



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
PPGM - Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Grafos na educação básica: do formal ao lúdico

por

LUCIANO PEREIRA DA SILVA

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Dezembro/2020
João Pessoa - PB

Grafos na educação básica: do formal ao lúdico

por

LUCIANO PEREIRA DA SILVA

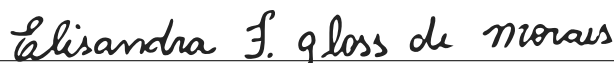
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática Aplicada

Aprovada por:



Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)



Prof^a. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB



Prof^a. Dr^a. Joelma Morbach - UFPA

Dezembro/2020

Agradecimentos

Aos meus pais, José Lauriano Pereira (Duda) e Josefa da Silva Pereira (Nininha), que já não estão nesse mundo, pelo incentivo que me deram para o estudo, mesmo sendo pessoas com poucas instruções. Aos meus irmãos, Claudio, Ricardo, Jorge, Flávio e à minha irmã Claudia Valéria que por alguns caprichos da vida teve que vir morar em minha casa, e assim ficando com meus filhos quando eu precisava estudar. Aos meus filhos Lucas Felipe e Davi Rafael, ótimos filhos e inteligentes com os quais tenho um aprendizado diário e, principalmente à minha esposa, Patrícia pelo companheirismo, compreensão e paciência nesses períodos de estudo e em toda nossa vida conjugal. Vocês são muito importantes para mim.

Ao orientador, professor Dr. Carlos Bocker, pela orientação, apoio, discussões, confiança, amizade, paciência, ensinamentos e dedicação, minha sincera gratidão.

Aos professores Bruno, Eduardo, Hinojosa, Lizandro, Wendel, do PROFMAT-UFPB, pela convivência agradável e ensinamentos ao longo desses dois anos de estudo.

A secretária do PROFMAT-UFPB, Roseli Agapito, pela atenção dispensada nas solicitações da documentação necessária para solicitação de licença para estudo na Rede Municipal de Ensino. A Ewerton Monteiro atuando como secretário pela radidez na organização da documentação exigida para a defesa.

Aos amigos de turma que contribuíram de alguma forma para a conclusão deste Mestrado: Cristiano Oliveira, Cristiano Pereira, Erielson, Janeide, Leonardo, Manoel, Mario, Onaldo, Osman, Samuel, Thiago Andrade, Thiago Ferreira.

Ao programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB.

Aos professores da banca examinadora pela disponibilidade e sugestões para melhoria deste trabalho.

Ao suporte financeiro concedido pela CAPES (Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior), para o aprimoramento de meus conhecimentos e obtenção do título de Mestre.

E a todos que de alguma maneira contribuíram, ou estiveram na torcida pela realização deste trabalho.

E finalmente a Deus, por sempre estar presente em cada momento de minha vida, pelas graças e bênçãos por eu ter conseguido concretizar mais uma etapa da minha vida profissional.

Dedicatória

*Dedico este trabalho a toda minha
família, amigos e alunos.*

Resumo

Este trabalho tem a proposta de introduzir a teoria dos grafos na educação básica, um assunto da matemática do ensino superior que podemos aplicar no ensino fundamental de uma forma lúdica e, desta forma, levar uma contribuição para o desafio diário dos professores, que é motivar os alunos ao aprendizado. Fazemos um passeio histórico na região onde se considera o início dos estudos da teoria dos grafos, bem como seus avanços e contribuições de estudiosos ao longo dos anos. Apresentamos a definição e os elementos básicos necessários para o entendimento da teoria dos grafos. Mostramos a solução de Euler para o problema mais famosos da história da teoria dos grafos, o problema das Sete Pontes de Königsberg. Resolvemos outros problemas igualmente interessantes. E finalmente propomos atividades que possam ser aplicadas na educação básica.

Palavras-chave: pontes; problemas; grafos.

Abstract

This work has the proposal to introduce graph theory in basic education, a subject of higher education mathematics that we can apply in elementary education in a playful way and, thus, take a contribution to the challenge teachers' diary, which is to motivate students to learn. We take a walk historical in the region where the beginning of graph theory studies is considered, as well as its advances and contributions of scholars over the years. We present the definition and basic elements necessary for the understanding of the theory of graphs. We show Euler's solution to the most famous problem in the history of graph theory, the problem of the Seven Bridges of Königsberg. We solve others equally interesting problems. And finally, we propose activities that can be applied in basic education.

Key words: bridges; problems; graphs.

Sumário

Agradecimentos	iii
Dedicatória	iv
Resumo	v
Abstract	vi
1 Um pouco de História	1
1.1 A cidade	1
1.2 As pontes	3
1.3 Leonhard Euler	5
1.4 A prova de Euler para o problema das pontes	6
1.5 Os colaboradores da Teoria dos Grafos	10
2 Grafos	12
2.1 O que é um Grafo?	12
2.2 Isomorfismo	14
2.3 Subgrafo	14
2.4 Mais conceitos e definições	15
2.5 Alguns Grafos Especiais	15
2.6 Representação por Matrizes	16
2.7 Grau de um vértice	17
2.8 Grafo Conexo	18
2.9 Círculo	20
2.10 Árvore	21
2.11 Grafos Eulerianos	22
2.12 Grafo Hamiltoniano	24
2.13 Planaridade	24
2.14 Coloração de mapas	26
2.15 Mapas e grafos	27
3 Resolução de Alguns Problemas	30
3.1 Ligações Cósmicas	30
3.2 O Problema dos Cavalos no Xadrez	31
3.3 Problema da viagem	34
3.4 O problema dos telefones	34

3.5	Problemas do rei	35
3.6	Problemas das 7 ilhas	35
3.7	Problema de conexidade	36
3.8	O Problema das Pontes de Königsberg	37
3.9	Problemas Eulerianos	37
3.10	O Problema das três Casas	38
4	Sugestões de atividades para a educação básica	40
4.1	Atividade 1	41
4.2	Atividade 2	45
4.3	Atividade 3	49
	Referências Bibliográficas	53

Lista de Figuras

1.1	Kaliningrado um exclave Russo.	1
1.2	As duas ilhas de Kaliningrado.	2
1.3	Desenho das pontes de Königsberg em 1736	3
1.4	Pontes numeradas	3
1.5	Tese de Paulus Euler	5
1.6	A <i>Álgebra</i> de L. Euler.	5
1.7	Esboço de Euler do problema	7
1.8	Esboço de Euler do problema - mais simples	8
1.9	Esboço de Euler do problema - mais complicado	9
2.1	Representação gráfica de G	12
2.2	Representação gráfica H	13
2.3	Mapa do Nordeste	13
2.4	Grafo de fronteiras do Nordeste	13
2.5	Outra representação gráfica para Figura 2.1	14
2.6	Grafo G e seus subgrafos H e I	15
2.7	Grafo completo K_5	16
2.8	Grafo Vazio	16
2.9	O cubo	16
2.10	$K_{3,3}$	16
2.11	Representação gráfica de G	17
2.12	Grafo G	19
2.13	Passeio: vawjvawbxivft	19
2.14	Trilha: tfvawjvixbw	19
2.15	Caminho: wbxivhydzt	19
2.16	Grafo Conexo	20
2.17	Grafo Desconexo com três componentes	20
2.18	Trilha fechada: vawbxhxcydzgwiw	20
2.19	Ciclo: vawgzetfv	20
2.20	Cinco árvores	21
2.21	Grafo euleriano.	22
2.22	Grafo semieuleriano.	22
2.23	Grafo hamiltoniano	24
2.24	Mostrando que K_5 não é planar	25
2.25	Qualquer face pode ser colocada como face ilimitada	25
2.26	Mapa 1	26
2.27	Mapa 2	26

2.28	Mapa 3	26
2.29	Mapa 1 - colorido	27
2.30	Mapa 2 - colorido	27
2.31	Mapa 3 - colorido	27
2.32	Mapa	27
2.33	Grafo dual	27
2.34	Prova do Teorema das 5 cores	29
3.1	Grafo dos Planetas	30
3.2	Posição inicial	31
3.3	Posição final	31
3.4	Movimento do cavalo	31
3.5	Quadrados numerados	32
3.6	Grafo do tabuleiro	32
3.7	Grafo da posição inicial do tabuleiro	32
3.8	Grafo da posição final do tabuleiro	32
3.9	Tabuleiro	33
3.10	Tabuleiro em cruz numerado	33
3.11	Grafo do tabuleiro em cruz	33
3.12	Nove cidades	34
3.13	As sete ilhas	36
3.14	Sete cidades conexas	36
3.15	Pontes de Königsberg	37
3.16	Representação gráfica das pontes	37
3.17	Ilha de Tripla	38
3.18	As três casas	38
3.19	Grafo bipartido completo, $K_{3,3}$	39
3.20	Mostrando que $K_{3,3}$ não é planar	39
4.1	Exemplo de grafo	42
4.2	Mapa do metrô de Recife	42
4.3	Placa de circuito integrado	42
4.4	Percurso entre dois lugares	42
4.5	Mapa do Nordeste	43
4.6	Grafo de fronteiras do Nordeste	43
4.7	Posição inicial	44
4.8	Posição final	44
4.9	grafo euleriano	46
4.10	grafo semieuleriano	46
4.11	Pontes de Königsberg	46
4.12	Representação gráfica das pontes	46
4.13	Museu	47
4.14	Situação 1	47
4.15	Situação 2	47
4.16	desenhos	47
4.17	Pontes do Recife	48
4.18	Grafo das pontes do Recife	48

4.19	Desafio	48
4.20	Grafo planar	49
4.21	Grafo planar redesenhado	49
4.22	O cubo	50
4.23	Grafo planar do cubo	50
4.24	Grafo hamiltoniano	50
4.25	Grafo com 6 vértices	51
4.26	Grafo com 7 vértices	51
4.27	Tetraedro	51
4.28	Hexaedro	51
4.29	Octaedro	51
4.30	Dodecaedro	51
4.31	Icosaedro	51
4.32	As três casas	52

Lista de Tabelas

1.1	Esquema de Euler	9
2.1	Matriz de Incidência	17
2.2	Matriz de Adjacência	17

Introdução

Por que ensinar teoria dos grafos na educação básica? Podemos dizer que na atualidade há vários estudos sobre grafos em diversas áreas de conhecimento, biologia com abordagem sobre cadeia alimentar; na química com respeito às moléculas; na física aplicados aos resistores; no planejamento econômico, com o menor caminho percorrido ou o menor custo para uma rota no tráfego aéreo; em muitos campos da matemática como a topologia e combinatória; na engenharia com as telecomunicações e elétrica; e sem dúvida na área da computação. A teoria dos grafos nos permite apresentar um problema de forma mais lúdica e assim sendo um grande aliado do professor que pode motivar os alunos para resolução de problemas.

A teoria dos grafos surgiu com o famoso problema das pontes de Königsberg, o problema relata que habitantes de Königsberg (hoje Kaliningrado) se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Prególia, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida. O problema foi resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783), registrado oficialmente no volume de publicações da academia de Ciências de São Petersburgo, em 1736.

Outro problema bem curioso que geralmente é apresentado às crianças, é o problema das três casas que diz o seguinte: temos que ligar Luz, Água e Esgoto a três casas sem que as linhas se cruzem. Este foi o meu primeiro contato com grafos, que foi apresentado como um passatempo por um professor quando eu era criança. A primeira vez que tive contato formal com a teoria dos grafos foi em 2016 no curso do PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio), oferecido pela IMPA no período de recesso dos professores.

A principal motivação para a escolha do tema dessa dissertação, reside na importância de fazer atividades bem elaboradas, relacionadas a teoria dos grafos que possam ser utilizadas de uma forma mais pedagógica por professores do ensino fundamental.

Este trabalho está dividido em 4 capítulos. No primeiro capítulo, conhecemos um pouco da história da cidade de Königsberg e também os colaboradores que ao longo do tempo desenvolveram estudos sobre a teoria dos grafos. No capítulo 2 mostramos os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, pois ajudarão principalmente aqueles que não estão familiarizados com a forma em que se apresentam os grafos. No terceiro capítulo resolvemos vários problemas relativo aos grafos. E finalmente no último capítulo apresentamos algumas atividades para serem aplicadas no ensino fundamental.

Espera-se, que esse trabalho ajude os professores em seus planejamentos e também amplie os conhecimentos dos estudantes modelando os problemas e resolvendo-os com mais facilidade por meio da teoria dos grafos.

Capítulo 1

Um pouco de História

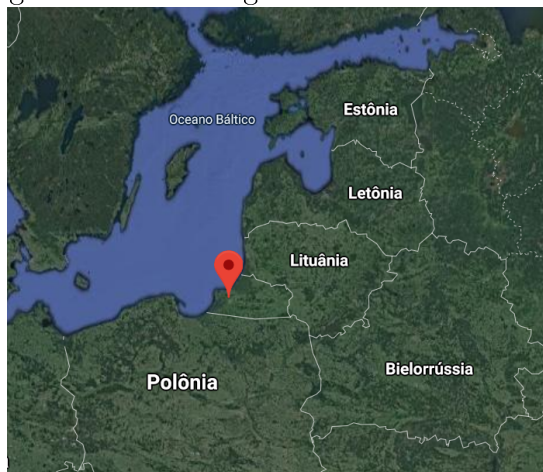
A teoria dos grafos surgiu com o famoso problema das pontes de Königsberg, o qual relata que habitantes de Königsberg (hoje Kaliningrado) se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Prególia, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida.

Neste capítulo conheceremos um pouco da história da cidade de Königsberg e também os colaboradores que ao longo do tempo desenvolveram estudos sobre a teoria dos grafos, utilizamos as seguintes referências: [5], [6], [8], [12], [13].

1.1 A cidade

A cidade mais falada pela Teoria de Grafos é Königsberg (que significa montanha do rei), foi fundada em 1255 e após a segunda guerra mundial, teve seu nome alterado em 1946 para Kaliningrado, em homenagem ao revolucionário bolchevique Mikhail Ivanovich Kalinin (1875 – 1946) que foi por muitos anos o chefe de governo formal na União Soviética. Kaliningrado é um exclave russo localizado entre a Polônia e a Lituânia (Figura 1.1), que já fez parte da Prússia Oriental. Kaliningrado está localizada perto do mar Báltico, a apenas alguns quilômetros rio acima ao longo do rio Pregel (Prególia).

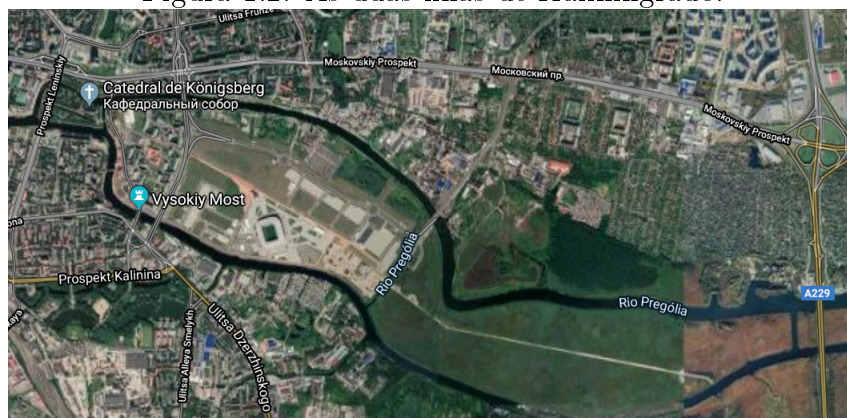
Figura 1.1: Kaliningrado um exclave Russo.



Fonte: Google maps

Na cidade de Kaliningrado se formam duas ilhas pelo rio Pregel. A Ilha de Kneiphof que é representada e mencionada pelo nome na maioria dos textos escritos sobre o problema das pontes de Königsberg. É um pouco pequena de forma quase retangular, medindo aproximadamente 400 metros na direção leste-oeste e 200 metros na direção norte-sul. A segunda ilha, chamada Lomse, é sempre apenas parcialmente representada e não identificada nas referências padrões. Como pode ser visto na Figura 1.2, é muito maior que Kneiphof. Tem aproximadamente nove quilômetros de extensão e sua largura varia de 200 metros a quase um quilômetro. É atravessada por um canal cinco quilômetros a leste de sua ponta ocidental. A maior parte da ilha é uma região pantanosa, apenas na sua parte mais ocidental que existem construções.

Figura 1.2: As duas ilhas de Kaliningrado.

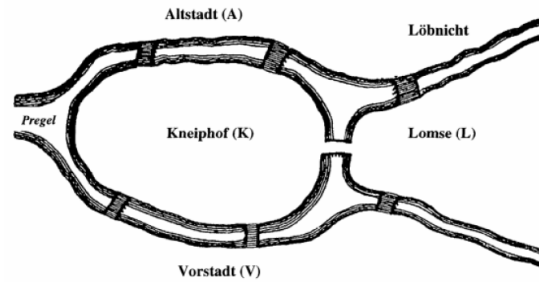


Fonte: Google maps

A história de Königsberg inicia com a construção em 1255 de um castelo que foi construído em uma colina na margem norte do rio Pregel, a cidade cresceu sob sua proteção, foi pouco a pouco sendo cercada por um muro com vários portões e ficou conhecido como Altstadt. Obteve o status de cidade em 1286. Ao leste de Altstadt, na mesma margem norte, surgiu uma segunda cidade para acomodar a população que estava em expansão. Essa nova cidade, era Löbnicht, que também foi fortificada e recebeu seu status de cidade em 1300.

Havia uma ilha, localizada ao sul de Altstadt, era ideal como porto de comércio de navios entre as cidades bálticas e as cidades de Altstadt e Löbnicht. Era Kneiphof que logo se tornou um importante mercado e se tornou uma cidade autônoma em 1327. Assim, essas três pequenas cidades estavam localizadas muito próximas umas das outras, na ilha Kneiphof e na margem norte de Pregel. Já a margem sul chamava-se Vorstadt (Figura 1.3), mas poucas pessoas moravam lá. As três cidades permaneceram separadas por quase 400 anos. Altstadt foi reconhecida por seu poder militar, Kneiphof por sua riqueza e Löbnicht por sua lama. Em 1724, as três cidades se fundiram em uma e receberam o nome de Königsberg - a Montanha Real.

Figura 1.3: Desenho das pontes de Königsberg em 1736



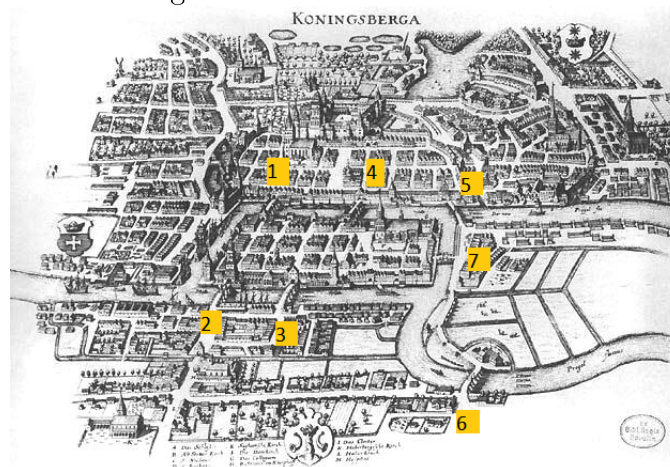
Fonte:[5]

A parte nordeste de Kneiphof era o local da Universidade de Königsberg, que foi fundada por Albrecht da Prússia (1490-1568) em 1544, sob o nome de Albertus University ou Albertina. É uma das universidades mais antigas da Europa. Em 1862, a universidade foi transferida para o centro, na antiga Altstadt. A cidade já recebeu muitos pesquisadores famosos. O mais conhecido é provavelmente o filósofo Immanuel Kant (1724-1804) que passou a vida inteira em Königsberg. Ele está enterrado em um mausoléu ao ar livre atrás da parede norte da Catedral de Königsberg em Kneiphof. A Universidade de Königsberg também foi o lar de vários cientistas conhecidos, incluindo o astrônomo Friedrich Wilhelm Bessel, os físicos Robert Gustav Kirchoff, Franz Ernst Neumann e Arnold Sommerfeldt e os matemáticos Alfred Clebsch, Ludwig Otto Hesse, David Hilbert, Karl Gustav Jakob Jacobi e Hermann Minkowski. Euler está firmemente associado a Königsberg, mas não há evidências de que ele tenha visitado a cidade.

1.2 As pontes

Fornecemos agora um relato histórico das pontes referenciadas no problema das pontes de Königsberg, pela ordem de construção conforme a Figura 1.4.

Figura 1.4: Pontes numeradas



Fonte:[8]

1. **A ponte do vendedor**

A primeira ponte de Königsberg, datada de 1286, ligava Altstadt e Kneiphof. Pertencia a cidade de Altstadt e foi erguida para facilitar o acesso ao mercado em Kneiphof. Conhecida como Krämerbrücke - a ponte do vendedor, a ponte poderia ser levantada para fornecer acesso as embarcações. Foi reconstruída em 1787 e foi novamente reconstruída em aço em 1900. Não sobreviveu a Segunda Guerra Mundial. Em seu lugar foi construída em 1972 com 546 m de comprimento e 27 m de largura um viaduto de concreto protendido por cima de Kneiphof, ligando Altstadt à Vorstadt.

2. **A ponte verde**

A segunda ponte, concluída em 1322, conectou Kneiphof à margem sul e proporcionou fácil acesso a Vorstadt e ao interior. A ponte foi chamada Grünebrücke - a ponte Verde. Foi destruída pelo fogo em 1582 e reconstruída em 1590, ainda em madeira. Permaneceu nesse estado até 1907, quando foi reconstruída em aço. Também não resistiu à Segunda guerra Mundial. Juntamente com a ponte do vendedor foi substituída pela estrada elevada.

3. **A ponte do abate** No século 14, um matadouro operava na margem sul do Pregel. A fim de facilitar o transporte de carne para as três cidades, uma nova ponte chamada Köttelbrücke - a ponte do abate, foi construída em 1377 entre a margem sul e Kneiphof. A ponte do abate foi reconstruída em aço em 1886. Não sobreviveu à Segunda Guerra mundial e não foi reconstruída.

4. **A ponte do ferreiro**

Entre 1333 e 1380, uma catedral foi construída na parte nordeste de Kneiphof. Foi isolada do resto da ilha por uma parede. Uma ponte para pedestres, chamada Dombrücke - a ponte da Igreja, foi, portanto, erguida para permitir que os decanos da catedral conectassem suas terras em Altstadt a catedral. A ponte da igreja foi demolida em 1379 e uma nova ponte, chamada Schmiedebrücke - a ponte do ferreiro, foi construída um pouco a oeste em 1397. A ponte do ferreiro começou de uma parte de Altstadt, onde muitos ferreiros tinham suas lojas. A ponte do ferreiro foi reconstruída em 1787 em madeira e em 1896 em aço. Também não sobreviveu à Segunda Guerra mundial e não foi reconstruída.

5. **A ponte de madeira**

A ilha de Lomse era usada para estocar madeira e uma nova ponte foi construída entre 1400 e 1404 para facilitar o transporte da madeira para as duas cidades da margem norte. A ponte foi nomeada Holzbrücke - a ponte da madeira. Foi mantida por 500 anos e em 1904 foi reconstruída em aço ao lado de sua antiga localização.

6. **A ponte alta**

A próxima ponte, chamada Hohebrücke - a ponte Alta, foi construída em 1506 para conectar Lomse para a margem sul. Foi reconstruída em 1882-1883,

desmontada em 1937 e reconstruída alguns metros a leste em aço e concreto em 1937-1939. As fundações da ponte original ainda podem ser visto hoje.

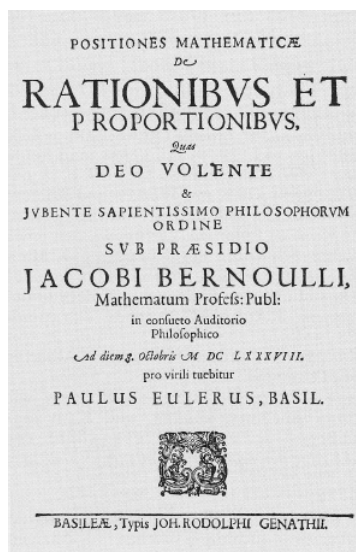
7. A ponte do mel

A sétima das pontes, conecta as duas ilhas, foi concluída em 1542. Foi construído pelos habitantes de Kneiphof que queriam acessar a margem norte sem ter que passar pelas duas pontes de Kneiphof, controladas por Altstadt. Segundo a lenda, o município de Kneiphof deu um grande barril de mel ao prefeito de Altstadt para obter permissão para construir a ponte. A ponte foi, portanto, chamada Hönigbrücke - a ponte do Mel. Foi reconstruída em aço entre 1879 e 1882. Assim, em 1542 todas as sete pontes de Königsberg considerados por Euler estavam em funcionamento.

1.3 Leonhard Euler

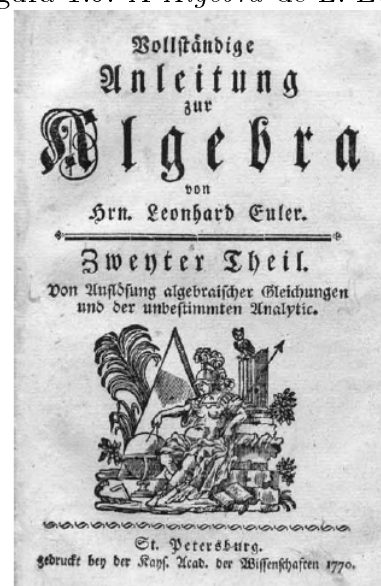
Nasceu em Basileia, na Suíça, no dia 15 de abril de 1707. Seu pai, Paulus Euler, era matemático, porém deixou a matemática para se dedicar a assuntos religiosos como um pastor calvinista, havia sido aluno da Universidade de Basileia. Sua tese de doutorado, escrita sob orientação de Jacob Bernoulli, era sobre razões e proporções (Figura 1.5). Os calvinistas eram rigorosos na sua obediência à ordem e às leis, contrastava com o comportamento de Leonhard que era uma criança prodígio e inquieta, sempre envolvida com brinquedos que permitiam satisfazer sua curiosidade sobre fenômenos físicos. Para distraí-lo de suas brincadeiras, algumas perigosas, o pai deu-lhe um livro que era uma importante introdução à álgebra e muito popular na época, o Die Coss, de Christoph Rudolff, que apresentavam questões desafiadoras. Este livro viria a ter grande influência na Álgebra de Leonhard Euler, publicada em 1770 (Figura 1.6).

Figura 1.5: Tese de Paulus Euler



Fonte: [6]

Figura 1.6: A Álgebra de L. Euler.



Fonte: [6]

Com 13 anos, entrou na Universidade de Basileia no curso de Teologia e Hebraico. Era uma idade comum para jovens brilhantes ingressarem na Universidade. Foi lá que, em contacto com matemáticos conceituados, mostrou as suas qualidades para a matemática, contrariando seu pai. Mas sempre se manteve fiel aos princípios calvinistas.

Em 1723, aos 16 anos, Euler recebeu o grau de mestre, com uma tese comparando as filosofias de Descartes e de Newton. Foi o discípulo preferido de Johann Bernoulli, irmão de Jacob Bernoulli, e muito amigo de seus filhos Nicolaus II, Daniel e Johann II. Suas primeiras publicações são de 1726, quando publicou o trabalho “Construção de curvas isócronas em um meio resistente qualquer”, no *Acta Eruditorum*. Euler apresenta uma outra versão do problema da braquistócrona, que havia sido publicado por Johann Bernoulli, em 1696. Publicou em 1727 “Reflexões sobre um problema náutico” na Academia Francesa num concurso sobre o tema da manobra dos navios. O seu trabalho não ganhou e foi criticado por ser unicamente teórico.

Euler candidatou-se à cátedra de Matemática na Universidade da Basileia, seu trabalho foi bem recebido, mas não foi nomeado. Mas os seus amigos Daniel e Nicolas Bernoulli que se tinham estabelecido em S. Petersburgo propuseram um lugar a Euler e assim, a partir de maio de 1727, aceitou uma vaga na Academia Russa de Ciências, na seção de medicina. Em 1733 os irmãos Bernoulli retornaram à Suíça e Euler transferiu-se para a seção de matemática. Com a nova função e bom salário, casou-se em 1734 com Katharina Gsell, filha de um pintor e com a qual teve 13 filhos. Com os filhos brincava e fazia experiências.

Carl Leonhard Gottlieb Ehler era prefeito de Danzig, amigo de Euler e um dos amantes da matemática. De 1735 a 1742, ele se correspondia com Euler em St. Petersburgo, atuando como intermediário entre Euler e Heinrich Kühn, um professor de matemática no ginásio acadêmico em Danzig. Através de Ehler, Kühn se comunicou com Euler sobre o Problema das pontes de Königsberg. Sua comunicação inicial não foi recuperada, mas uma carta de 9 de março de 1736 indica que eles discutiram o problema e sua relação com o ‘cálculo de posição’.

Euler resolve esse problema a partir de um esquema geométrico das pontes e lugares, onde cada ponte é uma linha e cada ponto é uma cidade. Neste desenho as linhas devem ser percorridas sem sair do traçado e sem passar duas vezes sobre a mesma linha. Euler chegou a conclusão de que era impossível realizar a façanha proposta. A solução do problema das pontes de Königsberg foi publicada com o título deste artigo traduzido para o português como: “A solução de um problema relacionado com a geometria da posição.” Este artigo é hoje considerado o primeiro em teoria dos grafos.

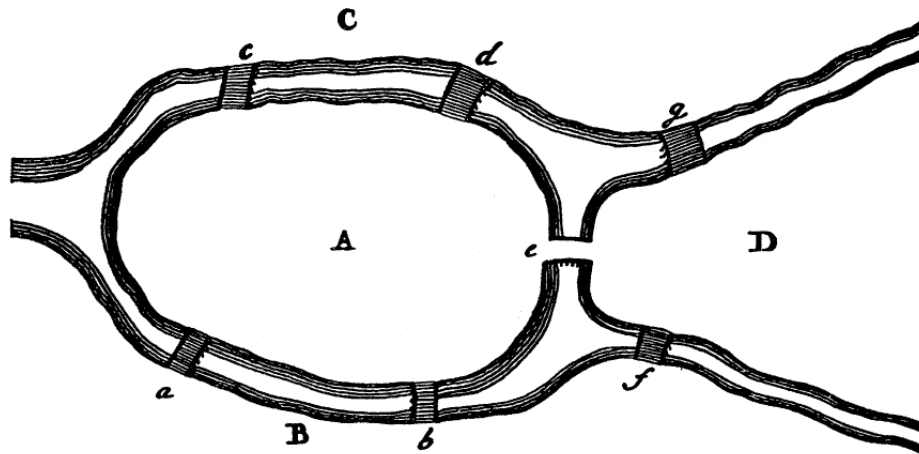
1.4 A prova de Euler para o problema das pontes

Em 26 de agosto de 1735, Euler apresenta um documento a seus colegas da Academia de Ciências de São Petersburgo, contendo a solução para o problema da ponte de Königsberg. Ele aborda este problema específico, bem como uma solução geral com qualquer número de regiões de terra e qualquer número de pontes. Em 1736, Euler escreveu sua solução em seu artigo no *Commentarii Academiae Scien-*

tiarum Imperialis Petropolitanae sob o título ‘Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis’. O artigo de Euler está dividido em vinte e um parágrafos.

Inicialmente, Euler forneceu um esboço do problema (Figura 1.7) e chamou as sete pontes distintas: a, b, c, d, e, f e g. “Alguém pode descobrir se é ou não possível cruzar cada ponte exatamente uma vez?”

Figura 1.7: Esboço de Euler do problema



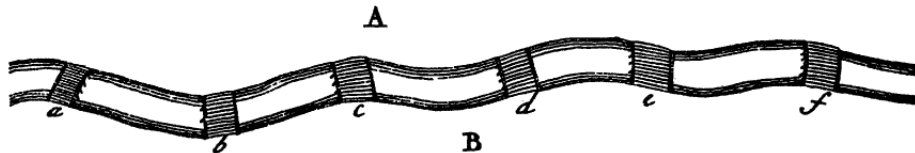
Fonte:[8]

Euler começa a explorar diferentes métodos de encontrar uma solução. Para resolver esse problema específico, ele poderia anotar todos os caminhos possíveis, mas essa técnica levaria muito tempo e não funcionaria para configurações maiores com mais pontes e regiões de terra. Ele começa a simplificar o problema inventando um sistema conveniente para representar a travessia de uma ponte, em vez de usar as letras minúsculas para representar o cruzamento de uma ponte, ele escreveria as letras maiúsculas representando as regiões de terra. Por exemplo, na (Figura 1.7) , **AB** significaria uma jornada que começou na região de terra **A** e terminou em **B**. Além disso, se após viajar da região de terra **A** para **B**, alguém decidir se mudar para a região de terra **D**, isso seria simplesmente denotado, **ABD**. Euler continua sua discussão sobre este processo explicando que na **ABDC**, embora haja quatro letras maiúsculas, apenas três pontes foram cruzadas. Euler explica que não importa quantas pontes existam, haverá mais uma letra para representar a travessia necessária. Por causa disso, todo o problema da ponte de Königsberg exigiu que sete pontes fossem cruzadas e, portanto, oito letras maiúsculas. Se houver mais de uma ponte que pode ser cruzada ao passar de uma região de terra para outra, não importa qual ponte será usada. Por exemplo, embora existam duas pontes, *a* e *b*, que podem levar um viajante de **A** a **B**, não importa para a notação de Euler qual ponte é tomada. Usando sua figura original, o problema de Königsberg precisa de exatamente oito letras, onde o par **AB** (ou **BA**) deve aparecer duas vezes, pois há duas pontes entre as regiões **A** e **B**. Analogamente o par **AC** (ou **CA**) apareceria duas vezes. Além disso, os pares **AD** (ou **DA**), **BD** (ou **DB**) e **CD** (ou **DC**) devem aparecer exatamente uma vez para que um caminho que cruze cada ponte apenas uma vez exista.

Assim, ele precisa encontrar uma sequência de oito letras que satisfaça o pro-

blema, ou ele precisa provar que essa sequência não existe. Antes de fazer isso para o problema da ponte de Königsberg, ele decide encontrar uma regra para descobrir se existe um caminho para um problema mais geral. Para um exemplos muito mais simples, Euler desenha a Figura 1.8, e afirma que se a ponte **a** for percorrida uma vez, **A** foi onde a jornada começou ou terminou e, portanto, foi usada apenas uma vez.

Figura 1.8: Esboço de Euler do problema - mais simples



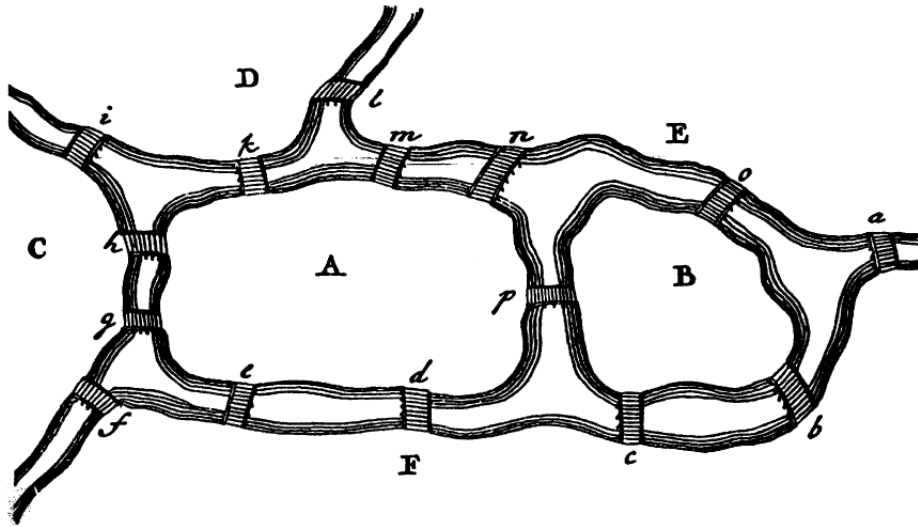
Fonte:[8]

Se as pontes *a*, *b* e *c* forem todas percorridas uma vez, **A** é usado exatamente duas vezes, não importa se é o ponto de partida ou de chegada. Da mesma forma, se cinco pontes levam a **A**, a região de terra **A** ocorreria exatamente três vezes na jornada. Euler afirma que, se houver um número *k* ímpar de pontes conectando **A** a outras regiões de terra, adicione um ao número de pontes e divida por dois, $(k + 1)/2$, para descobrir quantas vezes no total **A** deve ser usado no caminho, onde cada ponte é usado apenas uma vez.

Euler continua sua prova para lidar com uma outra situação, em que uma região tem um número par de pontes anexadas a ela. Esta situação não aparece no problema de Königsberg. Na situação com região de terra X com número $k = 2$ de pontes, podem ocorrer dois casos. O primeiro caso é quando X é o ponto de partida da viagem. Nesse caso, X aparecerá duas vezes, uma como ponto inicial e novamente como ponto final. No outro caso, X não é o ponto de partida. Se isso acontecesse, X só apareceria uma vez, pois a jornada teria que entrar por uma ponte e sair imediatamente pela única outra disponível. Da mesma forma, se houver quatro pontes anexadas a X, o número de repetições de X depende se é ou não um ponto de partida. Se a jornada começa em X, deve aparecer três vezes, mas se não começar em X, só aparecerá duas vezes. Portanto, em geral, se X tiver um número par de pontes anexadas, e se a jornada não começar em X, X aparecerá metade do número de vezes como pontes (ou seja, o número de repetições de X onde X é par e não é ponto de partida = $k / 2$). Se a viagem começar em X, então X aparecerá a metade do número de vezes como pontes, mais um (isto é, o número de repetições de X onde X é par e ponto de partida = $(k / 2) + 1$).

Para ilustrar o método Euler construiu um exemplo com duas ilhas, quatro rios e quinze pontes (Figura 1.9).

Figura 1.9: Esboço de Euler do problema - mais complicado



Fonte:[8]

Euler agora tenta descobrir se há um caminho que permite a alguém passar por cada ponte uma vez e apenas uma vez. Euler segue os mesmos passos acima, nomeando as cinco regiões diferentes com letras maiúsculas e cria uma tabela para verificar se é possível, como a seguir:

Tabela 1.1: Esquema de Euler

Região	A*	B*	C*	D	E	F*
Pontes	8	4	4	3	5	6
Nº de repetições da região na sequência	4	2	2	2	3	3

Fonte: o autor

As repetições das regiões em um caminho possível são determinadas pelas regras para números pares e ímpares de pontes, desenvolvidos acima. Uma vez que pode haver apenas um região inicial, ele registra $k/2$ para as regiões marcadas com asterisco que corresponde a um número par de pontes. Se a soma das repetições das letras for um a menos do que o número necessário de letras, há um caminho usando cada ponte exatamente uma vez que começa em uma região marcada com asterisco. Se a soma das ocorrências for igual ao número necessário de letras, há um caminho que começa em uma região não marcada. Esta última possibilidade é o caso aqui: a soma das ocorrências é 16, exatamente o número de letras necessárias para um caminho usando 15 pontes. Euler exibiu um caminho específico, incluindo as pontes:

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD$$

Como no problema original, há cinco pontes que levam à **A**, isso deve ocorrer três vezes, veja na (Figura 1.7). Da mesma forma, **B**, **C** e **D** devem aparecer duas vezes, pois todos eles têm três pontes que levam a eles. Portanto, 3 (para **A**) + 2 (para **B**) + 2 (para **C**) + 2 (para **D**) = 9, mas Euler já afirmou que deve haver apenas oito ocorrências para as sete pontes. Isso é uma contradição! Portanto, é impossível percorrer as pontes da cidade de Königsberg uma vez e apenas uma vez.

Podemos esquematizar o método proposto por Euler para decidir se existe ou não solução, seguindo as seguintes passos:

1. designar as diferentes regiões de terra por letras, A, B, C, D, ...;
2. tomar o número total de pontes, aumentá-lo de uma unidade e escrever o valor resultante na parte superior do papel;
3. escrever as letras das regiões numa linha e em abaixo de cada letra o número de pontes que conduzem a cada região particular;
4. colocar um asterisco junto de cada letra que corresponde um número par;
5. numa terceira linha colocar à frente de cada número par a sua metade e, à frente de cada número ímpar a metade da soma desse número com uma unidade;
6. somar os números da terceira linha.

Se a soma obtida no 6º passo é superior ao número anotado no 2º passo então não existe o trajeto pretendido. Se a soma é igual ao número anotado então existe o trajeto mas deve começar numa região que não tenha asterisco. Se a soma é uma unidade menor que o número anotado então existe o trajeto mas deve começar numa região que tenha asterisco.

1.5 Os colaboradores da Teoria dos Grafos

A teoria dos grafos foi estudada separadamente por várias áreas com problemas do interesse diversos, mas mostraram características semelhantes. Vejamos alguns fatos importantes na teoria dos grafos que ocorreram ao longo do tempo:

- 1736 - A publicação do artigo de Euler com a solução para o Problema das Pontes de Königsberg;
- 1847 - Gustav Robert Kirchhoff utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos, criando assim a teoria das árvores, para caracterizar conjuntos de ciclos independentes;
- 1857 - Arthur Cayley destacava a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, que têm estrutura de árvore, nos estudos de química orgânica;
- 1859 - Sir Wilian Hamilton inventou um jogo que consistia na busca de um percurso fechado envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez;
- 1869 - Marie Ennemond Camille Jordan se ocupou em estudar árvores, de um ponto de vista mais matemático;

- 1852 - A “conjectura das 4 cores” é apresentada por Francis Guthrie e Augustus De Morgan. Este problema, um dos mais importantes já abordados pela teoria dos grafos, oferece interesse apenas teórico: trata-se de provar que todo mapa desenhado no plano e dividido em um número qualquer de regiões pode ser colorido com um máximo de 4 cores, sem que duas regiões fronteiriças recebam a mesma cor;
- 1879 - Alfred Bray Kempe teve uma tentativa de demonstração da conjectura das 4 cores que não obteve sucesso;
- 1880 - Tait divulgou também uma prova da conjectura das 4 cores, infelizmente baseada em uma conjectura falsa;
- 1890 - Percy John Heawood mostrou que a “prova” de Kempe da conjectura das 4 cores estava errada e publicou uma prova válida para 5 cores;
- 1912 - David Birkhoff definiu os polinômios cromáticos;
- 1926 - Karl Menger demonstrou um importante teorema sobre o problema da desconexão de itinerários em grafos;
- 1930 - Kazimierz Kuratowski encontrou uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo;
- 1931 - Hassler Whitney criou a noção de grafo dual;
- 1941 - Rowland Leonard Brooks enunciou um teorema fornecendo um limite para o número cromático de um grafo. A teoria da coloração em grafos tem atualmente enorme importância na abordagem dos problemas de horários;
- 1941 - Pál Turán foi o pioneiro do ramo conhecido como teoria extremal de grafos;
- 1947 - William Thomas Tutte resolveu o problema da existência de uma cobertura minimal em um grafo;
- 1956 - Lester Randolph Ford Jr e Delbert Ray Fulkerson enunciou o algoritmo conhecido como Ford-Fulkerson, que é empregado para encontrar um fluxo de valor máximo de rede;
- 1957 - Claude Berge um dos fundadores da moderna teoria dos grafos, é conhecido pela conjectura do grafo perfeito;
- 1962 - Øystein Ore fornece uma condição suficiente para um grafo ser Hamiltoniano, afirmando que um grafo com “quantidade de arestas suficiente” deve conter um ciclo de Hamilton.
- 1980 - Reviews on Graph Theory publica referências sobre grafos que contém 4 volumes de resumos de trabalhos publicados.

O desenvolvimento dos computadores levou à publicação de várias obras dedicadas aos algoritmos de grafos, abrindo assim possibilidades crescentes de utilização da teoria.

Capítulo 2

Grafos

Neste capítulo serão estudados os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, pois ajudarão principalmente aqueles que não estão familiarizados com a forma em que se apresentam os grafos. Aqui apresentaremos definições que serão necessárias aos próximos capítulos e utilizaremos as seguintes referências: [1], [9], [10].

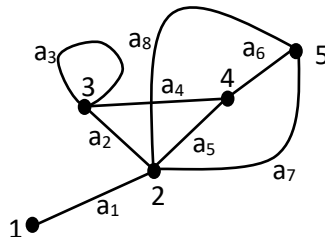
2.1 O que é um Grafo?

Podemos dizer informalmente que um grafo é um conjunto finito não-vazio de vértices (ou nós) e um conjunto finito de arestas (ou arcos) tais que cada aresta conecta dois vértices. Ou ainda uma definição mais formal como segue abaixo.

Definição 2.1 Um grafo G é uma tripla ordenada $(V(G), A(G), \psi_G)$ constituída por conjunto não vazio $V(G)$ de vértices, um conjunto $A(G)$ de arestas e uma função de incidência ψ_G que se associa a cada aresta de G um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G . Se a é uma aresta e u e v são vértices tais que $\psi_G(a) = \{u; v\}$, então diz-se que a une u e v . Os vértices u e v são a extremidades de a .

Exemplo 2.1 Seja $G = (V(G), A(G), \psi_G)$ onde $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ e ψ_G é definido por $\psi_G(a_1) = \{1; 2\}$, $\psi_G(a_2) = \{2; 3\}$, $\psi_G(a_3) = \{3; 3\}$, $\psi_G(a_4) = \{3; 4\}$, $\psi_G(a_5) = \{2; 4\}$, $\psi_G(a_6) = \{4; 5\}$, $\psi_G(a_7) = \{2; 5\}$, $\psi_G(a_8) = \{2; 5\}$.

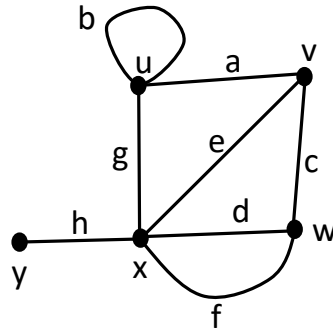
Figura 2.1: Representação gráfica de G



Fonte: o autor

Exemplo 2.2 Seja $H = (V(H), A(H), \psi_H)$ onde $V(H) = \{u, v, w, x, y\}$, $A(H) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e ψ_H é definido por $\psi_H(a) = \{u; v\}$, $\psi_H(b) = \{u; u\}$, $\psi_H(c) = \{v; w\}$, $\psi_H(d) = \{w; x\}$, $\psi_H(e) = \{v; x\}$, $\psi_H(f) = \{w; x\}$, $\psi_H(g) = \{u; x\}$, $\psi_H(h) = \{x; y\}$.

Figura 2.2: Representação gráfica H



Fonte: o autor

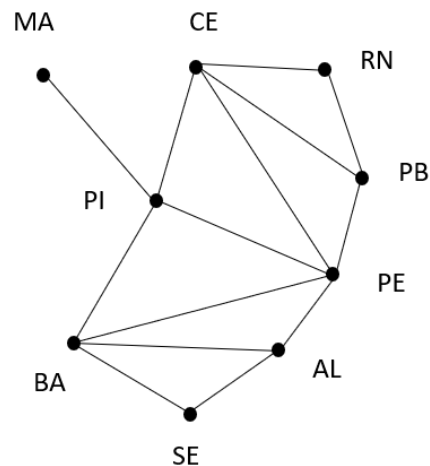
Exemplo 2.3 Pensando no mapa do nordeste do Brasil, podemos relacionar um estado com todos os outros estados com quem ele faz fronteira. A partir da Figura 2.3 conseguimos elaborar o grafo da Figura 2.4

Figura 2.3: Mapa do Nordeste



Fonte:

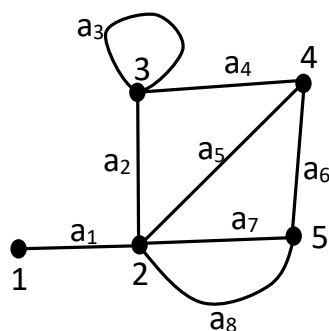
Figura 2.4: Grafo de fronteiras do Nordeste



Fonte: o autor

Não existe uma única maneira de desenhar um grafo, vejamos uma outra representação gráfica para o exemplo 1.1.

Figura 2.5: Outra representação gráfica para Figura 2.1



Fonte: o autor

As representações gráficas das Figuras 2.2 e 2.5 são aparentemente iguais. Os grafos são iguais? Para responder isso precisamos conhecer grafos isomorfos.

2.2 Isomorfismo

Definição 2.2 *Dois grafos G e H são iguais ($G = H$) se $V(G) = V(H)$, $A(G) = A(H)$ e $\psi_G = \psi_H$.*

Se dois grafos são iguais, eles podem claramente ser representado por diagramas iguais. Porém, também é possível para grafos que não são iguais terem essencialmente o mesmo diagrama. Por exemplo, o diagrama de G na Figura 2.5 e H na Figura 2.2 têm a mesma aparência, com a exceção que seus vértices e arestas têm rótulos diferentes. Os grafos G e H não são iguais, mas isomórficos.

Definição 2.3 *Dois grafos G e H são isomorfos ($G \cong H$) se houver bijeções $f : V(G) \rightarrow V(H)$ e $t : A(G) \rightarrow A(H)$ tais que $\psi_G(a) = \{u; v\}$ se e somente se $\psi_H(t(a)) = \{f(u); f(v)\}$; esse par (f, t) é chamado de isomorfismo entre G e H .*

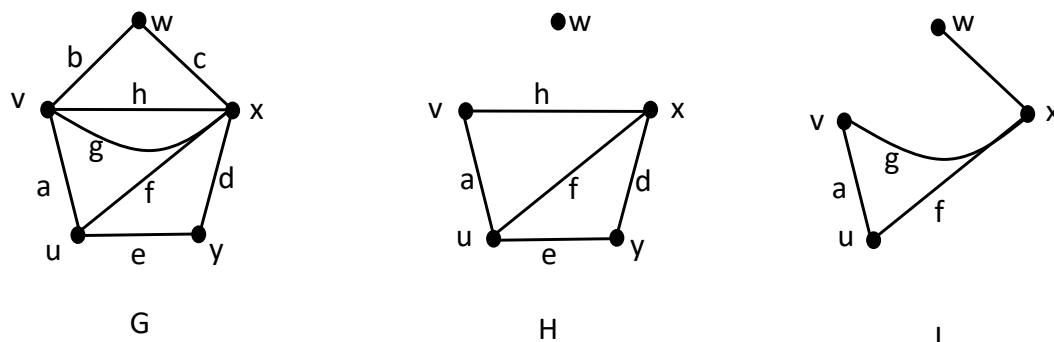
2.3 Subgrafo

Um subgrafo é um grafo que consiste em um conjunto de vértices e um conjunto de arestas que são subconjuntos do conjunto original. De um modo mais formal temos:

Definição 2.4 *Um grafo H é um subgrafo de G (se escreve $H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $A(H) \subseteq A(G)$, e ψ_H é a restrição de ψ_G para $A(H)$. Quando $H \subseteq G$ mas $H \neq G$, se escreve $H \subset G$ e H é chamado de um subgrafo próprio de G . H é um subgrafo de G , G é um supergrafo de H .*

Exemplo 2.4 *A Figura 2.6 mostra um grafo e dois de seus subgrafos.*

Figura 2.6: Grafo G e seus subgrafos H e I



Fonte: o autor

2.4 Mais conceitos e definições

Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são **adjacentes** e que a aresta é incidente aos vértices. Note que na Figura 2.1 a aresta a_1 incide em 1 e em 2, logo os vértices 1 e 2 são adjacentes. Quando temos uma aresta sendo ligada a um mesmo vértice, esta é denominada de **laço**. Na Figura 2.2 a aresta b está ligada ao mesmo vértice u . Os grafos que possuem arestas múltiplas, ou seja, várias arestas incidindo no mesmo par de vértices, são chamados de **multigrafos**. Também na Figura 2.2 observamos que duas arestas diferentes d e f incidem no mesmo par de vértices x e w .

Usamos os símbolos $\nu(G)$ e $\varepsilon(G)$ para denotar o número de vértices e arestas no grafo G . Quando apenas um grafo está em discussão, geralmente denotamos isso por G . Omitimos então a letra G dos símbolos teóricos dos grafos e escrevemos, por exemplo, V , A , ν e ε em vez de $V(G)$, $A(G)$, $\nu(G)$ e $\varepsilon(G)$.

Um grafo é **finito** se o conjunto de vértices e o conjunto de arestas forem finitos. Aqui estudamos apenas grafos finitos e, portanto, o termo "grafo" sempre significa "grafo finito". Chamamos um grafo com apenas um vértice de **trivial** e todos os outros grafos de **não trivial**.

Um grafo é **simples** se não tiver laços e nem possuir arestas múltiplas.

2.5 Alguns Grafos Especiais

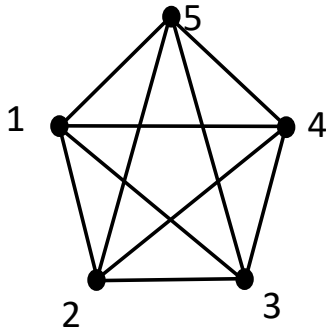
Um grafo simples no qual cada par de vértices distintos é unido por uma aresta é chamado de **grafo completo**. Um **grafo completo** com n vértices, é indicado por K_n . Um desenho de K_5 é mostrado na Figura 2.7. Por outro lado, um grafo é dito **vazio**, quando não possui arestas, Figura 2.8.

Um **grafo bipartido** é aquele cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos T e Z , para que cada aresta tenha uma extremidade em T e uma extremidade em Z ; essa partição (T, Z) é chamada de bipartição do grafo.

Um **grafo bipartido completo** é um grafo bipartido com bipartição (T, Z) em que cada vértice de T é unido a cada vértice de Z ; se $|T| = m$ e $|Z| = n$, esse grafo

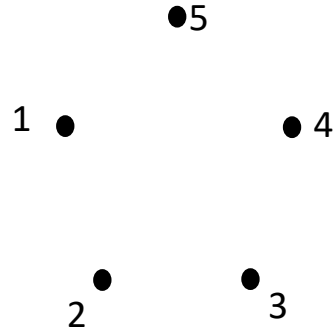
é indicado por $K_{m,n}$. O grafo definido pelos vértices e arestas de um cubo Figura 2.9 é bipartido; o grafo na Figura 2.10 é o gráfico bipartido completo $K_{3,3}$.

Figura 2.7: Grafo completo K_5



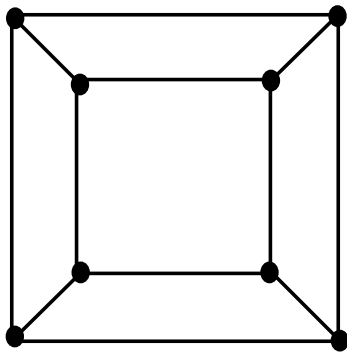
Fonte: o autor

Figura 2.8: Grafo Vazio



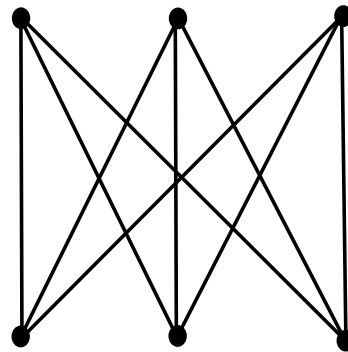
Fonte: o autor

Figura 2.9: O cubo



Fonte: o autor

Figura 2.10: $K_{3,3}$



Fonte: o autor

2.6 Representação por Matrizes

Qualquer gráfico G corresponde uma matriz $\nu \times \varepsilon$ chamada matriz de incidência de G . Vamos denotar os vértices de G por v_1, v_2, \dots, v_ν e as arestas por $a_1, a_2, \dots, a_\varepsilon$. Então a **matriz de incidência** de G é a matriz $\mathbf{M}(G) = [m_{i,j}]$, onde $m_{i,j}$ é o número de vezes (0, 1 ou 2) que v_i e a_j são incidentes. A matriz de incidência de um grafo é apenas uma maneira diferente de especificar o grafo. Outra matriz associada a G é a **matriz de adjacência**; este é o $\nu \times \nu$ é a matriz $\mathbf{A}(G) = [a_{ij}]$, em que a_{ij} é o número de arestas que unem v_i e v_j . Para nosso grafo G da Figura 2.5, sua matriz de incidência e sua matriz de adjacência são mostradas nas Tabelas 2.1 e 2.2.

Tabela 2.1: Matriz de Incidência

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1	0	1	1
3	0	1	2	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	1	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	1

Fonte: o autor

Tabela 2.2: Matriz de Adjacência

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	1	1	2
3	0	1	1	1	0
4	0	1	1	0	1
5	0	2	0	1	0

Fonte: o autor

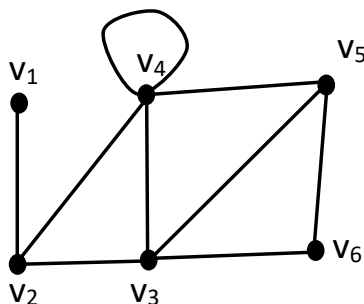
É dessa forma que os grafos são geralmente armazenados em computadores. A matriz de adjacência de um grafo é geralmente menor que sua matriz de incidência.

2.7 Grau de um vértice

Definição 2.5 O grau $d_G(v)$ de um vértice v em G é o número de arestas de G incidentes em v , cada laço é contando como duas arestas. Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ os graus mínimo e máximo, respectivamente, dos vértices de G . Se o grafo G estiver explícito no contexto, usaremos apenas $d(v)$ ao invés de $d_G(v)$.

Na Figura 2.11, temos $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 4$, $d(v_4) = 5$, $d(v_5) = 3$, $d(v_6) = 2$, logo $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 5$.

Figura 2.11: Representação gráfica de G



Fonte: o autor

Teorema 2.1 Para todo grafo G , a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

Demonstração: Cada aresta possui 2(duas) extremidades, assim ela contribui com 2(duas) unidades para a soma dos graus dos vértices. Logo a soma total é duas vezes o número de arestas. ■

Tomando como exemplo a Figura 2.11 temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 1 + 3 + 4 + 5 + 3 + 2 = 18$$

Logo,

$$2\varepsilon = 18 \Rightarrow \varepsilon = 9.$$

Corolário 2.1 Em qualquer grafo G , a soma dos graus de seus vértices é par.

Demonstração: De fato, pois como $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$, e 2ε é sempre par. ■

Corolário 2.2 Em qualquer grafo G , o número de vértices de grau ímpar é par.

Demonstração: Sejam V_P e V_I , o conjunto de vértices de graus par e ímpar de um grafo G respectivamente. Como $V = V_P \cup V_I$ e $V_P \cap V_I = \emptyset$, além disso sabemos que

$$2\varepsilon = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_P \cup V_I} d(v) = \sum_{v \in V_P} d(v) + \sum_{v \in V_I} d(v).$$

Logo o número de vértice de grau ímpar é par. ■

Um grafo é dito **grafo regular** se todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Em particular, um grafo G é k -regular se $d(v) = k$ para todos os $v \in V$. Grafos completos, grafos bipartidos completos $K_{n,n}$ são regulares.

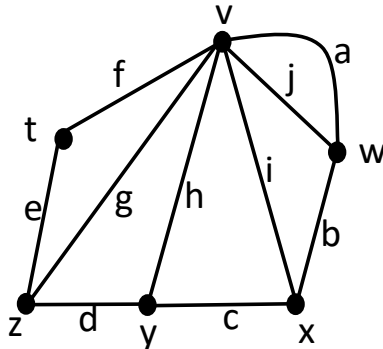
2.8 Grafo Conexo

Um **passeio** em G é uma sequência finita e não vazia $P = v_0 a_1 v_1 a_2 \dots a_s v_s$, cujos elementos são alternadamente vértices e arestas de tal modo que, para todo $i, 1 \leq i \leq s$, as extremidades de a_i são v_{i-1} e v_i . Dizemos que P é um passeio que conecta v_0 a v_s . O **comprimento** de P é dado pelo número de arestas que o compõem, isto é, o número inteiro s .

Se as arestas a_1, a_2, \dots, a_s de um passeio são distintas, chamamos P de **trilha**. Se, além disso, os vértices v_0, v_1, \dots, v_s são distintos, P é chamado de **caminho**. As

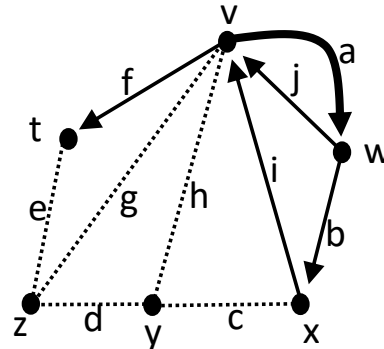
figuras ilustram um passeio (Figura 2.13), uma trilha (Figura 2.14) e um caminho (Figura 2.15) em um grafo (Figura 2.12).

Figura 2.12: Grafo G



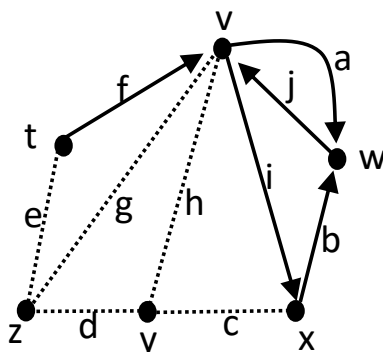
Fonte: o autor

Figura 2.13: Passeio: $vawjvawbxivft$



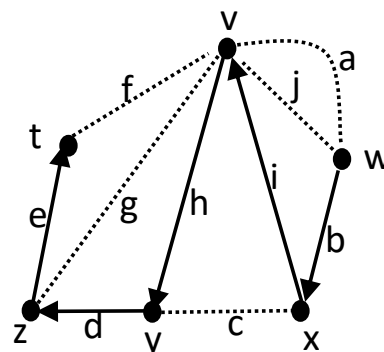
Fonte: o autor

Figura 2.14: Trilha: $tfvawjvixbw$



Fonte: o autor

Figura 2.15: Caminho: $wbxivhydzet$

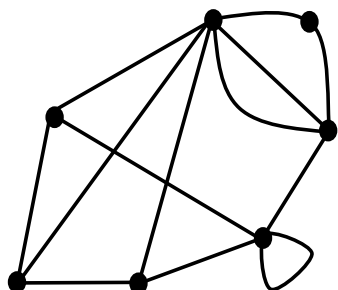


Fonte: o autor

Observe que num passeio pode haver repetições de vértices e arestas, numa trilha pode haver repetições apenas dos vértices e num caminho não deve haver repetições de vértices e arestas.

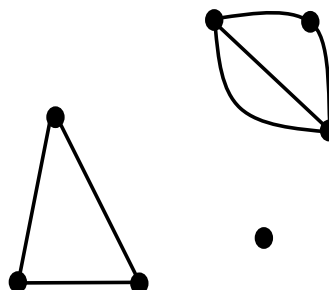
Dizemos que um grafo G é conexo se houver um caminho que conecta u a v em G para quaisquer dois vértices u e v . Conexão é uma relação de equivalência no conjunto de vértices V . Logo, existe uma partição de V em subconjuntos não vazios V_1, V_2, \dots, V_w , de modo que dois vértices u e v estão conectados se e somente se u e v pertencem ao mesmo conjunto V_i . Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ são chamados de componentes de G . Se G tem exatamente um componente, G é conexo; caso contrário, G é desconexo. Nas Figuras 2.16 e 2.17 estão representados exemplos de grafos conexo e desconexo.

Figura 2.16: Grafo Conexo



Fonte: o autor

Figura 2.17: Grafo Desconexo com três componentes

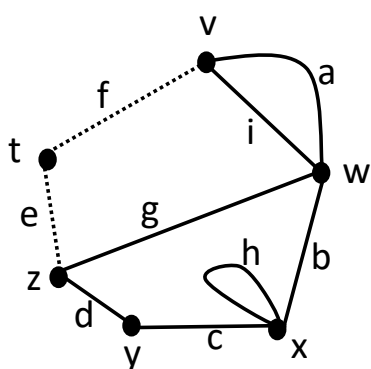


Fonte: o autor

2.9 Ciclo

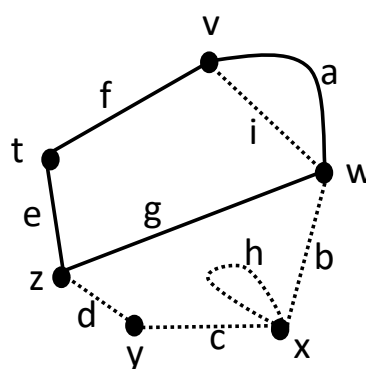
Um **ciclo** é um caminho fechado em que o vértice de origem coincide com o vértice final. Assim como nos caminhos, às vezes usamos o termo ‘ciclo’ para denotar um grafo correspondente a um ciclo. Um ciclo de comprimento k é chamado de k -ciclo; um k -ciclo é ímpar ou par depende do k ser ímpar ou par. Um 3-ciclo é frequentemente chamado de triângulo. Exemplos de uma trilha fechada e um ciclo são dados nas Figuras 2.18 e 2.19.

Figura 2.18: Trilha fechada: vawbxhxcydzgwiv



Fonte: o autor

Figura 2.19: Ciclo: vawgzetfv



Fonte: o autor

Usando o conceito de ciclo, agora podemos apresentar uma caracterização de grafos bipartidos.

Teorema 2.2 *Um grafo é bipartido se e somente se não contiver um ciclo ímpar.*

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que G é bipartido com bipartição (T, Z) e seja $C = v_0v_1\dots v_s v_0$ um ciclo de G . Sem perda de generalidade, podemos assumir que $v_0 \in T$. Então, como $v_0v_1 \in A(G)$ e G é bipartido, $v_1 \in Z$. Da mesma forma, $v_2 \in T$ e, em geral, $v_{2i} \in T$ e $v_{2i+1} \in Z$. Assim $v_0 \in T, v_s \in Z$. Portanto, $s = 2i + 1$, para algum inteiro i , e segue-se que C é par.

(\Leftarrow) Seja G um grafo conectado que não contém ciclos ímpares. Escolhemos um vértice arbitrário u e definamos uma partição (T, Z) de $V(G)$, da seguinte forma:

$$T = \{t \in V(G) \mid d(u, t) \text{ é par}\}$$

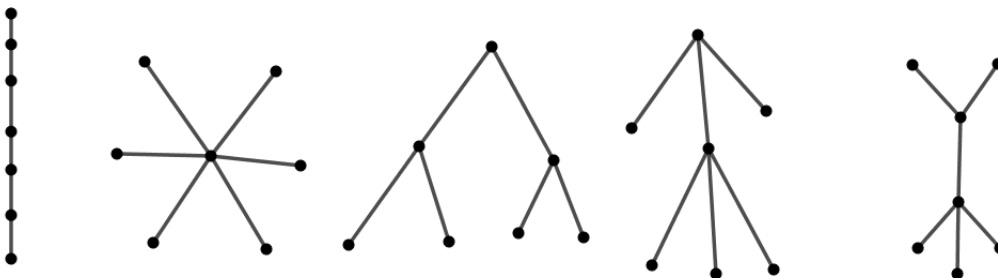
$$Z = \{z \in V(G) \mid d(u, z) \text{ é ímpar}\}$$

em que $d(u, v)$ é o comprimento de menor caminho entre u e v de G . Queremos mostrar que (T, Z) é uma bipartição de G . Suponha que v e w sejam dois vértices de T . Seja P o menor caminho que conecta u a v e Q o menor o menor caminho que conecta u a w . Seja u_1 o último vértice comum a P e Q . Como P e Q são os caminhos mais curtos, as seções que conectam u a u_1 de P e Q são os mais curtos caminhos que conectam u a u_1 e, portanto, têm o mesmo comprimento. Agora, já que os comprimentos de P e Q são pares, os comprimentos da seção P_1 que conecta u_1 a v de P e da seção Q_1 que conecta u_1 a w de Q deve ter a mesma paridade. Seja P_1^{-1} a seção que conecta v a u_1 , assim resulta que o caminho $P_1^{-1}Q_1$ que conecta v a w é de comprimento par. Se v e w fossem adjacentes, $P_1^{-1}Q_1 + \{w; v\}$ seria um ciclo de comprimento ímpar, contradizendo a hipótese. Portanto, não há dois vértices em T que sejam adjacentes. Da mesma forma, não existem dois vértices em Z adjacentes. ■

2.10 Árvore

Um grafo G é chamado de **árvore** se é conexo e não contém ciclos. Uma árvore é trivial quando tem um nó e não tem arestas. A Figura 2.20 mostra uma variedade de outras árvores.

Figura 2.20: Cinco árvores



Fonte: o autor

Teorema 2.3 *Em uma árvore, quaisquer dois vértices são conectados por um caminho único.*

Demonstração: Prova por contradição. Seja G uma árvore e admita que existam dois caminhos distintos P_1 e P_2 conectando u e v em G . Como P_1 é diferente P_2 , existe uma aresta $e = \{x; y\}$ de P_1 que não é uma aresta de P_2 . Claramente, o grafo $(P_1 \cup P_2)$ retirando a aresta e está conectado. Isto portanto, contém um caminho P que conecta x a y . Mas então se colocarmos a aresta e de volta no caminho P formarão um ciclo no grafo acíclico G , uma contradição. ■

Teorema 2.4 *Se G é uma árvore, então $\varepsilon = \nu - 1$*

Demonstração: Pela definição de árvore, G não contém ciclos. Portanto, a retirada de uma aresta $\{u; v\}$ separa u de v e o grafo é separado em um par de árvores G' e G'' com ν' e ν'' vértices, respectivamente, tais que $\nu = \nu' + \nu''$. Assim, em G' temos $\varepsilon' = \nu' - 1$ e em G'' temos $\varepsilon'' = \nu'' - 1$. Acrescentando a aresta $\{u; v\}$, concluímos que em G , temos

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'' + 1 = (\nu' - 1) + (\nu'' - 1) + 1 = \nu' + \nu'' - 1 = \nu - 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.5 *Toda árvore não trivial, possui pelo menos dois nós de grau 1.*

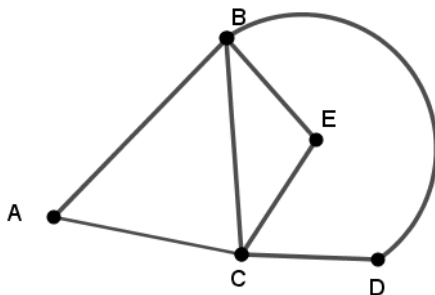
Demonstração: Seja G uma árvore não trivial, logo $d(v) \geq 1$. Além disso, pelo Teorema 2.1, sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$ e pelo Teorema 2.4, que $\varepsilon = \nu - 1$, temos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2(\nu - 1) = 2\nu - 2$. Segue-se agora que $d(v) = 1$ para pelo menos dois vértices v . ■

2.11 Grafos Eulerianos

Um passeio que passa exatamente uma vez em cada uma das arestas de G é chamada de **trilha euleriana**. Um grafo é dito **euleriano** se contiver uma trilha euleriana fechada, ou seja, se podermos percorrer cada aresta uma e só uma vez partindo de um vértice e a ele retornando. Se um grafo tem uma trilha euleriana aberta é chamada de **semieuleriano**.

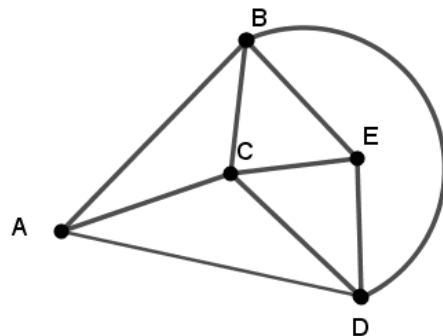
Na Figura 2.21, o grafo é euleriano e a trilha pode ser (ABCEBDCA). Na Figura 2.22, o grafo é simieuleriano e a trilha pode ser (ABCEBDACDE).

Figura 2.21: Grafo euleriano.



Fonte: o autor

Figura 2.22: Grafo semieuleriano.



Fonte: o autor

Lema 2.1 *Se todo vértice de um grafo G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Demonstração: Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Assim, seja G um grafo tal que $d(v) \geq 2$, para todo vértice v e suponhamos então que G seja um grafo simples. Fixemos um vértice v_0 e a partir de v_0 iniciemos uma trilha, escolhemos v_1 um vértice qualquer adjacente a v_0 , e assim, para cada $i \geq 1$, escolhemos v_{i+1} algum vértice diferente de v_{i-1} adjacente a v_i . Sabemos que esse vértice existe pois por hipótese cada vértice é extremo de no mínimo, duas arestas. Portanto em algum momento escolheremos um vértice v_s já escolhido anteriormente, pois G tem um número finito de vértices e assim formaremos um ciclo. ■

Teorema 2.6 (Teorema de Euler) *Um grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

Demonstração: (\Rightarrow) Um grafo G é euleriano, então contém uma trilha euleriana fechada de tamanho m com origem e término em v , logo $d(v)$ é par. Toda vez que se passa por um vértice interno u duas arestas incidentes são contabilizadas, assim o $d(u)$ é par. Como uma trilha euleriana percorre todas as arestas de G apenas uma vez, $d(u)$ é par para todos u diferente de v . Portanto, concluímos que qualquer vértice de G tem grau par.

(\Leftarrow) Seja G um grafo conexo onde todos os vértices possuem grau par. Usaremos indução sobre o número m de arestas de G . Se $m = 0$, então G é um grafo nulo (só possui vértice) e, portanto, é euleriano no sentido de que não há arestas a serem percorridas. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior ou igual a 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m , o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T . Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T , e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H , e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H . Mas isto contraria a escolha de T como sendo de maior comprimento. ■

Corolário 2.3 *Um grafo conexo G é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.*

Demonstração: (\Rightarrow) Seja G um grafo conexo e tal que G possua uma trilha euleriana. Assim, cada vértice desta trilha, distinto do vértice inicial e do vértice final, tem grau par. Portanto, G tem, no máximo, dois vértices de grau ímpar.

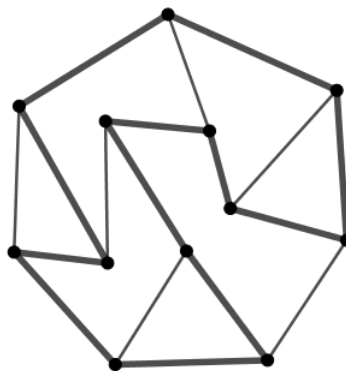
(\Leftarrow) Suponha G um grafo conexo que possui, no máximo, dois vértices de grau ímpar. Assim, G poderá possuir 0(zero) ou 2(dois) vértices de grau ímpar (conforme

Corolário 2.2). Se G não possui vértices de grau ímpar, então, pelo Teorema 2.6, G tem uma trilha euleriana fechada. Se G possui dois vértices de grau ímpar, digamos, os vértices u e v , vamos considerar a aresta a com extremidades em u e v e tal que o grafo $G + \{a\}$ é obtido de G pela adição dessa aresta ligando os vértices u e v entre si. Então, todo vértice de $G + \{a\}$ tem grau par (pois G possui todos os demais vértices com grau par), e, novamente pelo Teorema 2.6, $G + \{a\}$ tem uma trilha euleriana fechada. Portanto, G tem uma trilha euleriana com vértice inicial em u e vértice final v . ■

2.12 Grafo Hamiltoniano

Um **caminho hamiltoniano** é um caminho que passa todos os vértices de G uma e só uma vez. Um **ciclo hamiltoniano** é um caminho hamiltoniano que retorna ao vértice inicial de G . Um grafo é dito hamiltoniano se possui um ciclo hamiltoniano. Um grafo é dito **semi-hamiltoniano** se possui um caminho hamiltoniano. Podemos perceber que, um grafo hamiltoniano é também semi-hamiltoniano. A Figura 4.24, mostra um grafo hamiltoniano.

Figura 2.23: Grafo hamiltoniano



Fonte: o autor

Nenhuma maneira eficiente é conhecida para verificar se um determinado grafo possui um ciclo hamiltoniano e nenhuma condição suficiente trivial e necessária para a existência de um ciclo hamiltoniano é conhecida.

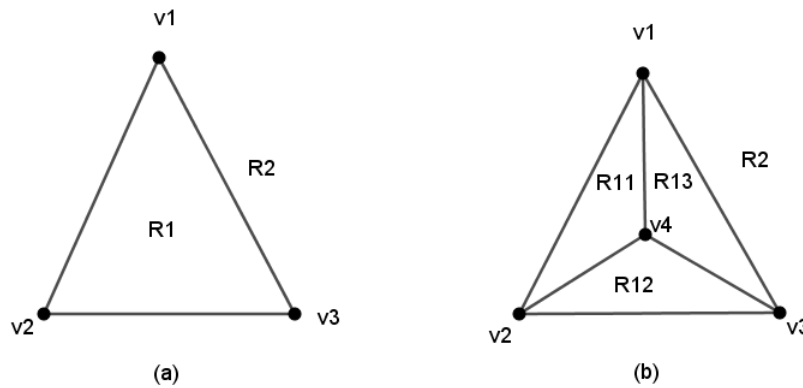
2.13 Planaridade

Definição 2.6 Um grafo G' é dito planar quando é isomorfo a um grafo G que tenha sido representado graficamente no plano de modo que nenhum par de arestas se cruzem. Caso não tenha um isomorfo desse tipo, o grafo é dito não planar.

Teorema 2.7 O grafo completo K_5 não é planar.

Demonstração: Prova por contradição. Admita que exista no plano um grafo G , isomorfo a K_5 , cujas arestas não se cruzam. Indique os vértices de G por v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 . Como G é completo, quaisquer dois de seus vértices são unidas por uma aresta. Agora o ciclo $R = v_1v_2v_3v_1$, divide o plano em duas regiões, R_1 e R_2 , como mostrado na Figura 2.24a. O vértice v_4 pode estar em R_1 ou R_2 . Vamos supor que v_4 esteja em R_1 , no interior do ciclo R . (O caso em que v_4 esteja em R_2 pode ser tratado de maneira semelhante). Em seguida as arestas v_4v_1, v_4v_2 e v_4v_3 dividem a região R_1 em três sub-regiões R_{11}, R_{12} e R_{13} , onde $R_{11} = v_1v_4v_2v_1, R_{12} = v_2v_4v_3v_2$ e $R_{13} = v_3v_4v_1v_3$ como mostra a Figura 2.24b. Agora v_5 deve estar em uma das quatro regiões $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_2$. Se v_5 pertence a R_2 então, desde que v_4 pertença a R_1 , segue-se que a aresta v_4v_5 intercepta R em algum momento. Mas isso contradiz a suposição de que em G as arestas não se cruzam. Os casos em que v_5 pertença a R_{11}, R_{12} ou R_{13} , podem ser descartados da mesma maneira. ■

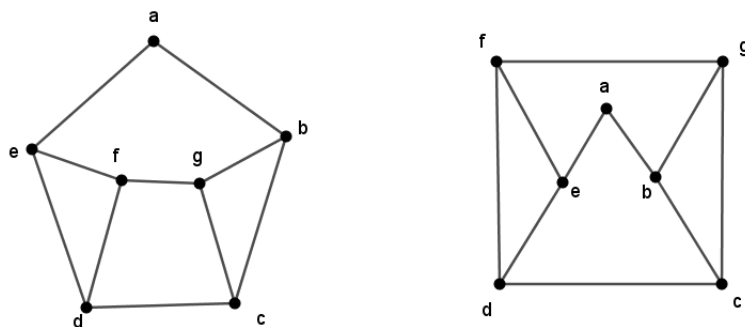
Figura 2.24: Mostrando que K_5 não é planar



Fonte: o autor

Uma representação gráfica de um grafo com pelo menos um ciclo separa o plano em regiões (no caso das árvores, temos uma única região). Estas regiões são chamadas faces; não devemos esquecer que uma das faces é tudo que “sobra” do plano é a face ilimitada. O número de faces de um grafo será designado por f . A Figura 2.25 mostra duas representações do mesmo grafo.

Figura 2.25: Qualquer face pode ser colocada como face ilimitada



Fonte: o autor

Teorema 2.8 (Teorema de Euler). Num grafo planar conexo G com ν vértices e ε arestas vale $\nu + f - \varepsilon = 2$.

Demonstração: Por indução em ε , o número de arestas. Toma-se um grafo conexo qualquer. Se for uma árvore então $\varepsilon = \nu - 1$, logo temos que $\nu + f - \varepsilon = \nu + 1 - (\nu - 1) = 2$. Se houver um ciclo, retira-se uma aresta dele, logo o grafo fica com uma face a menos; pela hipótese de indução, a relação vale para um novo grafo. Temos então que $\nu + (f - 1) - (\varepsilon - 1) = 2$ e, portanto, $\nu + f - \varepsilon = 2$. ■

Corolário 2.4 Se G é um grafo simples planar conexo com $\nu \geq 3$, então $\varepsilon \leq 3\nu - 6$

Demonstração: Se contarmos as arestas face a face, cada face tem pelo menos 3 arestas. Cada aresta é contada duas vezes, pois está na borda de duas faces. Assim, temos que

$$3f \leq 2\varepsilon$$

substituindo na Fórmula de Euler temos,

$$\nu + f - \varepsilon = 2$$

$$3\nu + 3f - 3\varepsilon = 6$$

$$3\nu + 2\varepsilon - 3\varepsilon \geq 6$$

$$3\nu - \varepsilon \geq 6$$

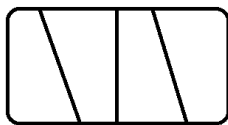
$$\varepsilon \leq 3\nu - 6$$

■

2.14 Coloração de mapas

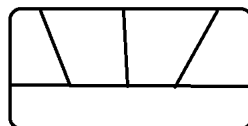
Colorir um mapa é colorir as regiões de maneira que regiões fronteiriças não sejam coloridas com a mesma cor. Ressaltar que um ponto apenas, não é considerado uma fronteira. Observe os mapas das Figuras 2.26, 2.27 e 2.28

Figura 2.26: Mapa 1



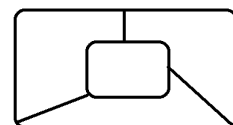
Fonte: o autor

Figura 2.27: Mapa 2



Fonte: o autor

Figura 2.28: Mapa 3



Fonte: o autor

Vamos tentar colorir estes mapas de modo a usar o menor número de cores possível.

Para o mapa da Figura 2.26 usamos apenas 2 cores, o mapa da Figura 2.27 precisamos de 3 cores e para o mapa da Figura 2.28 utilizamos 4 cores.

Figura 2.29: Mapa 1 - colorido



Fonte: o autor

Figura 2.30: Mapa 2 - colorido



Fonte: o autor

Figura 2.31: Mapa 3 - colorido



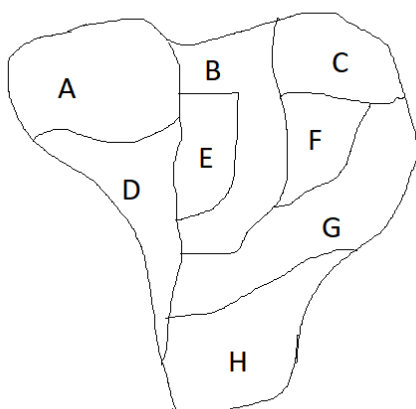
Fonte: o autor

Dependendo do mapa não é uma tarefa muito fácil para ser realizada.

2.15 Mapas e grafos

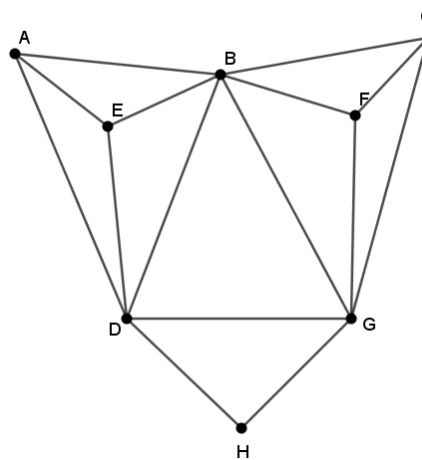
Qualquer mapa pode ser representado por um grafo. Cada região do mapa é representado por um vértice, e as arestas que conectam dois vértices são as regiões que tiverem uma fronteira em comum. Desta forma, o grafo resultante é chamado grafo dual do mapa. Observe um mapa e seu grafo dual nas Figuras 2.32 e 2.33.

Figura 2.32: Mapa



Fonte: o autor

Figura 2.33: Grafo dual



Fonte: o autor

Para colorir as regiões de um mapa é equivalente a colorir os vértices do grafo dual do mapa, de modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. E com quantas cores podemos colorir um mapa?

Em 1852 Frederick Guthrie, levou este problema proposto por seu irmão Francis Guthrie, para seu professor Augustus de Morgan. Na verdade, tratava-se de uma conjectura, hoje um teorema.

Teorema 2.9 (Teorema das 4 cores). *Um mapa pode ser colorido com 4 cores.*

Definição 2.7 *O menor número de cores para colorir os vértices de um grafo G é chamado **número cromático** de G e denotado por $\chi(G)$.*

Podemos formular o teorema em forma de coloração de vértices.

Teorema 2.10 (Teorema das 4 cores formulação). *Num grafo planar G tem-se que $\chi(G) \leq 4$.*

O grafo K_4 mostra que 4 cores são necessárias, mas serão suficientes? O problema demorou um século para ser resolvido. Em 1976, Appel, Haken e Koch, com muitos cálculos feitos a mão, mas grande parte deles com o auxílio de 1200 horas do computador mais rápido de sua época, executando mais do que 10^{10} operações computacionais, provaram o teorema. Embora a teoria envolvida seja profunda muitos consideram esta “a mais feia prova da matemática”. As tentativas anteriores de Kempe e Heawood são dignas de nota. Kempe utilizou uma técnica e apresentou uma demonstração em 1879. Heawood, 11 anos depois, percebeu uma falha sutil na demonstração, que a invalidava. Entretanto, utilizou as cadeias de Kempe para demonstrar um resultado um pouco mais fraco.

Lema 2.2 *Num grafo planar há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

Demonstração: Sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$.

Se $d(v) > 5, \forall v \in V$, então

$$6 \cdot \nu \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$

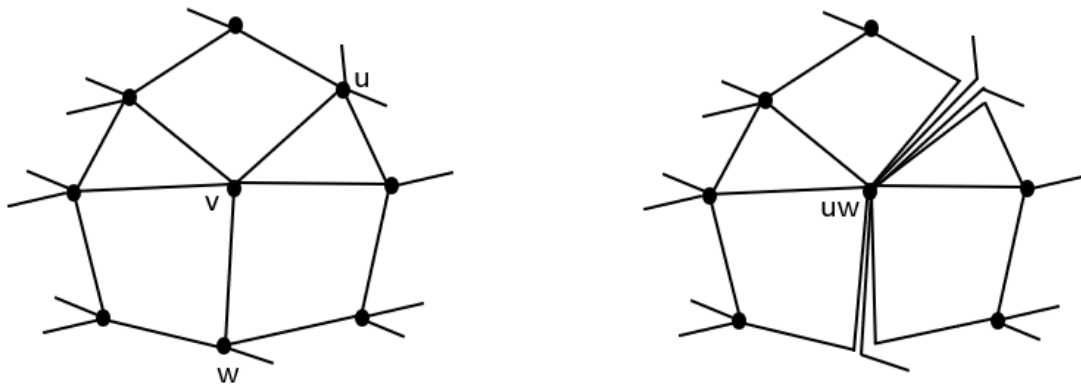
Também sabemos que no grafo planar $\varepsilon \leq 3\nu - 6$, logo, $2\varepsilon \leq 6\nu - 12$. Portanto, $6 \cdot \nu \leq 6\nu - 12$, o que é impossível. ■

Teorema 2.11 (Teorema das 5 cores). *Num grafo planar simples G tem-se que $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração: Então, temos um grafo planar com n vértices. Usando indução no número de vértices, assumimos que um grafo planar com menos de n vértices pode ser colorido com 5 cores. Também sabemos que nosso grafo tem um vértice v com grau no máximo 5. Se v tem grau 4 ou menos, então o argumento é fácil: vamos deletar v do grafo, e colorir o grafo restante com 5 cores (o que é possível pela hipótese de indução, uma vez que este é um grafo planar com menos nós). O vértice v tem no máximo 4 vértices adjacentes, então podemos encontrar uma cor para v que é diferente das cores de seus vértices adjacentes e ampliar a coloração para v . Portanto, o único caso difícil ocorre quando o grau de v é exatamente 5. Sejam u e w dois vértices adjacentes de v . Em vez de apenas excluir v , vamos alterar um pouco mais o grafo, usamos o local liberado pela exclusão de v para mesclar u e w para um único ponto, que chamamos de uw . Cada aresta que entrou em u ou w será redirecionado para o novo vértice uw (Figura 2.34).

Este grafo modificado é plano e tem menos vértices, por isso pode ser colorido com 5 cores pela hipótese de indução. Se puxarmos os dois pontos u e w à parte novamente, obtemos uma coloração de todos os vértices de G exceto v com 5 cores.

Figura 2.34: Prova do Teorema das 5 cores



Fonte: o autor

O que ganhamos com esse truque de fundir u e w é que nessa coloração eles tem a mesma cor. Portanto, embora v tenha 5 vértices adjacentes, dois deles têm a mesma cor, então uma das 5 cores não ocorre entre esses vértices adjacentes em absoluto. Podemos usar essa cor como a cor de v , completando a prova. Atenção! Esquecemos uma dificuldade aqui. (Você pode ver como é fácil cometer erros nesses tipos de argumentos). Quando mesclamos u e w , duas coisas ruins poderiam ter acontecido: (a) u e w estavam conectados por uma aresta, que após a fusão se tornou uma aresta conectando um vértice a si mesmo; (b) poderia ter havido um terceiro vértice p conectado a u e w , que após a fusão tornou-se um nó conectado a uw por duas arestas. Não podemos permitir nenhum destes. O segundo problema (b), na verdade, não é problema algum. Se tivermos duas arestas conectando o mesmo par de nós, poderíamos simplesmente ignorar um deles, o grafo permanece plano, e como dispomos 5 cores, a cor de p seria diferente da cor comum de u e w , então, quando os separarmos, ambas as arestas conectando p a u e w conectaria vértices com cores diferentes. Mas o primeiro problema (a) é sério. Não podemos simplesmente ignorar a aresta conectando uw para si mesmo; na verdade, u e w não podem ter a mesma cor na coloração final, já que estão conectadas por uma aresta. O que vem nos ajudar é o fato de podermos escolher outro par u, w de vértices adjacentes de v . Pode acontecer que tenhamos esse problema com cada par? Não, porque então todo par de vértices seriam adjacentes, e isso significaria ser um grafo completo com 5 vértices, que sabemos pelo Teorema 2.7, não é planar. Portanto, podemos encontrar pelo menos um par u e w para o qual o procedimento acima funciona. Isso completa a prova do Teorema das Cinco Cores. ■

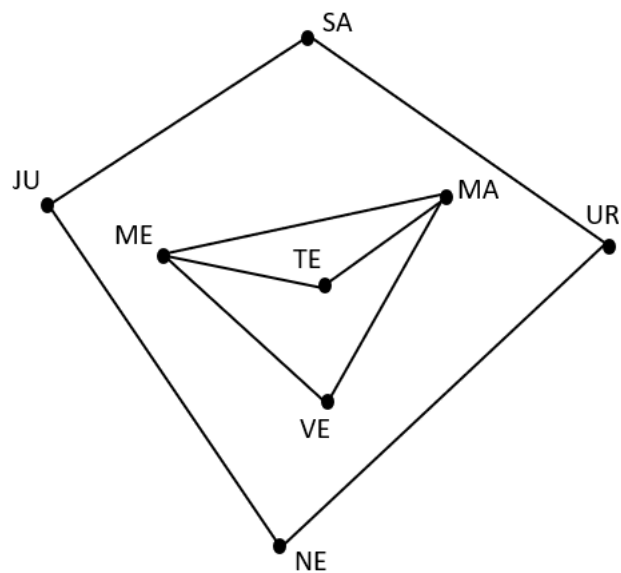
Capítulo 3

Resolução de Alguns Problemas

3.1 Ligações Cóslicas

No futuro viajaremos de foguete entre os seguintes planetas: Terra – Mercúrio; Marte – Vênus; Urano – Netuno; Netuno – Júpiter; Terra – Marte; Mercúrio – Vênus; Saturno – Júpiter; Saturno – Urano e Marte – Mercúrio. Será possível viajar da Terra para Saturno?

SOLUÇÃO: Podemos desenhar um diagrama no qual os planetas são representados pelos vértices e as rotas que os ligam por segmentos de reta (Figura 3.1). Observando a figura verificamos que é impossível viajar da Terra para Saturno.



Fonte: o autor

■

3.2 O Problema dos Cavalos no Xadrez

1-Quatro cavalos estão num tabuleiro 3 x 3, conforme a Figura 3.2. Eles podem se movimentar, de acordo com os movimentos usuais de um cavalo no xadrez conhecidos como “um-dois” ou “em L” (Ele pode andar uma casa na horizontal e duas na vertical, ou uma casa na vertical e duas na horizontal Figura 3.4). Com alguns movimentos, é possível deixá-los na posição representada pela Figura 3.3?

Figura 3.2: Posição inicial



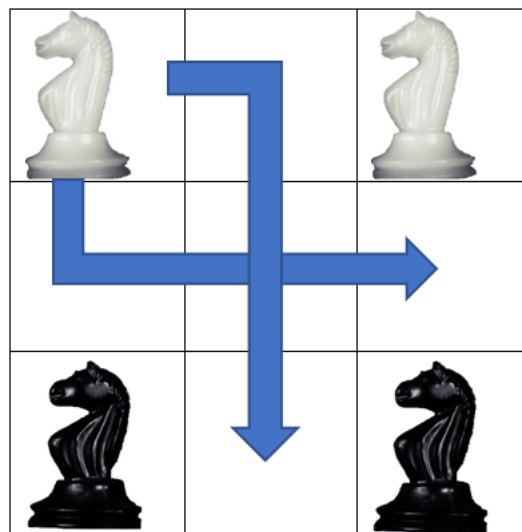
Fonte: o autor

Figura 3.3: Posição final



Fonte: o autor

Figura 3.4: Movimento do cavalo



Fonte: o autor

SOLUÇÃO:

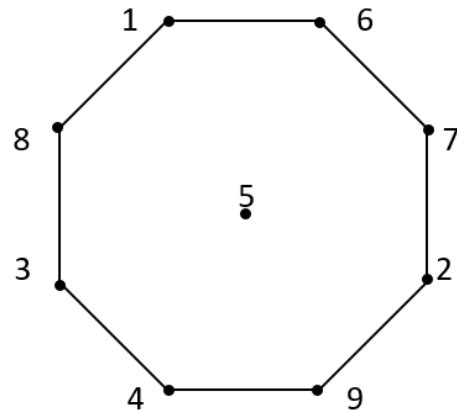
Vejam, enumerando os quadrados do tabuleiro com os números de 1 até 9, conforme a Figura 3.5. Podemos assim representar cada quadrado por um vértice. Se movimentarmos os cavalos de um quadrado a outro pelos movimentos típicos de um cavalo, ligaremos os vértices correspondentes com uma aresta (veja a Figura 3.6).

Figura 3.5: Quadrados numerados

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: o autor

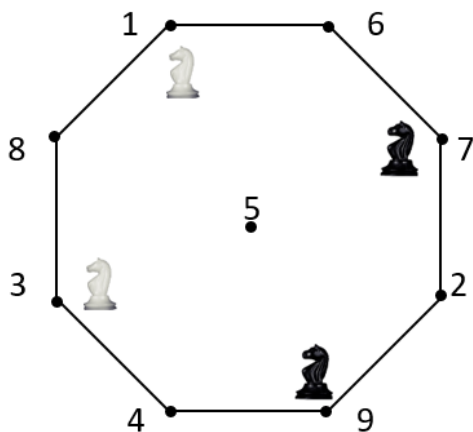
Figura 3.6: Grafo do tabuleiro



Fonte: o autor

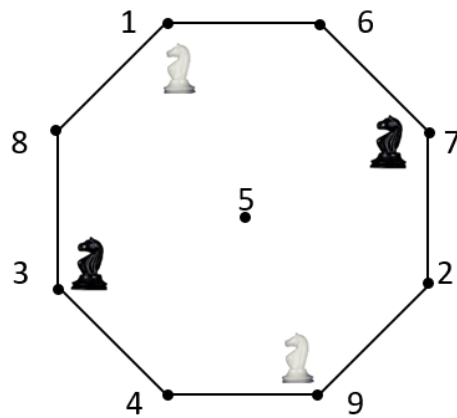
As posições iniciais e finais dos cavalos estão ilustradas nas Figuras 3.7 e 3.8.

Figura 3.7: Grafo da posição inicial do tabuleiro



Fonte: o autor

Figura 3.8: Grafo da posição final do tabuleiro



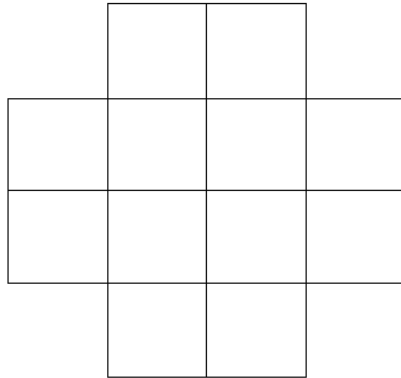
Fonte: o autor

É claro que ordem em que os cavalos aparecem no círculo não pode ser mudada, pois um cavalo de uma cor não pode pular o cavalo da outra cor no círculo. Portanto, não é possível mover os cavalos das posições na Figura 3.2 para a Figura 3.3.

■

2-Um tabuleiro com a forma de uma cruz é obtido de um tabuleiro 4 x 4 retirando-se as quatro quinas (Figura 3.9). Um cavalo pode se mover neste tabuleiro de modo a passar por todos os quadrados exatamente uma vez e terminar no quadrado de onde saiu?

Figura 3.9: Tabuleiro

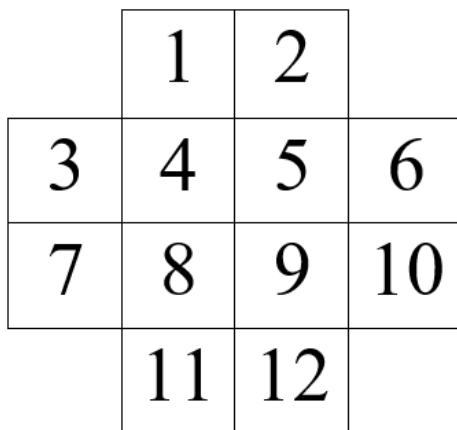


Fonte: o autor

SOLUÇÃO:

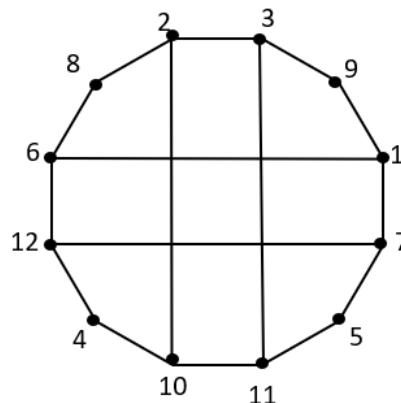
Semelhante ao problema anterior, vamos numerar os quadrados conforme a (Figura 3.10) e assim podemos ter cada quadrado representando o vértice e as arestas dos movimentos do cavalo, na (Figura 3.11) temos seu grafo correspondente.

Figura 3.10: Tabuleiro em cruz numerado



Fonte: o autor

Figura 3.11: Grafo do tabuleiro em cruz



Fonte: o autor

Logo é possível fazer esse percurso. Independente de onde começarmos, podemos contornar o dodecaedro e retornar ao início. Por exemplo (1-7-5-11-10-4-12-6-8-2-3-9-1).



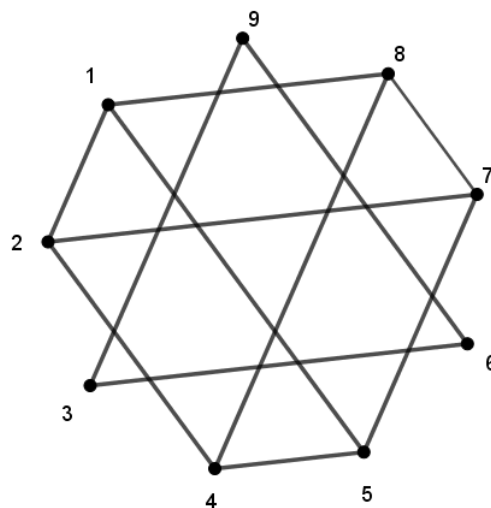
3.3 Problema da viagem

Um pequeno país tem nove Estados de nomes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Um viajante descobre que existe vôo direto de um Estado a outro se e somente se o número de dois algarismos formados pelos nomes dos Estados é divisível por 3. O viajante pode ir do Estado 1 para o Estado 9?

SOLUÇÃO:

Se o número AB for divisível por 3, então o número BA também vai ser. Isto significa que, se um viajante pode ir diretamente do Estado A até o Estado B, ele também pode ir diretamente do Estado B para o Estado A. Desta forma permitenos desenhar um grafo das conexões, como o da Figura 3.12. Assim fica claro que um viajante não pode ir de qualquer cidade para qualquer outra. Note que 1 e 9 pertencem a diferentes componentes conexas do grafo, logo não são conectados.

Figura 3.12: Nove cidades



Fonte: o autor

■

3.4 O problema dos telefones

Em uma pequena cidade do interior, existem apenas 15 telefones. Eles podem ser conectados por fios de modo que cada telefone seja conectado a exatamente cinco outros?

SOLUÇÃO: Suponha que isto é possível. Considere o grafo no qual os vértices representam os telefones e as arestas representam os fios. Este grafo tem 15 vértices e cada um deles tem grau 5. Para encontrar o total de arestas precisamos somar os graus de cada vértice, porém nesta soma cada aresta é contada duas vezes, pois cada aresta liga dois vértices. Portanto o total de arestas é dado por $\frac{15 \cdot 5}{2}$. Mas este

número não é inteiro. Logo tal grafo não existe e não podemos conectar os telefones como solicitado no problema. ■

3.5 Problemas do rei

1- Um determinado reinado tem 100 cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo neste reinado?

SOLUÇÃO:

Semelhante ao problema anterior, vamos considerar os vértices representando as cidades e as arestas representando as estradas. Neste grafo temos 100 vértices e cada um deles tem grau 4. Assim, o total de arestas é dado por:

$$\frac{100 \cdot 4}{2} = \frac{400}{2} = 200.$$

Portanto neste reinado existem 200 estradas. ■

2- É possível existirem exatamente 100 estradas em um reinado no qual existem 3 estradas saindo de cada cidade?

SOLUÇÃO:

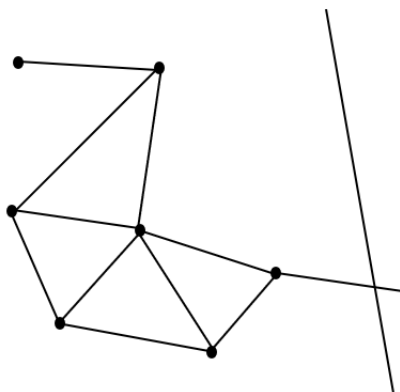
Não. Se esse reinado tivesse k cidades, então ele teria $3k/2$ estradas, assim teríamos $\frac{3 \cdot k}{2} = 100$, não pode existir se k for um número inteiro. ■

3.6 Problemas das 7 ilhas

João, voltando da Disnelândia, disse que viu um lago encantado com 7 ilhas, cada uma delas tendo 1, 3 e 5 pontes chegando a elas. É verdade que pelo menos uma dessas pontes tem que levar para a terra firme?

SOLUÇÃO: Sim, é verdade. Suponha que não. Desenhe um grafo no qual os vértices representam ilhas e as arestas representam as pontes que as ligam. O problema diz que cada uma das sete ilhas é representada por um vértice ímpar, de modo que teríamos um número ímpar de vértices ímpares. Como isto é impossível, devido ao Corolário 2.2 que diz que, em qualquer grafo o número de vértice de grau ímpar é par, logo o grafo tem que ter pelo menos uma aresta levando a terra firme. A Figura 3.13 mostra um grafo que representa uma situação possível.

Figura 3.13: As sete ilhas



Fonte: o autor

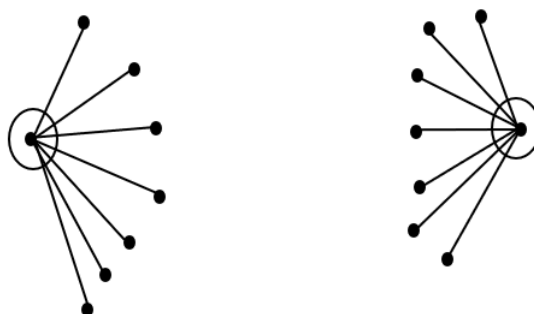
■

3.7 Problema de conexidade

O país dos sete tem 15 cidades, cada uma delas ligadas a pelo menos 7 outras. Prove que é possível ir de qualquer cidade para qualquer outra, possivelmente passando por algumas cidades no meio do caminho.

SOLUÇÃO: Considerando duas cidades quaisquer e supondo que não haja um caminho ligando as duas. Isto significa que não existe uma sequência de estradas, com o final de cada uma delas coincidindo com o início da próxima, ligando as duas cidades. Sabe-se que cada uma dessas duas está ligada a pelo menos 7 outras. Estas 14 têm que ser todas distintas: se duas delas fossem a mesma, existiria um caminho através desta cidade ligando as duas cidades dadas inicialmente (Figura 3.14). Isto significa que este país tem pelo menos 16 cidades diferentes, o que contraria o enunciado do problema.

Figura 3.14: Sete cidades conexas



Fonte: o autor

■

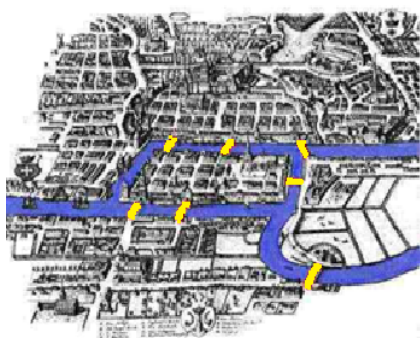
3.8 O Problema das Pontes de Königsberg

Os habitantes de Königsberg se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Prególia, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida.

SOLUÇÃO:

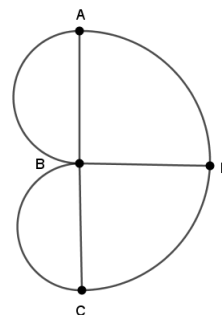
O problema e sua modelagem por grafos estão apresentados nas figuras a seguir.

Figura 3.15: Pontes de Königsberg



Fonte:[8]

Figura 3.16: Representação gráfica das pontes



Fonte:o autor

Já apresentamos como Euler resolveu este problema no Capítulo 1, agora vamos utilizar os teoremas apresentados no Capítulo 2. Sabemos que não é possível realizar tal percurso, pois pelo Teorema 2.6, um grafo conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par. Observamos que cada vértice do problema tem grau ímpar.

■

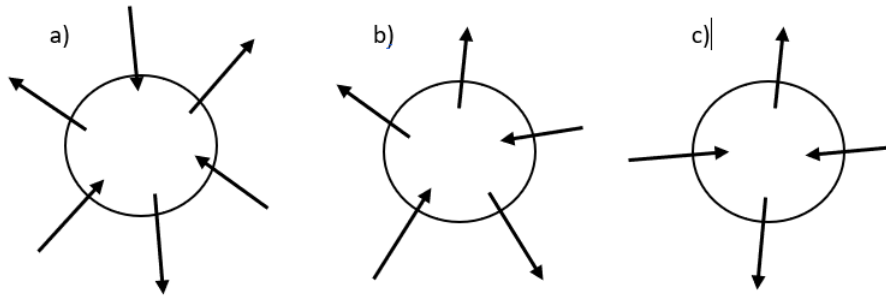
3.9 Problemas Eulerianos

Um grupo de ilhas ligadas por pontes de tal modo que é possível andar de uma ilha qualquer até qualquer outra. Um turista percorreu todas as ilhas cruzando cada ponte exatamente um vez, tendo visitado a ilha de Tripla três vezes. Quantas pontes há em Tripla se:

- o turista não começou nem terminou seu percurso em Tripla;
- o turista começou seu percurso em Tripla, mas não terminou lá;
- o turista começou e terminou seu percurso em Tripla?

SOLUÇÃO: Precisamos contar, simplesmente o número vezes para entrar e sair de Tripla passando por pontes diferentes, para visitar Tripla três vezes em cada uma das situações. Observe a Figura 3.17

Figura 3.17: Ilha de Tripla



Fonte: o autor

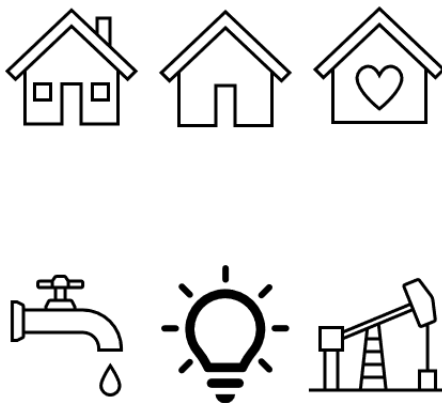
- a) seis pontes.
- b) cinco pontes.
- c) quatro pontes

■

3.10 O Problema das três Casas

Suponha que haja três casas e cada uma precisa ser ligada a três serviços públicos, água, eletricidade e gás, como mostrado na Figura 4.32. Existe uma maneira de fazer todas as nove ligações sem qualquer uma das linhas se cruzar?

Figura 3.18: As três casas

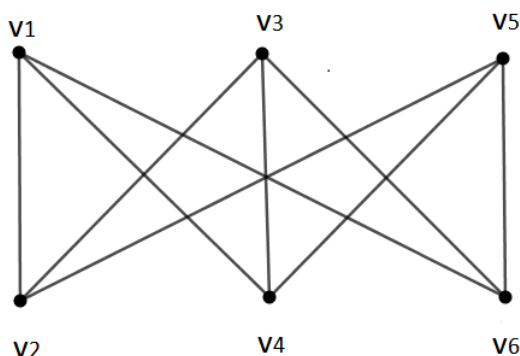


Fonte: o autor

Este problema pode ser modelado por um grafo bipartido completo, $K_{3,3}$ como na Figura 3.19. Mas o grafo $K_{3,3}$ é planar?

SOLUÇÃO:

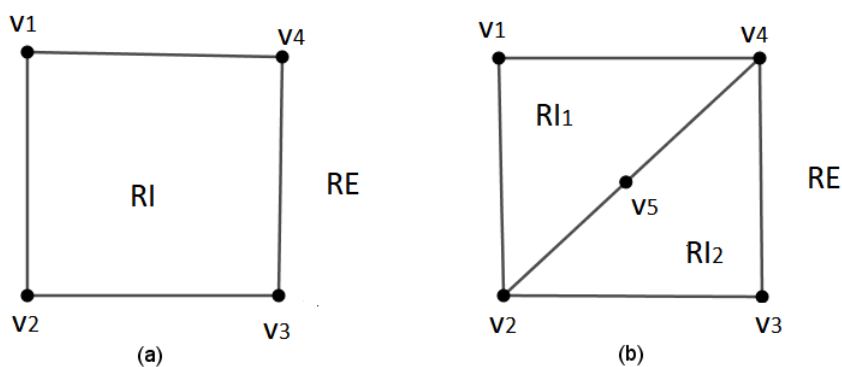
Figura 3.19: Grafo bipartido completo, $K_{3,3}$



Fonte: o autor

A resposta é não, qualquer tentativa de redesenhar o grafo $K_{3,3}$ no plano sem cruzamento de arestas não será possível, pois representando $K_{3,3}$, os vértices v_1 e v_3 devem estar conectados tanto a v_2 quanto a v_4 . Esses quatro vértices formam uma curva fechada que divide o plano em duas regiões, RE e RI , como mostrado na Figura 3.20(a). O vértice v_5 pode estar em RE ou pode estar em RI . Supondo v_5 em RI , o interior da curva fechada, as arestas entre v_5 e v_2 e entre v_5 e v_4 separam RI em duas sub-regiões, RI_1 e RI_2 , como mostra a Figura 3.20(b). Logo, não existe nenhuma maneira de colocar v_6 sem que haja um cruzamento, pois se v_6 estiver em RE , então a aresta entre v_5 e v_6 não pode ser traçada sem cruzamento. Se v_6 estiver em RI_1 , então a aresta entre v_3 e v_6 não pode ser desenhada sem cruzamento. Se v_6 estiver em RI_2 , então a aresta entre v_1 e v_6 não pode ser desenhada sem cruzamento. E acontece de forma análoga se v_5 estiver em RE . Desta forma, pode-se concluir que $K_{3,3}$ não é planar.

Figura 3.20: Mostrando que $K_{3,3}$ não é planar



Fonte: o autor

■

Capítulo 4

Sugestões de atividades para a educação básica

Durante o século XX, houve grande desenvolvimento da teoria dos grafos, bem como sua aplicação em diversos problemas de interesse na educação a nível superior. Na atualidade há várias aplicações sobre grafos, em diversas áreas de conhecimento. Na biologia com abordagem sobre cadeia alimentar; na química com respeito as moléculas; na física aplicados aos resistores; no planejamento econômico, com o menor caminho percorrido ou o menor custo para uma rota no tráfico aéreo; em muitos campos da matemática como a topologia e combinatória; na engenharia com as telecomunicações e elétrica; e sem dúvida na área da computação. Por essas aplicabilidades, precisamos introduzir a teoria dos grafos de uma forma pedagógica na educação básica, não queremos aqui dizer que precisamos que os livros didáticos tenham um capítulo sobre a teoria dos grafos, mas sim mostra de uma forma lúdica. Os grafos são muito bons para modelar problemas do cotidiano, ajudando a ver a matemática incorporada na vida real de cada estudante, como solicitam nossos documentos nacionais em que nos baseamos para fazer os nossos planos de aula.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define quais aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver na Educação Básica. A Teoria dos Grafos pode ser boa ferramenta para que os alunos possa desenvolver algumas das competências específicas de matemática para o ensino fundamental estabelecidas pela BNCC. Tais como:

- Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático- utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Neste capítulo apresentaremos sugestões de uso da teoria dos grafos que podem ser utilizadas na educação básica a partir do 6º ano do ensino fundamental.

4.1 Atividade 1

Trilha do Conhecimento

Aluno(a): _____

Turma: _____ Data: ____ / ____ / ____

Bom dia, boa tarde, boa noite!

Neste encontro estudaremos algo diferente, uma introdução a Teoria dos Grafos. Neste estudo, além do material escrito sobre noções de teoria dos grafos, que apresentaremos de uma forma lúdica, serão utilizados textos e vídeos aulas sobre o assunto, além de exercícios para você avaliar a sua aprendizagem, sobre esse conceito.

Habilidade(s) da BNCC

- (EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).
- (EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

Objeto(s) de Conhecimento da BNCC

Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas

Objetos Digitais de Aprendizagem

Introdução à teoria dos grafos: aula 1 e 2

<https://www.youtube.com/watch?v=Frnwdter-vQ>

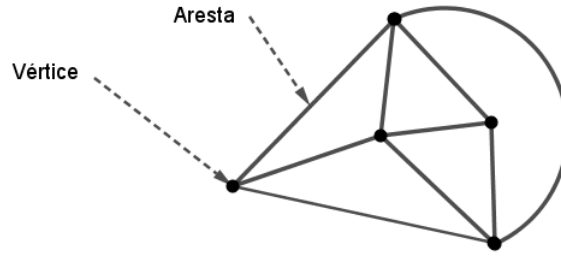
<https://www.youtube.com/watch?v=fLNQfhpv-js&t=312s>

Introdução à Teoria dos Grafos

A teoria dos grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto. O artigo de Euler publicado em 1736, sobre o problema das sete pontes de Königsberg é considerado o primeiro resultado da teoria dos grafos. Voltaremos a esse problema mais tarde.

Um **grafo** é um conjunto de pontos chamados de vértices, conectados por linhas, chamadas de arestas.

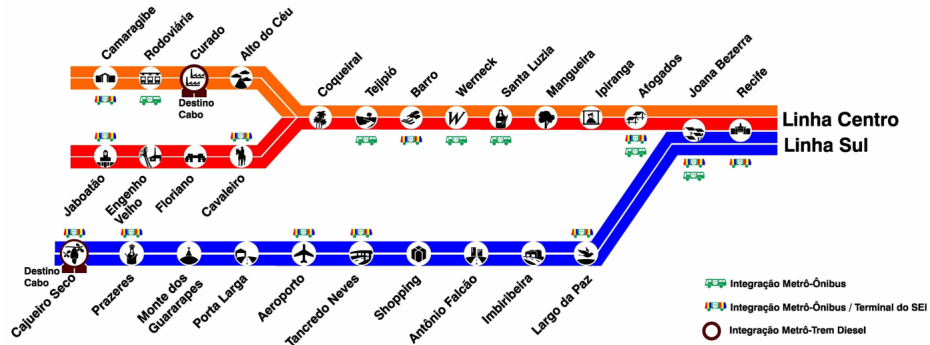
Figura 4.1: Exemplo de grafo



Fonte: o autor

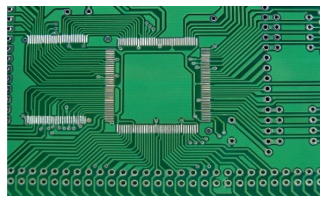
Vejamos alguns exemplos no cotidiano que podemos ver como grafos:

Figura 4.2: Mapa do metrô de Recife



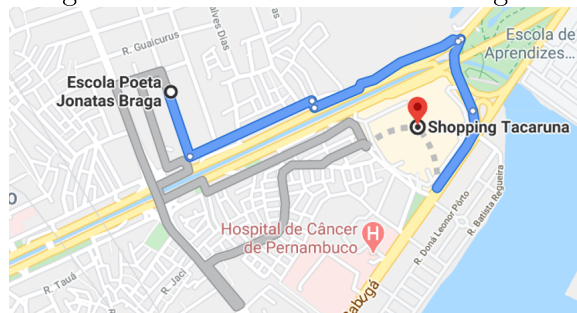
Fonte: foto do autor

Figura 4.3: Placa de circuito integrado



Fonte:

Figura 4.4: Percurso entre dois lugares



Fonte: google maps

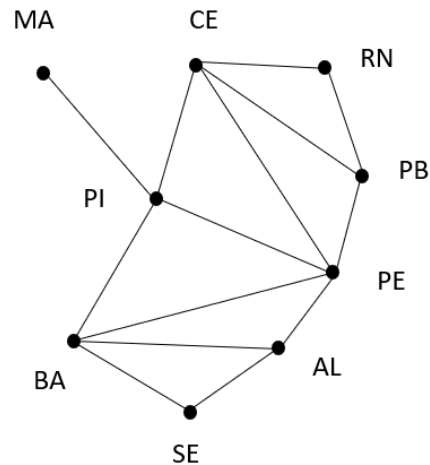
Pensando no mapa do nordeste do Brasil, podemos relacionar cada estado com todos os outros estados com quem ele faz fronteira. A partir da Figura 4.5 conseguimos elaborar o grafo da Figura 4.6.

Figura 4.5: Mapa do Nordeste



Fonte:

Figura 4.6: Grafo de fronteiras do Nordeste



Fonte: o autor

Atividade Semanal

1. As turmas do 6A, 6B, 7A, 7B e 7C da escola participaram de um torneio de damas. Alguns jogos já foram realizados:

6A jogou com 7A, 7B, 7C

6B jogou com 7A, 7C

7A jogou com 6A, 6B, 7C

7B jogou com 6A, 7C

7C jogou com 6A, 6B, 7A, 7B

- a) Represente graficamente essa situação. As turmas serão representadas por pontos e os jogos serão representados por linhas.
- b) Quantos e quais jogos estão faltando?

2. Numa festa:

- Ana conhece André, Bernardo e Carlos;
- Beatriz conhece Bernardo e Carlos;
- Camila conhece Carlos, Eduardo e Fernando;
- Daniela conhece André e Bernardo;
- Elisa conhece André, Bernardo e Carlos.

- a) Represente esta situação através de pontos e linhas.
- b) É possível encontrar um namorado para cada mulher entre os homens que elas conhecem?

3. No futuro viajaremos de foguete entre os seguintes planetas: Terra-Mercúrio; Marte-Mercúrio; Mercúrio-Vênus, Urano-Netuno; Netuno-Saturno; Marte-Vênus; Terra- Marte; Saturno-Júpiter; Júpiter-Plutão e Marte-Mercúrio. Será possível viajar da Terra para Saturno?
4. Um pequeno país tem nove Estados de nomes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Um viajante descobre que existe vôo direto de um Estado a outro se somente se o número de dois algarismos formados pelos nomes dos Estados é divisível por 3. Por exemplo, se o número AB for divisível por 3, então o número BA também vai ser. Isto significa que, se um viajante pode ir diretamente do Estado A até o Estado B, ele também pode ir diretamente do Estado B para o Estado A. O viajante pode ir do Estado 1 para o Estado 9?

Chat

Olá, você conseguiu entender o que foi visto até agora sobre noções da teoria dos grafos? Agora, que você já estudou alguns aspectos sobre noções da teoria dos grafos, tenho um desafio para você responder:

Quatro cavalos estão num tabuleiro 3 x 3, conforme a Figura 4.7. Eles podem se movimentar, de acordo com os- movimentos usuais de um cavalo no xadrez conhecidos como “um-dois” ou “em L” (Ele pode andar uma casa na horizontal e duas na vertical, ou uma casa na vertical e duas na horizontal). Com alguns movimentos, é possível deixá-los na posição representda pela (Figura 4.8)?

Figura 4.7: Posição inicial



Fonte: o autor

Figura 4.8: Posição final



Fonte: o autor

Envie sua resposta para o e-mail ou whatsapp disponibilizado.

4.2 Atividade 2

Trilha do Conhecimento

Aluno(a): _____

Turma: _____ Data: _____ / _____ / _____

Bom dia, boa tarde, boa noite!

Neste encontro continuaremos os estudos sobre introdução a Teoria dos Grafos. Neste estudo, além do material escrito sobre noções de teoria dos grafos, que apresentaremos de uma forma lúdica, serão utilizados textos e vídeos aulas sobre o assunto, além de exercícios para você avaliar a sua aprendizagem, sobre esse conceito.

Habilidade(s) da BNCC

- (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).
- (EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

Objeto(s) de Conhecimento da BNCC

Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas

Objetos Digitais de Aprendizagem

Introdução à teoria dos grafos: aula 5

<https://www.youtube.com/watch?v=125pPCIRjZ8&t=4s>

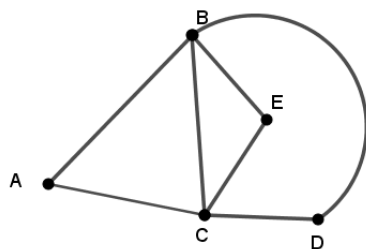
Teoria dos Grafos e Euler

Um **grafo** é um conjunto de pontos chamados de vértices, conectados por linhas, chamadas de arestas.

Um grafo é **euleriano**, se pudermos desenhar sua representação gráfica sem retirar o lápis do papel, passando apenas uma vez ao longo de cada linha e retornando ao ponto inicial (Figura 4.9).

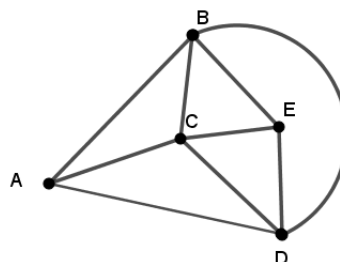
Num grafo **semieuleriano** começamos num ponto e terminamos em outro (Figura 4.10). Encontre um percurso para cada figura.

Figura 4.9: grafo euleriano



Fonte: o autor

Figura 4.10: grafo semieuleriano

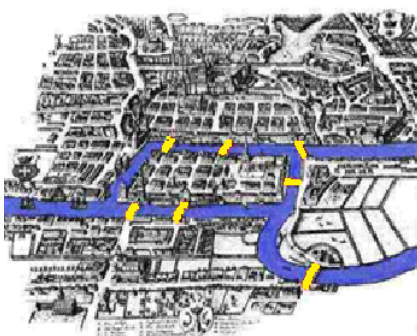


Fonte: o autor

Uma solução para a figura 4.9 é fazer o seguinte percurso ABCEBDCA. Você pode encontrar um percurso diferente? Na Figura 4.10, ABCEBDACDE é solução. Mas se quisermos começar pelo vértice B? (você pode tentar o tempo que quiser). Mas não conseguirá. Todas as soluções começam/terminam pelo vértice A/E. Se começam em A terminam em E, e vice-versa.

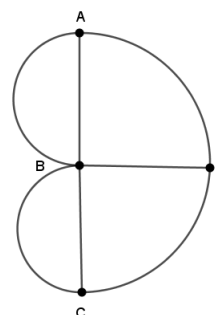
Vamos retornar ao problema das pontes de Königsberg. Os habitantes de Königsberg (hoje Kaliningrado) se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes do Rio Prególia, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida. O problema e sua modelagem por grafos estão apresentados nas figuras a seguir.

Figura 4.11: Pontes de Königsberg



Fonte:[8]

Figura 4.12: Representação gráfica das pontes



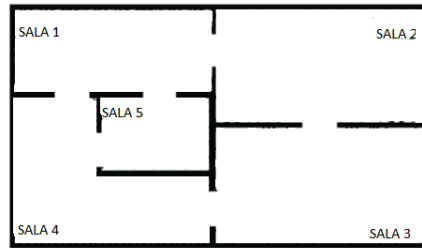
Fonte: o autor

Tente fazer esse passeio. Conseguiu? Não? Euler mostrou que não era possível fazer esse percurso.

Atividade Semanal

1. (MEC [3])Essa é a planta de uma exposição de um museu. Você acha possível fazer um passeio pelas salas, passando por todas elas e apenas uma vez por cada porta? Se sim, encontre uma solução:

Figura 4.13: Museu



2. (MEC [3]) Agora vamos pensar no trabalho de um entregador de jornais. Ele deve passar por várias ruas até que abasteça todos os assinantes. A gráfica é seu ponto de partida e deve ser seu ponto de chegada, após entregar todos os jornais. Em cada uma das 2 situações, veja se é possível encontrar um trajeto pelo qual ele entregue todos os jornais, passando apenas uma vez em cada rua. Explique como pensou em cada uma delas.

Figura 4.14: Situação 1

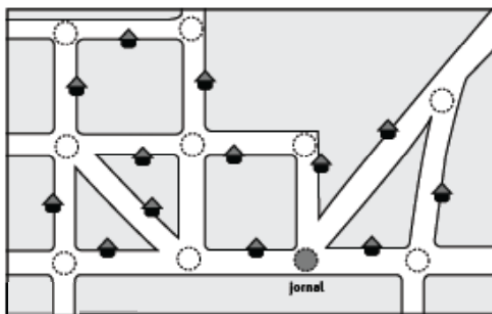
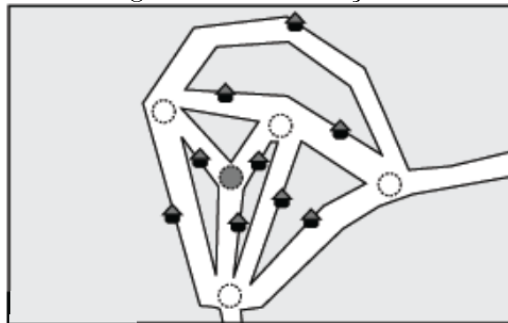
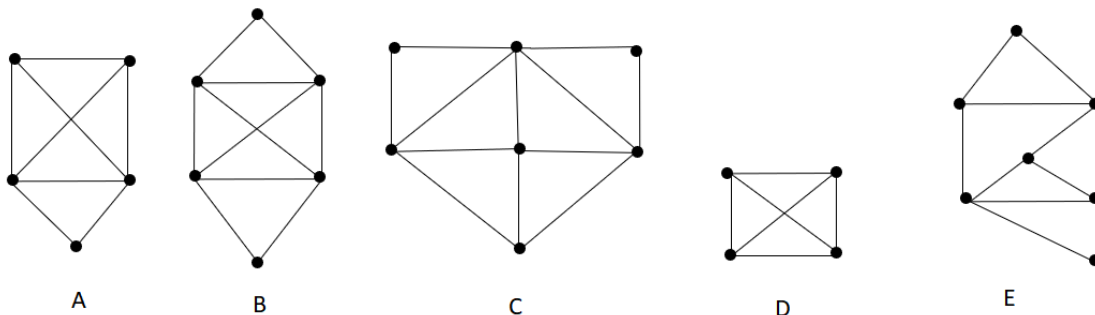


Figura 4.15: Situação 2



3. Qual dos seguintes desenhos não pode ser feito sem tirar o lápis do papel e passando apenas uma vez ao longo de cada linha?

Figura 4.16: desenhos

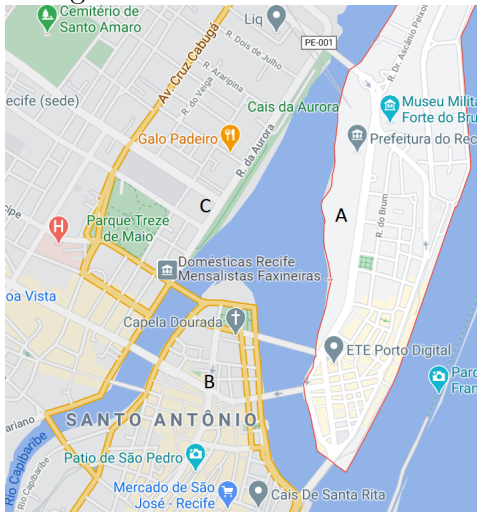


- (a) Conte o número de arestas que chegam em cada vértice.

(b) Você observa alguma relação entre o número de arestas que incidem nos vértices e os grafos que são possíveis de desenhar?

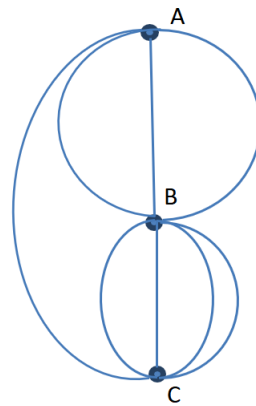
4. Você conhece a Königsberg brasileira? Euler não passou por Recife-PE, mas temos uma situação semelhante. Verifique se é possível passar pelas 8 pontes do centro do Recife uma única vez. As Figuras 4.17 e 4.18 representam o centro do Recife e seu grafo associado.

Figura 4.17: Pontes do Recife



Fonte: google maps

Figura 4.18: Grafo das pontes do Recife

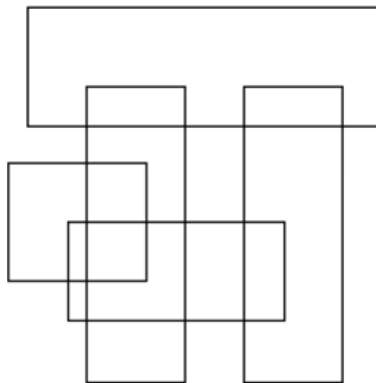


Fonte: o autor

Chat

Olá, você conseguiu entender o que foi visto até agora sobre noções da teoria dos grafos? Agora, que você já estudou alguns aspectos sobre noções da teoria dos grafos, tenho um desafio para você responder: Mostre que esse desenho é um grafo euleriano

Figura 4.19: Desafio



Fonte:OBMEP

Envie sua resposta para o whatsapp disponibilizado.

4.3 Atividade 3

Trilha do Conhecimento

Aluno(a): _____

Turma: _____ Data: _____ / _____ / _____

Bom dia, boa tarde, boa noite!

Neste encontro ampliaremos os estudos sobre introdução a Teoria dos Grafos. Neste estudo, além do material escrito sobre noções de teoria dos grafos, que apresentaremos de uma forma lúdica, serão utilizados textos e vídeos aulas sobre o assunto, além de exercícios para você avaliar a sua aprendizagem, sobre esse conceito.

Habilidade(s) da BNCC

- (EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
- (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
- (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

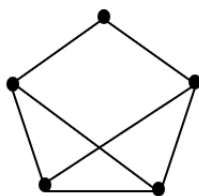
Objeto(s) de Conhecimento da BNCC

Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas) Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas

Grafos Planares

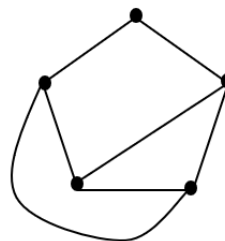
Um **grafo planar** é um grafo que pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem.

Figura 4.20: Grafo planar



Fonte: o autor

Figura 4.21: Grafo planar redesenhado



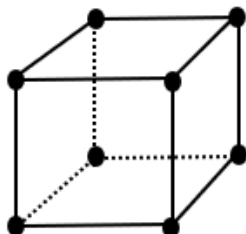
Fonte: o autor

Em um grafo planar e conexo também é válida a relação de Euler $V + F = A + 2$, em que V é o número de vértices, F é o número de faces e A o número de arestas,

que já estudamos em poliedros convexos.

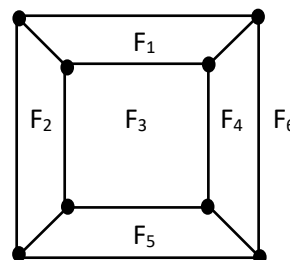
Observe as figuras abaixo:

Figura 4.22: O cubo



Fonte: o autor

Figura 4.23: Grafo planar do cubo

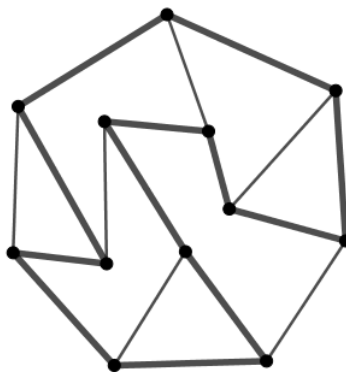


Fonte: o autor

Na Figura 4.22 sabemos que o cubo tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. Na (Figura 4.23) observamos que os valores são os mesmos, $V=8$, $A=12$ e $F=6$, lembrando que uma dessas faces é a região ilimitada, que é a face externa “ F_6 ”.

Um **grafo é hamiltoniano** se possui um caminho que passa por todos os vértices uma e só uma vez. A figura 4.24 é um ciclo hamiltoniano, pois passa por todos os vértices e retorna ao vértice inicial.

Figura 4.24: Grafo hamiltoniano



Fonte: o autor

Esses tipos de grafos é uma homenagem ao Sir Willian R. Hamilton, que estudou e divulgou o problema, embora a primeira formulação tenha sido feita por Thomas Kirkman em 1885.

Atividade Semanal

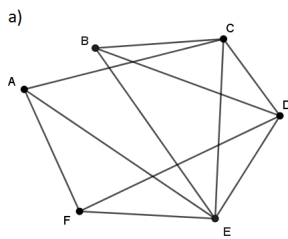
1. Numa rede social:

- Ana conhece Carlos, Débora e Fábio;
- Beatriz conhece Ana, Carlos e Débora;
- Erique conhece Fábio, Beatriz, Carlos e Débora.

Represente por meio de um grafo planar essa situação.

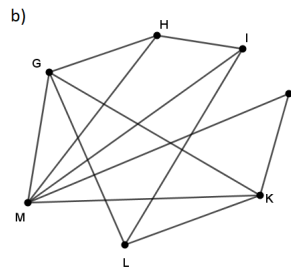
2. Os grafos abaixo são planares, verifique quantas regiões devem possuir e faça um novo grafo de forma que as arestas não se cruzem.

Figura 4.25: Grafo com 6 vértices



Fonte: o autor

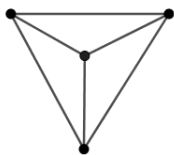
Figura 4.26: Grafo com 7 vértices



Fonte: o autor

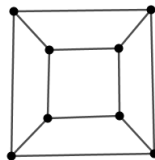
3. Mostre que os grafos correspondentes aos 5 sólidos platônicos são hamiltonianos. Quais são eulerianos?

Figura 4.27: Tetraedro



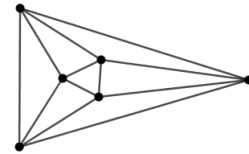
Fonte: o autor

Figura 4.28: Hexaedro



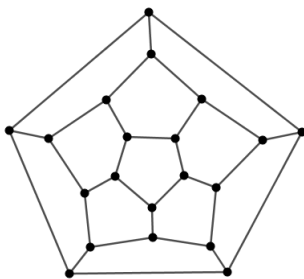
Fonte: o autor

Figura 4.29: Octaedro



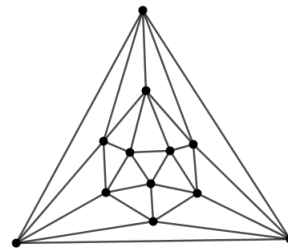
Fonte: o autor

Figura 4.30: Dodecaedro



Fonte: o autor

Figura 4.31: Icosaedro

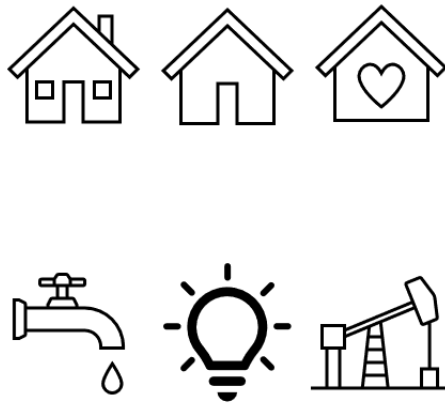


Fonte: o autor

Chat

Olá, você conseguiu entender o que foi visto até agora sobre noções da teoria dos grafos? Agora, que você já estudou alguns aspectos sobre noções da teoria dos grafos, tenho um desafio para você responder: Suponha que haja três casas e cada uma precisa ser ligada a três serviços públicos, água, eletricidade e gás, como mostrado na (Figura 4.32). Existe uma maneira de fazer todas as nove ligações sem qualquer uma das linhas se cruzar?

Figura 4.32: As três casas



Fonte: o autor

Envie sua resposta para o whatsapp disponibilizado.

Referências Bibliográficas

- [1] BONDY, John Adrian et al. **Teoria dos grafos com aplicações**. Londres: Macmillan, 1976.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. Portal do Professor. Brasília, DF: MEC, 2011. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=32829>
- [4] DIJKSTRA, Edsger W. et al. A note on two problems in connexion with graphs. **Numerische mathematik**, v. 1, n. 1, p. 269-271, 1959.
- [5] GRIBKOVSKAIA, Irina; HALSKAU SR, Øyvind; LAPORTE, Gilbert. The bridges of Königsberg – a historical perspective. **Networks: An International Journal**, v. 49, n. 3, p. 199-203, 2007.
- [6] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Euler, um matemático multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, v. 9, n. 17, p. 13-31, 2009.
- [7] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. Círculos Matemáticos: A experiência russa. **Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA**, 2010.
- [8] HOPKINS, Brian; WILSON, Robin J. The truth about Königsberg. **The College Mathematics Journal**, v. 35, n. 3, p. 198-207, 2004.
- [9] JURKIEWICZ, Samuel. Grafos:uma introdução. **São Paulo: OBMEP**, 2009.
- [10] LOVÁSZ, László; PELIKÁN, József; VESZTERGOMBI, Katalin. Discrete Mathematics:Elementary and Beyond, Undergraduate texts in Mathematics, New York, Springer-Verlag, 2003. 284 p.
- [11] LUCCHESI, Cláudio Leonardo. Introdução à Teoria dos Grafos. 12o Colóquio Brasileiro de Matemática. **IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada)**, v. 5, 1979.
- [12] NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura. **Grafos: teoria, modelos, algoritmos**. Editora Blucher, 2003.

- [13] SACHS, Horst; STIEBITZ, Michael; WILSON, Robin J. An historical note: Euler's Königsberg letters. **Journal of Graph Theory**, v. 12, n. 1, p. 133-139, 1988.
- [14] MAQUENGO, Gabriel Lima. **Teoria dos grafos e aplicações: redes elétricas e de transportes rodoviários**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade de Évora.
- [15] DE SOUZA, Bueno Borges; WEIGANG, Li; CRESPO, Antonio Marcio Ferreira. Implementação de modelo para balanceamento de fluxos aplicado ao gerenciamento de tráfego aéreo. **Transportes**, v. 16, n. 2, 2008.