UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sistemas lineares: aspectos lúdicos e uma abordagem utilizando recursos tecnológicos

Luís Gabriel Mietto Romão

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Luís Gabriel Mietto Romão

Sistemas lineares: aspectos lúdicos e uma abordagem utilizando recursos tecnológicos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
Novembro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R767s

Romão, Luis Gabriel Mietto
Sistemas lineares: aspectos lúdicos e uma abordagem utilizando recursos tecnológicos / Luis Gabriel Mietto Romão; orientador Sérgio Luís Zani. -- São Carlos, 2020.
79 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Sistemas Lineares. 2. Intersecção de planos. I. Zani, Sérgio Luís, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Luís Gabriel Mietto Romão

Linear systems: ludic aspects and an approach using technological resources

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Sérgio Luís Zani

USP – São Carlos
November 2020

Dedico esse trabalho à minha família, que sempre me apoiou nos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador Sergio Luís Zani, por toda paciência e dedicação.

Aos professores do ICMC: Ires, Hermano, Regilene, Roberta, Frasson e Didi, por tudo que puderam me ensinar.

A ETEC Francisco Garcia, em nome da diretora Maria Helena, que abriu as portas para as pesquisas serem realizadas.

A todos os alunos do 1º Etim Informática e do 3º Etim em Contabilidade da ETEC Francisco Garcia por terem realizado as atividades propostas.

Aos meus colegas de mestrado: Alexandre, Aline, Cairo, Cássia, Daniel, Juliana, Jullymari, Matheus, Renato e Samuel.

À minha família, José Luís, Susete, Moisés, Ligia, Zesunal, Maria Lucia (in memorian), por sempre me apoiarem nos momentos mais difíceis.

À minha namorada, Juliana, por sempre me motivar a ser uma pessoa melhor.

A Deus, pelo dom da Vida

"Para nós os grandes homens não são aqueles que resolveram os problemas,
mas aqueles que os descobriram."
(Albert Schweitzer)

RESUMO

ROMÃO,L.G.M. **Sistemas lineares: aspectos lúdicos e uma abordagem utilizando recursos tecnológicos**. 2020. 79 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Este trabalho tem por finalidade apresentar uma abordagem para o ensino de sistemas lineares que consiste, primeiramente, a título de motivação, em fazer uso de quebra-cabeças compartilhados no Facebook e, posteriormente, apresentar um olhar geométrico para os sistemas com 3 equações e 3 incógnitas fazendo uso do Geogebra.

Palavras-chave: Sistemas, Lineares, intersecção de planos.

ABSTRACT

ROMÃO,L.G.M. **Linear systems: ludic aspects and an approach using technological resources**. 2020. 79 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

The main goal of this work is to present an approach to teaching linear systems that, as a motivation, makes use of some puzzles that are popular on Facebook, and then to present a geometric point of view of systems of 3 equations and 3 unknowns having Geogebra as a tool.

Keywords: Linear systems, planes intersection.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática tem se tornado um grande desafio para os professores.

Dentre esses obstáculos, podemos destacar:

> A própria visão do professor disseminada na sociedade, com salários baixos, falta de reconhecimento e de condições de trabalho diferenciado, e os longos períodos de greve por piso salarial, ao mesmo tempo em que fizeram avançar a luta dos professores da rede pública, serviram também para expor publicamente a condição de trabalho e as necessidades básicas da educação, não atendidas. (SOARES, 2006, p. 106)

Muitos profissionais precisam dar aulas em dois ou até três períodos, com isso a atualização profissional é precária. Além disso, o professor tem um papel fundamental no controle da evasão escolar.

> São inúmeros os problemas que decorrem da questão: evasão escolar; pavor diante da disciplina; medo e aversão à escola, dentre outros. Em larga medida, o problema pode estar atrelado a uma metodologia amplamente adotada nas escolas para o ensino em geral e especificamente para o da Matemática. (VALENTE, 1999, p. 78)

É notado que muitas escolas possuem salas de informáticas, na ETEC Francisco Garcia, escola na qual realizaremos as atividades, as salas de aulas contam com projetores e computadores em todas as salas de aula, mas:

> *a presença isolada e desarticulada dos computadores na escola não é, jamais, sinal de qualidade de ensino; mal comparando, a existência de alguns aparelhos ultramodernos de tomografia e ressonância magnética em determinado hospital ou rede de saúde não expressa, por si só, a qualidade geral do serviço prestado à população.(CORTELLA,) apud (BARROS, , p. 5)*

Parafraseando o autor acima, não podemos depositar todas as soluções no computador.

O grande desafio é atingir os nossos protagonistas: os alunos.

> As mudanças na educação dependem também dos alunos. Alunos curiosos e motivados facilitam enormemente o processo, estimulam as melhores qualidades do professor, tornam-se interlocutores lúcidos e parceiros de caminhada do professor-educador. Alunos motivados aprendem e ensinam, avançam mais, ajudam o professor a ajudá-los melhor. Alunos que provêm de famílias abertas, que apoiam as mudanças, que estimulam afetivamente os filhos, que desenvolvem ambientes culturalmente ricos, aprendem mais rapidamente, crescem mais confiantes e se tornam pessoas mais produtivas. (MORAN, 2006, p. 17-18)

Portanto, a tecnologia na educação matemática ganha cada vez mais espaço na sala de aula.

Neste trabalho, faremos uma abordagem sobre sistemas lineares utilizando recursos tecnológicos (Geogebra). Também serão apresentadas atividades introdutórias baseadas em quebra-cabeças que podem ser resolvidos com o auxílio de sistemas lineares.

O Geogebra é um software gratuito, que permite utilizar conceitos geométricos e algébricos. Pode ser encontrado no seguinte site: https://www.geogebra.org/

No Capítulo 2, será formalizado a teoria de sistemas lineares, definindo equações lineares, sistemas lineares com 2 equações e com 3 equações.

No capítulo 3, será utilizado quebra-cabeças compartilhados em redes sociais a fim de tornar lúdico e motivacional o aprendizado de sistemas lineares. Além disso, traremos um plano de atividade, aplicação e resultados da aplicação.

No capítulo 4, será feita uma abordagem de sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas do ponto de vista Geométrico, utilizando o Geogebra. Na sequência, traremos uma avaliação diagnóstica para sabermos o nível de entendimento de Geometria dos alunos, após isso, aplicaremos uma atividade utilizando o Geogebra, bem como os resultados.

CAPÍTULO

2

EQUAÇÕES COM DUAS E TRÊS INCÓGNITAS

2.1 Equação linear

A abordagem utilizada neste trabalho procura explorar a inter-relação entre um sistema algébrico de equações lineares e sua versão geométrica que analisa como podem ser as posições relativas entre retas no plano e entre planos no espaço. A referência principal foi o livro utilizado na disciplina de Geometria Analítica do PROFMAT. (DELGADO J.; FRENSEL, 2013)

Definição 1. Uma equação linear de n incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

em que a e b são números reais.

Uma solução da equação é uma n-upla de números reais indicado por $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

2.2 Equação linear com duas incógnitas

Definição 2. Um sistema linear de m equações e n incógnitas, chamado de sistema m por n, $m \times n$, é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, ou seja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Neste trabalho, em geral, faremos uso de $x, y, z, ...$ ao invés de $x_1, x_2, x_3...$.

Tomemos uma equação com 2 incógnitas, ou seja, uma equação linear nas variáveis x e y da forma:

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo pelo menos um dos números a ou b diferente de zero. Chamamos a, b de coeficientes e c de termo independente da equação.

Assim, um sistema de 2 equações lineares e 2 incógnitas é um conjunto de 2 equações do tipo (2.1), ou seja:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Um par ordenado de números reais (x_0, y_0) é uma solução do sistema (2.2) se

$$a_kx_0 + b_ky_0 = c_k$$

para todo $k = 1$ e 2.

Podemos analisar do ponto de vista geométrico as soluções do sistema linear (2.2):

Como os pontos no plano são representados por pares ordenados de números reais, em relação a um sistema de eixos ortogonais XY, dizemos também que um ponto $P = (x_0, y_0)$ é uma solução do sistema quando o par ordenado de suas coordenadas (x_0, y_0) é uma solução. Num tal sistema de coordenadas, uma equação como em (2.1) representa uma equação de uma reta.

O conjunto de todas as soluções de (2.2) é o conjunto solução do sistema. Ou seja, cada equação do sistema (2.2) representa uma reta no plano.

Sejam $r : a_1x + b_1y = c_1$ e $s : a_2x + b_2y = c_2$. O par ordenado (x_0, y_0) é solução do sistema, se e somente se $(x_0, y_0) \in r \cap s$.

Temos as seguintes possibilidades sobre as posições relativas dessas duas retas no plano:

Concorrentes: havendo apenas um ponto de intersecção e, como consequência, temos que o sistema tem solução única.

Paralelas: sendo as retas paralelas e distintas não há intersecção; portanto, o sistema não possui solução.

Coincidentes: neste caso, há infinitos pontos na intersecção das retas; portanto, todo ponto que satisfaz a equação r ou a equação s é solução do sistema linear.

Podemos, então, classificar um sistema linear de ordem 2×2 como:

Possível e Determinado: quando possui uma única solução.

Possível e Indeterminado: quando possui mais de uma solução.

Impossível: quando não possui soluções.

Vejamos os seguintes exemplos:

Analisemos a equação linear $x + y = 5$, que se trata-se de um sistema da forma 1×2.

Essa equação possui infinitas soluções. Essas soluções são os pares ordenados na forma $(x, y) = (x, 5 - x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, os pares ordenados $(0, 5)$ $(1,5, 3,5)$ e $(2, 3)$ são soluções.

Tomando um plano cartesiano, a união de todas as soluções é a reta $y = 5 - x$, ou seja, todo par ordenado (x, y) de números reais, que satisfaz uma equação linear com duas variáveis é uma reta no plano.

Podemos ver na representação gráfica da figura 1 [1].

[1] Todas as figuras deste capítulo foram elaboradas pelo autor através do software Geogebra.

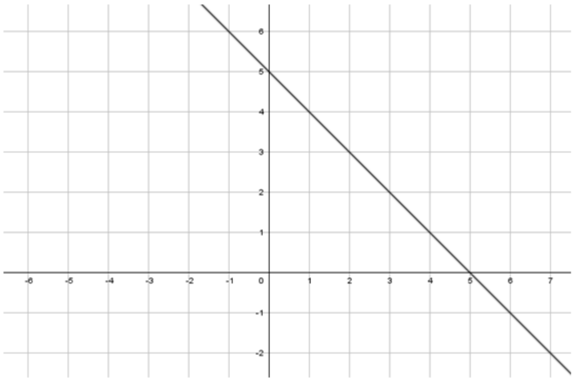


Figura 1 – Representação gráfica da equação da reta: $y = 5 - x$.

Vejamos agora três casos de sistemas de duas equações e duas incógnitas.

Considere, primeiramente, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Traçando essas duas retas no plano cartesiano, vemos que as retas se cruzam no ponto $(3,2)$, como podemos observar na representação gráfica da figura 2.

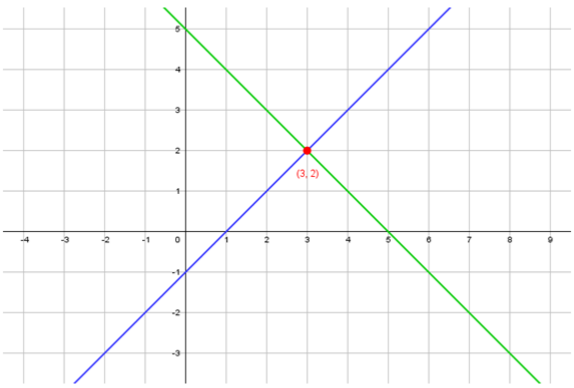


Figura 2 – Representação gráfica das equações das retas: $y = 5 - x$ e $y = x - 1$.

Este par ordenado é solução do sistema linear, o que pode ser comprovado algebricamente.

Considere, agora, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 6x + 7y = 5 \end{cases}$$

Ao utilizarmos o Geogebra para descobrir se o sistema é determinado, indeterminado ou impossível, poderemos ter a falsa sensação de que as duas retas são paralelas (Cf. Figura 3):

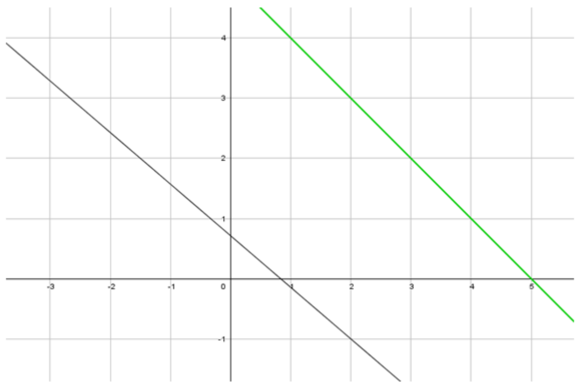


Figura 3 – Representação gráfica das equações das retas: $y = 5 - x$ e $y = \dfrac{5-6x}{7}$.

Porém, com uma ampliação da região de trabalho no Geogebra, notamos que as retas se interceptam no ponto $(-30, -25)$ e, portanto, o sistema é determinado (Cf. Figura 4)

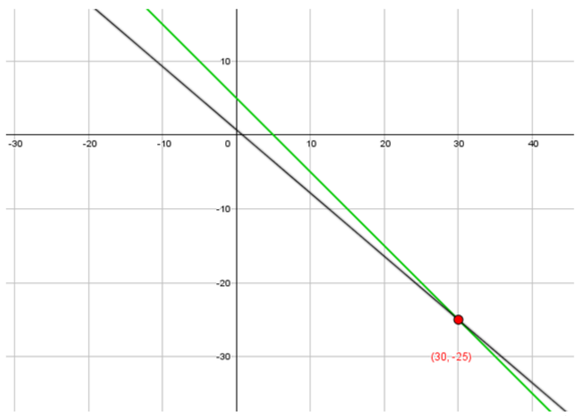


Figura 4 – Representação gráfica das equações das retas: $y = 5 - x$ e $y = \dfrac{5-6x}{7}$, em escala ampliada.

Podemos classificar esses sistemas como possível e determinado, como já definido.

Tomemos as equações $x + y = 3$ e $x + y = 1$, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Traçando as retas no plano cartesiano, temos a figura 5.

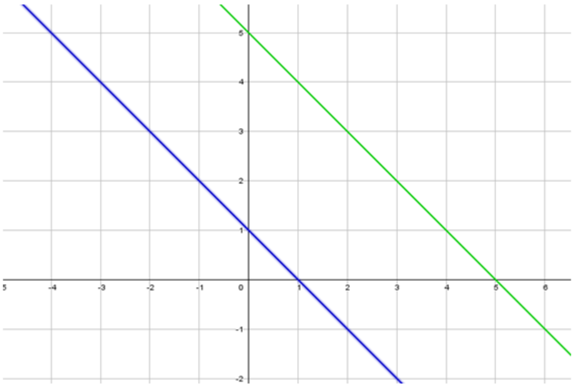


Figura 5 – Representação gráfica das equações das retas: $y = 3 - x$ e $y = 1 - x$.

Traçando essas duas retas no plano cartesiano, temos que essas retas são paralelas, portanto, não teremos solução, o que pode ser comprovado algebricamente. Esse sistema pode ser classificado como impossível.

Tomemos as equações $x + y = 5$ e $2x + 2y = 10$, e o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

Traçando essas duas retas no plano cartesiano, temos apenas um reta, ou seja, elas são retas coincidentes, como mostra a figura 6 [2]

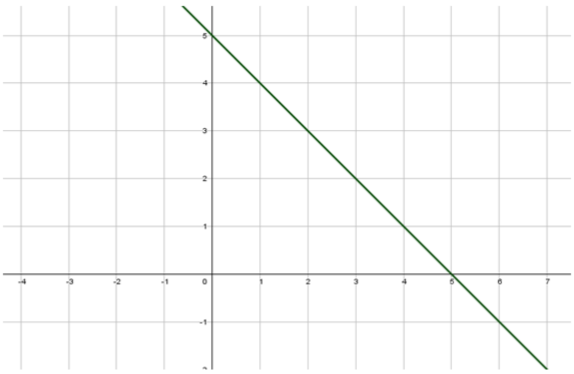


Figura 6 – Representação gráfica das equações das retas: $y = 5 - x$ e $y = \dfrac{10 - 2x}{2}$

Temos, portanto, infinitas soluções. Toda solução da equação $x + y = 5$ ou da equação

[2] Perceba que a equação $y = \dfrac{10 - 2x}{2}$ pode ser simplificada.

$2x+2y=10$ é solução do sistema linear. Esse sistema é possível e indeterminado.

2.3 Noção de vetores no espaço

Iremos trazer a noção e definição de vetores no espaço, para auxílio do professor na próxima seção.

Para um aprofundamento, o leitor poderá ler os capítulos:
2 - Vetores no plano;
10 - Coordenadas e vetores no espaço;
11 - Produto interno e produto vetorial no espaço;
12 - Produto misto, volume e determinante.

Tais capítulos encontram-se no livro Geometria Analítica, dos autores: Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhaylla Crissaff, da coleção PROFMAT (DELGADO J.; FRENSEL, 2013).

Definição 3. Sejam A e B no plano. O vetor $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipotentes a AB. Cada segmento equipotente a AB é um representante do $\overrightarrow{AB}$.

Definição 4. Sejam $A=(a_1,b_1,c_1)$ e $B=(a_2,b_2,c_2)$ pontos no espaço. Os números reais a_2-a_1, b_2-b_1 e c_2-c_1 são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Escrevemos:

$$\overrightarrow{AB}=(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)$$

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço e consideramos os vetores $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ e $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$.

Definição 5. O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o vetor

$$\vec{u}\times\vec{v}=(b_1c_2-b_2c_1,-(a_1c_2-a_2c_1),a_1b_2-a_2b_1)$$

Este vetor é ortogonal aos vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

2.4 Sistemas lineares com três incógnitas

Vejamos, agora, uma equação linear com 3 incógnitas, isto é, uma equação da forma:

$$ax+by+cz=d \tag{2.3}$$

em que $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, sendo pelo menos dois dos números a,b ou c diferentes de zero. Chamamos a,b,c de coeficientes e d de termo independente da equação.

Estamos interessados em sistemas de 2 equações lineares com 3 incógnitas ou de 3 equações lineares e 3 incógnitas, ou seja, sistemas do tipo:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

ou

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}, \tag{2.5}$$

respectivamente.

Uma terna ordenada de números reais (x_0,y_0,z_0) é uma solução do sistema (2.5) se

$$a_kx_0+b_ky_0+c_kz_0=d_k$$

para todo $k=1,2$ e 3.

Analisaremos os sistemas de equações lineares com três variáveis, do ponto de vista algébrico e geométrico.

Cada equação do tipo (2.3) do sistema (2.5) representa um plano no espaço. Chamemos esses planos de π_1, π_2 e π_3, na ordem em que aparecem as equações.

Os pontos do espaço são representados por terna ordenadas de números reais, em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, dizemos que o ponto $P=(x_0,y_0,z_0)$ é uma solução de (2.5), quando a terna ordenada (x_0,y_0,z_0) também for solução. O conjunto de todas as soluções de (2.5) é o conjunto solução do sistema. Ou seja,uma terna (x_0,y_0,z_0) é solução do sistema, se e somente se $(x_0,y_0,z_0) \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.

Temos as seguintes posições relativas dos três planos:

i) Os três planos π_1, π_2 e π_3 são coincidentes, ou seja, $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$. Neste caso, o sistema (2.5) admite infinitas soluções.

Figura 7 – Representação gráfica de 3 planos coincidentes.

ii) Dois planos são coincidentes, digamos, $\pi_1 \equiv \pi_2$ e o terceiro plano π_3 é paralelo a eles, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Portanto, o sistema (2.5) é impossível.

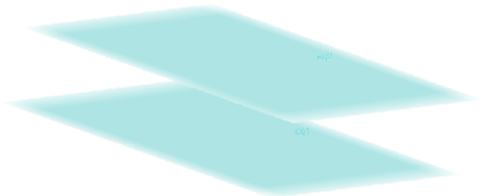


Figura 8 – Representação gráfica de 2 planos coincidentes e um outro plano paralelo a eles.

iii) Os três planos π_1, π_2 e π_3 são paralelos entre si, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 \cap \pi_3 = \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Portanto, o sistema (2.5) é impossível, isto é, não possui solução.

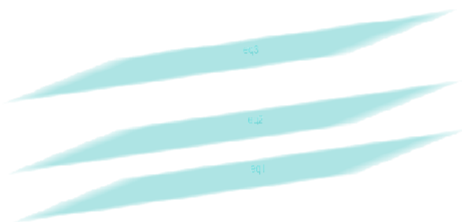


Figura 9 – Representação gráfica de 3 planos paralelos entre si.

iv) Dois planos são coincidentes $\pi_1 \equiv \pi_2$ e o terceiro plano π_3 os intercepta resultando a reta r, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$. Portanto, o sistema (2) tem infinitas ternas que são soluções do sistema, porém essas são dependentes de um parâmetro.

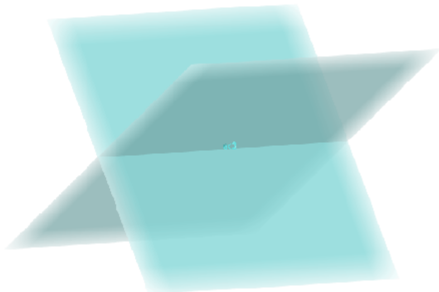


Figura 10 – Representação gráfica da intersecção de 2 planos paralelos e um intersectando esses, resultando uma reta

v) Dois planos π_1, π_2 são paralelos entre si e o terceiro plano π_3 os intercepta nas retas r e s. Portanto, o sistema (2.5) é impossível.

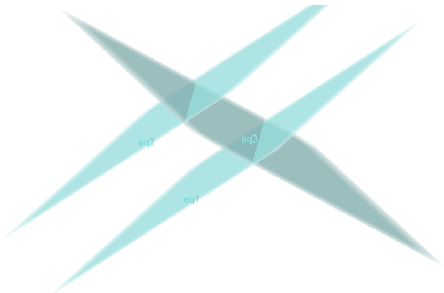


Figura 11 – Representação gráfica de 2 planos paralelos e um plano intersectando esses.

vi) Os três planos π_1, π_2 e π_3 são distintos e têm uma única reta r em comum, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$. Portanto, o sistema (2.5) tem infinitas ternas como solução, porém essas são dependentes de um parâmetro.

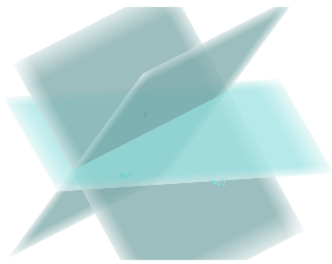


Figura 12 – Representação gráfica da intersecção de 3 planos distintos, resultando uma única reta.

vii) Os três planos são distintos e se interceptam dois a dois, ou seja, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, $\pi_1 \cap \pi_2 = s$ e $\pi_1 \cap \pi_2 = t$. As retas r, s e t são paralelas entre si, mas $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Portanto, o sistema (2.5) é impossível.

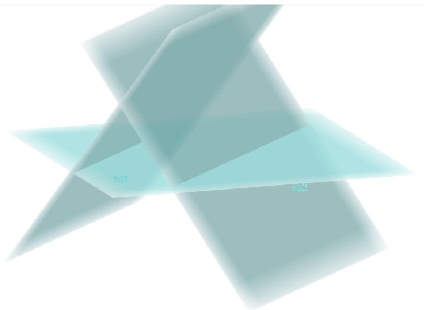


Figura 13 – Representação gráfica de 3 planos distintos, se interceptando dois a dois

viii) Os três planos têm um único ponto em comum, $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Figura 14 – Representação gráfica da intersecção de 3 planos distintios, resultando um único ponto

Analogamente ao sistema com duas variáveis, podemos classificar o sistema com três variáveis em:

Possível e Determinado: quando possui apenas uma solução.

Possível e Indeterminado: quando possui mais de uma solução.

Impossível: quando não possui soluções.

Teorema 1. Para um sistema de 2 equações e 3 incógnitas, como em (2.4) tal que $(a_i, b_i, c_i) \neq (0,0,0)$ para $i = 1,2$, os termos independentes d_1 e d_2 e os respectivos planos π_1 e π_2 temos:

A1) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a_2, b_2, c_2) = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1)$, e $d_2 = \lambda d_1$, se e somente se π_1 e π_2 são coincidentes, $\pi_1 = \pi_2$.

A2) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a_2, b_2, c_2) = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1)$, e $d_2 \neq \lambda d_1$, se e somente se π_1 e π_2 são paralelos, $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$.

A3) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a_2,b_2,c_2) \neq (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$, e $d_2 = \lambda d_1$, se e somente se π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta l, $\pi_1 \cup \pi_2 = l$.

Demonstração

A1) Como $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$, e $d_2 = \lambda d_1$, obtemos a equação do plano π_2 multiplicando por λ os membros da equação do plano π_1. Ou seja, um ponto pertence a π_1 se e somente se pertence ao plano π_2. Conclui-se que os planos π_1 e π_2 coincidem, $\pi_1 = \pi_2$.

A2) Vamos supor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$, e $d_2 \neq \lambda d_1$. Então, um ponto $P = (x,y,z)$ pertence ao plano π_1 se e só se

$$a_1x+b_1y+c_1z = d_1 \Longleftrightarrow \lambda a_1x+\lambda b_1y+\lambda c_1z = \lambda d_1 \Longleftrightarrow \lambda a_2x+\lambda b_2y+\lambda c_2z = \lambda d_1$$

Como $d_2 \neq \lambda d_1$, temos por (2.4), que $P \notin \pi_2$. Logo $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, ou seja π_1 e π_2 são planos paralelos.

A3) Neste caso, a hipótese implica que

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \neq (0,0,0).$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que a última coordenada $D = a_1b_2 - a_2b_1$ do produto vetorial $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ é diferente de zero. O sistema (2.4) pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x+b_2y = d_2 - c_2z \end{cases}$$

o determinante $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ da matriz do sistema acima diferente de zero, a única solução para cada valor de z é

$$x = \frac{1}{D}[(d_1 - c_1z)b_2 - (d_2 - c_2z)b_1]$$
$$y = \frac{1}{D}[(d_2 - c_2z)a_1 - (d_1 - c_1z)a_2]$$

Portanto, os planos π_1 e π_2 se intersectam ao longo da reta

$$\begin{cases} x = \frac{1}{D}(d_1b_2 - d_2b_1) + \frac{1}{D}(b_1c_2 - b_2c_1)t \\ y = \frac{1}{D}(d_2a_1 - d_1a_2 - \frac{1}{D}(a_1c_2 - a_2c_1)t; t \in \mathbb{R}, \\ z = t \end{cases} \quad (2.6)$$

que é paralela ao vetor $\vec{u} = (\frac{1}{D}(b_1c_2 - b_2c_1), \frac{-1}{D}(a_1c_2 - a_2c_1), 1)$. Multiplicando o vetor $\vec{u}$ por D, obtemos que l é uma reta paralela ao produto vetorial $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Corolário 1. Para um sistema de 2 equações e 3 incógnitas, como em (2.4) tal que $(a_i,b_i,c_i) \neq (0,0,0)$ para $i = 1,2$ ocorre um e somente um dos itens:

i) O sistema (2.4) possui infinitas soluções, ou seja, é possível e indeterminado;

ii) O sistema (2.4) não possui solução, ou seja, é impossível.

Teorema 2. Seja o sistema de 3 equações e 3 incógnitas dado por (2.5) com os coeficientes tais que $(a_i,b_i,c_i) \neq (0,0,0)$ para $i = 1,2,3$. Então, podemos afirmar que:

1º caso: O sistema (2.5) será possível e indeterminado se e somente se ocorre um dos casos:

i) Existem $\lambda,\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$, $(a_3,b_3,c_3) = (\sigma a_1,\sigma b_1,\sigma c_1)$, $d_2 = \lambda d_1$ e $d_3 = \sigma d_1$.

ii) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$ e $d_2 = \lambda d_1$, mas (a_1,b_1,c_1) e (a_3,b_3,c_3) não são múltiplos.

iii) (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) e (a_3,b_3,c_3) não são múltiplos um do outro, mas existem $\lambda,\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $(a_3,b_3,c_3) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)+(\sigma a_2,\sigma b_2,\sigma 2)$ e $d_3 = \lambda d_1 + \sigma d_2$.

2º caso: O sistema (2.5) será impossível se e somente se ocorre um dos casos:

i) Existem $\lambda,\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$, $(a_3,b_3,c_3) = (\sigma a_1,\sigma b_1,\sigma c_1)$ e $d_2 = \lambda d_1$, mas $d_3 \neq \sigma d_1$.

ii) Existem $\lambda,\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$, $(a_3,b_3,c_3) = (\sigma a_1,\sigma b_1,\sigma c_1)$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$, $d_3 \neq \sigma d_1$ e $d_3 \neq \frac{\sigma}{\lambda} d_2$.

iii) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$.

iv) (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) e (a_3,b_3,c_3) são dois a dois não colineares, mas existem $\lambda,\sigma \in \mathbb{R}$ tais que$(a_3,b_3,c_3) = (\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)+(\sigma a_2,\sigma b_2,\sigma 2)$ e $d_3 \neq \lambda d_1 + \sigma d_2$

3º caso: O sistema (2.5) será possível e determinado, se e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demonstração:

Os itens i e ii do 1º caso, i, ii e iii do 2º caso, seguem diretamente da Proposição 1.

Basta demonstrarmos os casos restantes:

1º caso.

iii) Suponhamos que os vetores $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ e $\vec{n}_3$ são dois a dois não colineares. Pela implicação A3 da proposição 1, os planos π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta l.

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto da reta $l = \pi_1 \cap \pi_2$ e λ e $\sigma \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 = d_2 \end{cases} \Longrightarrow \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \lambda a_1x + \lambda b_1y + \lambda c_1z = \lambda d_1 \\ \sigma a_2x + \sigma b_2y + \sigma c_2z = \sigma d_2 \end{cases} \Longrightarrow \tag{2.8}$$

$(\lambda a_1 + \sigma a_2)x + (\lambda b_1 + \sigma b_2)y + (\lambda c_1 + \sigma c_2)z = d_1 + \sigma d_2$.

Se, além disso, existem λ, $\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{n}_3 = \lambda \vec{n}_1 + \sigma \vec{n}_2$ e $d_3 = \lambda d_2 + \sigma d_1$, então $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ e, portanto, $P \in \pi_3$. Logo, $l \subset \pi_3$. Como os planos $\pi_1 e \pi_3$, pela Proposição 1 também se intersectam ao longo de uma reta $l \subset \pi_1\ cap \pi_3$, obtemos que $\pi_1 \cap \pi_3 = l$. Então, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = l$.

2º caso iv) Pelo item A6, π_1 e π_2 se intersectam ao longo de uma reta l_1 e esta reta não intersecta o plano π_3, pois, por hipótese, existem λ e $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $(a_3, b_3, c_3) = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) + (\sigma a_2, \sigma b_2, \sigma c_2)$, mas $d_3 \neq \lambda d_1 + \lambda d_2$. Logo, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$.

Sejam l_2 e l_3 as retas tais que $\pi_2 \cap \pi_3 = l_2$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = l_3$. Como $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 =$, segue que $l_1 \cap l_2 = l_1 \cap l_3 = l_2 \cap l_2 =$, ou seja, as retas l_1, l_2 e l_3 são duas a duas paralelas.

3º Caso

Como $(a_2,b_2,c_2) = (\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1)$, $(a_3,b_3,c_3) = (\sigma a_1, \sigma b_1, \sigma c_1)$ e $d_2 \neq \lambda d_1$, mas $d_3 \neq \sigma d_1$, para $\lambda, \sigma \in \mathbb{R}$.

Em particular, nenhum destes é múltiplo do outro. Logo, $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ é uma reta paralela $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$. Portanto, temos que $r \cap \pi_3$ consiste apenas de um único ponto P. Logo, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$.

Corolário 2. Para um sistema de 3 equações e 3 incógnitas, como em (2.5) tal que $(a_i,b_i,c_i) \neq (0,0,0)$ para $i = 1,2,3$ ocorre um e somente um dos itens:

i) O sistema (2.5) possui infinitas soluções, ou seja, é possível e indeterminado;

ii) O sistema (2.5) não possui solução, ou seja, é impossível;

iii) O sistema (2.5) possui uma única solução, ou seja, é possível e determinado.

CAPÍTULO

3

PLANO DE ATIVIDADE - BRINCADEIRAS DO FACEBOOK

A geração dos nossos alunos está muito ligada à tecnologia. Aproveitaremos, então, charadas que são compartilhadas em redes sociais para um contato diferente com a matemática. Montaremos grupos com 4 alunos. Em seguida, será entregue um questionário para as respostas coletivas.

A Atividade será constituída por 4 partes:

Parte 1: Resolução das charadas mentalmente.

Serão projetadas as imagens e pediremos para os alunos resolverem mentalmente as charadas matemáticas.

Parte 2: Formalizar algebricamente os sistemas lineares.

Nesta etapa, pediremos aos alunos para transcreverem os desenhos para a forma algébrica, deixaremos a cargo dos alunos para escolherem as letras das variáveis.

Parte 3: Calcular os valores das variáveis algébricas

Com base na transcrição feita na parte 2, os alunos irão calcular os valores das variáveis que transcreveram, ou seja, irão resolver o sistema de equações de forma empírica.

Parte 4: Reajustar valores da parte 1.

Neste item, deixamos para os alunos um espaço para colocarem a nova resposta, idem da parte 1 caso julguem que tenham colocado a parte 1, de maneira equivocada.

Abaixo, as figuras a serem projetadas [1]:

Figura 15 – Imagem do Facebook

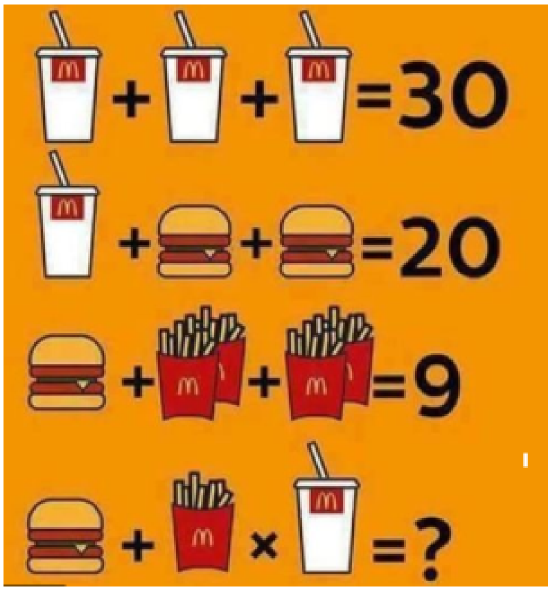


Figura 16 – Imagem do Facebook

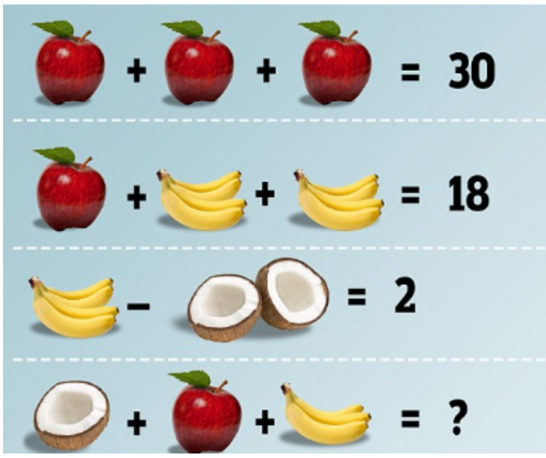


Figura 17 – Imagem do Facebook

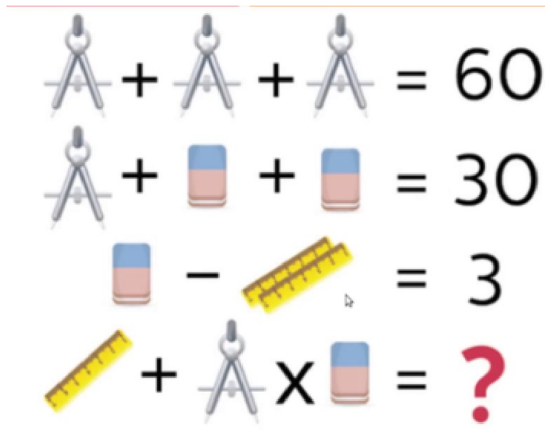


Figura 18 – Imagem do Facebook

[1] Essas imagens são compartilhadas pelos usuários de redes sociais. Essas foram retiradas do Facebook. Os autores são desconhecidos

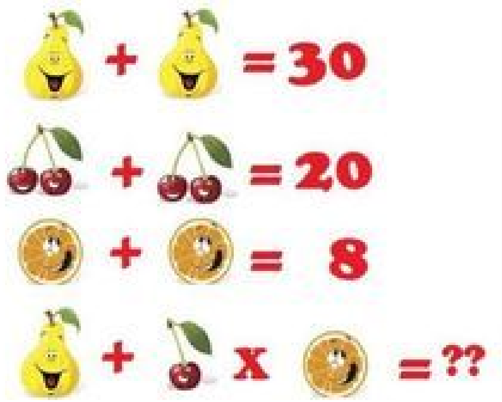


Figura 19 – Imagem do Facebook

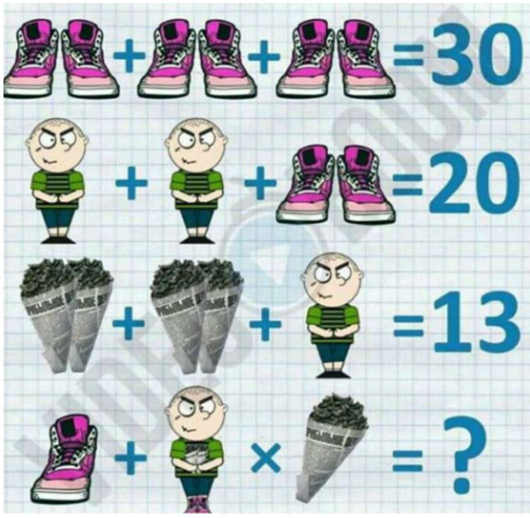


Figura 20 – Imagem do Facebook

Após essa interação, com a participação ativa dos alunos, introduzimos as variáveis nesses problemas e montaremos as equações. após isso lançamos o desafio para tentarem resolver esses problemas através de sistemas lineares. No primeiro momento pedimos aos alunos para transformarem as figuras em linguagem algébrica.

Para a figura 15, tomemos v para flor vermelha, a para a flor azul e g para girassol, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3v = 60 \\ v + 2a = 30 \\ a - 2g = 3 \end{cases}$$

E queremos o valor da expressão:

$$g + v \cdot a$$

Para a figura 16, tomemos x para o copo, y para o lanche e z para a batata, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x = 30 \\ x + 2y = 30 \\ y + 4g = 9 \end{cases}$$

E queremos o valor da expressão:

$$y + z \cdot y$$

Para a figura 17, tomemos m para a maçã, b para banana e c para o coco, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3m = 30 \\ m + 8b = 18 \\ 4b - 2c = 2 \end{cases}$$

E queremos o valor da expressão:

$$c + m + 3b$$

Para a figura 18, tomemos c para o compasso, b para a borracha e r para a régua, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3c = 60 \\ c + 2b = 30 \\ b - 2r = 3 \end{cases}$$

E queremos o valor da expressão:

$$r + c \cdot b$$

Para a figura 19, tomemos p para pera, c para a cereja e l para a laranja, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2p = 30 \\ 4c = 40 \\ 2l = 8 \end{cases}$$

E queremos o valor da expressão:

$$p + c \cdot l$$

Para a figura 20, tomemos t para o tênis, m para o menino e r para o ramalhete de plantas, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 6t = 30 \\ 2m + 2t = 20 \\ 4r + m = 13 \end{cases}$$

E queremos o valor da expressão:

$$t + (m + 2r + 2t) \cdot r$$

Após apresentar a linguagem algébrica, relembramos os sistemas lineares vistos no 8º ano. Além disso, frisamos que tanto a linguagem algébrica como as imagens das figuras, apesar de estarem escritas com símbolos diferentes, matematicamente utilizamos o mesmo raciocínio para resolver os problemas.

3.1 Descrição da escola e professor

No dia 17 de julho de 1931, a Escola Técnica - ETEC Francisco Garcia deu início às suas atividades na cidade de Mococa/SP. Nesse primeiro momento, os cursos disponíveis eram: Marcenaria, Mecânica e Fundição. Apesar disso, a escola só foi inaugurada oficialmente no dia 03 de janeiro de 1932.

Devido à época e aos cursos oferecidos, nos primórdios a escola apresentava apenas alunos do sexo masculino. Para mudar essa situação e atrair o público feminino, a ETEC Francisco Garcia criou os cursos de Corte e Costura, Bordados, Puericultura, Economia Doméstica, Culinária, Laticínios, Desenho Técnico e Eletricidade.

De maneira geral, o objetivo principal da escola era formar mão-de-obra especializada e com foco nos setores industriais, tanto comercial quanto rural, para permitir a entrada dos alunos no mercado de trabalho e, assim, garantir uma melhor qualidade de vida aos indivíduos.

Em 1994, ela foi integrada ao Centro Paula Souza. Por conta disso, seu nome passou a ser Escola Técnica Estadual Francisco Garcia. Desse modo, o seu objetivo expandiu e, agora, visava formar profissionais para as mais variadas áreas industriais para atingir amplo um mercado de trabalho. Além disso, visava, também, elevar a qualidade do processo, da produtividade e dos serviços.

No ano de 1996, a Escola Técnica Estadual Francisco Garcia mudou de endereço e passou a se localizar na Avenida Dr. Américo Pereira Lima, 1507. Com essa mudança, a escola se "modernizou" e passou a funcionar nos três períodos (matutino, vespertino e noturno).

Em 2007, mais uma mudança em seu nome. Agora, ela passou a ser chamada apenas ETEC "Francisco Garcia".

Ao longo de toda a sua história, a ETEC "Francisco Garcia" sempre prezou pela elevada competência de seus formandos, capazes de desenvolver as atividades profissionais e de exercer a cidadania.

Hodiernamente, a ETEC "Francisco Garcia" oferece os seguintes cursos técnicos: Administração, Enfermagem, Gestão Ambiental, Hotelaria, Informática, Mecânica, Química, Segurança do Trabalho, Turismo, Turismo Receptivo, Farmácia, Marketing e Vendas; além do Ensino Médio.

Para expandir ainda mais o seu alcance, e com o objetivo de atingir a comunidade local e regional, a ETEC "Francisco Garcia" fez parcerias com a APM para oferecer os seguintes cursos:

Formação Inicial e Continuada de Trabalhadores de Soldador, de Programador de Torno com Comando Numérico Computadorizado –CNC, de Usinagem em Torno. E em parceria com a Fundação de Apoio à Tecnologia e Prefeituras Municipais, disponibilizou os seguintes cursos por meio das Classes Descentralizadas: Técnico em Açúcar e Álcool, em Tapiratiba/SP, e Técnico em Administração, em Cajuru/SP. Informações retiradas do site da . [2]

Atualmente oferece também o Ensino Médio Integrado que é um curso de Ensino Médio juntamente com um curso de nível técnico. Com as seguintes especialidades: Informática, Contabilidade, Administração, Mecânica e Química.

A escola conta com um ótimo prédio, ao lado da FATEC e de uma outra unidade da ETEC.

A escola atende à população de Mococa e região. Os alunos que ingressam nessa instituição o fazem mediante a aprovação no chamado Vestibulinho.

O número de alunos por sala é no máximo 40. Quando algum aluno desiste, alguém que esteja interessado e que esteja na lista de espera pode ingressar. Dessa forma, as salas de Ensino Médio praticamente ficam com 40, 39 ou 38 alunos, sendo raras as turmas com número inferior a 38 alunos. A classe social da maioria é média-baixa.

Atuo Nessa unidade há 2 anos, lecionando para diversos cursos. Atuei também em outra unidade da ETEC, localizada na cidade de Matão. Além dessa escola, atualmente leciono em colégios particulares da região.

3.1.1 Descrevendo a sala de aplicação

Aplicamos as atividades aos alunos do 1º ano de Informática para Internet integrado ao Ensino Médio. Nessa modalidade do Centro Paula Souza, os alunos têm, em média, 8 aulas diárias, e se formam simultaneamente no Ensino Médio e no Curso Técnico em Informática. A turma apresenta muitas dificuldades. Além disso, existem alguns casos de indisciplina e defasagem de conteúdos básicos da Matemática. Nesta turma minhas aulas são no período da tarde, a frequência durante essas aulas é baixa.

[2] Informações retiradas do endereço: http://www.etefgarcia.com.br/site/historia.html (HISTóRIA. . . ,)

3.2 Aspectos gerais da aplicação (respostas e comentários)

A atividade foi aplicada no dia 24/09/2019. Neste dia, apenas 29 alunos, de 40, compareceram na aula, totalizando 72,5% alunos presentes.
Aplicação:

A sala foi dividida em 5 grupos de 4 alunos e 3 grupos de 3 alunos. Após isso, foi entregue um formulário para cada grupo colocar as suas respostas. Foi projetada a 1ª imagem e pedido aos alunos para solucionarem o problema de maneira lúdica. Com base nisso, eles colocaram dois resultados: a) um que representou a maioria dos integrantes; b) e outro que representou integrantes que estavam divergindo. Foi aplicado esse método (com dois possíveis resultados explicitados por cada grupo) para evitar os conflitos internos entre os participantes. Ademais, isso realçou as dúvidas que os alunos tiveram. Após isso, foi projetada a segunda, a terceira, a quarta, a quinta e a sexta imagens, repetindo a orientação da primeira. Depois, voltamos à 1 ª imagem e foi pedido aos alunos para formalizarem algebricamente os problemas. Os mesmos fizeram isso com todas as imagens. Para finalizar, os alunos colocaram os valores individuais de cada variáveis e, na sequência, conferiram com o valor colocado no item 1, colocando a solução do problema nesse segundo momento.

Os alunos gostaram da atividade, pois muitos já haviam visto essas "charadas" pelo Facebook e, nesse momento, aproveitamos para fazer analogia com os sistemas lineares.

A partir disso, foi relembrado o conceito de equação linear, bem como a definição de sistemas lineares. Muitos alunos não viram o conteúdo de sistemas lineares no 8º ano, e uma boa parcela não lembrava. Além disso, vale salientar que todos os alunos dessa sala fizeram o Ensino Fundamental em escolas públicas de Mococa, Tapiratiba e Monte Santo de Minas (cidades da região). Ademais, os alunos alegaram que, no Ensino Fundamental, viram poucos conteúdos em Matemática, por vários fatores: indisciplina da sala, salas superlotadas, professores que se afastavam por licença e a escola não encontrava substituto, colocando professores de outras disciplinas para ministrar Matemática, entre outros relatos.

Enfim, devido a isso, a abordagem de sistemas lineares de ordem 2, que seria breve, e com caráter de revisão, para aprofundarmo em sistemas lineares de ordem 3, acabou durando mais aulas que o planejado. Desse modo, focamos, então, na resolução de sistemas de ordem 2, através dos métodos de adição e substituição.

Após isso, foi pedido a resolução de alguns sistemas lineares, nos últimos itens. Assim, foi colocado um sistema impossível e um sistema possível e indeterminado, para podermos despertar a curiosidade e instigar o desafio. Na sequência, classificamos os sistemas lineares.

Abaixo, os resultados obtidos da aplicação realizada com a sala descrista acima:

Para a figura 15

Apenas 3 grupos acertaram, aproximadamente 38% , de alunos que participaram da atividade. 5 grupos erraram, totalizando 62%. As respostas eram 84, 100, 102, 110, 235.
3 grupos passaram para forma algébrica corretamente, aproximadamente 38% e 5 erraram, totalizando 62%. Analisando os alunos que erraram, 35% não levaram em consideração que tinham duas flores amarelas, tomando a para flor azul e g para flor amarela. Portanto, escreveram a seguinte equação $a - g = 3$. 27% escreveram a seguinte equação: $a - g^2 = 3$, ou seja, escreveram-na elevando a variável da flor amarela ao quadrado. Ao solucionarem os valores das variáveis individuais, apenas dois grupos erram o valor da flor amarela, aproximadamente 21% dos alunos, já que um grupo associou o valor 2 e outro $3,5$.
Após formalizarem, um grupo alterou a resposta. Ou seja, 4 acertaram e 4 erraram.

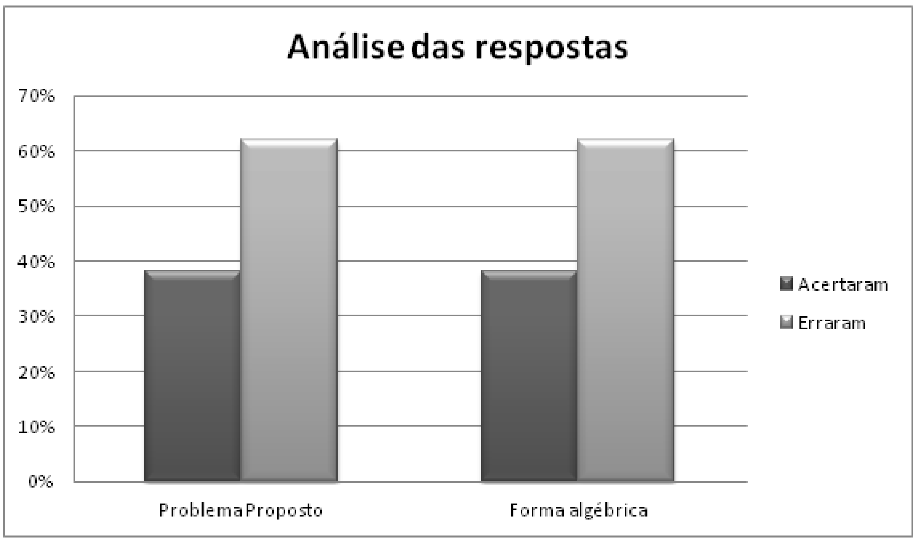


Figura 21 – Gráfico das análises das respostas da figura 15

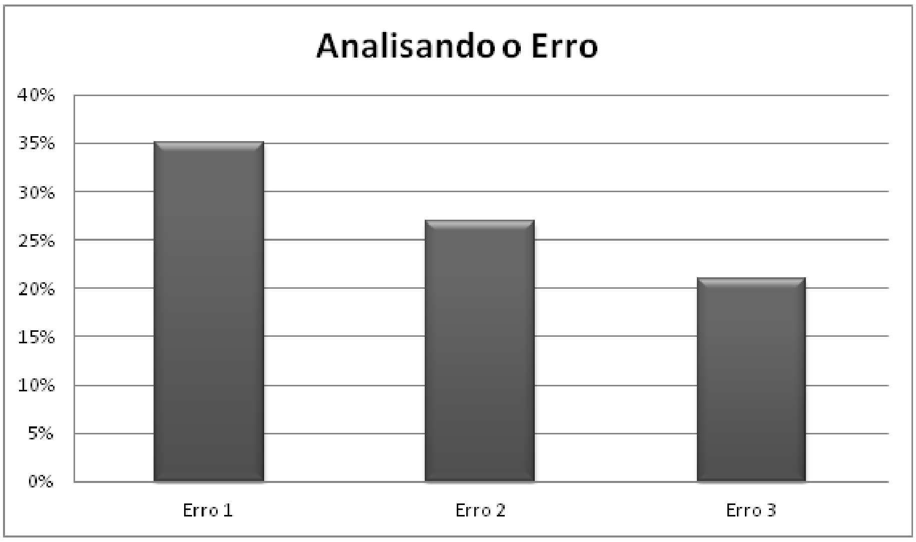


Figura 22 – Gráfico das análises dos erros da figura 15

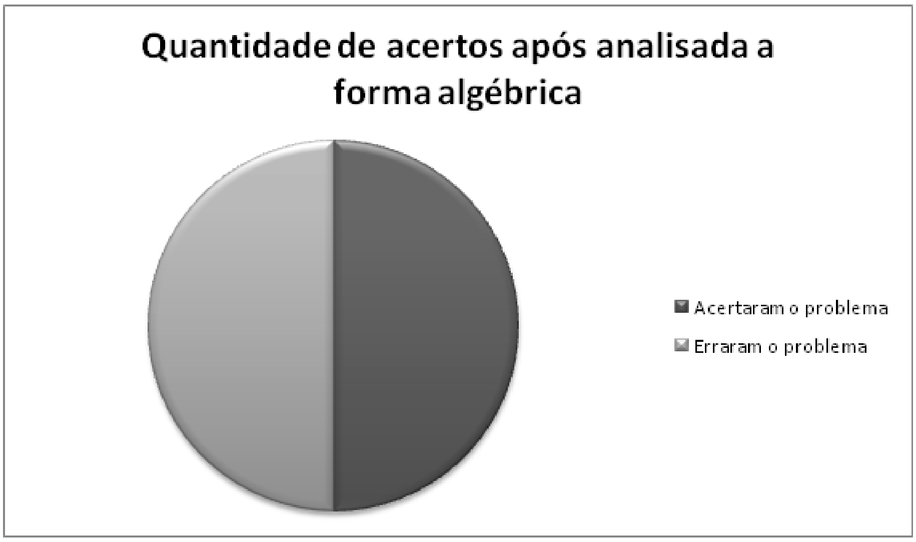


Figura 23 – Gráfico das quantidades de acertos após analisada a forma algébrica da figura 15

Para a figura 16:

Apenas 3 grupos acertaram, aproximadamente 38% de alunos que participaram da atividade. 5 grupos erraram, totalizando 62%. Estes equívocos dizem respeito a: um grupo apresentou a resposta com valor de 25, um grupo com o valor de 70 e os outros 3 grupos com o valor de 60. 3 grupos passaram para forma algébrica corretamente, aproximadamente 38% ,e 5 erraram, totalizando 62%. Analisando os alunos que erraram, 35% não levaram em consideração que tinham duas batatas, tomando y para lanche e z para batata. Portanto, escreveram a seguinte equação $y+z+z=9$. 27% escreveram a seguinte equação: $y-z^2=3$, ou seja, escreveram-na elevando a variável da batata ao quadrado. Ao solucionarem os valores das variáveis individuais, apenas um grupo errou o valor da batata, aproximadamente 10% dos alunos, já que um grupo associou o valor 2. Após formalizarem, um grupo alterou a resposta. Ou seja, 4 acertaram e 4 erraram.

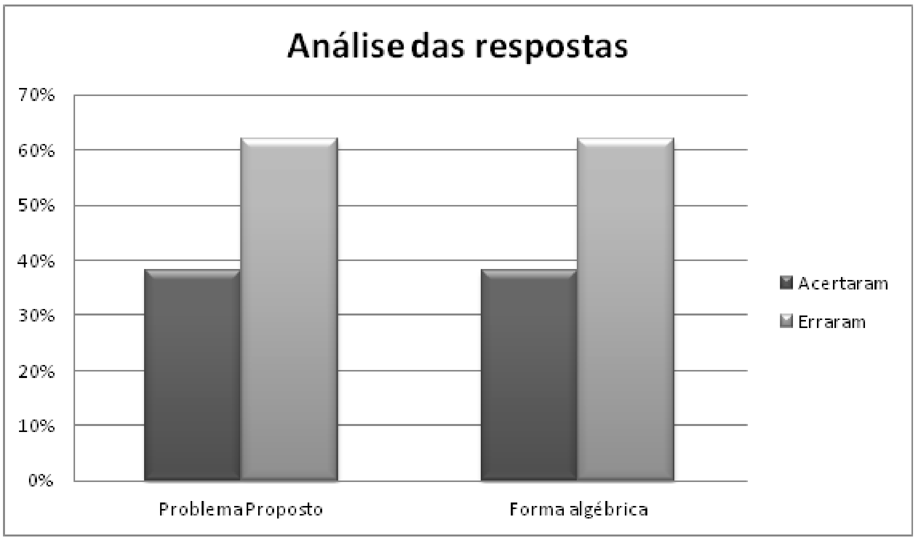


Figura 24 – Gráfico das análises das respostas da figura 16

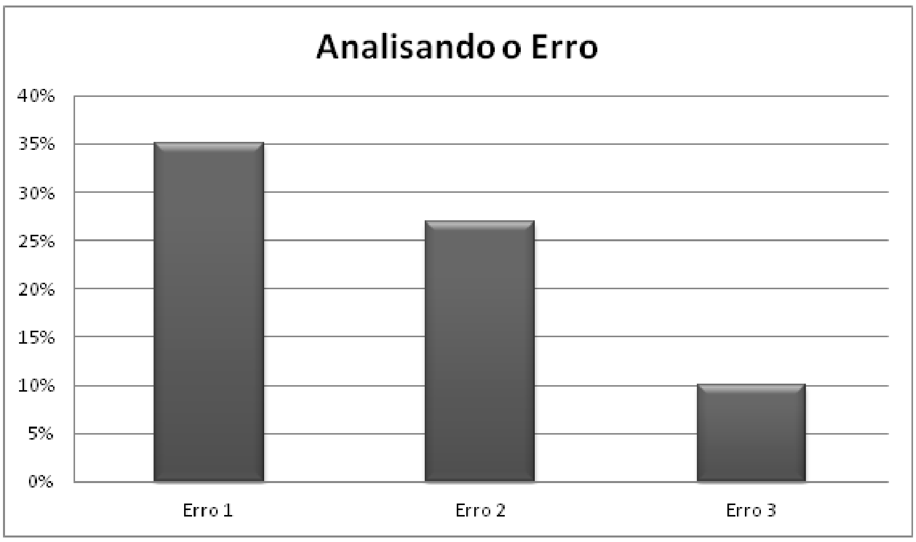


Figura 25 – Gráfico das análises dos erros da figura 16

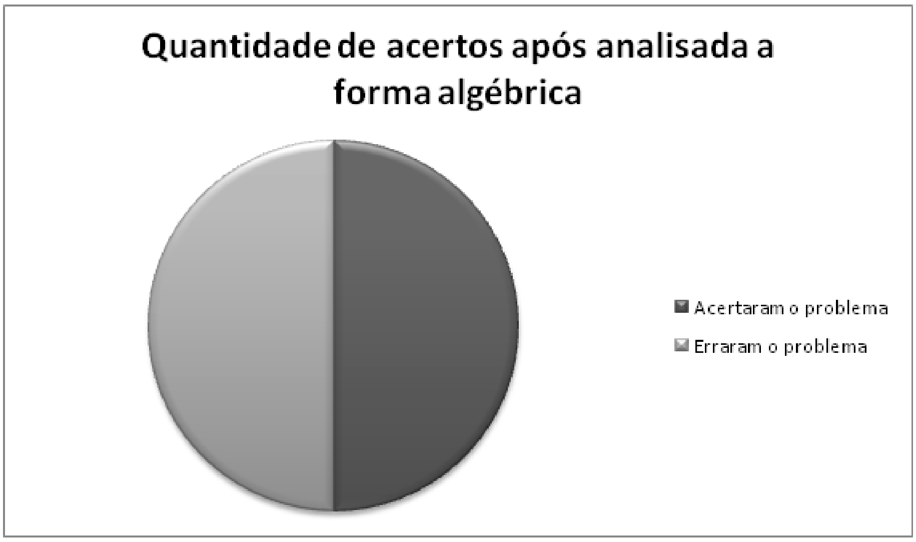


Figura 26 – Gráfico das quantidades de acertos após analisada a forma algébrica da figura 16

Para a figura 17:

5 grupos acertaram, aproximadamente 65% de alunos que participaram da atividade. 3 grupos erraram, totalizando 35%. As respostas erradas foram: um grupo colocou 15 e dois grupos colocaram 16.
Apenas um grupo passou para forma algébrica corretamente, aproximadamente 13% ,e 7 erraram, totalizando 87%.

Analisando os alunos que erraram:

10% já associou a variável banana a um valor, tomando v como maçã ek como coco, escreveram o sistema:

$$\begin{cases} v+v+v=30 \\ v+6+6=18 \\ 6-k=2 \end{cases}$$

45% Não levaram em consideração as quantidades das bananas. 13% escreveram a seguinte equação, tomando m como maçã, b como banana e c como coco: $b-c^2=2$, ou seja, escreveram-na elevando a variável a coco. 13% ainda escreveram as seguintes equações: $m+b^4+b^4=18$ e $b^{4\breve{}}c^2=2$ elevando as variáveis ao quadrado e a quarta potência. Ao solucionarem os valores das variáveis individuais, apenas dois grupos erraram o valor da flor amarela, aproximadamente 21% dos alunos, já que um grupo associou o valor 2 e outro $3,5$. 13% escreveram a primeira e a segunda equação corretamente, porém erraram na terceira equação, esquecendo das quantidades de bananas. Após formalizarem, um grupo alterou a resposta. Ou seja, 6 acertaram e 2 erraram.

Esse sistema nos mostrou algo interessante, pois foi o maior número de acertos do problema em si, de forma lúdica. Porém aqui tivemos o maior índice de erros na formalização algébrica.

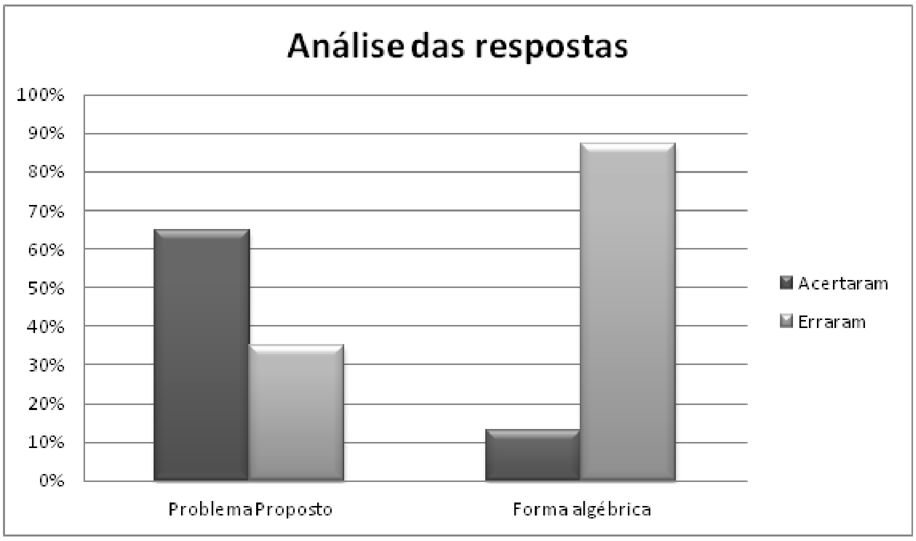


Figura 27 – Gráfico das análises das respostas da figura 17

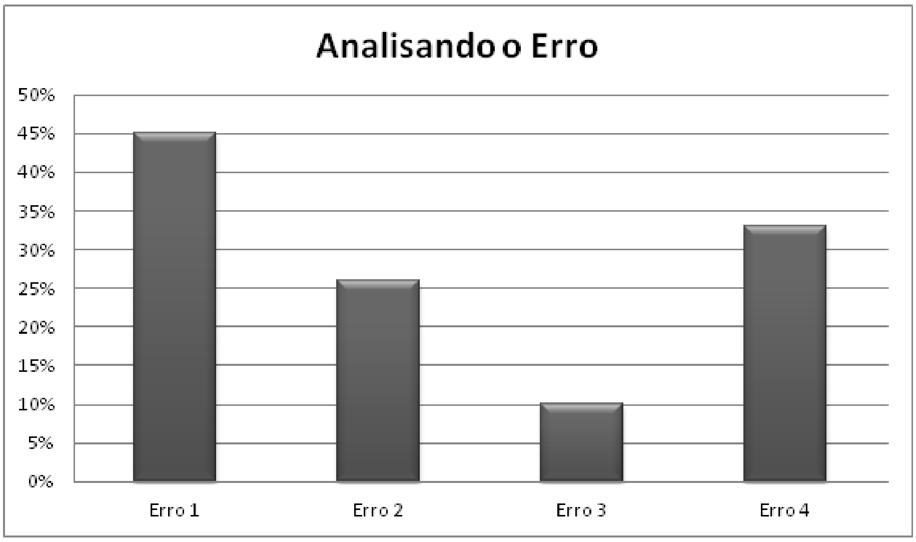


Figura 28 – Gráfico das análises dos erros da figura 17

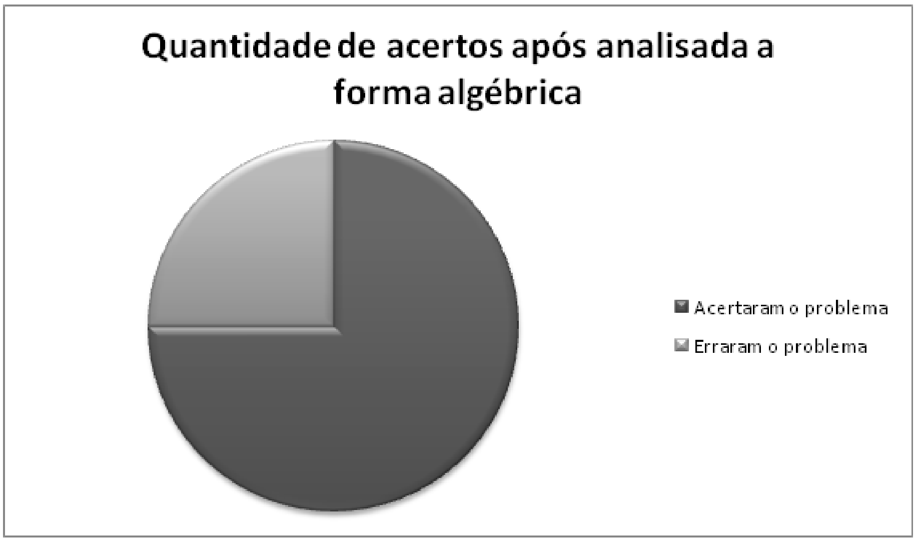


Figura 29 – Gráfico das quantidades de acertos após analisada a forma algébrica da figura 17

Para a figura 18:

4 grupos acertaram, aproximadamente 55% de alunos que participaram da atividade. 4 grupos erraram, totalizando 45%. As respostas erradas eram 110, 105 e dois grupos colocaram 102.

2 grupos passaram para forma algébrica corretamente, aproximadamente 27% ,e 6 erraram, totalizando 73%. Analisando os alunos que erraram, 48% não levaram em consideração que tinham duas réguas, tomando r para régua e b para borracha. Portanto, escreveram a seguinte equação $b - r = 3$. E 24% escreveram a seguinte equação: $b - r^2 = 3$, ou seja, escreveram-na elevando a variável da régua ao quadrado. Ao solucionarem os valores das variáveis individuais, apenas três grupos erraram o valor da régua, aproximadamente 34% dos alunos, já que os grupos associaram o valor 2; Após formalizarem, um grupo alterou a resposta. Ou seja, 4 acertaram e 4 erraram.

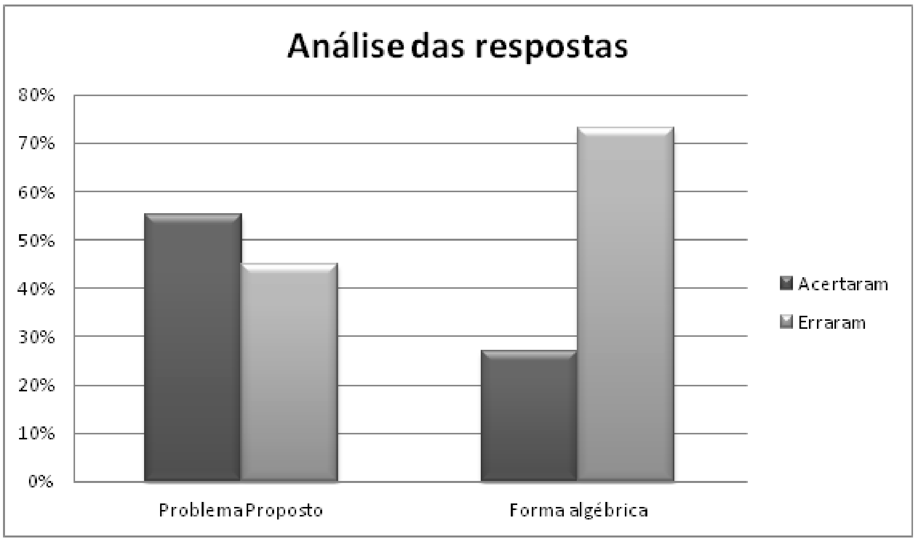


Figura 30 – Gráfico das análises das respostas da figura 18

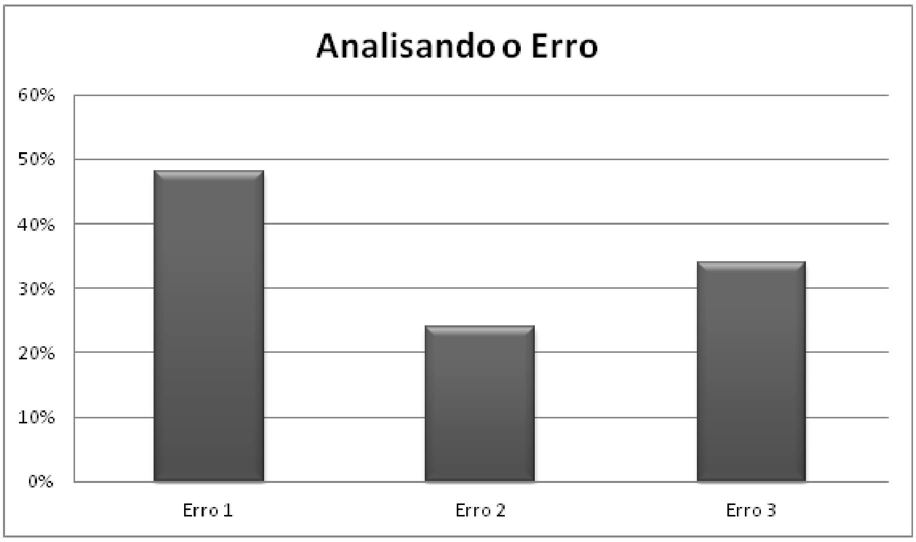


Figura 31 – Gráfico das análises dos erros da figura 18

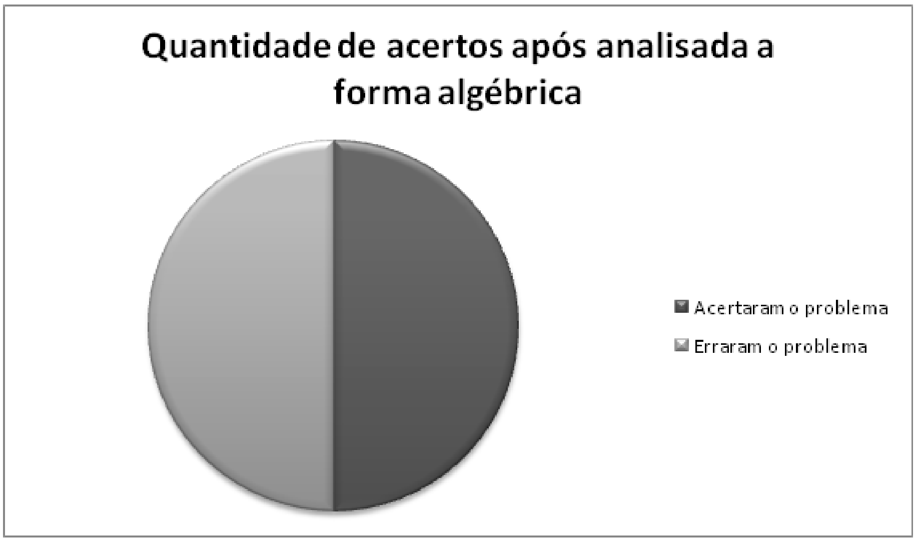


Figura 32 – Gráfico das quantidades de acertos após analisada a forma algébrica da figura 18

Para a figura 19:

3 grupos acertaram, aproximadamente 41% de alunos que participaram da atividade. 5 grupos erraram, totalizando 59%. As respostas erradas foram: 80, colocada por 3 grupos e 55, colocada por 2 grupos.
3 grupos passaram para forma algébrica corretamente, aproximadamente 41% e 5 erraram, totalizando 59%. Analisando os alunos que erraram, 44% não levaram em consideração que tinham duas cerejas, tomando c para cereja, escreveram a seguinte equação $c+c=20$. E 13% escreveram a seguinte equação: $c^2+c^2=10$, ou seja, escreveram-na elevando a variável da cereja ao quadrado. Além disso, este grupo não colocou a formalização algébrica no local indicado na folha de respostas. Ao solucionarem os valores das variáveis individuais, dois grupos erraram o valor da cereja, e outros dois erraram o valor da variável laranja, aproximadamente 21% ,e 24% dos alunos, respectivamente, dois grupos associaram o valor 10 à cereja; e dois grupos associaram valor 8 à laranja.
Após formalizarem, um grupo alterou a resposta. Ou seja, 4 acertaram e 4 erraram.

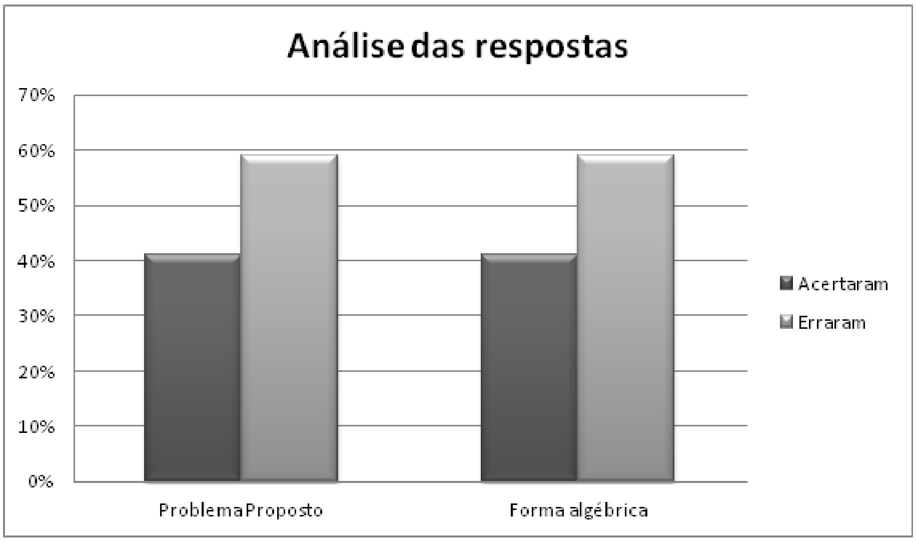


Figura 33 – Gráfico das análises das respostas da figura 19

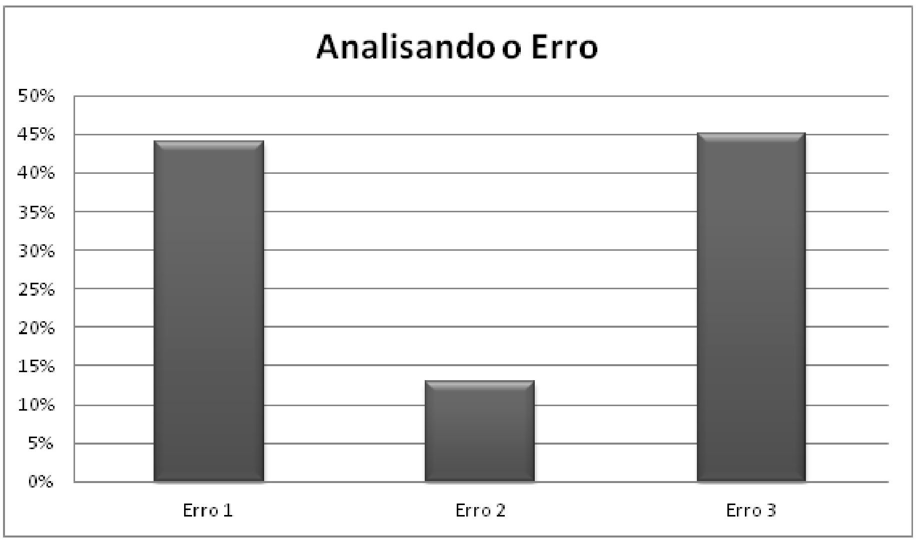


Figura 34 – Gráfico das análises dos erros da figura 19

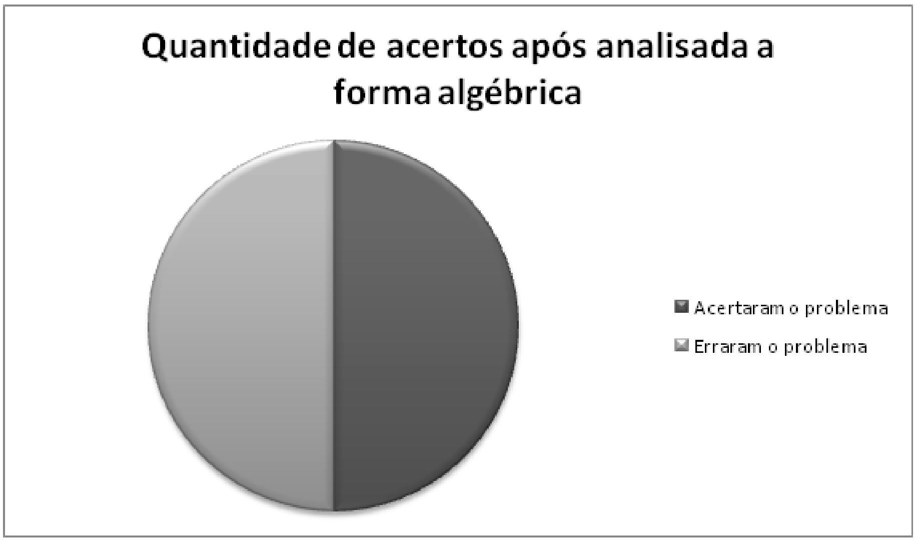


Figura 35 – Gráfico das quantidades de acertos após analisada a forma algébrica da figura 19

Para a figura 20:

Nenhum grupo acertou.

As respostas erradas: 3 grupos colocaram 15, 2 grupos 20, 2 grupos 43, um grupo 48 e um 15. 1 grupo passou para forma algébrica corretamente , aproximadamente 13%, e 7 erraram, totalizando 87%. Analisando os alunos que erraram: Apresentaram os mesmos tipos de erros. Alguns grupos esqueceram de contar quantidades, enquanto outros elevaram as variáveis ao quadrado. 34% dos alunos erraram o valor da variável tênis, associando ao valor 10, e 2 grupos erraram a variável jornal, um grupo associando o valor 4 e outro associando o valor 1^2.

Nenhum grupo alterou a resposta após a formalização.

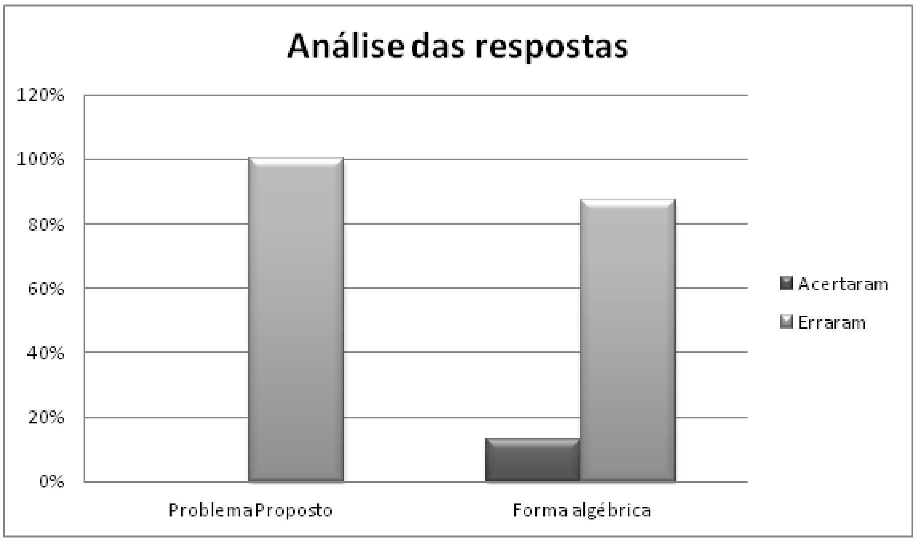


Figura 36 – Gráfico das análises das respostas da figura 20

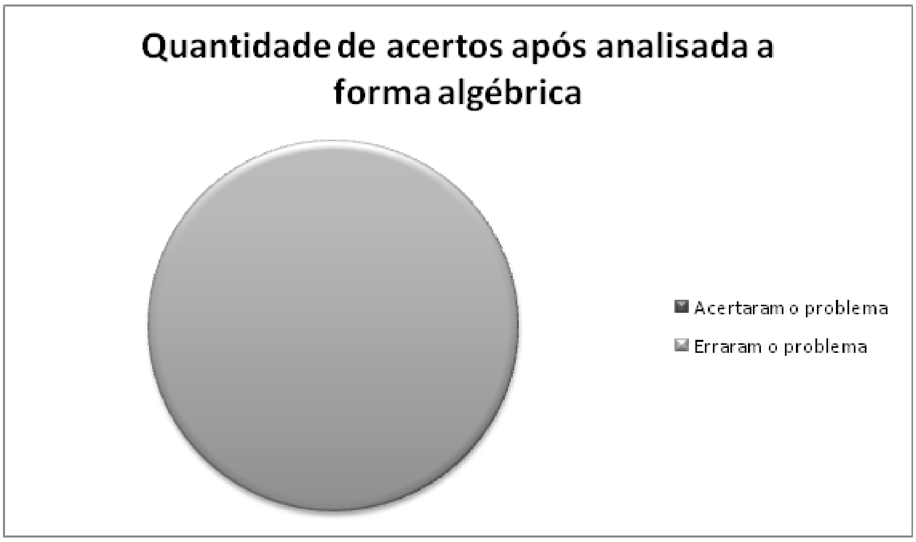


Figura 37 – Gráfico das quantidades de acertos após analisada a forma algébrica da figura 20

Notou-se que a grande dificuldade dos alunos foi passar da linguagem visual para linguagem a algébrica.
Muitos grupos, porém, conseguiram solucionar os valores das variáveis,mas erram o problema na expressão algébrica, não obedecendo à ordem de operação.

CAPÍTULO

4

ATIVIDADE - GEOGEBRA

4.1 Atividade diagnóstica

Antes de aplicarmos a atividade proposta, será aplicada uma pequena atividade diagnóstica (em anexo), para analisarmos o nível de entendimento geométrico dos alunos.

4.2 Atividade 2 - Geogebra

Após a atividade diagnóstica, será proposta a atividade 2 (em anexo).

Essa atividade tem como objetivo aprimorar as habilidades geométricas e a visão espacial dos alunos, além de instigar-los a fazer uma reflexão sobre os sistemas lineares do ponto de vista geométrico.

4.2.1 Descrevendo a sala de aplicação

As atividades foram aplicadas aos alunos do 3º ano de Contabilidade integrado ao Ensino Médio. Nessa modalidade do Centro Paula Souza, os alunos têm, em média, 8 aulas diárias, e se formam simultaneamente no Ensino Médio e no Curso Técnico em Contabilidade.

Optamos em aplicar essas atividades em uma turma do último ano do Ensino Médio, visto que os alunos já possuem o conhecimento em Geometria Analítica (disciplina do próprio 3º ano).

Temos aproximadamente 20% dos alunos que estão focados e estudam para ingressarem em um curso superior. Uma outra parcela almeja fazer curso superior, mas não se esforça. Embora a sala não apresente a característica de indisciplina, apresenta uma característica apática, demostrando a falta de interesse. Além disso, a sala apresenta sérios problemas de relacionamentos interpessoais entre os alunos.

4.3 Aspectos Gerais da aplicação da atividade diagnóstica

A aplicação da diagnóstica ocorreu no dia 04/03/2020 os alunos tiveram o tempo de 15 minutos para praticar a atividade, e 35 alunos realizaram-na de forma individual.

Abaixo a análise dos resultados:

A primeira questão era: O que é um plano? Tivemos 5 alunos,correspondendo a $14,3\%$, deixaram em branco, 19 alunos, $54,3\%$, tentaram definir, mas sem sucesso. Abaixo algumas das respostas encontradas:

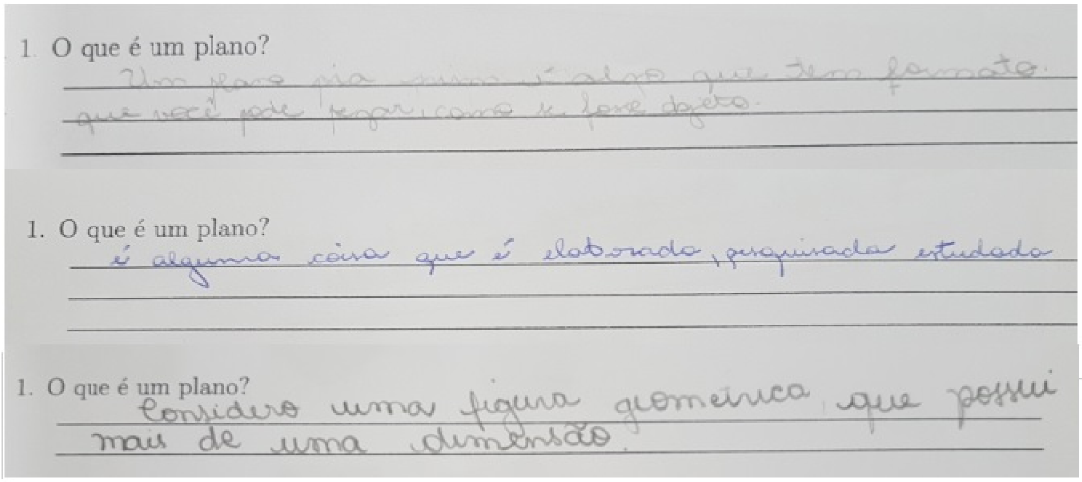


Figura 38 – Respostas da questão 1

Onze alunos, $31,4\%$, tentaram definir com a ideia correta de plano. Como plano é um conceito primitivo, já era esperado que os alunos tivessem uma certa dificuldade para tentar explicar. Consideramos, então, a ideia em si, para os acertos. Abaixo, algumas respostas:

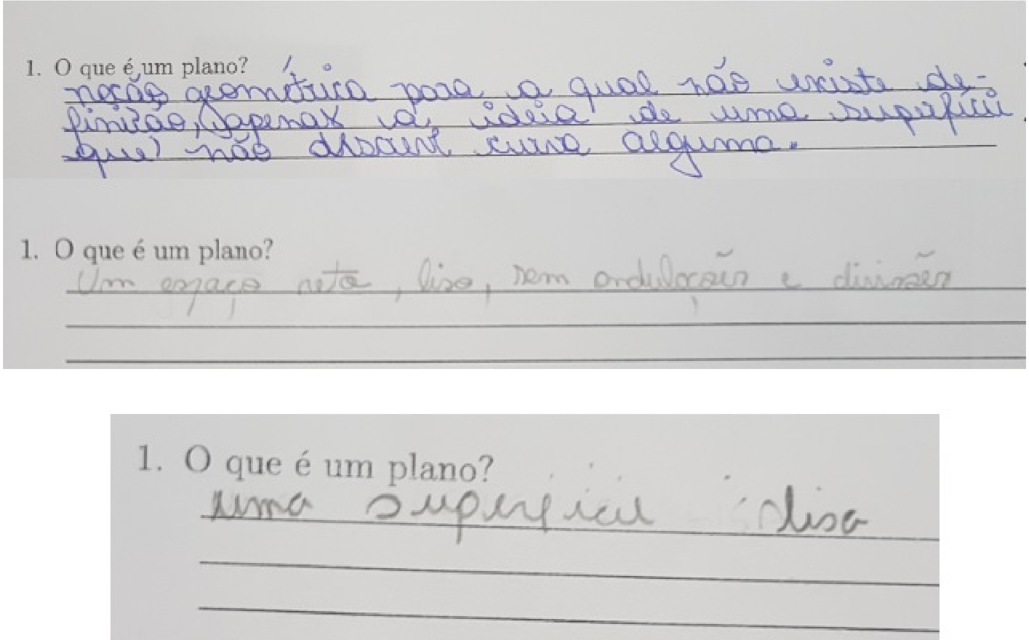


Figura 39 – Respostas da questão 1

A segunda questão: Quais das figuras abaixo representam um plano? Circule-as.

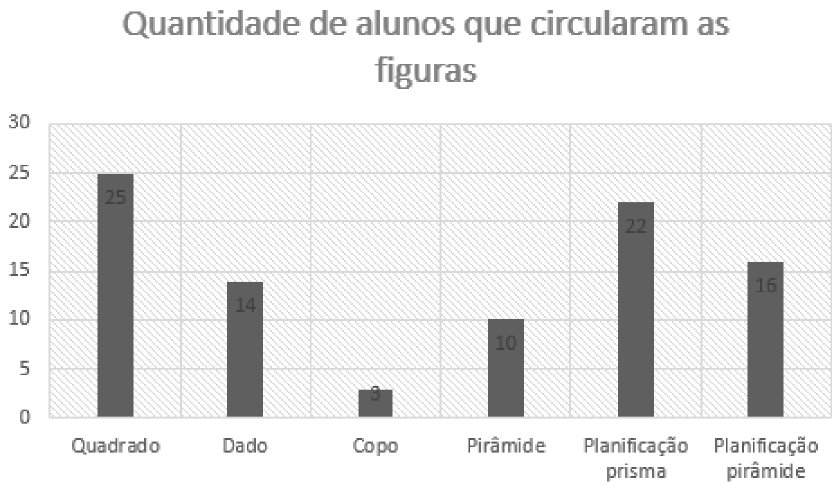


Figura 40 – Respostas da questão 2

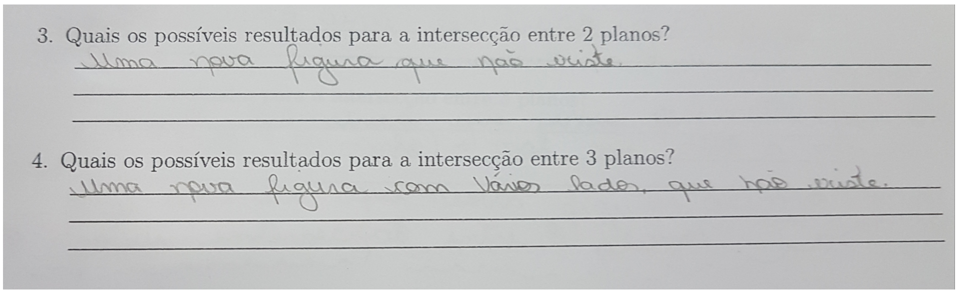
A terceira questão: Quais os possíveis resultados para a intersecção entre dois planos?

Neste item, 16 alunos, $45,7\%$, deixaram a questão em branco ou reponderam que não sabiam, e 19 alunos, $54,3\%$, responderam a questão erroneamente.

A quarta questão: Quais os possíveis resultados para a intersecção entre três planos?

Neste item, 21 alunos, 60%, deixaram a questão em branco ou reponderam que não sabiam e 14 alunos, 40%, responderam a questão erroneamente.

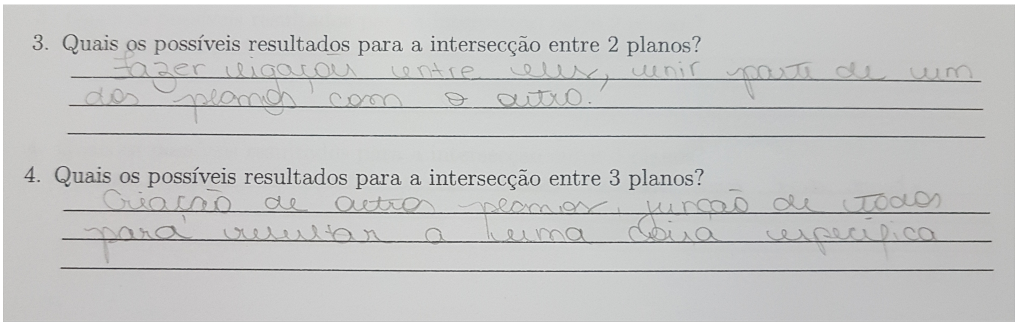
Abaixo algumas respostas dos itens 3 e 4:



3. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 2 planos?
Uma nova figura que não existe.

4. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 3 planos?
Uma nova figura com vários lados, que não existe.

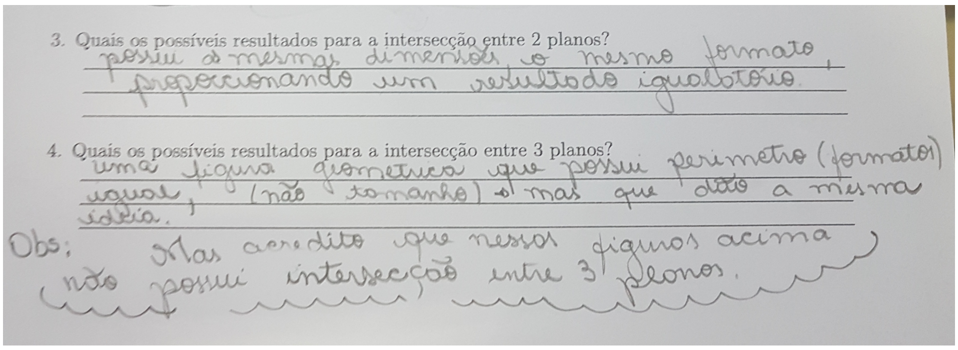
Figura 41 – Respostas das questões 3 e 4



3. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 2 planos?
Fazer ligações entre eles, unir parte de um dos planos com o outro.

4. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 3 planos?
Criação de outros planos, junção de todos para resultar a uma coisa específica

Figura 42 – Respostas das questões 3 e 4



3. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 2 planos?
possui as mesmas dimensões, o mesmo formato, proporcionando um resultado igualatório.

4. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 3 planos?
uma figura geometrica que possui perimetro (formatos) iguais, (não tamanho) mas que dão a mesma ideia.
Obs: Mas acredito que nessas figuras acima não possui intersecção entre 3 planos.

Figura 43 – Respostas das questões 3 e 4

Analisando o resultado da atividade diagnóstica, notamos as dificuldades dos alunos para responder as questões ligadas à geometria, e também a dificuldade em imaginar as intersecções entre planos.

Após aplicarmos a diagnóstica, foi explicado item a item para os alunos.

4.4 Aspectos gerais da aplicação da atividade 2 - Geogebra

A aplicação da atividade ocorreu no dia 11/03/202. 33 alunos participaram e tiveram 50 minutos para responderem às questões. Infelizmente, não foi possível levar os alunos para o laboratório de informática, então foram formadas duplas e foi projetado o site: https://www.geogebra.org/ , e em seguida os alunos iam respondendo o questionário.

No momento da aplicação, inserimos a equação e projetamos. Os alunos iam pedindo para rotacionar a figura conforme a necessidade.

Abaixo, a análise dos resultados:

Questão 1 - Inserir a equação $5x - 6y - 2z = 0$. Qual figura é representada por essa equação?

Tabela 1 – Respostas da questão 1

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Plano	2	6%
Quadrado	21	63,6%
Retângulo	8	24,4%
Prisma	2	6%

Questão 2 - Inserir a equação $10x - 12y - 4z = 0$. Qual figura é representada por essa equação?

Tabela 2 – Respostas da questão 2

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Plano	2	6%
Quadrado	15	45,5%
Retângulo	12	36,4%
Paralelepípedo	4	12,1%

Podemos notar que os alunos não fizeram a associação da equação com o plano, ou seja, da linguagem algébrica para a geométrica.

Após apresentarmos essas duas questões, foi discutido que essas equações representavam um plano.

Questão 3 - Qual o resultado da intersecção entre os dois planos anteriores?

Abaixo, algumas das respostas:

"Não aconteceu diferença", "eles não se alteram", "o plano aumentou de tamanho", "zero", "vazio", "reta em comum".

Iremos considerar a ideia que o aluno propôs.

Tabela 3 – Respostas da questão 3

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Conceito correto	9	$27,3\%$
Conceito com erros	24	$72,7\%$

Questão 4 - Inserir as equações $x+y+z=10$ e $x+y+z=2$. Qual o resultado da intersecção entre entre os dois planos?

Abaixo, algumas respostas:

"Nenhuma" , "paralelos", "nenhuma porque são separados", "nula pois os planos não se toca", "Não há intersecção, plano vazio", "Eles não tem nenhuma intersecção de duas retas", "nenhuma, é como se fosse retas paralelas elas não se encontram".

Embora muitos alunos não tenham conseguido formalizar matematicamente as suas respostas, os conceitos e a ideia por trás estavam corretos:

Tabela 4 – Respostas da questão 4

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Conceito correto	33	100%
Conceito com erros	0	0%

Questão 5 -Inserir as equações $5x-6y-2z=15$ e $9x-10y+5z=55$. Qual o resultado da intersecção entre os dois planos?

Algumas das respostas consideradas corretas: "Eles se intersecta na mesma reta", "intersecção de reta", "reta".

Algumas respostas em que os conceitos foram considerados errados: "dois cruzando", "dois pontos que se cruzam", "a intersecção é onde eles se encontram", "plano cruzado", "tem intersecção eles se cruzam", "eles estão se cruzando, estão interferindo um no outro", "está junto" e "eles se ligaram".

Tabela 5 – Respostas da questão 5

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Conceito correto	7	$21,2\%$
Conceito com erros	26	$78,8\%$

Questão 6- Inserir a equação $x+y+z=10$, $x+y+z=2$ e $x+y-2z=2$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

Essa respostas foram consideradas corretas: "Vazio", "não tem intersecção entre os 3 planos".

Já essas respostas não foram consideradas corretas: “três pontos que se cruzam, dois pontos que se cruzam, a intersecção é o meio onde eles se ligam” , “onde eles se ligam, estão se cruzando com isso são duas retas” e “eles são paralelos e se cruzam” .

Tabela 6 – Respostas da questão 6

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Conceito correto	5	$15,1\%$
Conceito com erros	29	$84,9\%$

Questão 7- Inserir a equação $2x-y+z=2$, $2x+y+z=2$ e $2x+y-2z=2$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

Uma única dupla deu resposta como sendo: “um ponto”.

Todos os outros alunos conceituaram erroneamente: “Eles se intersectam em duas retas”, “dois se cruzam e um fica na central”, “a intersecção é o centro” e “os 3 planos se cruzam”.

Tabela 7 – Respostas da questão 6

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Conceito correto	2	6%
Conceito com erros	31	94%

Questão 8 - Inserir a equação $x+y+z=5$,$-x-y+z=5$ e $0x+0y+z=2$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

Apenas uma dupla colocou o conceito correto: “Não tem intersecção”.

Os outros alunos: “três retas”, “a intersecção é no centro” e “dois se cruzam” e “na base centro”.

Tabela 8 – Respostas da questão 7

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Conceito correto	2	6%
Conceito com erros	31	94%

Questão 9 - Inserir a equação $x+y+z=5$, $-x-y+z=5$ e $0x+0y+z=5$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

Algumas das respostas consideradas incorretas: "três planos cruzados" e "tem intersecção pois estão todas ligadas entre si".

Tabela 9 – Respostas da questão 7

Resposta	Quantidade de alunos	Porcentagem
Conceito correto	9	$27,2\%$
Conceito com erros	24	$72,8\%$

Notamos, novamente, a dificuldade dos alunos na abstração geométrica. Essa dificuldade aumenta quando utilizamos figuras espaciais, ou trabalhamos com questões algébricas (o que acontece com a Geometria Analítica).

Após a atividade, comentamos sobre todas as questões, e quais as intersecções entre elas.

4.5 Atividade Geogebra 3

Após isso, seria aplicada uma atividade para complementar a anterior. Infelizmente, não foi possível por questões de força maior (covid-19).

A atividade está em anexo.

Essa atividade tem o objetivo de fazer o elo entre a linguagem geométrica e a linguagem algébrica.

4.5.1 Atividade Geogebra 3 - Um olhar algébrico

Após a aplicação da atividade 3, podemos discutir com os alunos as resoluções de alguns sistemas de forma algébrica.

Tomemos como exemplo o sistema linear da questão 6 da atividade 3:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ -x-y+z=5 \\ 0x+0y+z=5 \end{cases}$$

Analisando esse sistema, notamos pela equação $0x+0y+z=5$ que variável z tem valor 5, substituindo esse valor na equação $x+y+z=5$, temos:

$x+y+5=5$,
isolando as variáveis teremos a equação $x+y=0$.

Analogamente, substituindo na equação $-x-y+5=5$ teremos $-z-y=0$

Nesse processo, reduzimos o sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas a um sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases}$$

A partir disso, mostramos que ambas equações são equivalentes e, portanto, o sistema é indeterminado, o que pode ser comprovado através da utilização do Geogebra.

Com raciocínio análogo com o item 5 da atividade 3, chegamos à conclusão que o sistema é impossível, o que pode ser comprovado pelo Geogebra.

Após isso, podemos interpor a questão 7 da atividade 3, em que temos o sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=12 \\ 0x+2y+z=8 \\ 0x+0y+z=4 \end{cases}$$

Esse sistema está na forma escalonada, e é intuitivo aos alunos encontrar a terna ordenada $(1,2,4)$, que é a solução do sistema, o que pode ser comprovada através do Geogebra, ou seja, o ponto de intersecção encontrado na atividade anterior.

CAPÍTULO

5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi muito satisfatório desenvolver essas atividades com os alunos, aplicar uma atividade diferente da maneira tradicional de aula e interagir de uma outra forma com os nossos protagonistas.

Durante a aplicação da atividades, pude notar o entusiasmo dos alunos em resolver as questões envolvendo as imagens do Facebook. Um clima de competição foi notado. Nas atividades envolvendo o Geogebra, os alunos investigavam e discutiam sobre a solução. É muito prazeroso para um docente ver os alunos se dedicando a uma atividade e, principalmente, se dedicando a resolver "problemas matemáticos", que são tão temidos por muitos alunos. Como docente, noto que nós, professores, temos um grande paradigma para quebrar: que a matemática é chata e difícil. Este trabalho me fez refletir muito sobre isso. Além do sentimento de ajudar a desconstruir essa lenda de que a "Matemática é um bicho de sete cabeças".

Infelizmente, com esse trabalho, podemos notar também a defasagem dos alunos, que nas Instituições Públicas de Ensino é difícil de sanar. Dentre essas dificuldades, podemos citar os deficits nos seguintes itens, retirados da matriz de referência do ENEM: [1]

> **Competência de área 1** - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
>
> **H1** - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
>
> **H3** - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

[1] http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz$_referencia.pdf(MATRIZ\ldots,)$

> **Competência de área 2** - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

> **H7** - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Embora todas essas dificuldades, que possamos fazer o nosso melhor e instigar os alunos, principalmente aqueles com dificuldades, a terem curiosidade pela Matemática.

ANEXO

A

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Nome: ______________________________

Diagnóstica.

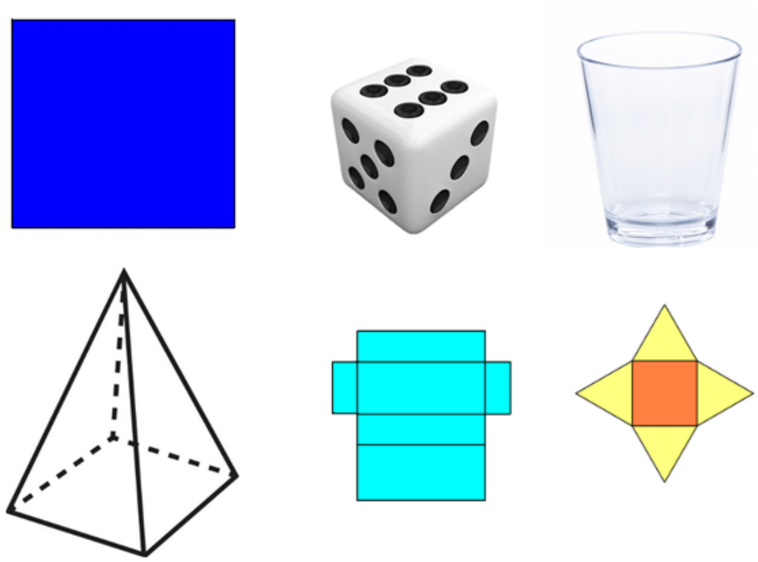
1. O que é um plano?

____

____

____

2. Quais das figuras abaixo representam um plano? Circule-as:



3. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 2 planos?

____

____

____

4. Quais os possíveis resultados para a intersecção entre 3 planos?

____

____

____

ANEXO

B

ATIVIDADE GEOGEBRA

NOME: ______________________________

ATIVIDADE GEOGEBRA.

Instruções: Abrir a página https://www.geogebra.org/3d?lang=pt

1. Inserir a equação $5x - 6y - 2z = 0$. Qual figura é representada por essa equação?

   ____

2. Inserir a equação $10x - 12y - 4z = 0$. Qual figura é representada por essa equação?

   ____

3. Qual o resultado da intersecção entre os dois planos anteriores?

   ____

4. Inserir as equações $x + y + z = 10$ e $x + y + z = 2$. Qual o resultado da intersecção entre entre os dois planos?

   ____

5. Inserir as equações $5x - 6y - 2z = 15$ e $9x - 10y + 5z = 55$. Qual o resultado da intersecção entre os dois planos?

   ____

6. Inserir a equação $x + y + z = 10$, $x + y + z = 2$ e $x + y - 2z = 2$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

   ____

7. Inserir a equação $2x - y + z = 2$, $2x + y + z = 2$ e $2x + y - 2z = 2$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

   ____

8. Inserir a equação $x + y + z = 5$,$-x - y + z = 5$ e $0x + 0y + z = 2$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

   ____

9. Inserir a equação $x + y + z = 5$, $-x - y + z = 5$ e $0x + 0y + z = 5$. Qual o resultado da intersecção entre os três planos?

   ____

ANEXO

C

ATIVIDADE GEOGEBRA - PARTE 2

NOME: ____

ATIVIDADE GEOGEBRA.

Revisando

Você já estudou sistema linear, relembrando, um sistema linear é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, ou seja é um conjunto de 1,2,3,4,... equações cada uma com 1,2,3,4,.. incógnitas.

Você Já classificou um sistema linear, relembrado:

Sistema Possível e Determinado (SPD): quando possui mais de uma solução, ou seja para um Sistema de 3 ingónitas, quando a intersecção for um ponto.

Sistema Possível e Indetermiado (SPI): quando possui mais de uma solução, ou seja para um Sistema de 3 ingónitas, quando a intersecção for uma reta ou um plano.

Sistema Impossível (SI): quando não possui soluções, ou seja para um Sistema de 3 ingónitas, quando a intersecção for vazia

Instruções: Insira os sistemas Lineares no Geogebra3D (https://www.geogebra.org/3d?lang=pt), e classifique-os:

1. Sistema Linear:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

____

2. Sistema Linear:

$$\begin{cases} 5x-6y-2z=15 \\ 9x-10y+5z=55 \end{cases}$$

____

3. Sistema Linear:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y+z=2 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$$

____

4. Sistema Linear:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

---

5. Sistema Linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ -x - y + z = 5 \\ 0x + 0y + z = 2 \end{cases}$$

---

6. Sistema Linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ -x - y + z = 5 \\ 0x + 0y + z = 5 \end{cases}$$

---

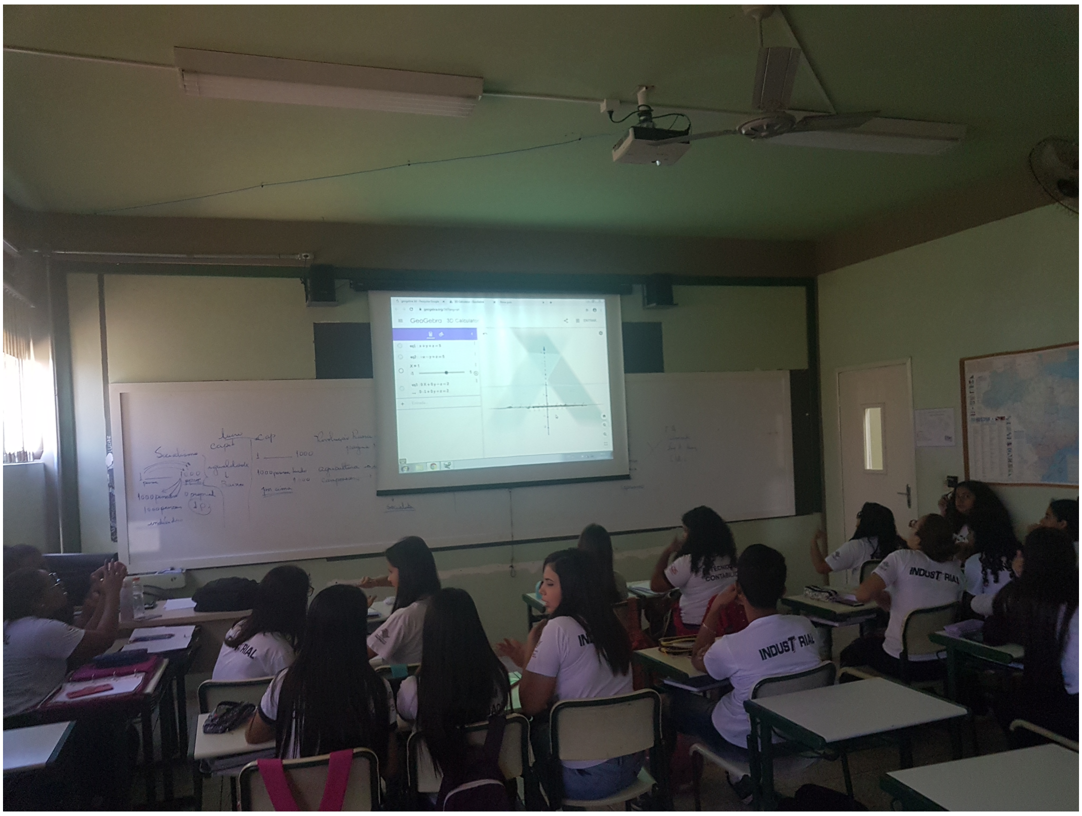
7. Sistema Linear:

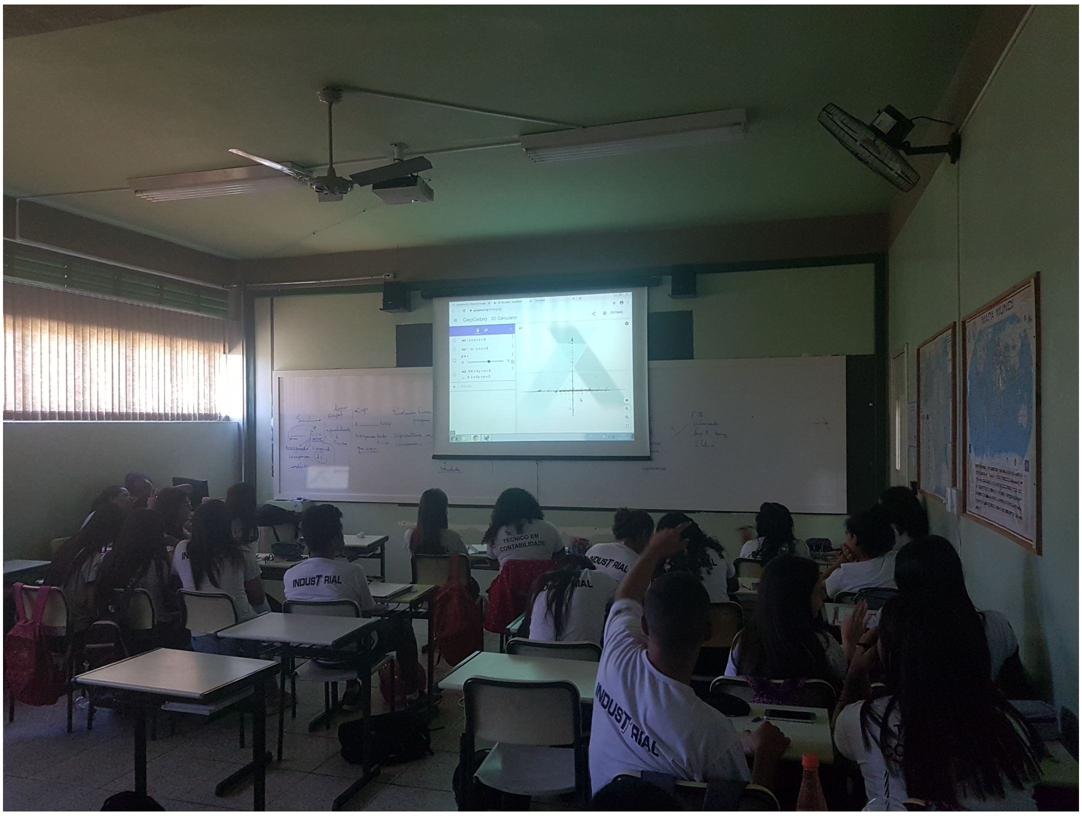
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 12 \\ 0x + 2y + z = 8 \\ 0x + 0y + z = 4 \end{cases}$$

ANEXO

D

FOTOS APLICAÇÕES






INDUST RIAL

REFERÊNCIAS

BARROS, R. O. B. **A Influência do Ambiente Computacional no Ensino de Cálculo**. Citado na página 19.

CORTELLA, M. S. Citado na página 19.

DELGADO J.; FRENSEL, K. C. L. **Geometria Analítica**. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2013. ISBN 9788583370093. Citado nas páginas 21 e 27.

HISTóRIA ETEC Francisco Garcia. Disponível em: <http://www.etefgarcia.com.br/site/historia.html>. Acesso em: 24 abr. 2020. Citado na página 42.

MATRIZ de Referência ENEM. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2020. Citado na página 65.

MORAN, J. M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 10. ed. [S.l.]: Papirus, 2006. Citado na página 20.

SOARES, S. G. **Educação e comunicação: o ideal de inclusão pelas tecnologias de informação: otimismo exarcebado e lucidez pedagógica**. [S.l.]: Cortez, 2006. Citado na página 19.

VALENTE, J. A. o. **O computador na sociedade do conhecimento**. [S.l.]: UNICAMP- Núcleo de Informática Aplicada à Educação-NIED, 1999. Citado na página 19.