UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUIS PAULO GOMES DA CUNHA

NÚMEROS POLIGONAIS

QUIXADÁ - CEARÁ

2020

LUIS PAULO GOMES DA CUNHA

NÚMEROS POLIGONAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira.

QUIXADÁ - CEARÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Cunha, Luis Paulo Gomes da .
Números poligonais [recurso eletrônico] / Luis Paulo Gomes da Cunha. - 2020
Um arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 75 folhas.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2020.
Área de concentração: Ensino de Matemática..
Orientação: Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira..

1. Sequências. 2. Números Poligonais. 3. Propriedades. I. Título.

LUIS PAULO GOMES DA CUNHA

NÚMEROS POLIGONAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 22 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente
Universidade Estadual do Ceará

Jonatan Floriano da Silva

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva
Universidade Federal do Ceará

Dedico esse trabalho a minha (filha) Maria Luiza, a meu (enteado) Telmo Ricardo, a meus (irmãos) Andressa, Geane, Andre e Renan, ao (MST) que luta por reforma agrária, a meus (avós), Luiza Avelino Monteiro da Cunha (In memoriam), Luiz Prudêncio da Cunha (In memoriam), Francisca Gomes da Costa (In memoriam) e José Raimundo da Costa (In memoriam).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me amparado e dado força sempre!

Aos meus pais, Antonio Paulo Monteiro da Cunha e Antonia Liduina Gomes da Costa, por terem acreditado no valor da educação.

A minha companheira Aglaisa Ricardo, por ter me incentivado a entrar no maravilhoso mundo da matemática.

Ao professor Crispiano Barros Uchoa, por ter me incentivado a fazer o PROFMAT.

Aos professores do curso Ulisses Parente, Antonio José (Tony) e em especial a meu orientador, Professor Jobson Queiroz.

Aos colegas do curso, em especial a Samuel Robson grande amigo nessa jornada.

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivos evidenciar a importância do estudo de sequências, bem como apresentar propriedades relativas aos números poligonais planos. O estudo da sequência dos números poligonais planos aqui apresentado, também é colocado como uma estratégia de ensino, pois, há vários conhecimentos matemáticos que podem ser abordados. O texto foi organizado em quatro tópicos fundamentais: No primeiro tópico discorremos sobre a busca do ser humano em encontrar padrões na natureza, em seguida endossamos a importância de estudar padrões na educação básica, a Nova Base Nacional Curricular Comum-BNCC serviu de referência. No segundo tópico apresentamos o *Princípio de Indução Finita* que junto do *Teorema Fundamental da Somação* terá papel fundamental nas demonstrações dos resultados. Abordamos também as sequências elementares: *progressões aritméticas, aritméticas de ordem superior e geométricas*. Realizamos um estudo sobre *equações recorrência* da forma $x(n+1) = f(n)x(n)$ e $x(n+1) = x(n) + g(n)$, nesta ocasião elas terão papel de grande relevância na modelagem dos números poligonais planos. No terceiro tópico é feito um estudo sobre a sequência dos números triangulares $\big(T(n)\big)$, quadrados $\big(Q(n)\big)$, pentagonais $\big(P(n)\big)$ e hexagonais $\big(H(n)\big)$, abordando resultados algébrico e aritméticos, uma generalização para um número poligonal quaisquer e aplicações. Por fim, apresentamos, um relato de uma aplicação em sala de forma remota.

Palavras-chave: Sequências. Números Poligonais. Propriedades.

ABSTRACT

The present research aims to highlight the importance of studying sequences, as well as presenting properties related to flat polygonal numbers. The study of the sequence of flat polygonal numbers presented here is also placed as a teaching strategy, since there are several mathematical knowledge that can be addressed. The text was organized into four fundamental topics: In the first topic, we discussed the search for human beings to find patterns in nature, then, we endorse the importance of studying patterns in basic education, the New National Common Curricular Base-BNCC served as a reference. In the second topic, we present the *Principle of Finite Induction*, which together with the *Fundamental Theorem of Summation* will have a fundamental role in the income statements. We also approach the elementary sequences: *arithmetic, arithmetic of higher order and geometric progressions.* We carried out a study on *recurrence equations* of the form $x(n+1) = f(n)x(n)$ and $x(n+1) = x(n) + g(n)$, on this occasion they will have a very important role in modeling of the flat polygonal numbers. In the third topic, a study is made on the sequence of triangular ($T(n)$), square ($Q(n)$), pentagonal ($P(n)$) and hexagonal ($H(n)$) numbers, addressing algebraic and arithmetic results, and a generalization for any polygonal number and applications. Finally, we present a report of an application in the room remotely.

Keywords: Sequences. Polygonal Numbers. Properties

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A humanidade tem buscado através de observação e experimentação explicar os mais diversos eventos que ocorriam ao seu redor. Tentar prever ou encontrar padrões nesses eventos, na maioria das vezes estava condicionado a necessidade de subsistência do ser humano, por exemplo, era indispensável o conhecimento sobre cheias de rios, estações do ano, fases da lua, movimento das marés, …, assim sabiam a melhor época para desenvolver a agricultura, a pesca, etc. O aprofundamento sobre essas questões permitiu soberania fortalecendo as bases científicas e tecnológicas.

Figura 1 – Calendário asteca

Fonte – https://pt.wikipedia.org/wiki/Calend%C3%A1rio

Percebe-se então que, historicamente, padrões e regularidades cumprem um papel de demasiada relevância desde a sociedade antiga, obviamente na sociedade atual também. Pode-se constatar isso simplesmente fazendo uma breve observação a nossa volta, percebe-se que a utilização de padrões é muito comum, não somente pela beleza ou simetria, mas, por uma necessidade de otimização e organização.

Estudar padrões, regularidades, faz parte do escopo da matemática (*sequências e séries*), e de outras áreas do conhecimento tais como: biologia, ecologia, economia, estatística dentre outras, em todas elas a matemática tem lugar de destaque, pois, a partir daí extrai propriedades e estruturas matemáticas que estejam relacionado com o objeto estudado. A quem diga que a matemática é a "ciência dos padrões" (Vale 2013; Steen,1988).

Diante do exposto anteriormente convém agora tecer alguns questionamentos:

- Qual a importância de se estudar padrões?
- Que conhecimento matemático poderá ser a base para o estudo de padrões e que possibilitará uma melhor compreensão acerca do assunto?

Todo esforço daqui para frente será para responder estas questões.

Até então, o ensino de sequências se restringe somente ao ensino médio e de forma engessada, pois, são trabalhadas apenas o conhecimento de *progressões aritméticas* e *progressões geométricas* deixadas de lado um vasto acervo de sequências importantes (*Lucas, Fibonacci, Curva de Kock, Progressões Aritméticas de Ordem superior,* **…**), e fragmentada, já que este conteúdo não é associado a outros conhecimentos existentes na própria matemática (*Função, Matemática Financeira, ...*). Além disso, o ensino destes conteúdos é realizado com uma abordagem baseada numa excessiva quantidade de fórmulas, que "[…] só servem para obscurecer as ideias gerais dificultando as coisas." (LIMA, 2006, p. 40), ou seja, o processo de ensino – aprendizagem de matemática torna-se uma atividade de memorização.

São vários os aspectos e conteúdos que podem ser desenvolvidos com a abordagem de sequências na educação básica, além disso, o estudo dessas sequências propiciará aos educandos uma série de habilidades relevantes para sua formação em matemática e social, possibilitando a formulação de "[...] conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, […]". (BNCC, 2018, p. 540), dentre as quais destacamos:

(1) *Criatividade:* Confere a capacidade de elaborar estratégias, inferir hipóteses e descobrir padrões na resolução de problemas;

(2) *Raciocínio lógico*: Habilidade de estruturação do pensamento mediante aos princípios da lógica para chegar a uma determinada conclusão com êxito;

(3) *Encadeamento de ideias*: Capacidade de indexar os conhecimentos previamente estudados nas demonstrações de propriedades.

Deste modo, percebe-se que o estudo de sequências é de grande importância para uma formação consolidada em matemática no ensino básico, A nova Base Nacional Curricular Comum – BNCC traz em seu texto uma defesa sobre o seu ensino desde os anos iniciais.

> […] é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem desde o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. (BNCC, 2018, p. 270)

Assim sendo o uso de padrões pode ser um instrumento metodológico para os educadores de matemática, a fim de proporcionar aos educandos uma melhor compreensão sobre diversos objetos matemáticos, o desenvolvimento do pensamento algébrico e raciocínio matemático.

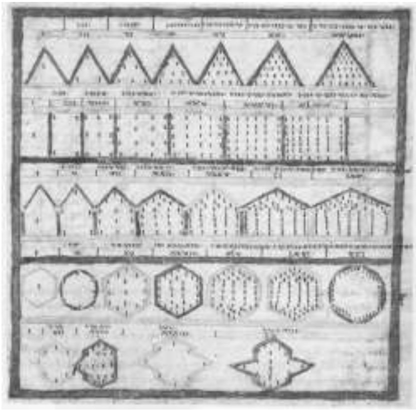
> Os padrões são a essência da matemática e a linguagem na qual é expressa, sendo a matemática a ciência que analisa e sintetiza tais padrões. A procura e a observação de padrões conduz à elaboração de conjeturas e muitas das vezes à generalização e consequentemente a prova. (VALE, 2013, p. 69)

Decorre então a busca por padrões e regularidades uma estratégia eficiente na resolução de problemas que, segundo (POLYA, 1973), é a essência da matemática, além disso, “a generalização de padrões é um veículo com potencialidades para fazer a transição do pensamento numérico para o algébrico.” (VALE, 2013, p. 69).

> As tarefas com padrões dão oportunidades aos estudantes de desenvolverem o pensamento algébrico, processo no qual os estudantes generalizam diferentes ideias matemáticas pela observação de um conjunto de evidências. Essas generalizações são criadas através de representações e argumentações, e vão sendo expressas de uma maneira gradualmente mais formal de acordo com a idade. (VALE, 2013, p. 70)

Dada a relevância do estudo de padrões e regularidades na educação básica, o que se propõe neste trabalho é o estudo das sequências dos Números Figurados, figura 2, que tem relevância histórica para a matemática, sendo conhecidos deste a antiguidade e foram objeto de estudo dos pitagóricos.

Figura 2 – Números poligonais em manuscrito medieval



Fonte: http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/numeroshtml/numeros.htm

Segundo Roque,

> [...] a concepção de sequências dos matemáticos pitagóricos partia da observação visual, sendo um tipo particular de aritmética figurada, distinta da praticada hoje. Os números eram considerados uma coleção discreta de unidades. Dessas configurações numéricas, os pitagóricos podiam obter, de forma visual, diversas conclusões aritméticas. (2012, pág. 104).

Vemos aqui um forte apelo geométrico tanto na representação dos números, quanto no estudo de suas propriedades. Ainda de acordo com Roque (2012, pág. 103), “Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de uma multiplicidade de pontos, […] pedrinhas organizadas segundo uma determinada configuração”. A configuração desses pontos formam uma classe de números que aqui definiremos como números figurados, que possuem propriedades e proposições muito relevantes, na qual será feito um estudo mais aprofundado posteriormente.

O desenvolvimento do texto será embasado com os conhecimentos de *Indução Matemática, Teorema Fundamental da Somação, Progressões Aritméticas e Geométricas, Progressões Aritméticas de ordem Superior, Equações de Recorrência* e *Tópicos de Teoria dos Números*.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Princípio de Indução Matemática

Nesse trabalho o conjunto dos números naturais será definido por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\},$$

no qual é caracterizado pelos seguintes axiomas:

1. *Todo número natural tem um sucessor, que também é natural, além disso números diferentes tem sucessores diferentes.*
2. *Existe um único número natural* 1 *que não é sucessor de nenhum outro.*
3. *Se um conjunto de números naturais contém o número* 1 *e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.*

Uma outra característica dos números naturais é o *Princípio da Boa Ordenação* que diz: *Todo subconjunto não-vazio dos naturais tem um elemento mínimo*. Aqui assumiremos a validade dessa propriedade sem demonstração.

Diferentemente das demais ciências, a matemática não é uma ciência baseada em experimentações, onde se avalia uma certa propriedade por meio de experimentos realizados para uma determinada quantidade de casos particulares e assim concluir a validade da propriedade. Veja o exemplo a seguir.

Seja $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, um polinômio definido por $p(n) = n^2 - n + 41$. Afirmamos que $p(n)$ é um número primo para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos o valor numérico de $p(n)$ na tabela abaixo.

Tabela 1 – Valor numérico

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{p(n)}$	**Primo**
1	41	*Sim*
2	43	*Sim*
3	47	*Sim*
4	53	*Sim*
⋮	⋮	⋮
39	1523	*Sim*
40	1601	*Sim*

Fonte: elaborado pelo autor

Incrivelmente para $1 \leq n \leq 40$, $p(n)$ gera 40 números primos, com isso, somos tentados a concluir que o polinômio gera sempre primos. Todavia, para $n = 41$ temos que $p(41) = 41^2$ que não é primo.

O resultado a seguir é chamado de *Princípio de Indução Matemática*, e segue do axioma 3. Intuitivamente o princípio se baseia que se uma propriedade vale para n e se mostrarmos que também vale para $n+1$, então a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1: Seja $P(n)$ uma propriedade em $\{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$, tal que

i) $P(n_0)$ é verdadeira.

ii) Para todo $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então, $P(n+1)$ é verdadeira. Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Demonstração: Seja $X = \{n \in \mathbb{N}; n > n_0$ e $P(n)$ é falso$\}$, vamos mostrar que $X = \emptyset$. Suponha por absurdo que $X \neq \emptyset$, logo, pelo *Princípio da Boa Ordenação*, X tem um elemento mínimo $a \neq n_0$. Sendo a o elemento mínimo de X, temos que $a - 1 \notin X$, portanto $P(a-1)$ é verdadeira. Mas por ii) temos que se $P(a-1)$ é verdadeira, implica $P(a)$ também ser verdadeira, logo $a \notin X$ o que é uma contradição, e portanto $X = \emptyset$. ■

Para Hefez (2016, p. 47), o método de demonstração por indução matemática "[…] serve para estabelecer verdades […], válidas em conjuntos infinitos. Não se trata de mostrar que uma [propriedade] é verdadeira para um grande número de [naturais], […] trata-se de provar que uma tal [propriedade] é verdadeira para todo [natural] […]"**.**

Para fazer uma demonstração por indução matemática deve-se seguir o algoritmo abaixo.

i) BASE DE INDUÇÃO: Mostrar que a propriedade $P(n_0)$ é válida;

ii) HIPÓTESE DE INDUÇÃO: Assumir, por hipótese de indução, que a propriedade $P(n)$ é válida para n;

iii) PASSO DE INDUÇÃO: Dado que $P(n)$ é válida para n, então, $P(n+1)$ verdadeira.

Vejamos alguns exemplos da aplicação do *Princípio da Indução Finita* na demonstrações de identidades, desigualdades e geometria.

Exemplo 1: Demonstre que a soma dos n primeiros números naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração: O exemplo acima quer que mostremos que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para $n = 1$, temos que $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ e portanto a igualdade é válida. Assumiremos por hipótese de indução que a igualdade é válida para $n \in \mathbb{N}$, vamos provar que vale para $n + 1$. Tomemos a soma dos $n + 1$ números naturais,

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + (n + 1) &= \overbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n}^{H.I} + (n + 1) \\
&= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\
&= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\
&= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Dá última igualdade temos que a identidade é válida para $n + 1$, portanto, é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, o que conclui o resultado. ■

Exemplo 2: (OBM) Para cada $n \geq 3$, mostre que existem n números $\mathbb{N}$ distintos dois a dois, tais que a soma dos inversos multiplicativos é igual a 1.

Demonstração: Para a demonstrar esse fato, façamos demonstração por indução em $n \geq 3$. Para o caso base $n = 3$, basta notar que existem $x_1 = 2 < x_2 = 3 < x_3 = 6$, tais que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que para $n \geq 3$ exista n números naturais $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, tais que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{2}$ obtemos

$$\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2x_3} + \cdots + \frac{1}{2x_n} = \frac{1}{2}.$$

Somando a ambos os lados da igualdade $\frac{1}{2}$ obtemos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2x_3} + \cdots + \frac{1}{2x_n} = 1.$$

Daí, visto que $2 < 2x_1 < 2x_2 < 2x_3 < \cdots < 2x_n$, então, obtivemos $n + 1$ números naturais distintos dois a dois, tal que a soma de seus recíprocos é 1, e isso completa a demonstração. ■

Corriqueiramente recaímos em situações para provar que $A < B$, neste caso, seria mais útil inserir um número C e provar que $A < C$ e $C < B$. De fato temos que, se $A < C < B$, implica $A < B$, essa propriedade é chamada de transitividade.

Exemplo 3: Quaisquer que sejam os números reais $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, a_n$, vale que

$$|a_1 + \ a_2 + \cdots + a_n| \ \leq \ |a_1| \ + \ |a_2| \ + \cdots + |a_n|, n \ \in \ \mathbb{N}.$$

Demonstração: Esse exemplo é uma generalização da desigualdade triangular, aqui vamos assumir como verdade que, $|u + \ v| \ \leq \ |u| + \ |v|$, onde u e v são números reais.

Para o caso de $n = 1$, temos que $|a_1| \leq |a_1|$, para $n = 2$ segue da nossa afirmação que $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$, em qualquer um dos caso a propriedade é válida. Suponhamos agora, por hipótese de indução, a validade para $n \ \in \ \mathbb{N}$. Provaremos para $n + 1$. De fato temos que

$$|a_1 + \ a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| = |(a_1 + \ a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}|,$$

Mas $(a_1 + \ a_2 + \cdots + a_n)$ é um número real, portanto aqui podemos utilizar o caso $n = 2$.

$$\begin{aligned} |(a_1 + \ a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}| &\leq |\overbrace{a_1 + \ a_2 + \cdots + a_n}^{H.I}| + |a_{n+1}| \\ &\leq |a_1| + \ |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|. \end{aligned}$$

Da última desigualdade temos que o resultado é válido para $n + 1$. ■

Exemplo 4: (DESIGUALDADE DE BERNOULLI) Se $x > -1$ é um números real e $n \in \mathbb{N}$, prove que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Demonstração: Para $n = 1$ temos que, $(1 + x)^1 \geq 1 + x \Leftrightarrow 1 + x \geq 1 + x$, logo a desigualdade é verificada. Assumiremos, por hipótese, de indução a validade para n e provaremos para $n + 1$.

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x),$$

mas, por hipótese de indução, temos que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, logo

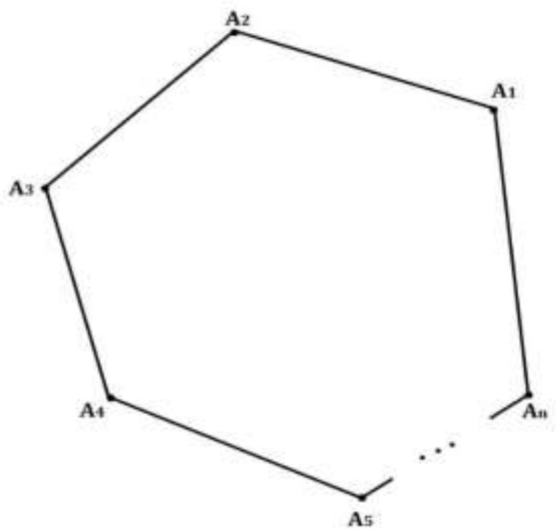
$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + (n + 1)x + \overbrace{nx^2}^{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n + 1)x. \end{aligned}$$

Da última desigualdade temos que o resultado é válido para $n + 1$. ■

Exemplo 5: A soma das medidas dos ângulos internos $s(n)$ de um polígono convexo de n lados, com $n \geq 3$, é $s(n) = (n - 2)180°$.

Demonstração: Inicialmente afirmamos como verdade que a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano é sempre $180°$. Para $n = 3$, temos que o polígono é um triângulo e, $s(3) = (3 - 2)180° = 180°$, e pela afirmação feita inicialmente a validade da fórmula é verificada.

Figura 3 – Polígono $\boldsymbol{n-gonal}$

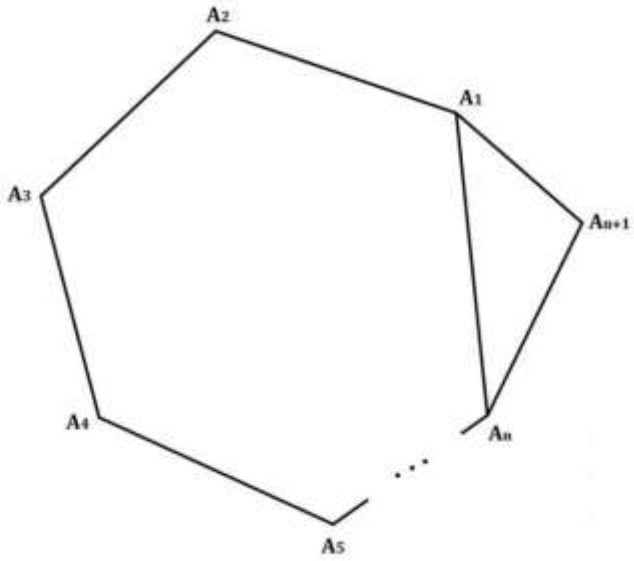


Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o auxílio da figura 3 e por hipótese de indução vamos supor que a fórmula $s(n) = (n - 2)180°$ é válida para o polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ de n lados, e provaremos a validade para um polígono de $n + 1$ lados.

Para o passo de indução, consideremos o polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_{n+1}$ (figura 4).

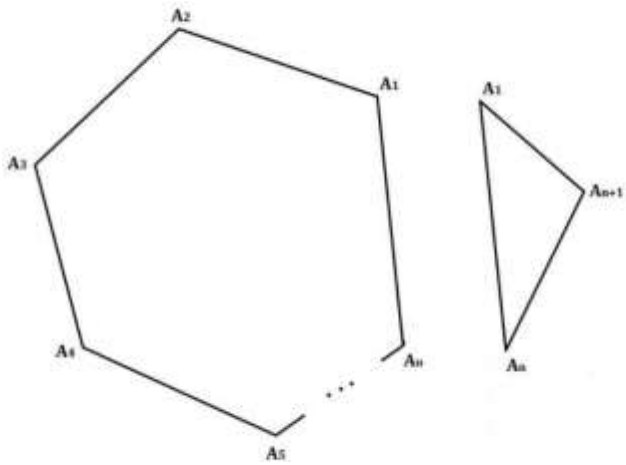
Figura 4 – Polígono $n+1-gonal$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que esse polígono pode ser decomposto no polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e no triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ conforme a figura 5.

Figura 5 – Polígono $n+-gonal$ decomposto



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da afirmação, temos que a soma dos ângulos internos do triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ é $180°$ e por hipótese de indução a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n-2)180°$. Logo a soma dos ângulos internos de um polígono com $n+1$ lados é

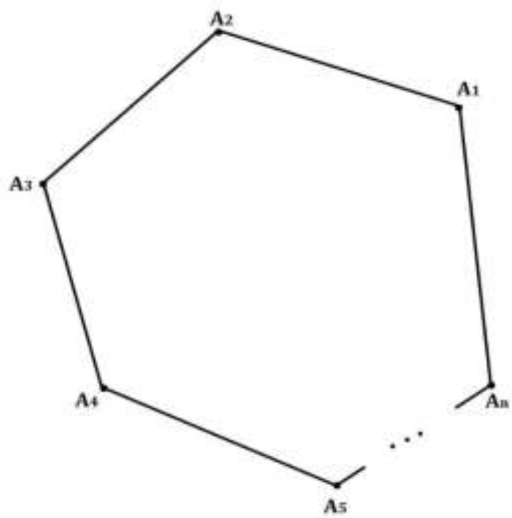
$$s(n+1) = (n-2)180° + 180° = (n-1)180°,$$

o que conclui o resultado. ■

Exemplo 6: O número de diagonais $d(n)$ de um polígono convexo de n lados é $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, com $n \geq 3$.

Demonstração: Para $n = 3$, temos que $d(3) = \frac{3\cdot(3-3)}{2} = 0$, e a validade da fórmula é verificada. Suponhamos que a fórmula $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, com $n \geq 3$, seja válida para um polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ de n lados (figura 6). Provaremos para um polígono de $n+1$ lados.

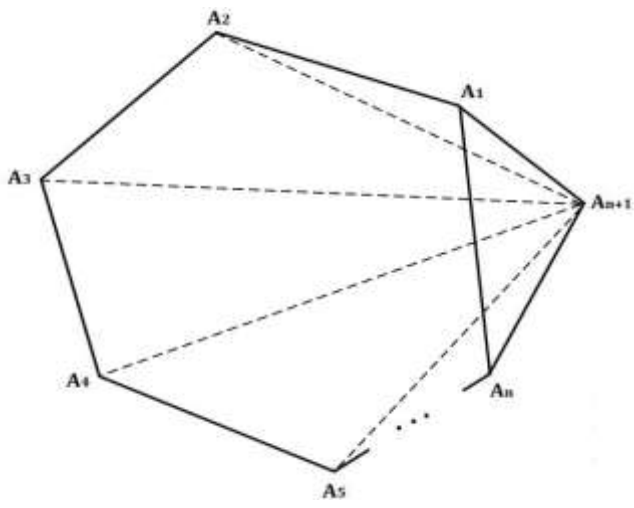
Figura 6 – Polígono $n-$ $gonal$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considere um polígono $A_1A_2A_3 \dots A_nA_{n+1}$ com $n+1$ lados.

Figura 7 – Polígono $n+1-$ $gonal$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que o número de diagonais do polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_{n+1}$ é o número de diagonais do polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, que por hipótese de indução é $\frac{n(n-3)}{2}$, mais o número de diagonais que partem do vértice A_{n+1} que é $n-2$. Mas vejam que o lado A_1A_n do polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ é diagonal no polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_{n+1}$. Portanto o número de diagonais totais é

$$d(n+1) = \frac{n(n-3)}{2} + n - 2 + 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2},$$

precisamente o que queríamos demonstrar. ■

As discussões anteriores e a resolução da miscelânea de problemas, tem pôr objetivo endossar o quanto o *Princípio da Indução Finita* é uma ferramenta poderosa em demonstrações de propriedades envolvendo os números naturais.

2.2 Sequências elementares

Sequências ocorrem com demasiada frequência no cotidiano, por isso, seu estudo terá uma posição de destaque, tanto pela sua importância em várias áreas do conhecimento humano e problemas matemáticos, bem como terá suma relevância no desenvolvimento desse trabalho.

Considere o conjunto $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, uma permutação dos seus elementos $B = \{\gamma, \alpha, \delta, \beta\}$, não altera a relação de igualdade dos dois conjuntos, pois, um conjunto é definido pelos seus elementos e nesse caso tem-se portanto, $A = B$. Agora considere a sequência $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, uma permutação dos seus elementos $(\gamma, \alpha, \delta, \beta)$, altera a relação de igualdade, pois, uma sequência é definida pelos seus elementos e também pela ordem em que esses elementos estão dispostos, portanto as duas sequências são diferentes.

As sequências podem ser de letras, (anteriores) símbolos, figuras ou mais ordinariamente de números, essa última será o objeto de estudo neste trabalho.

> Uma **sequência** […] de números reais é uma lista ordenada […] $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \ldots)$ de números reais, i.e., uma lista […] de números reais na qual especificamos quem é o primeiro termo, quem é o segundo, o terceiro e assim por diante. É costume denotar uma sequência […] como acima simplesmente por $(\boldsymbol{a_k})_{k\geq 1}$. […] dizemos que $\boldsymbol{a_k}$ é o $\boldsymbol{k}$º **termo** da sequência. (CAMINHA, 2012, p.97)

Convenientemente iremos utilizar uma notação diferente da definição acima, mas que não causará ônus no que se refere a definição.

Definição: Uma sequência $(x(1), x(2), x(3), \ \ldots \ , x(n))$ de números reais, é uma função real x que associa cada número natural n $(domínio)$ ao número $x(n)$ $(imagem)$. Mais precisamente,

$$x : \ \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto x(n).$$

Uma sequência $(x(n))_{n\geq 1}$ está definida por uma *fórmula de posição* se $x(n) \in \mathbb{R}$ forem escritos em função apenas de n.

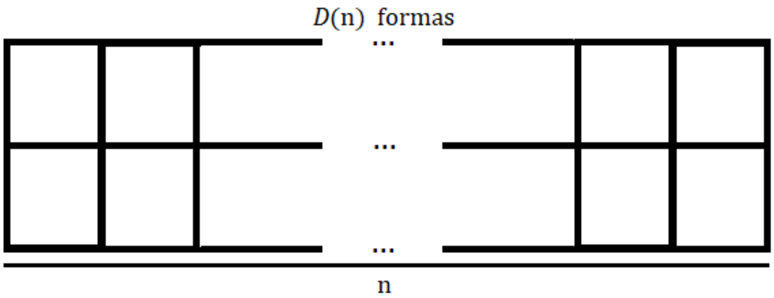
Exemplo 1: Considere lista de números $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$. Temos que $x(1) = \frac{1}{2}$, $x(2) = \frac{2}{3}$, $x(3) = \frac{3}{4}$, mais geralmente, o n–ésimo termo da sequência é dado pela fórmula de posição $x(n) = \frac{n}{n+1}$, $com\, n \geq 1$.

A sequência do exemplo acima foi escolhida convenientemente, de forma que foi fácil identificar a fórmula de posição da sequência, entretanto, há situações em que uma fórmula de posição para a sequência não é evidente e precisamos defini-la através de uma *fórmula recursiva*. Tal estratégia consiste em especificar um ou mais termos iniciais e escrever o n–ésimo termo $x(n)$ em função dos termos anteriores a ele ou de n. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2: De quantas formas diferentes podemos cobrir um tabuleiro $2 \times n$ usando peças de dominó 2×1?

A solução para esse problema é encontrar uma sequência $\left(D(n)\right)_{n\geq 1}$ que representa o número de formas diferentes de cobrir um tabuleiro $2 \times n$ (figura 8).

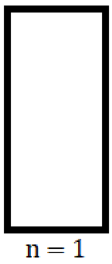
Figura 8 – Tabuleiro $2 \times n$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos que um tabuleiro 2×1 pode ser coberto de $D(1) = 1$ forma (figura 9).

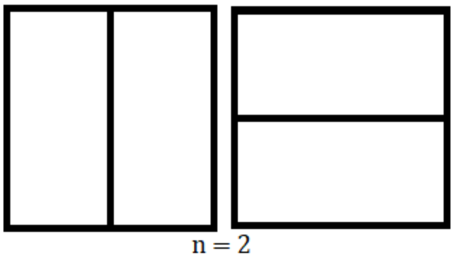
Figura 9 – Tabuleiro 2 × 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já um tabuleiro 2×2 pode ser coberto de $D(2) = 2$ formas (figura 10).

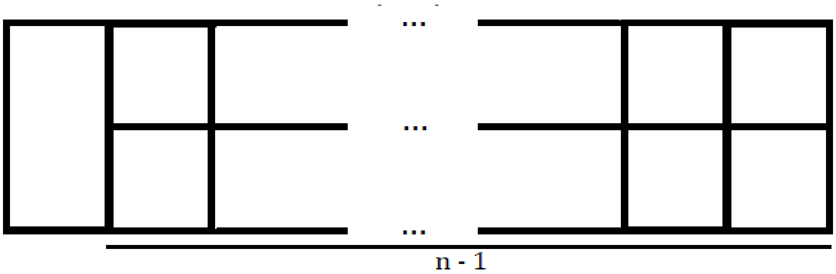
Figura 10 – Tabuleiro 2 × 2



Fonte: Elaborado pelo autor.

A cobertura do tabuleiro $2 \times n$ pode começar com uma peça na vertical ou na horizontal. Se a peça inicial estiver na vertical temos $D(n-1)$ formas de cobrir o tabuleiro $2 \times (n-1)$ (figura 11).

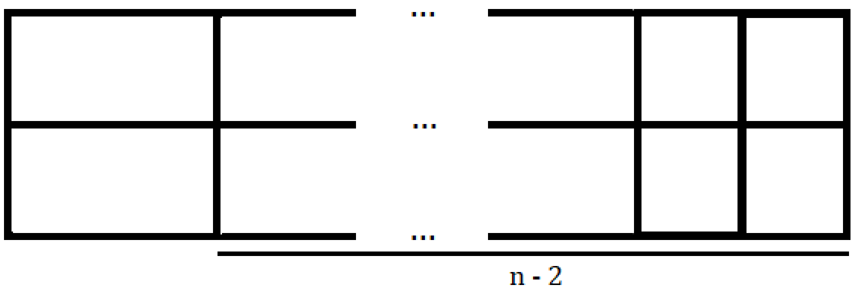
Figura 11 – Peça inicial na vertical



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se a peça inicial estiver na horizontal temos $D(n-2)$ formas de cobrir o tabuleiro $2 \times n - 2$ (figura 12).

Figura 12 – Peça inicial na horizontal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto o número de formas de cobrir um tabuleiro $2 \times n$ com dominó é definida recursivamente por $D(1) = 1$, $D(2) = 2$ e $D(n) = D(n-1) + D(n-2)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Fazendo $n = 3$ obtemos $D(3) = D(2) + D(1) = 2 + 1 = 3$ formas de cobrir um tabuleiro 2×3, fazendo $n = 4$ temos que $D(4) = D(3) + D(2) = 3 + 2 = 5$ formas de cobrir um tabuleiro 2×4.

Após essa discussão pode-se fazer alguns questionamentos sobre o raciocínio recursivo.

- Um sequência definida por recorrência constitui uma solução para o problema?
- Dado uma sequência definida por recorrência, como podemos obter uma fórmula de posição para seus termos?

Para o primeiro questionamento a resposta é depende, se estamos pensando em calcular "na força bruta" a resposta é não, pois, se quiséssemos calcular o termo $D(1000)$ teríamos muito trabalho, entretanto, com a evolução da tecnologia, o advento dos computadores e sua inserção no ambiente escolar, expressões definidas por recorrência constitui em uma solução para o problema.

Para o segundo questionamento a resposta não é tão simples, de modo que, posteriormente discutiremos com maior rigor os métodos para determinar a fórmula de posição de uma sequência definida por recorrência.

2.2.1. Progressões Aritméticas

Neste tópico será abordado o estudo e discussão sobre as *progressões aritméticas*, bem como suas propriedades.

Definição: Uma sequência $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é uma progressão aritmética se a diferença entre um termo e seu antecessor for uma constante $r \in \mathbb{R}$. Mais precisamente

$$x(n+1) - x(n) = r,$$

para todo $n \geq 1$.

Da definição acima o número real r é chamado de razão da progressão, além disso, para que a sequência esteja inteiramente determinada devemos conhecer obviamente sua razão e o termo inicial $x(1)$.

Daqui em diante iremos chamar uma progressão aritmética pela a abreviação (PA).

Exemplo 3: Se $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de razão r, prove que a sequência $\left(y(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $y(n) = x(2n)$, para todo $n \geq 1$, é uma PA de razão $2r$.

Demonstração: Para provar esse fato, basta mostra que $y(n+1) - y(n) = 2r$. Da definição de $y(n)$ e do fato de que $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de razão $\boldsymbol{r}$ temos que

$$\begin{aligned} y(n+1) - y(n) &= x(2n+2) - x(2n) \\ &= \overbrace{\left(x(2n+2) - x(2n+1)\right)}^{=r} + \overbrace{\left(x(2n+1) - x(2n)\right)}^{=r} \\ &= r + r = 2r, \end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar. ∎

Proposição 1: Seja $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão aritmética de razão r, então:

a) $x(n) = x(1) + (n-1)r$, para todo $n \geq 1$.

b) Definindo $S(n) = x(1) + x(2) + \cdots + x(n)$, então, $S(n) = \frac{n\left(x(1)+x(n)\right)}{2}$, para $n \geq 1$.

Demonstração:

a) Façamos a prova por indução em n. Para o caso base $n = 1$, temos que $x(1) = x(1) + (1-1)r = x(1)$, e a validade da expressão é verificada. Suponhamos agora a validade da expressão para n. Provaremos a validade para $n+1$. Da definição de PA temos que,

$$x(n+1) = x(n) + r,$$

mas, por hipótese de indução, $x(n) = x(1) + (n-1)r$, logo

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(1) + (n-1)r + r \\ &= x(1) + nr - \cancel{r} + \cancel{r} \\ &= x(1) + nr, \end{aligned}$$

o que prova o resultado. ■

b) A prova será por indução em n. Para $n = 1$, temos que a validade da proposição é verificada, pois $S(1) = \frac{1(x(1)+x(1))}{2} = x(1)$. Vamos supor, por hipótese de indução, que a fórmula é verdadeira para n e provaremos a validade para $n+1$. Da definição e $S(n)$, temos que

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= \overbrace{x(1) + x(2) + \cdots + x(n)}^{H.I} + x(n+1) \\
&= \frac{n\big(x(1) + x(n)\big) + 2x(n+1)}{2} \\
&= \frac{2nx(1) + n^2r - 2x(1) + nr}{2} \\
&= \frac{n\,\overbrace{(x(1) + nr)}^{x(n+1)} + (n+1)x(1) + \overbrace{(x(1) + nr)}^{x(n+1)}}{2} \\
&= \frac{nx(n+1) + (n+1)x(1) + x(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)x(n+1) + (n+1)x(1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(x(1) + x(n+1))}{2},
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

As expressões demonstradas anteriormente corresponde respectivamente a fórmula do termo geral e a soma dos $\boldsymbol{n}$ primeiros termos de uma PA.

Proposição 2: Seja $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais:

a) Mostre que $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é um progressão aritmética se somente se existem constantes A e B reais tais que $x(n) = An + B$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é um progressão aritmética se somente se existem constantes C e D reais tais que $S(n) = x(1) + x(2) + \cdots + x(n) = Cn^2 + D$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

a) ($\Longrightarrow$) Como $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA, segue da Proposição 1 item (a), desta seção, que

$$\begin{aligned}
x(n) &= x(1) + (n-1)r \\
&= rn + (x(1) - r),
\end{aligned}$$

pondo $A = r$ e $B = x(1) - r$, o resultado segue.

($\Longleftarrow$) Para a recíproca devemos mostrar que $x(n+1) - x(n)$ é constante.

$$\begin{aligned} x(n+1) - x(n) &= (A(n+1) + B) - (An + B) \\ &= An + A + B - An - B \\ &= A, \end{aligned}$$

sendo A a razão da PA para todo $n \in \mathbb{N}$, o que prova o resultado.

b) ($\Longrightarrow$) Como $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA, segue da Proposição 1 item (b), desta seção, que

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{n\big(x(1) + x(n)\big)}{2} \\ &= \frac{rn^2 + 2nx(1) + rn}{2} \\ &= \frac{r}{2}n^2 + \left(x(1) + \frac{r}{2}\right)n, \end{aligned}$$

pondo $C = \frac{r}{2}$ e $D = x(1) + \frac{r}{2}$, o resultado segue.

($\Longleftarrow$) Para de demonstração da recíproca temos que, $x(n+1) = S(n+1) - S(n)$ e $x(n) = S(n) - S(n-1)$, portanto, provaremos que $x(n+1) - x(n)$ é constante. Segue que

$$\begin{aligned} x(n+1) - x(n) &= \big(S(n+1) - S(n)\big) - \big(S(n) - S(n-1)\big) \\ &= S(n+1) - 2S(n) + S(n-1) \\ &= C(n+1)^2 + D(n+1) - 2(Cn^2 + Dn) + C(n-1)^2 + D(n-1) \\ &= Cn^2 + 2Cn + C + Dn + D - 2Cn^2 - 2Dn + Cn^2 - 2CN + \\ &\quad + C + Dn - D \\ &= 2C, \end{aligned}$$

onde $2C$ é a razão da PA para todo $n \in \mathbb{N}$, o que conclui o resultado.

2.2.2 Progressões Aritméticas de Ordem Superior

Para sequências reais, definimos o operador diferença (Δ) dado por, $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$. Em particular, uma sequência $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA se somente se $\Delta x(n)$ é constante. Além disso, seja $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, se $\Delta x(n)$ for uma PA constante, então, $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de segunda ordem.

Mais geralmente, uma progressão aritmética de ordem $k > 2$ é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e seu termo anterior é uma progressão aritmética de ordem $k - 1$. Em outras palavras, a ordem de uma sequência $\big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é um número k que representa a quantidade de vezes que aplicamos o operador (Δ) até que a sequência ($\Delta^k x(n)$) seja uma PA constante, ou seja, razão $r = 0$.

Exemplo 4: A tabela abaixo mostra os termos da sequência $x(n) = 2n^7 + n^4 - 3n$ e suas diferenças.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x(n)}$	$\boldsymbol{\Delta x(n)}$	$\boldsymbol{\Delta^2 x(n)}$	$\boldsymbol{\Delta^3 x(n)}$	$\boldsymbol{\Delta^4 x(n)}$	$\boldsymbol{\Delta^5 x(n)}$	$\boldsymbol{\Delta^6 x(n)}$	$\boldsymbol{\Delta^7 x(n)}$
1	0	266	3914	20472	50424	63840	40320	10080
2	266	4180	24386	70896	114264	104160	50400	10080
3	4446	28566	95282	185160	218424	154560	60480	10080
4	33012	123848	280442	403584	372984	215040	70560	10080
5	156860	404290	684026	776568	588024	285600	80640	10080
6	561150	1088316	1460594	1364592	873624	366240	90720	10080
7	1649466	2548910	2825186	2238216	1239864	456960	100800	10080
8	4198376	5374096	5063402	3478080	1696824	557760	110880	10080
9	9572472	10437498	8541482	5174904	2254584	668640	120960	10080

Na tabela, é fácil ver que foi necessário a aplicação do operador (Δ) $k = 7$ vezes para chegar numa PA constante, portanto, $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de sétima ordem.

Proposição 3: Se $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma PA de ordem 2, então seu termo geral $x(n)$ é um polinômio de grau 2 na variável n. Reciprocamente, se $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é um polinômio de grau 2, então a sequência $x(n)$ é uma PA de ordem 2.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (MORGADO e CARVALHO, 2015).

Teorema 1: (TEOREMA FUNDAMENTAL DA SOMAÇÃO) Seja $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Temos que

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x(k) = x(n+1) - x(1).$$

Demonstração: Façamos a prova por indução em n. Para $n = 1$, a validade é trivialmente satisfeita, para $n = 2$, temos que

$$\sum_{k=1}^{2} \Delta x(1) = \overbrace{\Delta x(1)}^{def} + \overbrace{\Delta x(2)}^{def} = x(2) - x(1) + x(3) - x(2) = x(3) - x(1),$$

e portanto o caso base foi demonstrado. Suponhamos a validade do teorema para n, provaremos a validade para $n+1$. Tomando a soma dos $n+1$ termo da sequência $\Delta x(n)$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \Delta x(k) &= \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \Delta x(k)}^{H.I} + \overbrace{\Delta x(n+1)}^{def} \\ &= x(n+1) - x(1) + x(n+2) - x(n+1) \\ &= x(n+2) - x(1),\end{aligned}$$

o que prova o resultado. O Teorema Fundamental da Somação é um resultado muito importante e constitui uma técnica vantajosa para somas finitas.

Semelhantemente ao teorema anterior, temos a proposição a seguir que é particularmente útil para cancelamento em produtos.

Proposição 4: Seja $\left(x(n)\right)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais não nulos então,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{x(k+1)}{x(k)} = \frac{x(n+1)}{x(1)}.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (MUNIZ NETO, 2012).

O Teorema 1 e a Proposição 3 são também conhecidos como *soma telescópica* e *produto telescópico* respectivamente.

Exemplo 5: Utilize o Teorema Fundamental da Somação para calcular $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Solução: Observe que,

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Aplicando o somatório a ambos os membros e o TFS na última expressão obtemos,

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \Leftrightarrow$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \Leftrightarrow$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Teorema 2: Sejam p e $k \in \mathbb{N}$, a soma $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p+1$.

Demonstração: Façamos a prova por indução em p. Para $p = 1$, o teorema já foi provado no exemplo 1 da seção 2.1.

Vamos supor por, hipótese de indução, que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ seja um polinômio de grau $p + 1$ para todo $p \in \{1, 2, 3, \ldots, s\}$, mostraremos que o resultado vale para $p = s + 1$, ou seja, $\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$ é um polinômio de grau $s + 2$.

Observe que

$$(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + f(k),$$

onde $f(k)$ é o polinômio de grau s, formado pelos termos implícitos da expansão do binômio $(k+1)^{s+2}$. Aplicando o somatório em ambos os lados, temos que

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + \sum_{k=1}^{n} f(k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}((k+1)^{s+2} - k^{s+2}) = (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n).$$

Note que, o grau de cada termo do polinômio $f(k)$ é menor ou igual s, logo, por hipótese de indução, $F(n)$ é um polinômio de grau $s + 1$.

$$\overbrace{\sum_{k=1}^{n}((k+1)^{s+2}-k^{s+2})}^{TFS} = (s+2)\sum_{k=1}^{n}k^{s+1}+F(n).$$

$$(k+1)^{s+2}-1=(s+2)\sum_{k=1}^{n}k^{s+1}+F(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^{s+1}=\frac{(k+1)^{s+2}-F(n)-1}{s+2},$$

que é um polinômio de grau $s+2$.

Corolário 1: Se F é um polinômio de grau p, então $\sum_{k=1}^{n}F(k)$ é um polinômio de grau $p+1$.

Demonstração: Seja $F(k)=A_0+A_1k+\cdots+A_{p-1}k^{p-1}+A_pk^p$, temos que,

$$\sum_{k=1}^{n}F(k) = \sum_{k=1}^{n}A_0+\sum_{k=1}^{n}A_1k+\cdots+\sum_{k=1}^{n}A_{p-1}k^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}A_pk^p$$

$$=A_0\sum_{k=1}^{n}1+A_1\sum_{k=1}^{n}k+\cdots+A_{p-1}\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}+A_p\sum_{k=1}^{n}k^p$$

$$=A_0P_1(n)+A_1P_2(n)+\cdots+A_{p-1}P_p(n)+A_pP_{p+1}(n),$$

os polinômios $P_i(n)$ tem grau n, portanto, pelo teorema 1, temos que $\sum_{k=1}^{n}F(k)$ tem grau $p+1$ em n.

Lema 1: Se $x(n)$ é um polinômio de grau p, então $\Delta x(n)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $p-1$.

Demonstração: Seja $x(n)$ um polinômio de grau p, então podemos escrever

$$x(n)=An^p+P'(n),$$

onde $P'(n)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $p-1$. Aplicando o operador diferença (Δ) temos que,

$$\Delta x(n) = A(n+1)^p + P'(n+1) - \big(An^p + P'(n)\big),$$

temos $A(n+1)^p = An^p + Apn^{p-1} + P''(n)$, onde $P''(n)$ é um polinômio de grau $p-2$, portanto,

$$\begin{aligned}\Delta x(n) &= A(n+1)^p + P'(n+1) - \big(An^p + P'(n)\big)\\ &= An^p + Apn^{p-1} + P'(n+1) + P''(n) - An^p - P'(n)\\ &= Apn^{p-1} + P'(n+1) + P''(n) - P'(n),\end{aligned}$$

pondo $P(n) = P'(n+1) + P''(n) - P'(n)$, que tem grau menor ou igual a $p-1$, obtemos

$$\Delta x(n) = Apn^{p-1} + P'(n+1),$$

e portanto, $\Delta x(n)$ tem grau menor ou igual a $p-1$, como queríamos demonstrar.

O teorema a seguir é um resultado muito importante, pois mostra a relação entre a ordem e o grau de uma progressão aritmética de ordem maior ou igual a 2.

Teorema 3: $x(n)$ é uma progressão aritmética de ordem $p \geq 2$, se somente se, $x(n)$ é um polinômio de grau p em n.

Demonstração: Façamos a demonstração do teorema por indução em p. Para $p = 2$ a proposição 3 dessa seção garante a validade. Agora supomos a validade do resultado para p e provaremos a validade para $p+1$.

Seja $x(n)$ uma PA de ordem $p+1$, por definição a sequência $y(n) = \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ tem ordem p, e pela hipótese de indução $y(n)$ tem grau p em n. Pelo TFS temos que $\sum_{k=1}^{n} y(k) = x(n+1) - x(1)$, e pelo corolário do teorema 2, $\sum_{k=1}^{n} y(k)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n. Daí, temos que $x(n+1) = \sum_{k=1}^{n} y(k) + x(1)$, é um polinômio de grau $p+1$ em consequência $x(n)$ também.

Reciprocamente seja $x(n)$ um polinômio de grau $p+1$, pelo lema 1, $\Delta x(n)$ é polinômio de grau p em n, e pela hipótese de indução $\Delta x(n)$ é uma PA de ordem p, logo por definição $x(n)$ tem ordem $p+1$.

2.2.3 Progressões Geométricas

Nesse tópico será tratado o estudo de sequências que variam conforme uma “taxa” de crescimento constante, que são as *progressões aritméticas* que aqui abreviaremos simplesmente por (PG).

“Uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Esse quociente [...] é chamado de razão [da PG]”. (MORGADO; WAGNER; ZANI, 2001, p. 20).

Mais formalmente uma *progressão geométrica* (PG) pode ser definida por recorrência conforme abaixo.

Definição: Uma sequência $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais é uma progressão geométrica se o quociente entre um termo e seu antecessor for uma constante $q \in \mathbb{R}$. Mais precisamente

$$\frac{x(n+1)}{x(n)} = q,$$

para todo $n \geq 1$.

Da definição acima o número real q é chamado de razão da progressão, além disso, para que a sequência esteja inteiramente determinada devemos conhecer obviamente sua razão e o termo inicial $x(1)$. Em particular se $q = 1$, $x(n) = x(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vejamos o exemplo a seguir.

Proposição 5: Uma sequência $\left(x(n)\right)_{n\geq 1}$ de números reais não nulos é uma PG se somente se

$$x(n+2)x(n) = x(n+1)^2.$$

Proposição 6: Seja $\left(x(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma progressão geométrica de razão q, então:

a) $x(n) = x(1)q^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

b) Se $q \neq 1$, então $x(1) + x(2) + \cdots + x(n) = \frac{x(n+1)+x(1)}{q-1}$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração:

a) Façamos a prova por indução sobre n. Para $n = 1$ temos, $x(1) = x(1)q^{1-1} = x(1)$, e a validade do caso base foi verificada. Suponhamos agora a validade para n, provaremos que também vale para $n + 1$. Da definição de PG temos que

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \overbrace{x(n)}^{HI}\, q \\ &= x(1)q^{n-1}.q \\ &= x(1)q^{n}, \end{aligned}$$

esta igualdade satisfaz o que queríamos demonstrar.

b) Vamos proceder a prova por indução sobre n. Para $n = 1$ temos que

$$x(1) = \frac{\overbrace{x(2)}^{def} - x(1)}{q-1} = \frac{x(1)q - x(1)}{q-1} = \frac{x(1)\cancel{(q-1)}}{\cancel{q-1}} = x(1),$$

e portanto, a validade do caso base é verificada. Vamos supor a validade para da identidade para n provaremos a validade para $n + 1$. Vamos tomar a soma dos $n + 1$ primeiros termos de uma PG, daí temos que

$$\begin{aligned} x(1) + x(2) + \cdots + x(n) + x(n+1) &= \overbrace{x(1) + x(2) + \cdots + x(n)}^{HI} + x(n+1) \\ &= \frac{x(n+1) - x(1)}{q-1} + \ x(n+1) \\ &= \frac{x(n+1) - x(1) + (q-1)x(n+1)}{q-1} \\ &= \frac{x(n+1) - x(1) + (q-1)x(n+1)}{q-1} \\ &= \frac{\cancel{x(n+1)} - x(1) + x(n+1)q - \cancel{x(n+1)}}{q-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\overbrace{x(n+1)q}^{def} - x(1)}{q-1}$$

$$= \frac{x(n+2) - x(1)}{q-1},$$

da última igualdade tem-se a validade da proposição.

Com um pouco mais de esforço podemos calcular a soma do termos de uma PG em função de n. Vamos definir $S(n) = x(1) + x(2) + \cdots + x(n)$, para todo $n \geq 1$ e $q \neq 1$, combinando os itens (a) e (b) da proposição anterior temos que

$$S(n) = \frac{x(n+1) + x(1)}{q-1} = \frac{x(1)q^n - x(1)}{q-1} = x(1)\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Teorema 4: (EUCLIDES-EULER) Se $2^n - 1$ for um número natural primo, então o número natural $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito. Reciprocamente se m é um número perfeito par, então $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$, para algum número natural n tal que $p = 2^n - 1$ é um número primo.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (SANTOS, 2018).

2.3 Equações de Recorrências

Como já visto anteriormente uma recorrência é uma expressão que dá o valor numérico do termo de uma sequência em funções dos termos anteriores e dos termos iniciais.

Nessa seção serão abordados os métodos para encontrar a solução de uma equação de recorrência, que consiste em encontrar uma fórmula de posição de uma sequência que expresse o valor de cada termo em função apenas de n.

2.3.1. Equações de Recorrência Lineares de 1ª Ordem

Uma *equação de recorrência* da forma, $x(n+1) = f(n)x(n) + g(n)$ é dita linear se o expoente de $x(i)$ com $i \in \mathbb{N}$ é sempre 1, e de 1ª ordem se cada termo subsequente depende exclusivamente do termo anterior. Se na *equação de recorrência* $g(n) = 0$, dizemos então que ela é homogênea, caso contrário a equação é não–homogênea.

Exemplo 1: Resolva a recorrência $x(n+1) = nx(n)$ e $x(1) = 2$.

Solução: Temos que

$$x(n+1) = nx(n) \Leftrightarrow \frac{x(n+1)}{x(n)} = n,$$

aplicando o produtório aos dois lados da equação e a proposição e a proposição 3 da seção 2.2, temos que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{x(k+1)}{x(k)} = \prod_{k=1}^{n-1} k \ \Leftrightarrow \ \frac{x(n)}{x(1)} = (n-1)!$$

Como $x(1) = 2$, então $x(n) = 2(n-1)!$.

Exemplo 2: Resolva a recorrência $x(n+1) = x(n) + 2^n$ e $x(1) = 3$.

Solução: Temos que

$$x(n+1) = x(n) + 2^n \Leftrightarrow x(n+1) - x(n) = 2^n,$$

aplicando o somatório aos dois lados da equação e o *teorema da somação*, temos que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \big(x(k+1) - x(k)\big) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \ \Leftrightarrow x(n) - x(1) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k.$$

Mas, observe que $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$ é a soma dos termos de uma PG de razão 2, logo,

$$x(n) - x(1) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \Leftrightarrow x(n) - x(1) = 2^n - 2,$$

como $x(1) = 3$, temos então que $x(n) = 2^n + 1$.

Encontrar a soluções de uma *equação de recorrência* linear da forma $x(n+1) = f(n)x(n)$ e $x(n+1) = x(n) + g(n)$ é simples, entretanto, muito relevante para encontrar a solução do caso geral.

Para primeira forma da *equação de recorrência* temos que,

$$x(n+1) = f(n)x(n) \Leftrightarrow \frac{x(n+1)}{x(n)} = f(n),$$

aplicando o produtório a última implicação temos que,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{x(k+1)}{x(k)} = \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \Leftrightarrow \frac{x(n)}{x(1)} = \prod_{k=1}^{n-1} f(k) \Leftrightarrow x(n) = x(1) \prod_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Para a segunda forma temos que,

$$x(n+1) = x(n) + g(n) \Leftrightarrow x(n+1) - x(n) = g(n),$$

aplicando o teorema fundamental da somação a última implicação obtemos,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x(k+1) - x(k)) = \sum_{k=1}^{n-1} g(k) \Leftrightarrow x(n) = x(1) + \sum_{k=1}^{n-1} g(k).$$

Antes de apresentar o próximo teorema, convém então conhecer as ideias centrais por trás desse resultado.

Exemplo 3: Resolva a equação de recorrência $x(n+1) = 3x(n) + 5^n$, $x(1) = 2$.

Solução: Observe que, dividindo a equação por 3^{n+1}, obtemos

$$\frac{x(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{x(n)}{3^n} + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^n,$$

utilizando uma sequência auxiliar $z(n) = \frac{x(n)}{3^n}$ e substituindo na equação anterior obtemos,

$$z(n+1) = z(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^n,$$

que é uma equação de recorrência cuja a solução é da forma $x(n) = x(1) + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$, logo temos que,

$$
\begin{aligned}
z(n) = z(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^k \Leftrightarrow z(n) &= z(1) + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{5}{3}\right)^k \\
\Leftrightarrow z(n) &= z(1) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 1}{\frac{5}{3} - 1}\right) \\
\Leftrightarrow z(n) &= z(1) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 1}{\frac{2}{3}}\right) \\
\Leftrightarrow z(n) &= z(1) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}\right)\right) \\
\Leftrightarrow z(n) &= z(1) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - \frac{5}{2}\right) \\
\Leftrightarrow z(n) &= z(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{n} - \frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

Como $z(1) = \frac{x(1)}{3} = \frac{2}{3}$, então $z(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{1}{6}$, mais ainda, sendo $x(n) = 3^n z(n)$, temos que $x(n) = \frac{5^n}{2} - \frac{3^{n-1}}{2}$.

Dividir a equação por 3^{n+1} não foi uma escolha arbitrária, tal decisão foi feita de modo a transformar uma equação de recorrência numa outra que sabemos resolver, sendo isso a ideia central do teorema a seguir.

Teorema 1: Se $a(n)$ é uma solução não–nula de $x(n+1) = f(n)x(n)$, então a substituição $x(n) = a(n)y(n)$ transforma a recorrência $x(n+1) = f(n)x(n) + g(n)$ em $y(n+1) = y(n) + \dfrac{g(n)}{f(n)a(n)}$.

Demonstração: Substituindo $x(n) = a(n)y(n)$ na recorrência $x(n+1) = f(n)x(n) + g(n)$ obtemos

$$a(n+1)y(n+1) = f(n)a(n)y(n) + g(n).$$

Por outro lado, temos que $a(n)$ é solução de $x(n+1) = f(n)x(n)$, portanto, $a(n+1) = f(n)a(n)$, logo

$$f(n)a(n)y(n+1) = f(n)a(n)y(n) + g(n) \Leftrightarrow y(n+1) = y(n) + \frac{g(n)}{f(n)a(n)},$$

como queríamos demonstrar. ■

3 NÚMEROS POLIGONAIS PLANOS

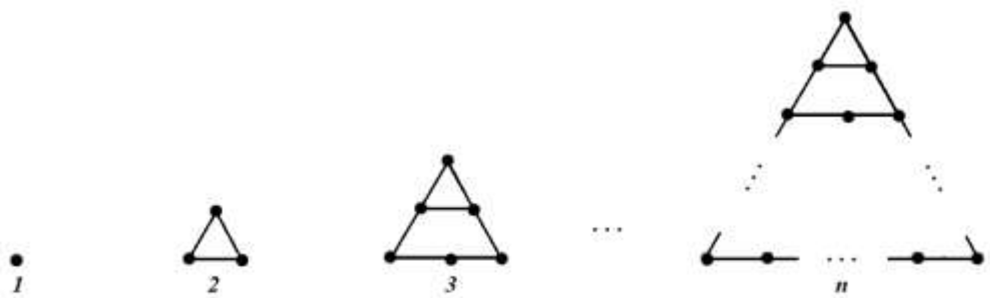
Os números poligonais, que é objeto de estudo nesse trabalho é uma classe de números que são representados como um conjunto de pontos equidistantes, formando uma figura geométrica equilátera, como um triângulo, quadrado, pentágono, hexágono e assim por diante, sendo a quantidade de pontos da figura geométrica a representação do número.

Nessa seção será feito um estudo sobre os Números Triangulares, Quadrados, Pentagonais e Hexagonais, abordando as proposições, propriedades e teoremas. Aqui, o raciocínio recursivo terá lugar de destaque na modelagem desses números.

3.1 Números Triangulares

Números triangulares são números naturais representados na forma de um triângulo equilátero, modelados conforme a sequência da figura 13.

Figura 13– Sequência Números Triangulares

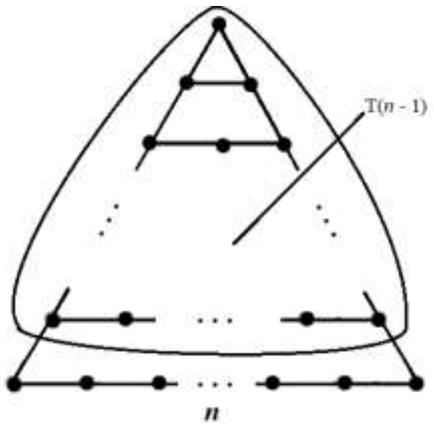


Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, temos que os números triangulares são os termos da sequência $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$, onde o *n–ésimo* termo dessa sequência será designado por $T(n)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Podemos definir a sequência de números triangulares recursivamente, onde $T(1) = 1$ e $T(n) = T(n-1) + n$. Com efeito, tomemos a representação geométrica do *n–ésimo* número triangular.

Figura 14 – *n-ésimo* número triangular



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos chamar de $T(n)$ a solução do problema para o número triangular com n pontos de lado. Note que o *n–ésimo* número triangular é formado pelo número triangular com $n-1$ pontos de lado ($T(n-1)$ pontos) mais n pontos, portanto, temos que $T(n) = T(n-1) + n$.

Teorema 1: Seja $T(n)$ o *n-ésimo* número triangular, então,

a) $T(n) = \frac{n^2+n}{2}$, para $n \geq 1$.

b) $T(1) + T(2) + \cdots + T(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, para $n \geq 1$.

Demonstração:

a) Façamos a prova por indução em n. Para $n = 1$ temos que a proposição é trivialmente verificada. Suponhamos agora validade para n, provaremos que vale também para $n+1$. Utilizando a definição recursiva temos que,

$$
\begin{aligned}
T(n+1) &= \overbrace{T(n)}^{HI} + n + 1 \\
&= \frac{n^2+n}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n^2+3n+2}{2} \\
&= \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2},
\end{aligned}
$$

esta última igualdade completa a demonstração. ■

b) Incialmente vamos definir $s(n) = T(1) + T(2) + \cdots + T = \sum_{k=1}^{n} T(k)$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2 + k}{2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right). \end{aligned}$$

Mas, pelo exemplo 1 da seção 2.1 e do exemplo 7 da seção 2.2, temos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ respectivamente. Logo temos que

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1) + 3n(n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}\right) \\ &= \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right), \end{aligned}$$

a última igualdade demonstra o resultado. ■

Proposição 1: Seja $T(n)$ o *n-ésimo* número triangular com $n \geq 1$, são válidas as seguintes identidades:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = T(n)^2$.

b) $3T(n) + T(n-1) = T(2n)$.

c) $T(n)^2 - T(n-1)^2 = n^3$.

d) $T(n)^2 + T(n-1)^2 = T(n^2)$.

Demonstração:

a) Façamos a prova por indução. Para $n = 1$ temos que, $1^3 = T(1)^2 \Leftrightarrow 1 = 1^2 \Leftrightarrow 1 = 1$, logo a identidade é válida para o caso base. Agora vamos supor por hipótese de indução a validade da identidade para n, e provaremos que também vale para $n+1$. Tomemos a soma dos $n+1$ cubos dos números $\mathbb{N}$, logo temos que,

$$
\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 &= \overbrace{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}^{HI}+(n+1)^3 \\
&= T(n)^2+(n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3 \\
&= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}+n^3+3n^2+3n+1 \\
&= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4} \\
&= \frac{(n^2+3n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\
&= T(n+1)^2,
\end{aligned}
$$

o que prova a identidade. ■

b) Aplicando o resultado do item a) da proposição 2 desta seção, temos que

$$
\begin{aligned}
3T(n)+T(n-1) &= 3\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{3n^2}{2}+\frac{3n}{2}+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2} \\
&= 2n^2+n \\
&= n(2n+1) \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2} \\
&= T(2n),
\end{aligned}
$$

precisamente o que queríamos demonstrar.

■

c) Aplicando o resultado do item a) da proposição 2 desta seção, temos que

$$T(n)^2 - T(n-1)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$
$$= \frac{\cancel{n^4} + 2n^3 + \cancel{n^2} - \cancel{n^4} + 2n^3 - \cancel{n^2}}{4}$$
$$= n^3,$$

o que prova o resultado. ■

d) Aplicando o resultado do item a) da proposição 2 desta seção, temos que

$$T(n)^2 + T(n-1)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$
$$= \frac{n^4 + \cancel{2n^3} + n^2 + n^4 - \cancel{2n^3} + n^2}{4}$$
$$= \frac{2n^4 + 2n^2}{4}$$
$$= \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$
$$= T(n^2),$$

e isso completa a demonstração. ■

Proposição 2: Sejam m e n números naturais, então

a) $T(m+n) = T(m) + T(n) + mn$.

b) $T(mn) = T(m)T(n) + T(m-1)T(n-1)$.

Demonstração:

a) Do item a) da proposição 2 desta seção, temos que

$$T(m+n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$
$$= \frac{m^2 + n^2 + 2mn + m + n}{2}$$
$$= \overbrace{\frac{m^2+m}{2}}^{T(m)} + \overbrace{\frac{n^2+n}{2}}^{T(n)} + mn$$

$$= T(m) + T(n) + mn,$$

isso prova o resultado. ■

b) Do item a) da proposição 2 desta seção, temos que

$$\begin{aligned}
T(m)T(n) + T(m-1)T(n-1) &= \frac{m(m+1)}{2}.\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2}.\frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{(mn)^2 + m^2n + mn^2 + mn}{4} + \frac{(mn)^2 - m^2n - mn^2 + mn}{4} \\
&= \frac{2(mn)^2 + 2mn}{4} \\
&= \frac{(mn)^2 + mn}{2} \\
&= \frac{mn(mn+1)}{2} \\
&= T(mn),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3: O produto de dois números triangulares consecutivos é múltiplo de 3.

Demonstração: Para demonstrar esse resultado, basta escrevermos $T(n-1)T(n) = 3q$, onde $q \in \mathbb{Z}$. Aplicando a fórmula dos números triangulares, temos que,

$$\begin{aligned}
T(n-1)T(n) &= \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n-1)n^2(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

Como $(3,4) = 1$, basta mostrar que $3|(n-1)n^2(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$. Seja $n \in \mathbb{N}$, temos que n pode ser escrito em uma das seguintes formas: $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$.

1º *caso*: Se $n = 3k$ temos que,

$$\begin{aligned}
(n-1)n^2(n+1) &= (3k-1)(3k)^2(3k+1) \\
&= 3(3k-1)3k(3k+1) \\
&= 3q,
\end{aligned}$$

sendo $q = (3k-1)3k(3k+1)$. Da última igualdade temos que $3|(n-1)n^2(n+1)$.

2º *caso*: Se $n = 3k+1$ temos que,

$$\begin{aligned}(n-1)n^2(n+1) &= 3k(3k+1)^2(3k+2)\\ &= 3k(3k+1)^2(3k+2)\\ &= 3q,\end{aligned}$$

sendo $q = k(3k+1)^2(3k+2)$. Da última igualdade temos que $3|(n-1)n^2(n+1)$.

3º *caso*: Se $n = 3k+2$ temos que,

$$\begin{aligned}(n-1)n^2(n+1) &= (3k+1)(3k+2)^2(3k+3)\\ &= 3(3k+1)(3k+2)^2(k+1)\\ &= 3q,\end{aligned}$$

sendo $q = (3k+1)(3k+2)^2(k+1)$. Da última igualdade temos que $3|(n-1)n^2(n+1)$, o que termina a demonstração. ■

Proposição 4: Seja $k, u, v \in \mathbb{N}$ com $u, v \geq 3$. É sempre possível encontrar números triangulares $T(u)$ e $T(v)$ tal que satisfaçam a equação,

$$T(u) - T(v) = (6k+3)^2.$$

Demonstração: Aplicando a fórmula geral dos números triangulares, temos que,

$$\begin{gathered}\frac{u(u+1)}{2} - \frac{v(v+1)}{2} = (6k+3)^2 \Leftrightarrow\\ u^2 - v^2 + u - v = 2(6k+3)^2 \Leftrightarrow\\ (u-v)(u+v) + (u-v) = 2(6k+3)^2 \Leftrightarrow\\ (u-v)(u+v+1) = 2(6k+3)^2.\end{gathered}$$

Convenientemente, pondo $u - v = 2$, temos que

$$\begin{cases} u - v = 2 \\ u + v + 1 = (6k+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ u + v = (6k+3)^2 - 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema encontramos,

$$u = \frac{(6k+3)^2+1}{2} \text{ e } v = \frac{(6k+3)^2-3}{2}.$$

Agora vamos mostrar que $u, v \in \mathbb{N}$. Com efeito temos que $6k+3$ é *ímpar*, implica $(6k+3)^2$ também ser *ímpar*, mais ainda, $(6k+3)^2+1$ e $(6k+3)^2-3$ são ambos *pares*, pois, a soma e subtração de números de mesma paridade é *par*, logo $2|(6k+3)^2+1$ e $2|(6k+3)^2-3$ e portanto $u, v \in \mathbb{N}$. ■

Em outras palavras, o resultado que acabamos de demonstrar significa que, o quadrado de número natural ímpar e múltiplo de 3, pode ser escrito como a diferença entre dois números triangulares.

Proposição 5: Todo número par perfeito é um número triangular.

Demonstração: Pela recíproca do teorema *Euclides – Euler*, temos que um número natural N é um número perfeito par, então $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ e $(2^p - 1)$ é primo. Logo temos que,

$$\begin{aligned} N &= 2^{p-1}(2^p - 1) \\ &= \frac{2^p(2^p - 1)}{2} \\ &= T(2^p), \end{aligned}$$

o que prova o resultado.

Um pergunta natural que podemos fazer é a seguinte: Dado um $k \in \mathbb{N}$, como saber se tal número é triangular? Mas antes vamos fazer algumas investigações para melhor compreensão do resultado.

Seja $T(n)$ o *n-ésimo* número triangular com $n \in \mathbb{N}$, então, temos que,

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$2T(n) = n^2 + n \Leftrightarrow$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8T(n)+1}{4} \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\sqrt{8T(n)+1}}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\sqrt{8T(n)+1}-1}{2}.$$

Dessa última igualdade podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2: (TESTE DE IDENTIFICAÇÃO) Seja $k \in \mathbb{N}$, temos que k é um número triangular se, somente se, $8k + 1$ é um quadrado perfeito.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja k um número triangular, logo, $k = \frac{n(n+1)}{2}$, substituindo na expressão $8k + 1$ temos que

$$\begin{aligned} 8k+1 &= 8\frac{n(n+1)}{2}+1 \\ &= 4n^2+4n+1 \\ &= (2n+1)^2, \end{aligned}$$

o que prova o resultado.

($\Longleftarrow$) Seja $8k + 1$ um quadrado perfeito, então, existe um $q \in \mathbb{N}$, tal que $8k + 1 = q^2$. Portanto temos que

$$\begin{gathered} 8k+1 = q^2 \Leftrightarrow \\ k = \frac{q^2-1}{8} \Leftrightarrow \\ k = \frac{\left(\frac{q-1}{2}\right)\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2} \Leftrightarrow \\ k = \frac{\left(\frac{q-1}{2}\right)\left(\frac{q-1}{2}+1\right)}{2}. \end{gathered}$$

Agora vamos provar que $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{N}$. Com efeito temos que $8k + 1$ é um número ímpar, logo q também é ímpar, daí temos que $q - 1$ é par, e portanto $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{N}$, o que completa a demonstração.■

Proposição 6: Existe infinitos números triangulares que são quadrados perfeitos.

Demonstração: Seja X um número triangular, do teorema 2 dessa seção temos que $8X + 1$ é um quadrado perfeito, além disso, temos que $\frac{8X(8X+1)}{2} = 4X(8X + 1)$ é um número triangular.

Dessa forma, podemos construir recorrência dada por $X_1 = 1$, que é triangular e quadrado perfeito, e $X_{k+1} = 4X_k(8X_k + 1)$.

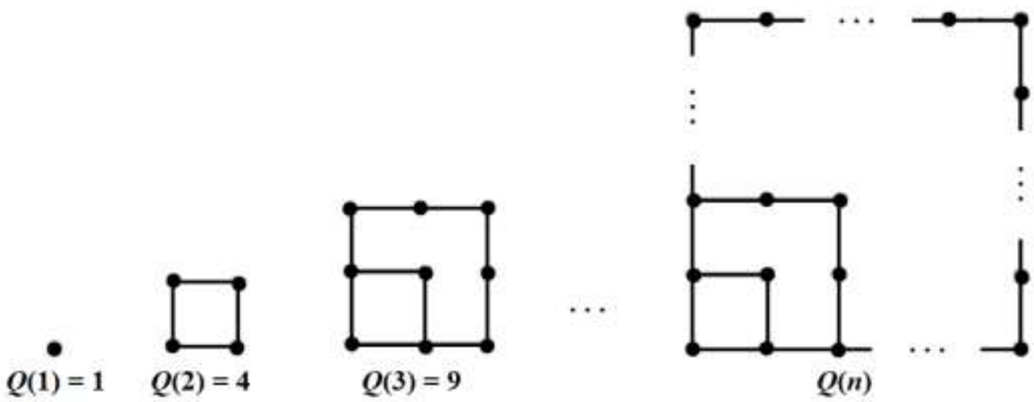
$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 4 \cdot 1(8 \cdot 1 + 1) = 36 = 6^2$$
$$X_3 = 4 \cdot 36(8 \cdot 36 + 1) = 41616 = 204^2$$
$$X_4 = 4 \cdot 41616(8 \cdot 41616 + 1) = 55420693056 = 235416^2$$
$$\vdots$$
$$X_k = 4X_{k-1}(8X_{k-1} + 1)$$
$$X_{k+1} = 4X_k(8X_k + 1).$$

Assim, desde que X_k seja quadrado perfeito, X_{k+1} também é quadrado perfeito, portanto, existem infinitos números triangulares que são quadrados perfeitos.

3.2 Números Quadrados

Números quadrados são números naturais representados na forma de um quadrado, modelados conforme a sequência da figura 15.

Figura 15 – Números Quadrados



Fonte: Elaborado pelo autor.

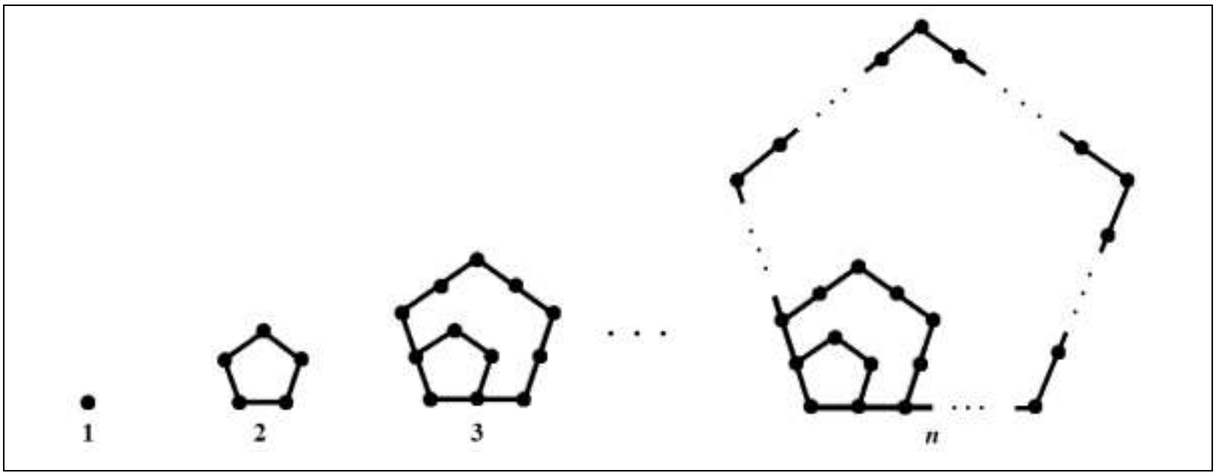
Portanto, temos que os números quadrados são os termos da sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$, onde o n – *ésimo* termo dessa sequência será designado por $Q(n)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Sobre os números quadrados, todos os resultado mais relevantes já foram abordados nos capítulos anteriores.

3.3 Números Pentagonais

Números pentagonais são números naturais representados na forma de um pentágono equilátero, modelados conforme a sequência da figura 16.

Figura 16 – Sequência Números Pentagonais

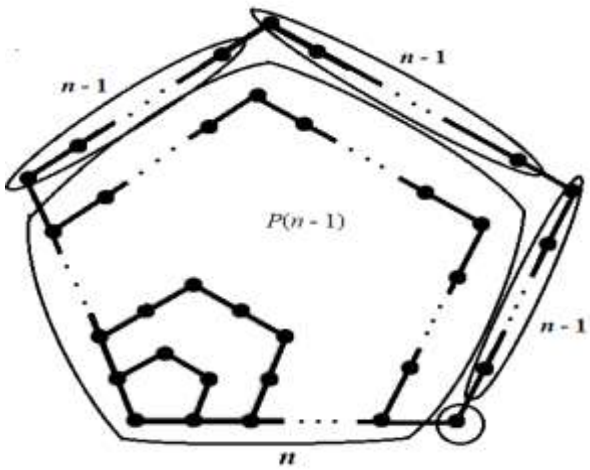


Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, temos que os números pentagonais são os termos da sequência $(1, 5, 12, 22, 35, ...)$, onde o n – *ésimo* termo dessa sequência será designado por $P(n)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Podemos definir a sequência de números pentagonais recursivamente, onde $P(1) = 1$ e $P(n) = P(n-1) + 3n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$. De fato, tomemos a representação geométrica do n – *ésimo* número pentagonal.

Figura 17 – *n–ésimo* número pentagonal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos chamar de $P(n)$ a solução do problema para o número pentagonal com n pontos de lado. Observe que o n – *ésimo* número pentagonal é formado pelo número pentagonal com $n-1$ pontos de lado ($P(n-1)$ pontos), $n-1$ pontos em 3 lados do pentágono $3(n-1)$ pontos, mais 1 ponto, logo, $P(n) = P(n-1) + 3n - 2$.

Teorema 1: Seja $P(n)$ o *n-ésimo* número pentagonal, então,

a) $P(n) = \frac{3n^2-n}{2}$, para $n \geq 1$.

b) $P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = \frac{n^3+n^2}{2}$, para $n \geq 1$.

Demonstração:

a) Façamos a prova por indução em n. Para $n = 1$ temos que $P(1) = \frac{3.1^2-1}{2} = 1$, o que prova o caso base. Agora vamos admitir, por hipótese de indução, a validade para n e provaremos que também vale para $n+1$. Utilizando a definição por recorrência, temos que

$$\begin{aligned} P(n+1) &= \overbrace{P(n)}^{HI} + 3n + 1 \\ &= \frac{3n^2-n}{2} + 3n + 1 \\ &= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} \\ &= \frac{3(n^2+2n+1) - (n+1)}{2} \\ &= \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2}, \end{aligned}$$

essa última igualdade demonstra o resultado.■

b) Vamos definir inicialmente $s(n) = P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(k)$. Portanto temos que

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3k^2-k}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (3k^2 - k) \\ &= \frac{1}{2}\left(3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right). \end{aligned}$$

Mas, pelo exemplo 1 da seção 2.1 e do exemplo 7 da seção 2.2, temos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, respectivamente. Logo, temos que

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{1}{2}\left(3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1-1)}{4} \\ &= \frac{2n^2(n+1)}{4} \\ &= \frac{n^3+n^2}{2}, \end{aligned}$$

o que prova o resultado. ■

Proposição 1: Seja $P(n)$ o *n-ésimo* número pentagonal com $n \geq 1$, são válidas das seguintes identidades:

a) $3P(n) = T(3n-1)$.

b) $P(n) - Q(n) = T(n-1)$.

c) $P(m+n) = P(m) + P(n) + 3mn$.

Demonstração:

a) Aplicando a fórmula do posicional dos números pentagonais, temos que,

$$\begin{aligned} 3P(n) &= 3\left(\frac{3n^2-n}{2}\right) \\ &= \frac{3n(3n-1)}{2} \\ &= \frac{(3n-1)((3n-1)+1)}{2} \\ &= T(3n+1), \end{aligned}$$

o que prova a identidade.■

b) Aplicando a fórmula do posicional dos números quadrados e pentagonais, temos que,

$$
\begin{aligned}
P(n) - Q(n) &= \frac{3n^2 - n}{2} - n^2 \\
&= \frac{n^2 - n}{2} \\
&= \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)}{2} \\
&= T(n-1),
\end{aligned}
$$

o que prova a identidade.■

c) Aplicando a fórmula do posicional dos números pentagonais, temos que,

$$
\begin{aligned}
P(m+n) &= \frac{3(m+n)^2 - (m+n)}{2} \\
&= \frac{3(m^2 + 2mn + n^2) - m - n}{2} \\
&= \frac{3m^2 + 6mn + 3n^2 - m - n}{2} \\
&= \overbrace{\frac{3m^2 - m}{2}}^{P(m)} + \overbrace{\frac{3n^2 - n}{2}}^{P(n)} - 3mm \\
&= P(m) + P(n) - 3mn,
\end{aligned}
$$

o que prova a identidade.■

O resultado a seguir estabelece um algoritmo que determina se dado um $k \in \mathbb{N}$, se ele é ou não pentagonal.

Teorema 2: (TESTE DE IDENTIFICAÇÃO) Seja $k \in \mathbb{N}$. Temos que k é um número pentagonal se, somente se, $24k + 1$ é um quadrado perfeito e $\sqrt{24k + 1}$ é um número da forma $6s + 5$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja k um número pentagonal, então $k = \frac{3n^2 - n}{2}$. Substituindo em $24k + 1$, temos que

$$24k + 1 = 24\left(\frac{3n^2 - n}{2}\right) + 1$$
$$= 36n^2 - 12n + 1$$
$$= (6n - 1)^2.$$

Para o que falta, tomemos $k = \frac{3n^2 - n}{2}$, logo temos que

$$k = \frac{3n^2 - n}{2} \Leftrightarrow$$
$$2k = 3n^2 - n \Leftrightarrow$$
$$2k = 3\left(n - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} \Leftrightarrow$$
$$24k = (6n - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$24k + 1 = (6n - 1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{24k + 1} = 6n - 1 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{24k + 1} = 6(n - 1) + 5.$$

Pondo $s = n - 1$, obtemos $\sqrt{24k + 1} = 6s + 5$, como queríamos demonstrar.

($\Leftarrow$) Seja $24k + 1$ um quadrado perfeito, então existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $24k + 1 = q^2$. Portanto, temos que

$$24k + 1 = q^2 \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{q^2 - 1}{24} \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{(q + 1)(q - 1)}{24}.$$

Mas, por hipótese, temos que $q = \sqrt{24k + 1} = 6s + 5$, logo, temos que

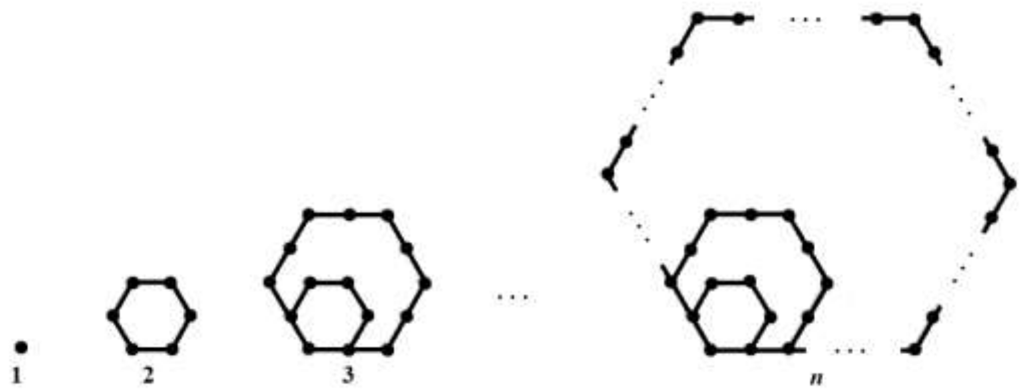
$$k = \frac{(6s + 6)(6s + 4)}{24} \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{12(s + 1)(3s + 2)}{24} \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{(s + 1)(3(s + 1) - 1)}{2} \Leftrightarrow$$
$$k = \frac{3(s + 1)^2 - (s + 1)}{2}.$$

Provando, assim, que k é pentagonal. ■

3.4 Números Hexagonais

Números hexagonais são números naturais representados na forma de um hexágono equilátero, modelados conforme a sequência da figura 18.

Figura 18 – Sequência Números Hexagonais

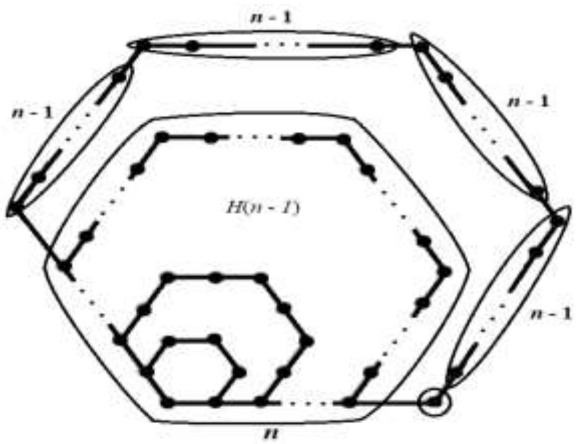


Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, temos que os números hexagonais são os termos da sequência $(1, 3, 6, 10, 15, \dots)$, onde o *n – ésimo* termo dessa sequência será designado por $H(n)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Podemos definir a sequência de números hexagonais recursivamente, onde $H(1) = 1$ e $H(n) = H(n-1) + 4n - 3$, com $n \in \mathbb{N}$. De fato, tomemos a representação geométrica do *n – ésimo* número hexagonal.

Figura 19 – *n – ésimo* número hexagonal



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos chamar de $H(n)$ a solução do problema para o número pentagonal com n pontos de lado. Observe que o *n – ésimo* número hexagonal é formado pelo número hexagonal com

$n-1$ pontos de lado $H(n-1)$ pontos, $n-1$ pontos em 4 lados do pentágono $4(n-1)$ pontos mais 1 ponto, logo, $H(n) = H(n-1) + 4n - 3$.

Teorema 1: Seja $H(n)$ o *n-ésimo* número hexagonal, então,

a) $H(n) = 2n^2 - n$, para $n \geq 1$.

b) $H(1) + H(2) + \cdots + H(n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$, para $n \geq 1$.

Demonstração:

a) A prova será por indução em n. Para $n = 1$, temos que $H(1) = 2.1^2 - 1 = 1$, valendo assim o caso base. Agora vamos admitir, por hipótese de indução, a validade para n e provaremos que também vale para $n+1$. Utilizando a definição por recorrência, temos que

$$\begin{aligned} H(n+1) &= \overbrace{H(n)}^{HI} + 4n + 1 \\ &= 2n^2 - n + 4n + 1 \\ &= (2n^2 + 4n + 2) - (n+1) \\ &= 2(n+1)^2 - (n+1), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

b) Vamos definir inicialmente $s(n) = H(1) + H(2) + \cdots + H(n) = \sum_{k=1}^{n} H(k)$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=1}^{n} (2k^2 - k\ ) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k. \end{aligned}$$

Mas, pelo exemplo 1 da seção 2.1 e do exemplo 7 da seção 2.2, temos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, respectivamente. Logo, temos que

$$
\begin{aligned}
s(n) &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(4n+2)}{6} - \frac{3n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6},
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1: Seja $H(n)$ o $n-$*ésimo* número hexagonal com $n \geq 1$. São válidas das seguintes identidades:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = H(n)^2$.

b) $H(n) = 4T(n-1) + n$.

c) $H(n) = 2P(n) - Q(n)$.

Demonstração:

a) Façamos a prova da identidade por indução em n. Para $n = 1$, temos que $1^3 = H(1)^2 \Leftrightarrow 1 = 1$, provando assim o caso base. Agora, vamos admitir a validade da identidade para n provaremos que também vale para $n+1$. Tomemos a soma dos $2n + 1$ números naturais,

b)

$$
\begin{aligned}
\overbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3}^{HI} + (2n)^3 + (2n+1)^3 &= H(n)^2 + (2n)^3 + (2n+1)^3 \\
&= (2n^2 - n)^2 + (2n)^3 + (2n+1)^3 \\
&= 4n^4 - 4n^3 + n^2 + 8n^3 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\
&= 4n^4 + 12n^3 + 13n^2 + 6n + 1 \\
&= (2n^2 + 3n + 1)^2 \\
&= \left((2n^2 + 4n + 1) - n - 1\right)^2 \\
&= \left(2(n+1)^2 - (n+1)\right)^2 \\
&= H(n)^2,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

b) Aplicando a fórmula de posição dos números triangulares, temos que

$$\begin{aligned}4T(n-1)+n &= \frac{4n(n-1)}{2}+n\\ &= 2n(n-1)+n\\ &= 2n^2-n\\ &= H(n).\end{aligned}$$

c) Aplicando a fórmula de posição dos números quadrados e pentagonais, temos que

$$\begin{aligned}2P(n)-Q(n) &= 2\left(\frac{3n^2-n}{2}\right)-n^2\\ &= 3n^2-n-n^2\\ &= 2n^2-n\\ &= H(n).\end{aligned}$$

Proposição 2: Seja $H(n)$ o *n-ésimo* número hexagonal, então $H(n)$ também é triangular.

Demonstração: Seja $H(n)$ o *n-ésimo* número hexagonal, portanto, temos que

$$\begin{aligned}H(n) &= 2n^2-n\\ &= \frac{2(2n^2-n)}{2}\\ &= \frac{2n(2n-1)}{2}\\ &= T(2n),\end{aligned}$$

o que prova o resultado.■

Essa proposição além de mostrar que todo número hexagonal é triangular, nos diz também que os número triangulares de ordem par é hexagonal.

Proposição 3: Sejam m e n números naturais , então

$$H(m+n) = H(m)+H(n)+4mn.$$

Demonstração: Utilizando a fórmula do *n – ésimo* número hexagonal temos que

$$H(m+n) = 2(m+n)^2-(m+n)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2m^2 + 4mn + 2n^2 - m - n \\
&= \overbrace{2m^2 - m}^{H(m)} + \overbrace{2n^2 - n}^{H(n)} + 4mn \\
&= H(m) + H(n) + 4mn,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2: (TESTE DE IDENTIFICAÇÃO) Seja $k \in \mathbb{N}$. Temos que k é um número hexagonal se, somente se, $8k + 1$ é um quadrado perfeito e $\sqrt{8k+1}$ é um número da forma $4s + 3$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Seja k um número pentagonal, então, $k = 2n^2 - n$, substituindo em $24k + 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
8k + 1 &= 8(2n^2 - n) + 1 \\
&= 16n^2 - 8n + 1 \\
&= (4n - 1)^2.
\end{aligned}
$$

Para o que falta, tomemos $k = 2n^2 - n$, logo temos que

$$
\begin{gathered}
k = 2n^2 - n \Longrightarrow \\
k = 2\left(n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \Longleftrightarrow \\
\left(n - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{8k+1}{16} \Longleftrightarrow \\
n - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{8k+1}}{4} \Longleftrightarrow \\
4n - 1 = \sqrt{8k+1} \Longleftrightarrow \\
4(n-1) + 3 = \sqrt{8k+1}.
\end{gathered}
$$

Pondo $s = n - 1$, obtemos $\sqrt{8k+1} = 4s + 3$, como queríamos demonstrar.

($\Longleftarrow$) Seja $8k + 1$ um quadrado perfeito, então existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $8k + 1 = q^2$. Portanto, temos que

$$
\begin{gathered}
8k + 1 = q^2 \Longleftrightarrow \\
k = \frac{q^2 - 1}{8} \Longleftrightarrow
\end{gathered}
$$

$$k = \frac{(q+1)(q-1)}{8}.$$

Mas, por hipótese, temos que $q = \sqrt{8k+1} = 4s+3$, logo, temos que

$$k = \frac{(4s+4)(4s+2)}{8} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{8(s+1)(2s+1)}{8} \Leftrightarrow$$

$$k = (s+1)(2s+1) \Leftrightarrow$$

$$k = (s+1)(2(s+1)-1) \Leftrightarrow$$

$$k = 2(s+1)^2 - (s+1),$$

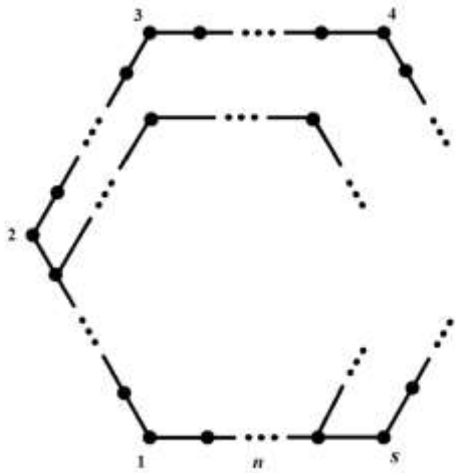
assim k é um número hexagonal como queríamos demonstrar. ■

3.5 Generalização dos Números Poligonais

Tudo que vimos até agora pode ser generalizado para um número poligonal plano qualquer.

Um número poligonal qualquer é definido geometricamente como um arranjo de pontos conforme a figura 20, no qual possui n pontos de lado e s vértices.

Figura 20 – *n-ésimo* n*úmero* *s-gonal*

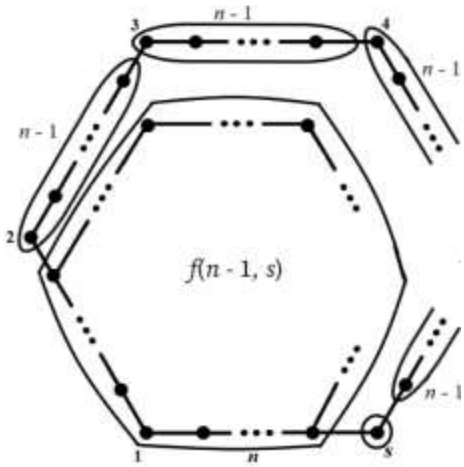


Fonte: Elaborado pelo autor.

Denotemos por $f(n, s)$, com $n, s \in \mathbb{N}$ e $s \geq 3$ a função que determina o *n-ésimo* número *s-gonal*, onde n e s representam a *ordem* e o *quantidade de vértices* respectivamente.

Uma outra maneira de definir o *n-ésimo* número *s-gonal* é através da recorrência $f(1,s) = 1$ e $f(n,s) = f(n-1,s) + (s-2)(n-1) + 1$, com $n, s \in \mathbb{N}$ e $s \geq 3$. Tomemos o *n-ésimo n*úmero *s-gonal*, conforme figura abaixo.

Figura 21 – *n-ésimo* número *s-gonal*

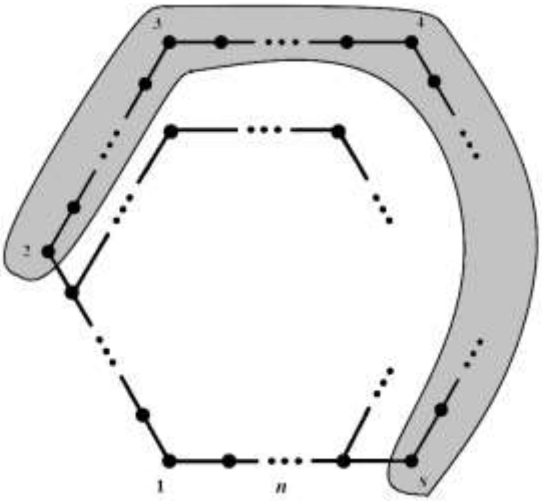


Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que o *n-ésimo* número *s-gonal* é formado pelo número *s-gonal* com $n-1$ pontos de lado $f(n-1,s)$ pontos, $n-1$ pontos em $s-2$ lados do polígono $(s-2)(n-1)$ pontos mais 1 ponto do vértice s, logo, $f(n,s) = f(n-1,s) + (s-2)(n-1) + 1$.

Um elemento importante de um número poligonal é o *gnômon*, destaque da figura 22, que corresponde ao conjunto de pontos entre os vértices 2 e s inclusive. Vimos anteriormente que ao definirmos os números poligonais por *recorrência*, obtivemos uma equação do tipo $x(n) = x(n-1) + g(n)$, a função $g(n)$ representa a quantidade de pontos do *gnômon* do *n-ésimo* número *s-gonal*.

Figura 22 – Gnômon do *n-ésimo* número *s-gonal*



Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 1: Seja $f(n,s)$ o *n-ésimo* número *s-gonal*, então:

a) $f(n,s) = \frac{(s-2)n^2}{2} - \frac{(s-4)n}{2}$, para $n, s \in \mathbb{N}$ e $s \geq 3$.

b) $f(1,s) + f(2,s) + f(3,s) + \cdots f(n,s) = \frac{n(n+1)((s-2)(n-1)+3)}{6}$, para $n, s \in \mathbb{N}$ e $s \geq 3$.

Demonstração:

a) Utilizando a definição por recorrência do *n-ésimo* número *s-gonal* e o Teorema Fundamental da Somação temos que

$$
\begin{aligned}
f(2,s) &= f(1,s) + (s-2) + 1 \\
f(3,s) &= f(2,s) + (s-2)2 + 1 \\
f(4,s) &= f(3,s) + (s-2)3 + 1 \\
\vdots \quad & \qquad\quad \vdots \\
f(n,s) &= f(n-1,s) + (s-2)(n-1) + 1
\end{aligned}
$$

Somando as igualdades acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
f(n,s) &= f(1,s) + (s-2)\sum_{k=1}^{n-1} k + n - 1 \\
&= 1 + (s-2)\frac{(n^2-n)}{2} + n - 1
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(s-2)(n^2-n)+2n}{2}$$
$$= \frac{sn^2 - sn - 2n^2 + 4n}{2}$$
$$= \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2}$$
$$= \frac{(s-2)n^2}{2} - \frac{(s-4)n}{2},$$

como queríamos demonstrar.

b) Inicialmente vamos definir $S(n) = f(1,s) + f(2,s) + \cdots + f(n,s) = \sum_{k=1}^{n} f(k,s)$. Logo, temos que

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(s-2)k^2}{2} - \frac{(s-4)k}{2}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(s-2)k^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(s-4)k}{2}$$
$$= \frac{(s-2)}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(s-4)}{2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

Mas, pelo exemplo 1 da seção 2.1 e do exemplo 7 da seção 2.2, temos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, respectivamente. Logo, temos que

$$S(n) = \frac{(s-2)}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(s-4)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(s-2)}{2}\cdot\frac{(2n+1)}{3} - \frac{s-4}{2}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(s-2)(2n+1)}{6} - \frac{3s-12}{6}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2ns-2s-4n+10}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{ns - s - 2n + 5}{3}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{s(n-1) - 2(n-1) + 3}{3}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(s-2)(n-1) + 3}{3}\right),$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 1: Seja $f(n,s)$ o *n-ésimo* número *s-gonal* com $n, s \in \mathbb{N}$ e $s \geq 3$, são válidas as seguintes identidades:

a) $f(n,s) = T(n) + (s-3)T(n-1)$.

b) $p(m+n,s) = p(m,s) + p(n,s) + mn(s-2)$.

Demonstração:

a) Utilizando o item a) da proposição 1 dessa seção, e agrupando convenientemente os termos temos, que

$$f(n,s) = \frac{(s-2)n^2}{2} - \frac{(s-4)n}{2}$$

$$= \frac{sn^2 - 2n^2 - ns + 4n}{2}$$

$$= \frac{s(n^2 - n) - 3(n^2 - n) + (n^2 + n)}{2}$$

$$= (s-3)\frac{\overbrace{(n^2 - n)}^{T(n-1)}}{2} + \frac{\overbrace{n^2 + n}^{T(n)}}{2}$$

$$= T(n) + (s-3)T(n-1),$$

a última igualdade prova o resultado.

b) Utilizando o item a) da proposição 1 dessa seção, temos que

$$f(m+n,s) = \frac{(s-2)(m+n)^2}{2} - \frac{(s-4)(m+n)}{2}$$

$$= \frac{(s-2)m^2 + 2(s-2)mn + (s-2)n^2 - (s-4)m - (s-4)n}{2}$$

$$= \overbrace{\frac{(s-2)m^2}{2} - \frac{(s-4)m}{2}}^{f(m,s)} + \overbrace{\frac{(s-2)n^2}{2} - \frac{(s-4)n}{2}}^{f(n,s)} + (s-2)mn$$

$$= f(m,s) + f(n,s) + (s-2)mn,$$

o que prova o resultado. ■

Proposição 3: O número de pontos do *gnômon* do *n-ésimo* número *s-gonal* é $(s-2)(n-1)+1$.

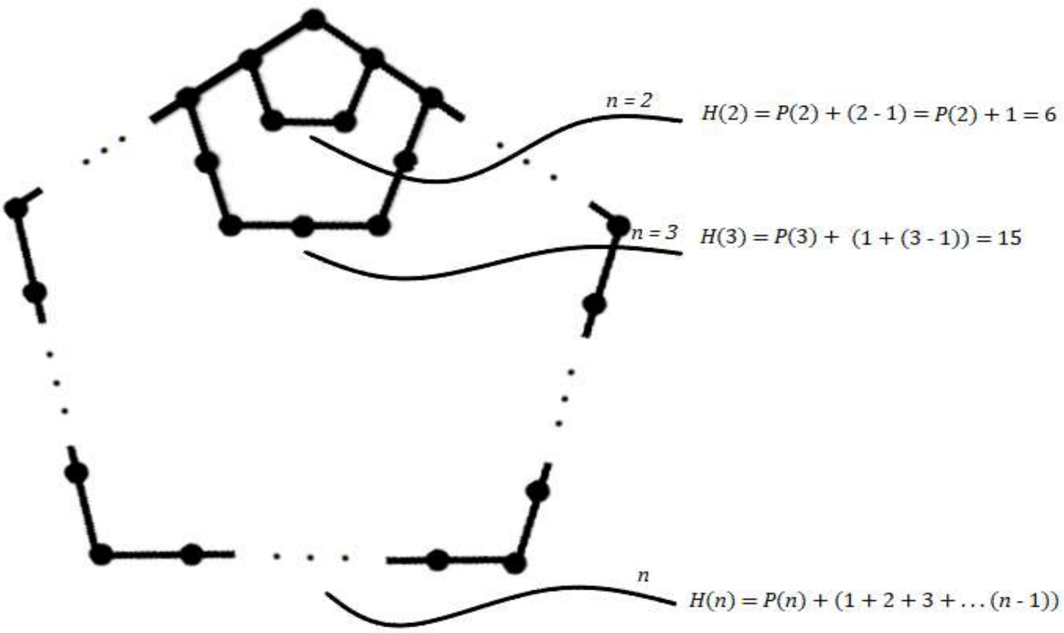
Corolário 1: A diferença entre a quantidade de pontos do *gnômon* do *n-ésimo* número s + 1-*gonal* e a quantidade de pontos do *gnômon* do *n-ésimo* número *s-gonal* é $n-1$.

Proposição 4: Seja $f(n,s)$ o *n-ésimo* número *s-gonal* com $n, s \in \mathbb{N}$ e $s \geq 3$, definimos a sequência $(f(n,3), f(n,4), f(n,5), \dots, f(n,s))$. Então,

$$f(n,s+1) - f(n,s) = \frac{n^2-n}{2}.$$

Demonstração: Vamos definir essa sequência de forma recursiva. Pelo corolário 1 dessa seção, temos que para transformar um número *s-gonal* em um número s + 1-*gonal*, devemos somar $n-1$ pontos a cada *gnômon* de cada número poligonal. Vamos a uma ilustração de como transformar um número *pentagonal* em um número *hexagonal*. Tomemos o *n-ésimo* número pentagonal.

Figura 23 - Transformação de *P*(*n*) em *H*(*n*)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas temos que, $P(n) = \frac{3n^2-n}{2}$ é que a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2-n}{2}$. Portanto,

$$H(n) = \frac{3n^2 - n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n.$$

De forma intuitiva, temos que,

$$f(n, s+1) = f(n, s) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1) \Leftrightarrow$$

$$f(n, s+1) = f(n, s) + \sum_{k=1}^{n-1} k \Leftrightarrow$$

$$f(n, s+1) = f(n, s) + \frac{n^2 - n}{2} \Leftrightarrow$$

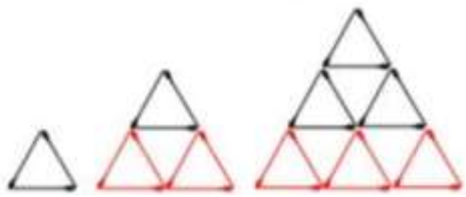
$$f(n, s+1) - f(n, s) = \frac{n^2 - n}{2},$$

como queríamos demonstrar. ■

3.6 Aplicações

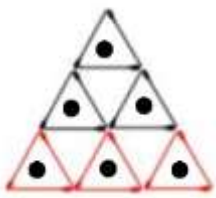
Vejamos agora almas aplicações dos números poligonais planos na resolução de problemas.

Exemplo 1: (OBMEP – 2012 – Adaptado) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura.



Quantos palitos ela vai usar para construir o *n-ésimo* triângulo da sequência?

Solução: Inicialmente vamos definir por $q(n)$ a quantidade de palitos do *n-ésimo* termo dessas sequência. A estratégia para resolver esse problema, consiste em considerar cada  como um ponto ●. Vamos ilustrar calculando a quantidade de palitos utilizados para construir 3º triângulo dessa sequência.



Portanto, a quantidade de palitos para construir o 3º triângulo é

$$q(3) = 3T(3)$$
$$= 3\frac{3(3+1)}{2}$$
$$= 18.$$

Mais geralmente,

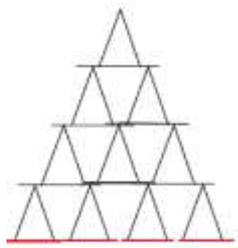
$$q(n) = 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= \frac{3n(n+1)}{2}.$$

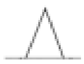
Exemplo 2: (XXXI – OBM - Adaptado) A figura ao lado mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos, foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente.

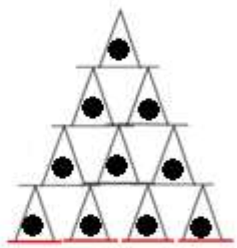
Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de *n* andares?

Solução: Inicialmente vamos definir por $u(n)$ a quantidade de cartas do *n-ésimo* termo dessas sequência. A estratégia para resolver esse problema, consiste em primeiramente considerar um castelo com cartas na sua base e depois subtrai-las.

Vamos ilustrar calculando a quantidade de cartas utilizadas para construir um castelo com 4 andares.



Agora vamos considerar cada  como um ponto ●.



Portanto, a quantidade de cartas para construir um castelo de 4 andares é

$$u(4) = 3T(4) - 4$$

$$= 3\frac{4(4+1)}{2} - 4$$

$$= 30 - 4$$
$$= 26.$$

Mais geralmente,

$$u(n) = 3T(n) - n$$
$$= 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n$$
$$= \frac{3n(n+1) - 2n}{2}$$
$$= \frac{3n^2 + n}{2}.$$

Exemplo 3: Quantos quadrados é possível contar num tabuleiro $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$?

Solução: Vamos definir por $v(n)$ o número de quadrados de um tabuleiro $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$. Inicialmente observemos os casos menores e estabeleceremos uma conjectura.

$v(1) = 1$

$v(2) = 1 + 2^2$

$v(3) = 1 + 2^2 + 3^2$

$v(4) = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

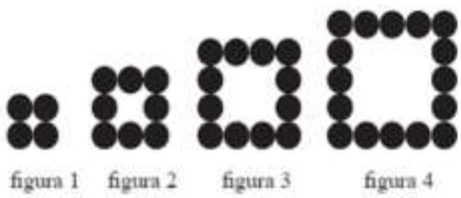
$\quad\vdots \qquad\qquad \vdots$

$v(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2.$

Mas, pelo exemplo 7 da seção 2.2 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Portanto,

$$v(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemplo 4: (OPRM, 2016- 2ª Fase- Adaptado) Considere a sequência de figuras abaixo.



Quantos círculos cinzas teremos na 2020ª figura?

Solução: Vamos definir por $w(n)$ a quantidade de círculos cinzas do *n-ésimo* termo da sequência. Vamos inicialmente considerar cada termo da sequência como um número quadrado $Q(2021)$, e depois subtrair o número quadrado de seu interior $Q(2019)$.

$$\begin{aligned} w(2020) &= Q(2021) - Q(2019) \\ &= 2021^2 - 2019^2 \\ &= (2021 + 2019)(2021 - 2019) \\ &= 4040 \cdot 2 \\ &= 8080. \end{aligned}$$

4 UMA APLICAÇÃO EM SALA

Um dos objetivos do PROFMAT é contribuir com a educação matemática nas escolas públicas. Para tanto, realizamos uma aplicação numa turma olímpica no município de Madalena-CE, projeto mantido pela Associação Cactus.

> A Associação Cactus é uma ONG com objetivo de democratizar as oportunidades, desenvolvendo jovens talentos por meio da educação. Trabalhamos em parceria com o governo municipal oferecendo apoio pedagógico a alunos do ensino fundamental, focando na participação em olimpíadas nacionais, para que sejam porta de entrada a outras oportunidades. (ASSOCIAÇÃO CACTUS, 2020).

As turmas olímpicas foram formadas com educandos das escolas públicas do município de Madalena, dividida em nível I (6º e 7º ano) e nível II (8º e 9º ano). As aulas acontecem aos sábados de 8:00 as 11:00. Todavia, a realidade da pandemia do COVID-19 mudou a metodologia de atendimento com adesão de aulas remotas através de ambiente virtual de aprendizagem e web conferência com aulas de 60 minutos semanalmente.

A aplicação se deu na turma de nível II (8º e 9º ano), aqui o estudo dos números poligonais foi contextualizado com o conteúdo de sequências.

Objetivo Geral

- Compreender a importância do estudo de sequências para uma formação consolidada em matemática, bem como desenvolver as competências e habilidades na resolução de problemas.

Objetivos Específicos

- Identificar regularidades em sequências numéricas conjecturando sua fórmula de posição;
- Modelar a sequência de Números Poligonais planos através do raciocínio recursivo;
- Aplicar o conceito de números poligonais na resolução de problemas olímpicos.

A aplicação da aula se deu de forma remota utilizando a ferramenta Google Meet, também foi utilizado uma apresentação de slides, que norteou o desenvolver da aula.

A sequência metodológica pode ser vista com maior detalhe no plano de aula que se encontra em anexo. Inicialmente abordamos os conceitos iniciais de sequência diferenciando elementos de um conjunto e elementos de uma sequência, em seguida apresentamos a definição formalizada do conceito de sequências.

Após a essa parte introdutória, apresentamos a sequência dos números triangulares, onde utilizamos o raciocínio recursivo na modelagem de sua fórmula de posição. Por fim realizamos aplicações dos números triangulares na resolução de problemas olímpicos.

Como forma de evidenciar a aplicação, disponibilizamos os links da apresentação e a vídeo aula.

- Apresentação: https://mega.nz/file/K6wRQIQZ#7R1W68kBy3LLqhUGRM6qOsYqY6pzmUm2Mfk3mvaLAiw.
- Vídeo aula: https://mega.nz/file/ruJ1zSiL#1pOTNztc0A_PHGBIoj9Y2dDZSN0LDBfy9LguZQFPzI.

5 CONCLUSÃO

O ponto de partida que deu origem a essa pesquisa é o fato de haver com demasiada frequência problemas envolvendo números figurados, alguns em livros, mas a maioria em provas de competição matemática. Percebe-se também que há poucos trabalhos que abordam o tema, e quando abordados não falam das propriedades intrínsecas a ele, todavia, o estudo aqui realizado mostrou uma riquíssima coleção de proposições e teoremas que possuem grande relevância na matemática.

Os resultados presentes nesse trabalho possibilitam aos professores de matemática da educação básica uma abordagem diferente sobre os conhecimentos de sequências, visto que o estudo das sequências dos números poligonais planos utiliza-se de uma variedade de outros conhecimentos, que são técnicas muito eficientes para modelá-los, bem como o estudo de suas proposições e propriedades, nos quais listamos o Teorema Fundamental da Somação, produtos telescópicos e equações de recorrência.

Além disso, outro ponto em destaque são as aplicações das sequências dos números poligonais na resolução de problemas de olimpíadas, sendo assim uma excelente oportunidade para inserir os alunos de turmas olímpicas no universo das demonstrações.

Alguns resultados não puderam fazer parte do texto, devido a fatores limitantes encontrados no decorrer da pesquisa, e isso se deu tanto pela complexidade, quanto pelo fato de que referencial teórico iria ficar muito extenso abordando diversos assuntos. Um outro fator limitante se refere a aplicação em sala de aula, o contexto da pandemia de COVID-19 expôs muitas desigualdades sociais, entre elas destacam-se a falta de acesso as tecnologias de informação e comunicação, por parte dos educandos, e a dificuldade em ministrar as aulas na modalidade de ensino remoto, por parte dos educadores.

O assunto explorado neste texto constitui uma pequena parcela de um assunto bem vasto, que são os número figurados. Aqui, optamos pelos número poligonais, mas há muitas outras possibilidades de explorar esse assunto em sala de aula, como por exemplo números figurados centralizados, tridimensionais e etc. e nestes, os resultados encontrados nessa pesquisa servirá de base para sua compreensão.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 jan. 2019.

DICSON, L. E. **History of Theory of Numbers**. Washinton D. C.: Carnegie Institution for Science, 1923.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra, volume 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, E. L. **Análise Real, volume 1:** Funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

LIMA, W. A. F. 2015. **Progressões Aritméticas de Ordem Superior:** uma proposta de abordagem no Ensino Médio. 2015. 102f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.; ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MORGADO, J. Notas sobre os Números Triangulares. **Gazeta de Matemática,** n. 139, jul. 2000. Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=491. Acesso em 23 dez. 2019.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar:** números reais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, J.P.de O. **Introdução a teoria dos números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 2, p. 64-81, 2013.

ANEXO A - PLANEJAMENTO DE AULA – PROJETO CACTUS

<table>
<tr><td colspan="2">Tema: Sequências</td></tr>
<tr><td colspan="2">Professor: Luis Paulo Gomes da Cunha</td></tr>
<tr><th>Conteúdo</th><th>Objetivos</th></tr>
<tr><td>• Sequências definidas por recorrência;
• Números triangulares.</td><td>• Reconhecer padrões de uma sequência numérica;
• Modelar sequências através de equações de recorrência;
• Utilizar os números triangulares na resolução de problemas.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Metodologia</th></tr>
<tr><td colspan="2">• Conceito iniciais.
▪ Diferenciação de elementos de um conjunto para elementos de uma sequência;
▪ Definição matemática de sequência.
• Explanação sobre os elementos de uma sequência:
▪ Termos de uma sequência;
▪ Indicação de posição.
• Outras formas de definir uma sequência:
▪ Fórmula posicional;
▪ Definição por recorrência.
• Resolução de exemplos;
• Explicação do conceito de número triangulares:
▪ Definição de um número triangular por recorrência.
▪ Fórmula de posição dos números triangulares.
• Aplicação de problemas.</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>▪ Google Meet;
▪ Apresentação Slides.</td></tr>
<tr><td>Referência Bibliográfica</td><td>▪ MORGADO, A. César; CARVALHO, P. C. Pinto, ZANI, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira. 4. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.</td></tr>
</table>