UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ DE ARAÚJO MATOS

ALGUNS MÉTODOS NUMÉRICOS E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO BÁSICO

QUIXADÁ – CEARÁ
2020

JOSÉ DE ARAÚJO MATOS

ALGUNS MÉTODOS NUMÉRICOS E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciência e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Ângelo Papa Neto.

QUIXADÁ – CEARÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Matos, José de Araújo .
Alguns métodos numéricos e sua aplicação no ensino básico [recurso eletrônico] / José de Araújo Matos. - 2020
Um arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 80 folhas.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2020.
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional..
Orientação: Prof. Dr. Ângelo Papa Neto..

1. Números irracionais. 2. História de Matemática. 3. Aproximações sucessivas. 4. Zeros de funções. 5. Métodos numéricos iterativos. I. Título.

JOSÉ DE ARAÚJO MATOS

ALGUNS MÉTODOS NUMÉRICOS E SUA APLICAÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciência e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática em Rede Nacional.

Aprovada em: 28 de dezembro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto (Orientador) - Instituto Federal do Ceará– IFCE

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira - Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente - Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Francisco Gêvane Muniz Cunha (IFCE)

Em memórias aos meus avós.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, aos meus pais e irmãos, pelo apoio em minha vida, meus eternos agradecimentos!

Ao professor Ângelo Papa Neto pela orientação e dedicação durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos, e aos colegas das escolas Professora Maria José Macário Coelho e Francisco Andrade Teófilo Girão, pela disposição do tempo e que tantas vezes me ajudaram para seguir em frente.

A todos os meus alunos, em especial a minha turma olímpica, por acreditarem na possibilidade de adquirir os melhores conhecimentos e em dedicarem-se mais nas nossas aulas.

Aos colegas do curso, pois vocês foram essenciais nessa trajetória, e em especial aos colegas Tiago Araújo Rodrigues e Francisco Rutemberg da Silva Rodrigues, que inúmeras vezes tivemos que estudar juntos e aos os incentivos dos mesmos. Vivemos bons momentos!

Aos professores da Licenciatura em Matemática do IFCE que mais contribuíram para que esse momento fosse possível, Francisco Gêvane Muniz Cunha, Luiza Pontello, Lucineide Torres, José Stálio, Aluísio Cabral, Ademir Lopes e José Breves Filho.

Aos professores do curso do PROFMAT da FECLESC/UECE, Dr. Ulisses Lima Parente, Dr. Jobson de Queiroz Oliveira e Ms.Tony Melo por toda dedicação e compromisso.

“Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar”.

(Francóis Viéte)

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho consiste em produzir uma pesquisa com o intuito de verificar a importância dos estudos de aproximações sucessivas de números irracionais por números racionais, bem como a utilização dos métodos numéricos na solução em encontrar raízes de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. São mostrados registros históricos que evidenciam o uso de aproximações sucessivas em resultados importantes que foram essenciais na Matemática e realçam a importância de serem estudados ainda no Ensino Básico. Vendo a importância dos estudos em encontrar zeros de funções que estão presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais, surge como proposta a utilização dos métodos numéricos. Aplicamos os métodos numéricos do Ponto Fixo e Método de Newton–Raphson com problemas contextualizados, resolvendo-os e exibindo seus gráficos e resultados representados em tabelas. O contato dos alunos com métodos iterativos poderá ser uma aplicação importante para compreensão dos problemas e análises dos resultados. Por fim, mostramos outros métodos de aproximações que podem ser aplicados com o uso de uma simples calculadora de 8 dígitos e com o uso de frações contínuas para aproximar números irracionais.

Palavras-chave: Números irracionais. História de Matemática. Aproximações sucessivas. Zeros de funções. Métodos numéricos iterativos.

ABSTRACT

The main objective of this work is to produce a research in order to verify the importance of the studies of successive approximations of irrational numbers by rational numbers, as well as the use of interactive numerical methods in the solution to find roots of a polynomial equation with integer coefficients. Historical records are shown that show the use of successive approximations in important results that were essential in Mathematics and highlight the importance of being studied even in Basic Education. Seeing the importance of studies in finding zeros of functions that are present in the National Curriculum Parameters, it is proposed to use the numerical methods of successive approximations. We apply the numerical methods of the Fixed Point and Newton – Raphson Method with contextualized problems, solving them and displaying their graphs and results represented in tables. The contact of the students with interactive methods can be an important application for understanding problems and analyzing results. Finally, we show other methods of approximations that can be applied using a simple 8-digit calculator and using fractions continuous to approximate irrational numbers.

Keywords: Irrational numbers; History of Mathematics; Successive approximations; Function zeros; Interactive numerical methods.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRAFICOS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da vida escolar, os alunos desenvolvem dois tipos de sentimentos pela Matemática, sendo na maioria das vezes bem opostos – de um lado, para uma minoria, a Matemática representa uma paixão; já para a maioria, ela é vista como uma aversão. Tanto para o autor deste trabalho como para outros que hoje se tornaram professores de Matemática, acreditamos que não tenha sido de modo diferente. A paixão pelos números e formas geométricas começou ainda nos anos iniciais e foi sendo consolidada e aperfeiçoada a cada ano letivo para novos professores de Matemática.

> “Quem, por acaso, não cruzou com um professor de Matemática que lhe deixou desagradáveis lembranças? E qual o amante da Matemática que não se recorda, com carinho, de algum saudoso mestre que lhe abriu as portas por onde entrou a luz dos números e das formas? “(GARBI, 2009 pag. 7)

Sob esse viés, o autor desta pesquisa refletiu que foi devido aos bons professores que teve no ensino fundamental e médio, os elogios e direcionamentos que recebeu destes mestres, que cada vez mais esses ensinamentos o ligavam ao mundo da Matemática, tão essenciais para direcioná-lo a uma futura opção em cursar uma graduação em Licenciatura em Matemática. No último ano letivo do colegial, uma premiação de menção honrosa na 1º edição da OBMEP[1] aumentaram as chances de ele escolher cursar Matemática, o que se tornou uma realidade após alguns anos.

Já no período da formação acadêmica do autor deste trabalho, não poderia ser diferente, pois ele teve o prazer de estudar com excelentes professores, e alguns deles tornaram-se os maiores influenciadores para a escolha do tema da presente pesquisa, haja vista que os estudos de técnicas para calcular zeros de funções são frequentes em um curso de Matemática – um dos componentes mais importantes no currículo da Educação Básica.

Por sua vez, o autor pretende pesquisar sobre os números irracionais e os métodos numéricos de aproximações sucessivas, contextualizando e envolvendo desde os registros históricos até a aplicação em sala de aula, entendendo o “*porque*

---

[1] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, ano de 2005.

das coisas” antes de realmente iniciar os cálculos matemáticos. E é nessa perspectiva que ele tem a pretensão de poder contribuir para a aprendizagem de todos aqueles que tenham acesso a este trabalho.

No ensino de Matemática, as orientações dos PCN destacam a importância dos conteúdos que devem ser abordados em sala de aula, possibilitando de maneira significativa o desenvolvimento das competências e habilidades que agreguem uma contextualização e aplicações dos saberes, proporcionando ao aluno a investigação e compressão de situações-problemas relacionadas com as grandezas matemáticas. (BRASIL, 2000).

Nesse sentido, os conteúdos de zeros de funções se enquadram nas propostas do PCN, possuindo inúmeras aplicações e contextualização na Educação Básica, sendo objeto para fonte em diversas pesquisas. Em pesquisa feita no banco de dissertações do PROFMAT, verificamos pouco mais de uma dezena de trabalhos em que são abordados os métodos numéricos, sendo a maioria, para encontrar zeros de funções. Por outro lado, das que abordaram os estudos de raízes, somente algumas se restringem às funções polinomiais, sendo essas as mais vistas no currículo do Ensino Básico.

Segundo Lima (2007), muitos professores de Matemática do Ensino Básico compactuam da mesma preocupação, por tratar-se da abordagem dos conteúdos de zeros de funções em sala de aula, como devem contextualizá-las e que novas metodologias poderão proporcionar um melhor desempenho ao ensinar sobre os métodos de soluções das equações.

Este trabalho tem a pretensão de contribuir como uma ferramenta de pesquisa e estudos sobre as aproximações de irracionais por números racionais e alguns métodos iterativos, na busca de soluções de equações polinomiais, os chamados métodos numéricos, construída sobre aspectos históricos da Matemática, conceitos e aplicações. Descrevemos de forma breve os destaques em cada capítulo.

No capítulo 3, vemos a importância dos estudos sobre os conjuntos numéricos ainda nos anos iniciais, e em especial, os números irracionais e as primeiras aproximações no Ensino Básico. Registros históricos deixam evidente o quanto os métodos numéricos são essenciais na construção e nos avanços da Matemática.

No capítulo 4 evidenciamos o quanto o ensino de funções e os métodos diretos para solução de equações polinomiais estão presentes no currículo do Ensino Básico. Mostramos de forma breve os avanços que vão desde as soluções das equações do 2° grau pelos Babilônicos até os métodos analíticos que se encontram nos livros atuais. Surge como alternativa o uso dos métodos iterativos para soluções de equações polinomiais.

No capítulo 5 destacamos os conceitos e aplicações dos métodos numéricos do Ponto Fixo e o Método de Newton. Apresentamos aplicações para encontrar zeros de equações polinomiais com coeficientes inteiros em problemas contextualizados, exibindo seus gráficos, tabelas e seus respectivos resultados.

No capítulo 6 mostramos outros métodos de aproximações sucessivas, relacionando as frações contínuas e raízes enésimas com aproximações de irracionais, destacando alguns registros históricos, como também as aplicações de cada um.

Deixamos como apêndice uma lista de exercícios como proposta de atividades para aplicação em sala de aula, destacando as aplicações dos principais métodos numéricos que foram abordados neste trabalho. (Acrescentei)

Por fim, buscamos expor a pesquisa de forma clara e compreensiva para todos aqueles que puderem ter acesso a essa dissertação.

2 OBJETIVOS

2.1 Gerais

Apresentar os métodos numéricos de aproximações sucessivas para a resolução de situações-problemas envolvendo as equações polinomiais e os números irracionais.

2.2 Específicos

a) Descrever as relações existentes entre os métodos de aproximações sucessivas e os números irracionais/
b) Possibilitar o ensino dos métodos dos métodos numéricos de modo paralelo a outros assuntos correlacionados/
c) Apresentar soluções alternativas para encontrar zeros de funções através dos métodos numéricos.

3 NÚMEROS IRRACIONAIS, APROXIMAÇÕES E ENSINO

3.1 A matemática nos anos iniciais

Os professores que se ocupam com o ensino de Matemática, em geral têm a preocupação com o nível de aprendizagem apresentados pelos alunos adquiridos nas séries anteriores, pois sabemos que um bom ensino de Matemática nos anos iniciais, do 1° ao 5° ano (Fundamental I) e também nos anos finais, do 6° ao 9° ano (Ensino fundamental II) revelam um papel extremamente importante no currículo do aluno, apresentando e continuando com um bom desempenho no ensino fundamental e também no ensino médio.

Nos anos iniciais a disciplina de Matemática ocupa-se principalmente com dois objetos: números e formas, em que o aluno precisa aprender e saber em relação aos números: sua escrita, suas nomenclaturas, as operações, noções de frações, números decimais e problemas do cotidiano. Quanto à geometria, necessitam manipular figuras geométricas simples, planas ou espaciais, estabelecendo relação com temas: retas, ângulos, perímetro, área, volume e unidades de medidas.

Por outro lado, já nos anos finais, a aritmética se torna mais sólida em seus conceitos e inicia-se o estudo da álgebra, em que são investigadas as expressões algébricas (não mais somente as numéricas). Fórmulas e equações ganham sua devida importância relacionando situações vivenciadas pelos alunos, transformando-os em problemas matemáticos.

A geometria amplia seus conceitos e a trigonometria surge no último ano do Ensino Fundamental. Novas figuras geométricas e relações entre medidas de segmentos e ângulos fazem com que os estudantes despertem e entendam toda a matemática que os cerca, mesmo que de início pareça algo tão complexo. A probabilidade, estatística, a matemática financeira e alguns resultados usando aproximações fecham esse ciclo, fazendo com que a compreensão e a aprendizagem adequada sejam necessárias nessa nova etapa devido à expansão desses conteúdos. E como ficam os estudantes diante da aprendizagem desses novos conteúdos?

> Para a o aluno deve-se ficar entendido que não são necessários talentos e nem uma inteligência especial para aprender os conteúdos em Matemática do ensino fundamental. Qualquer criança com capacidade intelectual que saiba ler e escrever é também capaz de aprender Matemática nos anos iniciais. Mais ainda, não somente nela, mas todas as demais disciplinas lecionadas no ensino fundamental, ambas apresentam essencialmente um mesmo grau de dificuldade, sendo que para a matemática, será preciso um pouco mais de concentração, atenção e organização. (LIMA, 2007, p.179)

Nesse contexto, os estudantes quando motivados, em sua maioria chegam a apresentar um melhor desempenho e aprendizagem em matemática, podendo se estender também às outras disciplinas, desde que os conteúdos sejam bem apresentados, em didática, teorias, aplicações e contextualização.

Nos anos finais do ensino fundamental, em que as equações e os primeiros resultados por aproximações são apresentados, o conceito de números com representação decimal com infinitas casas decimais começa a ser abordado com a inclusão de novos conjuntos numéricos.

As operações algébricas e resultados, usando aproximações de números reais por números racionais, se fazem presentes no currículo do ensino básico. Esses novos conteúdos, estratégias e aplicações geram desafios não somente para os alunos, mas também para os professores, sendo necessário um novo olhar para ensinar essas novidades da matemática entre os envolvidos, sendo que a história e as construções de problemas são essências nessa nova etapa.

Por outro lado, é interessante notar o envolvimento dos alunos em atividades que venha a capturar a sua atenção, cabendo ao professor observar quando o discente começa a desenvolver a capacidade de fazer perguntas, buscar novas soluções, repensar e avaliar novas estratégias, bem como encontrar novas relações. Na verdade, ele está resolvendo problemas e contextualizando a matemática.

Nessa perspectiva, como já dissemos anteriormente, o professor deve explorar novos caminhos, tais como: o uso de tecnologias, a história e a contextualização da matemática, propondo desenvolvimentos de atividades envolvendo a resolução de problemas relativos ao tema abordado, ou seja, deve facilitar o processo de ensino/aprendizagem, sendo que esses problemas servem como ponto de partida para fazer emergir novos conhecimentos matemáticos.

> Assim a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com os temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como a fazer conexões dentro da própria Matemática. A história da Matemática é também uma importante ferramenta de contextualização ao enfocar a evolução e as crises pelas quais determinados conceitos matemáticos passaram ao longo da história. Como por exemplo de contexto histórico, a crise dos pitagóricos na passagem dos números racionais para os reais, com a introdução dos irracionais. (DANTE, 2010, p.518)

Novos aprendizados relacionando a expansão do entendimento sobre os conjuntos numéricos e suas aplicações, o progresso da ciência e a diversidade das aplicações Matemáticas sempre dependeram do avanço dos estudos em Matemáticos ao longo da história, e toda essa contextualização se faz necessária no processo de ensino aprendizagem do aluno.

3.2 Números reais e aproximações no ensino

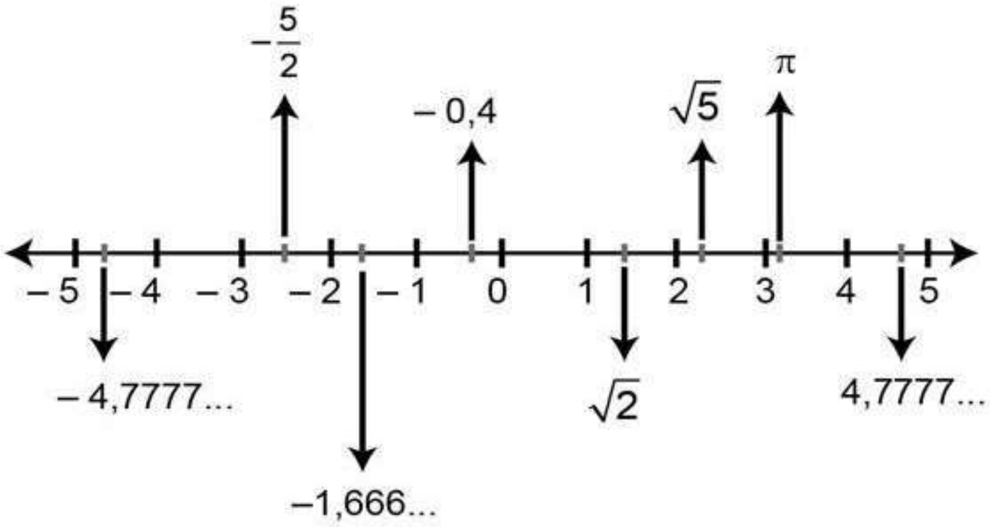
Segundo Lima (2006) e Ribenboim (2012), a necessidade dos números reais já era sentida pelos matemáticos gregos. A ilusão da comensurabilidade dos números duraria até o quarto século antes de Cristo. Uma crise viria a abalar os alicerces da escola pitagórica quando um de seus alunos observou que o lado e diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis.

> A solução que se impunha, e que foi finalmente adotada, era a ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados *números irracionais*. (...) As letras N, Q e R são iniciais das palavras *número* (*ou natural), quociente* e *real*. (...) O conjunto dos números reais pode ser visto como um modelo aritmético de uma reta real enquanto esta, por sua vez, é um modelo geométrico de R. Esta inter-relação entre Geometria e Aritmética, entre pontos e números, é responsável por grandes progressos da Matemática atual.(LIMA, 2006, p.65)

A existência desses segmentos incomensuráveis mostrava claramente que os números inteiros e as frações com numeradores e denominadores inteiros são insuficientes para medir toda a reta real, surgindo assim a necessidade de ampliar o conceito de número, que logo mais seriam chamados de *números* *irracionais.* No entanto, somente no século XIX, Cantor[2] e Dedekind[3] ambos trabalhando de forma independente, viriam a criar uma construção rigorosa do sistema dos números reais e abrir caminhos para a matemática moderna.

A figura 1 mostra uma representação geométrica de números reais como pontos sobre uma reta, chamada reta numérica. É possível demonstrar que os pontos dessa reta estão em correspondência bijetiva com o conjunto de todos os números reais.

Figura 1 - Representação geométrica da reta real



Fonte: https://brainly.com.br/tarefa/21276740, acessado em 25/08/2020

Para preencher toda a reta numérica, iremos por etapas e por conjuntos numéricos, sendo os números naturais os primeiros a serem estudados (esses já conhecidos há tantos milênios), valores discretos e positivos. O grande matemático Krenocker[4] supostamente disse: "*Deus criou os números naturais; todo o resto é obra do homem".*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

[2] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu no dia 3 de março de 1845 em St. Petesburg, Russia, e morreu no dia 6 de janeiro de 1918 em Halle, Alemanha.
[3] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916) foi um dos quatro filhos de uma família luterana de Braunschweig, Alemanha.

[4] Leopold Kronecker (1823 – 1891) foi um matemático alemão. Kronecker estudou em Berlim e obteve um doutorado em 1845, com uma tese sobre teoria dos números. Suas principais contribuições para a matemática foram no campo da álgebra e continuidade de funções.

Para cada número natural representados na reta real, tomamos os simétricos de todos os números naturais, tendo desse modo, preenchido todos os "valores exatos" da reta real, tanto pelo lado direito quanto pelo o esquerdo em relação à origem.

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

Os inteiros são fechados quanto às operações de adição e multiplicação, no entanto, quando temos a razão entre inteiros, com o denominador diferente de zero, nem sempre os resultados são inteiros, surgindo assim às frações e dízimas periódicas, os números racionais. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Agora, a reta numérica está quase completa, pois ao longo do tempo, foram surgindo números que intrigavam os matemáticos, como já mencionados, os números incomensuráveis, por exemplo:

- A razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência.
- Raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos.

Esses números, os irracionais, não podem ser escritos como quociente de dois números inteiros. São também aqueles quem cuja representação decimal é *infinita* e *não periódica*. O conjunto dos irracionais é denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Dessa forma, teremos preenchido toda a reta numérica em que é comumente chamada de reta real. A união dos conjuntos dos racionais e irracionais, ou seja, forma o conjunto dos números reais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$$

Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em Lima (2010).

3.2.1 Frações e as dízimas periódicas

Nos anos finais do Ensino Fundamental, o aluno se vê diante de novos desafios. São abordados os números irracionais e frações periódicas, que diferem do que já estavam acostumados, os "números exatos" e frações com casas decimais finitas, ou seja, inteiros e alguns racionais. Essa novidade dos incomensuráveis sem uma representação exata de um racional, também conhecida como "números sem fim", com uma representação decimal infinita, mas que diferem das dízimas periódicas, essas com quantidade de casas decimais infinita, porém com uma representação na forma de fração, um número racional.

Uma expressão decimal é um símbolo na forma

$$\beta = a_0, a_1 a_2, \dots, a_n 000 \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

Nesse caso β é uma fração decimal, cujo denominador é uma potência de 10, ou seja, um número racional. Por exemplo, temos aqui uma representação decimal finita.

$$15{,}438 = 15 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{15438}{1000}$$

No entanto, mesmo que a expressão decimal não seja finita, em alguns casos, ela pode ser representada por um número racional, desde que ela seja periódica

$$\beta_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Vejamos um caso que, em geral, gera dúvidas nos alunos sempre que lhe forem apresentados problemas com dízimas desse tipo

$$\beta = 0{,}999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Mesmo sendo um caso bem interessante quando apresentado aos alunos, é comum seguirem um processo para achar uma fração que seja equivalente à expressão decimal acima, e nesse caso, pode-se afirmar que $\beta = 1$. Para justificar tal afirmação, seguem os passos abaixo,

$$x = 0{,}999 \dots \Leftrightarrow 10x = 9{,}999 \dots \Leftrightarrow 10x - x = 9 \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$$

Sendo mais claro, podemos usar aproximações de β, por exemplo, $\beta_1 = 0{,}9, \beta_2 = 0{,}99$, $\beta_3 = 0{,}999$ e $\beta_n = 0{,}999 \dots$. Temos, $1 - \beta_1 = 0{,}1$, $1 - \beta_2 = 0{,}01$, $1 - \beta_3 = 0{,}001$ e seguindo o raciocínio teremos, $1 - \beta_n = 10^{-n}$. Desse modo, quando tomamos n suficientemente grande, a diferença $1 - \beta_n$ torna-se tão pequena quando se deseje, ou seja, o número racional $\beta_n = 0{,}99 \dots 9$ é um valor cada vez mais próximo de 1, tendo 1 como limite.

Tomando algumas igualdades entre as dízimas periódicas e , em que todas as propriedades sobre as dízimas periódicas podem ser verificadas em Lima

(2006), verificamos que todas elas podem ser representadas por um número racional que se chama *fração geratriz*[5], conforme vemos a abaixo:

Exemplo 3.1: *Encontrar uma fração geratriz que representa cada um das expressões decimais.*

a) $0,777\ldots = \frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots = 7\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\right)=\frac{7}{9}$

b) $3,555\ldots = 3+(\frac{5}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\cdots) = 3+\frac{5}{9}=\frac{32}{9}$

c) $0,3737\ldots = \frac{37}{100}+\frac{37}{100^2}+\frac{37}{100^3}+\cdots = 37\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{37}{100^3}+\cdots\right)=\frac{37}{99}$

Como já vimos neste trabalho, nem todas as expressões decimais possuem uma quantidade de casas decimal finita ou infinita, mas com um período de repetição. E se essas expressões não se encaixam nos modelos das dízimas periódicas, podemos achar uma equivalência racional exata para elas? A resposta é não, e o que podemos fazer é aproximá-las por um racional utilizando métodos numéricos de aproximações sucessivas com uma aproximação tão precisa quanto se deseja.

3.2.2 O primeiro contato com as aproximações

No Ensino Básico, quando propostos aos estudantes, algumas atividades os desafiam a trabalhar com valores aproximados, e de certo modo, é um dos primeiros contatos com as aproximações sucessivas por números reais por números racionais. Alguns livros didáticos usados no ensino básico exibem fórmulas e técnicas para a solução de problemas usando aproximações, como por exemplo, calcular raízes quadradas de números em que não são quadrados perfeitos, ou seja, será um número irracional.

Exemplo 3.2: *Desejamos calcular o valor do lado de um quadrado com área igual a 60*.

Resolver o problema acima é equivalente a achar um valor para l, isto é, resolver uma equação quadrática do tipo,

$$l^2 = 60 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{60} = \pm 2\sqrt{15}$$

[5] A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica, seguida de um período menos a parte não-periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.

Por ser tratar de uma medida de segmento, tomamos apenas o valor positivo, temos então, $l = 2\sqrt{15}$, porém, essa resposta não nos fornece uma aproximação decimal. Trabalhar com resultados expressos na forma de radicais não é conveniente em diversas circunstâncias, e é justamente em situações assim em que os métodos de aproximações ganham sua devida importância. Vejamos uma fórmula que soluciona parcialmente o problema, que facilmente é encontrada nos livros didáticos.

Figura 2 - Expressão para o cálculo aproximado da raiz quadrada

$$\sqrt{A} = \text{Raiz quadrada prucurada}$$

$$\sqrt{B} = \text{Raiz quadrada mais próxim}\boldsymbol{a}\text{ de } \sqrt{A}$$

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B}) \cong 0 \Leftrightarrow (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 \cong 0$$

$$\mathrm{A} - 2\sqrt{\mathrm{A}}.\sqrt{\mathrm{B}} + \mathrm{B} \cong 0 \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B} \cong 2\sqrt{\mathrm{A}}.\sqrt{\mathrm{B}}$$

$$\sqrt{\mathrm{A}} \cong \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}}{2\sqrt{\mathrm{B}}}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando a fórmula definida na figura 2, teremos uma resposta aproximada, considerando que $\sqrt{B}$ é o quadrado perfeito mais próximo de $\sqrt{A}$, usando a fórmula dada, temos que $A = 60$ e $B = 64$, sendo assim, o valor de $\sqrt{A}$ será:

$$\sqrt{A} \cong \frac{A + B}{2\sqrt{B}} = \frac{60 + 64}{2.\sqrt{64}} = \frac{124}{16} = 7{,}75$$

O resultado acima é uma ótima aproximação para o problema, pois $7{,}75^2 = 60{,}0625$, nos dando uma diferença de $60 - 60{,}0625 = 0{,}0625$. Mesmo se tratando de resultado por aproximação, usamos um método direto, pois fizemos o uso de uma expressão algébrica para a solução do problema.

Agora, de acordo com a figura abaixo, através de multiplicações sucessivas, é possível obter uma melhor aproximação, além do mais, sendo uma oportunidade para a compreensão de um processo de aproximações sucessivas de números irracionais.

Figura 3 - Aproximações por multiplicações sucessivas

$7{,}5^2 = 56{,}25$	$7{,}72^2 = 59{,}5984$	$7{,}743^2 = 59{,}954049$
$7{,}6^2 = 57{,}76$	$7{,}73^2 = 59{,}7529$	$7{,}744^2 = 59{,}969536$
$7{,}7^2 = 59{,}29$	$7{,}74^2 = 59{,}9076$	$7{,}745^2 = 59{,}985025$
$7{,}8^2 = 60{,}84$	$7{,}75^2 = 60{,}0625$	$7{,}746^2 = 60{,}000516$
$7{,}9^2 = 62{,}41$	$7{,}76^2 = 60{,}2176$	$7{,}747^2 = 60{,}016009$

Fonte: Elaborado pelo autor.

De início, tomando a desigualdade $7 < l < 8$, com 1 casa decimal, quando elevamos l ao quadrado, teremos uma aproximação com 2 casas decimais, e ao observarmos os resultados mais próximos de 60, no caso $7{,}7$. Efetuando novamente as multiplicações, teremos agora, aproximações com 4 casas decimais. Caso façamos as novas multiplicações com $7{,}75$, o valor irá aumentar, ficando superior a 60, e então, nossa escolha será $7{,}74$, e quando efetuamos as multiplicações novamente, encontramos aproximações com 6 casas decimais.

Depois de 3 iterações, percebemos que a cada nova multiplicação a fim de aproximar o resultado, a quantidade de casas decimais vai aumentando, em que cada vez mais obtemos melhores aproximações para o valor desejado.

. Portanto, concluímos que o valor aproximado é $l \cong 7{,}746$ com um erro de 5×10^{-4}, e quanto mais iterações forem realizadas, menor será a diferença entre os resultados obtidos e o valor de estabelecido inicialmente, o que chamaremos de erro ou precisão.

3.3 Aproximações históricas

De acordo com os registros históricos, somente por volta de 2000 a. C, aparecem registros de um sistema de numeração posicional com base 60 e grafia cuneiforme. Já em 1700 a. C os números irracionais ganham destaque com o avanço da álgebra antiga, e os tabletes babilônicos registram o que se pode caracterizar nos dias atuais como uma lista de exercícios em que foram encontrados problemas envolvendo: triângulos, quadrados, círculos e polígonos inscritos, além de cálculos de áreas, conforme afirma Garbi (2009).

> “Os matemáticos e astrônomos babilônicos do II milênio a.C. realizaram feitos surpreendente: eles conheciam a propriedades geral dos triângulos retângulos (hoje chamado de teorema de Pitágoras, também já conhecida pelos chineses no século XII a.C.), resolviam equações do primeiro e do segundo grau, calculavam áreas e volumes de certas figuras geométricas, determinavam a raiz de 2 com grande precisão, etc. Certamente, a essas altura, as descobertas matemáticas não mais se faziam de maneira puramente indutiva e contavam com o apoio de algum raciocínio dedutivo não formalizado, que desconhecemos.” (GARBI, 2009, p.11)

Os problemas encontrados nestes documentos eram expressos, em sua maioria, por palavras, e apenas os números eram representados por símbolos, o que hoje chamamos de “álgebra retórica”. E entre os documentos mais antigos destacamos o mais famoso deles – o Papiro de Ahmes[6] (ou de Rhind), conforme a figura 3 – um papiro egípcio datado de 1650 a.C, em que apresentam soluções para 85 problemas de aritmética e geometria.

Em um dos 85 problemas, encontramos a resolução aproximada da quadratura do círculo que equivale a considerar que π tem valor cerca de $3{,}16$, mostrando que os métodos de aproximações sucessivas já eram usados na solução de vários tipos de problemas.

[6] Ahmes ou Aahmesu – Escriba egípcio que descreveu em escrita hierática os problemas constantes no Papiro de Rhind a partir de outro documento de 1850 a. C

Figura 4 - Papiro de Rhind ou papiro de Ahmes e Tabua de Yale (YBC 7289)

Fonte: https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/rhind/historia.htm. Acessado em 29/11/2020

É evidente que os egípcios não usavam essa simbologia da álgebra moderna, esta inventada há poucos séculos, mas faziam o uso de artifícios engenhosos que permitia encontrar soluções exatas e aproximadas para muito dos problemas da época.

Segundo Eves (2004), há mais de 2500 a.C, as civilizações antigas sabiam da existência dos números irracionais e da busca de aproximações para sua representação, e um exemplo claro desse fato, como mostra a figura 3, é a tabuleta de argila YBC7289 que traz uma aproximação para $\sqrt{2}$ com precisão de 6 casa decimais, visto que uma aproximação numérica de $\sqrt{2}$ é um erro bem pequeno e preciso para a época.

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{3600}+\frac{10}{216000}=\frac{216000}{216000}+\frac{86400}{216000}+\frac{3060}{216000}+\frac{10}{216000}=\frac{305470}{216000}=1{,}414213$$

3.3.1 Métodos de aproximações sucessivas, um modelo geométrico

Babilônicos tinham aproximações para extrair raízes quadradas, enquanto que os gregos se deparavam com as grandezas incomensuráveis, e a necessidade de justificar o porquê do valor com casas decimais infinitas e sem periodicidade para esses números abalava a escola pitagórica. Além dos mais, os gregos sempre foram considerados excelentes geômetras, cujos problemas eram resolvidos por meio de construções geométricas, e muitos deles apenas com régua e compasso não graduada, segundo afirma Eves (2004).

Os gregos buscavam métodos de aproximações para esses números irracionais, mesmo que ainda não os definissem com esse nome, e estima-se que $\sqrt{2}$ seja o primeiro incomensurável a ser estudado, vejamos uma demonstração de sua irracionalidade.

Exemplo 3.3: *A irracionalidade de* $\sqrt{2}$

Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja um número racional, logo:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

com a e b inteiros e $b \neq 0$, podemos supor que a fração acima seja irredutível, isto é, a e b primos entre si. Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, temos:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

O termo $2b^2$ é um número inteiro par, de modo que leva o número a^2 também a ser par e, portanto, a é um inteiro par. Suponhamos que $a = 2k$, com k também inteiro. Substituindo $a = 2k$ na equação acima, temos

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow$$

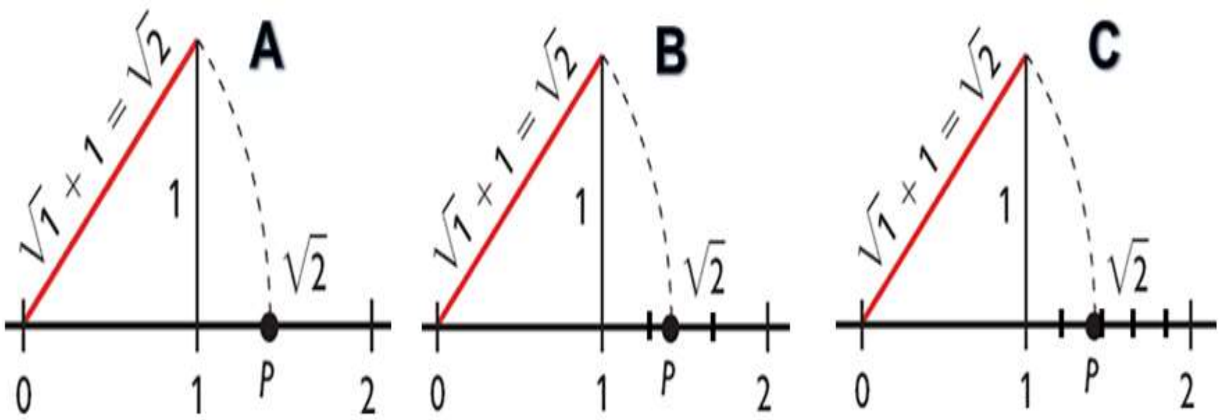
$$4k^2 = 2b^2 \Rightarrow$$

$$2k^2 = b^2$$

O termo $2k^2$ é um número inteiro par, de modo que leva b^2 a ser também um inteiro par e, portanto, b é um inteiro par. Chegando à conclusão que a e b são ambos inteiros pares, mas inicialmente supomos que eles eram primos entre si, essa contradição nos leva à conclusão de que não é possível obter $\sqrt{2}$ na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e, portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Sabendo que não era possível a representação dos incomensuráveis por um número racional, buscavam-se aproximações para $\sqrt{2}$. Assim, tomando um quadrado de lado 1 unidade e aplicando o Teorema de Pitágoras definimos a diagonal desse quadrado, $d = \sqrt{2}$ unidades.

Figura 5 - Aproximações através de subdivisões sucessivas



Fonte: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/reta-real

Com o uso do compasso, projetamos a diagonal do quadrado para a reta, e então temos $d = \overline{OP}$, como é mostrado em A na figura 5. Temos que $\overline{OP}$ encontra-se entre dois números inteiros, então $1 < d < 2$, agora novamente, os gregos utilizavam de propriedades das proporções de segmentos e conseguiam dividir uma unidade em n segmentos de mesma medida, com cada um medindo $\frac{1}{n}$. Assim, como é mostrado em B, em que a unidade é dividida em 3 segmentos de mesma medida, cada um medindo $\frac{1}{3}$, temos uma $1°$ aproximação para $\sqrt{2}$,

$$1 + \frac{1}{3} < \sqrt{2} < 1 + \frac{2}{3} \Rightarrow 1{,}333 \ldots < \sqrt{2} < 1{,}666 \ldots$$

Por sua vez, como é mostrado em C, dividindo essa unidade em 4 segmentos com mesma medida, cada um medindo $\frac{1}{4}$, temos uma 2° aproximação,

$$1 + \frac{1}{4} < \sqrt{2} < 1 + \frac{2}{4} \Rightarrow 1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}50$$

A cada nova subdivisão dessa unidade, esse intervalo vai ficando menor, e na verdade estamos cercando este número quando n é cada vez maior, e o valor de procurado para $\sqrt{2}$ irá sempre estar entre dois desses segmentos consecutivos. Continuando essas divisões em n segmentos de mesma unidade, teremos:

$$1 + \frac{m}{n} < \sqrt{2} < 1 + \frac{m+1}{n}, m, n \in \mathbb{N}$$

Isso nos mostra que é possível aproximar qualquer raiz quadrada por um racional com uma aproximação tão próximo quanto desejarmos e quanto mais iterações houver, iremos encontrar um erro cada vez menor.

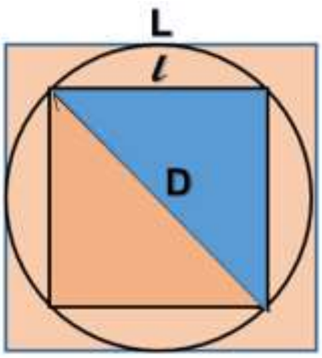
Podemos depreender que as civilizações antigas já tinham a ideia, e enquanto outras tinham o domínio fascinante desses métodos de aproximações, uma técnica histórica onde eram usadas teorias tão atuais que podem não só ser compreendidas, como também apresentadas ao Ensino Básico.

3.3.2 Arquimedes e as aproximações para $\boldsymbol{\pi}$

O número π é sem dúvida alguma a mais famosa e mais fascinante das constantes matemáticas, sendo muito utilizadas no ensino básico, praticamente em cálculo de áreas, volumes e na trigonometria. Seu valor é pouco maior que 3, porém seu desmembramento decimal é infinito: $3{,}14159265358979$ ....

Arquimedes[7] em sua obra desenvolveu um método para calcular o comprimento de uma circunferência utilizando polígonos inscritos e circunscritos e, após calcular seus perímetros, definiu intervalos que estimassem o valor do comprimento da circunferência e, consequentemente, o valor de π.

Figura 6 - Aproximação de π para quadrado inscrito e circunscrito em um círculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

[7] Arquimedes de Siracusa(287 a.C – 212 a.C) foi um matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego. Embora poucos detalhes de sua vida sejam conhecidos, são suficientes para que seja considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica.

De acordo com a figura acima, seja C o comprimento da circunferência e D o diâmetro do quadrado inscrito e $\pi = \frac{C}{D}$, sendo que C é maior que o perímetro do quadrado inscrito e menor que o perímetro do quadrado circunscrito, obtemos a seguinte desigualdade $4l < C < 4L$, como $L = D$, logo:

$$4l < C < 4D$$

Usando o Teorema de Pitágoras no triangulo retângulo inscrito na circunferência C, obtemos:

$$l^2 + l^2 = D^2$$

$$2l^2 = D^2$$

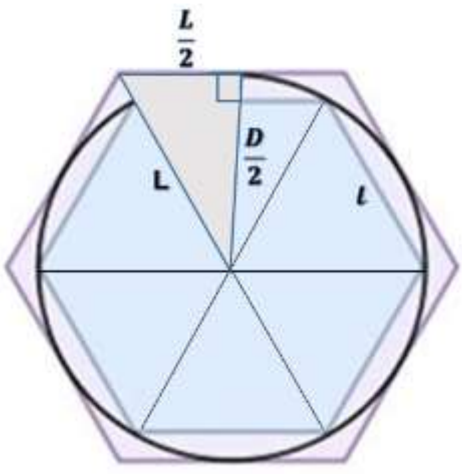
$$l = \frac{D\sqrt{2}}{2}$$

Voltando a primeira desigualdade e substituindo l em $4l < C < 4D$ e usando uma aproximação para $\sqrt{2} = 1{,}4$, teremos

$$4 \times \frac{D\sqrt{2}}{2} < C < 4D \Rightarrow 2{,}8D < C < 4D$$

Dividindo a desigualdade por D, teremos $2{,}8 < \frac{C}{D} < 4$, ou seja, encontramos uma primeira aproximação, $2{,}8 < \pi < 4$. Arquimedes percebeu que aumentando o número de lados dos polígonos, estaria aproximando ainda mais o valor de π, vejamos agora quando temos um hexágono regular.

Figura 7 - Aproximação de π para hexágono inscrito e circunscrito em um círculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o caso do hexágono regular inscrito, inicialmente temos que para o comprimento da circunferência C vale a desigualdade, $6l < C < 6L$ com $l = R$, obtendo que $6R < C \Rightarrow 3D < C$. Para o hexágono circunscrito, usando o Teorema de Pitágoras, temos

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$L^2 = \frac{L^2}{4} + \frac{D^2}{4} \Rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{D^2}{4} \Rightarrow \frac{3L^2}{4} = \frac{D^2}{4} \Rightarrow 3L^2 = D^2 \Rightarrow$$

$$\mathrm{L} = \frac{D\sqrt{3}}{3}$$

Voltando a desigualdade em que $C < 6L$, substituindo L com uma aproximação para $\sqrt{3} = 1{,}74$, temos que $C < 3{,}48$, assim, o comprimento C está compreendido de tal modo que, $3\mathrm{D} < \mathrm{C} < 3{,}48\mathrm{D}$. Dividindo a desigualdade por D, teremos $3 < \frac{C}{D} < 3{,}48$, ou seja, encontramos uma segunda aproximação, $3 < \pi < 3{,}48$.

Arquimedes continuou a aumentar a quantidade de lado dos polígonos regulares em que a circunferência está inscrita e circunscrita e usando o mesmo raciocínio que foram usados até então, ele dividiu o lado do hexágono em 2, obtendo um polígono de 12 lados, depois de 24 lados, 48 e 96 lados.

$$caso\ n = 4:\ 2{,}8 < \pi < 4$$

$$caso\ n = 6:\ 3 < \pi < 3{,}48$$

$$\vdots$$

$$aso\ n = 96:\ \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Depois de muitos cálculos exaustivos, Arquimedes chega a resultados para o polígono de 96 lados, com aproximação de 4 casas decimais

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1428$$

O que torna esse processo interessante é o fato de ser intuitivo, podendo ser estendido ao continuarmos a subdividir os polígonos regulares, sendo possível obter melhores aproximações para o número π, e isso é um engenhoso método de aproximações sucessivas elaboradas há mais de 2000 anos.

4 EQUAÇÕES E OS MÉTODOS DE SOLUÇÕES

Os estudos sobre equações sempre tiveram destaque no ensino básico, e do ponto de vista de muitos professores, é um dos ramos mais importantes da Matemática, sejam elas algébricas, trigonométricas, exponenciais, diferenciais ou de qualquer outra natureza, conforme afirma Andrade (2013). Ao longo da história, as equações surgiram para suprir a necessidade de resolvermos problemas em diversas situações, buscando relacionar ou “equacionar esses problemas” em expressões matemáticas, encontrando assim o “xis do problema”.

Segundo Garbi (2009), a palavra equação é de origem latina, que originou as mesmas palavras iguais e igualdade, estabelecendo correlações entre os fatos e os conceitos matemáticos e descobrindo equivalências entre as partes, tornando as equações como linguagens.

As equações estão por toda parte e em diversas situações – elas fazem parte do cotidiano e são facilmente encontradas em diversas áreas de conhecimentos: Física, Química, Biologia, entre outras. A contextualização e aplicação com essas demais áreas sobre os estudos das equações se faz necessário, em que posteriormente será exigido do aluno representar, modelar ou encontrar sua solução ou soluções, relacionando as variáveis aos problemas propostos.

Estudar equações está ligado diretamente sobre como resolvê-las e quais métodos serão utilizados para a sua solução, sendo que essas soluções poderão ser exatas ou aproximadas, reais ou complexas. As soluções aproximadas para as equações são estudadas com pouca frequência no Ensino Básico, e dificilmente são apresentados resultados com aproximações decimais, o que na maioria das vezes são deixadas em forma de radicais.

4.1 Babilônicos e equações de 2° grau aproximadas

De acordo com os registros históricos, conforme mostramos no capítulo 2, por volta de 1700 a.C, há indícios de que os babilônicos já conheciam a solução das equações de 2° grau, e no entanto, haviam resoluções diferentes das que são encontradas nos livros didáticos.

As aproximações para $\sqrt{2}$ encontradas nos Tábuas de argila continham uma precisão de algumas casas decimas, evidenciando a utilização de métodos de aproximações sucessivas para suas soluções.

Segundo (VILENKIN, 1978) quando a solução é atribuída aos conhecimentos da babilônia antiga para calcular raízes aproximadas quadráticas de um número natural a. Desejamos então extrair a raiz quadrada do número 20 com aproximações de 4 casas decimais. Com uma aproximação para a raiz natural mais próxima de $\sqrt{20}$, temos:

$$\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$$

$$4 < \sqrt{20} < 5$$

Definido uma primeira aproximação para nossa raiz, $x_1 = 4$. Designaremos $\beta_1 < 1$ uma primeira aproximação decimal, teremos que $\sqrt{20} = \mathrm{x}_1 + \beta_1$, substituindo x_1 e depois elevando ao quadrado ambos os membros, logo:

$$\sqrt{20} = 4 + \beta_1$$

$$20 = 16 + 8\beta_1 + {\beta_1}^2$$

$${\beta_1}^2 + 8\beta_1 - 4 = 0 \qquad (1)$$

Sabendo que $0 < \beta_1 < 1$ é a nossa aproximação desejada e analisando a equação (1), temos que ${\beta_1}^2$ é tem um valor numérico pequeno em comparação a $8\beta_1$. Sendo assim, na tentativa de achar uma aproximação de β_1, de modo que podemos dizer que $8\beta_1 - 4$ é aproximadamente igual a 0, desse modo obtemos a equação $8\beta_1 - 4 \approx 0$, onde $\beta_1 \approx 0{,}5$. Substituindo o valor de β_1 em $\sqrt{20} = 4 + \beta_1$, e temos então uma segunda aproximação $x_2 = 4{,}5$.

Repetindo o processo a fim de obter uma melhor aproximação para $\sqrt{20}$, teremos β_2 como aproximação para o novo valor de x_2. Agora, temos que $\sqrt{20} = x_2 + \beta_2$ e novamente elevando ambos os membros ao quadrado têm que,

$$20 = {x_2}^2 + 2x_2\beta_2 + {\beta_2}^2$$

e novamente desprezando o valor de ${\beta_2}^2$, temos que

$$\beta_2 \approx \frac{20 - {x_2}^2}{2\mathrm{x}_2}$$

Isto significa que a terceira aproximação para a expressão $\sqrt{20}$, depois de repetir as mesmas etapas, temos

$$x_3 \approx x_2 + \beta_2 = x_2 + \frac{20 - {x_2}^2}{2\mathrm{x}_2} = \frac{20 + {x_2}^2}{2x_2} = \frac{20 + 4{,}5^2}{2 \times 4{,}5} = 4{,}4722 \ldots$$

com uma aproximação de 4 casas decimais, temos que $\mathrm{x}_3 = 4{,}4722$, de modo semelhante e continuando o processo para ter uma melhor aproximação para x_4, expresso pela fórmula

$$x_4 = x_3 + \beta_3 = x_3 + \frac{20 - {x_3}^2}{2\mathrm{x}_3} = \frac{20 + {x_3}^2}{2x_3} = \frac{20 + 4{,}4722^2}{2.4{,}4722} = \frac{40{,}0001}{8{,}9446} = 4{,}4721$$

Após uma verificação em uma calculadora, o valor aproximado de $\sqrt{20}$ é com 5 casa decimais é $4{,}47213$, considerando o erro com de $0{,}00003$ para a solução do problema. Se continuarmos o processo de aproximações para calcular o valor de $\sqrt{20}$, usando a expressão $x_{n+1} = \frac{20 + {x_\mathrm{n}}^2}{2x_n}$, para cada novo valor de x_n, mais próxima será a aproximação para o a raiz quadrada procurada, e o critério de parada é quando as diferenças entre x_{n+1} e x_n chegamos ao valor do erro de aproximação quando definido.

Dessa maneira, calculamos qualquer raiz quadrada de um número positivo a dado, em que tomamos uma primeira aproximação x_1 e dada pela expressão algébrica abaixo:

$$x_{n+1} = \frac{\mathrm{a} + {x_\mathrm{n}}^2}{2x_n}$$

No capítulo 4, veremos que o método usado pelos babilônicos para extrair raízes quadradas terá equivalência com o método de Newton para aproximações de raízes em equações do 2° grau da forma $x^2 - a = 0$

4.2 Equações e os métodos algébricos

Muito tempo se passou desde as soluções conhecidas para as equações do 2° grau até à primeira solução das equações de 3° grau, e a partir daí a busca para determinar fórmulas que solucionavam equações com grau maior que 3 tornou-se um tarefa para muitos matemáticos, cujo propósito era pôr seus nomes no topo não só de grandes academias das ciências, mas também em revistas científicas renomadas da época.

A busca por soluções das equações de 3° e 4° grau ressurgiram na Itália no século XVI, onde Fior, discípulo de Scipione Ferro (1465-1526) em uma disputa com Tartaglia (1499-1557) para resolver 30 problemas com equações de 3° grau, propôs um duelo entre ambos. Tartaglia venceu, mostrando soluções que ainda não tinham seus resultados publicados na época, e que posteriormente, em 1545, G.Cardano (1501-1576) iria chantagear Tartaglia e levar os créditos das soluções das equações do 3° ao publicar na *Ars Magna* como soluções autorais.

Nessa mesma publicação, G. Cardano divulgou as soluções para as equações de 4° grau apresentadas por seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565). Na mesma época surgiu uma dúvida baseada nas experiências com as equações de 2° e 3° grau: será que equação de grau n tem sempre n raízes reais? A resposta a essa conjectura foi resolvida apenas depois das tentativas de Leonard Euler (1707-1783) e Lagrange (1736-1813), quando Carl F. Gauss (1777-1855), em sua tese de doutorado, provou esse resultado batizando-o de *Teorema Fundamental da Álgebra.*

As soluções destas equações são dadas por expressões algébricas, sendo estas as que ganham mais importância no ensino básico, e são aquelas em que a incógnita aparece submetida às chamadas operações algébricas: adição, sutração, multiplicação, potenciação inteira, divisão e a radiciação.

Por exemplo

$$5x + 3 = 0$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$bx^3 + \sqrt{8x^2} + r = 5$$

são equações algébricas.

Para as soluções de equações de grau 5, buscava-se solucionar se essas equações eram solúveis algebricamente. Com base em resultados unificados de Lagrange sobre as equações de grau 4, Paolo Ruffini (1765-1822) em 1813 e Niels H. Abel (1802-1829) em 1824 provaram que elas essas equações não eram solúveis algébricamente. Finalmente em 1832, Evariste Galois (1811-1832) descobriu critérios gerais de resolubilidade sobre as equações, fechando esse ciclo da álgebra e abrindo espaço para a álgebra moderna.

4.3 Estudo de equações no ensino básico

Os conteúdos de funções é um dos conteúdos mais presentes no currículo da Educação Básica, sendo as equações um dos temas que mais se destacam. É comum ouvir durante as aulas de Matemática, "*vamos achar as raízes dessa equação*", assim como outras dúvidas que estarão correlacionadas, como: analisar e construir gráficos de uma função, encontrar pontos de máximos e mínimos e verificar a existência de raízes reais ou complexas, são assuntos complementares aos estudos de funções.

Com base nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), os estudos de funções é umas das áreas mais com mais horas de estudos no Ensino Básico.

Quadro 1 - Conteúdo de funções para o Ensino Fundamental e Médio

Ano Escolar	Conteúdos
7° ano do ensino fundamental	Equação do 1° grau e números inteiros
8° ano do ensino fundamental	Polinômios, fatoração e números reais
9° ano do ensino fundamental	Equação do 2° grau
1° Série do Ensino Médio	Funções: função do 1º e 2° grau, logarítmica, trigonométrica e exponencial.
2° Série do Ensino Médio	Revisão de função do 1° grau e função do 2º grau
3° Série do Ensino Médio	Funções polinomiais

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o quadro 2, percebemos a importância que é dada ao tema de funções e seus conteúdos, tendo inicio ainda no Ensino Fundamental até o fim do Ensino Médio. Os assuntos mais abordados são: identificar e determinar o grau de polinômios; calcular valor numérico de um polinômio; efetuar operações entre polinômios; utilizar teoremas polinomiais para solução de problemas; resolver equações polinomiais utilizando teorema fundamental da álgebra; representar graficamente uma função polinomial e utilização da regra de Girard.

Destacamos ainda a importância desses conteúdos nas competências e habilidades da grade curricular do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) organizado pelo Ministério da Educação. Os estudos de funções estão diretamente ligados a suas soluções dentro dos conjuntos numéricos, à construção de gráficos, construir e analisar tabelas e cálculos usando estimativas e aproximações numéricas.

Quadro 2 - Competências e habilidades componentes da grade curricular do ENEM

Competência de área 1 Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações: naturais, inteiros, racionais ou reais.
Competência de área 5 Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	H19 – Identificar representações algébricas que expressam a relação entre grandezas
	H20 - Interpretar gráficos cartesianos que representam relações entre grandezas
	H21 - Resolver situações-problemas cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos
Competência de área 6 Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
	H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos
	H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.4 Os métodos iterativos

Todos os métodos para resolver as equações descritas até aqui são métodos algébricos ou analíticos, em que as solucões são expressas por radicais. Existem outros métodos para resolver as equações algébricas, e é através dos métodos numéricos, sendo muito utilizados nas equações de grau $n \geq 5$, pois estas não apresentam fórmulas definidas para soluções algébricas.

Por sua vez, os métodos numéricos iterativos vêm a se tornar uma alternativa para encontrar essas raízes aproximadas. Esses métodos geram uma sequência de números reais que convergem para a raiz de uma equação, fazendo uso de estimativas e aproximações locais. No entanto, esses métodos não funcionam sempre em todas as funções, e elas devem satisfazer determinadas condições para quais casos uma sequência deve convergir ou divergir para a raiz desejada.

Os métodos numéricos mais utilizados para cálculos de zeros de funções são:

- Método da Bissecção
- Método da Posição Falsa
- Método de Secante
- Método de Ponto Fixo
- Método de Newton-Raphson

Uma proposta para trabalharmos com métodos numéricos é aplicá-los em equações que possam ser contextualizadas em sala de aula. Inicialmente propomos que as equações sejam trabalhadas com funções que satisfaçam os critérios de cada método a ser utilizado, pois verificamos que alguns desses critérios fazem uso de conteúdos ausentes nos PCN para o Ensino Básico. Posteriormente, é possível construir uma metodologia em que os alunos possam aprender esses conhecimentos em outras funções, cujos métodos sejam aplicados.

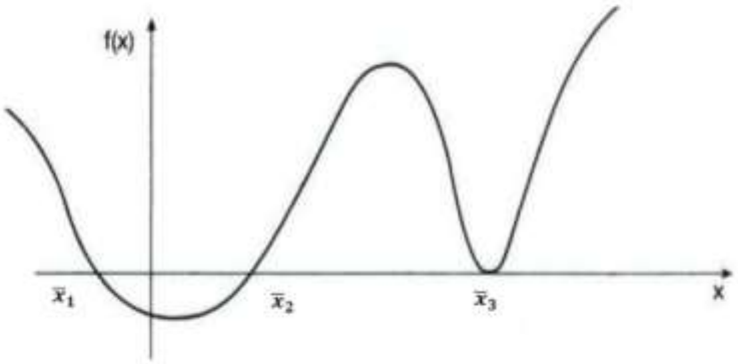
Fazer o uso de recursos computacionais para exibir gráficos e efetuar cálculos mais complexos é uma proposta para melhor compreensão dos métodos numéricos. Recomendamos o *software* GeoGebra Classic, um recurso gratuito e com versão portuguesa para construir e analisar gráficos. Para os cálculos mais complexos, indicamos uma extensão do Microsoft Office e o Excel, em que podemos construir tabelas e efetuar os cálculos mais complexos exigidos pelos métodos numéricos.

Uma das propostas do trabalho é o cálculo de zeros de funções utilizando os métodos numéricos de aproximações sucessivas, o Método do Ponto Fixo e Método de Newton, dando ênfase às funções polinomiais com coeficientes inteiros que apresentem raízes irracionais.

4.5 Localizando zeros de funções

Dada uma função f contínua em intervalo $[a, b]$, se existirem um ou mais zeros nesse intervalo, será $\bar{x}$, tal que $f(\bar{x}) = 0$. Podemos observar na figura 3.1 que os zeros da função são onde a função intersecta o eixo x, no exemplo abaixo, existem 3 zeros.

Gráfico 1 - Zeros de uma função polinomial $f(x)$



Fonte: (Ruggiero, 1996)

Localizar os intervalos em que se encontram as raízes de uma equação não é uma tarefa fácil e umas das opções são os recursos de *softwares*, por exemplo, o GeoGebra que exibem gráficos de funções. O Teorema de Bolzano facilitar esse processo, localizando os zeros de uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, sendo útil para as estimativas iniciais e cálculo de raízes utilizando os métodos iterativos.

Antes da demonstração do Teorema de Bolzano faz-se necessária a prova do Lema da Permanência de Sinal.

Lema: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma *função contínua.* Se $x_0 \in I$ é tal $f(x_0) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

Em particular, f ainda é positiva em $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Se $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f: I \to \mathbb{R}$ uma *função contínua.* Se $x_0 \in I$ é tal $f(x_0) < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{f(x_0)}{2}$$

Em particular, f ainda é negativa em $I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Demonstração. Faremos uma prova para o caso$f(x_0) > 0$, a prova para o outro caso é totalmente análogo.

A continuidade nos garante que, $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in I, |x - x_0| < \ \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

No entanto, a última desigualdade implica

$$f(x) - f(x_0) > -\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

para todo $x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Teorema de Bolzano: $Seja\ f: [a, b] \to \mathbb{R}\ uma\ função\ contínua.\ Se\ f(a)f(b) < 0,$ $então\ existe\ c\ \in (a, b)\ tal\ que\ f(c) = 0.$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e seja $A = \{x\ \in [a, b]; f$ é negativa no intervalo $[a, x]\}$.

Por hipótese, $a\ \in A$, temos $A \neq 0$. Por outro lado, A é limitado, já que temos $A\ \subset [a, b]$ e, portanto, existe $c = supA$, mostraremos que $f(c) = 0$.

Temos inicialmente que $c > a$, pelo Lema da Permanência de Sinal. Assim, se tivéssemos $f(a) < 0$, teríamos a existência de $0 < \delta < b - a$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in [a, a + \delta)$.

Agora, afirmamos que $f(c) = 0$. Vamos supor que $f(c) < 0$, então $c < b$, já que $f(b) > 0$ e, novamente pelo Lema da Permanência de Sinal, garante a existência de $0 < \delta < b - c$ tal que $f(x)$ é negativa para todo $x\ \in [c - \delta, c + \delta]$. Mas, $c = supA$, tomemos um $d\ \in (c - \delta, c) \cap A$, de sorte que $f < 0$ em $[a, d]$; logo $f < 0$ em $[a, d] \cup \left(c - \frac{\delta}{2}, c + \frac{\delta}{2}\right] = [a, c + \frac{\delta}{2}]$, o que entra em contradição com o fato de $c = supA$.

Por outro lado, agora se $f(c) > 0$, novamente pelo Lema da Permanência de Sinal existiria um $\delta > 0$ tala que f seria positiva em $(c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$; em particular $A \cap (c-\delta, c] = \emptyset$, então teríamos $A \leq c-\delta$, novamente uma contradição. Assim, temos uma única possibilidade que é termos $f(c) = 0$.

Vejamos um exemplo da utilização do teorema de Bolzano para estimar intervalos que contenham os zeros de uma função.

Exemplo 4.1: *Exiba intervalos que contenha as zeros da função* $f(x) = x^3 - 5x + 1$.

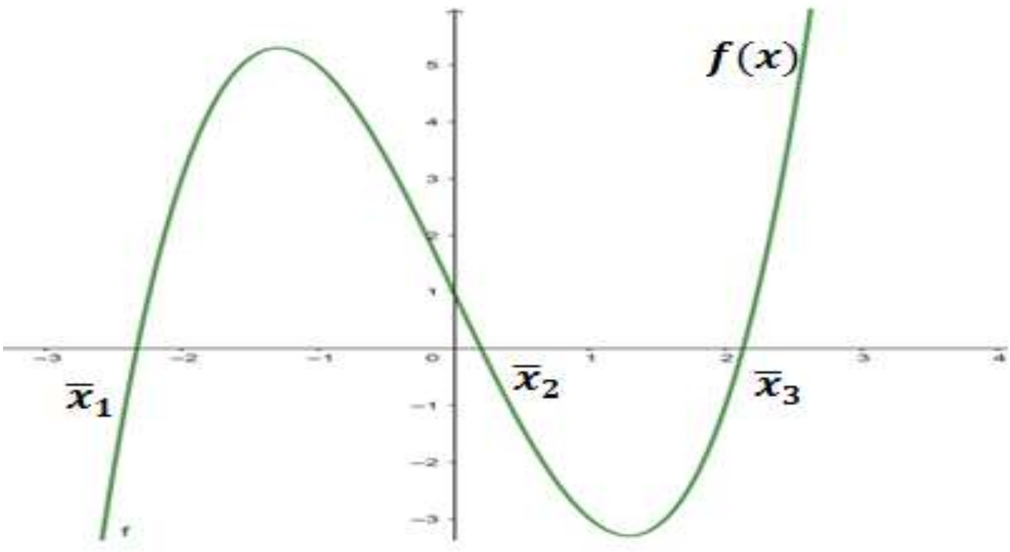
Tabela 1 - Valores numéricos da função $f(x) = x^3 - 5x + 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-11	3	5	1	-3	-1	13

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos verificar que $f(-3).f(-2) < 0, f(-1).f(0) < 0$ e $f(2).f(3) < 0$, assim, nesse intervalo $[-3,3]$ teremos as 3 raízes nos intervalos $\bar{x}_1 \in [-3,-2]$, $\bar{x}_2 \in [0,1]$ e $\bar{x}_3 \in [2,3]$. Usando o *software* GeoGebra, iremos exibir o gráfico mostrando graficamente os zeros da função.

Gráfico 2 - Função $f(x) = x^3 - 5x + 1$



Fonte: Elaborado pelo autor com recursos do *software* GeoGebra.

A aplicação dos métodos numéricos para definir suas raízes será mostrada no próximo capítulo em outras funções polinomiais.

5 MÉTODOS NUMÉRICOS

5.1 Método do ponto fixo

O conceito de ponto fixo possibilita algumas aplicações diretas em problemas que relacionam as funções a situações cotidianas do estudante, como: função afim, função quadrática e funções cúbicas. Temos em vista que sua abordagem como método numérico é relevante aos estudos de funções presentes no Ensino Básico. O conceito de ponto fixo, como proposta, deverá ser complementar e enriquecer conteúdos que desenvolvam mais ainda, as habilidades e competências de estudos de funções reais.

Definição 5.1: *Seja X um conjunto não vazio $f: X \rightarrow X$ uma função dada. Dizemos que um elemento $x_0 \in X$ é um* ***ponto fixo*** *de f se $f(x_0) = x_0$.*

De modo não frequente, o uso de conceitos de ponto fixo é visto ainda no ensino fundamental e também no médio, por exemplo, quando relacionamos as disciplinas de Matemática e Física, por exemplo, em conversões entre escalas termométricas.

Exemplo 5.1: *Usando as escalas termométricas Celsius (x) e Fahrenheit (y) e a fórmula que as relacionam é dada por $x = \frac{5(y-32)}{9}$. Encontre um valor em que a temperatura seja a mesma em ambas as escalas.*

Envolvendo a definição de ponto fixo, queremos encontrar, se existir essa temperatura, é tal que $f(x_0) = x_0$, logo:

$$f(x) = \frac{5(x-32)}{9} \Rightarrow$$

$$x = \frac{5(x-32)}{9} \Rightarrow$$

$$9x = 5x - 160 \Rightarrow$$

$$4x = -160 \Rightarrow$$

$$x = -40°C \ ou - 40°F$$

Podemos concluir que a em ambas as escalas termométricas a temperatura de -40 graus é a mesma, ou seja, existe um ponto fixo.

No entanto, para o método de aproximações de Ponto Fixo, o processo consiste em iterações e não apenas em uma única etapa.

5.1.1 Modelo matemático de ponto fixo

Dada uma função $f(x)$ $f:[a,b] \to [a,b]$ que contenha uma raiz da equação, isto é, um número real x tal que $f(x) = 0$. Este método consiste em fazer algumas manipulações algébricas na equação $f(x)$ de modo a encontrar uma equação equivalente $x = \varphi(x)$, e a partir de uma estimativa inicial x_0, gerar uma sequência $\{x_n\}$ de aproximações para a raiz desejada $\overline{x}$, dada pela relação $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ para $n = 0, 1, 2, ...$, pois a função $\varphi(x)$ é tal que $f(\overline{x}) = 0$ se, e somente se, $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$, transformando um problema de encontrar a raiz da equação $f(x) = 0$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$, (RUGGIERO; LOPES, 2000).

Uma função φ que satisfaz a condição do parágrafo acima é chamada de *função de iteração* para a equação $f(x) = 0$. Uma mesma equação pode apresentar varias funções de iteração, vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 5.2: *Exiba diferentes funções de iterações para a equação* $x^2 - x - 1 = 0$*.*

- $-x = -x^2 + 1 \Rightarrow x = x^2 - 1 \Rightarrow \varphi_1(x) = x^2 - 1$
- $x^2 = x + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{x+1} \quad \Rightarrow \varphi_2(x) = \pm\sqrt{x+1}$
- $x(x-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \varphi_3(x) = \frac{1}{x-1}$
- $x^2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{x+1}{x} \quad \Rightarrow \varphi_4(x) = 1 + \frac{1}{x}$

A forma geral para as funções de iterações $\varphi(x)$ é $\varphi(x) = x + G(x)f(x)$, desde que $\overline{x}$, ponto fixo de $\varphi(x)$, se tenha $G(\overline{x}) \neq 0$. (RUGGIERO; LOPES, 2000)

Mostraremos que $f(\overline{x}) = 0$ se, e somente se, $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$. Consideremos a seguinte equação:

$$\varphi(\overline{x}) = \overline{x} + G(\overline{x})f(\overline{x})$$

Seja $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$, então:

$$\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$$

Por outro lado, se $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$, teremos:

$$\overline{x} + G(\overline{x})f(\overline{x}) = \overline{x}$$

Subtraindo $\overline{x}$ em na igualdade acima, temos:

$$G(\overline{x})f(\overline{x}) = 0$$

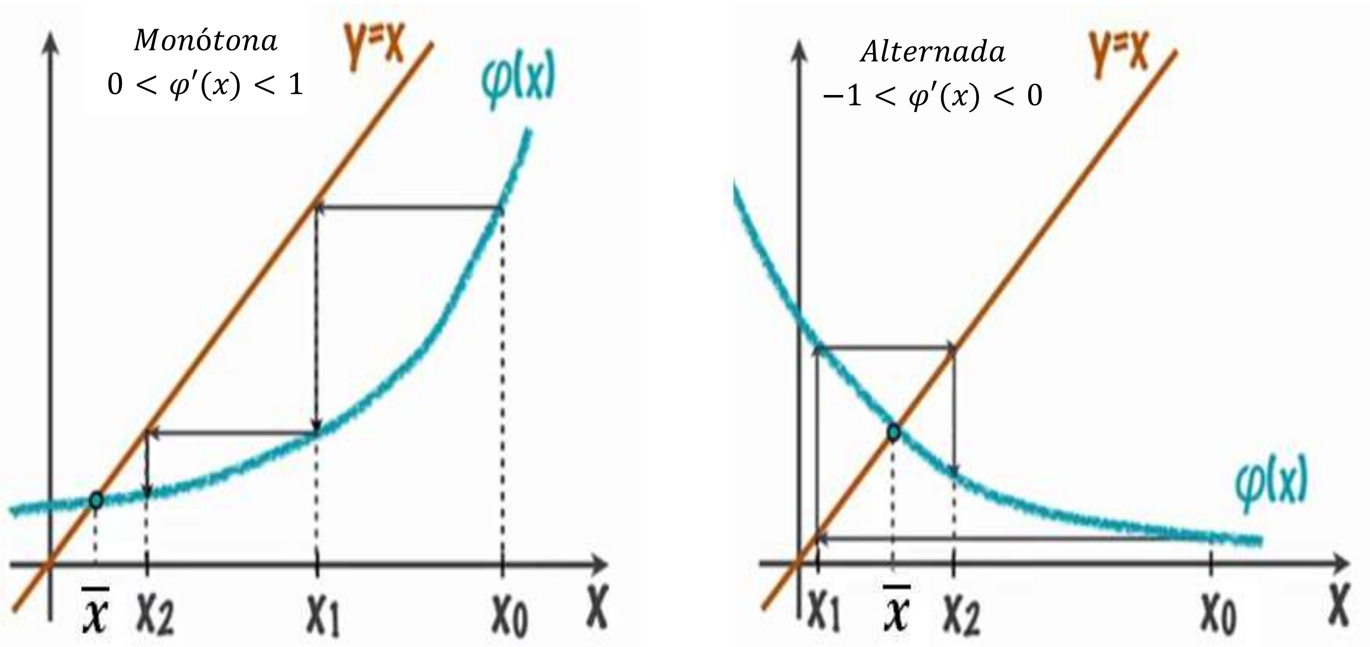
Segundo a condição estabelecida anteriormente, em que $G(\overline{x}) \neq 0$ e temos um produto igual a zero, então $f(\overline{x}) = 0$.

Como já dito anteriormente, existem infinitas funções de iterações para uma dada equação quando queremos encontrar sua raiz, ou seja, $f(x) = 0$.

Geometricamente, os pontos fixos de uma função $f(x)$ são os pontos de intersecção da curva $y = \varphi(x)$ e a reta $y = x$ em que a abscissa desse ponto é a raiz da equação $\varphi(x) = x$.

Vejamos na figura abaixo, exemplos de quando a sequencia $\{x_n\}$ converge para $\bar{x}$, O ponto fixo atrai as iterações quando $n \to \infty$.

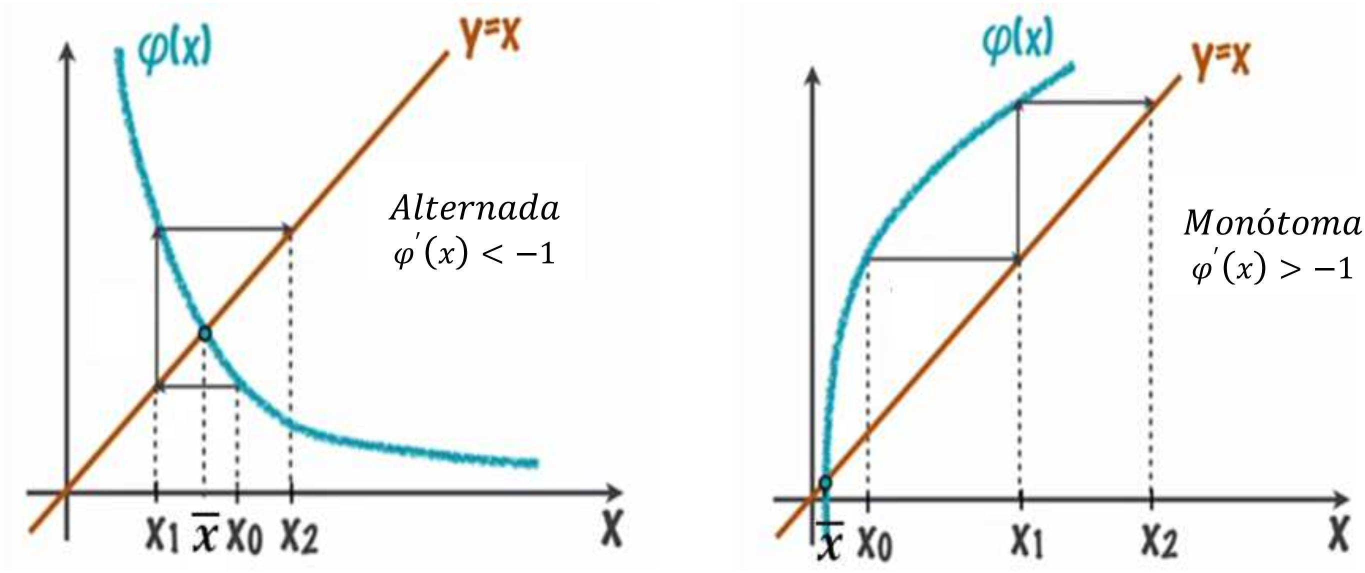
Gráfico 3 - Convergência quando $|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x})| < \mathbf{1}$ para todo $\boldsymbol{x_n} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=LpbNY0x1KxM, editada pelo autor.

No entanto, nem todas as funções de iterações convergem para a raiz $\bar{x}$, e quando isso acontece dizemos que elas divergem, quando $n \to \infty$ e $\{x_k\}$ não tende a $\bar{x}$, e o ponto fixo atua como *repulsor* das iterações, vejamos isso graficamente:

Gráfico 4 – Divergência quando $|\varphi'(x)| > 1$ para todo $x_n \in [a, b]$.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=LpbNY0x1KxM, Elaborado pelo autor.

Portanto, graficamente percebemos que a convergência está relacionada com a baixa inclinação do gráfico, ou limitação da derivada de $\varphi(x)$ no intervalo $[a, b]$.

5.1.2 Descrição de um algoritmo de implementação do método

Considerando as funções $f(x)$ e $\varphi(x)$, tomando b uma estimativa inicial da raiz aproximada, com as precisões $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$:

Passo 1: Inicio

i. Considere $n = 0$;

ii. $x_n = b$;

iii. $x_{n+1} = \varphi(x_n)$;

Passo 2: Critério de parada

I. Se $|f(x_n)| > \varepsilon_1$ e $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon_2$ vá para o passo 3;

i. Se $|\, f(x_n)| \leq \varepsilon_1$, tome o valor de x_n como uma solução aproximada. Fim

ii. Se $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon_2$, assuma o valor de x_{n+1} como solução aproximada. Fim

Passo 3: Processo Iterativo

i. Utilize $n + 1$ no lugar de n;

ii. $x_n = x_{n-1}$;

iii. $x_{n+1} = \varphi(x_n)$;

iv. Volte para o passo 2

5.1.3 Convergência do método

Admitindo que exista um ponto fixo e seja único, podemos definir duas exigências para que uma função de iteração $\varphi(x)$ gere uma sequência $\{x_n\}$ que convirja para a raiz desejada no intervalo I em que $f(x) = 0$.

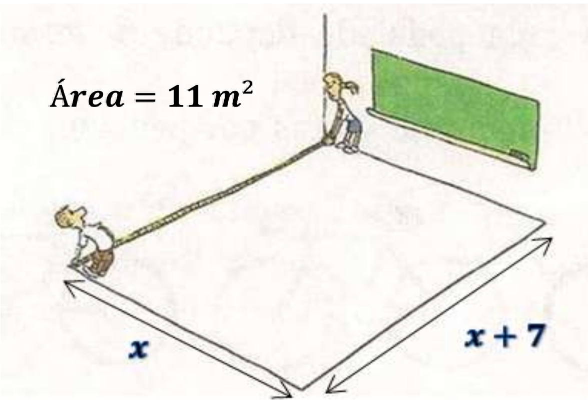
- $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas no intervalo I;
- $|\varphi'(x)| \leq M \leq 1, \forall x \in I$, baixa inclinação da reta tangente em $\bar{x}$ em relação à $\varphi(x)$

5.1.4 Aplicação do método do ponto fixo

Optamos por abordar para a aplicação dos métodos iterativos as funções polinomiais, por serem as mais vistas no ensino básico. Destacamos duas situações problemas muito comuns e facilmente encontradas em livros didáticos, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, estes envolvendo cálculos de áreas e volumes. Vejamos o exemplo abaixo

Exemplo 5.3: *Um professor realizou medições em uma sala de aula retangular e concluiu que ela tem área igual a 11 metros quadrados e que um dos lados mede 7 metros a mais que o outro. Utilizando o método do Ponto Fixo, calcule o valor aproximado do lado menor da sala? (Erro de 0,001)*

Figura 8 - Cálculo de área de uma sala



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para o cálculo de áreas, multiplicamos os lados do retângulo cujo valor é equivalente à área definida no problema, logo.

$$11 = x.(x+7) \Rightarrow x^2 + 7x - 11 = 0$$

Temos uma função quadrática com coeficientes inteiros, em que existem raízes reais e distintas, já que o discriminante é $\Delta = 93 > 0$ e ainda possui raízes irracionais, já que $\bar{x} = \frac{7 \pm \sqrt{93}}{2}$. Caso não seja possível construir o gráfico da função para encontrar o intervalo em que se encontram as raízes, uma opção é construir uma tabela dos valores de $f(x)$ e observar a troca de sinais.

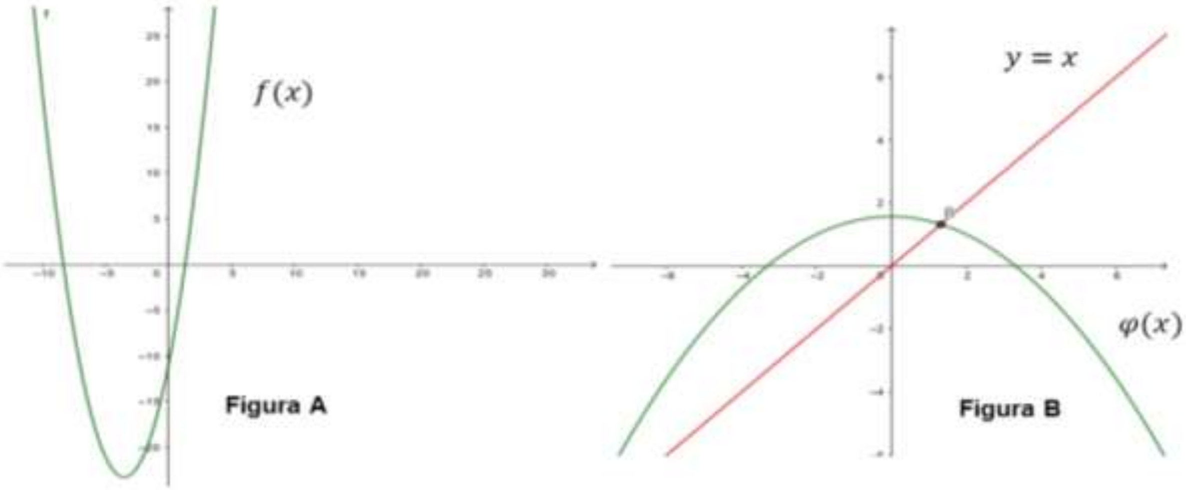
Tabela 2 - Valores da função $f(x) = x^2 + 7x - 11$

x	-3	-2	1	0	1	2	3
f(x)	-23	-21	-17	-11	-3	7	19

Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim, pelo teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe uma raiz $\bar{x}$ no intervalo $[1, 2]$, pois $f(1).f(2) < 0$. Para usarmos o método do Ponto Fixo temos que construir uma função de iteração $\varphi(x)$ que satisfaça às condições de convergência do método. Dada à função $x^2 + 7x - 11 = 0$, temos que considerar a função $\varphi(x) = \frac{11 - x^2}{7}$, as precisões de $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ e a estimativa inicial $x_0 = 1$, no intervalo $[1, 2]$. Vejamos os gráficos na figura abaixo.

Gráfico 5- Funções $f(x) = x^2 + 7x - 11$ e $\varphi(x) = \frac{11 - x^2}{7}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para satisfazer a convergência, temos que ter $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ contínuas no intervalo $[1, 2]$ e $|\varphi'(x)| \leq M < 1$. Percebemos que as funções $\frac{11-x^2}{7}$ e $-\frac{2x}{7}$ são contínuas, pois se tratam de funções polinomiais, e no intervalo $[1, 2]$ temos que $|\varphi'(x)| \leq 1$, pois $1 < x < 2 \Rightarrow \frac{-4}{7} < \frac{-2x}{7} < \frac{-2}{7}$. Finalmente, ao aplicarmos o método do Ponto Fixo, a tabela mostra as iterações realizadas.

Tabela 3 – Aplicação do Método do Ponto Fixo em $f(x) = x^2 + 7x - 11$

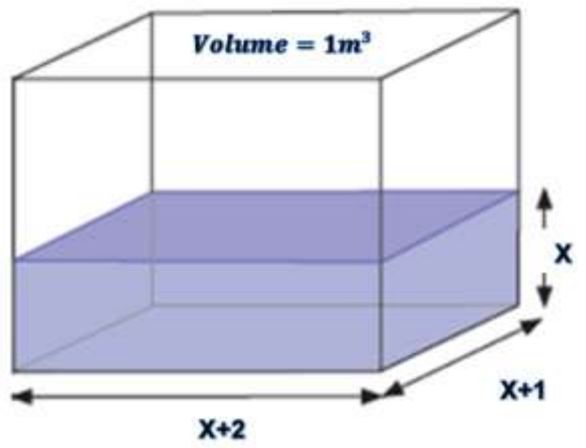
$\mathbf{n}$	$\mathbf{x_n}$	$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x_n})$	$\lvert\mathbf{x_n} - \mathbf{x_{n-1}}\rvert$	$\lvert\mathbf{f}(\boldsymbol{x_n})\rvert$
0	1,00000000	1,42857143	-	3,00000000
1	1,42857143	1,27988338	0,42857143	1,04081633
2	1,27988338	1,33741408	0,14868805	0,40271486
3	1,33741408	1,31590337	0,05753069	0,15057494
4	1,31590337	1,32405690	0,02151071	0,05707473
5	1,32405690	1,32098190	0,00815353	0,02152500
6	1,32098190	1,32214383	0,00307500	0,00813350
7	1,32214383	1,32170510	0,00116193	0,00307112
8	1,32170510	1,32187080	0,00043873	0,00115994

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, depois de 9 iterações, temos que a medida do lado menor da sala é $\bar{x} = 1{,}3217\, metros$, com aproximação de 4 casas decimais e $|f(x)| = 1{,}1 \times 10^{-3}$.

Exemplo 5.4: *Uma caixa d'água tem o formato de um paralelepípedo e não está totalmente cheia. Dentro dela estão 1000 litros de água. A largura da parte da caixa ocupada pela água é 1 metro maior do que sua profundidade e seu comprimento é 1 metro maior do que sua largura. Determine a profundidade da d'água. Considere um erro de aproximação de 0,001.*

Figura 9 - Cálculo de volume de um paralelepípedo



Fonte: Elaborada pelo autor.

O volume do paralelepípedo é dado pelo produto das três dimensões, então:

$$1 = \mathrm{x}(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}+2) \Rightarrow \mathrm{x}^3 + 3\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 1 = 0$$

De acordo com a equação acima, pela relação de Girard e estudos das raízes racionais, podemos afirmar que essa equação cúbica não possui raízes racionais. Se existissem teriam que ter a forma $\frac{p}{q}$ em que p é o divisor de -1 e q é divisor de 1 , isto é, $p, q \in \{\pm 1\}$. Assim, as possíveis raízes racionais seriam $\{1, -1\}$ e pela tabela abaixo, vemos claramente que $f(1)$ e $f(-1)$ ambos são diferentes de zero. Portanto, esta equação não tem raízes racionais.

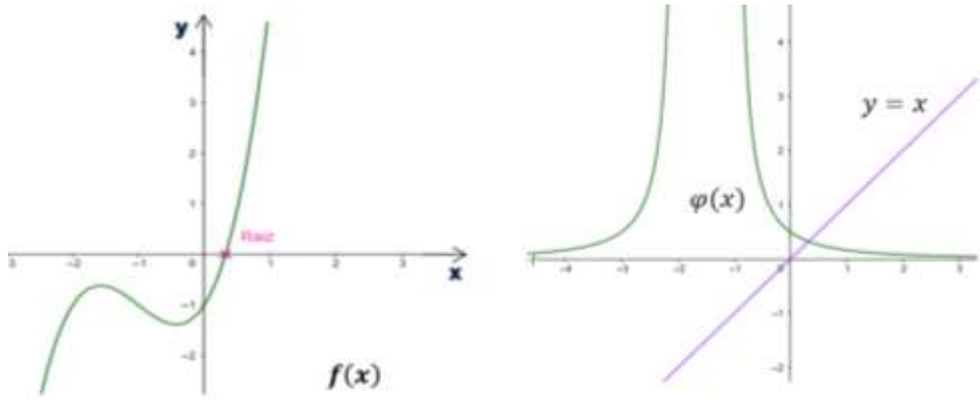
Tabela 4 - Valores numéricos da função $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1}$

$\mathbf{x}$	-3	-2	1	0	1	2	3
$\mathbf{f(x)}$	-7	-1	-1	-1	5	23	59

Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a tabela acima, pelo teorema de Bolzano, pois $f(0).f(1) < 0$, então temos uma raiz no intervalo $[0, 1]$. Usaremos uma estimativa inicial $x_0 = 1$, com precisões de $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$. Iremos considerar a função iteração para aplicar o método do ponto fixo, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

Gráfico 6 - Funções $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ e $\varphi(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente, supondo que as a funções $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ satisfaçam as convergências do método e ainda $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas no intervalo $[0, 1]$ e $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, ou seja, com uma curva com baixa inclinação, e assim, podemos aplicar o método do Ponto Fixo, a tabela nos mostra as iterações realizadas.

Tabela 5 - Método do Ponto Fixo em $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

n	x_n	$\varphi(x_n) = \frac{1}{x^2+3x+2}$	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1,0000000	0,1666666		5,0000000
1	0,1666666	0,3956044	0,2289377	0,5787037
2	0,3956044	0,2991042	0,0965001	0,3226305
3	0,2991042	0,3348091	0,0357049	0,1066426
4	0,3348091	0,3208702	0,0139389	0,0434410
5	0,3208702	0,3262037	0,0053335	0,0163503
6	0,3262037	0,3241469	0,0020568	0,0063452
7	0,3241469	0,3249377	0,0007908	0,0024337
8	0,3249377	0,3246333	0,0003044	0,0009376

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, depois de 9 iterações, temos que o liquido tem altura é aproximadamente $\bar{x} = 0{,}32493778$ metros, com aproximações de sete casas decimais, pois temos $|f(x)| < \varepsilon_1 e\ |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_2$.

5.1.5 Considerações sobre o método do ponto fixo

O método do ponto fixo possui vantagens ao ser aplicado no ensino básico, quando atrelado ao uso de recursos computacionais Geogebra e Excel. Devido às dificuldades em seus critérios de convergência, análise da continuidade e derivadas das funções, sem um programa para exibir os gráficos das funções e efetuar as iterações o método fica muito trabalhoso ser estudado em sala de aula.

É um método numérico com bom desempenho de convergência quando escolhida a função de interação que satisfaça as condições, e também é uma chance para que o aluno trabalhe com gráficos e manipulações algébricas.

5.2 Método de Newton

Nunca, na história da Ciência, um sábio foi tão admirado, glorificado e endeusado, durante a própria vida e igualmente após sua morte, quanto o grande inglês Isaac Newton[8], afirma (GARBI, 2007). As contribuições de Newton que se relacionam com nosso trabalho, se refere à teoria das equações algébricas, que podem ser classificadas em 3 grupos: os métodos algébricos aproximados para a determinação de raízes, um método não algébrico, também conhecido como método de Newton (método que iremos abordar) e um conjunto de critérios numéricos para analisar e pesquisar raízes.

Também conhecido como método de Newton - Rapshon, pois teve uma contribuição de Joseph Raphson (1648–1715), é utilizado para calcular aproximações de raízes polinomiais de uma função não linear. A ideia é estabelecer uma função de interação que, ao ser aplicada repetidas vezes, a partir de uma aproximação inicial estimada, fornece uma sequência numérica que convirja para a solução do problema.

---

[8] Isaac Newton (1642-1727) foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático. Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural é considerada uma das mais influentes obras na história da ciência.

5.2.1 Modelo algébrico

O Método de Newton consiste em escolher uma função $\varphi(x)$, tal que a sua derivada tenha valor numérico nulo para cada valor da sequência que fornece a aproximação x, ou seja, $\varphi'(x) = 0$.

Dada uma equação $f(x) = 0$, tomando a forma geral de $\varphi(x)$, obteremos a função $G(x) = 0$ tal que $\varphi'(\bar{x}) = 0$.

Partindo da função iteração $\varphi(x)$, temos que:

$$\varphi(\mathrm{x}) = x + G(x)f(x)$$

$$\varphi'(\mathrm{x}) = 1 + G'(x)f(x) + G(x)f'(x)$$

Partindo de $x = \bar{x}$, temos;

$$\varphi'(\bar{x}) = 1 + G'(\bar{x})f(\bar{x}) + G(\bar{x})f'(\bar{x})$$

Já que $\bar{x}$ é uma solução de $f(x)$, $f(\bar{x}) = 0$, podemos escrever;

$$\varphi'(\bar{x}) = 1 + G(\bar{x})f'(\bar{x})$$

Como queremos $\varphi'(\bar{x}) = 0$;

$$0 = 1 + \mathrm{G}(\bar{\mathrm{x}})\mathrm{f}'(\bar{\mathrm{x}}) \Rightarrow \mathrm{G}(\bar{\mathrm{x}}) = \frac{-1}{\mathrm{f}'(\bar{\mathrm{x}})}$$

De onde obtemos a $\mathrm{G}(\bar{x})$ em função de $f(\bar{x})$

$$\mathrm{G}(\mathrm{x}) = \frac{-1}{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}$$

Portanto, dada uma função $f(x)$, encontramos uma função iteração para o Método de Newton, será $\varphi(\mathrm{x}) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, para que $\varphi'(x) = 0$, podemos verificar ao derivarmos $\varphi(\mathrm{x})$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

no entanto, como $f(\bar{x}) = 0$ e $\varphi'(\bar{x}) = 0$, desde que tenhamos $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Assim, escolhido um x_0, a sequencia $\{x_n\}$ será definida por:

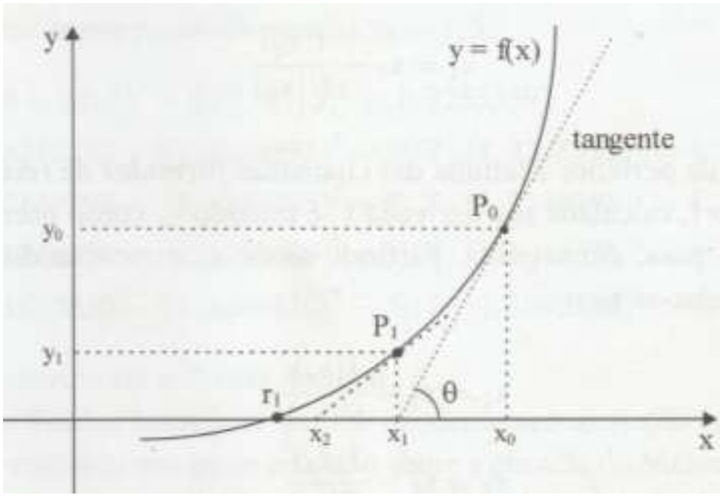
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,2,3, \ldots}$$

5.2.2 Método das retas tangentes

Vamos apresentar, agora, o método de método de Newton, também chamado de modelo não algébrico, considerado elegante, simples e bastante prático. Essa técnica atualmente utilizada por calculadoras eletrônicas de bolso, sendo uma de suas funcionalidades a resolução de diversos tipos de equações polinomiais. Para elaborar este método, Newton usou conhecimentos em geometria plana e analítica, principalmente os estudos com retas tangentes, que foram importantes para obtenção do método. Pierre de Fermat[9] um dos primeiros a iniciar esses estudos. (GARBI, 2009).

Vamos agora ao método: encontrar raízes de uma equação $f(x)$ e determinar as abscissas dos pontos onde o gráfico da função $y = f(x)$ corta o eixo dos x, tendo que $y = 0$.

Figura 10 - Modelo Geométrico de Newton



Fonte: (GARBI, 2009)

De acordo com o gráfico acima, estamos procurando o ponto em que $f(x) = 0$. Primeiramente, tomamos um ponto P_0 (x_0, y_0) no gráfico $f(x)$, e passando por ele, traçamos uma reta tangente à curva. O ponto x_1 é aquele em que essa reta corta o eixo x, e é uma primeira aproximação da raiz r_1. Newton percebeu que essa

[9] Pierre de Fermat nasceu no dia 17 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomages, França, e morreu no dia 12 de janeiro de 1665 em Castres, França. Um trabalho semelhante conduziu Fermat para descobrir métodos similares para diferenciação e integração por máximos e mínimos.

ideia poderia ser repetida indefinidamente: tomando-se um ponto P_1 que têm coordenadas $\left(x_1, f(x_1)\right)$ ou (x_1, y_1), por este ponto traça-se uma nova tangente à curva que corta novamente o eixo x obtendo uma melhor aproximação x_2 para a raiz r_1. Novamente, escolhemos um ponto P_2, com coordenadas $\left(x_2, f(x_2)\right)$ ou (x_2, y_2), traçamos uma terceira tangente e temos um ponto de valor x_3, sendo uma melhor aproximação da raiz procurada em relação à $x_0\ e\ x_1$.

A equação da reta tangente à curva que passa pelo ponto (x_0, y_0) é dada por:

$$\frac{\mathrm{y} - y_0}{x - x_0} = \tan\theta$$

De acordo com a gráfico, essa reta cruza o eixo x nas coordenadas $(x_1, 0)$, de modo que temos;

$$\frac{0 - y_0}{(x_1 - x_0)} = \tan\theta$$

$$-y_0 = x_1 \tan\theta - x_0 \tan\theta$$

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{\tan\theta}$$

No entanto, sabemos que $\tan\theta = f'\,(x_0)$ e $y_0 = f(x_0)$, logo;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Também chamada de fórmula de recorrência, pois dada a função $f(x)$, calculando sua derivada $f'\,(x)$ e tomando x_0 como primeira aproximação e calcula-se x_1, para depois repetir o processo, partindo de x_1 recorrendo à mesma fórmula, encontramos x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

em que essa sequência somente termina quando o valor de x_{n+1} alcançar uma aproximação da raiz com um grau de precisão desejado.

5.2.3 Descrição de um algoritmo de implementação do método

Considerando as funções $f(x)$ e $f'\,(x)$, tomando b uma estimativa inicial de raiz aproximada, sejam as precisões $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, sendo a diferença entre a aproximação calculada e a raiz da função:

Passo 1: Inicio

I. Considere $n = 0$;

II. $x_n = b$;

III. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\,(x_n)}$;

Passo 2: Critério de parada

II. Se $|f(x_n)| > \varepsilon_1$ e $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon_2$ vá para o passo 3;

III. Se $|\,f(x_n)| \leq \varepsilon_1$, tome o valor de x_n como uma solução aproximada. Fim

IV. Se $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon_2$, assuma o valor de x_{n+1} como solução aproximada. Fim

Passo 3: Processo Iterativo

I. Utilize $n + 1$ no lugar de n;

II. $x_n = x_{n-1}$;

III. Volte para o passo 2;

5.2.4 Utilização do método newton

Na aplicação do método de Newton, usaremos os mesmos problemas que foram utilizados para ilustrar o método do Ponto Fixo, como também as estimativas iniciais e erros de aproximação. Assim, podemos comparara-los e observar qual melhor em velocidade de convergência e facilidade de manipulações algébricas para utilizar como metodologia a fim de para resolver problemas envolvendo zeros de funções.

Exemplo 5.4: (Volume do paralelepípedo) *Considere a função* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$*. Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz da equação com precisão* $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}001$ *e a estimativa inicial* $x_0 = 1$*.*

Se $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$ e $f''(x) = 6x + 6$, ambas funções contínuas e $f'(\bar{x}) \neq 0$. Então temos, A função de iteração será $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3+3x_n^2+2x_n-1}{3x_n^2+6x_n+2}$.

Substituindo o valor de $x_0 = 1$ na função iteração temos:

$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3+3x_0^2+2x_0-1}{3x_0^2+6x_0+2} = 1 - \frac{1^3+3.1^2+2.1-1}{3.1^2+6.1+2} = 0{,}5454, |x_1 - x_0| = 0{,}4545 > \varepsilon_1\ e\ |f(x_0)| = 5 > \varepsilon_2;$

$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3+3x_1^2+2x_1-1}{3x_1^2+6x_1+2} = 0{,}5454 - \frac{(0{,}5454)^3+3.(0{,}5454)^2+2.(0{,}5454)-1}{3.(0{,}5454)^2+6.(0{,}5454)+2} = 0{,}3596,$ $temos\ |x_2 - x_1| = 0{,}1858 > \varepsilon_1\ e\ |f(x_1)| = 1{,}14 > \varepsilon_2;$

$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3+3x_2^2+2x_2-1}{3x_2^2+6x_2+2} = 0{,}3596 - \frac{(0{,}3596)^3+3.(0{,}3596)^2+2.(0{,}3596)-1}{3.(0{,}3596)^2+6.(0{,}3596)+2} = 0{,}3258,$ $temos\ |x_3 - x_2| = 0{,}0338 > \varepsilon_1\ e\ |f(x_2)| = 0{,}1537 > \varepsilon_2;$

$x_4 = x_3 - \frac{x_3^3+3x_3^2+2x_3-1}{3x_3^2+6x_3+2} = 0{,}3258 - \frac{(0{,}3258)^3+3.(0{,}3258)^2+2.(0{,}3258)-1}{3.(0{,}3258)^2+6.(0{,}3258)+2} = 0{,}3247, temos\ |x_4 - x_3| = 0{,}0010 = \varepsilon_1\ e\ |f(x_3)| = 0{,}0046 > \varepsilon_2;$

$x_5 = x_4 - \frac{x_4^3+3x_4^2+2x_4-1}{3x_4^2+6x_4+2} = 0{,}3247 - \frac{(0{,}3247)^3+3.(0{,}3247)^2+2.(0{,}3247)-1}{3.(0{,}3247)^2+6.(0{,}3247)+2} = 0{,}3247, temos\ |x_5 - x_4| = 0{,}0000 < \varepsilon_1\ e\ |f(x_4)| = 0{,}0000 < \varepsilon_2;$

Portanto, depois de 5 iterações, com aproximações de quatro casas decimais o valor de $x_5 = x_4 = 0{,}3247$ e satisfaz os erros ε_1 e ε_2. Usando o método do Ponto Fixo, foram necessárias 9 iterações, além das manipulações algébricas para achar uma função de iteração que satisfaça a convergência.

A tabela abaixo mostra as iterações usando o método de Newton na equação acima quando consideramos a quantidade de dígitos de uma calculadora padrão, com sete casas decimais.

Tabela 6 - Aplicação do método Newton na função $x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\lvert f(x)\rvert$
0	1,0000000	0,5454545		5,0000000
1	0,5454545	0,3596149	0,4545455	1,1457551
2	0,3596149	0,3258013	0,1858396	0,1537049
3	0,3258013	0,3247190	0,0338136	0,0046249
4	0,3247190	0,3247180	0,0010823	0,0000047

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 5.5: (Área da sala) *Considere a função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2 + 7x - 11$. *Usando o método de Newton-Raphson, determine a raiz da equação com precisão* ε_1 *e* $\varepsilon_2 = 0{,}001$ *e a estimativa inicial* $x_0 = 1$.

De acordo com os resultados quando usamos o método do Ponto Fixo na equação acima, vimos que ambas as raízes são irracionais. Neste exemplo vamos expor somente a tabela com as iterações, visto que o passo a passo foi exposto no exemplo anterior.

Temos que $f(x) = x^2 + 7x - 11$, $f'(x) = 2x + 7$ e $f''(x) = 7$, ambas as funções contínuas e $f'(\bar{x}) \neq 0$, então o método irá convergir para a raiz. Seja a função de iteração para aplicação do Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2+7x_n-11}{2x_n+7}.$$

Aplicando a estimativa inicial $x_0 = 1$ na função acima no *software* Excel e seguindo com as iterações até que os erros sejam alcançados, os valores seguem descritos na tabela abaixo.

Tabela 7 - Aplicação do método Newton na função em $x^2 + 7x - 11 = 0$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\lvert f(x)\rvert$
0	1,00000000	1,33333333		3,00000000
1	1,33333333	1,32183908	0,33333333	0,11111111
2	1,32183908	1,32182538	0,01149425	0,00013212
3	1,32182538	1,32182538	0,00001370	0,00000000

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, depois de apenas 4 iterações, o valor de $\bar{x} = 1{,}3218390$ e satisfaz o erros ε_1 e ε_2. Quando usado o método do Ponto Fixo, foi usado 9 iterações para a solução desse problema, bem mais quando comparado ao método de Newton.

5.2.5 Considerações sobre o método de newton

Este método, além de elegante, é considerado eficiente, e uma de suas vantagens é que pode ser aplicado a uma variedade de funções, não apenas as funções algébricas, mas também as funções transcendentes, e muitas dessas funções estão presentes no currículo do ensino básico, como por exemplo:

$$3x^3 - x^2 + x - 15$$

$$ln\,x + x^2 - 4x + 1$$

$$x + e^{-x} + cos\,x$$

O método mostra uma grande vantagem na velocidade de convergência em poucas iterações, por ter sua convergência de ordem quadrática, em que a precisão com muitas casas decimais aumenta bem rápido.

Uma desvantagem do método e que por se tratar de um método local, é necessário que a estimativa inicial tenha que estar bem perto da raiz de $f(x)$, quando ocorre o contrário, o método vai ter dificuldade de encontrar a solução.

Este método deve ser usado de modo complementar no ensino básico, por exigir conteúdos mais sofisticados de funções, é importante que haja conhecimentos sobre continuidade e derivadas de primeira e segunda ondem. No entanto, assuntos desse nível não compõem o currículo do ensino básico; desse modo, os alunos teriam que previamente estudar sobre esses conceitos de cálculo. Feito isso de forma adequada, irá dispor de uma forte técnica a mais para achar zeros de funções.

6 OUTRAS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS

Os métodos de aproximações sempre foram motivo de estudos, que se estendem desde a Idade antiga até os tempos modernos, e diante da incomensurabilidade dos números, as civilizações ao longo da história contribuíram com importantes estudos sobre os números reais, especificamente os números irracionais. Por sua vez, estes tópicos vêm destacar algumas aproximações, das quais podem ser abordadas durante o ensino básico.

6.1 Métodos de aproximações sucessivas com frações contínuas

A relação entre os números racionais e irracionais ocorre por meio de operações de aproximações, além do que, como já citamos neste trabalho, civilizações antigas já se destacavam fazendo uso dessas técnicas de aproximações numéricas, incluindo o uso de frações contínuas. Abordagens históricas têm um papel importante na construção do ensino da matemática, vendo a necessidade de novas ideias, metodologias e diversas formas de representar os números reais, assim como o uso de frações contínuas para aproximar números irracionais.

> Apontamos uma possibilidade pelo uso das Frações Contínuas não como mais um componente curricular, mas como um tema que permite significar os números irracionais, assim como articular vários conhecimentos matemáticos presentes no atual currículo de Matemática, situando-os numa rede de significados. Em nível epistemológico, a questão de aproximação dos irracionais para os números racionais é importante e permite delimitar e significar ambos os campos numéricos, assim como evidencia vários eixos caracterizadores dos Números Reais. (POMMER, 2017, p.1)

Os estudos de frações contínuas inicialmente desenvolvidas pelos gregos foi muito utilizada nas construções geométricas, cujas razões entre grandezas eram trabalhadas incansavelmente, com importantes avanços ao longo do desenvolvimento histórico, e tendo os estudos fortemente retomados nos séculos XVII e XVIII, conforme afirma Eves (2004).

Definição 6.1*: Uma fração contínua generalizada ou simplesmente fração contínua é uma expressão da forma*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ddots}}}}$$

Em que $a_0, a_1, a_2, \dots e\ b_1, b_2, b_3$ *podem ser números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas. O número de termos pode ser finito ou infinito.*

As seguintes expressões são exemplos de frações contínuas

$$2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{5 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{5}{9}}}} \qquad\qquad 2 + \cfrac{10x}{x - 3 + \cfrac{x^2}{6x + \cfrac{x^2}{7 + \ddots}}}$$

Uma fração contínua simples é aquela em que todos os b_n são iguais a 1, e essa estrutura já era adotada também pelos egípcios.

Definição 6.2: *Uma fração contínua simples ou regular é uma fração continua da forma*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \ddots}}}}}, a_0 \in \mathbb{Z}\ e\ a_i \in \mathbb{N}, \forall\ i \in\ \mathbb{N}$$

Em que $a_1, a_2, a_3, \dots$ *são números inteiros positivos e* a_0 *um número inteiro qualquer, onde os* $a_1, a_2, a_3, \dots$*são chamados de quocientes parciais da fração contínua simples.*

Tendo sua representação de forma mais compacta $[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots]$.

As frações contínuas quando na forma de fração, apresentam valores discretos por se tratar de uma razão entre inteiros, ao mesmo tempo em que também entram no campo das grandezas contínuas, pois podem vir apresentar termos finitos ou infinitos.

As aproximações de frações contínuas simples podem ser denominadas convergentes. Logo abaixo temos a representação até a enésima convergência de uma fração contínua simples, na qual onde podemos continuar até que tenhamos uma aproximação racional desejada.

$$c_0 = a_0 = [\, a_0] \qquad (1° \text{ convergente})$$

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = [\, a_0; a_1] \qquad (2° \text{ convergente})$$

$$c_2 = a_1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = [\, a_0; a_1, a_2] \qquad (3° \text{ convergente})$$

$$\vdots$$

$$c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \ (enésima\ convergência)$$

Vejamos um exemplo da utilização de frações contínuas de alguns números reais.

Exemplo 6.1: *Achar a fração contínua simples que representa* $\frac{18}{7}$

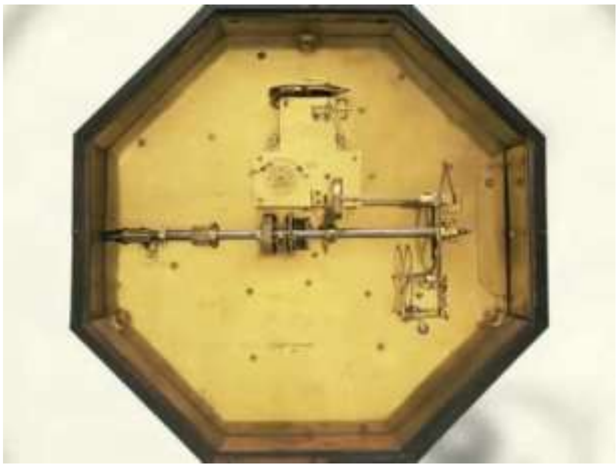
$$\frac{18}{7} = \frac{14}{7} + \frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{4}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{4}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

$$\frac{18}{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = [2; 1,1,3]$$

Para explicar o uso de frações contínuas em irracionais e por aproximação, uma situação muito importante aconteceu em 1682, quando o astrónomo holandês Christiaan Huygens[10] construiu um Planetário Mecânico - um engenho mecânico que conseguia reproduzir os movimentos dos planetas então conhecidos em torno do Sol.

[10]Christiaan Huygens (1629 - 1695) foi um físico, matemático, astrônomo e horologista neerlandês.

Figura 11- Christiaan Huygens e modelo mecânico do sistema solar



Fonte: (PAIXÃO, 2011)

Usando um sistema com engrenagens que permitia reproduzir órbitas planetárias numa escala adequada, ao longo de tempos de estudos, ele concluiu que a razão entre os períodos da Terra e de Saturno era de $\frac{77708431}{2640858}$, cujo tem valor aproximado é de $29{,}43$. Construir engrenagens com essa quantidade de dentes era quase impossível, e esta era a ideia de Christiaan, na busca de uma fração com numeradores e denominadores com valores menores, aproximando e construindo engrenagens com menos dentes, mas continuando com uma aproximação desejável que resolvesse o problema.

As engrenagens para modelar esse sistema são: buscar a razão onde "x" o número de dentes da Terra e "y" os dentes de Saturno, de modo que $\frac{x}{y} = 29{,}43$, então usando as expressões já vistas, em que a 1° convergente é dado por $c_0 = a_0 = 29$.

A 2° convergente é dado por

$$\mathrm{c}_1 = \mathrm{a}_0 + \frac{1}{\mathrm{a}_1}$$

$$c_1 = 29 + 0{,}43 = 29 + \frac{1}{2{,}32558} \approx 29 + \frac{1}{2} \approx \frac{59}{2} \approx 29{,}5$$

A 3° convergente será

$$\mathrm{c}_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

$$\mathrm{c}_2 = 29 + \frac{1}{2{,}32558} = 29 + \frac{1}{2 + 0{,}32558} \approx 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \approx \frac{206}{7} \approx 29{,}43$$

Com base nos valores encontrados até a 3° convergência, temos as razões $\frac{29}{1}, \frac{59}{2}\ e\ \frac{206}{7}$, sendo possível a construção das engrenagens com essas quantidades de dentes. A cada nova convergente procurada, maiores os valores obtidos, resolvemos deste modo o problema da procura de engrenagens para uma proporção adequada. O uso de frações contínuas

> O estudo das fracções contínuas desenvolveu-se rapidamente por vários fatores, mas um dos que mais contribuiu foi sem dúvida a compreensão por parte dos matemáticos de que estas possibilitavam a melhor aproximação possível, num certo sentido, de um número real por um número racional com denominador relativamente pequeno. (PAIXÃO, 2011, p.5)

Na realidade, o grande matemático suíço Leonard Euler [11]provou, em 1767, que os números racionais têm frações contínuas finitas; em contrapartida, os irracionais, pelo contrário, têm frações contínuas infinitas. Vários outros matemáticos estudaram as frações contínuas relacionando a outras constantes matemáticas, como π e e. Segundo (EVES, 2004), a palavra fração contínua apareceu, pela primeira vez, nos trabalhos do matemático inglês John Wallis (1616 − 1703) depois de Willian Brouncker (1602-1684) ter apresentado a ele o desenvolvimentos de frações contínuas.

Um dos resultados interessante sobre aproximações de raízes quadradas é através de frações contínuas, vejamos uma dada por Rafael Bombelli (1526 – 1573) que consiste na expressão da forma $\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b}$, e que tem sua representação dada na forma de fração contínua,

$$x = \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}$$

Temos a seguir uma prova desse resultado,

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \Rightarrow N = a^2 + b \Rightarrow N - a^2 = b \Rightarrow= \left(\sqrt{N} - a\right).\left(\sqrt{N} + a\right) = b \Rightarrow$$

$$= \left(\sqrt{N} - a\right) = \frac{b}{\left(\sqrt{N} + a\right)}$$

Podemos reescrever, de modo que

---

11 Leonhard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista suíço, foi considerado um dos maiores estudiosos da matemática, em sua época. Sua contribuição teve como um dos pilares a Introdução à Análise dos Infinitos, obra que constitui um dos fundamentos da matemática moderna.

$$\sqrt{N} - a = \frac{(\sqrt{N} - a).(\sqrt{N} + a)}{\sqrt{N} + a} = \frac{N^2 - a}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{\sqrt{N} + a} = \frac{b}{2a + \sqrt{N} - a}$$

Substituindo os resultados, temos que

$$\sqrt{N} - a = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \sqrt{N} - a}} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}} \Rightarrow \sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}$$

Podemos aplicar a expressão acima para o cálculo encontrado por Bombelli em 1572 e podemos aproximar qualquer raiz quadrada por uma fração racional.

Exemplo 6.2: *Achar frações aproximadas para $\sqrt{13}$ até a 4° convergência*

Tomando, $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4}$, então $a = 3$ e $b = 4$,

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}} = [3; 6,6,6, \dots] = [3; \overline{6}]$$

Fração aproximada quando $\sqrt{13} = [3; 6]$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6} = \frac{22}{6} = 3{,}666 \dots$$

Fração aproximada quando $\sqrt{13} = [3; 66]$

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = 3 + \cfrac{4}{\cfrac{40}{6}} = 3 + \frac{24}{40} = \frac{144}{40} = 3{,}60$$

Fração aproximada quando $\sqrt{13} = [3; 666]$

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}}} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{24}{40}} = 3 + \cfrac{4}{\cfrac{264}{40}} = 3 + \frac{160}{264} = \frac{952}{264} = 3{,}6060 \dots$$

Temos então, $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{9}$, $\frac{144}{40}$, $\frac{952}{264}$ como aproximações para $\sqrt{13}$ até a 4° convergência.

As frações contínuas veem representar uma nova possibilidade de abordagem didática sobre os números irracionais a conceito de aproximação por números racionais. Um olhar sob o infinito, não deve ser tratado com estranheza e sim como uma nova perspectiva de relacionar os conjuntos numéricos, dentro de uma estrutura histórica, teórica e didática, estabelecendo conexões que se fazem necessária para um bom processo de ensino-aprendizagem de matemática.

6.2 Uso da calculadora para aproximar raízes na forma $\sqrt[n]{a}$

O uso de tecnologias no processo de ensino aprendizagem de matemática se faz necessário e de grande importância, pois melhoram a compreensão e a expansão de conhecimentos que se relacionam com os saberes mencionados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). O uso da calculadora, por exemplo, é um instrumento amplamente conhecido no campo das exatas e úteis quando se trata de aproximação de resultados, mas seu uso deve ser auxiliado de forma complementar e não apenas visando buscar os resultados.

> Estudos e experiências evidenciam que a calculadoras é instrumento que pode contribuir para a melhoria do ensino de Matemática. A justificativa para essa visão é o fato de que ela pode ser usada como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação. (...) a calculadora é também um recurso para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento da auto-avaliação. (BRASIL, 1997, p.35)

O uso de uma calculadora cientifica ou financeira, onde essas possuem recursos que realmente facilitam a vida dos estudantes, exibindo e calculando gráficos de funções, calculando raízes, áreas, volumes com aproximações significativas e precisas. No entanto, do ponto de vista do uso no ensino fundamental e médio, é importante conciliar os estudos de aproximações com o uso da calculadora de bolso, aquela com 8 dígitos, que efetua as quatro operações e extrai raízes quadradas, sendo uma nova abordagem a metodologia com uso de métodos numéricos.

Será que podemos calcular raízes n-ésimas de um número qualquer? Desde que, dado um número real $x, x \in \mathbb{N}^*$, e usando somente as teclas das operações citadas, é possível calcular o calor de $x^{\frac{p}{q}}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$. Como isso é possível se a calculadora de bolso não possui essa tecla? Usando propriedades vistas no 8° e 9° ano do ensino fundamental e conceito de aproximações, é possível sim. Vejamos um exemplo

Exemplo 6.3: *Calcular o valor de* $\sqrt[3]{7}$*?*

Fazendo $x = \sqrt[3]{7}$. Então $x^3 = 7$. Multiplicando por x ambos os membros da igualdade, teremos $x^4 = 7x$ ou $x = \sqrt[4]{7x}$.

Damos inicio a uma sequencia de números reais em que x_1 será nossa primeira aproximação de $\sqrt[3]{7}$, em que $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt[4]{7x_n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$.

Mostraremos alguns valores de alguns termos da sequencia que vamos obter com uso da calculadora e, mostraremos porque esse valor converge para $\sqrt[3]{7}$. Tomando $x_1 = 1$ e assim por diante, teremos:

$$\mathrm{x}_2 = \sqrt[4]{7}$$

$$\mathrm{x}_3 = \sqrt[4]{7\sqrt[4]{7}}$$

$$\mathrm{x}_4 = \sqrt[4]{7\sqrt[4]{7\sqrt[4]{7}}}$$

$$\vdots$$

Agora com uso da calculadora, podemos calcular a $\sqrt[4]{7}$, já que $\sqrt[4]{7} = \sqrt{\sqrt{7}}$. Apertaremos as teclas [7][$\sqrt{\ }$][$\sqrt{\ }$] achamos 1,6265766 e com o valor ainda na calculadora, apertaremos novamente $\times$ [7][$\sqrt{\ }$][$\sqrt{\ }$] achamos 1,8369322. Repetindo o processo e sempre repetindo os comandos $\times$ [7][$\sqrt{\ }$][$\sqrt{\ }$], teremos os seguintes valores:

1,8936416
1,9080904
1,9117198
1,9126282
1,9128554
1,9129122
1,9129264
1,9129299
1,9129308
1,9129311
1,9129311

depois de 12 iterações, temos uma igualdade, o que nos indica uma aproximação para $\sqrt[3]{7}$ com um erro menor que 10^{-7} é 1,9129311. Podemos confirmar a quando estamos certo, que ao usar uma calculadora cientifica, temos o valor de 1,912931183, isso nos dar uma garantia de que o resultado é realmente correto.

Vejamos agora quais os motivos e o porquê do resultado ser confiável e com uma boa aproximação, consideramos a seguinte expressão:

$$\sqrt[4]{7\sqrt[4]{7\sqrt[4]{7\sqrt[4]{7\sqrt[4]{\cdots}}}}} = 7^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{16}} \times 7^{\frac{1}{64}} \times 7^{\frac{1}{256}} \cdots = 7^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots}$$

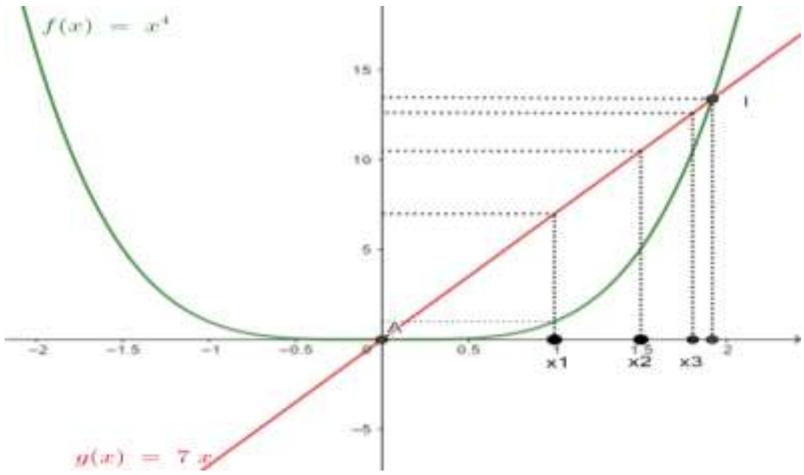
Percebemos que $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots$ é uma Progressão Geométrica, em que temos $a_1 = \frac{1}{4}\ e\ q = \frac{1}{4}$, e como $0 < q < 1$, em que é costumeiro ser chamada de uma P.G com termos infinitos, e cuja soma desses termos tem a seguinte expressão:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Sendo assim, temos $\sqrt[4]{7\sqrt[4]{7\sqrt[4]{7\sqrt[4]{7\sqrt[4]{\cdots}}}}} = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7} = x$. Admitindo que o existe o limite de x_n quando n tende ao infinito e esse limite será $\sqrt[3]{7}$. A argumentação é baseada na sucessão $x_1, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots$ converge.

Veja o gráfico das funções x^4 e $7x$ na figura abaixo, cuja interseção entre eles nos dará o resultado procurado, já que $x = \sqrt[3]{7}$, satisfaz $x^4 = 7x$, e teremos um x_n como a abscissa, retirando o caso em que $x = 0$, do ponto I na interseção nos dois gráficos.

Gráfico 7 - Funções polinomiais $f(x) = x^4$ e $g(x) = 7x$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A sucessão de pontos converge para o ponto de intersecção de ambos os gráficos, como é mostrado na figura 1. A escolha para $x_1 = 1$ e feita no sentido de facilitar os cálculos e o fato de o valor de $\sqrt[3]{7}$ está próximo de 1, no entanto, se tivéssemos escolhido qualquer outro valor para x_1, supondo que esse limite existisse, o limite da sucessão $x_1, x_1, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ ainda iria satisfazer a igualdade $x^4 = 7x$. Vejamos outro exemplo.

Exemplo 6.4: *Calcular o valor de* $\sqrt[5]{9}$*?*

A calculadora padrão de 8 dígitos somente extrai o valor da raiz quadrada, o que leva a buscar do lado esquerdo da igualdade um expoente em que seja uma potência de 2.

$x = \sqrt[5]{9} \Rightarrow x^5 = 9 \Rightarrow x^5 . x^3 = 9 . x^3 \Rightarrow x^8 = 9x^3 \Rightarrow x = \sqrt[8]{9x^3}$

Vamos construir novamente uma sequencia $x_1, x_1, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ com $x_1 = 1$ e os demais termos da tabela, usando somente a calculadora padrão, apertando $[\times], [9], [=]\ e\ [\sqrt{\ \ }]$ temos,

$$x_2 = \sqrt[8]{9{x_1}^3} = \sqrt[8]{9} = 9^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{9}}} = 1{,}3160740$$

$$x_3 = \sqrt[8]{9{x_2}^3} = \sqrt[8]{9\sqrt[8]{9^3}} = 9^{\frac{1}{8}+\frac{3}{64}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{9\sqrt{\sqrt{\sqrt{9^3}}}}}} = 1{,}4588493$$

$$x_4 = \sqrt[8]{9{x_3}^3} = \sqrt[8]{9\sqrt[8]{9\sqrt[8]{9^3}}} = 9^{\frac{1}{8}+\frac{3}{64}+\frac{9}{512}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{9\sqrt{\sqrt{\sqrt{9^3\sqrt{\sqrt{\sqrt{9^9}}}}}}}}} = 1{,}5162968$$

$$x_4 = 9^{\frac{1}{8}+\frac{3}{\mathbf{8^2}}+\frac{9}{\mathbf{8^3}}+\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{8^4}}} = 1{,}5384188$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{x_n} = 9^{\frac{1}{8}+\frac{3}{8^2}+\frac{9}{8^3}+\frac{27}{8^4}+\frac{81}{8^5}+\cdots}$$

Novamente aceitando que a sequencia converge a um limite $x \neq 0$, temos

$$\mathrm{s_n} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{9}{8^3} + \frac{27}{8^4} + \frac{81}{8^5} + \cdots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{1}{5}$$

Depois de várias iterações, encontramos:

$$\mathrm{x} = 9^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{9} \approx 1{,}5518455$$

Por fim, com uso de aproximações e de uma calculadora padrão é possível extrair qualquer raiz na forma, $\sqrt[n]{a}$, ou seja, achar um x tal que $x^n = a$. Sendo uma ferramenta a mais para a contextualização e aplicações do uso de métodos numéricos de aproximações sucessivas.

7 CONCLUSÃO

Os estudos sobre alguns métodos numéricos se mostraram ser de grande relevância em diversas construções de resultados relacionados aos conjuntos dos números irracionais. Essa correlação se estende desde os registros encontrados na Antiga Babilônia até situações que envolvem os problemas atuais.

Percebemos que se faz necessário ir além dos métodos diretos para soluções de equações polinomiais, sendo que os métodos iterativos proporcionam abordagens diferenciadas em relação os métodos rotineiros presentes nos livros didáticos. Quanto à utilização dos métodos numéricos, não se restringe somente por resolver equações, e os métodos analíticos apresentam limitações pelo fato de exibirem resultados com maiores precisões.

Através dos problemas contextualizados, ilustramos conceitos vistos somente no Ensino Superior, como por exemplo, o Método do Ponto Fixo e Método de Newton Raphson. Estes podem ser abordados ainda no Ensino Médio, desenvolvendo e possibilitando diversas aplicações em funções polinomiais, a priori, em equações com coeficientes inteiros.

O método de Newton Raphson se mostrou mais eficaz que o método de Ponto Fixo por apresentar uma maior convergência em que a sequência converge para a raiz da equação, sendo essa convergência de ordem quadrática. Além disso, apresentou um menor número de iterações na solução dos problemas e exclui a necessidade das manipulações algébricas para obter uma função de iteração que satisfaçam as condições dos métodos.

Assim, no contexto do Ensino Básico, os estudos dos métodos de aproximações sucessivas, quando agregados ao uso dos softwares, e por exibirem gráficos e planilhas com as iterações, proporcionam uma maior compreensão e interpretação dos resultados, contribuindo para um crescimento satisfatório em todo o processo de ensino/aprendizagem do tema proposto.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, José Fernandes Silva. **Tópicos especiais de álgebra**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Ciência da natureza e suas Tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** São Paulo: Unicamp, 2004.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LAUNAY, MICKAEL. **A fascinante história da matemática:** da pré-história até os dias de hoje. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2019.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio.** 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática:** As Concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1995.

MATTOS, Tuane Gomes de Oliveira Fuly de. **O estudo das funções polinomiais no ensino médio.** Campos dos Goytacazes: [s.n.], 2017.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar:** números reais. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013

PAIXÃO, João Carreira. **Fracções contínuas no ensino pré-universitário**. 2011. 73f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências, Lisboa, 2011. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7734/1/ulfc102520_tm_Jo%C3%A3o_Paix%C3%A3o.pdf. Acesso em: 13 jun. 2020

POMMER, Wagner Marcelo. Frações contínuas e os números irracionais no ensino básico. In: SEMINÁRIO SUL-MATO-GROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2012. [S.l.]. **Anais...** [S.l.:s.n.], 2012. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3772. Acesso em: 13 jun. 2020.

RIBEIRO, Flávia Dias. **A formação do professor-educador matemático em cursos de licenciatura em matemática.** 1999. 87f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontífica Universidade e Católica do Paraná, Curitiba, 1999.

RIBENBOIM, Paulo. **Funções, Limites e Continuidade.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia de Rocha. **Cálculo Numérico:** Aspectos Teóricos e Computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

VILENKIN, N. Y. A. **Métodos de aproximações sucessivas.** 2. ed. Moscou: MIR,1978.

APÊNDICE A – ATIVIDADES PROPOSTAS PARA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

A utilização de métodos numéricos para solução de problemas que envolvam achar raízes de equações polinomiais não faz parte dos materiais didáticos do Ensino Básico que abordam o tema de funções. Os métodos de solução para equações polinomiais vistos no Ensino Básico são todos métodos diretos, não explorando outros métodos para se encontrar raízes a não ser aqueles apropriados para cada um deles.

Nesse sentido, faz-se necessário como proposta de atividade e aplicação em sala de aula, alguns exercícios podem ser aplicados nos anos finais do Ensino Fundamental e outros no Ensino Médio, fazendo uso de recursos de alguns métodos numéricos apresentados neste trabalho. Devemos destacar que, quando necessário, a importância da utilização de softwares como Excel e Geo-gebra ou outros aplicativos para que venha a contribuir na compreensão dos exercícios.

Exercício – Utilizar aproximações por multiplicações sucessivas

1. Deseja-se calcular o valor do lado de um terreno no formato de um quadrado com área igual a 110 m².

   a) Utilizar a fórmula para cálculo de raízes quadradas aproximadas vista no tópico 1.1.1.
   b) Utilizar aproximações por multiplicações sucessivas para solução do problema. (Usar erro 10^{-3})
   c) Quantas etapas de multiplicações sucessivas foram realizadas?

Exercício – Utilizar aproximações por subdivisões sucessivas

2. Sabendo da existência dos números incomensuráveis e sua representação com casas decimais infinitas, os chamados números irracionais, deseja-se aproximar através das subdivisões sucessivas o valor de $\sqrt{30}$.

a) Aproximar utilizando subdivisões em 3 segmentos.
b) Aproximar utilizando subdivisões em 4 segmentos.
c) Aproximar utilizando subdivisões em 8 segmentos.
d) Os resultados encontrados estão ficando cada vez menores? Justifique sua reposta.

Exercício – Utilizar o método Babilônico para extrair raízes quadradas

3. Dado um terreno no formato de um retângulo com as seguintes medidas 5 metros e 4 metros, calcule:

a) Deixando o valor na forma de radical, qual o valor da diagonal desse retângulo?
b) Utilizando o valor do item anterior, encontre o valor aproximado da diagonal utilizando o método numérico babilônico. (Erro de 10^{-3})

Exercício – Utilizando o teorema de Bolzano em funções polinomiais

4. Com base na função polinomial $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, responda os itens abaixo.

a) Complete a tabela abaixo obtendo os valores numéricos da função $f(x)$ dada.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Com base na tabela, determine a quantidade de zeros que a função f possui. Justifique.

c) Com base na tabela, determine cada um dos intervalos $I = (a, b)$ que contém os zeros da função $f(x)$.

Exercício – Utilizando o método numérico do Ponto Fixo

5. Vamos utilizar o Método do Ponto Fixo para solução dos zeros da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1$.

a) Exiba 5 diferentes funções de iterações $\varphi(x) = x$ tal que x é raiz de $f(x) = 0$.

b) Utilizando a função de iteração $\varphi(x) = \sqrt{1 + x}$, sabendo que existe um zero no intervalo [1,2] e com estimativa inicial $x_0 = 1$ e $\varepsilon = 0{,}001$.

c) Quantas iterações foram realizadas?

Exercício – Utilizando o método numérico de Newton

6. Vamos utilizar o Método de Newton para a solução dos zeros da função quadrática $f(x) = x^2 + 3x - 7$.

a) Calcule $f'(x)$.
b) Ache a função de iteração a ser usada no Método de Newton.
c) Utilizando a função de iteração no item anterior e com estimativa inicial $x_0 = 2$ e $\varepsilon = 0{,}001$, calcule o valor de uma solução aproximada.

Exercício – Utilizando uma calculadora simples de 8 dígitos para extrair raízes da forma $\sqrt[n]{a}$.

7. Com uso de uma calculadora simples de 8 dígitos, utilizando conceitos usados no capítulo 6 ache uma solução aproximada de $x^3 = 10$.

   a) Faça manipulações algébricas para encontrar equações equivalentes a dada acima na forma $x^n = 10x^m$, de modo que n seja uma potência de 2 e $m \in \mathbb{N}$.
   b) Usando a equação $x = \sqrt[4]{10x}$, calcule o valor aproximado até que os 8 dígitos se repitam no visor da calculadora.
   c) Quantas iterações foram feitas?

8. Com uso de uma calculadora simples de 8 dígitos, iremos achar a solução aproximada de $x^5 = 8$
   a) Faça manipulações algébricas para encontrar equações equivalentes a dada acima na forma $x^n = 8x^m$, de modo que n seja uma potência de 2 e $m \in \mathbb{N}$.
   b) Usando a equação $x = \sqrt[8]{8x^3}$, calcule o valor aproximado até que os 8 dígitos se repitam no visor da calculadora.
   c) Quantas iterações foram feitas?