Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Função Afim: Teoria e Aplicações

Walfredo José de Souza

Natal, agosto de 2013

Walfredo José de Souza

Função Afim: Teoria e Aplicações

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requesitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof^a. Dr^a. Fabiana T. Santana

Natal, agosto de 2013

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial

Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Souza, Walfredo José de.

Função Afim: Teoria e Aplicações / Walfredo José de Souza. - Natal, 2013.

40 f. il.

Orientadora: Profa. Dra. Fabiana Tristão de Santana.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática – Ensino – Dissertação. 2. Função afim – Dissertação. 3. Proporcionalidade – Dissertação. 4. Aplicações – Dissertação. I. Santana, Fabiana Tristão de. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 51.37

Walfredo José de Souza

Função Afim: Teoria e Aplicação

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requesitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof^{o}. Dr^{o}. Fabiana Tristão de Santana
Escola de Ciência e Tecnologia - UFRN
Orientadora

Prof^{a}. Dr^{a}. Fágner Lemos de Santana
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof^{o}. Dr^{o}. José de Arimatéia Fernandes
Departamento de Matemática e Estatística - UFCG
Examinador Externo

Dedicatória

Em memória de meus pais, José Januario de Souza e Francisca Galdino de Souza, dedico todo esse esforço demonstrado nesta jornada de aprendizado, jornada esta que muito contribuiu para o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por me conceder a dádiva da vida, pela força e dedicação que nos deu durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais, José Januario de Souza e Francisca Galdino de Souza (*in memorian*), que apesar das dificuldades, sempre acreditaram que poderia crescer dedicando-se aos estudos.

A todos os professores da UFRN (PROFMAT) em especial, a minha professora e orientadora Fabiana Tristão de Santana, que com muita tranquilidade, paciência, sabedoria e disponibilidade me conduziu de forma categórica a concluir este trabalho.

A professora e coordenadora (PROFMAT), Viviane Simioli Campos Medeiros que sempre esteve presente no decorrer de todo o curso, nos orientando, aconselhando e principalmente nos incentivando a estudar e seguir em frente.

Aos meus colegas mestrandos da UFRN, pelo sentimento de companheirismo que sempre existiu durante todo o curso, em especial ao amigo Nilson Nicácio, que em vários momentos dedicou parte do seu precioso tempo para nos socorrer diante das dificuldades.

Aos meus familiares, que compartilharam e me apoiaram durante toda a jornada do PROFMAT.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos uma proposta para contribuir com o ensino e aprendizagem das Funções Afins no primeiro ano do Ensino Médio tendo como pré-requisito o conhecimento matemático da educação básica. A proposta concentra-se em algumas propriedades, casos particulares e aplicações das Funções Afins com o objetivo de mostrar a importância das demonstrações e ao mesmo tempo despertar o interesse do aluno mostrando como esta função é importante para solucionar problemas do cotidiano.

Palavras-chave: Função Afim; Proporcionalidade; Ensino; Aplicações.

Abstract

In this work we present a proposal to contribute to the teaching and learning of affine function in the first year of high school having as prerequisite mathematical knowledge of basic education. The proposal focuses on some properties, special cases and applications of affine functions in order to show the importance of the demonstrations while awaken student interest by showing how this function is important to solve everyday problems.

Keywords: Affine Function; Proportionality; Education; Statements.

Sumário

Introdução

A matemática sempre esteve presente em nossas vidas. Mesmo quando o homem não conhecia seus princípios básicos e não a usava de forma sistemática as noções de matemática já se faziam necessárias, sejam as de quantidade, tamanho e formas ou mesmo na simples separação de indivíduos em grupos, famílias ou tribos.

O mundo moderno necessita cada vez mais dos conhecimentos matemáticos para desenvolver-se. As inúmeras aplicações, seja na área tecnológica, médica ou social, evidenciam a sua importância nos avanços conquistados pelo homem. Desde o individuo mais humilde ao mais graduado podem ver o uso de aplicações matemáticas, sistematizadas ou não.

O conhecimento matemático evoluiu durante os séculos a um nível altíssimo, passando de geração em geração. As aplicações matemáticas aumentam cada vez mais e se tornam sistematizadas, fazendo com que seja imprescindível que o ser humano passe a conhecê-las e dominá-las para que tenha controle total sobre suas ações no mundo moderno.

Este conhecimento precisa ser aprimorado e repassado com o objetivo de contribuir com a formação e organização das sociedades futuras. A tarefa de repassar e fazer este conhecimento evoluir que compete, basicamente, às escolas e às universidades, tem sido muito evidenciada nos últimos tempos devido ao grau de importância que o conhecimento matemático adquiriu perante a sociedade organizada e às dificuldades que envolvem esse processo.

Neste trabalho pretendemos estabelecer reflexões acerca do desenvolvimento do ensino e da aprendizagem na perspectiva de amenizar as dificuldades enfrentadas pelos professores e alunos no ensino da Matemática. Muitas vezes, é possível observar uma lacuna entre o livro didático escolhido pelo professor e a realidade do aluno. Alguns deles deixam de explorar aplicações reais de tais conteúdos, restringindo-se apenas a manipulação de fórmulas em exercícios triviais, fazendo parecer que a Matemática nada mais é do que um conjunto de regras a serem decoradas. Muitos deles não procuram fazer uso de demonstrações de alguns fatos matemáticos, mesmo que de forma elementar, para que o estudante perceba, confie e acredite na veracidade destes fatos.

O trabalho estará concentrado no estudo da função afim e suas aplicações. Será mostrada uma sequência de situações problema, para que os alunos, juntamente com os questionamentos do professor, venham a resolvê-las percebendo que a solução das mesmas tem um fato em comum, fato este que levará a caracterizar o tipo de função que está envolvido no problema.

Ou seja, a proposta é fazer o sentido inverso, de livros adotados nas escolas públicas, ou pelo menos a maioria deles, onde é mostrada uma situação problema já resolvida, e logo em seguida mostra-se o que é uma função afim, sem nenhuma discussão do porque aquela situação caracteriza-se como tal função, deixando o aluno sem condições de conhecer quando está diante de um problema que será resolvido aplicando a função afim.

Dessa forma, o aluno perceberá todo processo dedutivo que o levará a aprender o conteúdo em questão, sabendo assim caracterizar e aplicar este conteúdo, além de ver como a Matemática pode ser prazerosa e como ela está em seu mundo.

Mais especificamente, no Capítulo 1 mostramos as dificuldades encontradas pelos professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática nas escolas públicas.

No Capítulo 2 introduziremos o estudo da função afim, começando com situações problema com o objetivo de despertar no aluno o interesse e o senso crítico para observar as relações existentes em atividades do dia a dia e a Matemática. Em seguida, foi apresentada a definição, casos particulares e propriedades desta função.

Apresentamos no Capítulo 3, um caso particular da função afim que é o estudo da função linear. Neste capítulo iremos relacionar a função linear com o problema da proporcionalidade e explorar algumas aplicações práticas além de apresentar o importante Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Finalizamos nosso trabalho no Capítulo 4, onde serão apresentadas algumas aplicações gerais da função afim.

Capítulo 1

Caracterização do Ensino de Matemática nas Escolas Públicas

1.1 Introdução

Aplicar uma nova proposta de trabalho causa sempre uma certa expectativa a quem a elabora e também aos envolvidos de alguma forma no ambiente onde ela será desenvolvida. É necessário que a proposta seja apresentada de forma clara e convincente e que seus objetivos mostrem a necessidade de mudanças e, principalmente, a eficácia que ela terá. Em outras palavras, uma proposta precisa mostrar que as mudanças sugeridas irão modificar de forma positiva e compensatória o processo de ensino aprendizagem.

Caracterizar o ambiente escolar e os alunos envolvidos no processo de ensino aprendizagem no qual a proposta será apresentada e desenvolvida é de fundamental importância. Nesse sentido, é preciso pesquisar e relacionar, se possível, todas as variáveis envolvidas no ambiente, tanto as de ordem física como as de ordem intelectual. Com isto, pretende-se ter um retrato fiel e verdadeiro dos obstáculos e dificuldades que devem ser enfrentados para que a nova proposta de trabalho seja executada de forma satisfatória e produza resultados positivos e compensatórios.

1.2 A Escola Pública

A escola pública vem passando nos últimos anos por transformações significativas que, infelizmente, não refletem em mudanças na qualidade do processo de ensino aprendizagem. Neste trabalho, vamos destacar as escolas públicas estaduais e municipais que enfrentam diversos problemas. Esses problemas estão relacionados com falta de qualidade das dependências físicas e infraestrutura, carência de materiais didáticos e pedagógicos que permitam ao professor desenvolver seu trabalho com qualidade, remuneração inadequada pelo trabalho desenvolvido pelo professor, dentre outros.

Essas escolas, com algumas exceções, funcionam de forma precária, faltando desde o material básico de expediente ao profissional de apoio. Podemos destacar o problema da falta do professor especializado em algumas disciplinas, como Matemática, Física e Química. Muitas vezes, a escola fica todo o ano letivo sem esses profissionais, principalmente as escolas de municípios de pequeno porte situadas longe de capitais ou de cidades mais desenvolvidas.

1.3 O Ensino da Matemática nas Escolas Públicas

Para falar do ensino de Matemática nas escolas públicas, começaremos com o ensino fundamental nas séries iniciais. Do primeiro ao quinto ano a Matemática é ensinada por um professor polivalente que ensina vários componentes curriculares a seus alunos. Este profissional, em geral, não tem formação especializada no ensino da Matemática. Muitas vezes, é um professor com graduação em Pedagogia, curso que não oferece um preparo, ou subsídios suficientes para desenvolver um trabalho satisfatório no ensino da Matemática. Isto pode ser um problema quando este professor não tem afinidade, e até mesmo dificuldades, com a disciplina Matemática. Este fato pode gerar um processo de desgaste no aprendizado e até levar o aluno a concluir o ensino fundamental com alguma carência em princípios básicos da Matemática.

Quando o aluno chega à segunda fase do ensino fundamental, sexto ao nono ano, se depara com uma estrutura nova. Nesta fase, existem professores com formações específicas para cada disciplina. Neste momento o professor de Matemática, geralmente, é licenciado em Matemática e tem condições de desenvolver um trabalho mais eficaz e oferecer aos alunos uma preparação mais eficiente para que eles iniciem o ensino médio. No entanto, é natural o professor enfrentar algumas dificuldades, já que princípios fundamentais da Matemática não foram consolidados na primeira fase do ensino fundamental e sua falta provocará uma defasagem na vida escolar deste aluno.

Chegando ao ensino médio, a realidade do ensino da Matemática não é diferente da fase anterior. Os professores de Matemática, com raras exceções, são licenciados em Matemática e todos capacitados para desenvolver um trabalho que, teoricamente, prepare o aluno para ingressar no ensino superior. Mas, na prática, vários problemas, como os enfrentados na fase anterior, dificultam a concretização deste ideal.

Uma das dificuldades que serão enfrentadas são as deficiências que o aluno traz ao chegar ao ensino médio, tanto na parte de aritmética quanto na parte de álgebra.

Esta realidade é piorada ao se tratar de alunos que concluíram o ensino fundamental na modalidade de Ensino de Jovens e Adultos – EJA, antes conhecido por supletivo. Os alunos desta modalidade de ensino apresentam mais dificuldades que os alunos em idade regular devido a diversos fatores, como o tempo que passam afastados das salas de aulas, terem que conciliar os estudos com a vida familiar, a grande carga horária de trabalho, etc.

Outro problema encontrado é a realidade do jovem carente que já cursa o ensino médio realizando algum tipo de trabalho ou necessita do diploma da conclusão do ensino médio para ingressar no mercado de trabalho. Para esse aluno o ensino médio é apenas uma etapa da vida que ele precisa cumprir e encara o ensino da Matemática como algo sem propósito que não vai fazer diferença na sua vida futura e questiona em que aplicar os conteúdos matemáticos na sua vida.

Acreditamos que os problemas citados no processo de ensino aprendizagem, da disciplina de Matemática em especial, poderiam ser minimizados se os investimentos em educação realmente acontecessem. Além da falta de investimento e atenção com o ensino, outros grandes entraves que podemos citar são a má remuneração e a desvalorização dos professores. Por exemplo, o professor estadual ou municipal que se especializa concluindo um curso de mestrado tem seu salário aumentado em torno de 20 a 25 por cento, o que é pouco significativo em relação ao salário que já é muito baixo.

Com todos os problemas citados, é preciso que o professor de Matemática esteja motivado e, principalmente, preparado para buscar formas alternativas e interessantes para incentivar os alunos a estudarem e se dedicarem pelos estudos de forma a suprir as possíveis carências de conteúdos anteriores e criando, desta forma, um embasamento para sua vida acadêmica futura.

Capítulo 2

Função afim

2.1 Introdução

Neste capitulo trataremos das funções afins. Elas podem fornecer uma interessante gama de aplicações que motivam o estudante e mostram, através de exemplos, como um conceito matemático tão simples pode ser usado para resolver problemas variados do nosso dia a dia. É importante destacar entre as funções afins o caso particular das funções lineares. Estas funções constituem o modelo matemático para as questões referentes à proporcionalidade e há séculos é um dos instrumentos matemáticos mais empregados nas aplicações e na teoria.

Como pode ser visto em [4], grande parte dos livros didáticos adotados em escolas públicas costumam trabalhar a função afim dando ênfase a sua fórmula matemática e à construção de gráficos, deixando de lado fatos relevantes que levam o aluno a caracterizar em que situações o modelo linear se aplica.

Em nossa proposta, antes de apresentarmos o conceito de função afim, vamos mostrar algumas situações problema envolvendo questões do dia a dia, que nos ajudarão a entender as características desta função.

Situação 1

Pedro foi de taxi de sua casa à casa de sua namorada percorrendo um total de $15km$ de distância. O valor cobrado pelo taxi engloba uma parcela fixa de $R\$ \ 3,00$, chamada bandeirada, mais $R\$ \ 1,60$ por cada quilômetro percorrido.

Pergunta-se:

a) Quanto Pedro pagou pela corrida de taxi?

b) Quanto Pedro pagaria para deslocar-se de sua residência até a praia situada à $20km$ de sua casa?

c) Pedro pagou $R\$$ $19,00$ para deslocar-se de sua casa até o cinema. É possível dizer qual a distância percorrida entre sua casa e o cinema? Se possível, qual é esta distância?

d) É possível encontrar uma fórmula matemática que permita calcular o valor a ser pago nas corridas de taxi?

Situação 2

Um representante comercial recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de $R\$$ $1.500,00$, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 6% sobre o total das vendas efetuadas durante o mês.

a) Qual o salário mensal desse representante em função do total de vendas?

b) Quanto receberá no mês que vender $R\$$ $5.000,00$?

c) Quanto deverá vender por mês para ter um salário de $R\$$ $3.000,00$?

d) Quanto receberá caso não consiga vender nada?

e) Qual a fórmula matemática que possibilita calcular o salário mensal desse representante?

Situação 3

Renato tinha no banco um saldo positivo de $R\$$ $250,00$. Após um saque no caixa eletrônico, que fornece apenas notas de $R\$$ $50,00$, pergunta-se:

a) Qual será o novo saldo, sabendo que foi efetuado um saque de 3 notas no caixa eletrônico?

b) Qual a fórmula matemática que indicará o saldo de Renato após um número finito de retiradas?

Situação 4

Maria é uma trabalhadora autônoma, que vende produtos de beleza. Seu salário mensal é 20% do valor vendido. Pergunta-se:

a) Qual o salário de Maria no mês em que ela vender $R\$ \ 2.000,00$?

b) Qual a fórmula matemática que define o salário de Maria?

2.2 Definição de função afim.

Definição 2.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

A definição acima apresenta um modelo matemático que se aplica em várias situações e problemas, como pode ser visto em [1,2,7].

As situações apresentadas na seção anterior podem ser modeladas matematicamente por uma função do tipo $f(x) = ax + b$, onde a e b são coeficientes específicos. Vejamos abaixo, a solução da última pergunta de cada situação problema apresentada na introdução de função afim.

Situação 1

O problema envolve:

- Um valor fixo (bandeirada): $R\$ \ 3,00$ valor de "b"
- Um valor por quilômetro rodado: $R\$ \ 1,60$ valor de "a"
- Um valor variável que é a quantidade de quilômetros rodados (x)

Sendo assim, a fórmula que nos permitirá calcular o valor pago nas corridas de taxi em função dos quilômetros rodados será:

$$V(km) = 1,60km + 3,00 \quad \text{ou} \quad f(x) = 1,60x + 3,00$$

Situação 2

Salário mensal do representante comercial em função das vendas efetuadas durante o mês.

- Parte fixa do salário (independente das vendas) $R\$ \ 1500,00$ valor de "b"
- Percentual sobre as vendas: 6% $(0,06)$ valor de "a"
- Variável do problema: valor das vendas efetuadas durante o mês (x).

Fórmula do salário mensal:

$$S(x) = 1500,00 + 0,06x \quad \text{ou} \quad f(x) = 0,06x + 1500,00$$

Situação 3

Saldo bancário de Renato, após um saque no caixa eletrônico:

- Parte fixa do saldo: $R\$$ $250,00$ valor de "b"
- Valor por nota de $R\$$ $50,00$ sacada valor de "a"
- Variável do problema: número de notas de $R\$$ $50,00$ retiradas do caixa eletrônico (x).

Fórmula do saldo:

$$S(x) = 250,00 - 50,00x \quad \text{ou} \quad f(x) = -50,00x + 250,00$$

Situação 4

Salário mensal de Maria (vendedora autônoma) em função das vendas.

- Neste caso não existe um valor fixo. O salário de Maria depende exclusivamente de suas vendas.
- Percentual sobre as vendas: 20% $(0,02)$ valor de "a"
- Variável do problema: valor das vendas efetuadas durante o mês (x).

Fórmula do salário:

$$S(x) = 0,02x \quad \text{ou} \quad f(x) = 0,02x$$

2.3 Casos particulares da função afim

Como podemos ver em [1] existem funções importantes que são casos particulares da função afim $f(x) = ax + b$. Abaixo destacamos algumas delas:

1º) Função Identidade

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, $a = 1$ e $b = 0$.

2º) Função Linear

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $b = 0$.
Exemplos:

a) $f(x) = 3x \quad (a = 3)$;

b) $f(x) = -2x \quad (a = -2)$;

c) $f(x) = \frac{1}{4}x \quad \left(a = \frac{1}{4}\right)$;

d) $f(x) = 0,5x \quad (a = 0,5)$.

3º) Função Constante

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $a = 0$.
Exemplos:

a) $f(x) = 5$;

b) $f(x) = -4$;

c) $f(x) = -\frac{3}{2}$;

d) $f(x) = \frac{1}{3}$.

4º) Translação (da Função Identidade)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Nesse caso $a = 1$.
Exemplos:

a) $f(x) = x + 45$;

b) $f(x) = x - 2$;

c) $f(x) = x + \frac{1}{2}$;

d) $f(x) = x - \frac{1}{3}$.

2.4 Propriedades da Função Afim

Geralmente, quando se trabalha com a função afim no ensino médio, após apresentar a definição e alguns exemplos é feito o estudo do gráfico já supondo que esse gráfico é uma reta. Nossa proposta consiste em mostrar algumas propriedades da função afim, relacionadas com seu gráfico, antes de partirmos para sua construção, como é feito nos casos tradicionais.

Os resultados apresentados aqui podem ser trabalhados em sala de aula por envolverem conceitos matemáticos de fácil compreensão. Mais especificamente, iremos mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta e que toda reta não vertical é gráfico de uma função afim, como pode ser visto em [1].

Introduzir essas demonstrações no ensino médio é importante para tornar a teoria mais consolidada e para despertar no aluno o raciocínio matemático mais abstrato.

Teorema 2.1. *O gráfico G de uma função afim $f : x \to ax + b$ é uma linha reta.*

Demonstração. Para provar que o gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta basta mostrar que três pontos quaisquer do gráfico são colineares, ou seja, estão numa mesma reta. Sejam $P_1(x_1, ax_1 + b)$, $P_2(x_2, ax_2 + b)$ e $P_3(x_3, ax_3 + b)$ três pontos no gráfico da função $f(x) = ax + b$, como pode ser visto na Figura 2.1.

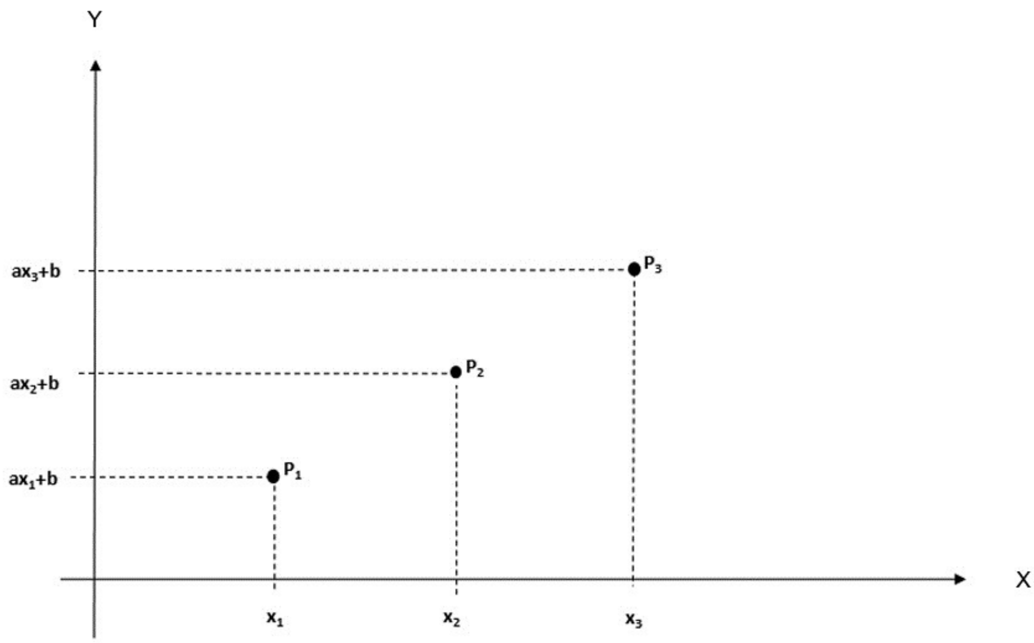

Figura 2.1: Três pontos da função $f(x) = ax + b$.

Para que os pontos P_1, P_2 e P_3 sejam colineares é necessário e suficiente que um dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Supondo que $x_1 < x_2 < x_3$ iremos mostrar que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\ &= \sqrt{1\,(x_2 - x_1)^2 + a^2\,(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 + a^2)\,(x_2 - x_1)^2} \\ &= (x_2 - x_1)\,\sqrt{1 + a^2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2\,(x_3 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 + a^2)\,(x_3 - x_1)^2} \\ &= (x_3 - x_1)\,\sqrt{1 + a^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} d(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_2 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 - ax_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2\,(x_3 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(1 + a^2)\,(x_3 - x_2)^2} \\ &= (x_3 - x_2)\,\sqrt{1 + a^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Portanto, das equações (2.1), (2.2) e (2.3), temos que

$$\begin{aligned} d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3) &= (x_2-x_1)\sqrt{1+a^2}+(x_3-x_2)\sqrt{1+a^2} \\ &= (x_2-x_1+x_3-x_2)\sqrt{1+a^2} \\ &= (x_3-x_1)\sqrt{1+a^2} \\ &= d(P_1,P_3), \end{aligned} \tag{2.4}$$

ou seja,

$$d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)=d(P_1,P_3)$$

Logo, três pontos quaisquer do gráfico da função afim são colineares, o que significa que o gráfico é um reta. ■

Dada a função afim, $f(x) = ax + b$, o número b chama-se valor inicial da função f ou coeficiente linear dessa reta. Observe na Figura 2.2 a representação geométrica do ponto (0,b).

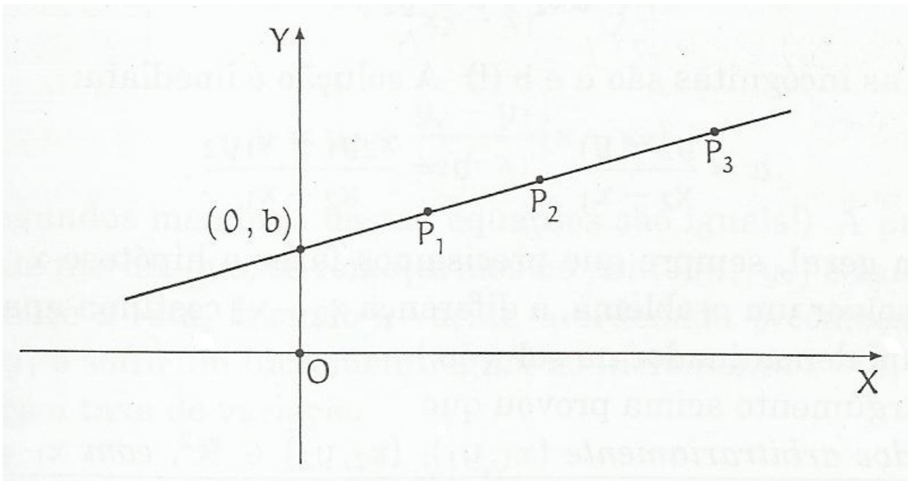

Figura 2.2: Gráfico da função $f(x) = ax + b$.

Geometricamente, o coeficiente b é a ordenada do ponto onde seu gráfico, que é uma reta, intersecta o eixo $0y$. Esse ponto de intersecção é fácil de ser encontrado, basta considerar $x = 0$ na função $f(x) = ax + b$.

O número a chama-se inclinação ou coeficiente angular da reta em relação ao eixo horizontal $0x$.

Geometricamente, quanto maior for o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente. Mais detalhes sobre os coeficientes da função $f(x) = ax + b$ pode ser visto em [1, 7].

Teorema 2.2. *Dados arbitrariamente* (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *com* $x_1 \neq x_2$, *existe uma, e somente uma, função afim* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_1) = y_1$ *e* $f(x_2) = y_2$.

Lembrando que este teorema é uma reformulação, de fato, mostrado na Geometria Básica que diz que por dois pontos distintos passa uma única reta.

Demonstração. Sabendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim onde $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar os coeficientes a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ax_1 - b = -y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ax_2 - ax_1 &= y_2 - y_1 \\ a(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 \\ a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2.5) \end{aligned}$$

Substituindo (2.5) em $ax_1 + b = y_1$. Obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + b = y_1 \\ \Rightarrow\ & b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \\ \Rightarrow\ & b = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \\ \Rightarrow\ & b = \frac{x_2y_1 - x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_1}{x_2 - x_1} \\ \Rightarrow\ & b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes a e b encontrados nas equações (2.5) e (2.6) definem a função afim $f(x) = ax + b$. ■

Teorema 2.3. *Toda reta não-vertical* r *é o gráfico de uma função afim.*

É importante destacar que pela definição de função uma reta vertical não pode representar uma função qualquer, muito menos uma função afim, visto que no gráfico de uma reta vertical teremos para o mesmo valor de $x \in \mathbb{R}$, vários valores diferentes de $f(x)$.

Demonstração. Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da reta r. Como r é não-vertical temos que $x_1 \neq x_2$.

Pelo Teorema 2.2, como $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ são pontos de $\mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Como o gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ e por dois pontos passa apenas uma reta, então r é o gráfico da função afim f. ■

Se $f(x) = ax + b$, diz-se que $y = ax + b$ é a equação da reta r, que é o gráfico de f.

Se a reta r é gráfico da função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, então o coeficiente a é dado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de r. Geometricamente o coeficiente a indica a taxa de crescimento de f.

Estas interpretações nos levam a concluir que a equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) não situados na mesma vertical é

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ou

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

Utilizando os resultados acima, o professor já pode trabalhar com seus alunos algumas questões de construção do gráfico de funções afins.

Exemplo 2.1. *Um móvel se desloca sobre uma trajetória retilínea de acordo com a equação horária $S = 4t + 8$, onde S é o espaço percorrido pelo móvel, em metros, e t é o tempo gasto para percorrê-lo, em segundos. Determinar:*

a) As posições do móvel nos instantes $t = 0s$, $t = 3s$ e $t = 6s$;

b) O instante em que o móvel se encontra a $40m$ da origem;

c) O gráfico que representa o deslocamento desse móvel, colocando no eixo das abscissas o tempo t e no eixo das ordenadas o espaço S.

Solução

a) Para determinarmos as posições do móvel, basta substituirmos os valores de t na equação dada.

– *Para $t = 0s \Rightarrow S = 4 \cdot 0 + 8 \Rightarrow S = 8m$.*

– *Para $t = 3s \Rightarrow S = 4 \cdot 3 + 8 \Rightarrow S = 20m$.*

– *Para* $t = 6s \Rightarrow S = 4 \cdot 6 + 8 \Rightarrow S = 32m$.

b) Para determinar o instante em que o móvel se encontra a $40m$ *da origem, basta substituir* $S = 40m$ *na equação* $S = 4t + 8$*:*

$$\begin{aligned} S &= 4t+8 \\ \Rightarrow 40 &= 4t+8 \\ \Rightarrow 4t &= 40-8 \\ \Rightarrow 4t &= 32 \\ \Rightarrow t &= \frac{32}{4} \\ \Rightarrow t &= 8s. \end{aligned}$$

c) Como se trata de uma função do tipo $f(x) = ax+b$*, ou seja, função afim, sua representação gráfica é uma reta, como pode ser visto na Figura 2.3. Portanto para traçar seu gráfico, basta encontrarmos dois pontos da reta. Para isso, atribuímos dois valores para a variável* t *e obtemos os respectivos valores de* S*.*

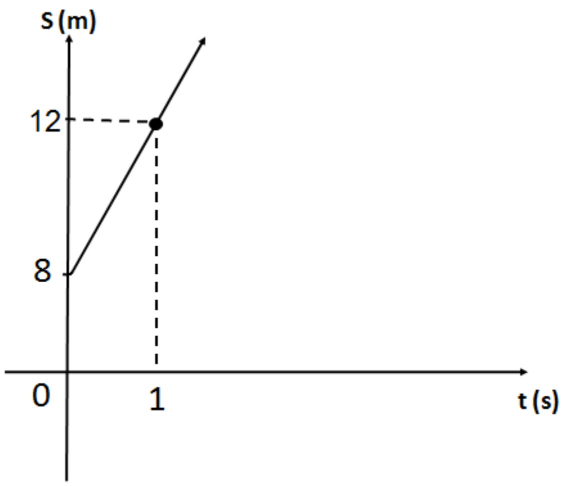

Figura 2.3: Gráfico do movimento do móvel.

Exemplo 2.2. *O gráfico da Figura 2.4 representa o deslocamento de um móvel, em uma trajetória retilínea, com velocidade constante. O espaço* S *é dado em quilômetros (km) e o tempo* t *em horas (h).*

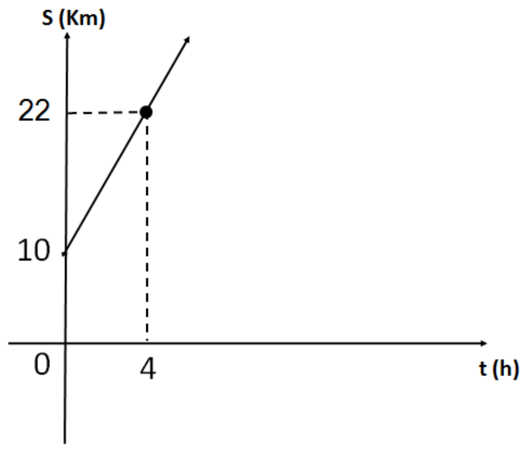

Figura 2.4: Deslocamento de um móvel.

Determinar:

a) A função horária que representa esse movimento;

b) O espaço inicial;

c) O espaço percorrido no instante $t = 5h$.

Solução

a) De acordo com o gráfico o espaço varia linearmente com o tempo, portanto a função que traduz essa dependência é uma função afim

$$f(x) = ax + b. \tag{2.7}$$

Observando o gráfico, temos as seguintes informações:

$$Se\ t = 0h,\ \ então\ S = 10km. \tag{2.8}$$

$$Se\ t = 4h,\ \ então\ S = 22km. \tag{2.9}$$

Substituindo as informações acima na equação (2.7), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10 & = & 0 \cdot a + b \\ 22 & = & 4 \cdot a + b \end{cases}$$

Substituindo $b = 10$, *que é obtido imediatamente da primeira equação, na equação* $22 = 4a + b$, *temos:*

$$\begin{aligned} 22 &= 4a + 10 \\ \Rightarrow 4a &= 22 - 10 \\ \Rightarrow a &= \frac{12}{4} \\ \Rightarrow a &= 3. \end{aligned}$$

Logo, a função que relaciona o espaço (S) *com o tempo* (t) *é:*

$$S = 3t + 10 \quad ou \quad f(x) = 3x + 10$$

b) *Para encontrarmos o espaço inicial, basta substituirmos* $t = 0h$ *na função obtida no item (a):*

$$\begin{aligned} S &= 3t + 10 \\ \Rightarrow S &= 3 \cdot 0 + 10 \\ \Rightarrow S &= 10km. \end{aligned}$$

Logo, o móvel começa seu movimento em $S = 10km$.

c) *Para obtermos o espaço percorrido em* $t = 5h$, *basta substituirmos* $t = 5h$ *na função obtida no item (a):*

$$\begin{aligned} S &= 3t + 10 \\ \Rightarrow S &= 3 \cdot 5 + 10 \\ \Rightarrow S &= 25km. \end{aligned}$$

Logo, para $t = 5h$ *o móvel se encontra em* $S = 25km$. *Como o móvel partiu de* $S = 10km$, *o espaço percorrido por ele foi de* $15km$.

Capítulo 3

Função linear e o problema da proporcionalidade

3.1 Introdução

O conceito de proporcionalidade é um dos mais antigos da Matemática. Ele tem origem milenar e ainda hoje é um dos assuntos mais importantes de todos os que são estudados na Matemática elementar que faz parte dos programas de ensino fundamental, [1]. Este conteúdo possibilita ao professor estabelecer vínculos entre diversos conteúdos que são trabalhados na formação básica do aluno. A importante noção de grandezas proporcionais se aplica tanto em problemas contextuais como nas diversas áreas da Matemática, como pode ser visto em [2,3].

Neste capítulo iremos apresentar a definição de proporcionalidade e mostrar que a função linear, caso particular da função afim $f(x) = ax+b$, é o modelo matemático para problemas de proporcionalidade e que, sob algums restrições, uma proporcionalidade é uma função linear. Iremos apresentar alguns exemplos e casos particulares onde são aplicados o conceito de proporcionalidade.

3.2 Proporcionalidade

A função linear, como já foi citado, é um caso particular da função afim. Apresentamos abaixo sua definição.

Definição 3.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se função linear.*

Segundo [1], a função linear, dada por $f(x) = ax$, é a função que modela os problemas de proporcionalidade. Abaixo são apresentados um exemplo de motivação e algumas questões que podem ser trabalhadas para possibilitar que o aluno relacione a função linear com problemas de proporcionalidade.

Exemplo 3.1. *Um motorista mantém seu carro numa rodovia a uma velocidade constante de* $90km/h$.

a) Em quanto tempo ele percorrerá $225km$*?*

b) Quantos quilômetros ele percorrerá em $3,5$ *horas?*

A Tabela 3.1 mostra a distância percorrida, em quilômetros, pelo automóvel em função do tempo, dado em horas. Analisando os dados da tabela, podemos concluir que:

(I) Quanto maior o tempo, maior será a distância percorrida.

(II) Ao dobrarmos ou triplicarmos o valor do tempo, a distância percorrida pelo automóvel é dobrada ou triplicada, respectivamente.

(III) Para um tempo t, a distância percorrida pelo automóvel é $90t$.

Tempo (h)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	t
Distância Percorrida (km)	30	45	90	180	270	360	$d = 90t$

Tabela 3.1: Distância percorrida (km) em função do tempo (h).

As observações listadas acima mostram que a distância percorrida pelo automóvel está diretamente relacionada com o tempo gasto quando se tem uma velocidade constante. Quando isso ocorre entre duas grandezas dizemos que elas são proporcionais ou são diretamente proporcionais.

O Exemplo 3.1 apresenta uma situação que envolve os conceitos de função linear e de proporcionalidade e permite que os alunos, com a mediação do professor, estabeleçam esta relação.

Para formalizar este importante conceito, introduzimos a seguinte definição que pode ser vista em [2].

Definição 3.2. *Uma proporcionalidade é uma função* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *com as seguintes propriedades:*

1) f é uma função crescente, isto é, se $x < x'$, então $f(x) < f(x')$ para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$.

2) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = nf(x)$.

Em [2] o autor destaca o fato de que se f é uma proporcionalidade, então a propriedade 2) da Definição 3.2 é válida não só para $n \in \mathbb{N}$, mas para todo $n \in \mathbb{R}^+$, desde que f seja monótona. Este resultado será mostrado no teorema seguinte.

Como podemos ver em [1], uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se:

i) crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

ii) decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

iii) monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

iv) monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Em qualquer um dos quatro casos, f diz-se monótona.

Teorema 3.1. ***Teorema Fundamental da Proporcionalidade.*** *Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função crescente tal que $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer x e c em $\mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Por hipótese f é uma função crescente, logo se $x < x'$, então $f(x) < f(x')$. Além disso, temos que $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Queremos mostrar que $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer x e $c \in \mathbb{R}^+$.

Tal propriedade já é válida para $c \in \mathbb{N}$, resta mostrar a validade da propriedade para c racional e c irracional.

Sejam $r = \dfrac{m}{n}$ um número racional, com $m, n \in \mathbb{N}$, e $x \in \mathbb{R}^+$.

Como $rx \in \mathbb{R}^+$, por hipótese, temos que:

$$\begin{aligned} nf(rx) &= f(nrx) = f\left(n \cdot \frac{m}{n} \cdot x\right) = f(mx) = mf(x) \\ \Rightarrow f(rx) &= \frac{m}{n} f(x) \\ \Rightarrow f(rx) &= rf(x) \end{aligned}$$

A última igualdade mostra a validade da propriedade $f(cx) = cf(x)$ para c racional.

Para mostrar a validade da propriedade $f(cx) = cf(x)$, para c irracional, adotaremos a prova por absurdo.

Suponha que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq cf(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Sendo assim, temos duas possibilidades, ou $f(cx) < cf(x)$ ou $f(cx) > cf(x)$.

Suponha que $f(cx) < cf(x)$, que implica em $c > \dfrac{f(cx)}{f(x)}$. Seja r um número racional próximo de c, de modo que $\dfrac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, isto é, $f(cx) < rf(x) < cf(x)$. Como r é racional, temos que $rf(x) = f(rx)$. Com isso, reescrevendo a desigualdade anterior, obtemos $f(cx) < f(rx) < cf(x)$ e, em particular, $f(cx) < f(rx)$. O que contradiz o fato de f ser crescente, já que $rx < cx$. Logo, não podemos ter $f(cx) < cf(x)$. Analogamente, mostra-se que também não podemos ter $f(cx) > cf(x)$ para c irracional e algum $x \in \mathbb{R}^+$.

Dessa forma, podemos concluir que $f(cx) = cf(x)$, para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$. ■

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade tem uma importância especial, pois estabelece um critério para saber se uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é linear, como é destacado em [1]. Isto é, para que uma função f seja linear ela deve ser uma função monótona e satisfazer a propriedade $f(nx) = nf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Este resultado é apresentado no corolário abaixo.

Corolário 3.1. *Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade então tem-se, para todo $x > 0$, $f(x) = ax$, onde $a = f(1)$.*

Demonstração. Por hipótese, f é uma proporcionalidade. Assim, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $c \in \mathbb{N}$ temos $f(cx) = cf(x)$, para qualquer x e c em $\mathbb{R}^+$. Como f satisfaz a propriedade acima, podemos escrever:

$$f(xc) = xf(c) \tag{3.1}$$

Substituindo c por 1 na equação (3.1), obtemos

$$f(x) = xf(1) \tag{3.2}$$

Fazendo $a = f(1)$ na equação (3.2), obtemos $f(x) = xa$, que é uma função linear com coeficiente a. ■

O Corolário 3.1 mostra que se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade, então f é uma função linear. A recíproca, se considerarmos alguma restrição, também é verdadeira.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função linear definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$. Se $a > 0$, então para todo número real positivo x, isto é $x \in \mathbb{R}^+$, temos que $f(x) = ax$ também é um número real positivo. Logo, restringindo a função ao conjunto dos números reais

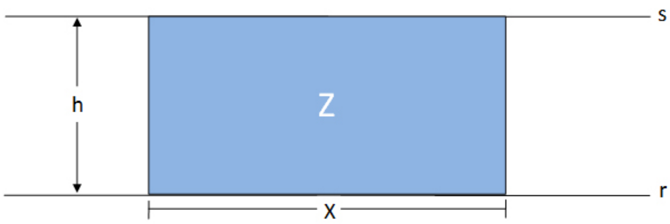

Figura 3.1: Retângulo com lados contidos nas retas r e s.

positivos, a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = ax$, é uma proporcionalidade onde o coeficiente a chama-se fator de proporcionalidade. Podemos ver em [2] que toda proporcionalidade é a restrição de uma função linear a $\mathbb{R}^+$.

Abaixo é apresentado mais um exemplo de proporcionalidade que pode ser apresentado ao aluno com o objetivo de fixar e relacionar os conceitos apresentados acima.

Exemplo 3.2. *Sejam r e s retas paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, chamemos de x o comprimento de um desses lados e z a área do retângulo, como na Figura 3.1.*

A correspondência entre o lado x e a área z é uma proporcionalidade, ou seja, quando a altura de um retângulo é fixada, sua área z é proporcional à base x.

Com efeito, em primeiro lugar, se $x < x'$ então a área z' do retângulo de base x' é igual à área z do retângulo de base x mais a área de um retângulo de base $x' - x$, logo $z < z'$.

Em segundo lugar um retângulo de base nx pode ser expressa como reunião de n retângulos justapostos de base x (e mesma área z) logo sua área é nz.

3.3 Proporcionalidade e Regra de Três.

Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = ax$, é uma proporcionalidade, então para x_1 e x_2 em $\mathbb{R}^+$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 \tag{3.3}$$

e

$$f(x_2) = ax_2 \tag{3.4}$$

Faça $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, isto é, $y_1 = ax_1$ e $y_2 = ax_2$, respectivamente. Agora, considere os seguintes quocientes:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{ax_1}{x_1} = a \tag{3.5}$$

e

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{ax_2}{x_2} = a \tag{3.6}$$

Das equações (3.5) e (3.6), podemos concluir que:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = a$$

A igualdade acima é importante e aparece em vários problemas de aplicações. Em seguida, apresentamos sua definição.

Definição 3.3. *Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade, então para quaisquer x_1, x_2*

em $\mathbb{R}^+$, fazendo $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, a igualdade

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = a$$

recebe o nome de proporção.

Definição 3.4. *Dizemos que duas grandezas x_1 e y_1 são proporcionais se $y_1 = ax_1$. Neste caso, o coeficiente a recebe o nome de fator de proporcionalidade.*

Um problema que está diretamente relacionado com proporcionalidade é a *regra de três*, que é um processo matemático muito útil, já conhecido e utilizado por civilizações antigas, que ainda hoje vem sendo usado para resolver problemas em várias áreas de aplicações, [2, 3].

Definição 3.5. *Seja $f(x) = ax$ uma proporcionalidade e x_1, x_2, y_1, y_2 valores específicos das grandezas x e $f(x)$, tais que $y_1 = ax_1$ e $y_2 = ax_2$. Define-se por regra de três o problema de encontrar um dos valores x_1, x_2, y_1 e y_2, conhecendo-se três deles, onde é válida a seguinte proporção*

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Observação 3.1. *Sabendo que $f(x) = ax$ é uma proporcionalidade, considerando os valores específicos x_1, x_2, y_1 e y_2, tais que $y_1 = ax_1$ e $y_2 = ax_2$, temos que $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$ também define uma proporção. Conhecendo três dos valores x_1, x_2, y_1 e y_2, por exemplo x_1, x_2 e y_1, é possível encontrar y_2 sem conhecer o fator de proporcionalidade a.*

Aqui iremos destacar dois métodos de resolução para uma regra de três.

(1º Método): Se os valores específicos x_1, x_2, y_1 e y_2 satisfazem a proporção

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

e são conhecidos os valores x_1, x_2, y_1, então o valor desconhecido y_2 é dado por:

$$y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}.$$

(2º Método): Seja $f(x) = ax$ uma proporcionalidade onde as grandezas x_1, y_1, x_2 são conhecidas e $f(x_1) = y_1$. Para obter a grandeza desconhecida y_2 na proporção

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2},$$

primeiro obtemos $a = \frac{y_1}{x_1}$ e, com isso, $y_2 = f(x_2) = ax_2$.

Vejamos abaixo alguns exemplos que ilustram as aplicações da regra de três.

Exemplo 3.3. *Um motorista mantém seu carro numa rodovia a velocidade constante de* $90km/h$.

a) *Em quanto tempo ele percorrerá* $225km$*?*

b) *Quantos quilômetros ele percorrerá em* $3,5$ *horas?*

Solução: Seja $f(t) = 90t$ *uma proporcionalidade onde as grandezas* t_1, t_2, d_1, d_2 *satisfazem* $f(t_1) = d_1$ *e* $f(t_2) = d_2$.

a) *Para* $t_1 = 1h$, $t_2 = t$, $d_1 = 90km$ *e* $d_2 = 225km$, *temos a seguinte proporção:*

$$\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2} \Rightarrow \frac{90}{1} = \frac{225}{t}.$$

Aplicando o primeiro método de resolução de regra de três na proporção acima, temos:

$$t = \frac{1 \cdot 225}{90} \Rightarrow t = 2,5h.$$

Logo, o carro percorrerá $225km$ *em 2 horas e 30 minutos.*

b) *Para* $t_1 = 1h$, $t_2 = 3,5h$, $d_1 = 90km$ *e* $d_2 = d$, *temos a seguinte proporção:*

$$\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2} \Rightarrow \frac{90}{1} = \frac{d}{3,5}.$$

Aplicando o primeiro método de resolução de regra de três na proporção acima, temos:

$$d = \frac{3,5 \cdot 90}{1} \Rightarrow d = 315km.$$

Logo, em 3,5 horas o carro percorrerá $315km$.

Exemplo 3.4. *O preço da venda de um livro é de* $R\$\ 35,00$ *por unidade. Pergunta-se:*

a) *Qual a receita obtida com a venda de 12 livros?*

b) *Quantos livros devem ser vendidos para obter-se uma receita de* $R\$\ 700,00$*?*

Solução: Seja $f(x) = 35x$ *uma proporcionalidade onde as grandezas* x_1, x_2, y_1, y_2 *satisfazem* $f(x_1) = y_1$ *e* $f(x_2) = y_2$.

a) *Para* $x_1 = 1$, $x_2 = 12$, $y_1 = 35$ *e* $y_2 = y$, *temos a seguinte proporção:*

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow \frac{35}{1} = \frac{y}{12}.$$

Aplicando o primeiro método de resolução de regra de três na proporção acima, temos:

$$y = \frac{35 \cdot 12}{1} \Rightarrow y = 420,00.$$

Logo, a receita obtida com a veda dos livros será de $R\$420,00$.

b) *Para* $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $y_1 = 35$ *e* $y_2 = 700$, *temos a seguinte proporção:*

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow \frac{35}{1} = \frac{700}{x}.$$

Aplicando o primeiro método de resolução de regra de três na proporção acima, temos:

$$x = \frac{700 \cdot 1}{35} \Rightarrow x = 20.$$

Logo, para se ter uma receita de $R\$\ 700,00$ *devem ser vendidos 20 livros.*

3.4 Divisão em partes proporcionais.

Outra aplicação de proporcionalidade são os problemas chamados *divisão em partes proporcionais.* Antes de apresentarmos a técnica de solução para esses problemas, primeiramente iremos introduzir uma definição e um teorema. Para mais detalhes o estudante pode consultar [3].

Definição 3.6. *Dadas duas sequências* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *e* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *dizemos que os números* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *são proporcionais aos números* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *se são válidas as seguintes igualdades:*

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}.$$

Proposição 3.1. *Se* $f(x) = ax$ *é uma proporcionalidade tal que para os valores específicos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *temos* $y_1 = a \cdot x_1$, $y_2 = a \cdot x_2$, $\ldots$, $y_n = a \cdot x_n$, *então*

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Demonstração. A demonstração é imediata e pode ser vista em [3] ∎

Da Proposição 3.1, segue que se $f(x) = ax$ é uma proporcionalidade e temos $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$, $\ldots$, $y_n = ax_n$, então $y_1, \ldots, y_n$ são proporcionais a $x_1, \ldots, x_n$.

Como $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, as proporções acima podem ser estendidas para:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots y_n}{x_1 + x_2 + \ldots x_n} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = \frac{y_n}{x_n}.$$

Com essas observações podemos formalizar o problema da divisão em partes proporcionais.

Dado um número a, suponha que se queira dividi-lo em partes proporcionais a $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é, devem existir $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tais que, $x_1 = ka_1$, $x_2 = ka_2$, $\ldots$, $x_n = ka_n$. Pela Proposição 3.1 temos que:

$$a = x_1 + x_2 + \ldots x_n = k(a_1 + a_2 + \ldots a_n). \tag{3.7}$$

Isolando k na equação (3.7), obtemos o fator de proporcionalidade:

$$k = \frac{a}{a_1 + a_2 + \ldots a_n}. \tag{3.8}$$

Com o fator de proporcionalidade k, dado na equação (3.8), as partes proporcionais ao número a são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{aa_1}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \\ x_2 &= \frac{aa_2}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{aa_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n} \end{aligned}$$

Em seguida serão apresentados dois exemplos que iremos resolver utilizando a técnica da divisão em partes proporcionais.

Exemplo 3.5. *Um pequeno edifício tem 3 andares. O primeiro andar tem um apartamento, 101, que possui uma área de* $286m^2$. *Os segundo e terceiro andares tem dois apartamentos cada, 201, 202 e 301, 302, respectivamente. Os apartamentos 201 e 301 tem cada um* $80m^2$ *de área e os 202 e 302 tem* $100m^2$. *O gasto mensal com a administração do edifício é de* $R\$4.000,00$. *Qual deve ser a cota de condomínio de cada um dos 5 apartamentos supondo que essa cota deve ser proporcional à sua área?*

Solução: A solução do problema consiste em dividir a despesa de $R\$4.000,00$ em partes proporcionais a 80, 100, 80, 100 e 286, que correspondem às áreas dos apartamentos 201, 202, 301, 302 e 101, respectivamente. Então as cotas serão:

- Apartamentos: 201 e 301

$$x_1 = \frac{4.000 \cdot 80}{80 + 100 + 80 + 100 + 286} = \frac{320.000}{646} = 495,40$$

- Apartamentos: 202 e 302

$$x_2 = \frac{4.000 \cdot 100}{80 + 100 + 80 + 100 + 286} = \frac{400.000}{646} = 619,20$$

- Apartamentos: 101

$$x_3 = \frac{4.000 \cdot 286}{80 + 100 + 80 + 100 + 286} = \frac{1.144.000}{646} = 1.770,90$$

Logo, os apartamentos 201 e 301 terão uma cota de condomínio de $R\$495,40$, os apartamentos 202 e 302 terão uma cota de $R\$619,20$ e o apartamento 101 terá uma cota de $R\$1.770,90$.

Exemplo 3.6. ***(Regra da Sociedade)****: Três pessoas organizaram um negócio entrando cada um com os seguintes capitais:* $R\$$ 1.000,00*,* $R\$$ 2.000,00 *e* $R\$$ 3.000,00*. Ao final de um ano obtiveram um lucro de* $R\$$ 48.000,00*. Quanto desse lucro caberá a cada um dos sócios?*

Solução: Cada sócio receberá um valor proporcional ao valor investido por ele. Suponha que o sócio 1 aplicou $R\$$ 1.000,00, o sócio 2 aplicou $R\$$ 2.000,00 e que o sócio 3 aplicou $R\$$ 3.000,00, utilizando o método de divisão proporcional, temos:

- Sócio 1:
$$x_1 = \frac{48.000 \cdot 1.000}{1.000 + 2.000 + 3.000} = \frac{48.000.000}{6.000} = 8.000.$$
- Sócio 2:
$$x_2 = \frac{48.000 \cdot 2.000}{1.000 + 2.000 + 3.000} = \frac{96.000.000}{6.000} = 16.000.$$
- Sócio 3:
$$x_3 = \frac{48.000 \cdot 3.000}{1.000 + 2.000 + 3.000} = \frac{140.000.000}{6.000} = 24.000.$$

Logo, os sócios 1, 2 e 3 irão receber $R\$8.000,00$, $R\$16.000,00$ e $R\$24.000,00$, respectivamente.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Introdução

As aplicações são empregos dos conceitos e teoremas matemáticos para obter resultados, conclusões e previsões de situações que vão desde problemas triviais do dia a dia à questões mais sutis de diversas áreas, como científicas, tecnológicas e, mesmo, sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário. Desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e, certamente, cada vez mais no futuro, a Matemática é indispensável ao homem por ajudá-lo a resolver problemas e por permitir-lhe responder de modo claro, preciso e indiscutível certos questionamentos, que, sem o auxílio dela, continuariam sendo perguntas ou se transformariam em palpites, opiniões ou conjecturas.

As aplicações são a conexão entre a abstração e a realidade, entre a teoria e a prática do dia a dia.

Mostraremos a seguir algumas aplicações da função afim.

4.2 Função Afim e as Escalas Termométricas

Medir temperaturas é uma atividade muito importante e bastante comum no nosso dia a dia. Por exemplo, numa consulta médica (temperatura do corpo humano), nas ruas e ambientes fechados (temperatura ambiental), nas industrias (temperatura de um certo sólido ou líquido), etc.

A escala Fahrenheit e a escala Celsius são as mais utilizadas nos termômetros, que são os instrumentos utilizados para fazer tais medidas.

Na escala Celsius o termômetro é graduado escolhendo-se duas temperaturas determinadas: a da fusão do gelo, à qual se atribui o valor zero e da ebulição da água, à qual se atribui o valor 100. O intervalo entre os dois pontos fixos 0 e 100 é dividido em 100 partes iguais.

Na escala Fahrenheit, divide-se o intervalo entre os pontos fixos, fusão do gelo e ebulição da água, em 180 partes iguais. Ao nível inferior atribuí-se o valor 32 e, ao superior o valor 212. Sendo assim, o zero desta escala está 32 graus Fahrenheit abaixo da temperatura de fusão. Assim 0^oC corresponde a 32^oF e 100^oC corresponde a 180^oF.

A aplicação da função afim a esta situação aparece quando queremos, por exemplo, obter uma temperatura em graus Fahrenheit sendo que esta temperatura é dada em graus Celsius.

Mostraremos esta situação de duas maneiras:

1ª) Seja C a temperatura em graus Celsius e F a temperatura em graus Fahrenheit. Observando a Figura 4.1, pode-se estabelecer entre as duas escalas a seguinte relação:

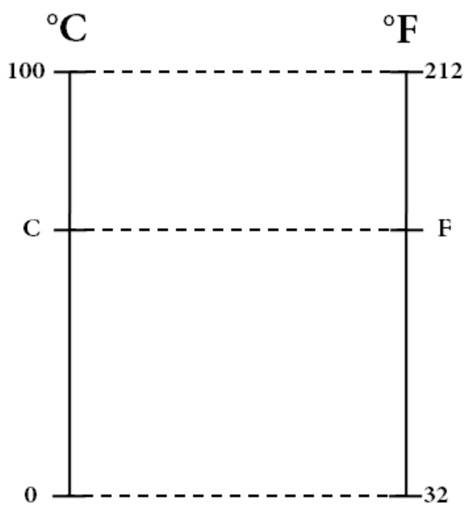

Figura 4.1: Relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit.

$$\begin{aligned}
\frac{C-0}{100-0} &= \frac{F-32}{212-32}\\
\Rightarrow \frac{C}{100-0} &= \frac{F-32}{180}\\
\Rightarrow \frac{C}{5} &= \frac{F-32}{9}\\
\Rightarrow 5F-160 &= 9C\\
\Rightarrow 5F &= 9C+160\\
\Rightarrow F &= \frac{9}{5}C+32\\
\Rightarrow F &= 1,8C+32
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variáveis $F = f(x)$ e $C = x$, teremos:

$$f(x) = 1,8x + 32$$

que é uma função que expressa a temperatura em graus Fahrenheit conhecendo-se a temperatura em graus Celsius.

2ª) A conversão de escala Celsius para Fahrenheit é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa a medida x, em C, à medida $f(x)$, em F. Essa função é crescente e a diferença $f(x+h)-f(x)$ depende apenas de h e não de x. Assim, f é uma função afim da forma $f(x) = ax + b$. Sabemos que $f(0) = 32$ e $f(100) = 212$. Como $f(0) = b$, então $b = 32$. Além disso, $f(100) = 100a+32$, ou seja, $100a+32 = 212$, donde $a = 1,8$. Portanto, $f(x) = 1,8x + 32$ é a função que associa a medida x à medida $f(x)$.

4.3 Função Afim Aplicada a Física

Um móvel que se desloca em movimento retilíneo uniforme, ou seja, sempre na mesma direção, e que em espaços de tempos iguais apresenta o mesmo deslocamento, tem sua posição dada em cada instante t por $S(t) = vt + b$, em que a constante $v = S(t+1) - S(t)$ é a velocidade do móvel e $b = S(0)$ é a posição inicial.

Exemplo 4.1. *Um móvel percorre uma estrada em movimento retilíneo uniforme deslocando-se de acordo com a função horária* $S(t) = 80t + 100$*, em que* $S(t)$ *representa sua posição em quilômetros e* t *representa o tempo em horas. Pergunta-se:*

a) *Qual a posição do móvel após 2 horas de deslocamento?*

b) *Quanto tempo o móvel levará para chegar no quilômetro 500?*

Solução:

a) *Para determinar a posição do móvel após 2 horas de deslocamento, basta fazer* $t = 2$ *na função* $S(t) = 80t + 100$*:*

$$\begin{aligned} S(t) &= 80t + 100 \\ \Rightarrow S(2) &= 80 \cdot 2 + 100 \\ \Rightarrow S(2) &= 160 + 100 \\ \Rightarrow S(2) &= 260 \end{aligned}$$

Logo, o móvel encontra-se no quilômetro 260 desta rodovia após 2 *horas de deslocamento.*

b) *Para determinar quanto tempo o móvel levará para chegar no quilômetro 500, basta fazer* $S(t) = 500$ *e encontrar o tempo* t *correspondente:*

$$\begin{aligned} S(t) &= 500 \\ \Rightarrow 80t + 100 &= 500 \\ \Rightarrow 80t &= 500 - 100 \\ \Rightarrow 80t &= 400 \\ \Rightarrow t &= \frac{400}{80} \\ \Rightarrow t &= 5 \end{aligned}$$

Logo, o móvel levará 5 horas para chegar no quilômetro 500 desta rodovia.

4.4 Função Afim, Proporcionalidade e Escalas

Quando uma construtora se propõe a construir uma casa, por exemplo, o responsável pela obra terá em suas mãos uma planta, que nada mais é do que um desenho mostrando as medidas desta casa em tamanho reduzido. Isto também acontece quando são traçados mapas geográficos. Nestes desenhos, as medidas no papel estão relacionadas com a medida real e para mostrar esta relação os arquitetos e engenheiros utilizam as *escalas*.

Tanto em mapas como em plantas aparecem expressões tipo “escalas 1 : 1.000” ou “escalas 1 : 150”, que devem ser lidas assim: “escala 1 por 1.000”ou “escala 1 por 150”, respectivamente. A escala 1 : 150 significa que, cada centímetro no desenho corresponde a $150cm$ no tamanho real. Se tivermos $2cm$ no papel, o tamanho real será $300cm$, ou seja, medida no papel (desenho) e medida real são diretamente proporcionais. Quando maior a medida no desenho, maior será a medida real. Se dobrarmos, triplicarmos a medida no desenho o mesmo acontecerá com a medida real. No caso da escala 1 : 150, seja m_p a medida no papel e m_r a medida real. Como as medidas m_p e m_r são diretamente proporcionais, temos as seguinte relação:

$$\frac{1}{150} = \frac{m_p}{m_r} \Rightarrow m_r = 150m_p.$$

Chamando m_p de x e m_r de $f(x)$, a função linear $f(x) = 150x$ expressa a medida real em função da medida no papel.

A Figura 4.2 ilustra esta relação mostrando um desenho de um mapa com sua respectiva escala.

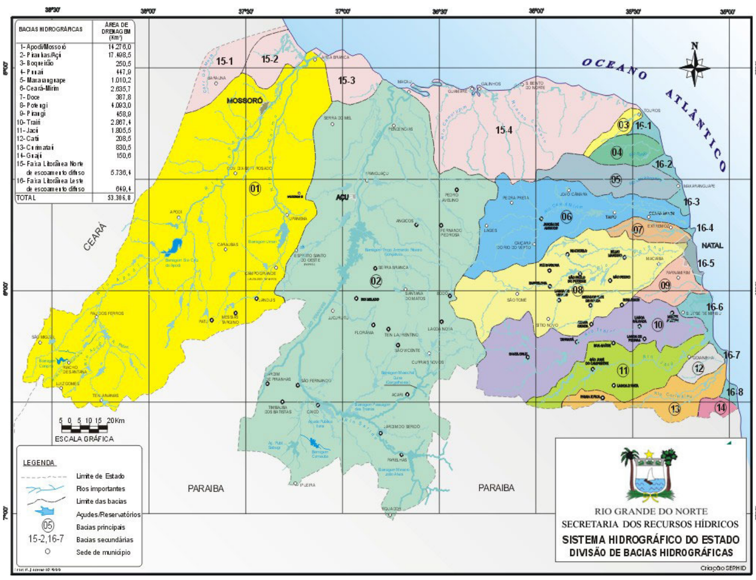

Figura 4.2: Exemplo de escalas em mapas.

O mapa foi feito em uma escala de k unidades, isto quer dizer que cada k unidades de comprimento (milímetro, centímetro, metro, etc) da situação real foram representadas no mapa por 1 unidade (milímetro, centímetro, metro, etc).

4.5 Função Afim e a Relação entre Custo, Receita e Lucro.

Situação Problema: O *Ponto do Bolo* é uma empresa comercial especializada exclusivamente em produzir e comercializar bolos. Na produção, existe um "custo" mensal fixo de $R\$ \ 1.800,00$, que inclui conta de água e luz, aluguel, pagamento de funcionários, etc. Além desse custo fixo, há também um custo variável, que depende da quantidade de bolos que são produzidos. O custo de produção de cada bolo está avaliado em $R\$ \ 1,50$.

Sendo assim, o custo total mensal da empresa será composto do custo fixo, mais o custo variável de acordo com a quantidade de bolos produzidos.

Como calcular o lucro dessa empresa? Sabendo que o preço de venda de cada bolo é $R\$ \ 6,00$, quantos bolos deverão ser produzidos e vendidos para que a empresa tenha lucro?

Para responder essas perguntas, vamos fazer as seguintes considerações:

- C_F: custo fixo. Logo, $C_F = R\$ \ 1.800,00$;
- x: quantidade de bolos produzidos;
- C_V: custo variável. Logo, $C_V(x) = 1,50x$;
- C_T: custo total. Logo, $C_T(x) = C_V(x) + C_F$.

Com as informações acima, temos a seguinte função linear que expressa o custo total na produção de bolos:

$$C_T(x) = 1,50x + 1.800,00.$$

A empresa pagará seus custos com aquilo que arrecadar com a venda dos bolos. Este valor é chamado receita e representado por R. A função linear abaixo representa a receita da venda de bolos:

$$R(x) = 6,00x.$$

O lucro mensal da empresa, representado por L_M, é obtido subtraindo da receita obtida o custo com a produção:

$$\begin{aligned}
L_M(x) &= R(x) - C_T(x) \\
L_M(x) &= 6,00x - (1,50x + 1.800,00) \\
L_M(x) &= 6,00x - 1,50x - 1.800,00 \\
L_M(x) &= 4,50x - 1.800,00
\end{aligned}$$

A função afim acima representa o lucro da empresa de bolos em função da quantidade produzida e vendida x. A empresa passará a ter lucro quando $L_M(x)$ for maior que zero, ou seja:

$$\begin{aligned}
4,50x - 1.800,00 &> 0 \\
4,50x &> 1.800,00 \\
x &> \frac{1.800,00}{4,50} \\
x &> 400
\end{aligned}$$

Portanto serão necessários no mínimo 400 bolos vendidos mensalmente para que a empresa pague todos os seus custos, e acima dessa produção a mesma passará a ter lucro.

Vamos verificar o resultado graficamente.

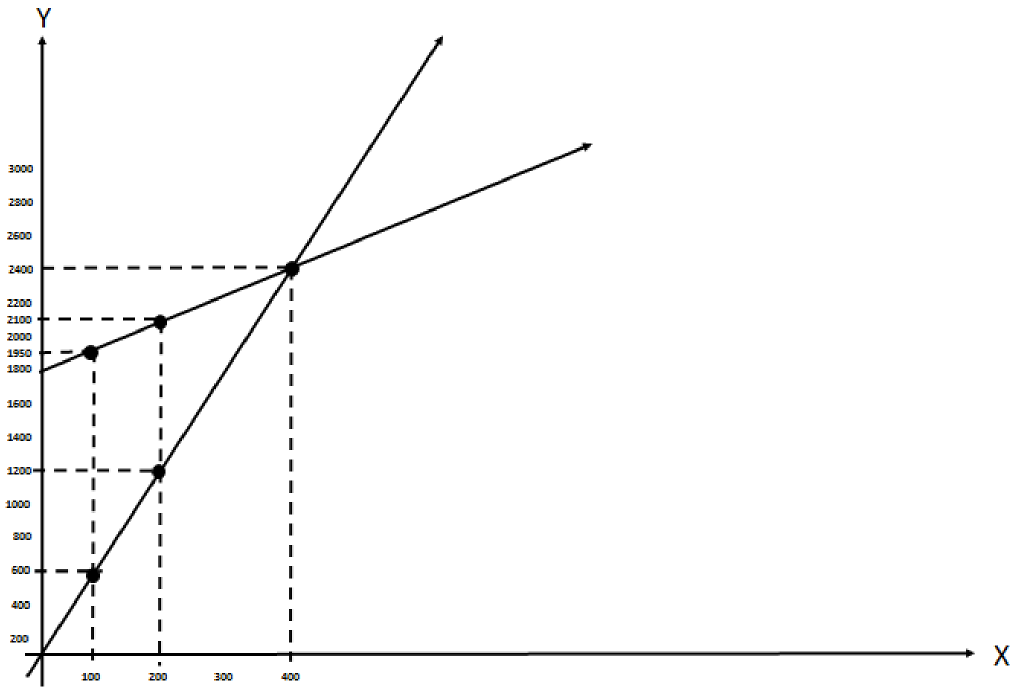

Figura 4.3: Representação gráfica da produção de bolos.

As retas se intersectam no ponto $P(400, 2.400)$.

O ponto P é chamado ponto de nivelamento (ou ponto crítico), pois em P a receita é suficiente para igualar o custo total, fazendo com que a empresa não tenha prejuízo.

Capítulo 5

Conclusão

Objetivando mostrar uma proposta que permitisse aos alunos do primeiro ano do Ensino Médio perceberem a importância da Matemática mostrada no referido período, desenvolvemos este trabalho com a certeza de está contribuindo com o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina, especificamente no estudo da Função Afim e suas aplicações.

Concentramos nossa atenção numa tentativa de mostrarmos a Função Afim sob uma perspectiva diferente da mostrada na grande maioria dos livros didáticos hoje disponíveis no mercado. Tentamos mostrar como as aplicações e os questionamentos decorrentes das situações problemas levam os alunos a perceberem por si mesmos que a Matemática não se constitui apenas de um aglomerado de fórmulas e teorias sem propósito prático, mas que está presente em vários setores organizados da sociedade.

Fazendo algumas demonstrações simples, tentamos mudar a forma como o aluno vê a Matemática. Mostramos que fórmulas e resultados obtidos estão fortemente embasados e que se aplicam em várias situações. Por exemplo, demonstramos que o gráfico da Função Afim é uma reta utilizando o caso geral que pode ser adaptado para qualquer Função Afim com coeficientes específicos.

Destacamos a relação entre Função Linear e Proporcionalidade tentando resgatar a importância das aplicações de proporção e regra de três que estabelecem um elo entre o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Essas aplicações mostram que existe uma interação entre os conteúdos matemáticos de diferentes níveis de ensino. Dessa forma, tínhamos por objetivo despertar a curiosidade e a vontade de aprender do aluno e contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Por fim, foi apresentado nesse trabalho, uma proposta de aula, que pensamos ser adequada para trabalhar a Matemática em sua forma mais teórica e, ao mesmo tempo, despertar no aluno o gosto e prazer de aprender esta disciplina. Com isso, este trabalho oferece aos professores uma proposta de ensino da Função Afim de uma forma que acreditamos ser mais abrangente e didaticamente envolvente.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado, A.C. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 1*, 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] LIMA, E. L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado, A.C. *Temas e Problemas.* Rio de Janeiro: SBM, 2003.

[3] LIMA, E. L.; Carvalho, P.C.P.; Wagner, E.; Morgado, A.C. *Temas e Problemas Elementares*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] LIMA, E. L. *Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[5] OLIVEIRA, K. I. M.; Fernádez, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM., 2010.

[6] IEZZI, G.; Dolce, O.; Murakami, C. *Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 2*, 9ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

[7] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações, vol. 1*, 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

[8] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações, vol. 3*, 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.