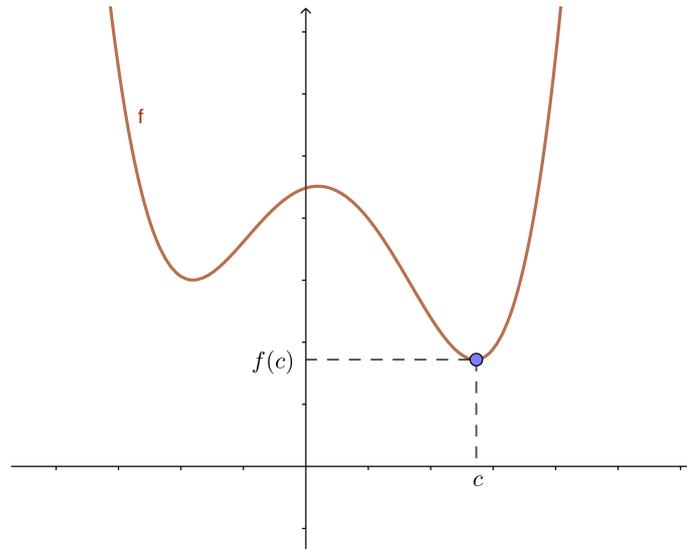


Figura 2.2: Ponto de mínimo global e valor mínimo de  $f$  no seu domínio  $D$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

ou seja, para todo  $x$  em um intervalo aberto  $(b, d) \subseteq D$  e que contém  $c$ . Neste caso,  $f(c)$  é um valor mínimo relativo da função  $f$  (Guidorizzi (2000)).

**Proposição 2.3.** *Seja  $f$  uma função derivável em um intervalo  $(c - \lambda, c + \lambda) \in D$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se  $x = c$  é um extremo local (ponto de máximo ou de mínimo local) neste intervalo, então  $f'(c) = 0$  (Guidorizzi (2000)).*

*Demonstração:*

Seja  $f$  uma função que possua extremo local num intervalo  $I = (c - \lambda, c + \lambda) \in D$  para um valor  $c \in I$ . Supondo-se  $f(c)$  como um mínimo local, teremos que  $f(c) \leq f(x)$ ,  $\forall x \in I$ . Com isso, temos que:

$$f(c) - f(x) \leq 0. \quad (2.1)$$

Por hipótese, existe  $f'(c)$ . Logo,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \quad (2.2)$$

Com isso, por um lado, quando  $\lambda$  tende a zero, para  $x = (c + \lambda) \in I$ , temos que  $x > c$  e, portanto,  $x - c > 0$ . Além disso, como vimos,  $f(x) - f(c) \leq 0$ . Assim:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Portanto,

$$f'(c) \leq 0 \quad (2.3)$$

Por outro lado, quando  $\lambda$  tende a zero, para  $x = (c - \lambda) \in I$ , temos que  $x < c$  e, portanto,  $x - c < 0$ . Além disso, como vimos,  $f(x) - f(c) \leq 0$ . Assim:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Logo,

$$f'(c) \geq 0. \quad (2.4)$$

De (2.2), (2.3) e (2.4), segue que  $f'(c) = 0$ .

Para  $f(c)$  máximo local, o resultado é análogo. ■

## 2.2 Exemplo de um problema de otimização

*Problema 1: Uma determinada indústria fabrica caixas de papelão que devem comportar um volume de três litros. Desconsiderando-se a espessura da matéria prima e sabendo-se que a base e a tampa devem ser quadradas e de papelão mais reforçado, custando R\$ 0,02 por  $cm^2$ , e que as laterais devem ser de papelão mais simples, custando R\$ 0,01 por  $cm^2$ , determine o custo mínimo de produção da caixa.*

Pode-se modelar o problema tomando  $x$  como sendo o comprimento das laterais da base da caixa e  $y$  a altura da caixa, observando-se as restrições de não negatividade para os valores  $x$  e  $y$ . Considerando que o volume da caixa é calculado por  $x^2 \cdot y$  e que deve ser igual a  $3.000 \text{ cm}^3$ , temos a equação  $x^2 \cdot y = 3000$ .

Por outro lado, o custo de produção de uma caixa será de R\$  $0,02 \cdot x^2$  para a base e a tampa, e de R\$  $0,01 \cdot x \cdot y$  para cada uma das quatro laterais. Portanto, a modelagem matemática do problema, considerando as condições impostas e o objetivo de minimizar o custo de produção, é dada a seguir.

$$\text{Minimizar } z = 0,04 \cdot x^2 + 0,04 \cdot x \cdot y$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} x^2 \cdot y = 3000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Nesse caso, podemos substituir a restrição  $x^2 \cdot y = 3000$  na expressão  $z$ , obtendo a função  $f(x) = 0,04 \cdot x^2 + \frac{120}{x}$ , representado na Figura 2.2.

Ao observar o gráfico da função  $f$ , considerando o domínio restrito  $D = [0, +\infty[$  e a sua imagem  $Im = [0, +\infty[$ , em virtude da restrição de não-negatividade, percebe-se que o valor mínimo da função objetivo  $f$  é igual a 15,72 e esse valor mínimo ocorre para  $x = 11,45$ .

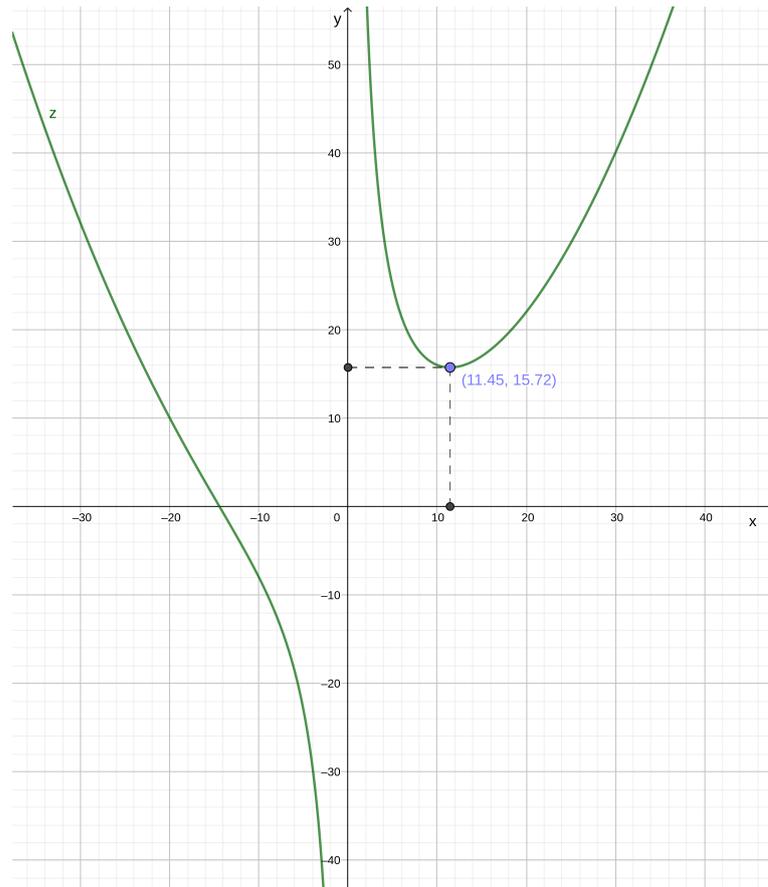


Figura 2.3: Gráfico da função  $f(x) = 2,4 \cdot x^2 + \frac{4.800}{x}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa imagem poderia também ser obtida analiticamente, derivando-se a função  $f$  e igualando a zero, ou seja, buscando um ponto extremo, com variação nula (ver Teorema 2.3). Dessa forma, obtém-se  $f'(x) = 0,08 \cdot x - \frac{120}{x^2} = 0$ , fornecendo  $x = 11,4471424255$  e  $y = 15,7244483653$ .

Portanto, para comportar o volume de 3 litros, deverão ser construídas caixas com dimensões: lado da base igual a 11,45 cm e altura igual a 22,89 cm. O custo mínimo de produção de cada caixa, sem considerar rebarbas, deve ser de R\$ 15,72.

■

Como visto, as quantificações que exercem importante influência no desenvolvimento dos objetivos definidos inicialmente devem ser expressas por meio de variáveis de decisão, compondo uma função determinada. Assim, a *otimização* pode ser definida como o processo de encontrar as condições com o fim de que o valor resultante da função objetivo seja máximo ou mínimo, ou seja, a meta da otimização será sempre ou minimizar o esforço ou utilização de recursos, ou maximizar o valor da função que dita o processo.

Não obstante, não há um único método que solucione todos os problemas de otimização, sendo necessário o desenvolvimento de métodos diferentes para a solução de diferentes tipos de problemas, como a *Otimização Linear* ou a *Otimização Estocástica*, embora o objetivo seja sempre o mesmo: obter os máximos ou mínimos valores da função objetivo, levando-se em conta as restrições do problema.

# Capítulo 3

## Otimização Linear

A Otimização Linear, como o nome sugere, refere-se a abordagem de problemas que são representados por modelos cujas expressões são lineares. Em linhas gerais, consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada *função objetivo*, respeitando-se um conjunto de equações e/ou inequações lineares, denominadas *restrições do problema* (Lopes (2017)). A função objetivo e as restrições envolvem várias variáveis reais, denominadas *variáveis de decisão*.

Na busca pela solução de um problema de otimização linear, devemos considerar as direções de crescimento e decrescimento da função objetivo. Para tanto, apresentamos alguns conceitos importantes do Cálculo Diferencial e Integral de Várias Variáveis Reais. Para um melhor entendimento, vamos considerar uma função com duas variáveis reais. No entanto, tais conceitos podem ser estendidos para o caso de  $n$  variáveis reais (Guidorizzi (2000)).

**Definição 3.1** (Curva de Nível). Sejam  $z = f(x, y)$  uma função e  $c \in Im(f)$ . O subconjunto do domínio de  $f$  cujos pontos  $(x, y) \in D(f)$  são tais que  $f(x, y) = c$  denomina-se *Curva de Nível* da função  $f$ .

**Definição 3.2** (Vetor Gradiente). Seja  $z = f(x, y)$  uma função que admite derivadas parciais em  $(x_0, y_0)$ . O vetor  $\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right)$  denomina-se *Gradiente* de  $f$  em  $(x_0, y_0)$ .

Como exemplo, as curvas de nível da função  $f(x, y) = 2x - y$  estão apresentadas na Figura 3.1. Observe que, como se trata de uma função linear, as curvas de nível são retas paralelas. Nesta figura encontra-se também a representação do vetor gradiente da função  $f$ .

**Teorema 3.3.** *Seja  $f$  uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto  $P(x, y)$ .*

- i) O valor máximo da derivada direcional  $D_u f(x)$  em  $P(x, y)$  é  $|\nabla f(x)|$  e ocorre quando  $\mathbf{u}$  tem a mesma direção e sentido do vetor  $\nabla f(x, y)$ .*
- ii) O valor mínimo da derivada direcional  $D_u f(x)$  em  $P(x, y)$  é  $-|\nabla f(x)|$  e ocorre na direção de  $-\nabla f(x, y)$  (Guidorizzi (2000)).*

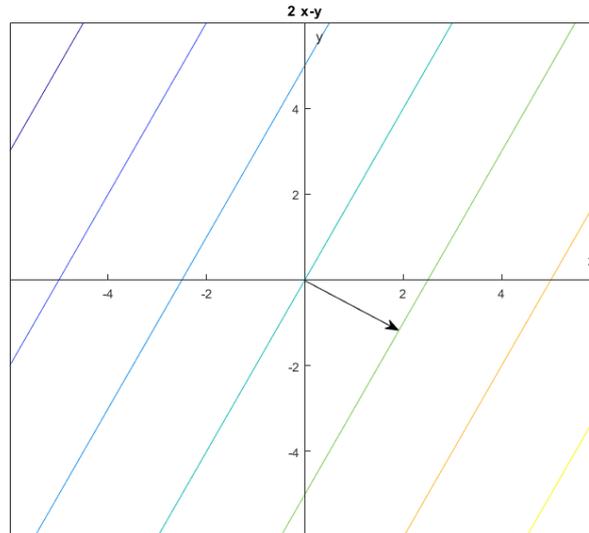


Figura 3.1: Curvas de nível da função  $z = 2x - y$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Teorema 3.4.** *Sejam  $f$  uma função de duas variáveis, diferenciável no ponto  $P_0(x_0, y_0)$  e  $C$  a curva de nível de  $f$  que contém  $P_0$ . Se  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ , então este vetor gradiente é ortogonal a  $C$  em  $P_0$ . Assim, a direção da taxa máxima de variação de  $f(x, y)$  em  $P_0$  é ortogonal à curva de nível  $C$ .*

A partir desses resultados, observa-se que o *vetor gradiente* indica a direção de maior crescimento da função  $f$ , sendo ortogonal às curvas de nível. Portanto, para determinar um ponto de máximo devemos caminhar na direção do vetor gradiente  $\nabla f$ . Por outro lado, para determinar um ponto de mínimo de  $f$ , devemos caminhar na direção de  $-\nabla f$ .

Modelar um problema matematicamente serve ao propósito de sistematizá-lo. Desse modo, utilizaremos o problema a seguir como ilustração para obtenção de alguma solução possível. Posteriormente, os conceitos serão ampliados para modelos de maiores dimensões.

*Problema 2: Uma companhia deseja produzir dois modelos de brinquedos, A e B, que requerem a utilização de mão de obra e matéria-prima, conforme descrito a seguir.*

Modelos	A	B
Matéria-Prima (Kg/unidade)	8	2
Mão de obra (horas/unidade)	7	5
Lucro (R\$/unidade)	5	6

*Sabendo-se que há 100 Kg de matéria prima em estoque e que a disponibilidade de mão de obra seja de 120 horas, em que quantidade cada modelo deve ser produzido visando maximizar o lucro da companhia?*

Sendo  $x_A$  a variável de decisão que representa o número de brinquedos do modelo A e  $x_B$  a variável de decisão que representa o número de brinquedos do modelo B, o problema pode ser modelado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z = 5x_A + 6x_B \\ &\text{sujeito à: } \begin{cases} 8x_A + 2x_B \leq 100 \\ 7x_A + 5x_B \leq 120 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Serão realizadas duas etapas para a determinação da produção ótima de brinquedos, visando o maior lucro: inicialmente, determinamos a região viável, que consiste no conjunto de pontos  $(x_A, x_B)$  que satisfazem as restrições do modelo matemático; num segundo momento, determinamos a solução ótima, que consiste no ponto da região ótima que apresenta o maior valor para a função  $f$ .

Considerando as restrições do modelo, construímos a região viável  $R$  no plano  $xy$ , determinando um polígono convexo, que está representado na Figura 3.2.

Na região  $R$ , definida pelos pontos  $BCDF$ , encontram-se todas as soluções possíveis, considerando-se as restrições do problema. Neste ponto, o objetivo é determinar qual ou quais desses pontos viáveis fornecem o maior valor para a *função objetivo*, obtendo-se o que chamamos de solução ótima do problema. O gráfico da função  $z = 5x_A + 6x_B$  consiste em um plano no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , sendo interessante a construção de suas curvas de nível no plano  $\mathbb{R}^2$ .

Na Figura 3.3, caminhando na direção de crescimento da função objetivo, indicada pelo vetor gradiente  $\nabla z = (5, 6)$ , que é ortogonal às curvas de nível, é intuitivo perceber que, dentre os pontos da região viável, o último ponto tocado por uma curva de nível é o ponto  $B$ , que consiste na solução ótima do problema. Ou seja, é o ponto da região viável  $R$  que fornece o maior valor para a função objetivo. Observe que a solução ótima é um vértice da região convexa  $R$  e para determinar suas coordenadas, basta calcular a intersecção da reta  $8x_A + 2x_B = 100$  com o eixo vertical  $x_B$ .

A seguir, enunciamos um dos teoremas fundamentais da Otimização Linear, cuja demonstração pode ser encontrada em Bazaraa et al. (2011).

**Teorema 3.5.** *Se um Problema de Otimização Linear tem solução ótima, então existe vértice ótimo.*

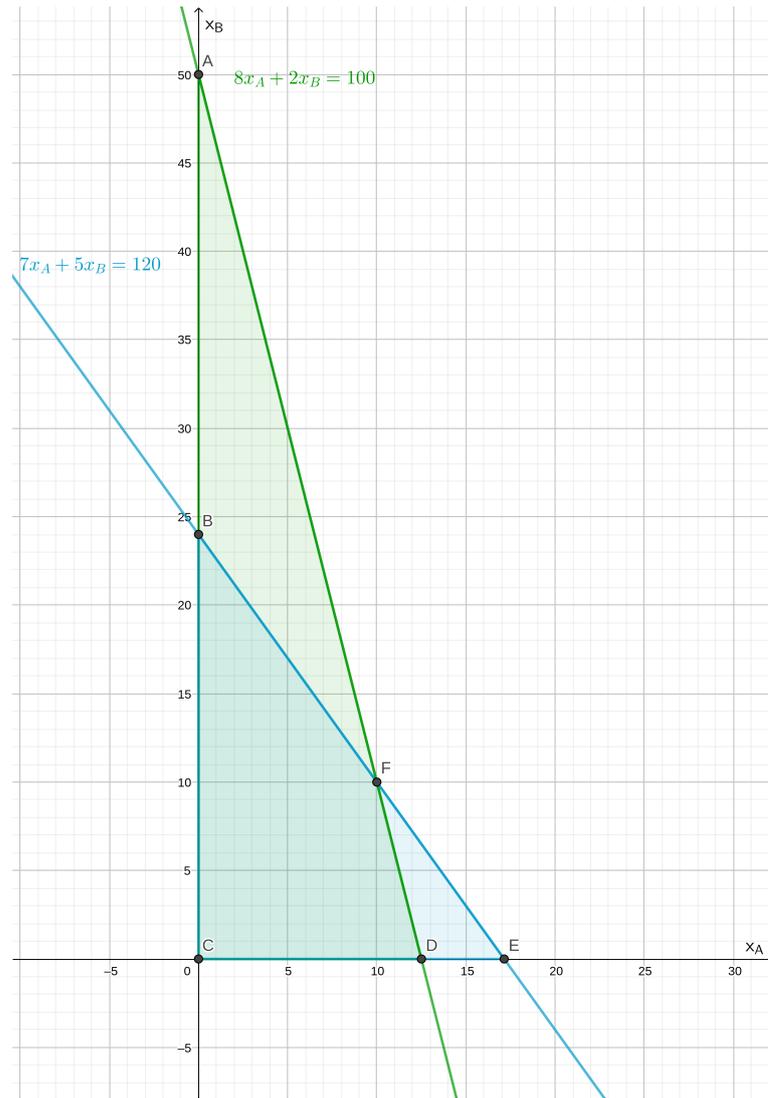


Figura 3.2: Região de viabilidade do problema de otimização da produção de brinquedos simplificado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando o Teorema 3.5, podemos determinar a solução ótima determinando todos os vértices da região  $R$  e verificando qual (ou quais) fornece o maior valor para  $z$ , que representa o lucro da companhia.

Tabela 3.1: Coordenadas dos vértices da região viável e valores da função objetivo  $z = 5x_A + 6x_B$

Coordenadas ( $x, y$ )	$f(x, y)$
(0, 0)	0
(12, 5; 0)	62, 5
(10, 10)	110
(0, 24)	144

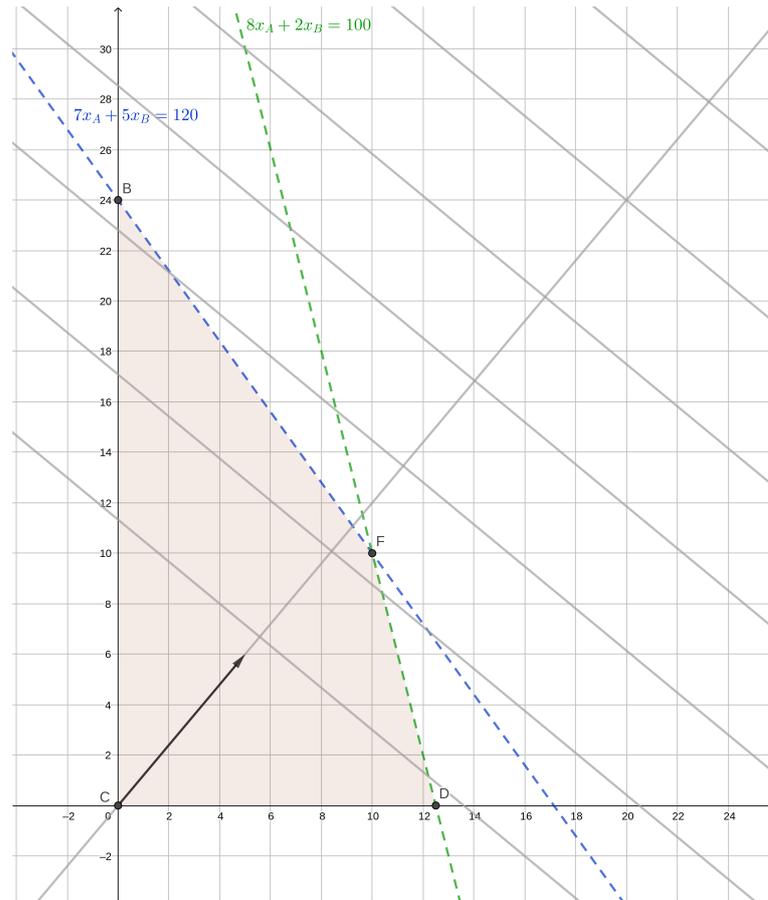


Figura 3.3: Região de viabilidade, curvas de nível e vetor gradiente.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, a solução ótima é obtida pelo vértice  $B(0, 24)$ , ou seja, a possibilidade de maior lucro para a empresa é a de produzir apenas 24 unidades do brinquedo B, contabilizando o máximo lucro de R\$ 144,00 para esse problema hipotético.

■

### 3.1 Generalização de um problema de Otimização Linear

Considere a modelagem do problema resolvido anteriormente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar } z = 5x_A + 6x_B \\ &\text{sujeito à: } \begin{cases} 8x_A + 2x_B \leq 100 \\ 7x_A + 5x_B \leq 120 \\ x_A \geq 0, x_B \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$b^T = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m] \quad (3.4)$$

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad (3.5)$$

**Definição 3.6** (Solução Básica). Dado o vetor  $x$  associado ao sistema linear  $Ax = b$  de  $m$  equações e  $n$  incógnitas, com  $m < n$ , se igualarmos  $n - m$  incógnitas a zero e resolvermos o sistema resultante para as  $m$  incógnitas restantes, a solução, se única, é denominada *Solução Básica* e corresponderá a um ponto extremo (vértice) da região viável  $R = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax = b\}$ .

**Definição 3.7** (Variável Básica e Não-Básica). As variáveis tomadas com valores nulos são denominadas *Variáveis Não-Básicas* e as variáveis restantes são denominadas *Variáveis Básicas*.

**Proposição 3.8** (Quantidade de Pontos Extremos). Dado um sistema linear  $Ax = b$  com  $m$  equações e  $n$  incógnitas,  $m < n$ , há exatamente  $\binom{n}{m}$  partições básicas.

*Demonstração:*

De fato, dadas as matrizes  $A_{m \times n}$ ,  $x_{n \times 1}$  e  $b_{n \times 1}$ , para se determinar uma solução básica do sistema linear deve-se considerar apenas  $m$  incógnitas, igualando-se a zero as demais  $m - n$  incógnitas.

Dessa forma, toma-se matrizes alternativas que possuam as ordens reduzidas  $A'_{m \times m}$ ,  $x'_{m \times 1}$  e  $b'_{m \times 1}$  para se definir as soluções básicas.

Com isso, deve-se escolher  $m$  incógnitas contidas em  $A_{m \times n}$  dentre  $n$  possíveis.

Assim, há  $\binom{n}{m}$  combinações possíveis de incógnitas para se agrupar a matriz  $A'_{m \times m}$  que determinará cada solução básica do sistema linear.

■

Para um melhor entendimento, considere o problema proposto anteriormente, com suas restrições na forma padrão, representada matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Como  $m = 2$  equações e  $n = 4$  incógnitas, o sistema linear possui  $\binom{4}{2} = 6$  partições básicas. Desta forma, temos um sistema com infinitas soluções com um grau de liberdade  $n - m = 2$ . Portanto, teremos  $m = 2$  *variáveis básicas* ao igualarmos  $n - m = 4 - 2 = 2$  variáveis (não-básicas) a zero.

1. Tomando-se  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  como as variáveis não-básicas,  $y_1$  e  $y_2$  serão as variáveis básicas.

Nesse caso, obtemos  $y_1 = 100$  e  $y_2 = 120$ . Esta partição corresponde ao ponto  $C = (0, 0)$  da região viável do problema, representada na Figura 3.3. O valor da função objetivo é  $z = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$ .

2. Tomando-se  $x_1 = 0$  e  $y_1 = 0$  como as variáveis não-básicas,  $x_2$  e  $y_2$  serão as variáveis básicas.

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot x_2 + 0 \cdot y_2 \\ 5 \cdot x_2 + 1 \cdot y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Com isso, basta resolver a equação matricial com matriz dos coeficientes quadrada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Como a matriz dos coeficientes das variáveis básicas é quadrada, se o determinante for diferente de zero, o sistema linear obtido a partir da partição básica terá solução única, como ocorre no exemplo. Resolvendo o sistema linear de ordem 2, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -130 \end{bmatrix} < 0$$

Esta partição corresponde ao ponto  $A = (0, 50)$  que é a intersecção da reta  $8x + 2y = 100$  com o eixo vertical  $x^B$ , tratando-se de uma solução inviável, pois não é um ponto da região viável, como pode-se observar na Figura 3.3.

3. Tomando-se  $x_1 = 0$  e  $y_2 = 0$  como as variáveis não-básicas,  $x_2$  e  $y_1$  serão as variáveis básicas.

Considerando as colunas dos coeficientes das variáveis básicas, obtemos o sistema de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Logo, esta partição corresponde ao ponto  $B = (0, 24)$  da região viável, como pode-se observar na Figura 3.3. O valor da função objetivo é  $z = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 24 = 144$ . Observe que  $y_1 = 52$  significa que sobraram 52kg de matéria-prima.

4. Tomando-se  $x_2 = 0$  e  $y_1 = 0$  como as variáveis não-básicas,  $x_1$  e  $y_2$  serão as variáveis básicas.

Considerando as colunas dos coeficientes das variáveis básicas, obtemos o sistema de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/2 \\ 65/2 \end{bmatrix}$$

Esta partição corresponde ao ponto  $D = (\frac{25}{2}, 0)$  da região viável, como pode-se observar na Figura 3.3. O valor da função objetivo é  $z = 5 \cdot \frac{25}{2} + 6 \cdot 0 = 62,5$ . Observe que  $y_2 = 32,5$  significa que sobraram 32,5 horas de mão-de-obra.

5. Fazendo  $x_2 = 0$  e  $y_2 = 0$  como as variáveis não-básicas,  $x_1$  e  $y_1$  serão as variáveis básicas.

Considerando as colunas dos coeficientes das variáveis básicas, obtemos o sistema de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120/7 \\ -260/7 \end{bmatrix}$$

Logo, esta partição corresponde ao ponto  $E = (\frac{120}{7}, 0)$  que não pertence à região viável do problema, como pode-se observar na Figura 3.2.

6. Fazendo  $y_1 = 0$  e  $y_2 = 0$  como as variáveis não-básicas,  $x_1$  e  $x_2$  serão as variáveis básicas.

Considerando as colunas dos coeficientes das variáveis básicas, obtemos o sistema de ordem 2:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Esta partição corresponde ao ponto  $F = (10, 10)$  da região viável, como pode-se observar na Figura 3.2. O valor da função objetivo é  $z = 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10 = 110$ .

Portanto, levando-se em conta as partições relacionadas aos pontos viáveis, o ponto que maximiza a função objetivo é o ponto  $B = (0, 24)$ , assim como foi verificado graficamente.

## 3.2 Otimização Linear no Ensino Médio

É interessante observar que problemas de otimização podem levar o estudante ao desenvolvimento criativo de conceitos matemáticos, desmitificando a disciplina como um conhecimento fechado, acabado e de origem desconhecida, com teoremas ou ideias impostas sem conexão com a realidade, sem margem para conclusões alternativas ou desenvolvimento de novos contextos ou perspectivas. Nesse tipo de problemática não é possível utilizar apenas fórmulas pré-definidas, algoritmos simplificados ou se bastar com qualquer solução do problema, pois diversas soluções são possíveis e, dependendo do problema abordado, pode-se incentivar reflexões mais aprofundadas sobre assuntos interdisciplinares, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas como um catalisador da mobilização do interesse do aluno.

Com a abordagem de Modelagem Matemática dos problemas de otimização, espera-se que sejam desenvolvidos diversos conceitos do ensino de matemática pertencentes ao Ensino Médio, conforme se fizerem necessários para cada etapa da Resolução do Problemas ou na abordagem de diferentes problemas, utilizando-os como motivadores do desenvolvimento de conceitos matemáticos, abordando-os a fim de ampliar os conhecimentos do corpo discente, com o intuito de reforçá-los e relembrá-los e não de esgotá-los, utilizando-se a modelagem matemática como metodologia educacional adicional, a fim de abordar tópicos pertencentes a esse nível educacional, interrelacionando-os e propondo uma reflexão e um aprofundamento desses tópicos por meio de sua utilização e aplicação.

### 3.3 Modelagem de problemas de otimização

Ao resolvermos problemas de otimização no Ensino Médio, o estudante provavelmente não possui maturidade matemática suficiente para contemplar os problemas dessa área da matemática aplicada em sua plenitude. Porém, pode-se utilizar seus conhecimentos prévios, tanto escolares como de seu contexto social, para abordar problemas de otimização, sem que seja necessário, com os problemas certos, o desenvolvimento completo da teoria. Visando a apreensão de conceitos Matemáticos desse nível de ensino ligados à diversas áreas do conhecimento da ciência, interconectando temas e desenvolvendo uma abordagem ativa na aprendizagem, pode-se utilizar a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática como motivadores desse desenvolvimento.

Assim, um dado problema de otimização deverá ser modelado a partir das informações disponíveis no contexto apresentado, sendo gerado um possível conjunto de soluções que o satisfaçam. A interpretação desses resultados, irá prover a discussão do significado de melhor resultado dentre os possíveis. Com isso, a otimização terá como objetivo a obtenção de resultados com a menor utilização de material ou com o maior lucro possível.

Nesse contexto, por exemplo, podemos observar a questão a seguir do concurso de admissão do Colégio Militar do Rio de Janeiro do Ministério da Defesa - Exército Brasileiro - DECEX - 2019 que versa sobre o assunto:

*Problema 3: A companhia de turismo Vivitour freta um ônibus de 40 lugares de acordo com as seguintes condições descritas no contrato de afretamento:*

- I. Cada passageiro pagará R\$ 160,00 se todos os 40 lugares forem ocupados.*
- II. Cada passageiro pagará um adicional de R\$ 8,00 por lugar não ocupado.*

*Quantos lugares a companhia de turismo deverá vender para garantir lucro máximo?*

O primeiro passo para a resolução deste problema é a modelagem do problema em formato de equações ou inequações, levando-se em conta algumas restrições do problema que são implícitas: Podemos observar que o lucro da empresa aqui é o objeto de desejo do problema, por isso a *função lucro* a ser modelada será chamada de *função objetivo*. No contexto apresentado, depreende-se que a *função lucro* não levará em conta custos de operação na sua composição. Além disso, temos uma restrição quanto à quantidade de passageiros a fretarem um ônibus, que deve ser maior que zero e menor ou igual a 40.

Diante das informações apresentadas, pode-se modelar o problema apresentado como se segue:

$$\begin{cases} 7x + 3y \leq 21 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Assim, temos que se a quantidade de passageiros for igual a 40, o máximo de passageiros possíveis, a empresa terá um lucro de R\$  $160,00 \cdot 40 = \text{R}\$ 6.400,00$ . Por outro lado, se houver apenas 1 passageiro, o mínimo de passageiros possíveis a fretar o ônibus, o lucro ficaria em  $(\text{R}\$ 160,00 + (40 - 1) \cdot \text{R}\$ 8,00) \cdot 1 = \text{R}\$ 472,00$ .

Com isso, atribuindo a quantidade de passageiros a contratarem o fretamento à variável  $x$  e o lucro, em reais, à variável  $y$ , podemos modelar o problema utilizando a função objetivo  $y = (480 - 8x) \cdot x$ , sujeito às restrições  $0 < x \leq 40$ .

Desenhando o gráfico da função objetivo e levando-se em conta as restrições apresentadas, observamos uma região de viabilidade de soluções para o problema, com valores  $x = 1, 2, \dots, 40$ .

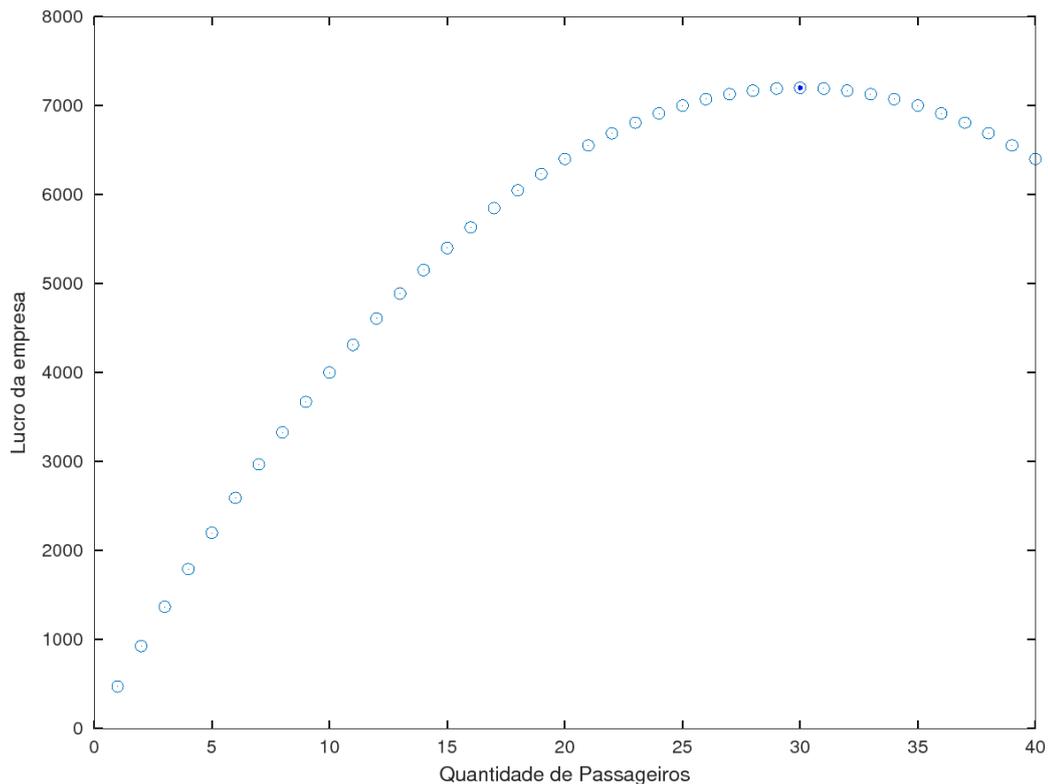


Figura 3.4: Região de Viabilidade do problema 3

Fonte: Elaborado pelo autor.

Deve-se observar que, apesar de haver toda uma região de viabilidade de soluções, o problema solicita não apenas uma solução, mas uma solução ótima, onde o lucro é maximizado. Nesse caso, é fácil de perceber que a curva formada pela função objetivo é

uma parábola, cujas raízes seriam  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 60$  e seu vértice com abscissa no valor da média aritmética entre esses dois valores,  $x_v = \frac{0+60}{2} = 30$ , produzindo assim um lucro máximo de  $y = \text{R\$ } 7.200,00$ .

Apesar da simplicidade do exemplo apresentado, é possível observar algumas características dos problemas de otimização, como as restrições práticas, onde devem ser apresentadas soluções positivas para cada variável, a região de viabilidade de soluções e a busca pela solução máxima.

### 3.4 Soluções Gráficas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Básico, que envolvem o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, contém recomendações no sentido de se tratar assuntos como a resolução de desigualdades no desenvolvimento do ensino com a utilização de representações gráficas, ampliando a reflexão do aluno ao relacionar conceitos de diferentes áreas da matemática, como a geometria analítica, funções, equações algébricas e inequações na modelagem e resolução de problemas (MEC/SEF (1998)).

Nesse sentido, a resolução gráfica de inadequações tem o benefício de materializar a abstração algébrica e dar sentido aos conceitos tratados, motivando a reflexão crítica das regras, definições, axiomas e teoremas aplicados, extrapolando a aplicação automática de regras (de Souza (2008)).

Ao estudar inequações, o aluno pode ser estimulado à transcender a automatização da realização de um passo-a-passo incorporado como desenvolvimento de regras estabelecidas sem reflexão. Diversos autores, incluindo GIOVANNI, BONJORNIO e GIOVANNI JR (1997) ou BEZERRA e PUTNOKI (2011), propõe a resolução de inequações por meio de gráficos após o desenvolvimento dos conceitos de funções polinomiais de primeiro e segundo grau, interconectando esses assuntos com resolução de inequações e o plano cartesiano (Bezerra et al. (1997)).

Por exemplo, ao observarmos a questão a seguir do concurso vestibular de admissão da Universidade Federal de Uberlândia do ano de 2018, podemos utilizar soluções gráficas para interpretação e resolução do problema apresentado:

*Problema 4: Funções afins e quadráticas têm aplicações em alguns modelos simples, envolvendo os conceitos preço de venda e custo de produção de uma mercadoria, bem como a receita e o lucro obtidos com sua venda.*

*Para uma empresa, é fundamental determinar o intervalo de produção em que a receita supera o custo de produção.*

*Suponha que o custo de produção de uma mercadoria de certa empresa, em função da quantidade produzida  $x$ , seja dado pela função  $C(x) = 40x + 1400$  ( $c_0 = 1400$  é denominado custo fixo de produção) e que o preço de venda seja*

$p(x) = -2x + 200$ , em que  $x$  é a quantidade demandada (vendida). Nesse caso, a receita  $R$  obtida com as vendas é função de  $x$ , precisamente  $R(x) = x \cdot p(x)$ .

As quantidades produzidas e vendidas  $x$  para as quais essa empresa tem lucro  $L(x) = R(x) - C(x)$  positivo (receita supera o custo de produção) é

- a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 40\}$ .
- b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$ .
- c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 70\}$ .
- d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 40\}$ .

Para a resolução desse problema, que tratará inicialmente de operações com funções ( $L(x) = R(x) - C(x)$ ), deve-se obter a função lucro  $L(x)$  e traçar o gráfico dessa função, observando-se os pontos de interseção com o eixo  $x$  a fim de determinar valores positivos para  $L(x)$ .

Temos então, que  $L(x) = R(x) - C(x) = x \cdot (-2x + 200) - (40x + 1400) = -x^2 + 80x - 700$  e seu gráfico pode ser representado no plano cartesiano.

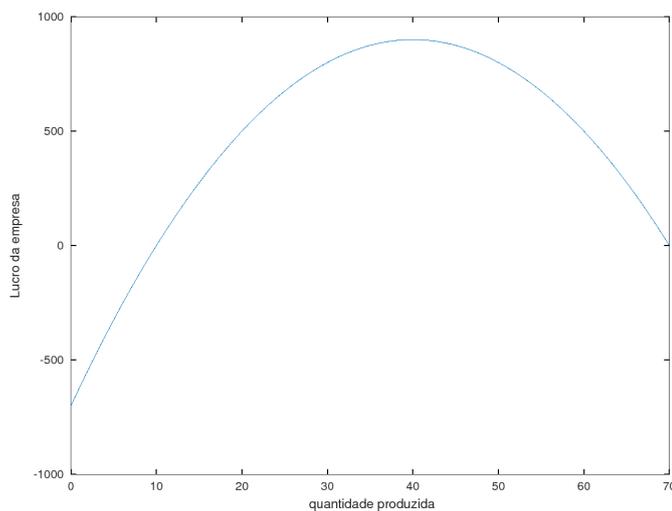


Figura 3.5: Função Lucro  $L(x) = -x^2 + 80x - 700$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Verifica-se então, pela observação do gráfico da função, que o intervalo onde o lucro obtido é positivo é  $]10, 70[$ .

Não apenas nesse caso, entretanto, pode-se resolver o problema utilizando regras algébricas para resolver a inequação  $-x^2 + 80x - 700 > 0$  dada, obtendo-se o intervalo de soluções  $]10, 70[$ , representado na alternativa (c).

Devemos observar que a resolução gráfica pode ser um facilitador na análise do problema, advinda da modelagem do problema, mas não se pode excluir o desenvolvimento da solução algébrica do desdobramento do problema, sendo percepções complementares, tanto para a conclusão quanto para a generalização, tendo como objetivo essa última ideia no desenvolvimento cognitivo do aluno para uma aprendizagem significativa.

### 3.4.1 Semiplanos

A Geometria Euclidiana plana e espacial possui elementos primitivos, chamados de *ponto*, *reta* e *plano*, cujas propriedades iniciais são tomadas sem qualquer demonstração, chamadas de postulados ou axiomas.

Dessa forma, definiremos esses entes da geometria e enunciaremos alguns postulados, proposições e teoremas úteis para a aplicação que temos como objetivo conforme nossa necessidade, deixando o restante a cargo do professor no desenvolvimento da teoria da Geometria Euclidiana.

**Definição 3.9** (Ponto). Podemos definir *ponto* como um elemento do espaço sem dimensão, ou adimensional. Esse é o elemento primordial de qualquer figura geométrica, que é um conjunto de pontos que gozam de dessa característica (Gruenberg et al. (1977)).

**Definição 3.10** (Reta). Definimos *reta* como um elemento unidimensional do espaço sem qualquer curvatura que se estende infinitamente, sendo constituída por infinitos pontos, e que divide o espaço bidimensional em duas partes (Gruenberg et al. (1977)).

**Definição 3.11** (Plano). Definiremos *plano* como sendo um objeto bidimensional do espaço desprovido de curvatura que se estende infinitamente, sendo constituído por infinitas retas e, por conseguinte, infinitos pontos, que divide o espaço tridimensional em duas partes (Gruenberg et al. (1977)).

**Axioma 3.12** (Determinação da reta). *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém (Barbosa (1985)).*

**Axioma 3.13** (Determinação do plano). *Três pontos não colineares determinam um plano (Rosa (2010)).*

**Definição 3.14** (Interseção entre dois conjuntos). Dados dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , definimos a interseção entre  $A$  e  $B$ , denotada por  $A \cap B$ , como:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

**Proposição 3.15** (Plano). *A interseção de dois planos não paralelos (e não coincidentes) é uma reta (Gruenberg et al. (1977)).*

*Demonstração:*

Suponhamos, por absurdo, que a interseção de dois planos não paralelos no espaço não seja uma reta.

Dessa forma, a interseção dos planos não pode ser vazia, pois, se o fossem, os dois planos seriam planos paralelos.

O caso para a interseção de finitos pontos também não é possível, pois para isso, os planos deveriam apresentar alguma curvatura, o que contraria a definição de plano.

Ou seja, a interseção entre dois planos deve possuir infinitos elementos do espaço, de forma a serem colineares ou coplanares.

Assim, a interseção não poderia possuir pontos coplanares, pois, nesse caso, os planos seriam coincidentes.

Portanto, a interseção de dois planos não paralelos e não coincidentes pode apenas ser uma reta.

■

Assim, podemos definir *semiplano* como segue:

**Definição 3.16** (Semiplano). Definiremos *Semiplano* como uma das partes do plano dividido por uma dada reta (Barbosa (1985)).

Dessa forma, extendendo-se a definição de *semiplanos* para o plano cartesiano e utilizando-se a equação da reta como ponto de partida, tomaremos uma *inequação* como sendo o semiplano determinado pela reta  $r : ax + by = c$ , que divide o plano em dois conjuntos de pontos, e pelos pontos que a satisfazem, determinado um dos conjuntos como o semiplano da inequação.

*Exemplo 5:* Determinar o semiplano definido pela inequação  $x + y > 3$ .

Para isso, em virtude do Axioma 3.12, indicaremos a reta  $r : x + y = 3$  por dois pontos quaisquer no plano cartesiano. Por simplicidade, encontramos as coordenadas onde os eixos  $x$  e  $y$  são interceptados pela reta e, ao substituirmos a coordenada  $x = 0$ , encontraremos o ponto  $A(0, y)$ , que intercepta o eixo  $y$ . Desenvolveremos a mesma estratégia para determinar o segundo ponto, ou seja, ao substituirmos a coordenada  $y = 0$ , encontraremos o ponto  $B(x, 0)$ , que intercepta o eixo  $x$ . Assim:

- Para  $x = 0$ , temos que  $r : 0 + y = 3 \Leftrightarrow y = 3$ , ou seja, temos o ponto pertencente ao eixo  $y$  com as coordenadas  $A(0, 3)$ .
- Para  $y = 0$ , temos que  $r : x + 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3$ , ou seja, temos o ponto pertencente ao eixo  $x$  com as coordenadas  $A(3, 0)$ .

Por esses dois pontos,  $A$  e  $B$ , traçamos a reta  $r$ .

Além disso, precisamos determinar qual dos conjuntos de pontos do plano divididos pela reta satisfaz a inequação. Por simplicidade, observaremos a origem no plano

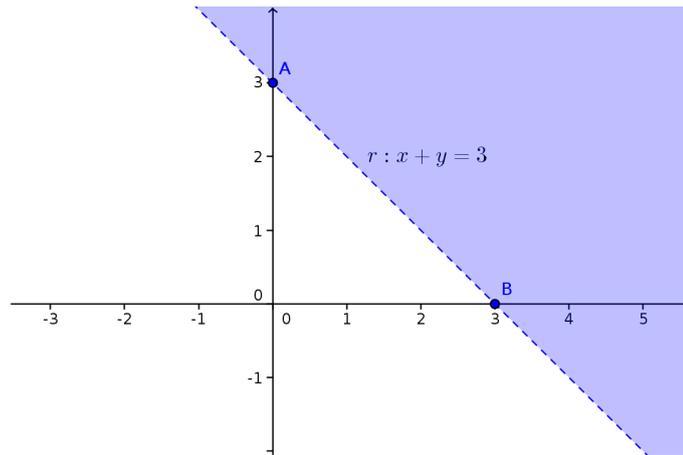


Figura 3.6: Semiplano definido por  $x + y > 3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

cartesiano  $O(0, 0)$ , para descobrir se o semiplano que a contém pertence à inequação ou não.

Como a expressão  $0 + 0 = 0 > 3$  não é satisfeita,  $O$  não pertence ao semiplano da inequação  $x + y > 3$ . Assim, o plano que representa a inequação está acima da reta  $r$  e é representado pela parte hachurada da Figura 3.6.

### 3.4.2 Interseção de Semiplanos

Verificaremos agora como determinar a interseção de semiplanos. Para isso, devemos definir o conceito de lugar geométrico.

**Definição 3.17** (Lugar Geométrico). Definiremos um *Lugar Geométrico* apenas como um conjunto de pontos do espaço (Wagner (2009)).

Assim, a interseção de semiplanos obedecerá à *Definição 3.14*, determinando o lugar geométrico dos pontos comuns à cada semiplano.

*Exemplo 6:* Determinar o *lugar geométrico* definido pelas inequações  $x + y < 3$  e  $x - y > -3$ .

Para isso, deveremos determinar as retas  $\alpha : x + y = 3$  e  $\beta : x - y = -3$ , ou seja, determinaremos os pontos de interseção entre as retas  $\alpha$  e  $\beta$  e os eixos do plano cartesiano.

Como visto, tomaremos as coordenadas  $x = 0$  para determinar os pontos pertencentes ao eixo  $y$  e  $y = 0$  para determinar os pontos pertencentes ao eixo  $x$ :

- Para  $x = 0$ , temos que  $\alpha : 0 + y = 3 \Leftrightarrow y = 3$  e  $\beta : 0 - y = -3 \Leftrightarrow y = 3$ , ou seja, temos os pontos de  $\alpha$  e  $\beta$  pertencentes ao eixo  $y$  com as coordenadas  $A(0, 3)$  e  $A'(0, 3)$ .

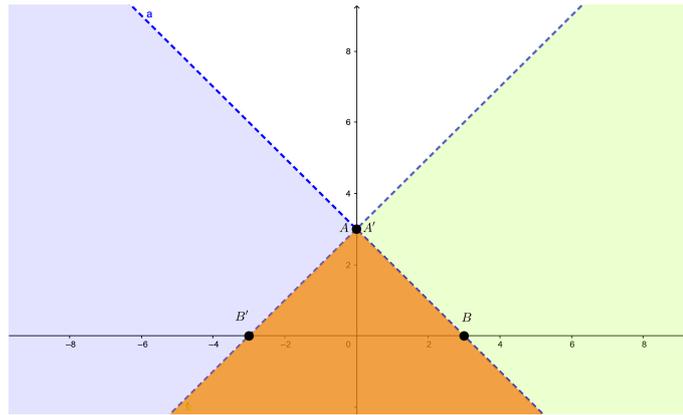


Figura 3.7: Lugar geométrico de  $x + y < 3$  e  $x - y > -3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Para  $y = 0$ , temos que  $\alpha : x + 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3$  e  $\beta : x - 0 = -3 \Leftrightarrow x = -3$ , ou seja, temos os pontos de  $\alpha$  e  $\beta$  pertencentes ao eixo  $x$  com as coordenadas  $B(3, 0)$  e  $B'(0, -3)$ .

Dessa forma, traçaremos as retas  $\alpha$ , pelos pontos  $A$  e  $B$ , e  $\beta$ , pelos pontos  $A'$  e  $B'$ .

A interseção dos semiplanos será o lugar geométrico abaixo da reta  $\alpha$  e abaixo da reta  $\beta$ , simultaneamente (pintada da cor laranja na Figura 3.7).

### 3.4.3 Interseção de semiplanos no plano cartesiano

Ao considerarmos o lugar geométrico de interseção de semiplanos apenas no 1º quadrante nos é imposto as restrições de interseção entre as inequações  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e as inequações dadas, sendo muito útil para limitarmos os problemas de otimização com demandas baseadas em valores positivos.

*Exemplo 7:* Determinar a interseção de semiplanos definidos pelas inequações  $7x + 3y \leq 21$  e  $x + y \leq 5$  e restritos ao 1º quadrante do plano cartesiano.

Note que a resolução deste problema é semelhante ao que vimos anteriormente, mas com a restrição de estar no 1º quadrante do plano cartesiano, ou seja, temos a interseção entre os seguintes semiplanos do sistema:

$$\begin{cases} 7x + 3y \leq 21 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dessa forma, determinaremos os pontos das retas  $\alpha : 7x + 3y = 21$  e  $\beta : x + y = 5$  que interceptam os eixos coordenados:

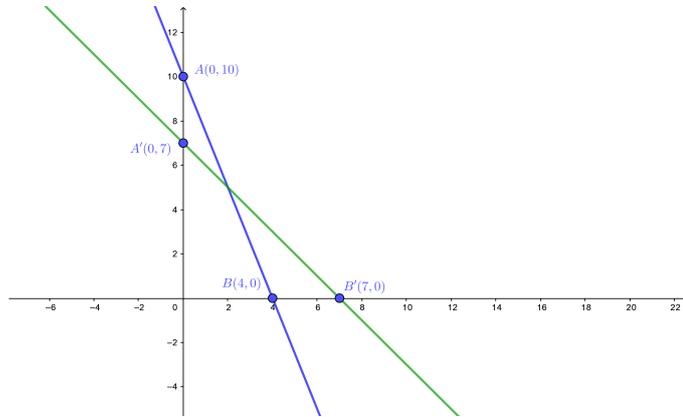


Figura 3.8: Determinação das retas  $\alpha : 7x + 3y = 21$  e  $\beta : x + y = 5$

Fonte: Elaborado pelo autor.

- Para  $x = 0$ , temos que  $\alpha : 7 \cdot 0 + 3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$  e  $\beta : 0 + y = 5 \Leftrightarrow y = 5$ , ou seja, temos os pontos pertencentes ao eixo  $y$  com as coordenadas  $A(0, 7)$  e  $A'(0, 5)$ .
- Para  $y = 0$ , temos que  $\alpha : 7x + 3 \cdot 0 = 21 \Leftrightarrow x = 3$  e  $\beta : x + 0 = 5 \Leftrightarrow x = 5$ , ou seja, temos os pontos pertencentes ao eixo  $x$  com as coordenadas  $B(3, 0)$  e  $B'(5, 0)$ .
- Observaremos também os vértices  $O(0, 0)$  e o vértice da interseção entre as retas  $\alpha$  e  $\beta$ , que deve possuir as coordenadas que correspondem à solução do sistema:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 21 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 3y = 21 \\ -3x - 3y = -15 \end{cases} \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ e } y = \frac{7}{2}$$

Ou seja, a interseção entre  $\alpha$  e  $\beta$  é o ponto  $P\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ , onde  $P \in \alpha$  e  $P \in \beta$ .

Realizaremos, finalmente, a interseção entre os semiplanos  $\alpha$ ,  $\beta$  e as condições iniciais  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  para que o lugar geométrico respeite a restrição do problema, localizando-se, assim, apenas no primeiro quadrante do plano cartesiano e resultando no quadrilátero de coordenadas na origem  $O(0, 0)$ , no vértice pertencente ao eixo  $x$ , o ponto  $B(4, 0)$ , na interseção entre as retas de  $\alpha$  e  $\beta$ , no ponto  $P(2, 5)$  e no vértice pertencente ao eixo  $y$ , o ponto  $A'(0, 7)$ , como segue na Figura 3.9.

### 3.4.4 Determinação de máximos ou mínimos

Com os conhecimentos adquiridos até o momento, é possível chegar ao objetivo da otimização: a obtenção de *máximos* ou *mínimos*.

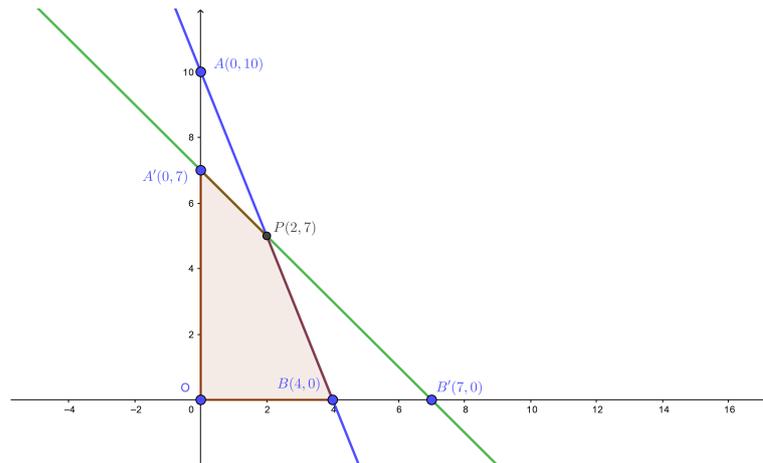


Figura 3.9: Lugar Geométrico pertencente ao primeiro quadrante e determinado pelas inequações  $5x + 2y \leq 20$  e  $\beta : x + y \leq 7$  pintado em marrom.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após modelarmos um problema, teremos uma região de viabilidade, com a determinação de diversos valores que satisfazem às restrições. Porém, procura-se otimizar a função objetivo

### 3.5 Otimização Linear no contexto do Ensino Médio

O processo de otimização de um modelo matemático nada mais é do que determinar o mínimo ou o máximo valor ou valores de uma função. Procura-se então minimizar ou maximizar os resultados, considerando os critérios iniciais do problema abordado.

No caso do exemplo apresentado, seja a função objetivo  $z = 2x + 7y$ , sujeita às restrições:

$$\begin{cases} 7x + 3y \leq 21 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dessa forma, a modelagem pode ser visualizada tridimensionalmente como segue na Figura 3.5.

Com alguma atenção, pode-se notar que, como a função objetivo, necessariamente, gera um plano, os pontos que geram os extremos da função encontram-se nos extremos da área viável. Não apenas isso, os vértices da área viável indicam o máximos (ou mínimo) da função objetivo.

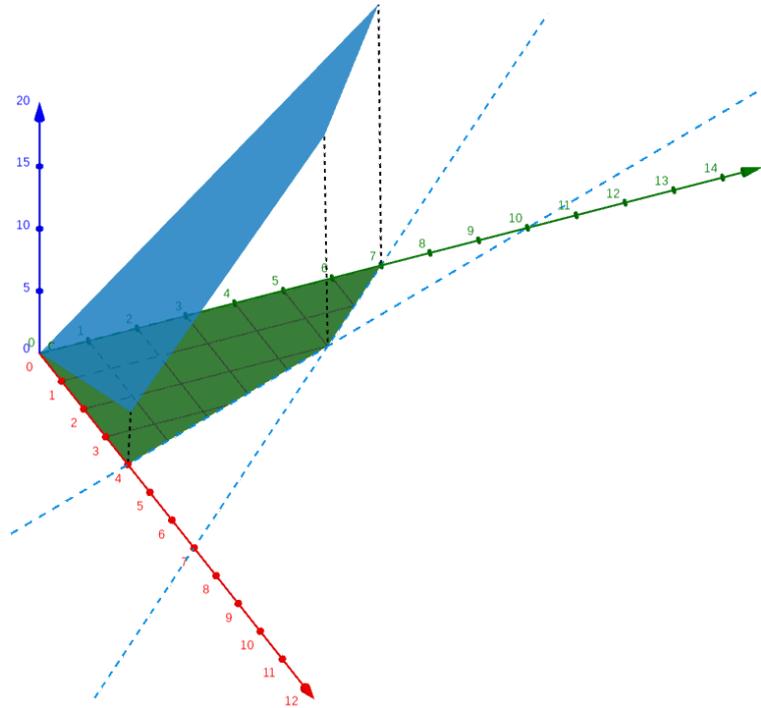


Figura 3.10: Máximo valor da função objetivo

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, basta testarmos os vértices da área viável para que determinemos os pontos cujos valores da função objetivo são máximos (ou mínimos).

Nesse caso, teremos o seguinte:

Tabela 3.2: Coordenadas dos vértices da área viável e seus valores resultantes na função objetivo

Coordenadas ( $x, y$ )	$f(x, y)$
(0, 0)	0
(0, 3)	11
(3, 0)	20
(2, 1)	30

Com isso, o problema apresentado possui como solução ótima os valores  $x = 2$  e  $y = 1$  para as coordenadas, gerando o máximo valor para a função objetivo  $z = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 30$ .

■

### 3.5.1 Resolução de problemas sobre Otimização Linear

Utilizando os conhecimentos destacados, é possível para um estudante do Ensino Médio abordar os seguintes problemas desenvolvidos pelo autor com as estratégias de resolução apresentadas:

Problema 8:

*Um empresa especializada em cereais matinais produz duas marcas distintas, os cereais do tigre haroldinho e os cereais do louro João. Sabe-se que a empresa possui encomendas compradas de 50 caixas dos cereais do tigre haroldinho e 30 caixas de cereais do louro João por semana e que a produção de caixas de cereais é limitada a 160 caixas por semana, devido à limitações de produção. Se a empresa lucra R\$ 9,00 por semana com cada caixa dos cereais do tigre haroldinho e R\$ 6,00 por semana com cada caixa dos cereais do louro João, quais quantidades de cada produto a empresa deve produzir para alcançar o lucro máximo?*

*Resolução:*

Função objetivo:  $L = 9x + 6y$

$$\text{Sujeita a: } \begin{cases} x \geq 50 \\ y \geq 30 \\ x + y \leq 160 \end{cases}$$

Traçaremos, primeiramente, a região de viabilidade observando as restrições do problema e utilizando os lugares geométricos  $x \geq 50$ ,  $y \geq 30$  e  $x + y \leq 160$ , ilustrados na Figura 3.11.

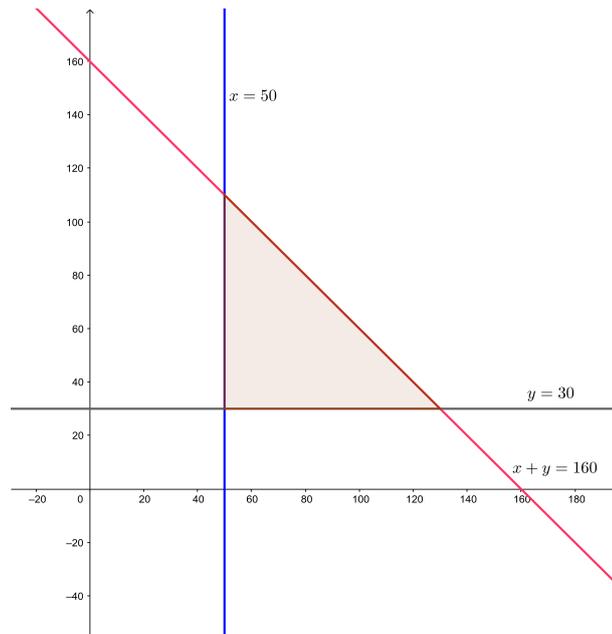


Figura 3.11: Região Viável do Problema 1 - Otimização Linear para o Ensino Médio

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como visto, toda a região viável possui soluções possíveis para o problema, mas as soluções ótimas encontram-se nos vértices da Figura 3.11. Dessa forma, substituiremos cada par ordenado  $(x, y)$  dos vértices do poliedro que forma a região viável na função objetivo, resultando em valores candidatos à valores ótimos.

Tabela 3.3: Coordenadas dos vértices da área viável do problema 1 - Otimização Linear - e seus valores resultantes na função objetivo

Coordenadas $(x, y)$	$f(x, y)$
(50, 30)	630
(50, 110)	1.110
(130, 30)	1.350

Com isso, o problema apresentado possui como solução ótima para  $x = 130$  caixas de cereais do Tigre Haroldinho e  $y = 30$  caixas de cereais do louro João, gerando o lucro máximo da função objetivo  $z = 9 \cdot 130 + 6 \cdot 30 = 1350$  reais por semana.

■

Problema 9:

*Uma empresa aeronáutica brasileira desenvolveu dois tipos de aeronaves de carga leve de última geração, chamados de modelos kc-130 e kc-210.*

Cada modelo do tipo kc-130 requer 50 dias de trabalho para completar sua produção e cada modelo do tipo kc-210 requer 20 dias de trabalho para completar sua produção e não podem ser produzidos simultaneamente em virtude do espaço de trabalho.

A empresa pode estar aberta por todo o ano, inclusive finais de semana e feriados, mas possui a limitação jurídica de produção de, no máximo, 8 aeronaves por ano, devido ao porte da empresa.

Se o lucro da produção do modelo kc-130 é de R\$ 30 000,00 e o lucro do modelo kc-210 é de R\$ 20 000,00, qual a produção que maximiza o lucro da empresa?

*Resolução:*

Primeiramente, deve-se modelar a função objetivo e as restrições impostas pelo problema, como mostrado a seguir:

$$\text{Função objetivo: } L = 30.000x + 20.000y$$

$$\text{Sujeita a: } \begin{cases} 50x + 20y \leq 360 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Diante do modelo, traçaremos a região de viabilidade observando as restrições do problema e utilizando os lugares geométricos indicados, sendo ilustrados na Figura 3.12.

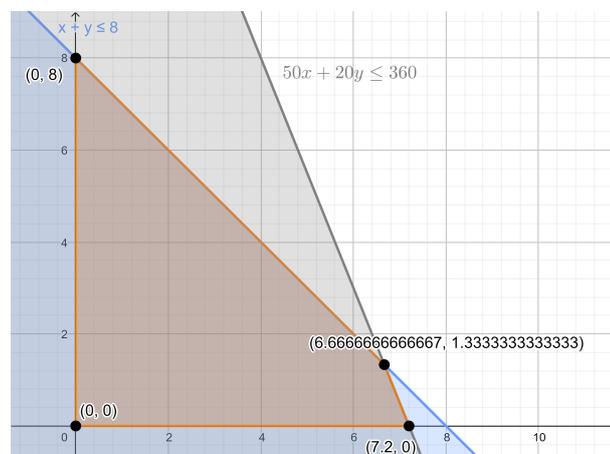


Figura 3.12: Região Viável do Problema 2 - Otimização Linear para o Ensino Médio

Fonte: Elaborado pelo autor.

Toda a região viável possui soluções possíveis para o problema. Como a função objetivo é linear, as soluções ótimas encontram-se na fronteira da região e, especialmente, os pontos de interseção entre as retas  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $50x + 20y = 360$  e  $x + y = 8$ , que pertencem à fronteira da região viável, determinam os valores extremos do conjunto imagem da função objetivo.

Dessa forma, substituiremos cada par ordenado  $(x, y)$  dos vértices da Figura 3.12 na função objetivo, resultando em valores candidatos à valores ótimos.

Tabela 3.4: Coordenadas dos vértices da área viável do problema 2 - Otimização Linear - e seus valores resultantes na função objetivo

Coordenadas $(x, y)$	$f(x, y)$
$(0, 0)$	R\$ 0,00
$(0, 8)$	R\$ 160.000,00
$(7,2, 0)$	R\$ 216.000,00
$(\frac{20}{3}, \frac{4}{3})$	R\$ 226.666,67

Com isso, o problema apresentado possui como solução ótima os valores  $x = \frac{20}{3}$  e  $y = \frac{4}{3}$  para as coordenadas, gerando o máximo valor para a função objetivo  $L = 30.000 \cdot \frac{20}{3} + 20.000 \cdot \frac{4}{3} \cong 226.666,67$ .

■

---

## Capítulo 4

### Incerteza

Problemas que possuem variáveis com algum grau de incerteza em determinado componente ou componentes de seu modelo, não podem ser tratados completamente da mesma forma que problemas em que seus atributos são conhecidos e determinados. Embora haja certa compatibilidade entre o desenvolvimento de problemas tidos como "bem comportados" e problemas que consideram a aplicação de variáveis aleatórias em sua modelagem, os problemas dessa natureza tendem a possuir maior grau de complexidade na sua consideração e desenvolvimento de forma aceitável.

O componente incerto requerido para a modelagem desses problemas pode trazer consigo um componente caótico à obtenção de soluções de uma problemática e, por isso, deve ser tratado com cautela num primeiro momento. Ao contrário de uma determinada solução que se repetirá indefinidamente no desenvolvimento de dado modelo que não possui tal incerteza, nesse tipo de problema, a comprovação da solução ótima é observada durante a análise da tendência geral e frequente das realizações dos fatos descritos pelo problema.

Para problemas com esses viéses, se faz necessária a abordagem da *teoria da probabilidade* para o desenvolvimento do modelo e sua resolução, considerando-se padrões *estocásticos* na aplicação de estratégias de obtenção de soluções viáveis ótimas, ao se considerar problemas de otimização dessa natureza.

Como exemplo, imaginemos a tentativa de predição da posição de uma determinada ação da bolsa de valores em tempos futuros. Suponhamos que, ao desenvolvermos a problemática, obtenhamos que a ação possui 90% de chance de ter seu valor aumentado de 1% por dia. Após observado o valor da ação durante apenas um dia, seria razoável afirmar que a predição foi precisa ou não após a consideração desse período?

Pode-se observar que, a solução obtida não é um resultado determinado, mas sim uma tendência. Nesse sentido, a complexidade de desenvolvimento ou até de interpretação desse tipo de problema ganha novos contornos.

## 4.1 Probabilidades

Experimentos cujos resultados mantêm-se inalterados quando suas premissas são reproduzidas, podendo ser determinados apenas considerando-se as variações das condições iniciais, antes mesmo de serem realizados, são chamados de **Experimentos Determinísticos**. Em oposição, experimentos que geram resultados possivelmente diferentes a partir das mesmas condições iniciais, possuindo resultados imprevisíveis são chamados de **Experimentos Aleatórios** (Lima et al. (1996a)).

Considerando-se um experimento simples, onde se desprende uma bolinha de gude em direção ao solo, podemos determinar que, ao soltá-la de uma altura de 5 metros, dentro de um galpão, desprezando-se a resistência do ar, esta sempre atingirá o solo em, aproximadamente, 1 segundo, ou  $t = \sqrt{\frac{10}{g}}$ , e velocidade de  $v = \sqrt{10g} \approx 9,9$  m/s, mantendo-se as condições dadas. Esse é um clássico *experimento determinístico*. No mesmo problema, ao se considerar a posição final da bolinha após o impacto, a imprevisibilidade impera, como qualquer pessoa que já soltou uma bolinha de determinada altura pode empiricamente observar. Ao se considerar como resultado do experimento a posição final da bolinha, o experimento se mostra um *experimento aleatório* (Lima et al. (1996a)).

Apesar de não haver previsibilidade nos resultados de *Experimentos Aleatórios*, pode-se prever os resultados *possíveis* desse tipo de experimento. No exemplo dado, as possíveis posições da bolinha incluem todo o solo do galpão, limitado a, talvez, alguns metros ou às paredes do galpão. Ao conjunto de todos os resultados possíveis do experimento é dado o nome de **Espaço Amostral**, sendo denotado pela letra grega maiúscula  $\Omega$ , e seus subconjuntos são chamados de **Eventos**, ocorrendo quando o resultado do experimento estiver listado no subconjunto dado (Lima et al. (1996a)).

Denomina-se o índice de possibilidade de ocorrência de um *evento* como **probabilidade** do evento, descrito intuitivamente como a chance de ocorrência de um evento dentro de um experimento aleatório e definido como um valor associado ao evento denominando o grau de confiança na perspectiva do evento ocorrer.

**Definição 4.1** (Eventos Mutuamente Excludentes). Sejam  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  eventos de um espaço amostral  $\Omega$ . Se  $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset$ , então  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são chamados de **Eventos Mutuamente Excludentes**.

**Definição 4.2** (Definição Axiomática de Probabilidade). Dado um evento  $\varepsilon \subseteq \Omega$ , define-se **probabilidade** como uma função que associa cada evento  $\varepsilon$  a um valor  $p(\varepsilon) \in [0, 1]$ , onde, dados  $\varepsilon_1 \not\subseteq \Omega$  e  $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \subset \Omega$ , temos:

1.  $\forall \varepsilon, 0 \leq p(\varepsilon) \leq 1$ ;
2.  $p(\Omega) = 1$ ;
3.  $p(\varepsilon_2 \cup \varepsilon_3) = p(\varepsilon_2) + p(\varepsilon_3)$ , se  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são mutuamente excludentes (Lima et al. (1996a)).

À definição, seguem as *propriedades* da Probabilidade:

**Teorema 4.3** (Propriedades da Probabilidade). (*Lima et al. (1996a)*) *Sejam os eventos não vazios  $\varepsilon_1 \notin \Omega$  e  $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \Omega$ . Dessa forma, tem-se que:*

1.  $p(\varepsilon_1) = 0$ ;
2.  $p(\emptyset) = 0$ ;
3.  $p(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = p(\varepsilon_2) - p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3)$ ;
4.  $p(\varepsilon_2) \geq p(\varepsilon_3)$ , se  $\varepsilon_3 \subset \varepsilon_2$ .

*Demonstração:*

(1) Temos que, pelo item 1 da Definição 4.2,  $0 \leq p(\varepsilon_1 \cup \Omega) \leq 1$ . Além disso, pelo item 3, temos que:

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_1 \cup \Omega) &= p(\varepsilon_1) + p(\Omega) = p(\varepsilon_1) + 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq p(\varepsilon_1) + 1 \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 - 1 \leq p(\varepsilon_1) + 1 - 1 \leq 1 - 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq p(\varepsilon_1) \leq 0 \\ &\Rightarrow p(\varepsilon_1) = 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} p(\varepsilon_2) &= p(\varepsilon_2 \cup \emptyset) = p(\varepsilon_2) + p(\emptyset) \\ \text{Afinal } \varepsilon_2 \notin \emptyset, \text{ então: } p(\varepsilon_2) &= p(\varepsilon_2) + p(\emptyset) \\ &\Rightarrow p(\varepsilon_2) - p(\varepsilon_2) = p(\emptyset) \\ &\Rightarrow 0 = p(\emptyset); \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \cup (\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) \\ &\Rightarrow p(\varepsilon_2) = p([\varepsilon_2 - \varepsilon_3] \cup [\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3]) \\ &\Rightarrow p(\varepsilon_2) = p(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) \\ &\Rightarrow p(\varepsilon_2) - p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) = p(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \end{aligned}$$

(4)

Como  $0 \leq p(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \leq 1$ , pela propriedade anterior, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq p(\varepsilon_2) - p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 + p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) \leq p(\varepsilon_2) - p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) + p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) \\ &\Rightarrow p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_3) \leq p(\varepsilon_2). \end{aligned}$$



### 4.1.1 Probabilidade da União de Eventos

**Proposição 4.4** (União de Conjuntos). *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios. A união desses conjuntos, definida como o conjunto  $A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \text{ ou } x \in B\}$ , possui a seguinte quantidade de elementos, denotada por  $\#$ :*

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) \quad (4.1)$$

*Demonstração:*

Pode-se entender a quantidade de elementos da união de dois conjuntos como sendo:

$$\#(A \cup B) = \#(A - B) + \#(A \cap B) + \#(B)$$

Da mesma maneira, temos que:

$$\begin{aligned} \#(A) &= \#(A - B) + \#(A \cap B) \\ \#(B) &= \#(B - A) + \#(A \cap B) \end{aligned}$$

Então,

$$\#(A) + \#(B) = \#(A - B) + \#(A \cap B) + \#(B - A) + \#(A \cap B)$$

Logo,

$$\#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) = \#(A - B) + \#(A \cap B) + \#(B - A)$$

E assim,

$$\Rightarrow \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B) = \#(A \cup B)$$

■

Com isso, a depender da condição de  $A$  e  $B$  serem de conjuntos mutuamente excludentes,  $p(A \cup B)$  deverá depender apenas de  $p(A)$  e  $p(B)$ , devendo haver compatibilidade com o item (3) da Definição 4.2:

**Proposição 4.5** (Probabilidade da União de Eventos). *Sejam  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Omega$ , conjuntos não-vazios. Dessa forma, a probabilidade de união desses dois eventos deve ser:*

$$P(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2) = P(\varepsilon_1) + P(\varepsilon_2) - P(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) \quad (4.2)$$

*Demonstração.*

Sejam  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Omega$ , conjuntos não-vazios.

Pelo item (3) da Definição 4.2, a probabilidade da união de dois eventos mutuamente excludentes  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$  e  $\varepsilon_2$  é a seguinte:

$$p[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cup \varepsilon_2] = p(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + p(\varepsilon_2)$$

Como  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cup \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ , temos que:

$$p(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + p(\varepsilon_2)$$

Por outro lado, pelo item (3) do Teorema 4.3  $p(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1) - p(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2)$ .

Assim,

$$p(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1) - p(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) + p(\varepsilon_2)$$

(Lima et al. (1996a))

■

### 4.1.2 Probabilidade Complementar

**Definição 4.6** (Eventos Complementares). (Lima et al. (1996a)) Dados dois eventos  $\varepsilon, \bar{\varepsilon} \subset \Omega$ , diz-se que são **Eventos Complementares** se se negam mutuamente e definem todo o espaço amostral, ou seja, se, e somente se, satisfizerem o seguinte:

i .  $\varepsilon \cap \bar{\varepsilon} = \emptyset$  (Eventos Mutuamente Excludentes)

ii .  $\varepsilon \cup \bar{\varepsilon} = \Omega$

Como eventos complementares devem ser eventos excludentes e  $p$  é uma função que associa eventos a números pertencentes a  $[0, 1]$ , é necessário definir a qual valor  $p(\varepsilon \cap \bar{\varepsilon})$  é associado.

**Proposição 4.7** (Quantidade de Elementos de Eventos Mutuamente Excludentes). *Sejam  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  eventos mutuamente excludentes de um espaço amostral  $\Omega$ .*

*Se  $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset$ , então  $P(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) = 0$ .*

*Demonstração.*

Dados  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset \Omega$ , eventos mutuamente excludentes, temos que

$$p(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) = p(\emptyset) = 0 \tag{4.3}$$

■

**Proposição 4.8** (Probabilidade de Eventos Complementares). *A e B são eventos Complementares se, e somente se,  $P(A) = 1 - P(B)$ .*

*Demonstração.*

Sejam  $A \cup B = \Omega$ , eventos mutuamente excludentes, ou seja,  $A \cap B = \emptyset$ . Temos que, pela Proposição 4.8:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Logo,

$$P(\Omega) = P(A) + P(B)$$

Então, pelo item (1) da Definição 4.2,

$$1 = P(A) + P(B).$$

Portanto,  $P(A) = 1 - P(B)$ .

■

### 4.1.3 Probabilidade Condicional

Dados dois eventos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \Omega$ , denota-se a ocorrência do evento  $\varepsilon_1$  após a concretização do evento  $\varepsilon_2$  como  $\varepsilon_1|\varepsilon_2$ .

À probabilidade de ocorrer o evento  $\varepsilon_1$  dado que ocorreu o evento  $\varepsilon_2$  chama-se de **probabilidade condicional**, ou seja:

**Definição 4.9** (Probabilidade Condicional). Dados dois eventos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset \Omega$ , de forma que  $p(\varepsilon_1) > 0$ , a probabilidade de ocorrer  $\varepsilon_2$  sendo que o evento  $\varepsilon_1$  ocorreu é dada por:

$$p(\varepsilon_2|\varepsilon_1) = \frac{p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_1)}{p(\varepsilon_1)} \quad (4.4)$$

### 4.1.4 Probabilidade da Interseção de Eventos

Uma consequência imediata da Definição 4.9 é a de que, dados dois eventos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset \Omega$ , a probabilidade da interseção entre esses dois conjuntos, definida por

$$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{x ; x \in \varepsilon_1 \text{ e } x \in \varepsilon_2\} \quad (4.5)$$

é dada da seguinte forma:

**Proposição 4.10** (Probabilidade da Interseção de Eventos).

$$p(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) = p(\varepsilon_2 \cap \varepsilon_1) = p(\varepsilon_1) \cdot p(\varepsilon_2|\varepsilon_1) \quad (4.6)$$

Deve-se observar ainda que dois eventos podem alterar a probabilidade um do outro e essa questão deve ser levada em conta ao se obter probabilidades de interseções de eventos.

Por outro lado, pode haver eventos que transcorram sem que sua ocorrência influencie outros eventos. Nesse caso, se dois eventos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset \Omega$  não alterarem a probabilidade de ocorrência um do outro em decorrência de sua realização, então são chamados **Eventos Independentes**.

**Definição 4.11** (Eventos Independentes). Dados dois eventos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \subset \Omega$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são ditos **eventos independentes** se

$$p(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1) \cdot p(\varepsilon_2) \quad (4.7)$$

Com isso, se  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são dois eventos de  $\Omega$  independentes entre si, ou seja,  $p(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) = p(\varepsilon_1) \cdot p(\varepsilon_2)$ , então,

$$p(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) = P(\{x \in \Omega | x \in \varepsilon_1 \text{ e } x \in \varepsilon_2\}) = P(\varepsilon_1) \cdot P(\varepsilon_2).$$

#### 4.1.5 Definição de Probabilidade

As ideias de chance e possibilidade se fazem presentes no cotidiano do ser humano desde tenra idade, afinal quem não já se perguntou se iria chover em dado dia para não atrapalhar determinada atividade ao ar livre? Porém, a importância dessa ideia vem crescendo gradativamente e atualmente, é imprescindível para o exercício da cidadania e está cada vez mais presente em informações disponibilizadas por veículos de imprensa e em análises de necessidades do cotidiano.

Inclusive por haver essa visão ingênua e natural sobre probabilidades, que o conceito de probabilidade possui dificuldades em sua definição, por seu caráter multifacetado, permitindo a existência de diferentes perspectivas válidas e compatíveis, assumindo um caráter objetivo e um caráter epistemológico, avaliando tanto a medição de dados estatísticos, lidando com processos do acaso por meio das leis estocásticas, quanto a medição da crença, desvinculando-se de fundamentos estatísticos.

No presente trabalho, serão feitas as análises de modelos de definição de probabilidades na forma dos conceitos Clássico, Axiomático, Subjetivo e Freqüencialista.

Anteriormente, foi estabelecida a definição axiomática de *Probabilidade* de ocorrência de determinado evento aleatório como um número real  $p(\varepsilon) \in [0, 1]$  e demais propriedades, assim, o embasamento teórico está construído, porém é necessária a definição da atribuição de um valor numérico para a possibilidade ou chance de ocorrência de determinado evento.

A atribuição desse valor pode ser um grande problema prático pela própria natureza da incerteza, sendo necessário determinar quais eventos minimamente formam o Espaço Amostral, de forma a reduzir a imprecisão, levando-se em conta diferentes metodologias

para sua obtenção para uma melhor estimativa desse valor numérico, dependendo do tipo de probabilidade (Larson (2015)).

Deve-se observar que a realidade, muitas vezes, não é simples de ser capturada devido à grande quantidade de variáveis que podem interferir num experimento, sendo necessária a redução de possíveis interferências e a escolha de variáveis adequadas para se desenvolver um modelo preciso sem que a complexidade se eleve a níveis impraticáveis.

Com isso em mente, para cada tipo de probabilidade deve ser escolhida uma metodologia que definirá da melhor forma, com o menor erro possível, a realidade do experimento, levando-se em conta que, segundo Georges Box, os modelos são, em função de sua essência, reflexos imperfeitos da realidade, porém úteis para a análise do experimento (Hurson (2013)).

#### 4.1.6 Definição Subjetiva de Probabilidade

Nem sempre é possível utilizar definições mais precisas de probabilidade, sendo útil uma estimativa da probabilidade de determinado evento baseada em análise de algum indivíduo com experiência, se pautando em maiores quantidades de informações para a definição da probabilidade (Larson (2015)).

Para entender melhor, supondo-se um jogo de azar envolvendo 52 cartas, havendo 13 tipos de cartas (A, 2, 3, ...) que possuem 4 naipes diferentes, onde, por algum motivo, as cartas de um dos naipes, por exemplo copas, dá uma determinada vantagem no jogo. Pode-se então inferir que a probabilidade de um jogador possuir um desses naipes seja de 25%, por exemplo, mas uma vez distribuídas as cartas, um jogador experiente pode perceber que algumas cartas de seu adversário estão mais surradas do que o normal, indicando um histórico de descarte maior dessas cartas, reduzindo drasticamente as chances do adversário possuir cartas do naipe de interesse.

Com isso, nota-se que a interpretação do indivíduo experiente proporciona maiores informações para a modelagem da análise do experimento aleatório, tornando-o mais preciso, mesmo que a verificação seja problemática, como no caso visto acima.

#### 4.1.7 Definição Frequencialista ou Empírica de Probabilidade

Ao iniciar os estudos de experimentos aleatórios, qualquer estudante pode inferir uma determinação de probabilidade de dados eventos da forma mais simples possível: Realizar o experimento algumas vezes e anotar a quantidade de vezes que cada evento ocorre, definindo assim a probabilidade de ocorrência de dado evento pela proporção de casos em que ocorreu o evento, tendo em vista a quantidade de lançamentos realizados.

Fazendo-se isso, este hipotético estudante estará, de fato, aplicando o modelo de *Probabilidade Frequencialista* ou também chamada de *Probabilidade Empírica* que se baseia na apuração dos resultados da realização de diversas ocorrências dos mesmos experimentos (Larson (2015)).

**Definição 4.12** (Definição Frequencialista de Probabilidade de um Evento). Dados um experimento realizado  $n$  vezes e um evento  $a_i \in \Omega$  com um número  $\#(a_i)$  de ocorrências ao término das realizações dos experimentos, define-se a Probabilidade desse evento como sendo:

$$P(a_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(a_i)}{n} \quad (4.8)$$

De acordo com a Lei dos grandes números, um dado evento pertencente ao *Espaço Amostral* de um experimento tende à sua probabilidade real conforme há maior frequência da realização do próprio experimento.

Em termos práticos, quanto maior for a quantidade de realizações de um experimento, menos inexata é a aproximação da probabilidade do evento considerado.

### 4.1.8 Lei dos Grandes Números

Como o resultado de experimentos aleatórios são imprevisíveis, por definição, se estipula o grau de confiança de ocorrência de um evento com base em modelos probabilísticos que traduzam essa confiança em valores que obedeçam à teoria probabilística.

Podemos estabelecer um modelo para o lançamento de uma moeda com observação da face que ficará voltada para cima ao término do movimento como possuindo um espaço amostral  $\Omega = \{c, k\}$ , com  $c$  representando a face cara da moeda e  $k$  representando a face coroa da moeda, e  $\Omega$  sendo formado por eventos mutuamente exclusivos:

- $\emptyset \rightarrow$  evento impossível;
- $c \rightarrow$  evento cara;
- $k \rightarrow$  evento coroa;
- $\Omega \rightarrow$  evento certo.

Assim, temos:

$$P(\emptyset) = 0, P(c) = 0,5, P(k) = 0,5 \text{ e } P(\Omega) = 1.$$

Da mesma forma, podemos estabelecer um modelo para a ocorrência de chuvas nos dias durante o ano, com o espaço amostral correspondendo ao conjunto  $\Omega = c, n$ , com  $c$  correspondendo aos dias que chove e  $n$  correspondendo aos dias que não chove, atribuindo os valores  $P(\emptyset) = 0, P(c) = 0,5, P(n) = 0,5$  e  $P(\Omega) = 1$ .

Observa-se que os dois experimentos descritos satisfazem à Definição 4.2 de *Probabilidade* adequadamente, mas não podemos afirmar se esses modelos correspondem à realidade, sendo o segundo modelo mais fácil de observar que não corresponde à realidade, afinal, não chove em 50% dos dias do ano em qualquer lugar do planeta.

Podemos verificar então a veracidade de um modelo de um experimento aleatório simplesmente realizando-o repetidas vezes. Quanto maior for a quantidade de repetições do experimento, maior será a confiança de que o valor atribuído pelo modelo corresponde ou não à realidade.

Essa ideia é associada à Lei dos Grandes números, que pode ser enunciada intuitivamente como *"à medida que mais tentativas se decorrem, a média aritmética dos resultados do experimento realizados consecutivamente tende a se aproximar do valor previsto pelo valor numérico da probabilidade de ocorrência do evento"*.

Com isso, considera-se um experimento aleatório que possua como um de seus eventos o evento  $\varepsilon$ , cujas realizações do experimento  $i$  sejam independentes do experimento  $i+1$ . Devendo-se haver numa quantidade  $n$  suficientemente grande de experimentos, definindo a sequência  $X_i$ . Caso tenha ocorrido o evento  $\varepsilon$  ao final da realização do experimento  $i$ , então  $X_i = 1$ . Caso não tenha ocorrido o evento  $\varepsilon$ , então  $X_i = 0$ .

Dessa forma, na  $n$ -ésima realização do experimento, espera-se como resultado da frequência relativa entre ocorrências do evento  $\varepsilon$  e a quantidade total  $n$  de realizações do experimento o seguinte:

$$f_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \approx p(\varepsilon).$$

Examinando a informações anteriores, infere-se a manifesta proposição a seguir:

**Proposição 4.13** (Lei dos Grandes Números). (*Larson (2015)*) *Seja  $X$  uma variável aleatória de um experimento aleatório e sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  o experimento realizado  $n$  vezes.*

*Supondo-se a média  $\mu$  como sendo uma proporção do evento  $\varepsilon \in \Omega$  sobre o espaço amostral  $\Omega$  do experimento analisado, teremos:*

$$p(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \mu \quad (4.9)$$

*Demonstração:*

Como há a expectativa  $E[X_i] = p(\varepsilon) \cdot 1 + p(\bar{\varepsilon} \cdot 0)$  para o valor assumido por  $X_i$  durante a realização de  $n$  experimentos, com  $n$  suficientemente grande, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n E[X_i]}{n} \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n p(\varepsilon) \cdot 1 + p(\bar{\varepsilon} \cdot 0)}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n p(\varepsilon)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p(\varepsilon) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot p(\varepsilon) \cdot \sum_{i=1}^n 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(\varepsilon)}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(\varepsilon)}{n} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} p(\varepsilon) = p(\varepsilon)
\end{aligned}$$

■

### 4.1.9 Definição Clássica de Probabilidade

Para eventos equiprobabilísticos, propõe-se um modelo analítico que satisfaça à Definição 4.2 e que verifique a *Lei dos Grandes Números* de forma que, particionando cada evento possível, cada resultado possui a mesma possibilidade de ocorrência, podendo-se assim estabelecer cada probabilidade de ocorrência de cada evento.

**Proposição 4.14** (Determinação Clássica da Probabilidade de um Evento). *Ao modelo probabilístico que possui um Espaço Amostral  $\Omega$  de forma que  $\#(\Omega) = n$ ,  $\varepsilon_i \in \Omega$  elementos mutuamente excludentes, com iguais probabilidades, denomina-se modelo equiprobabilístico. Dado um evento  $\varepsilon = \varepsilon_i \cup \dots \cup \varepsilon_{i+k}$  de forma que  $\#(\varepsilon) = k$  elementos equiprováveis, o número associado à probabilidade de  $\varepsilon$  deve ser:*

$$P(\varepsilon) = \frac{k}{n} \quad (4.10)$$

(Lima et al. (1996b)).

*Demonstração.*

Se houver  $n$  eventos possíveis em um espaço amostral  $\Omega$ , mutuamente exclusivos e equiprováveis, de forma que  $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_n = \Omega$  e que  $P(\varepsilon_i) = P(\varepsilon_j), \forall i, j \in 1, 2, 3, \dots, n$ , então:

$$\begin{aligned}
P(\Omega) &= 1 \\
&\text{e} \\
P(\Omega) &= P(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_n) = \\
&= P(\varepsilon_1) + P(\varepsilon_2) + \dots + P(\varepsilon_n) = \\
&= P(\varepsilon_i) + P(\varepsilon_i) + \dots + P(\varepsilon_i) = \\
&= n \cdot P(\varepsilon_i)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow n \cdot P(\varepsilon_i) = 1$$

$$\text{Portanto, } P(\varepsilon_i) = \frac{1}{n}.$$

Por outro lado, suponhamos que  $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_k$ , com  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Dessa forma, teremos:

$$P(\Omega) = 1$$

e

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_k \cup \varepsilon_{k+1} \cup \dots \cup \varepsilon_n) = \\ &= P(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_k) + P(\varepsilon_{k+1}) + \dots + P(\varepsilon_n) = \\ &= P(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_k) + (n - k) \cdot P(\varepsilon_i) = \\ &= P(\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \dots \cup \varepsilon_k) + (n - k) \cdot \frac{1}{n} = \\ &= P(\varepsilon) + (n - k) \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Assim,

$$P(\varepsilon) + (n - k) \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Logo,

$$P(\varepsilon) = 1 - (n - k) \cdot \frac{1}{n}$$

Com isso,

$$P(\varepsilon) = \frac{n - n + k}{n}$$

$$\text{Portanto, } P(\varepsilon) = \frac{k}{n}$$

■

Observamos a validade desse modelo, ao lançarmos mão do exemplo utilizando uma moeda equilibrada (honestas), de forma que  $\Omega = c \cup k$ , com  $c$  e  $k$  mutuamente excludentes e  $P(c) = P(k) = \frac{1}{2} = 0,5$ .

Simulando repetidos experimentos, podemos verificar que o evento  $c$  (cara) possui a probabilidade  $P(c) = 0,5$ , com alta confiabilidade, como se observa na Tabela 4.1:

Pode-se verificar assim que, quanto maior o número de lançamentos da moeda, maior a proximidade da probabilidade do resultado experimental com a probabilidade determinada pelo modelo, mostrando que experimentos equiprobabilísticos são compatíveis com o modelo Clássico de Probabilidade, apesar da prática de verificação possuir limitações e não ser possível de realização em certos casos, podendo-se verificar a veracidade do modelo à posteriori.

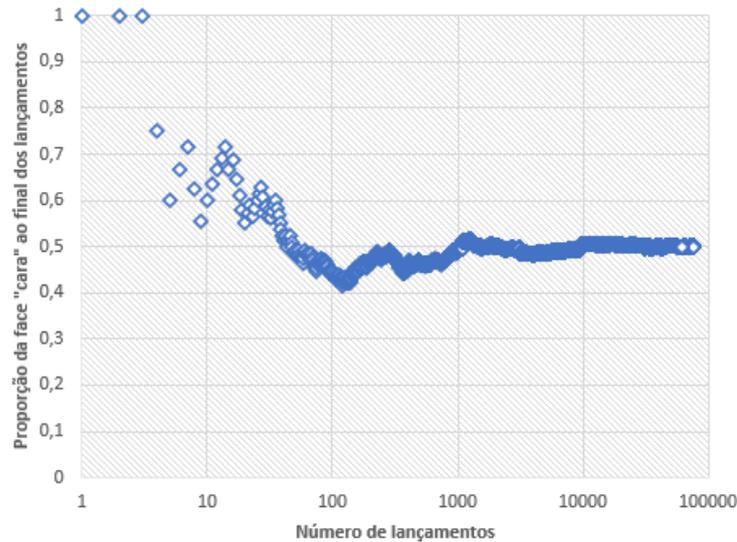


Figura 4.1: Simulação: Proporção de resultados "cara" ao final de 100.550 lançamentos

Fonte: Elaborado pelo autor.

### Verificação dos axiomas de Probabilidade

O modelo de probabilidade deve produzir informações das mais próximas da realidade quanto possível, assim como sua compatibilidade com a *definição axiomática* de probabilidade.

Dessa forma, ao se observar o item (1) da Definição 4.2, verifica-se a sua veracidade e compatibilidade com a teoria axiomática.

Tabela 4.1: Simulação dos lançamentos de uma moeda

Lançamentos	Faces Cara ( $c$ )	Proporção de faces Cara ( $c$ ) em relação ao total de lançamentos
3	3	1,00000
10	6	0,60000
50	29	0,58000
100	45	0,45000
200	88	0,44000
500	235	0,47000
1.000	480	0,48000
100.298	50.198	0,50049
873.769	437.015	0,50015

De fato, seja  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+j}, \dots, a_n\}$  o espaço amostral de um experimento aleatório contendo  $n$  elementos equiprováveis, de forma que  $n, i, j \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq i + j < n$ .

De acordo com o modelo clássico de probabilidade, teremos que:

$$p(a_k) = \frac{1}{n}, \forall k \in 1, 2, \dots, n$$

Assim, segue:

$$0 \leq 1 \leq n$$

Dividindo-se cada mebro por  $n$ , teremos:

$$\frac{0}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{n}{n}$$

Portanto,

$$0 \leq p(a_k) \leq 1$$

Por outro lado, se  $a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+j}$ , tem-se que:

$$p(a_i) = \frac{i + j + 1}{n}$$

Considerando-se as características do espaço amostral teremos:

$$0 \leq i + j < n$$

Assim,

$$0 \leq i + j + 1 \leq n$$

Logo,

$$\frac{0}{n} \leq \frac{i + j + 1}{n} \leq \frac{n}{n}$$

Portanto,

$$0 \leq p(i + j + 1) \leq 1$$

■

Ao se considerar o item (2) da Definição 4.2, também é possível verificar a compatibilidade do modelo clássico com a definição axiomática de probabilidade.

De fato, seja  $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$  o espaço amostral de um experimento aleatório contendo  $n \in \mathbb{N}$  elementos equiprováveis.

De acordo com o modelo clássico de probabilidade, teremos que:

$$p(\Omega) = \frac{\#\Omega}{n} = \frac{\#\{a_1, \dots, a_n\}}{n}$$

E, portanto,

$$p(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$$

■

Ao se observar o item (3) da Definição 4.2, pode-se demonstrar a *Determinação Clássica de Probabilidade*, sua compatibilidade com essa definição e com a *Determinação Empírica de Probabilidade*.

De fato, sejam  $A, B \subset \Omega$  possuindo elementos equiprováveis de forma que  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}$  e  $\#(\Omega) = s$ , com  $k, m, n, s \in \mathbb{N}$ .

Dessa forma,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(\{a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}) = \\ &P(\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}) \\ \text{Então, } \begin{cases} P(\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}) = \frac{n+m+k}{s} \\ P(\{a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k\}) = \frac{n+k}{s} \\ P(\{b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}) = \frac{m+k}{s} \end{cases} \\ \text{Logo, } P(A \cup B) &= \frac{n+m+k}{s} = \frac{n+k}{s} + \frac{m+k}{s} - \frac{k}{s} = \\ P(\{a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, \dots, c_k\}) &+ P(\{b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}) - P(\{c_1, \dots, c_k\}) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Para  $A$  e  $B$  mutuamente excludentes, ou seja, supondo  $\{c_1, \dots, c_k\} = \emptyset$ , tem-se que:

$$p(A \cap B) = p(\{c_1, \dots, c_k\})$$

Com isso,

$$p(A \cap B) = p(\emptyset)$$

Logo,

$$p(A \cap B) = \frac{\#\emptyset}{n}$$

Portanto,

$$p(A \cap B) = \frac{0}{n} = 0.$$

Dessa forma,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Logo,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - 0$$

Portanto,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

■

#### 4.1.10 Desenvolvimento de problemas utilizando a Probabilidade Clássica

A partir da *Definição Clássica de Probabilidade* e considerando-se problemas apropriados, que podem ser modelados de forma compatível com a realidade, pode-se então desenvolver soluções cuja aplicação da teoria seja viável.

Num primeiro momento, modela-se o problema considerando-se seus elementos como sendo equiprováveis, aplicando-se os axiomas da Definição 4.2 de probabilidade e suas propriedades 4.3.

#### Problemas de probabilidade utilizando-se o modelo Clássico

*Problema 10: Considere um ralo de pia, muito comum nos lares brasileiros, que possui um mecanismo circular com um chanfro que permite a passagem de água quando o pino central está fora do chanfro e que bloqueia a água quando o pino central se encontra no chanfro, como mostrado na Figura 4.2.*

*Sabendo-se que o diâmetro do mecanismo é de 1 cm na parte interna e que a largura do chanfro possui a espessura do pino de 3 mm, se girarmos aleatoriamente o mecanismo, qual é a probabilidade de que o mesmo bloqueie a água?*

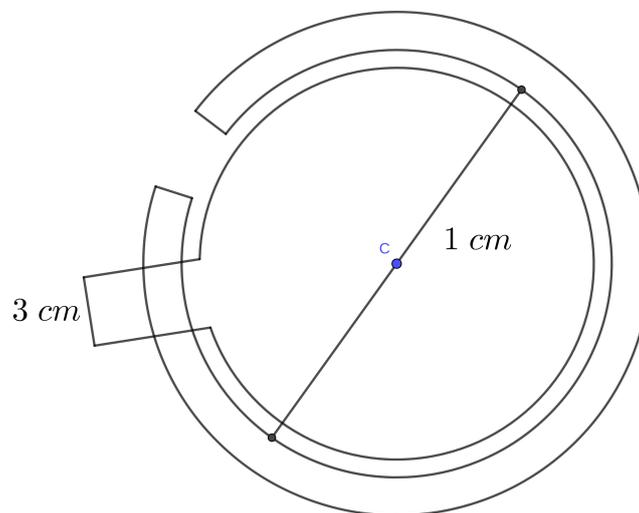


Figura 4.2: Problema 10: Ralo de Pia

Fonte: Elaborado pelo autor.

*Resolução:*

Considerando-se o círculo de centro  $C$  e raio  $r$ , estabeleceremos dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes ao círculo. Afirmamos que esses dois pontos  $A$  e  $B$  definem dois semicírculos  $S_{AB}$  e  $S_{BA}$ , considerando-se os pontos no sentido horário, de forma que ou  $S_{AB} < S_{BA}$  ou  $S_{BA} < S_{AB}$  ou  $S_{BA} = S_{AB}$ .

Desconsiderando-se o caso  $S_{BA} = S_{AB}$ , assumiremos  $S_{AB} < S_{BA}$  e  $S_{BA} < S_{AB}$  como casos análogos.

Dessa forma, definindo-se  $S_{AB} < S_{BA}$ , chamaremos de  $\overline{S_{AB}}$  ao comprimento do semicírculo  $S_{AB}$  e de  $\overline{AB}$  à distância euclidiana entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Observando-se o triângulo  $\triangle ABC$ , chamaremos de  $\theta$  ao ângulo  $\angle ACB$ .

Com isso, temos que

$$p = \theta r$$

e que, pelas relações trigonométricas,

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{c}{2r}$$

Logo,

$$\overline{S_{AB}} = 2r \cdot \arcsen\left(\frac{\overline{AB}}{2r}\right)$$

Queremos a probabilidade do evento *Bloquear*, onde o pino central se alinhe com o chanfro de comprimento  $\overline{AB}$ .

Pode-se perceber que, não basta que uma pequena parte do pino se alinhe com o chanfro, mas sim que uma parte significativa do pino esteja alinhada com o chanfro para que este se encaixe e bloqueie a água.

Suponha-se a necessidade de pelo menos  $q\%$  de alinhamento do pino circular, com o chanfro para ocorrer o encaixe.

Dessa forma, teremos a probabilidade de bloqueio da água como sendo:

$$p(\text{Bloqueio}) = \frac{(1 - q) \cdot 2r \cdot \arcsen\left(\frac{\overline{AB}}{2r}\right)}{2\pi r}$$

$$\Leftrightarrow p(\text{Bloqueio}) = \frac{(1 - q) \cdot \arcsen\left(\frac{\overline{AB}}{2r}\right)}{\pi}$$

Utilizando-se as informações do problema e supondo  $q = 0,6$ , teremos:

$$p(\text{Bloqueio}) = \frac{(1 - 0,6) \cdot \arcsen\left(\frac{3}{2,5}\right)}{\pi} = 0,038794$$

Ou seja, há uma probabilidade de, aproximadamente, 3,88% de que, aleatoriamente, o ralo bloqueie a água que escoar da pia.



### Exemplo de Eventos União

*Problema 11: Diante de inferência estatística sobre dados amostrais, sabe-se que a população de um determinado país é de 200 milhões ou mais de habitantes com 90% de certeza. Por outro lado, outro estudo indicou que o país deva ter 200 milhões ou menos de habitantes com 11% de certeza. Considerando-se que ambos estudos não estão enviesados, ou seja, ambos estudos estão corretos, qual a probabilidade de que o país tenha exatamente 200 milhões de habitantes?*

*Resolução:*

A probabilidade de que a população desse país seja menor, maior ou igual a 200 milhões, deve ser a união dos eventos  $A$ , ter 200 milhões de habitantes ou mais, e  $B$ , ter 200 milhões de habitantes ou menos.

Assim, pela propriedade de União de Eventos, temos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Como  $p(A) = 0,9$ ,  $p(B) = 0,11$  e  $p(A \cup B) = 1$ , temos que:

$$p(A \cup B) = 0,9 + 0,11 - p(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0,9 + 0,11 - p(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow p(A \cap B) = 0,9 + 0,11 - 1 = 0,01$$

Portanto, há uma probabilidade de 1% de que a população tenha exatamente 200 milhões de habitantes.



### Exemplos de Eventos Complementares

*Problema 12: Suponhamos que haja em uma sala  $n$  pessoas. Se todas as pessoas que estão na sala não são filhos dos mesmos pais, possuindo, portanto, datas de nascimento aleatórias, qual a probabilidade de haver duas pessoas nessa sala que façam aniversário no mesmo dia do ano?*

*Resolução:*

Se houver  $n \in \mathbb{N}$  pessoas em uma sala, denotando-se a probabilidade de que duas pessoas façam aniversário no mesmo dia por  $A$ , a probabilidade de duas pessoas **não** fazerem aniversário no mesmo dia do ano será de:

$$p(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (366 - n)}{365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365} = \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}$$

Com isso, atribuindo-se de forma crescente valores naturais a  $n$ , a probabilidade de duas pessoas dessa sala fazerem aniversário no mesmo dia será descrita como:

Para  $n = 10$ :

$$p(A) = 1 - \frac{365!}{(365 - 10)! \cdot 365^{10}} = 0,11694818$$

Para  $n = 20$ :

$$p(A) = 1 - \frac{365!}{(365 - 20)! \cdot 365^{20}} = 0,41143838$$

Para  $n = 21$ :

$$p(A) = 1 - \frac{365!}{(365 - 21)! \cdot 365^{21}} = 0,44368834$$

Para  $n = 22$ :

$$p(A) = 1 - \frac{365!}{(365 - 22)! \cdot 365^{22}} = 0,47569531$$

Para  $n = 23$ :

$$p(A) = 1 - \frac{365!}{(365 - 23)! \cdot 365^{23}} = 0,50729723$$

Para  $n = 60$ :

$$p(A) = 1 - \frac{365!}{(365 - 60)! \cdot 365^{60}} = 0,99412266$$

Pode-se observar que com apenas 23 pessoas na sala, há maior probabilidade de duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia do que de não fazerem. Com apenas 60 pessoas, há 99,41% de chance de duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia, ou seja, um evento quase certo.

■

*Problema 13: Em um sorteio de  $k$  prêmios, os candidatos a premiados devem comprar pelo menos um dos  $N$  bilhetes impressos previamente que correspondem aos números impressos em bolinhas a serem sorteadas por meio de um globo giratório, para cada prêmio desejado. Cada extração seleciona apenas um prêmio, os bilhetes não sorteados não podem ser utilizados para prêmios diferentes e o número de bilhetes impressos para cada prêmio foi o*

mesmo.

Se Alberto comprar  $n$  bilhetes visando apenas um prêmio ( $1 < n \leq k < N$ ) e Bruno comprar  $n$  bilhetes para diferentes prêmios, qual dos dois terão mais chances de ganhar algum prêmio?

*Resolução:*

Pela definição clássica de probabilidade e denotando os eventos *Alberto ganhar* por  $A$  e *Bruno ganhar* por  $B$ , temos que:

$$p(A) = \frac{n}{N}$$

e

$$p(B) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^i \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-i}$$

Porém, utilizando a propriedade de *Probabilidade Complementar*, temos que:

$$p(B) = 1 - p(\bar{B})$$

$$\Leftrightarrow p(B) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^0 \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-0}$$

$$\Leftrightarrow p(B) = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow p(B) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

De posse dessas duas informações, deve-se determinar se  $p(A) > p(B)$  ou se  $p(A) < p(B)$  ou se  $p(A) = p(B)$ .

Para isso, sabendo-se que  $n, N \in \mathbb{N}$  e que  $1 \leq n \leq N$ , temos:

$$N < N + n - 1$$

$$\Leftrightarrow N - n < N - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{N-n}{N} < \frac{N-1}{N} < \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{N-n}{N} \cdot N^n < (N-1)^n$$

$$\Leftrightarrow (N - n) \cdot N^{n-1} < (N - 1)^n$$

$$\Leftrightarrow N^n - n \cdot N^{n-1} < (N - 1)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{N^n - (N - 1)^n}{N^n} < \frac{n \cdot N^{n-1}}{N^n}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{N - 1}{N}\right)^n < \frac{n}{N}$$

Portanto,

$$p(B) < p(A)$$

■

### Exemplo de Eventos Intersecção

*Problema 14: Sabendo-se que a probabilidade de nascimento de um filho homem é cerca de 50%, um casal decidiu ter dois filhos. Qual a probabilidade de nascerem dois filhos homens?*

*Resolução:*

Como a probabilidade de nascimento é de 50% para cada sexo, faremos a seguinte modelagem:

$$p(h \cap h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Logo,

$$p(h \cap h) = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de nascerem dois filhos homens é de 25%.

■

*Problema 15: Uma empresa produz um circuito impresso que possui três componentes ligados em série, funcionando de forma independente um do outro. Os fornecedores de cada componente informam a probabilidade de falha para cada componente como sendo  $p_a = 0,1$ ,  $p_b = 0,15$  e  $p_c = 0,05$ . Qual é a probabilidade de que o equipamento pare de funcionar devido à uma falha de qualquer componente, ou seja, qual a probabilidade de que não passe corrente elétrica no circuito?*

*Resolução:*

Temos que para um circuito em série funcionar, todos os componentes devem estar funcionando.

Dessa forma, a probabilidade do circuito  $\alpha$  estar funcionando deve ser:

$$p(\alpha) = p(\overline{p_a} \cap \overline{p_b} \cap \overline{p_c})$$

Assim,

$$p(\alpha) = p(\overline{p_a}) \cdot p(\overline{p_b}) \cdot p(\overline{p_c})$$

Como  $p_a = 0,1$ ,  $p_b = 0,15$  e  $p_c = 0,05$ , então temos que  $\overline{p_a} = 0,9$ ,  $\overline{p_b} = 0,85$  e  $\overline{p_c} = 0,95$ .

Dessa forma,

$$p(\alpha) = 0,9 \cdot 0,85 \cdot 0,95 = 0,7267$$

Logo, pela propriedade da Probabilidade Complementar, temos que:

$$p(\alpha) + p(\overline{\alpha}) = 1$$

$$\Leftrightarrow p(\overline{\alpha}) = 1 - p(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow p(\overline{\alpha}) = 1 - 0,7267 = 0,27325$$

Por outro lado, também poderíamos ter utilizado a probabilidade de União de Eventos de falha de cada componente, logo teríamos o seguinte:

$$p(\alpha) = p(a \cup b \cup c) =$$

$$= p_a + p_b + p_c - p(a \cap b) - p(a \cap c) - p(b \cap c) + p(a \cap b \cap c) =$$

$$= p_a + p_b + p_c - p_a \cdot p_b - p_a \cdot p_c - p_b \cdot p_c + p_a \cdot p_b \cdot p_c =$$

$$= 0,1 + 0,15 + 0,05 - 0,1 \cdot 0,15 - 0,1 \cdot 0,05 - 0,15 \cdot 0,05 + 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,05 = 0,27325$$

Portanto, a probabilidade do circuito falhar é de 27,325%.



**Exemplo da Probabilidade Condicional**

*Problema 16: Das 50 peças contidas em uma caixa para seu armazenamento, 15 peças possuem algum tipo de defeito de fabricação. Qual a probabilidade de, ao se retirar duas peças aleatoriamente, ambas estarem com defeito, ambas não apresentarem defeitos e pelo menos uma peça estar com defeito?*

*Resolução:*

Temos que, para ambas peças estarem com defeito, a probabilidade será dada por:

$$p(D \cap D) = \frac{15}{50} \cdot \frac{14}{49} = 0,085714$$

Para ambas as peças não apresentarem defeitos, a probabilidade será dada por:

$$p(\bar{D} \cap \bar{D}) = \frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} = 0,485714$$

E, para pelo menos uma peça estar com defeito, a probabilidade será dada por:

$$p[(D \cap \bar{D}) \cup (\bar{D} \cap D) \cup (\bar{D} \cap \bar{D})] = \frac{15}{50} \cdot \frac{35}{49} + \frac{35}{50} \cdot \frac{15}{49} + \frac{35}{50} \cdot \frac{34}{49} = 0,91428571$$



---

## Capítulo 5

# Otimização sob Incerteza

Situações-problema envolvendo parâmetros incertos tendem a surgir de forma comum, pois nem sempre se pode atribuir um valor determinístico à ocorrência de determinada informação da problemática, ocupando-se de situações que possuem alguns ou todos os seus parâmetros descritos por variáveis aleatórias.

Levando-se em conta essa particularidade, pode-se dizer que o principal objetivo da otimização que analisa problemas com características aleatórias é o de convertê-las em parâmetros equivalentes aos de problemas determinísticos, utilizando-se o conhecimento já fundamentado na forma linear para estimar soluções ótimas (Rao (2009)).

Há diversas abordagens para problemas de natureza aleatória, dependendo de suas características. À seguir serão discutidas duas abordagens clássicas para problemas de otimização com coeficientes aleatórios. Também serão considerados problemas que possuam demanda incerta.

### 5.1 Otimização Linear com coeficientes aleatórios

Em problemas onde a incerteza se manifesta apenas em alguns coeficientes do modelo matemático, há duas abordagens consideradas clássicas na literatura: a abordagem Espere e Veja e a abordagem Aqui e Agora (Wets (2002)).

Na abordagem Espere e Veja, considera-se que o agente decisor poderá definir suas escolhas após conhecer o grau de incerteza, possibilitando a definição dos valores ótimos em função dessas informações. Dessa forma, os valores ótimos são gerados após a identificação desses valores, gerando um problema de *Otimização Linear* padrão que apenas aguarda a incorporação de informações posteriores.

Por outro lado, na abordagem Aqui e Agora, a decisão deve ser tomada previamente, ou seja, antes do conhecimento do grau de incerteza de determinados componentes, tendo por base a função de distribuição desses componentes.

Para isso, o agente decisor pode determinar níveis de escolhas, como por exemplo, uma escolha pessimista e uma escolha otimista, transformando a resolução do problema

sob incerteza em uma resolução de *otimização linear* determinística, abolindo-se assim essas incertezas. Também pode se fazer escolhas que determinem o risco aceitável, incorporando essas informações nas restrições da modelagem do problema, embora haja outras abordagens (Wets (2002)).

Como exemplo, analisaremos a seguinte aplicação adaptada de uma situação real pelo autor:

*Problema 17: Para realizar um determinado tipo de plantação, foi recomendado 110 gramas de um nutriente A e 50 gramas de um nutriente B para serem distribuídos homoganeamente no terreno a fim de se produzir com a máxima qualidade.*

*Para a realização de tal feito, há dois tipos de adubos disponíveis:*

*O adubo do tipo 1, com quantidade incerta do nutriente A, possuindo limites mínimo e máximo de sua quantidade entre  $[1,5 ; 6,2]$  gramas e de, em média, 1 g do nutriente B em sua composição.*

*E o adubo do tipo 2 possui a quantidade incerta do nutriente A com limites pertencentes ao intervalo  $[0,3 ; 1]$  gramas e de, em média, 1 g do nutriente B em sua composição.*

*Ambos intervalos probabilísticos uniformemente distribuídos.*

*Assim, considerando-se que os produtos possam ser adquiridos pelo mesmo custo, quanto de cada tipo de adubo o produtor deverá usar para atender às necessidades de nutrientes pela plantação?*

*Resolução:*

Iremos definir  $x_1$  como a quantidade de adubo 1, em gramas, e  $x_2$  como a quantidade do adubo 2, também em gramas. O produtor deve então utilizar de forma ótima os adubos disponíveis, ou seja, utilizar a menor quantidade possível da mistura dos adubos 1 e 2, para distribuir no terreno de modo a atender às necessidades dos nutrientes A e B da plantação. Além disso, deve-se considerar que o terreno deve ter, pelo menos, 110 gramas do nutriente A e, pelo menos, 50 gramas do nutriente B no terreno para que sejam atendidas as necessidades da plantação.

Para isso, deve-se levar em conta a quantidade incerta de  $\omega_1 \in [1, 5; 6, 2]$  gramas do nutriente A presente no adubo do tipo 1 e da quantidade incerta de  $\omega_2 \in [0, 3; 1]$  gramas do nutriente B presente no adubo do tipo 2, além da quantidade de 1 grama do nutriente B presente na composição de ambos adubos.

Dessa forma, o problema pode ser modelado como segue:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \geq 110 \text{ (A)} \\ x_1 + x_2 \geq 50 \text{ (B)} \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Para a resolução do modelo com dados incertos, iremos considerar as duas abordagens destacadas.

### Abordagem Espere e Veja

Como visto anteriormente, esta abordagem pressupõe a espera da informação incerta, atribuindo-se como solução ótima os valores  $x_i$  em função desses dados incertos  $\omega_i$ .

Nesse caso, multiplicando-se a inequação (B) por  $\omega_1$  e realizando-se a diferença entre (A) e (B), obtém-se:

$$\begin{cases} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \geq 110 \\ \omega_1 x_1 + \omega_1 x_2 \geq 50 \omega_1 \end{cases}$$

Logo,

$$(\omega_2 - \omega_1)x_2 \geq 110 - 50 \omega_1$$

Como  $\omega_2 \neq \omega_1$ , pois  $\omega_1 \in [1, 5; 6, 2]$  e  $\omega_2 \in [0, 3; 1]$ , temos que:

$$x_2 \geq \frac{110 - 50 \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}$$

Como há a restrição  $x_2 \geq 0$ , deve-se considerar a imagem de  $x_2$  da mesma forma:

$$\frac{110 - 50\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \geq 0$$

Assim, multiplicando-se ambos os lados por  $\omega_2 - \omega_1 \neq 0$  e isolando-se  $\omega_1$ , obetém-se:

$$\omega_1 \leq 2.2$$

Com isso, como  $x_2 \geq 0$ , para o caso contrário a condição  $\frac{110-50 \omega_1}{\omega_2-\omega_1} \geq 0$  deve ser admitida como uma igualdade, pois não poderão ser admitidos valores menores, obtendo-se  $x_2$  como a condicional.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{110-50 \omega_1}{\omega_2-\omega_1}, \text{ se } \omega_1 \leq 2.2 \\ x_2 = 2.2, \text{ se } \omega_1 > 2.2 \end{cases}$$

Por outro lado, admitindo-se  $x_2$  como o valor mínimo, teremos que:

$$x_1 + \frac{110 - 50 \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \geq 50$$

Logo,

$$x_1 \geq 50 - \frac{110 - 50 \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}$$

Então,

$$\Leftrightarrow x_1 \geq \frac{50 \omega_2 - 110}{\omega_2 - \omega_1}$$

Da mesma forma que anteriormente,  $x_1$  possui a restrição  $x_1 \geq 0$ , com isso teremos que:

$$\frac{50 \omega_2 - 110}{\omega_2 - \omega_1} \geq 0$$

e, multiplicando-se ambos os lados por  $\omega_2 - \omega_1 \neq 0$  e isolando-se  $\omega_2$ , obtém-se:

$$\omega_2 \geq 2.2$$

Com isso, como  $x_1 \geq 0$ , para o caso contrário a condição  $\frac{50 \omega_2 - 110}{\omega_2 - \omega_1} \geq 0$  deve ser admitida como uma igualdade, pois não poderão ser admitidos valores menores, obtendo-se  $x_1$  como a condicional.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{50 \omega_2 - 110}{\omega_2 - \omega_1}, & \text{se } \omega_1 \geq 2.2 \\ x_1 = 2.2, & \text{se } \omega_2 < 2.2 \end{cases}$$

Portanto, as quantidades ótimas dos adubos 1 e 2 devem ser:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{50 \omega_2 - 110}{\omega_2 - \omega_1}, & \text{se } \omega_1 \geq 2.2 \\ x_1 = 2.2, & \text{se } \omega_2 < 2.2 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{110 - 50 \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}, & \text{se } \omega_1 \leq 2.2 \\ x_2 = 2.2, & \text{se } \omega_1 > 2.2 \end{cases} \quad (5.3)$$

Logo, a solução ótima do modelo deve ser o par ordenado  $(x_1^*(\omega_1, \omega_2), x_2^*(\omega_1, \omega_2))$  que depende dos valores incertos  $(\omega_1, \omega_2)$  a serem definidos, otimizando a problemática de forma simbólica e não definitiva.

### Abordagem Aqui e Agora

Neste caso, o agente decisor deve realizar a escolha ótima de utilização de  $x_1$  e  $x_2$  desconhecendo os valores dos dados incertos.

A análise realizada nesta abordagem deverá determinar as escolhas estipuladas, utilizando-se as técnicas de Otimização Linear Determinística com a desvantagem de não

se considerar todos os valores dos intervalos considerados.

Neste problema, para eliminar incertezas, deve-se admitir três níveis de escolha: a escolha pessimista, a escolha neutra e a escolha otimista.

Com o modelo em mãos, podemos analisar primeiramente sua região viável  $R$ , determinada pelo poliedro representado na Figura 5.1, levando-se em conta o gradiente  $\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\delta(x_1+x_2)}{\delta x_1}, \frac{\delta(x_1+x_2)}{\delta x_2}\right) = (1, 1)$ :

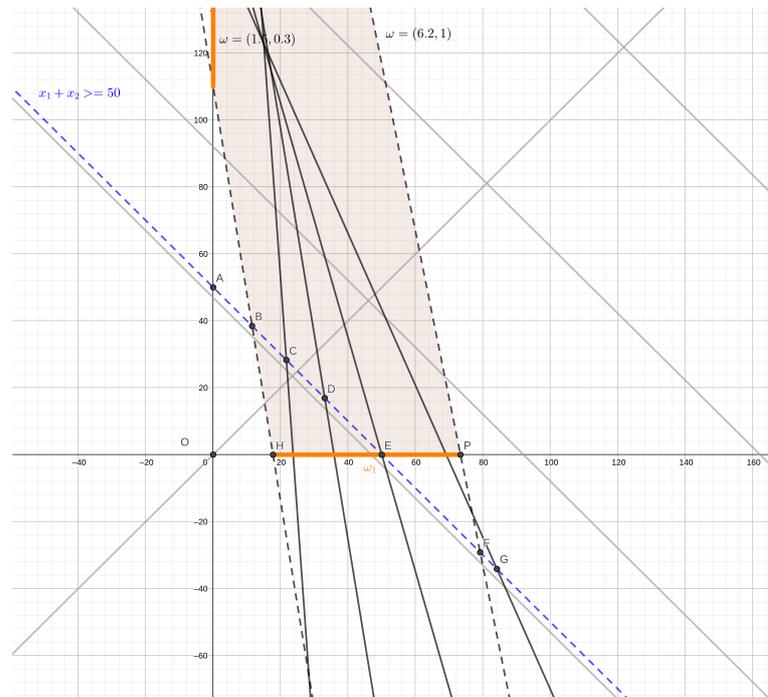


Figura 5.1: Otimização do Problema da Mistura

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo gráfico, percebe-se que o ponto ótimo pertencerá à reta  $x_1 + x_2 = 50$ , dependendo de  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ .

Porém, como não há essa informação, necessitamos, para determinar as melhores escolhas, considerar o conjunto de incertezas  $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in [1, 5; 6, 2] \times [0, 3; 1]$  e sua distribuição de probabilidades, que neste caso é uniforme.

A escolha mais otimista consiste em  $\omega_o = (6.2, 1)$ , por serem as coordenadas mais extremadas do produto cartesiano  $[1, 5; 6, 2] \times [0, 3; 1]$ .

A escolha mais pessimista consiste em considerar as coordenadas mínimas do intervalo de probabilidades, ou seja, o ponto  $\omega_p = (1, 5; 0, 3)$ , possibilitando toda uma variação de pontos  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  na região delimitada entre esses dois pontos.

Como a distribuição de probabilidades definida é uma distribuição uniforme, podemos assumir um segmento de reta entre os pontos  $\omega_p$  e  $\omega_o$  da região de probabilidades e determinar o ponto médio desse segmento como sendo a escolha neutra do conjunto. Sendo este ponto, o ponto  $\omega_n = (3, 85; 0, 65)$ .

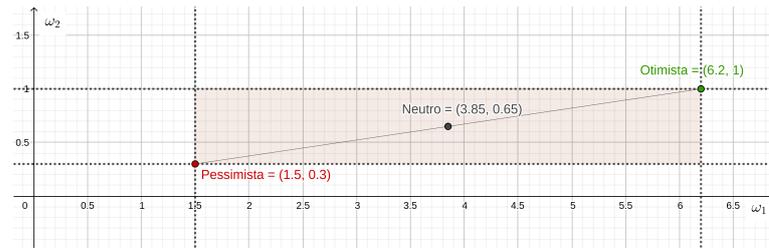


Figura 5.2: Conjunto de probabilidades  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, deve-se determinar a solução ótima para os três casos de forma determinística:

### Escolha Otimista:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$s.a. \begin{cases} 6.2 x_1 + x_2 \geq 110 & (A) \\ x_1 + x_2 \geq 50 & (B) \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Com isso, pode-se atribuir variáveis de folga  $y_1$  e  $y_2$  para escrever o modelo na forma padrão:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$s.a. \begin{cases} 6.2 x_1 + x_2 - y_1 = 110 & (A) \\ x_1 + x_2 - y_2 = 50 & (B) \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Considerando-se apenas as inequações (A) e (B), afinal as demais inequações apenas indicam a não negatividade das variáveis, temos então duas variáveis básicas, produzindo a forma matricial padrão:

$$\begin{bmatrix} 6.2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Como há duas equações, temos  $m = 2$  variáveis básicas e  $n - m = 4 - 2 = 2$  variáveis não básicas. Igualando as variáveis não básicas a zero e combinando todas as variáveis 2 a 2, teremos  $\binom{4}{2} = 6$  pontos extremos, calculados por meio de produtos de matrizes da forma  $A \cdot x = b$ , sendo a matriz  $A$  uma matriz quadrada, como segue:

$$p_1 : \begin{bmatrix} 6.2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Pode-se então calcular a matriz  $A^{-1}$ , inversa da matriz  $A$ , desde que  $\det(A) \neq 0$ . Neste caso, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Calculando-se o produto de matrizes, obtém-se:

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{150}{13} \\ \frac{500}{13} \end{bmatrix}$$

Testando esse ponto com as restrições do problema, temos que (A)  $6,2 \cdot \frac{150}{13} + \frac{500}{13} = 110$  e  $x_1 + x_2 = \frac{150}{13} + \frac{500}{13} = 50$ , ou seja, esse ponto é viável.

De forma análoga, calcularemos os pontos  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  e  $p_6$ :

$$\begin{aligned} p_2 : \begin{bmatrix} 6.2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 50 \\ 200 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $6,2 \cdot 50 + 0 = 310$  e (B)  $x_1 + x_2 = 50 + 0 = 50$ , ou seja, esse ponto é viável.

$$\begin{aligned} p_3 : \begin{bmatrix} 6.2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{550}{31} \\ -1000/31 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{550}{31} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $6,2 \cdot \frac{550}{31} + 0 = 110$  e (B)  $x_1 + x_2 = \frac{550}{31} + 0 = 17,74$ , ou seja, esse ponto não é viável.

$$\begin{aligned}
 p_4 : \quad & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -60 \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $6, 2 \cdot 0 + 50 = 50$  e (B)  $x_1 + x_2 = 0 + 50 = 50$ , ou seja, pela restrição (A), esse ponto é inviável.

$$\begin{aligned}
 p_5 : \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 60 \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Testando esse ponto, temos que (A)  $6, 2 \cdot 0 + 110 = 110$  e (B)  $x_1 + x_2 = 0 + 110 = 110 > 50$ , ou seja, esse ponto é viável.

$$\begin{aligned}
 p_6 : \quad & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Testando esse ponto, temos que (A)  $6, 2 \cdot 0 + 0 = 0$  e (B)  $x_1 + x_2 = 0 + 0 = 0$ , ou seja, por ambas restrições, esse ponto não é viável.

Fazendo o produto da matriz das coordenadas dos vértices viáveis, obtidos anteriormente, pela matriz dos coeficientes da função objetivo, determina-se a imagem de  $f$ , que espera-se minimizar:

$$\begin{bmatrix} \frac{150}{13} & \frac{500}{13} \\ 50 & 0 \\ 0 & 110 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 110 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

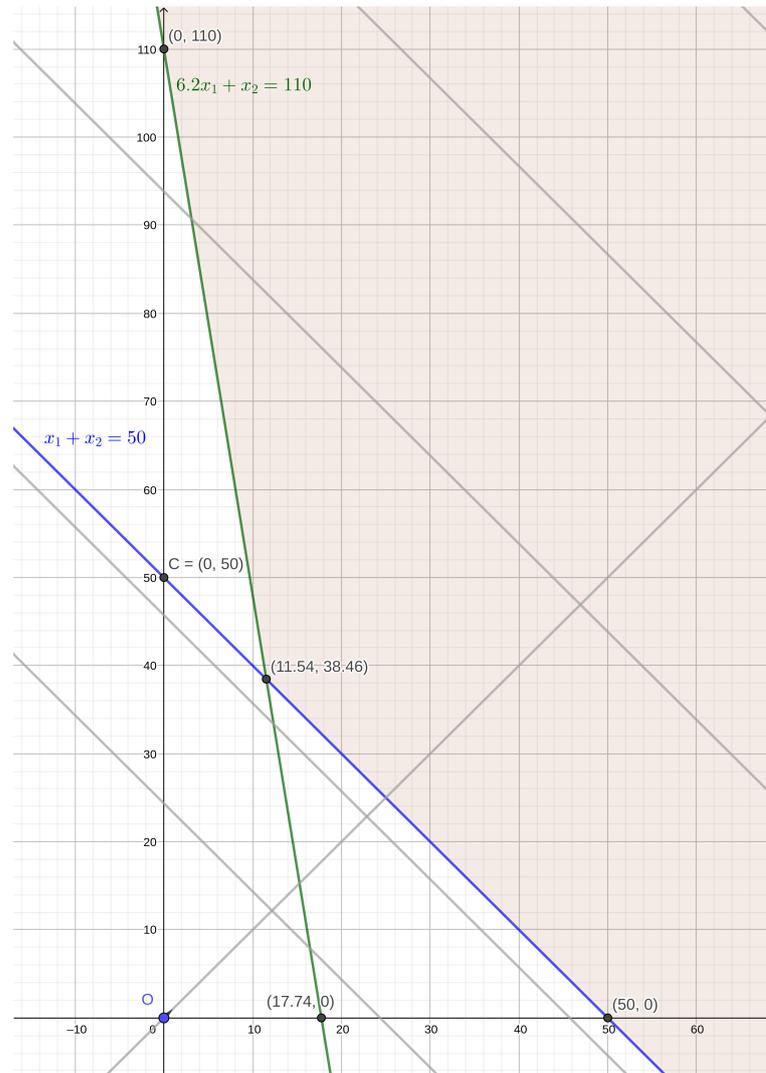


Figura 5.3: Otimização do caso Otimista

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se então que os pontos  $(\frac{150}{13}, \frac{500}{13})$  e  $(50, 0)$  são os pontos que minimizam a função objetivo dada, ou seja, nesse caso, há infinitas soluções para o sistema modelado, de forma que a imagem ótima da função objetivo é igual a  $f(x_1, x_2) = 50$ .

Portanto, os pares ordenado que minimizam a função objetivo, neste caso **otimista**, é  $(50, 0)$  ou  $(0, 50)$ , ou seja, caso com infinitas soluções e imagem ótima da função objetivo  $f(x_1, x_2) = 50$ .

**Escolha Neutra:**

$$\min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3,85 x_1 + 0,65 x_2 \geq 110 & (A) \\ x_1 + x_2 \geq 50 & (B) \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Teremos então duas variáveis básicas, produzindo o produto matricial a seguir:

$$\begin{bmatrix} 3,85 & 0,65 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Da mesma forma que anteriormente, há 6 pontos extremos resultantes:

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{775}{32} \\ \frac{825}{32} \end{bmatrix}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $3,85 \cdot \frac{775}{32} + \frac{825}{32} = 119,02$  e (B)  $\frac{775}{32} + \frac{825}{32} = 50$ , ou seja, o ponto é viável.

$$p_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $3,85 \cdot 50 + 0 = 192,5$  e (B)  $50 + 0 = 50$ , ou seja, o ponto é viável.

$$p_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,57 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $3,85 \cdot 25,57 + 0 = 98,44$  e (B)  $25,57 + 0 = 25,57$ , ou seja, por não cumprir nenhuma das restrições, o ponto não é viável.

$$p_4 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $3,85 \cdot 0 + 50 = 50$  e (B)  $0 + 50 = 50$ , ou seja, por não satisfazer à restrição (A), este ponto não é viável.

$$p_5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 168,23 \end{bmatrix}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $3,85 \cdot 0 + 168,23 = 168,23$  e (B)  $0 + 168,23 = 168,23$ , ou seja, o ponto é viável.

$$p_6 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Testando esse ponto, temos (A)  $3,85 \cdot 0 + 0 = 0$  e (B)  $0 + 0 = 0$ , ou seja, nenhuma das restrições é satisfeita, então o ponto não é viável.

Fazendo o produto da matriz das coordenadas dos vértices viáveis, obtidos anteriormente, pela matriz dos coeficientes da função objetivo, determina-se a imagem de  $f$ , que espera-se minimizar:

$$\begin{bmatrix} 24,22 & 25,78 \\ 50 & 0 \\ 0 & 168,23 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 168,23 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Observa-se então que os pontos  $(24,22; 25,78)$  e  $(50,0)$  são os pontos que minimizam a função objetivo dada, havendo, assim, infinitas soluções.

Portanto, os pares ordenados que minimizam a função objetivo, neste caso **neutro**, estão no segmento de reta determinado pelos pontos  $(24,22; 25,78)$  e  $(50,0)$ , ou seja, caso com infinitas soluções com imagem ótima da função objetivo  $f(x_1, x_2) = 50$ .

### Escolha Pessimista:

$$\min f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 1.5 x_1 + 0.3 x_2 \geq 110 & (A) \\ x_1 + x_2 \geq 50 & (B) \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Teremos então duas variáveis básicas, produzindo o produto matricial:

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0.3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 50 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Da mesma forma que anteriormente, há 6 pontos extremos, cujas coordenadas estão dispostas na matriz das coordenadas dos vértices viáveis e, por meio do produto com a matriz dos coeficientes da função objetivo, determina-se a imagem de  $f$ , que espera-se minimizar:

$$\begin{bmatrix} 0 & 366,67 \\ 73,34 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 366,67 \\ 73,34 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Observa-se nesse caso, que o ponto  $(73,33;0)$  é o ponto que minimiza a função objetivo dada.

Portanto, o pare ordenado que minimizam a função objetivo, neste caso **pessimista**, é  $(73,34,0)$ , ou seja, é o ponto ótimo cuja imagem da função objetivo corresponde a  $f(x_1, x_2) = 73,34$ .

Como pode-se observar, esse tipo de abordagem define dados numéricos para aplicações práticas, que não dependem de outras informações, mas considera, para isso, cenários possíveis, em razão do desconhecimento de informações, excluindo um suposto ponto que poderia definir alguma solução melhor, além do fato de o agente decisor ter que definir qual seu grau de aceitação de resultados para diferentes cenários.

■

## 5.2 Problemas com Demanda Incerta

O *Problema do Jornaleiro* é um problema clássico da literatura sobre otimização sob incerteza, que pode ocorrer em diversas situações do cotidiano das pessoas e de empresas, apresentando elementos incertos em sua modelagem. Por exemplo, ao se organizar uma festa ou definir a quantidade de itens sazonais a se comprar para venda em determinada estação do ano, tornam-se necessárias soluções que levem em conta dados incertos.

A característica principal desse tipo de problema é seu caráter temporal, que deve levar em conta custos de seus elementos em períodos diferentes, devido, por exemplo, à expiração de validade, como no caso do jornal, que expira no dia seguinte, afinal, normalmente não se compra jornais desatualizados. Dessa forma, a modelagem do problema se baseia em uma variável aleatória com distribuição de probabilidade conhecida.

Um jornaleiro deve determinar, para realizar suas vendas do dia, quantos jornais comprar para revendê-los no período em que há interesse pela sua compra. Se comprar poucos jornais e houver uma demanda maior pelo item, o jornaleiro poderia ter lucrado mais ou teria a necessidade de encomendar mais itens por um valor superior, além de prejudicar seu relacionamento com os clientes, prejudicando sua margem de lucro. Se comprar muitos jornais, o jornaleiro arcará com o custo da perda dos jornais que não possuem mais interesse, em virtude de sua expiração, que, neste caso, é de apenas parte do dia. O problema acaba sendo resolvido a partir da experiência do jornaleiro, de forma que permita a sua sobrevivência na profissão. Como a resolução ocorre diariamente, transcorrendo na maioria dos dias do mês, para subsistência do jornaleiro, espera-se um custo minimamente aceitável para que o jornaleiro lucre com as vendas suficientemente.

Todavia, é possível se chegar a uma quantidade ótima de jornais de forma que o custo esperado dos jornais seja reduzido ao mínimo, maximizando o lucro do jornaleiro (Lustosa et al. (2015)).

### 5.2.1 Valor Esperado

Num consultório médico, quando um paciente questiona em quanto tempo poderá ser atendido ou quando um cliente pergunta, em um restaurante, quando seu pedido estará pronto, o atendente procura resumir a informação solicitada em um único valor que represente o tempo médio de espera para o atendimento. Esse valor é chamado de *Valor Esperado*.

Como exemplo, suponhamos o lançamento de um dado equilibrado de seis faces, numeradas de um a seis, considerando a face que se posiciona voltada para cima ao final do movimento, com espaço amostral  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

É impossível prever qual face será sorteada ao final de um único lançamento do dado, afinal esse é um experimento aleatório. No entanto, como todos os eventos de sair cada face são equiprováveis, ao final de um grande número de lançamentos, podemos inferir que o *Valor Esperado* da média dos lançamentos será  $\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 i = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ , pois a probabilidade de cada face ser o resultado de cada lançamento é a mesma. Ou seja, espera-se que, ao final de  $n$  lançamentos, com  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, tenhamos uma média de:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n}{6} \cdot 1 + \frac{n}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{n}{6} \cdot 6 \right) = \\ & = \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n}{6} \cdot [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6] \right) = \\ & = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot (21) = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Suponhamos agora, um dado equilibrado com uma face numerada com o número 6, duas faces numeradas com o número 5 e três faces numeradas com o número 4. Observe, neste caso, o espaço amostral será dado por  $\Omega = 4, 5, 6$  e os eventos de cada face finalizar o movimento voltada para cima não são equiprováveis.

Assim, ao final de  $n$  lançamentos, com  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, o *Valor Esperado* será a média ponderada entre o valor e a possibilidade de cada face ser definida:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n}{6} \cdot 6 + \frac{n}{6} \cdot 5 + \frac{n}{6} \cdot 5 + \frac{n}{6} \cdot 4 + \frac{n}{6} \cdot 4 + \frac{n}{6} \cdot 4 \right) = \\ & = \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{n}{6} \cdot [6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4] \right) = \\ & = \frac{1}{6} \cdot (6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = \\ & = \left( 6 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} \right) = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos definir *Valor Esperado* da seguinte forma:

**Definição 5.1** (Valor Esperado). Sejam  $x_i \in X$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , valores assumidos pela variável aleatória discreta  $X$  e  $P(x)$  a função de probabilidade descrita por  $X$ .

O valor esperado ou esperança de  $X$  é dado por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) \quad (5.12)$$

### 5.2.2 Caso Discreto

No problema do jornaleiro, seja  $X$  a variável aleatória discreta que representa a demanda de jornal no período (por dia, por exemplo). Sejam  $x_i \in X$ ,  $i = 1, \dots, n$  as demandas assumidas pela variável aleatória e  $p(x_i)$  a probabilidade, descrita por uma função de distribuição de probabilidade conhecida  $F(x_i)$ . A quantidade de jornais encomendados será denotada por  $Q$ . O custo por jornal que não for vendido pelo jornaleiro é o *Lucro Marginal*, sendo denotado por  $m$ , e o *Custo Marginal*, o custo por jornal que for encomendado novamente devido à falta de produto para suprir a demanda, sendo denotado por  $c$ .

Podemos modelar o custo esperado total da seguinte forma:

Custo dos jornais encomendados e não utilizados ou faltantes:

$$C(Q) = \begin{cases} m \cdot (Q - x), & x \leq Q \\ c \cdot (x - Q), & x \geq Q \end{cases} \quad (5.13)$$

Dessa forma, a média esperada de custo por dia será dada por:

$$\begin{aligned} E[C(Q)] &= \sum_{x_i \leq Q} m(Q - x_i) \cdot p(x_i) + \sum_{x_i \geq Q} c(x_i - Q) \cdot p(x_i) = \\ &= m \sum_{x_i \leq Q} (Q - x_i) \cdot p(x_i) + c \sum_{x_i \geq Q} (x_i - Q) \cdot p(x_i) \end{aligned} \quad (5.14)$$

### 5.2.3 Condição de Otimalidade para o caso discreto

A *Condição de Otimalidade* deve indicar a quantidade ótima  $Q^*$  que minimiza o *Valor Esperado*, caso haja um valor mínimo.

Dessa forma, se houver um  $Q^*$  que permita a existência de um valor  $E[C(Q)]$  mínimo, para qualquer  $Q \neq Q^*$ , a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$E[C(Q^*)] \leq E[C(Q)], \forall Q > 0 \quad (5.15)$$

Assim, considerando a função de distribuição da probabilidade acumulada da demanda, teremos que:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \tag{5.16} \\
 E[C(Q)] - E[C(Q^*)] &= \\
 &= m \sum_{x_i \leq Q} (Q - x_i)p(x_i) + c \sum_{x_i \geq Q} (x_i - Q)p(x_i) \\
 &- \left( m \sum_{x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) + c \sum_{x_i \geq Q^*} (x_i - Q^*)p(x_i) \right) = \\
 &= m \left( \sum_{x_i \leq Q} (Q - x_i)p(x_i) - \sum_{x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right) + \\
 &+ c \left( \sum_{x_i \geq Q} (x_i - Q)p(x_i) - \sum_{x_i \geq Q^*} (x_i - Q^*)p(x_i) \right) \geq 0
 \end{aligned}$$

Como  $Q^* \neq Q$ , suponhamos  $Q < Q^*$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 &m \left( \sum_{x_i \leq Q} (Q - x_i)p(x_i) - \sum_{x_i \leq Q} (Q^* - x_i)p(x_i) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right) + \\
 &+ c \left( \sum_{x_i \geq Q} (x_i - Q)p(x_i) - \sum_{x_i \geq Q} (x_i - Q^*)p(x_i) + \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (x_i - Q^*)p(x_i) \right) = \\
 &= m \left( \sum_{x_i \leq Q} (Q - x_i - Q^* + x_i)p(x_i) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right) + \\
 &+ c \left( \sum_{x_i \geq Q} (x_i - Q - x_i + Q^*)p(x_i) + \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (x_i - Q^*)p(x_i) \right) = \\
 &= m \left( \sum_{x_i \leq Q} (Q - Q^*)p(x_i) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right) + \\
 &+ c \left( \sum_{x_i \geq Q} (Q^* - Q)p(x_i) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right) =
 \end{aligned}$$

$$= m \left( (Q - Q^*) \sum_{x_i \leq Q} p(x_i) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right) + \\ c \left( (Q^* - Q) \sum_{x_i \geq Q} p(x_i) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right)$$

Substituindo a função de distribuição de probabilidade 5.16, teremos:

$$m \left[ (Q - Q^*)F(Q) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right] + \\ + c \left[ (Q^* - Q)(1 - F(Q)) - \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \right] = \\ = F(Q)(Q - Q^*)(m + c) - c(Q - Q^*) - (m + c) \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \geq 0$$

Como  $Q \neq Q^*$  e  $m + c \neq 0$ , podemos reescrever a última igualdade como segue:

$$\frac{F(Q)(Q - Q^*)(m + c)}{(Q - Q^*)(m + c)} - \frac{c(Q - Q^*)}{(Q - Q^*)(m + c)} \\ - \frac{(m + c)}{(Q - Q^*)(m + c)} \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \geq 0$$

Ou seja,

$$F(Q) - \frac{c}{(m + c)} - \frac{1}{(Q - Q^*)} \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) \geq 0 \quad (5.17)$$

Por outro lado, como assumimos  $Q < Q^*$  e  $Q \in \mathbb{N}$ , vamos tomar o primeiro antecessor de  $Q^*$  para que, ao analisarmos a função de distribuição de probabilidade, o primeiro valor de  $Q$  que satisfaça a *Condição de Otimalidade*. Assim:

$$\sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i) = \sum_{x_i \leq Q+1} (Q^* - x_i)p(x_i) - \sum_{x_i \leq Q} (Q^* - x_i)p(x_i) = \\ = \sum_{x_i \leq Q} (Q^* - x_i)p(x_i) + \sum_{Q < x_i \leq Q+1} (Q^* - x_i)p(x_i) - \sum_{x_i \leq Q} (Q^* - x_i)p(x_i) = \\ = \sum_{Q < x_i \leq Q+1} (Q^* - x_i)p(x_i) = \\ = (Q + 1 - Q - 1)p(Q + 1) = 0$$

Logo, substituindo em (5.17), obtemos:

$$F(Q) > \frac{c}{(m+c)} + \frac{1}{(Q-Q^*)} \sum_{Q \leq x_i \leq Q^*} (Q^* - x_i)p(x_i)$$

Ou seja,  $Q^*$  corresponde ao menor valor  $Q$  de tal forma que condição abaixo seja satisfeita:

$$F(Q) > \frac{c}{m+c} \quad (5.18)$$

■

### Resolução de um exemplo

Problema 18: Como exemplo, suponhamos que o jornaleiro compre cada jornal do dia, no início da manhã, por R\$ 1,00 e, caso não consiga vendê-lo no dia, consiga vender cada jornal em qualquer outro momento por R\$ 0,10. Se decidir comprar jornais em outro momento do dia, a gráfica cobra R\$ 0,50 adicionais por unidade, já que o processo de impressão não é o mesmo.

Qual é o custo médio que o jornaleiro deve esperar por dia, considerando as probabilidades de demanda disponibilizadas?

Tabela 5.1: Probabilidades de demanda de jornal

Demanda	Probabilidade	Probabilidade Acumulada
100	0,1	0,1
150	0,15	0,25
200	0,35	0,6
250	0,3	0,9
300	0,1	1

#### Resolução:

Pelo enunciado, o *Lucro Marginal*, que é o valor que deve ser descontado do lucro pela perda por terem restados itens expirados, corresponde a  $m = 1 - 0,1 = 0,9$  por unidade, e o *Custo Marginal*, que é o valor do custo de se adquirir novos produtos em função da demanda maior que o estoque disponível, corresponde a  $c = 1 + 0,5 = 1,5$ , por unidade.

A quantidade ótima de jornais a serem adquiridos na situação imposta, havendo uma previsão determinada pela distribuição de probabilidade indicada na Tabela 5.1, a quantidade  $Q$  de jornais que o jornaleiro deve adquirir para minimizar seus custos esperados deve ser o menor  $x_i$  que satisfaça à *Condição de Otimalidade* 5.18.

Dessa forma,

$$F(Q) > \frac{c}{m+c} = \frac{1,5}{2,4} = 0,625 \quad (5.19)$$

Observando-se a coluna "Probabilidade Acumulada" da Tabela 5.1, percebe-se que o menor valor de  $Q$  que satisfaz  $F(Q) > 0,625$  é o valor  $F(Q) = 0,9$ , para  $Q = 250$ . Portanto, 250 é a demanda ótima para minimizar os custos a longo prazo.

Com isso, a expectativa de custo médio que o jornaleiro deve ter é de:

$$\begin{aligned} E[C(Q^*)] &= 0,9 \sum_{x_i \leq 250} (250 - x_i) \cdot p(x_i) + 1,5 \sum_{x_i \geq 250} (x_i - 250) \cdot p(x_i) = \quad (5.20) \\ &= 0,9 \cdot (250 - 100)p(100) + 0,9 \cdot (250 - 150)p(150) + 0,9 \cdot (250 - 200)p(200) + \\ &\quad + 0,9 \cdot (250 - 250)p(250) + 1,5 \cdot (250 - 250)p(250) + 1,5 \cdot (300 - 250)p(300) = \\ &= 0,9 \cdot (250 - 100) \cdot 0,1 + 0,9 \cdot (250 - 150) \cdot 0,15 + 0,9 \cdot (250 - 200) \cdot 0,35 + \\ &\quad + 0,9 \cdot (250 - 250) \cdot 0,3 + 1,5 \cdot (250 - 250) \cdot 0,3 + 1,5 \cdot (300 - 250) \cdot 0,1 = R\$ 50,25 \end{aligned}$$

■

### 5.2.4 Caso Contínuo

Para problemas do tipo do *Problema do Jornaleiro*, em que há perdas no caso de não venda e de insuficiência diante da demanda, onde há grande volume de itens ou onde a distribuição probabilística possa ser aproximada à modelos probabilísticos contínuos, o desenvolvimento sofre algumas alterações, mas, surpreendentemente, a forma de obtenção da quantidade ótima 5.18 se mantém inalterada (Lustosa et al. (2015)).

Denotando-se a função densidade  $f$  de distribuição acumulada da demanda  $X$  por  $F$ , para algum  $x$  pertencente ao Espaço Amostral  $\Omega$ , tem-se o seguinte:

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (5.21)$$

O custo esperado para a quantidade  $Q$  demandada, mantém-se como sendo:

$$C(Q) = \begin{cases} m \cdot (Q - x), & x \leq Q \\ c \cdot (x - Q), & x \geq Q \end{cases} \quad (5.22)$$

Porém, o valor esperado deve seguir a descrição contínua da função de probabilidade  $f$ . Dessa forma, teremos o seguinte:

$$E[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot p(x_i) \Delta x = \int_{x \in \Omega} x \cdot f(x) dx \quad (5.23)$$

Logo, a *Expectativa de Custo para a demanda*  $Q$  para o lucro marginal  $m$ , quando as vendas ficam aquém do esperado, e para o custo marginal  $c$ , o custo de se encomendar novos itens para suprir à demanda, deve ser de:

$$\begin{aligned}
E[C(Q)] &= \int_{-\infty}^Q m \cdot (Q - x) \cdot f(x) dx + \int_Q^{\infty} c \cdot (x - Q) \cdot f(x) dx = \\
&= m \cdot Q \int_{-\infty}^Q f(x) dx - m \int_{-\infty}^Q x \cdot f(x) dx + \\
&+ c \int_Q^{+\infty} x \cdot f(x) dx - c \cdot Q \int_Q^{+\infty} f(x) dx = \\
&= m \cdot Q \int_{-\infty}^Q f(x) dx - c \cdot Q \left[ 1 - \int_{-\infty}^Q f(x) dx \right] \\
&+ c \int_Q^{\infty} x \cdot f(x) dx - m \int_{-\infty}^Q x \cdot f(x) dx = \\
&= m \cdot Q \cdot F(Q) - c \cdot Q + c \cdot Q \cdot F(Q) + \\
&+ c \int_Q^{\infty} x \cdot f(x) dx - m \int_{-\infty}^Q x \cdot f(x) dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes, teremos:

$$\begin{aligned}
E[C(Q)] &= m \cdot Q \cdot F(Q) + c \cdot Q \cdot F(Q) - c \cdot Q + \\
&+ c \left[ Q \cdot \int_Q^{\infty} f(x) dx - \int_Q^{\infty} F(x) dx \right] - m \left[ Q \cdot \int_{-\infty}^Q f(x) dx - \int_{-\infty}^Q F(x) dx \right] = \\
&= m \cdot Q \cdot F(Q) + c \cdot Q \cdot F(Q) - c \cdot Q + \\
&+ c \cdot Q \cdot [1 - F(Q)] - m \cdot Q \cdot F(Q) + \\
&+ m \int_{-\infty}^Q F(x) dx - c \int_Q^{\infty} F(x) dx = \\
&= m \int_{-\infty}^Q F(x) dx - c \int_Q^{\infty} F(x) dx
\end{aligned}$$

Portanto,

$$E[C(Q)] = m \int_{-\infty}^Q F(x) dx - c \int_Q^{\infty} F(x) dx \quad (5.24)$$

■

### 5.2.5 Condição de Otimalidade para o caso contínuo

Assim como no caso discreto, a *Condição de Otimalidade* para o caso contínuo deve estabelecer a quantidade ótima  $Q^*$  que minimizaria o *Valor Esperado*, caso haja um valor mínimo para o custo esperado.

Dessa forma, se houver uma quantidade ótima  $Q^*$  para o custo esperado  $E[C(Q)]$ , este deve ser um mínimo local, ou seja, deveremos determinar a menor taxa de crescimento assumida pela função densidade dentro do intervalo estabelecido.

Assim, calcula-se a derivada do custo esperado  $E[C(Q)]$  com relação à quantidade  $Q$ , com o intuito de se determinar a quantidade ótima  $Q^*$  que minimize o custo total esperado, utilizando-se a regra de Leibiniz

$$\frac{d}{dx} \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} g(x) dx \quad (5.25)$$

e substituindo-se, com isso, em  $\frac{d}{dQ} E[C(Q)]$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dQ} E[C(Q)] = \\ & = \frac{d}{dQ} \left( m \int_{-\infty}^Q F(x) dx - c \int_Q^{\infty} F(x) dx \right) = \\ & = m \int_{-\infty}^Q f(x) dx - c \int_Q^{\infty} f(x) dx = \\ & = m \cdot F(Q) - c(1 - F(Q)) = \\ & = m \cdot F(Q) - c + c \cdot F(Q) = \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dQ} E[C(Q)] = (m + c) \cdot F(Q) - c \quad (5.26)$$

■

### Condição de Otimalidade do Caso Discreto do Problema do Jornaleiro

Com a formulação anterior do valor esperado, temos que o valor ótimo  $Q^*$  será assumido pelo menor valor não-negativo  $Q$  de tal forma que sua derivada assuma um mínimo local, ou seja, aproximando a taxa de variação a zero, correspondendo ao  $F(Q)$  mais próximo de zero:

$$\frac{d}{dQ} E[C(Q)] = (m + c) \cdot F(Q) - c \geq 0 \quad (5.27)$$

Então,

$$F(Q^*) \geq \frac{c}{m+c} \quad (5.28)$$

■

### Resolução de um exemplo

*Problema 19: O custo de uma padaria para produzir 1 kg de pães é de R\$ 0,60, vendendo cada Kg por R\$ 1,00.*

*Baseando-se em dados históricos da demanda dessa padaria, estima-se que a demanda está continuamente distribuída segundo uma distribuição de probabilidades exponencial com média de 100 kg de pães vendidos por dia.*

*Ao se considerar que os pães são produzidos na madrugada e devem ser vendidos pela manhã, perdendo a qualidade após esse período, impossibilitando a venda posterior dos pães, quantos quilogramas de pães a padaria deve produzir por dia para se maximizar a receita líquida esperada no mês?*

*Resolução:*

Observando-se os dados apresentados do problema, pode-se inferir o *lucro marginal*, por kg de pão não vendido, como sendo  $m = 1,00 - 0,60 = 0,40$  e o *custo marginal*, por kg de pão demandado e não fabricado, como sendo  $c = 0,60$ , obtidos pelo estabelecimento.

Como, historicamente, a demanda está continuamente distribuída segundo uma distribuição de probabilidades exponencial, tem-se a função densidade  $f$  descrita como  $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ , onde a média de peso de pães  $M(t) = 100\text{kg}$  define a constante  $\lambda$ :

$$M(t) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{M(t)} = 0,01$$

A partir disso, pode-se determinar o peso ideal em kg de pão fabricado a fim de se minimizar o custo esperado de produção, maximizando-se a receita líquida esperada:

$$F(Q^*) \geq \frac{c}{m+c}$$

Logo,

$$F(Q^*) = \frac{0,6}{0,4+0,6} \geq 0,6$$

Substituindo-se a imagem acima na função densidade, obtém-se valor ótimo  $Q^*$ :

$$1 - e^{-0,01 \cdot Q^*} \geq 0,6$$

$$\Rightarrow -e^{-0,01 \cdot Q^*} \geq -0,4$$

$$\Rightarrow -e^{-0,01 \cdot Q^*} \geq -e^{\ln(0,4)}$$

$$\Rightarrow e^{-0,01 \cdot Q^*} \leq e^{\ln(0,4)}$$

$$\Rightarrow -0,01 \cdot Q^* \leq \ln(0,4)$$

$$\Rightarrow 0,01 \cdot Q^* \geq -\ln(0,4)$$

Logo,

$$Q^* \geq \frac{-\ln(0,4)}{0,01} = 91,629073$$

Portanto, a padaria deve produzir 91,629 Kg de pães para maximizar a receita líquida esperada no mês considerado.



## Capítulo 6

# Otimização sob incerteza no contexto do Ensino Médio

Ao se buscar a solução ótima numa problemática que envolva otimização com dados incertos, deve-se recorrer aos conhecimentos de Probabilidade e Contagem desenvolvidos no nível básico de ensino, modelando os problemas com os conceitos presentes nesse nível de ensino, de forma acessível ao aluno.

Evidentemente, no contexto do Ensino Médio, não é possível aprofundar conceitos avançados sobre o tema, mas pode-se escolher problemas que sejam possíveis de se resolver sem a necessidade de um desenvolvimento amplo do assunto, mobilizando seu interesse para a modelagem de problemas do cotidiano administrativo e utilizando conceitos comuns ou de interesse econômico, acessíveis aos estudantes no seu dia-a-dia, com a ideia de Lucro ou Prejuízo.

Por outro lado, esses problemas podem ser abordados como catalizadores de evolução do desenvolvimento de assuntos pertinentes ao Ensino Médio, com foco na Teoria da Probabilidade, como pode-se observar a seguir.

### 6.0.1 Problema 20: Origem do Equipamento

*A empresa revendedora de celulares JoãoCel recebe 60% de seu estoque de celulares do fabricante A e o restante do fabricante B. Com um levantamento de seu histórico, a gerência da empresa sabe que o fabricante A entrega suas encomendas com, em média, 2% de celulares defeituosos e o fabricante B com, em média, 5% de celulares defeituosos. Foi solicitado ao controle de estoque uma inspeção de uma amostra aleatória de 4 celulares do último lote recebido pela empresa e foi constatado que um desses celulares estava defeituoso.*

*Provavelmente, qual foi a origem desse celular defeituoso?*

*Resolução:*

Para esse problema, busca-se a origem do equipamento defeituoso dentre as possíveis amostras de 4 equipamentos, sendo um deles defeituoso.

Em última análise, busca-se a probabilidade de se retirar um celular defeituoso, proveniente do fornecedor  $x$ , dentre todos os celulares defeituosos  $d$ .

Dessa forma, sejam  $d_x$  a probabilidade da amostra possuir um equipamento defeituoso dado que possui origem do fabricante  $x$  e  $d_{x_i}$  a probabilidade de cada equipamento  $i$  da amostra possuir defeito. Com isso, teremos então:

$$d_x = p(x) \cdot \binom{4}{1} \cdot p(\overline{d_{x_i}})^3 \cdot p(d_{x_i})^1 \quad (6.1)$$

Assim, a probabilidade da amostra com um equipamento defeituoso ser do fabricante  $x$  será:

$$p(x|d) = \frac{d_x}{d}$$

Logo, teremos que

$$d_A = 0,60 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0,98^3 \cdot 0,02^1 = 0,04517$$

Assim,

$$d_B = 0,40 \cdot \binom{4}{1} \cdot 0,95^3 \cdot 0,05^1 = 0,06859$$

Então,

$$d = d_A + d_B = 0,1137.$$

Logo, podemos inferir que, aproximadamente, 11,37% dos equipamentos são defeituosos. Com isso:

$$p(A|d) = \frac{d_A}{d} = \frac{0,04517}{0,1137} = 0,3971$$

e

$$p(B|d) = \frac{d_B}{d} = \frac{0,06859}{0,1137} = 0,6029$$

Portanto, há a probabilidade de 60,29% de que o celular defeituoso tenha como origem o fornecedor B.

■

## 6.0.2 Problema 21: Análise de proposta

*Uma empresa de componentes eletrônicos vende resistores em lotes de 1.000 unidades, no valor de R\$ 100,00.*

Para realizar a compra de um grande número de lotes, um comprador propõe à empresa extrair para testes uma amostra aleatória de 20 itens. Se não houver defeito em nenhum dos componentes da amostra, o valor pago pelo lote será de R\$ 120,00 pelo lote; Caso haja apenas 1 componente defeituoso na amostra colhida, o comprador pagará o valor inicial do lote, mas, caso haja, mais de um componente defeituoso na amostra, o pagamento pelo lote sofrerá um desconto de 17% em relação ao preço original do lote.

Se a empresa sabe que a confiabilidade no funcionamento dos resistores é de 95%, qual deverá ser a decisão a ser tomada frente à proposta, de se aceitar ou de se recusar a oferta?

*Resolução:*

A probabilidade para dada quantidade de itens defeituosos será dada pela combinação de 20 componentes, levando-se em conta a probabilidade de cada componente ser defeituoso ( $D$ ) ou não defeituoso ( $\bar{D}$ ).

Assim, a probabilidade de haver exatamente dois componentes defeituosos, dado que cada componente possui a probabilidade de 5% de ser defeituoso ( $D$ ) e 95% de não ser defeituoso ( $\bar{D}$ ), em determinada sequência específica, como por exemplo,  $D D \bar{D} \bar{D}$ , será de:

$$0,05^2 \cdot 0,95^{18}.$$

Por outro lado, o número de combinações de 2 componentes defeituosos em qualquer posição dentro da amostra de 20 componentes, será a combinação de componentes defeituosos e não defeituosos da sequência  $D D \bar{D} \bar{D}$ , ou seja,  $\binom{20}{2}$ .

Com essas duas informações, nota-se que a determinação da probabilidade de que haja exatamente 2 componentes defeituosos ( $X = 2$ ) será dada pela lei binomial:

$$p(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{18}.$$

Como o problema envolve os casos  $p(X = 0)$ ,  $p(X = 1)$  e  $p(X > 1)$ , teremos então:

$$p(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,3585$$

e

$$p(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{19} \approx 0,3773.$$

$$\begin{aligned}
 p(X > 1) &= \sum_{i=2}^{20} \binom{20}{i} \cdot 0,05^i \cdot 0,95^{20-i} = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) \\
 &\approx 1 - 0,3585 - 0,3773 = 1 - 0,7358 = 0,2642
 \end{aligned}$$

Dessa forma, a expectativa de ganho da empresa, levando-se em conta essa proposta, deve ser:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) = 120 \cdot 0,3585 + 100 \cdot 0,3773 + (1 - 0,17) \cdot 100 \cdot 0,2642 \approx 102,68$$

Poderíamos também generalizar a expectativa de ganhos, atribuindo a  $v$  o valor de venda original, a  $g$  o ganho percentual em relação ao valor original, a  $d$  o desconto percentual em relação ao valor original e a  $G$ ,  $N$  e  $D$  os eventos ganho, neutro e desconto, como segue:

$$\begin{aligned}
 E[x] &= (1 + g) \cdot v \cdot p(G) + v \cdot p(N) + (1 - d) \cdot v \cdot p(D) = \\
 &= v \cdot p(G) + v \cdot p(N) + v \cdot p(D) + g \cdot v \cdot p(G) - d \cdot v \cdot p(D) = \\
 &= v \cdot [p(G) + p(N) + p(D)] + g \cdot v \cdot p(G) - d \cdot v \cdot p(D) = \\
 &= v + g \cdot v \cdot p(G) - d \cdot v \cdot p(D) = \\
 &= v \cdot [1 + g \cdot p(G) - d \cdot p(D)]
 \end{aligned}$$

Logo, dependendo do nível de perda aceitável do vendedor, a proposta pode ser analisada como viável ou não, considerando-se os riscos de perda. No caso de compra de pequena quantidade, o vendedor não deve aceitar a proposta por haver um risco muito alto de perda de margem de lucro. No caso de compra de grande quantidade de vendas, a tendência é que o ganho real obtido seja próximo da expectativa de ganho calculada, quanto maior for a quantidade de vendas. Se a empresa aceitar riscos apenas em caso de expectativa acima do valor de venda original, o vendedor deve aceitar a proposta apenas caso o indicador seja contabilizado como maior que 1, ou seja,  $1 + g \cdot p(G) - d \cdot p(D) > 1$ .

Portanto, como o valor de venda de R\$ 100,00 determina a margem de lucro esperada pela empresa na venda do produto e a expectativa de ganho para um grande número de lotes ao comprador determina uma média um pouco mais vantajosa ao vendedor, indicada pelo valor de  $E[X] = \text{R\$ } 102,86$ , superior ao valor de venda, ou observada também pelo indicador  $1 + g \cdot p(G) - d \cdot p(D) = 1 + \frac{120-100}{100} \cdot 0,3585 - 0,17 \cdot 0,2641 = 1,026803 > 1$ , a empresa pode ser aconselhada a **aceitar** a proposta, embora haja maiores riscos, principalmente se esse contrato fidelizar o comprador e houver, como diz o enunciado, a ocorrência de uma grande número de vendas.



### 6.0.3 Problema 22: Otimização Linear com dados incertos

Ao planejar uma plantação, um produtor encomenda uma análise do solo para assegurar sua produção. A análise constatou que seriam necessários, pelo menos, de 9g de Nitrogênio e 3g de Potássio para cada 10 m<sup>2</sup> de solo para que a plantação crescesse sem problemas relacionados ao rodízio de tipos de vegetais plantados. Em estoque, o produtor possui dois tipos de adubos, um adubo do fabricante A, contendo 2g de Nitrogênio e 1g de Potássio por quilograma e outro, do fabricante B, com quantidades incertas de nutrientes, apenas sabendo que possuem distribuições uniformemente distribuídas e independentes, com medição mínima de 1 g de Nitrogênio e 0,5 g de Potássio e máxima de 4,1 g de Nitrogênio e 2,7 g de Potássio.

Com essas necessidades em vista, quanto o produtor deverá usar de cada tipo de adubo para atender a necessidade de nutrientes em 1 km<sup>2</sup> de solo de forma a ter o menor custo possível, sabendo que o adubo do fabricante A possui o custo de R\$9,50 por quilograma e o adubo do fabricante B possui o custo de R\$8,60 por quilograma?

*Resolução:*

Neste problema, o produtor deverá utilizar uma quantidade  $x_A$  do adubo A e uma quantidade  $x_B$  do adubo B disponíveis, de forma ótima, ou seja, com a menor quantidade possível da mistura dos adubos A e B, para distribuir no terreno de modo a atender às necessidades dos nutrientes Nitrogênio e Potássio da plantação, considerando-se que o terreno deve ter, pelo menos, 9 gramas de Nitrogênio e, pelo menos, 3 gramas de Potássio para cada 10 m<sup>2</sup> de solo plantado.

Para isso, deve-se levar em conta as quantidades incertas de  $\omega_1 \in [1; 4,1]$  gramas de Nitrogênio e  $\omega_2 \in [0,5; 2,7]$  gramas de Potássio na composição do adubo B.

Dessa forma, o problema pode ser modelado como segue:

$$\min f(x_A, x_B) = 9,5 \cdot x_A + 8,6 \cdot x_B$$

$$s.a. \begin{cases} 2 \cdot x_A + \omega_1 \cdot x_B \geq 9 & (N) \\ x_A + \omega_2 \cdot x_B \geq 3 & (K) \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

**Abordagem "Espere e Veja"**

$$\begin{cases} 2 \cdot x_A + \omega_1 \cdot x_B \geq 9 & (N) \\ x_A + \omega_2 \cdot x_B \geq 3 & (K) \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2 \cdot x_A + \omega_1 \cdot x_B \geq 9 & (N) \\ 2 \cdot x_A + 2\omega_2 \cdot x_B \geq 6 & (K) \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases}$$

Temos então que:

$$(\omega_1 - 2\omega_2)x_B \geq 3$$

e

$$x_B \geq \frac{3}{\omega_1 - 2\omega_2}$$

Por outro lado, considerando-se  $x_B$  mínimo, teremos que:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_A + \omega_1 \cdot \frac{3}{\omega_1 - 2\omega_2} \geq 9 & (N) \\ x_A + \omega_2 \cdot \frac{3}{\omega_1 - 2\omega_2} \geq 3 & (K) \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases}$$

e

$$x_A \geq 3 \cdot \frac{\omega_1 - 3\omega_2}{\omega_1 - 2\omega_2}$$

Portanto, o valor ótimo das quantidades dos adubos A e B deve ser:

$$z^* = \frac{28,5}{\omega_1 - 2\omega_2} + 25,8 \cdot \frac{\omega_1 - 3\omega_2}{\omega_1 - 2\omega_2}$$

### Abordagem "Aqui e Agora"

Delimitando-se três casos para quantidade de nutrientes, teremos  $\omega_O = (4, 1; 2, 7)$ ,  $\omega_N = (2, 55; 1, 6)$  e  $\omega_P = (1; 0, 5)$ , definiremos três sistemas para se resolver utilizando a otimização linear:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_A + 4,1 \cdot x_B \geq 9 & (N) \\ x_A + 2,7 \cdot x_B \geq 3 & (K) \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_A + 2,55 \cdot x_B \geq 9 & (N) \\ x_A + 1,6 \cdot x_B \geq 3 & (K) \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\begin{cases} 2 \cdot x_A + 1 \cdot x_B \geq 9 & (N) \\ x_A + 0,5 \cdot x_B \geq 3 & (K) \\ x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

Obtendo-se assim as soluções ótimas  $f_O^*(0; 2, 2) = 18,92$ ,  $f_N^*(0; 3, 53) = 30,36$  e  $f_P^*(0, 9) = 77,4$  para cada  $10\text{m}^2$ .

■

#### 6.0.4 Problema 23: Problemas com demanda desconhecida e distribuição de probabilidade conhecida: *Promoter*.

Um promoter de casamentos proporciona festas incluindo um doce "bem-casado" a cada um dos convidados do casal, como forma de atrair seus clientes, sem acréscimo do valor acertado previamente. Diante disso, o promoter paga R\$ 0,90 por doce para cada convidado presente, perdendo o investimento caso não haja convidados para consumir os doces. Por outro lado, se houver convidados além da quantidade de doces disponibilizados, é possível produzi-los emergencialmente durante a festa a um custo adicional de R\$ 0,50 por doce fabricado.

Diante do exposto, qual é o Custo Médio que o promoter deve esperar por dia de festa, considerando as probabilidades de demanda abaixo?

Tabela 6.1: Probabilidades do Problema do Promoter de Casamento

<b>Demanda</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>Probabilidade Acumulada</b>
100	0,1	0,1
150	0,15	0,25
200	0,35	0,6
250	0,3	0,9
300	0,1	1

Resolução:

Em média, os valores esperados para o custo dos "bem-casados" oferecidos pelo promotor, devem considerar as probabilidades de se obter dado custo.

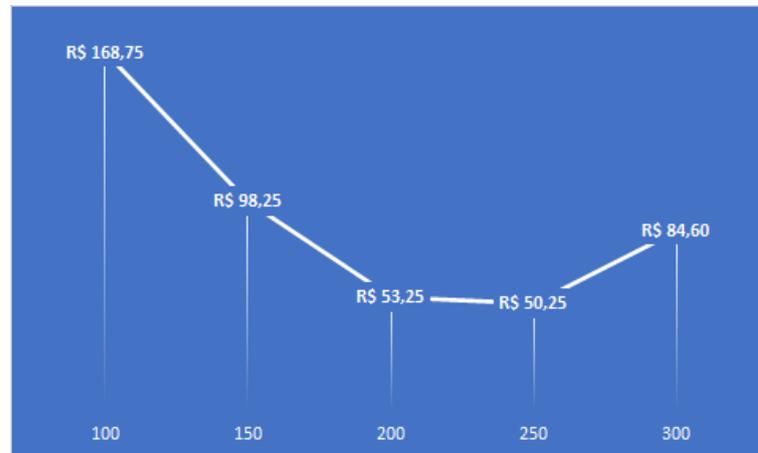


Figura 6.1: Expectativas de Custo Médio - Problema 23

Fonte: Elaborado pelo autor.

No caso,

- se for solicitada a fabricação de  $Q = 100$  doces, teremos um custo médio esperado de:

$$\begin{aligned}
 E[C(100)] &= \\
 &= 0,9 \cdot (100 - 100)p(100) + 1,5 \cdot (150 - 100)p(100) + 1,5 \cdot (150 - 100)p(150) + \\
 &+ 1,5 \cdot (200 - 100)p(200) + 1,5 \cdot (250 - 100)p(250) + 1,5 \cdot (300 - 100)p(300) = \\
 &= 0,9 \cdot (100 - 100) \cdot 0,1 + 1,5 \cdot (150 - 100) \cdot 0,1 + 1,5 \cdot (150 - 100) \cdot 0,15 + \\
 &+ 1,5 \cdot (200 - 100) \cdot 0,35 + 1,5 \cdot (250 - 100) \cdot 0,3 + 1,5 \cdot (300 - 100) \cdot 0,1 = R\$ 168,75
 \end{aligned}$$

- Se for solicitada a fabricação de  $Q = 150$  doces, teremos um custo médio esperado de:

$$\begin{aligned}
 E[C(150)] &= \\
 &= 0,9 \cdot (150 - 100)p(100) + 0,9 \cdot (150 - 150)p(150) + 1,5 \cdot (150 - 150)p(150) + \\
 &+ 1,5 \cdot (200 - 150)p(200) + 1,5 \cdot (250 - 150)p(250) + 1,5 \cdot (300 - 150)p(300) = \\
 &= 0,9 \cdot (150 - 100) \cdot 0,1 + 0,9 \cdot (150 - 150) \cdot 0,15 + 1,5 \cdot (150 - 150) \cdot 0,15 + \\
 &+ 1,5 \cdot (200 - 150) \cdot 0,35 + 1,5 \cdot (250 - 150) \cdot 0,3 + 1,5 \cdot (300 - 150) \cdot 0,1 = R\$ 98,25
 \end{aligned}$$

- Se for solicitada a fabricação de  $Q = 200$  doces, teremos um custo médio esperado de:

$$\begin{aligned}
E[C(200)] &= \\
&= 0,9 \cdot (200 - 100)p(100) + 0,9 \cdot (200 - 150)p(150) + 0,9 \cdot (200 - 200)p(200) + \\
&+ 1,5 \cdot (200 - 200)p(200) + 1,5 \cdot (250 - 200)p(250) + 1,5 \cdot (300 - 200)p(300) = \\
&= 0,9 \cdot (200 - 100) \cdot 0,1 + 0,9 \cdot (200 - 150) \cdot 0,15 + 0,9 \cdot (200 - 200) \cdot 0,35 + \\
&+ 1,5 \cdot (200 - 200) \cdot 0,35 + 1,5 \cdot (250 - 200) \cdot 0,3 + 1,5 \cdot (300 - 200) \cdot 0,1 = R\$ 53,25
\end{aligned}$$

- Se for solicitada a fabricação de  $Q = 250$  doces, teremos um custo médio esperado de:

$$\begin{aligned}
E[C(250)] &= \\
&= 0,9 \cdot (250 - 100)p(100) + 0,9 \cdot (250 - 150)p(150) + 0,9 \cdot (250 - 200)p(200) + \\
&+ 0,9 \cdot (250 - 250)p(250) + 1,5 \cdot (250 - 250)p(250) + 1,5 \cdot (300 - 250)p(300) = \\
&= 0,9 \cdot (250 - 100) \cdot 0,1 + 0,9 \cdot (250 - 150) \cdot 0,15 + 0,9 \cdot (250 - 200) \cdot 0,35 + \\
&+ 0,9 \cdot (250 - 250) \cdot 0,3 + 1,5 \cdot (250 - 250) \cdot 0,3 + 1,5 \cdot (300 - 250) \cdot 0,1 = R\$ 50,25
\end{aligned}$$

- Se for solicitada a fabricação de  $Q = 300$  doces, teremos um custo médio esperado de:

$$\begin{aligned}
E[C(300)] &= \\
&= 0,9 \cdot (300 - 100)p(100) + 0,9 \cdot (300 - 150)p(150) + 0,9 \cdot (300 - 200)p(200) + \\
&+ 0,9 \cdot (300 - 250)p(250) + 0,9 \cdot (300 - 300)p(300) + 1,5 \cdot (300 - 250)p(300) = \\
&= 0,9 \cdot (300 - 100) \cdot 0,1 + 0,9 \cdot (300 - 150) \cdot 0,15 + 0,9 \cdot (300 - 200) \cdot 0,35 + \\
&+ 0,9 \cdot (300 - 250) \cdot 0,33 + 0,9 \cdot (300 - 300) \cdot 0,1 + 1,5 \cdot (300 - 200) \cdot 0,1 = R\$ 84,60
\end{aligned}$$

Observando-se a curva discreta formada pelas expectativas de custo médio nota-se um valor mínimo de custo esperado e pode-se inferir um comportamento aproximadamente parecido com uma parábola, gerada por uma função de 2º grau. Tal fato pode ser inferido pela ideia de expectativa de custo, que soma, como vimos, duas funções: a função custo e a função distribuição de probabilidade.

Cada parcela da expectativa de custo médio possui a operação  $m(Q - x) \cdot p(x)$  ou  $c(x - Q) \cdot p(x)$ , duas funções afins, onde  $m, Q$  são dados, no caso de  $m(Q - x)$  (ou  $c(x - Q)$ ), que poderia ser rearranjado na forma  $y = ax + b$ , ou seja,  $m(Q - x) = mQ - mx = (-m)x + (mQ)$ . No caso de  $p(x)$ , como pode-se verificar na curva de probabilidade acumulada, são retas nos mesmos intervalos específicos.

Dessa forma, é bastante natural notar que as funções têm um ponto extremo, bastando-se observar qual delas possui a menor imagem.

Para se evitar desenvolver muitos cálculos desnecessários, se utiliza a Equação 5.28, que define a *Condição de Otimabilidade* para facilitar o processo. Neste caso, a condição

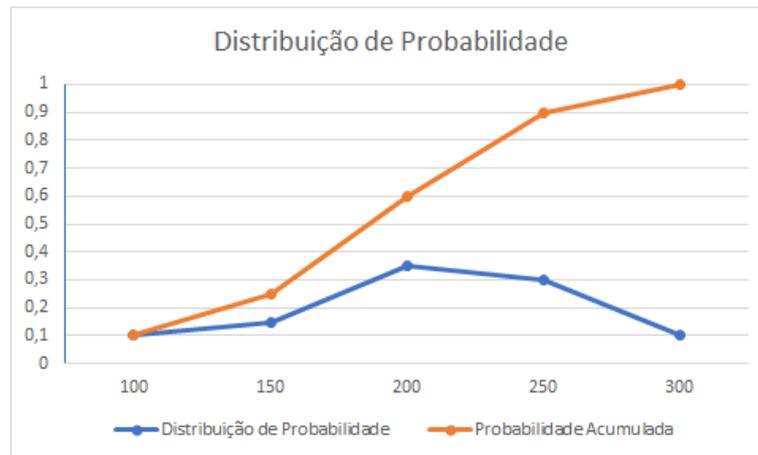


Figura 6.2: Distribuição de Probabilidade - Problema 23

Fonte: Elaborado pelo autor.

deve ser:

$$F(Q) > \frac{c}{m+c} = \frac{1,5}{2,4} = 0,625 \quad (6.6)$$

Observando-se a *Probabilidade Acumulada* da Tabela 6.1, nota-se que a menor demanda necessária que satisfaça  $F(Q) > 0,625$  deve ser a demanda  $Q = 250$ , obtendo-se o custo mínimo de R\$ 50,25, como observado nos cálculos anteriores.

■

### 6.0.5 Problema 24: Problema do Jornaleiro

Um jornaleiro compra cada jornal do dia, no início da manhã, por R\$ 3,00 e, caso não consiga vendê-lo no dia, conseguirá revendê-lo por R\$ 1,00 para a reciclagem. Por outro lado, se desejar comprar jornais em outro momento do dia, a gráfica cobra R\$ 5,00 adicionais por cópia unitária, já que o processo de impressão para baixa demanda é mais custoso.

Dessa forma, qual deve ser o Custo Médio que o jornaleiro deve esperar por dia, considerando as probabilidades de demanda descrita na Tabela 6.2?

Tabela 6.2: Problema do Jornaleiro no caso Discreto

<i>Demanda</i>	<i>Probabilidade</i>	<i>Probabilidade Acumulada</i>
50	0,1	0,1
100	0,2	0,3
150	0,4	0,7
200	0,15	0,85
300	0,15	1

*Resolução:*

Portanto, 200 é a demanda ótima para minimizar os custos a longo prazo.

Com isso, a expectativa de custo médio que o jornaleiro deve ter é de:

$$\begin{aligned}
 E[C(Q^*)] &= 2 \sum_{x_i \leq 200} (200 - x_i) \cdot p(x_i) + 5 \sum_{x_i \geq 200} (x_i - 250) \cdot p(x_i) = \\
 &= 2 \cdot (200 - 50)p(50) + 2 \cdot (200 - 100)p(100) + 2 \cdot (200 - 150)p(150) + 2 \cdot (200 - 200)p(200) \\
 &\quad + 5 \cdot (200 - 200)p(200) + 5 \cdot (200 - 300)p(300) = \\
 &= 2 \cdot (250 - 50) \cdot 0,1 + 2 \cdot (200 - 100) \cdot 0,3 + 2 \cdot (200 - 150) \cdot 0,4 + 2 \cdot (200 - 200) \cdot 0,15 \\
 &\quad + 5 \cdot (200 - 200) \cdot 0,15 + 5 \cdot (300 - 200) \cdot 0,15 = R\$ 215,00
 \end{aligned}$$

■

### 6.0.6 Problema 25: Overbooking

*Uma rede de hotéis oferece hospedagem em determinada localidade na modalidade All-Inclusive no período de carnaval.*

*Em quase todos os anos, há o cancelamento por parte dos clientes de algumas reservas, prejudicando a margem de lucro da rede. Dessa forma, o administrador realizará a venda de hospedagens acima da capacidade dos hotéis, prática chamada de overbooking, com a ressalva que a legislação define que em casos dessa natureza, o hotel é obrigado a acomodar o cliente em outro hotel de melhor categoria.*

*O valor da hospedagem custa de R\$ 1.750,00 e possui um custo médio de consumo de R\$ 830,00. No caso de não haver disponibilidade de quartos para visitantes no período, devido ao overbooking, o custo de acomodação do hóspede em outro hotel de categoria superior é de R\$ 4.100,00.*

*Dessa forma, representando a quantidade de desistências como uma variável aleatória com distribuição contínua Normal, possuindo média 7 e desvio padrão 3, quantas sobre vendas, além da capacidade máxima, a rede deve realizar para a localidade de forma a minimizar suas perdas?*

*Resolução:*

Como visto na teoria, precisamos apenas determinar  $c$  e  $m$ , para encontrarmos a quantidade ótima  $Q^*$  de vendas.

Temos que o custo marginal é de  $c = 4100 + 830 - 1750 = 3180$  e que o lucro marginal é de  $m = 1750 - 830 = 920$ .

Dessa feita, temos que:

$$F(Q^*) \geq \frac{c}{m + c} = \frac{3180}{920 + 3180} = \frac{3180}{4100} \cong 0,775609$$

Como  $f$  é uma função densidade normal de média 7 e desvio padrão 3, temos que  $Q^*$  deve ser maior que:

$$F(Q^*) \geq 0,775609$$

e

$$\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Q^*} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-7}{3}\right)^2} dx \geq 0,775609$$

Observando-se no software GEOGEBRA a distribuição Normal acumulada para  $\mu = 7$  e  $\sigma = 3$ , observa-se que:

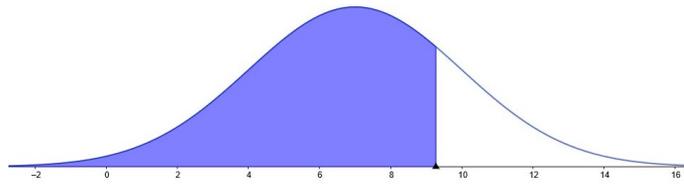


Figura 6.3: Função densidade acumulada Normal para  $\mu = 7$  e  $\sigma = 3$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando-se o cálculo da inequação pelo *software* GEOGEBRA ou pela tabela de distribuição normal acumulada, teremos que  $Q^* = 9,2723$ .

Como  $Q^*$  deve ser inteiro, temos que a rede de hotéis deve vender  $Q^* = 10$  hospedagens a mais para minimizar suas perdas.

■

---

## Capítulo 7

### Conclusão

Neste trabalho, a Modelagem Matemática norteou tanto o desenvolvimento da teoria e aplicações quanto à inclusão desse tipo de metodologia no cotidiano do Ensino de Matemática, no sentido de se descobrir conceitos importantes a partir de problemas reais, gerando significado e motivando o estudante quanto ao próprio desenvolvimento intelectual e amadurecimento matemático.

A percepção da abrangência de eventos aleatórios foi uma preocupação no desenvolvimento deste trabalho, em contraste à pouca ênfase dada a esse tipo de conhecimento no ensino básico, apesar da alta aplicabilidade e necessidade de compreensão no mundo atual dessa área de conhecimento. Foi traçado um caminho que se inicia na teoria de funções, geralmente estudada no primeiro ano do ensino médio, perpassando pela geometria, teoria das probabilidades, teoria de matrizes, sistemas lineares, pelo cálculo diferencial e chegando finalmente às ideias de otimização, considerando ou não dados incertos. A ideia foi trabalhar da maneira mais intuitiva possível, de forma que alunos do ensino médio possam acompanhar sem maiores problemas. O intuito não foi o de utilizar uma miscelânea de conhecimentos de forma aleatória, mas sim o de desenvolver o conhecimento da aleatoriedade de forma mais motivadora, buscando agregar os diversos conteúdos necessários para a base da aplicação, observando-se que nenhuma área do conhecimento está isolada e que todas são necessárias para algum fim.

Nesse sentido, o presente estudo possui dois momentos: a abordagem da teoria, sempre utilizando problemas como ponto de partida para a generalização, com foco no aprofundamento dos conteúdos necessários para a otimização com dados incertos e o desenvolvimento do estudo voltado aos alunos do ensino básico, revendo e ampliando conceitos abordados no Ensino Médio. No decorrer deste trabalho houve uma preocupação de se abordar problemáticas que discorressem sobre questões aplicadas e que agregassem competências que enfatizassem os conceitos probabilísticos que permeiam o cotidiano distanciando-se dos jogos de azar, que podem dar uma interpretação inviezada dos conceitos de probabilidade e sua aplicabilidade.

Como propostas futuras, pretende-se preparar um material, a partir das propos-

---

tas apresentadas nesta dissertação, com o objetivo de realizar atividades com alunos do Ensino Médio. Estas atividades poderão ser realizadas em sala de aula ou como atividades extracurriculares, dependendo do grau de dificuldade de cada situação-problema. Uma ideia complementar consiste em trabalhar na proposição de atividades a partir da utilização de ferramentas computacionais e de meios digitais, considerando o período excepcional que estamos vivendo, devido à pandemia do coronavírus. Esta ideia permitiria atividades complementares às realizadas em sala de aula, ou mesmo, como continuidade à uma atividade extra curricular realizada de forma presencial.

---

# Bibliografia

- Arenales, M. et al. (2015). *Pesquisa Operacional*. Gen LTC, 2a. edition.
- Barbosa, J. L. M. (1985). *Geometria euclidiana plana*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Bazaraa, M. S. et al. (2011). *Linear Programming and Network Flows (3rd Edition)*, volume 1. Wiley-Interscience, 3 edition. <http://lib.ugent.be/catalog/ebk01:2550000000055743>.
- Bezerra, M. J. et al. (1997). *Novo Bezerra Matemática, 2o grau*, volume Único. Editora Scipione, 4 edition.
- Biembengut, M. et al. (2000). *Modelagem matemática no ensino*. EDITORA CONTEXTO.
- Boaler, J. (2017). *Mentalidades Matemáticas: Estimulando o Potencial dos Estudantes por Meio da Matemática Criativa, das Mensagens Inspiradoras e do Ensino Inovador*. Penso Editora.
- Burak, D. (2016). Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. *Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações [online]*.
- Coutinho, M. W. (2019). O problema de corte de estoque e aplicações. Dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UNESP.
- de Oliveira, E. J. et al. (2015). Cálculo de probabilidades associadas às distribuições de probabilidade.
- de Souza, V. H. G. (2008). *O uso de vários registros na resolução de inequações: Uma abordagem funcional gráfica*. PhD thesis.
- Fernandes, J. A. (2000). Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no nono ano de escolaridade.
- Ferreira, É. d. M. (2018). Possibilidades para o estudo de otimização no ensino médio.

- Gruenberg, K. W. et al. (1977). *Linear Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 49. Springer-Verlag New York, 1 edition.
- Guidorizzi, H. (2000). *Um curso de cálculo: vol. 2*, volume 2. Grupo Gen - LTC.
- Hurson, T. (2013). *Pense Melhor: Um guia pioneiro sobre o pensamento produtivo*.
- Larson, B. F. R. (2015). *Estatística Aplicada*, volume 1 of 6. Pearson Universidades.
- Lima, E. L. et al. (1996a). *A matemática do ensino médio v. 2*, volume 2 of *Coleção do professor de matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Lima, E. L. et al. (1996b). *A matemática do ensino médio v. 2*, volume 2 of *Coleção do professor de matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática.
- Lopes, A. L. M. (2017). Otimização linear: Conceitos e aplicação nas aulas de matemática para o ensino médio. Dissertação (mestrado profissional em matemática em rede nacional), UNESP.
- Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos Cedes*, 28(74):57–73.
- Luenberger, D. G. (2010). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, 3 edition.
- Lustosa, L. J. et al. (2015). Aplicações matemáticas em engenharia de produção. *30º Colóquio Brasileiro de Matemática*, 1:66.
- MEC/SEF (1998). Parâmetros curriculares nacionais (pcns).
- Orey, D. C. et al. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. *Revista Horizontes*, 25(2):197–206.
- Rao, S. S. (2009). *Engineering Optimization - Theory and Practice*. Wiley, 4 edition.
- Rech, R. (2019). Resolvendo problemas de otimização no ensino médio. *Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/705-4.pdf>* Acesso em, 1.
- Rosa, A. P. (2010). *Geometrias não euclidianas*. PhD thesis.
- Silva, E. R. (2018). Máximos e mínimos no ensino básico: uma abordagem utilizando a otimização linear e não-linear. Master's thesis, Universidade Federal de São Paulo.
- Soares, M. T. C. et al. (2001). Metodologia da resolução de problemas. *24a Reunião ANPEd*.
- Wagner, E. (2009). Uma introdução às construções geométricas. *Rio de Janeiro: SBM*.

Wells, H. G. (1904). *The Food of the Gods*. Frawley Corporation.

Wets, R. (2002). Stochastic programming models: Wait-and-see versus here-and-now. *Institute for Mathematics and Its Applications*, 128.

# Índice

- Condição de Otimalidade do Caso Discreto do Problema do Jornaleiro, 80
- Curva de Nível, 13
- Definição Axiomática de Probabilidade, 39
- Espaço Amostral, 39
- Esperança, 74
- Eventos, 39
- Eventos Independentes, 44
- Eventos Mutuamente Excludentes, 39
- Experimentos Aleatórios, 39
- Experimentos Determinísticos, 39
- Lei dos Grandes Números, 47
- Otimização, 2, 7
- Otimização Linear no Ensino Médio, 22
- Pesquisa Operacional, 1
- Probabilidade, 39
- Probabilidade Condicional, 43
- Probabilidade da Interseção de Eventos, 43
- Probabilidade da União de Eventos, 41
- Probabilidade de Eventos Complementares, 43
- Probabilidade Empírica, 45
- Probabilidade Frequencialista, 45
- Problema do Jornaleiro, 72
- Propriedades da Probabilidade, 40
- Quantidade de Pontos Extremos, 19
- Solução Básica, 19
- Teorema Fundamental da Programação Linear, 15
- União de Conjuntos, 41
- Valor Esperado, 74
- Valores Extremos, 8
- Variável Básica, 19
- Variável Não-Básica, 19
- Vetor Gradiente, 13

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 11 / 1 / 2021



Assinatura do autor