



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

SAMUEL ROBSON DE ALMEIDA LINO

**POLÍGONOS DE REULEAUX E SÓLIDOS DE LARGURA CONSTANTE:
CONCEITOS E APLICAÇÕES**

QUIXADÁ - CEARÁ

2020

SAMUEL ROBSON DE ALMEIDA LINO

POLÍGONOS DE REULEAUX E SÓLIDOS DE LARGURA CONSTANTE:
CONCEITOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira.

QUIXADÁ – CEARÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Lino, Samuel Robson de Almeida.

Polígonos de reuleaux e sólidos de largura constante: conceitos e aplicações [recurso eletrônico] / Samuel Robson de Almeida Lino. - 2020

Um arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 62 folhas.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2020.

Área de concentração: Ensino de Matemática. .

Orientação: Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira. .

1. Largura Constante. 2. Triângulo de Reuleaux. 3. Tetraedro de Meissner. I. Título.

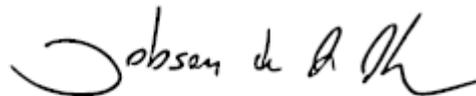
SAMUEL ROBSON DE ALMEIDA LINO

POLÍGONOS DE REULEAUX E SÓLIDOS DE LARGURA CONSTANTE:
CONCEITOS E APLICAÇÕES

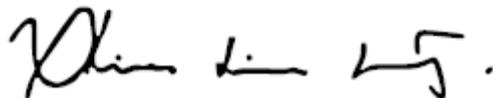
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado em: 21 de dezembro de 2020

BANCA EAMINADORA



Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira (PROFMAT/UECE/QUIXADÁ)



Prof. Dr. Ulisses Lima Parente (PROFMAT/UECE/QUIXADÁ)



Prof. Dr. Flávio França Cruz (URCA)

Dedico este trabalho aos meus (filhos) Lis,
Maria e Raul e a minha (esposa) Mayara.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois durante este período de estudo passei por muitos momentos difíceis e Ele me deu a força necessária, mostrando o caminho no qual devia trilhar para conseguir sabedoria suficiente para chegar até aqui, fazendo-me superar cada obstáculo imposto pela vida.

A minha esposa Mayara e minha filha Lis que sempre me trouxeram motivação para perseverar em busca do meu crescimento, foram compreensivas em muitos momentos, que estive ausente. A minha mãe e irmã pelo carinho.

Aos meus colegas de turma que sempre trouxeram companheirismo e momentos de descontração para enfrentarmos as dificuldades que surgiram no decorrer do curso.

Em especial agradeço meu amigo Luis Paulo, foram inúmeras viagens que fizemos juntos, onde pudemos compartilhar boas conversas e conhecimentos matemáticos.

Sou muito grato ao meu orientador Professor Jobson, pela atenção, dedicação e os ensinamentos. Aos demais professores do curso, pelo compromisso e dedicação.

Agradeço a todos os professores com os quais trabalhei independente da área, foram fontes de aprendizado e troca de experiências que ajudaram no meu crescimento profissional. Em especial externo minha gratidão a todos os professores que fizeram parte do coletivo de Matemática do Liceu de Quixeramobim, nesses meus mais de 10 anos nessa grande Escola.

RESUMO

O círculo figura de largura constante, é utilizado desde os tempos antigos, nas diferentes civilizações, tendo uma infinidade de aplicações. O que justifica o seu estudo no ensino Básico, o mesmo acontece em relação aos corpos de largura constante, a ênfase é dada ao estudo sobre esfera. Porém, existe uma infinidade de curvas de largura constante, como é o caso dos Polígonos de Reuleaux, o nome desse conjunto de formas foi dado em homenagem ao engenheiro alemão Franz Reuleaux que no século XIX, projetou mecanismos que faziam uso de elementos desse conjunto, no caso o triângulo de Reuleaux. O trabalho contempla algumas das principais propriedades desta figura, tendo destaque o fato dela em comparação a outras superfícies de largura constante resultar na menor área. A referida pesquisa ainda apresenta construções espaciais, começando pelo tetraedro de Reuleaux que é construído a partir da interseção de esferas, mas que diferentemente do triângulo de Reuleaux não tem largura constante. Descrevemos a modificação feita no tetraedro pelo matemático suíço Ernst Meissner para torná-lo um corpo de largura constante, tendo pelo menos duas maneiras de se fazer esta alteração. As superfícies de largura constante podem ser observadas em edificações, objetos do cotidiano como um lápis, tampas de bueiros e até mesmo em motores de veículos. Para descrever os conceitos e realizar as construções sugerimos o uso do software Geogebra, já que os alunos estão inseridos em um mundo cada vez mais tecnológico, onde se faz necessário aproximar o aprendizado matemático das ferramentas interativas, já que essa ação pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, pois possibilita além da manipulação dos objetos matemáticos, a aquisição do conhecimento de forma mais dinâmica e prazerosa.

Palavras-chaves: Largura Constante. Triângulo de Reuleaux. Tetraedro de Meissner.

ABSTRACT

The figure circle of constant width, has been used since ancient times, in different civilizations, having an infinity of applications, which justifies its study in Basic education, the same happens in relation to bodies of constant width, the emphasis is given to sphere study. However, there is an infinity of curves of constant width, as is the case with the Reuleaux Polygons. The name of this set of shapes was given in honor of the German engineer Franz Reuleaux who, in the 19th century, designed mechanisms that used elements of this set, in this case the Reuleaux triangle. The work contemplates some of the main properties of this figure, highlighting the fact that it compared to other surfaces of constant width results in the smallest area. This research still presents spatial constructions, starting with the Reuleaux tetrahedron, which is built from the intersection of spheres, but which, unlike the Reuleaux triangle, has no constant width. We describe the modification made to the tetrahedron by the Swiss mathematician Ernst Meissner to make it a body of constant width, with at least two ways of making this change. The surfaces of constant width can be observed in buildings, everyday objects such as a pencil, manhole covers and even in vehicle engines. To describe the concepts and carry out the constructions we suggest the use of the Geogebra software, since students are inserted in an increasingly technological world, where it is necessary to bring mathematical learning closer to interactive tools, since this action can contribute to the process teaching and learning, because it allows, in addition to the manipulation of mathematical objects, the acquisition of knowledge in a more dynamic and pleasurable way.

Keywords: Constant width. Reuleaux triangle. Meissner Tetrahedron.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Adição de Vetores.....	13
Figura 2	– Multiplicação de um vetor por um número real.....	14
Figura 3	– Parametrização da Reta.....	16
Figura 4	– Parametrização da Parábola.....	17
Figura 5	– Parametrização do Círculo.....	18
Figura 6	– Parametrização da função $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$.....	18
Figura 7	– Pares de retas suportes de um curva.....	19
Figura 8	– Largura de uma curva.....	19
Figura 9	– Diagonais de um polígono de 15 lados.....	20
Figura 10	– Curva de Agnesi.....	21
Figura 11	– Superfície de Revolução.....	21
Figura 12	– $\overline{P_1P_2}$ perpendicular a r_1 e r_2.....	22
Figura 13	– Franz Reuleaux.....	23
Figura 14	– Duangle PQRS.....	24
Figura 15	– Triângulo de Reuleaux.....	25
Figura 16	– Triângulo de Reuleaux dentro do quadrado.....	25
Figura 17	– Polígonos de Reuleaux.....	26
Figura 18	– Eneágono Curvilíneo de Largura Constante.....	27
Figura 19	– Curva de Largura constante a partir do triângulo ABC.....	28
Figura 2020	– Curva de Largura constante a partir de um polinômio.....	29
–	– Percurso do centro do triângulo de Reuleaux.....	30
Figura 211	– Interseção de duas retas que passam pelo diâmetro de	
–	uma curva convexa.....	31
Figura 222	– Interseção dos diâmetros de uma curva no ponto A.....	31
–	– Ilustração do Teorema 3.2.....	32
–	– Ilustração da prova do Teorema 3.3.....	32
Figura 233	– Ilustração do Teorema 3.3.....	33
–	– Ilustração da prova do Teorema de Barbier.....	35
Figura 244	– Polígonos Q_{2n} e q_{2n}, circunscrito e inscrito a α	
–	respectivamente.....	36
–	– Ilustração do Lema 3.5.....	39

Figura 255	Ilustração do Lema 3.6.....	40
-	Curvas O, T e K inscritas num hexágono regular.....	41
Figura 266	Pares de retas suportes das curvas K, T e O.....	42
-	Triângulo de Reuleaux girado entre dois planos	
Figura 277	paralelos.....	44
-	Sólidos de Reuleaux de Revolução	45
Figura 288	Interseção de esferas formando o Tetraedro de Reuleaux...	45
-	Tetraedro de Reuleaux.....	46
	Poliedros de Reuleaux.....	47
Figura 299	Ernst Meissner.....	48
-	Modificação do Tetraedro de Reuleaux.....	49
Figura 30 –	Tetraedro de	50
Figura 301	Meissner.....46	51
-	Projeção de um corpo de largura constante em um plano	51
Figura 312	paralelo.....	52
-	Poliedro de Meissner.....	52
Figura 323	Moedas britânicas de 20p e 50p.....	53
-	Casa Golferichs.....	53
	Catedral de Bilbao.....	54
Figura 334	Broca para fazer furos quadrados.....	54
-	Motor de Wankel.....	54
Figura 345	Flor da Vida.....	55
-	Hamlet 1949.....	
Figura 356		
-		
Figura 367		
-		
Figura 378		
-		
Figura 389		
-		
Figura 40 –		
Figura 41 –		

Figura 42 –

Figura 393

–

Figura 404

–

Figura 415

–

Figura 426

–

Figura 437

–

Figura 448

–

Figura 459

–

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	13
2.1	Vetores.....	13
2.1.1	Operações com Vetores.....	13

2.2	Curvas e Parametrização.....	15
2.3	Geogebra.....	20
2.3.1	Construção de Polígonos.....	20
2.3.2	Função.....	20
2.3.3	Curvas.....	21
2.3.4	Sólidos.....	21
3	POLÍGONOS DE REULEAUX.....	22
3.1	Curva de Largura Constante.....	22
3.2	Polígonos de reuleaux.....	23
3.3	Propriedades do triângulo de reuleaux.....	29
3.4	Teorema de barbier.....	33
4	POLIEDROS DE REULEAUX E MEISSNER.....	34
4.1	Poliedros de reuleaux.....	34
4.2	Poliedros de meissner.....	47
5	APLICAÇÕES.....	52
5.1	Formas de largura constante e suas aplicações.....	52
5.2	Possibilidades de aplicação em sala de aula.....	55
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
	REFERÊNCIAS.....	61

1 INTRODUÇÃO

A nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC), desde seu processo de elaboração, trouxe a discussão sobre a importância de se repensar o currículo de Matemática, não só da referida área, mas das outras também. Essa ação trouxe a necessidade de remodelar muita das outras ferramentas que compõe o processo de

Ensino. Tendo como um dos objetivos de construção desse novo currículo aproximar o que está sendo ensinado à realidade do aluno. Dentro dessa perspectiva, se percebe a necessidade do ensino da Matemática que favoreça, não só a construção do pensamento Matemático, como sua aplicação, para isso, se faz necessário o uso das tecnologias digitais e de um processo de ensino que favoreça o protagonismo do aluno.

Os processos metodológicos na área de Matemática, segundo a BNCC, requerem um planejamento que contemple para o Ensino Fundamental o letramento matemático e os processos matemáticos e do pensamento computacional, já no Ensino Médio devem agregar novos conhecimentos para resolver problemas mais complexos e construir uma visão mais integrada da Matemática.

Diante dessas reformulações, o trabalho traz possibilidades para o ensino de Geometria, aproveitando que esta área contempla diversas aplicações, além de ter diversos recursos tecnológicos que podem auxiliar no ensino.

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BRASIL, p.271, 2018)

Associado ao estudo de círculo e esfera é possível apresentarmos outras formas de largura constante, o objetivo da pesquisa é trabalhar em cima principalmente dos polígonos de Reuleaux, dando ênfase ao triângulo de Reuleaux e as formas espaciais geradas por essas figuras de largura constante.

No capítulo 2 apresentamos conceitos matemáticos que serviram de base para a construção do trabalho, focamos principalmente em conceitos da álgebra, da geometria analítica e no software geogebra. Os conceitos de geometria plana e espacial não foram abordados por entender que são conceitos mais básicos que os citados dentro do capítulo.

Já no capítulo 3 abordamos os Polígonos de Reuleaux, começamos por definir o que são curvas de largura constante, em seguida apresentamos um resumo

sobre a vida e obra de Franz Reuleaux, na sequência começamos a demonstrar construções dos polígonos e suas respectivas propriedades.

O capítulo 4 traz o tetraedro de Reuleaux, que é um sólido construído a partir da interseção de esferas de mesmo raio centradas no vértice do tetraedro regular, sendo que esse sólido não tem largura constante. Logo após, apresentamos as modificações feitas por Meissner para transformar o tetraedro de Reuleaux em um sólido de largura constante.

Por fim, no capítulo 5 apresentamos aplicações no cotidiano das figuras e sólidos apresentados anteriormente e finalizamos com as possibilidades metodológicas para o trabalho das figuras de largura constante no Ensino Médio.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo é dedicado a revisão de alguns conteúdos básicos de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Será abordado também o uso do Geogebra como ferramenta de suporte no ensino da Matemática.

2.1 Vetores

Nesta seção apresentamos rapidamente a definição de vetores e algumas propriedades, vamos partir do espaço Euclidiano de duas dimensões \mathbb{R}^2 . A seguir o que aplicarmos ao \mathbb{R}^2 , também vale para o \mathbb{R}^3 .

Definição 2.1 Seja $\vec{v} = (x_1, x_2)$ um par ordenado em \mathbb{R}^2 , com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dizemos que \vec{v} é um vetor com coordenadas x_1 e x_2 , estas podem ser calculadas usando qualquer segmento orientado que representa \vec{v} .

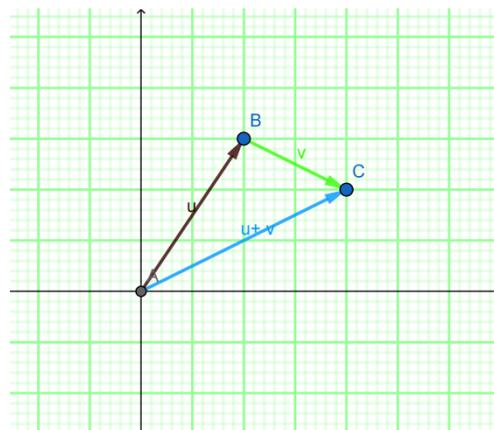
2.1.1 Operações com Vetores

Definição 2.2 Dois vetores $\vec{v} = (x_1, x_2)$ e $\vec{u} = (y_1, y_2)$, podem ser somados efetuando a adição das coordenadas correspondentes.

$$\vec{v} + \vec{u} = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

É possível visualizar esta soma geometricamente

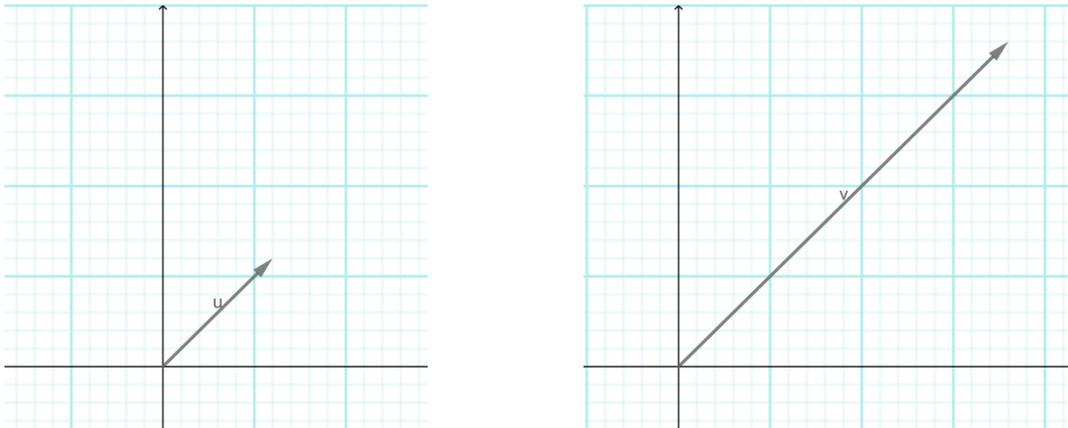
Figura 47 - Adição de Vetores



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Definição 2.3 A multiplicação de um número real por um vetor. Seja $\vec{v} = (x_1, x_2)$ um vetor e λ um número real, também chamado de escalar, com $\vec{v}, \lambda \neq 0$. O produto $\lambda\vec{v}$ tem como resultado o vetor \vec{u} , sendo que:

- (a) \vec{v} e \vec{u} tem a mesma direção.
- (b) Comprimento de \vec{u} é igual ao produto $|\lambda||\vec{v}|$.
- (c) \vec{v} e \vec{u} tem o mesmo sentido se $\lambda > 0$, e sentidos oposto se $\lambda < 0$.

Figura 48 - Multiplicação de um vetor por um número real

Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Propriedades 2.1 Seja λ, α e β números reais e v, u e w vetores e $\vec{0} = (0,0)$

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Fig.1)
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $\lambda(\alpha \cdot \vec{u}) = (\lambda\alpha) \cdot \vec{u}$
6. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
7. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$; $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
8. $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

O vetor \vec{v} é múltiplo do vetor \vec{u} se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$. Isto significa dizer que os dois vetores estão na mesma reta, caso tenhamos uma situação contrária a essa, ou seja, os vetores não estão na mesma reta, temos $\beta \vec{v} + \alpha \cdot \vec{u} = 0$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dessa forma \vec{v} não é múltiplo de \vec{u} , é o que chamamos de vetores Linearmente Independentes. Dizemos que existe uma combinação linear entre os vetores \vec{v} e os vetores $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ quando $\vec{v} = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 + \dots + \alpha_n \cdot u_n$, com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4 Produto Escalar é uma operação que associa a cada par de vetores um escalar. Sejam $\vec{v} = (x_1, x_2)$ e $\vec{u} = (y_1, y_2)$ dois vetores em \mathbb{R}^2 , o produto escalar entre eles corresponde a $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$.

Há outra maneira de definir produto escalar, para isso, precisamos da definição de Norma de um vetor que é um número que representa o comprimento de um segmento orientado representante do vetor. A simbologia utilizada para indicar a

norma de um vetor $\vec{z} = (a, b)$ seria $\|z\|$, também definida como $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ para $\|z\| \geq 0$. Temos $\|z\| = 0$ se e somente se $z = 0$. De posse desse conhecimento sobre Norma e aplicando a lei dos cossenos, podemos ver o produto escalar dos vetores z e w de outra forma: $z \cdot w = \|z\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os dois vetores, $0 < \theta < \pi$.

Propriedades 2.2 Seja \vec{u}, \vec{v} e \vec{z} vetores de \mathbb{R}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos as seguintes propriedades:

1. $u \cdot u = \|u\|^2 \geq 0$
2. $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $u \cdot v = v \cdot u$
4. $(\alpha \cdot u) \cdot v = \alpha \cdot (u \cdot v)$
5. $(u + z) \cdot v = (u \cdot v) + (z \cdot v)$

2.2 Curvas e Parametrização

Definição 2.5 Uma curva contínua no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, a aplicação α , será contínua, se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função contínua.

Definição 2.6 Seja C uma curva e I um subconjunto de \mathbb{R} , dizemos que uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ [ou $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$], é uma parametrização de C se a sua imagem $\alpha(I)$ é igual a C . O conjunto imagem $Im(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2\}$ (ou $\{\alpha(t) \in \mathbb{R}^3\}$) é chamado de traço de α . A curva C é chamada de simples se a aplicação α for injetiva. Se $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, temos que α possui um ponto duplo.

Se a curva α estiver definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, com $I \subset \mathbb{R}^2$ então:

- I. $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são respectivamente o início e fim da curva α .
- II. $\alpha(a) = \alpha(b)$ a curva é fechada.
- III. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, é dita simples, se aplicação α for injetiva. A curva α possui um ponto duplo em t_1 e t_2 , quando $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$.
- IV. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, será uma curva fechada e simples $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ com $t_1, t_2 \in [a, b)$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Uma curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é peri se existir um número real $c > 0$, tal que $\alpha(t + c) = \alpha(t)$.

Definição 2.7 Uma curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa se $\forall t_0 \in [a, b]$, a função definida por $h(t_0) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), n(t_0) \rangle$, onde $n(t)$ é o campo normal de α , não muda de sinal. Podemos dizer também que a curva é convexa se para todos os pontos de $\alpha(t_0)$ a curva estiver inteiramente contida em um dos semi-planos definidos pela reta tangente à α em t_0 .

Exemplo 2.1 (Parametrização da Reta)

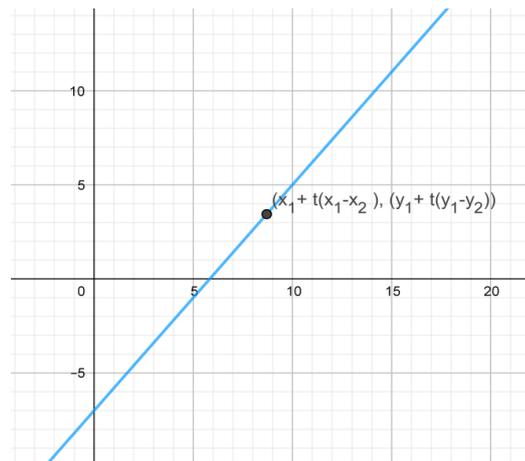
Considere os pontos de \mathbb{R}^2 $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ distintos. A aplicação $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = A + t(A - B)$$

$$\alpha(t) = (x_1 + t(x_1 - x_2), y_1 + t(y_1 - y_2))$$

Sendo esta aplicação a parametrização de uma reta.

Figura 49 - Parametrização da Reta



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Exemplo 2.2 (Parametrização da Parábola)

A aplicação $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $(x - x_1)^2 = m(y - y_1)$, fazendo $(x - x_1) = t$, com $t \in \mathbb{R}$ temos então

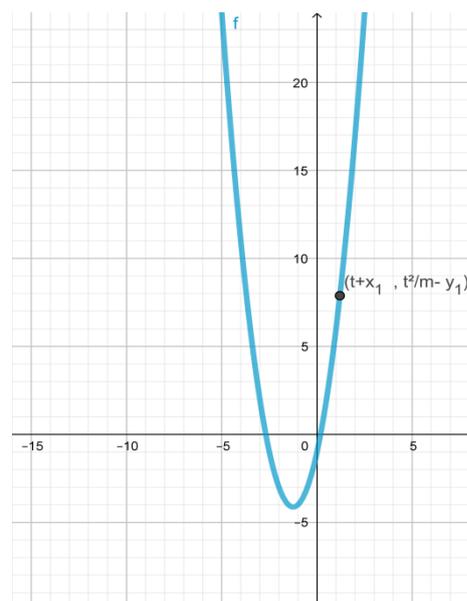
$$t^2 = m(y - y_1)$$

$$y = \frac{t^2}{m} - y_1$$

$$\alpha(t) = (t + x_1, \frac{t^2}{m} - y_1)$$

A $\alpha(t)$ seria a parametrização de uma parábola.

Figura 50 - Parametrização da Parábola



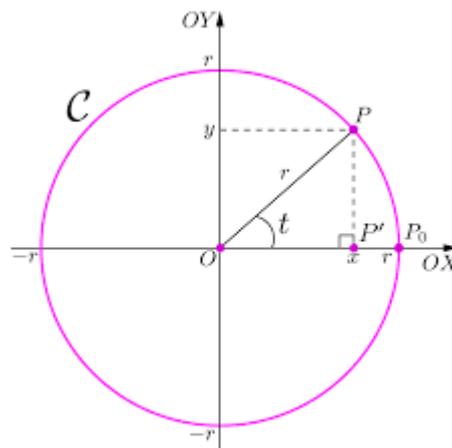
Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Exemplo 2.3 (Parametrização do Círculo)

O círculo C de raio $r > 0$ e centro na origem, dado por $x^2 + y^2 = r^2$. Seja t a medida em radianos do ângulo $\widehat{POP_0}$, onde O é a origem do sistema cartesiano de coordenadas, $P_0 = (r, 0)$ é o ponto de interseção do círculo com o semieixo positivo das abscissas e $P = (x, y)$ é um ponto de C . Fazendo $x = r \cdot \cos t$ e $y = r \cdot \sin t$, temos então que a parametrização de C é

$$C : \begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Figura 51 - Parametrização do Círculo

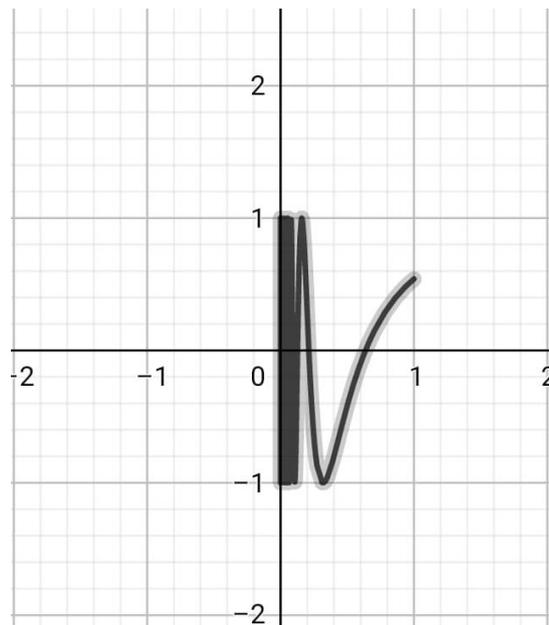


Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Exemplo 2.4 (Gráfico de uma função)

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k . O conjunto $F = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$, seria o gráfico de f . A aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , dada por $\alpha(t) = (t, f(t))$, sendo esta uma parametrização de f .

Figura 52 - Parametrização da função $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

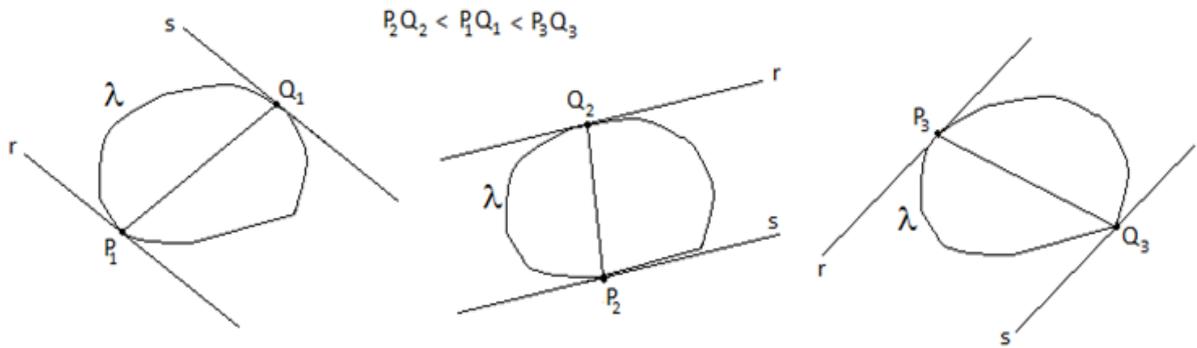


Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Largura de uma Curva

Uma reta r é uma reta suporte de uma curva convexa e fechada α , se r for tangente a α e a curva estiver contida em um dos semiplanos fechados definidos por r .

Figura 53 - Pares de retas suportes de um curva

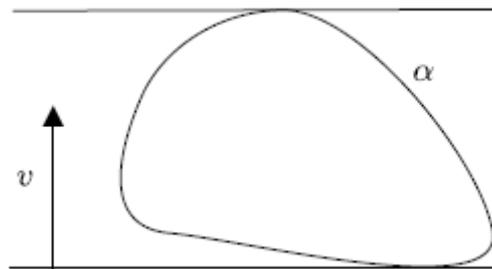


Fonte: Mello, (2013, p.2).

Podemos perceber que em cada direção há exatamente duas retas suportes de α .

Definição 2.8 A largura de α em relação a direção \vec{v} , é dada pela menor distância entre duas retas paralelas r e s , tangentes a α e ortogonais a direção \vec{v} .

Figura 54 - Largura de uma curva



Fonte: Hilário e Walcy, (2003, p.199).

Observação: A largura de uma curva pode variar de acordo com par de retas suportes de direção \vec{v} selecionados.

2.3 Geogebra

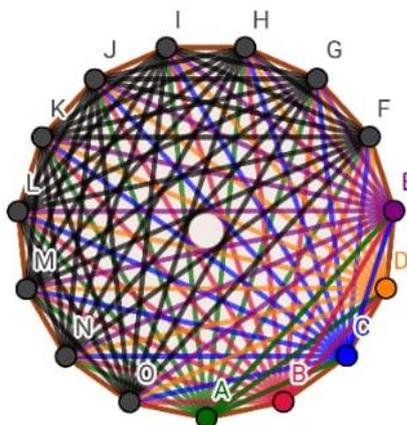
O software Geogebra foi criado em 2001 por Markus Hohewarter, para ser utilizado em sala de aula. Este aplicativo possibilita aulas de Matemática mais dinâmicas, já que a ferramenta em seu ambiente permite o trabalho da geometria e

também da álgebra, de forma que os assuntos a serem trabalhados se tornem mais ilustrados e interativos. O Geogebra é aplicável aos diversos níveis de ensino.

2.3.1 Construção de Polígonos

Uma das funções do geogebra que pode auxiliar no decorrer das aulas são as construções de polígonos, onde podemos destacar os elementos da figura desenhada.

Figura 55 – Diagonais de um polígono de 15 lados



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/ns73yduu>

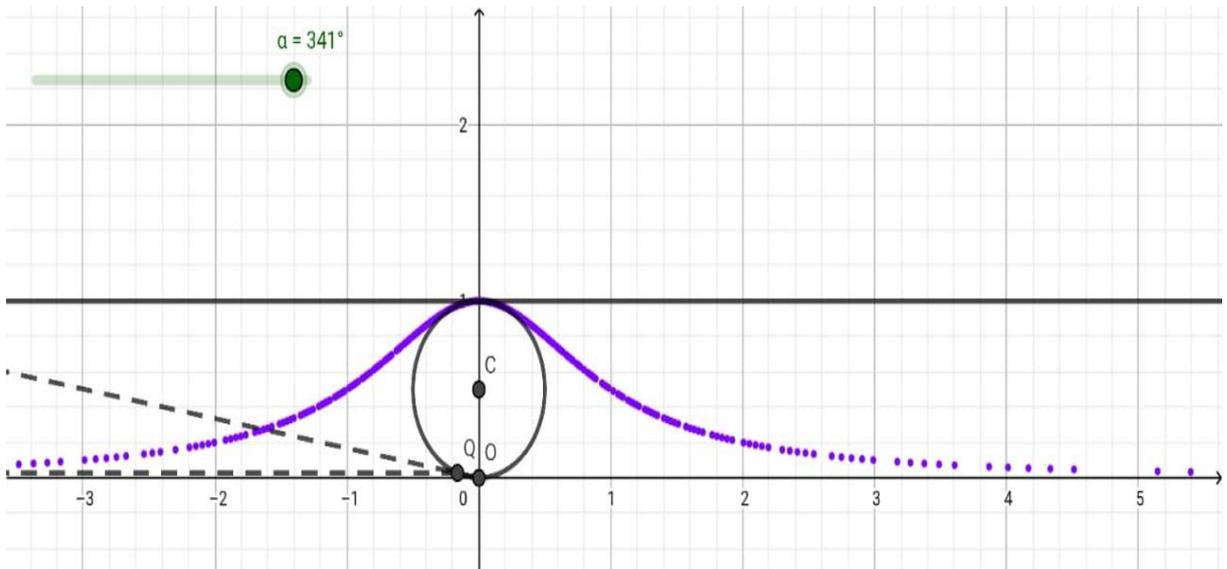
2.3.2 Função

Também é possível construir gráficos de uma função, analisar seus elementos e o comportamento, conforme apresentado na seção anterior na figura 6.

2.3.3 Curvas

Através do software também há possibilidade de desenhar curvas com uma maior eficiência, utilizando de maneira adequada as ferramentas do geogebra é possível dar movimento ao desenho e analisar o comportamento da figura.

Figura 56 – Curva de Agnesi

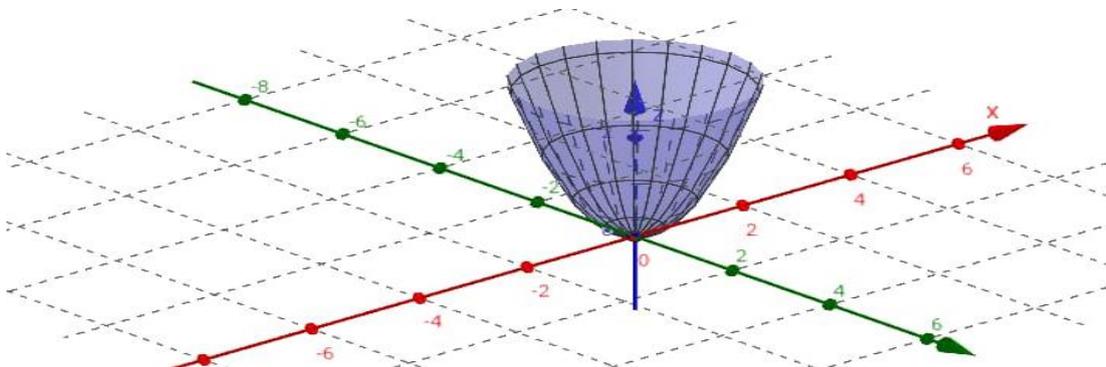


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/sbtakeme>

2.3.4 Sólidos

O geogebra em diversos menus também oferta a opção de construir sólidos, o que facilita a visualização na exposição dos elementos e propriedades da figura.

Figura 57 - Superfície de Revolução



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/CeTmePsH>

3 POLÍGONOS DE REULEAUX

Neste capítulo vamos tratar das curvas de largura Constante, mais especificamente os Polígonos de Reuleaux. Iniciaremos pelas definições e Lema sobre a largura de uma curva, em seguida falamos sobre Franz Reuleaux e seu trabalho “A Cinemática das Máquinas”. Consequentemente entramos nas construções

dos Polígonos de Reuleaux e concluímos com o Teorema de Barbier e Teorema Blaschke Lebesgue.

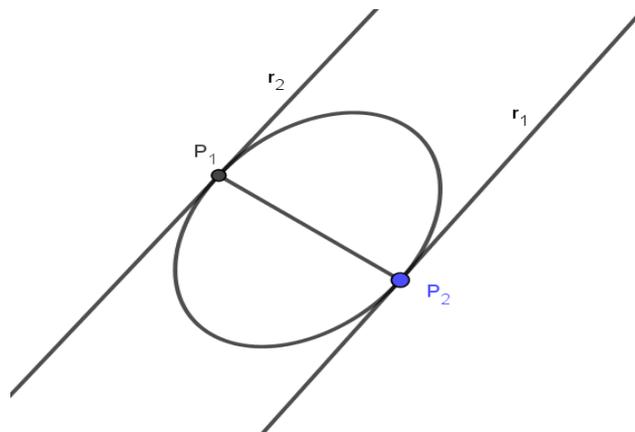
3.1 Curva de Largura Constante

Definição 3.1 Uma curva C convexa e fechada é dita de largura constante se a distância entre todos os pares das retas suportes desta curva for sempre a mesma.

Comumente no ensino básico trabalhamos como se a única curva de largura constante fosse o círculo. Temos outras curvas com essa mesma característica, e que podem ser apresentadas nas aulas de Matemática, de forma a favorecer a abstração dos educandos, e a construção de uma visão mais completa no estudo sobre curvas planas. A seguir falaremos dos Polígonos de Reuleaux, mas antes estudaremos alguns resultados.

Teorema 3.1 Seja r_1, r_2 o par de retas suportes de mesma direção da curva de largura constante C . E P_1, P_2 os respectivos pontos onde r_1, r_2 tocam C . Dessa forma $\overline{P_1P_2}$ é perpendicular a r_1 e r_2 .

Figura 58 - $\overline{P_1P_2}$ perpendicular a r_1 e r_2



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Demonstração: Seja α_1 a largura da curva C . Suponhamos por absurdo que $\overline{P_1P_2}$ não é perpendicular as retas r_1 e r_2 , Sabemos que a distância entre r_1 e r_2 equivale a α_1 , então pelo Teorema de Pitágoras temos $\overline{P_1P_2} > \alpha_1$. Agora vamos pegar outro par de retas suportes só que na direção $\overline{P_1P_2}$, temos agora a largura α_2 consequentemente $\alpha_2 \geq \overline{P_1P_2} > \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 > \alpha_1$. Dessa forma temos que a curva C

possui em direções diferentes larguras distintas o que contraria o fato de C ter largura constante.

3.2 Polígonos de reuleaux

Quando falamos de curvas de largura constante, a maioria das pessoas automaticamente irá pensar no círculo, como se essa fosse a única figura de diâmetro constante. Existem infinitas formas que tem essa característica, dentre elas podemos citar os polígonos de Reuleaux, nome este referente ao engenheiro e professor alemão Franz Reuleaux(1829 – 1905), conhecido por muitos historiadores como o pai da cinemática. Ele foi professor Instituto Federal Suíço e também reitor da Academia Real Técnica de Berlim.

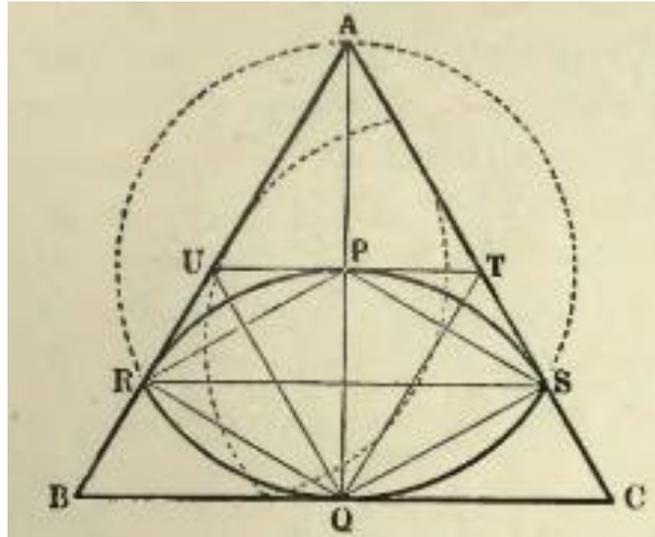
Figura 59 - Franz Reuleaux



Fonte:https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e6/Franz_Reuleaux.jpg/200px-Franz_Reuleaux.jpg

Seu principal trabalho é um tratado sobre máquinas *The Kinematics of Machinery* publicado em 1876. O livro trata além de teorias sobre máquinas, e conceitos da Física e Matemática. Há abordagens sobre os conceitos e comportamentos do centroide de algumas figuras e também sobre o que ele chamou de “duangle” estando este inserido em um triângulo equilátero que tem em cada um dos seus lados um ponto em comum com o “duangle” (Figura 14).

Figura 60 – Duangle PQRS



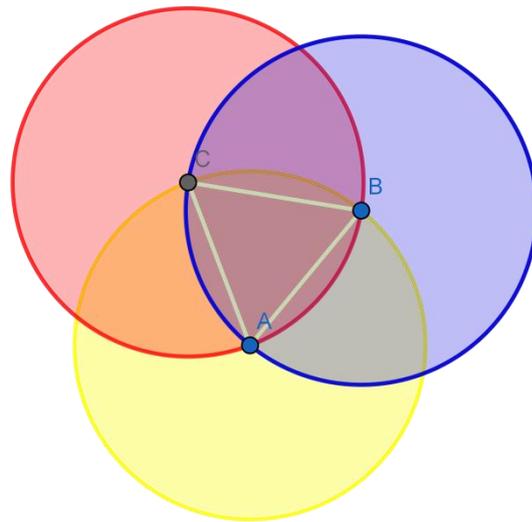
Fonte: https://en.wikisource.org/wiki/Page:The_Kinematics_of_Machinery.djvu/139

O desenho citado como “duangle” seria a construção de duas circunferências centradas nas extremidades distintas de um mesmo segmento sendo o comprimento deste o raio de ambas. É feita a análise dos movimentos relativos através da construção do centroide.

Essa seria a base do modelo de Reuleaux para se chegar aos polígonos de largura constante. Como essa parte abordada no livro nos leva a conceitos que se distanciam do objetivo trabalho, optamos por especificar somente a construção feita no livro que é o triângulo equilátero-curva, posteriormente chamado de Triângulo de Reuleaux.

Podemos utilizar arcos circulares para a construção do triângulo de Reuleaux. A partir de um triângulo equilátero ABC traçamos um arco \widehat{BC} com centro em A e raio medindo \overline{AB} , procedemos da mesma forma para os arcos \widehat{AB} e \widehat{AC} .

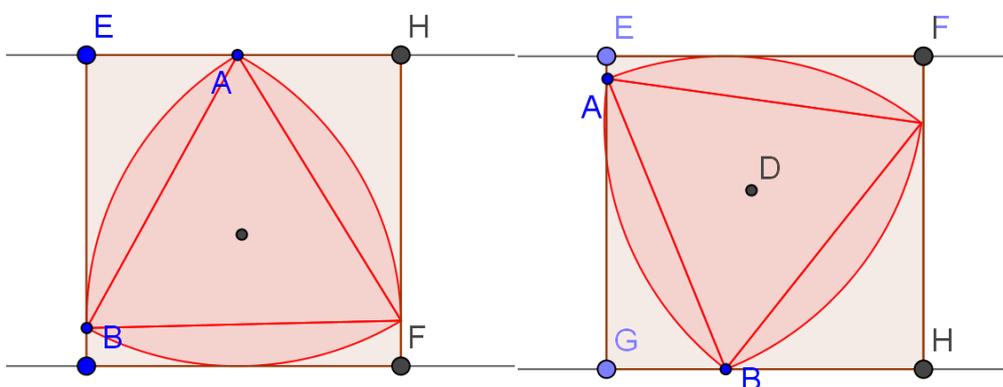
Figura 61 - Triângulo de Reuleaux



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Traçando o par de retas suportes da curva, que passam pelo ponto B e pelo arco \widehat{AC} e ainda as perpendiculares as retas suportes que passam respectivamente em A e C, descrevemos um quadrado. Como a figura tem largura constante é possível girar o triângulo dentro do quadrado (Figura 16).

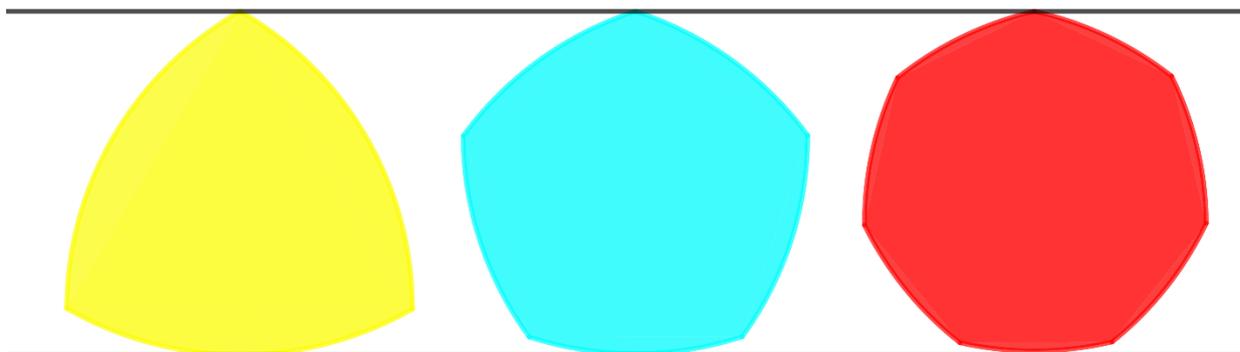
Figura 62 – Triângulo de Reuleaux dentro do quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Como citado anteriormente existem infinitas curvas de largura constante, e dentro deste conjunto temos diversos polígonos de Reuleaux, a partir da construção anterior podemos fazer uma generalização para definir o subconjunto da figuras de Reuleaux.

Figura 63 - Polígonos de Reuleaux

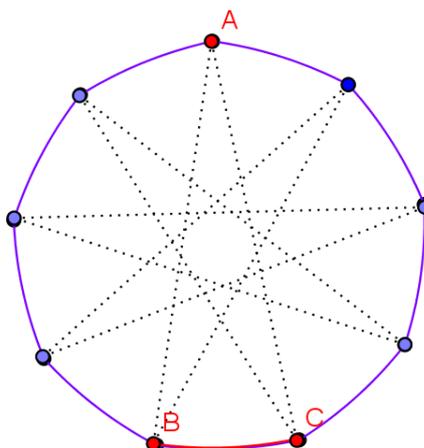


Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Definição 3.1 Polígonos de Reuleaux são figuras formadas a partir de um polígono convexo, construindo arcos circulares de raio r e centro nos vértices opostos ao lado do polígono.

Consequentemente podemos afirmar que os polígonos de Reuleaux derivam de polígonos que tem número ímpar de lados. Este fato foi provado por Yaglom e Boltyanskii (1910) e André (2018) ideia seria a seguinte: seja α uma curva convexa qualquer de largura constante, sendo A um ponto da curva e BC o arco oposto a esse ponto figura 18.

Figura 64 – Eneágono Curvilíneo de Largura Constante



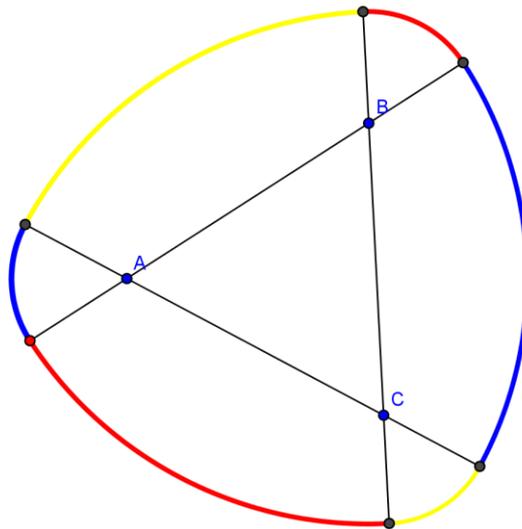
Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Ao percorrer a curva partindo de A no sentido anti-horário, passaremos por um arco (lado) depois por um canto da curva e isso se alterna até chegar ao arco BC oposto ao ponto A , ao final do trajeto teríamos n lados e cantos percorridos (sem contar com o ponto e o arco BC). Fazendo o mesmo procedimento no sentido horário, também teríamos passado por n lados e cantos ao final da trajetória. Ao somarmos o número de arcos percorridos mais BC obtemos um total de $2n + 1$ lados. De maneira análoga fazemos o cálculo para o número de cantos, obtendo o número anterior $2n + 1$ cantos.

Também podemos obter curvas de largura constante a partir de um polígono irregular. Como exemplo pegamos um triângulo ABC qualquer e aplicamos o que Martin Gardner chamou de método das linhas cruzadas, que seria o aglomerado de retas no plano sem que haja um par de linhas paralelas, estando em ordem cíclica por suas inclinações e traçando arcos de círculo centrados no encontro de duas linhas consecutivas na ordem estabelecida, determinam uma curva convexa de largura constante. Adaptando o método ao triângulo mencionado ABC (figura 19), prolongamos os lados do triângulo em ambos os sentidos, a partir dos vértices de ABC traçar arcos que conectam duas a duas as retas geradas com prolongamento dos lados dos triângulos. Tomamos A como ângulo de menor medida do triângulo não necessariamente único, como resultado a seria o lado de menor medida. Traçamos o primeiro arco centrado em A e com raio r_A entre os prolongamentos de BA e CA nesse sentido. Agora com centro em B desenhamos outro arco de raio $R_B = c + r_A$ entre os

prolongamentos de BA e BC nesse sentido. A intersecção do último arco produzido com o prolongamento de BC determina o raio r_C . Damos sequência repetindo os passos anteriores, que resumidamente seria traçar um arco centrado em C de raio r_C em seguida arcos centrados em A , B e C com os respectivos raios $R_A = b + r_C$; r_B e $R_C = a + r_B$.

Figura 65 - Curva de Largura constante a partir do triângulo ABC



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Analisando a figura chegamos a conclusão que os raios podem ser representados de maneira diferente ao que fizemos anteriormente $R_A = c + r_B$; $R_B = a + r_C$ e $R_C = b + r_A$. Manipulando as equações de forma adequada chegamos ao seguinte resultado:

$$r_C = c + r_A - a \geq r_A ;$$

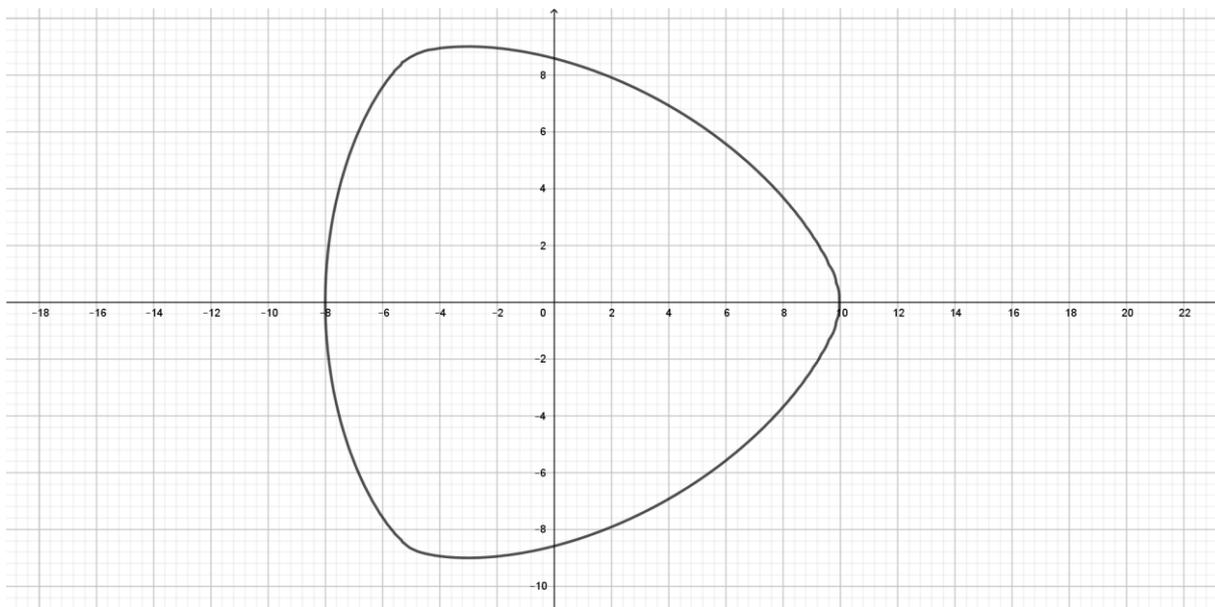
$$r_B = b + r_C - c = b + c + r_A - a - c = b + r_A - a \geq r_A$$

Logo todos os raios são positivos e podem ser escritos em termos de r_A , o que garante que a curva é fechada.

Para concluir o que diz respeito a construção de curvas de largura constante, também podemos desenhá-la a partir de um polinômio de grau 8.

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2)^4 - 45(x^2 + y^2)^3 - 41283(x^2 + y^2)^2 + 7950960(x^2 + y^2) + 16(x^2 - 3y^2)^3 \\ & + 48(x^2 + y^2)(x^2 - 3y^2)^2 + (x^2 - 3y^2)x[16(x^2 + y^2)^2 - 5544(x^2 + y^2) + 266382] \\ & = 720^3 \end{aligned}$$

Figura 2066 - Curva de Largura constante a partir de um polinômio



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

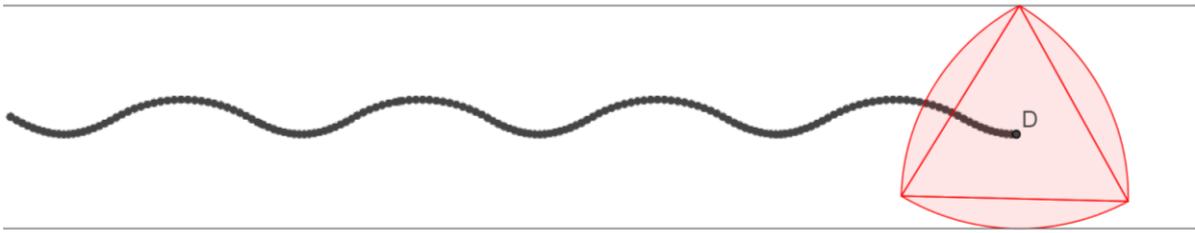
Percebemos então que há uma infinidade de construções para as figuras de largura de constante.

3.3 Propriedades do triângulo de reuleaux

O triângulo de Reuleaux tem algumas propriedades que merecem destaque, que serão abordadas ao longo do trabalho como é o caso dele ser a curva convexa de largura constante que tem área mínima, fato abordado no tópico 2.5. Aqui daremos ênfase algumas particularidades do triângulo de Reuleaux, que podem servir também como ferramentas para demonstrações de teoremas.

Ao fazer um comparativo entre o círculo e o triângulo de Reuleaux, afirmamos anteriormente que uma das semelhanças entre eles, é que são curvas de largura constante, ou seja, podemos imaginar que o triângulo de Reuleaux poderia executar o papel do círculo em algumas situações do cotidiano, principalmente em relação ao uso deles na construção de rodas para veículos. Mas isso não acontece de fato. Ao analisarmos o comportamento do centro do círculo e do triângulo de Reuleaux ao rolarmos as figuras entre duas linhas paralelas, temos uma diferença no rastro deixado por ambas, essa diferença se dá pelo fato do triângulo de Reuleaux não ter centro fixo.

Figura 671 – Percurso do centro do triângulo de Reuleaux



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Desse modo caso tivéssemos um veículo com rodas formadas pelo triângulo de Reuleaux, para que a trajetória dele não fosse descrita conforme a figura o piso não poderia ser reto.

Teorema 3.1 Dois diâmetros quaisquer de uma curva convexa de largura constante se interceptam no interior da curva ou em sua extremidade. Caso aconteça a segunda opção o ponto A onde acontece o cruzamento é um ponto de canto da curva. O ângulo externo em A não é menor do que o ângulo entre os dois diâmetros.

Prova: Seja \overline{AD} e \overline{BC} diâmetros de uma curva convexa de largura constante h , suponhamos que as retas que passam por esses diâmetros são paralelas ou se cruzam em um ponto exterior a curva figura 22. Dessa forma ABCD determina um quadrilátero, logo um de seus ângulos mede pelo menos 90° já que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é maior que 360° . Vamos supor que $\widehat{ADC} \geq 90^\circ$, então $\overline{AC} > \overline{AD} = h$, isso contraria o fato de que a curva é de largura constante. Se os diâmetros \overline{AB} e \overline{AC} são diâmetros da curva e se interceptam no ponto A figura 23, então as retas l_1 e l_2 que tangenciam a curva em A são retas suportes e perpendiculares aos segmentos \overline{AB} e \overline{AC} respectivamente. Podemos concluir que A é um ponto de canto da curva, já que por esse ponto passam mais de uma reta suporte. Se $\widehat{BAC} = \alpha$, então o ângulo formado por l_1 e l_2 também mede α . Portanto o ângulo exterior em A, é maior ou igual a α .

Figura 682 – Interseção de duas retas que passam pelo diâmetro de uma curva convexa

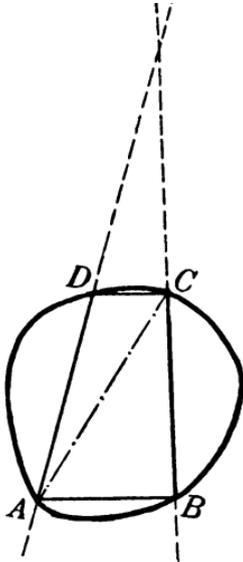
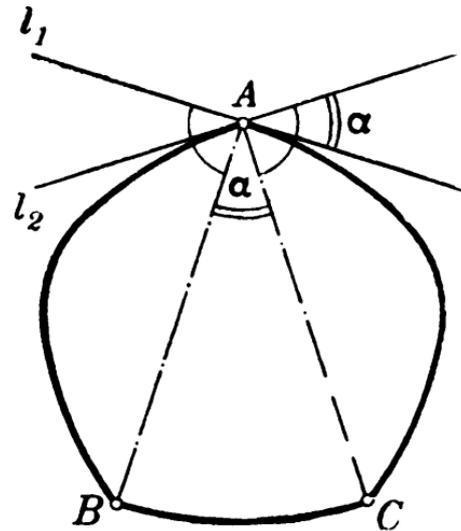


Figura 693- Interseção dos diâmetros de uma curva no ponto A



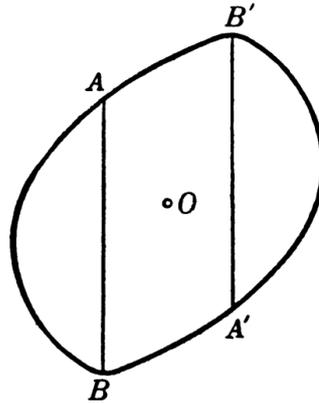
Fonte: Yaglom e Boltyanskii, 1961, p.245.

Teorema 3.2 O círculo é a única curva convexa de largura constante com centro de simetria.

Prova: Uma curva de largura constante β , tem centro de simetria no ponto O . Suponha existir um segmento AB que representa o diâmetro da curva que não passa pelo ponto O então existe um segmento $A'B'$ simétrico a AB , ou seja, ambos segmentos paralelos figura 24 fato que contraria o teorema 3.1. Logo todos os diâmetros da curva passam pelo ponto de simetria O , dividindo os segmentos ao meio.

Assim, temos que β é um círculo de raio $\frac{AB}{2}$ e centro O .

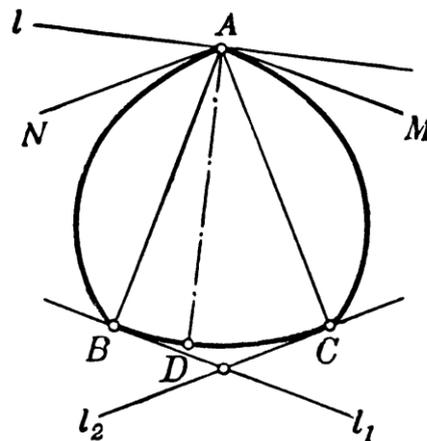
Figura 704 – Ilustração do Teorema 3.2



Fonte: Yaglom e Boltyanskii, (1961, p.246).

Teorema 3.3 Seja δ o ângulo interno formado no canto A de uma curva convexa de largura constante h , temos então que $\delta \geq 120^\circ$. A única curva convexa de largura constante que tem ângulo interno de 120° em um canto é o triângulo de Reuleaux.

Figura 715 - Ilustração da prova do Teorema 3.3



Fonte: Yaglom e Boltyanskii, (1961, p.246).

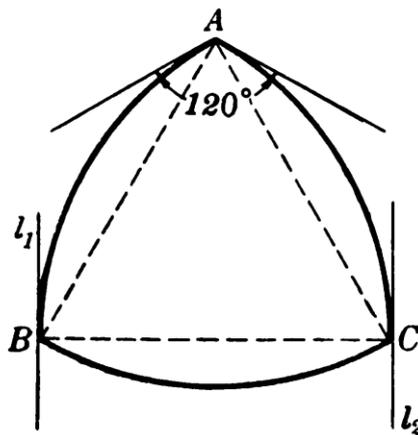
Prova: Seja A um ponto de vértice da curva convexa β de largura constante h , e seja \overline{AM} e \overline{AN} segmentos de comprimento h tangentes a β em A . Traçamos \overline{AB} e \overline{AC} ambos de comprimento h e perpendiculares AM e AN respectivamente. Agora seja D um ponto do arco BC , por A traçamos uma reta r tangente a curva β e perpendicular a AD , paralela a r podemos traçar uma reta que passa por D , ambas são retas suportes de β . Temos que AD é um diâmetro da curva e conseqüentemente mede h .

Se o ângulo externo no ponto de canto A for γ então a medida do arco BC corresponde ao ângulo central γ .

Caso o ângulo interno do ponto de canto A seja menor que 120° então o ângulo externo γ seria maior do que 60° isso corresponderia a medida do arco BC . Então o comprimento do arco BC é maior do que h , o que contraria o fato da curva ser de largura constante, já que a distância entre os pares de retas suportes que passam respectivamente pelos pontos B e C seria maior que h .

Agora suponhamos que o ângulo no canto A da curva β seja igual 120° então $\gamma = 60^\circ$. Concluimos também que $BC = h$, pois representa a distância entre duas retas suporte l_1 e l_2 , portanto o triângulo ABC é um triângulo equilátero.

Figura 726 - Ilustração do Teorema 3.3



Fonte: Yaglom e Boltyanskii, (1961, p.24).

O ponto B representa o encontro dos segmentos AB e BC então B também é um ponto de canto da curva β , a mesma designação pode ser dada ao ponto C (figura 25). Assim sendo temos arcos AB e AC ambos de raio h o que caracteriza a construção do triângulo de Reuleaux.

3.4 Teorema de barbier

As inúmeras curvas convexas de largura constante, gozam de propriedades em comum uma delas é

Teorema 3.6 (Barbier) Todas as curvas de largura constante h têm comprimento πh .

Antes de apresentarmos a prova do teorema, precisamos estabelecer alguns resultados que servem de base para a resolução.

Seja α uma curva contínua e convexa de largura constante h .

Lema 3.1 Se duas retas paralelas intersectam α , então a distância entre elas não é maior que h .

Pelo que foi exposto anteriormente sobre a largura constante de um curva a prova é trivial.

Lema 3.2 Se A e B são pontos de α , então $\overline{AB} \leq h$.

Prova: Tracemos por A e B duas retas suportes r_1 e r_2 respectivamente, perpendiculares ao segmento \overline{AB} . Portanto \overline{AB} é a distância entre r_1 e r_2 , pelo Lema 1 temos que $\overline{AB} \leq h$.

Lema 3.3 Se duas retas suportes e paralelas r_1 e r_2 intersectam α nos pontos A e B respectivamente. Então \overline{AB} é perpendicular a r_1 e r_2 .

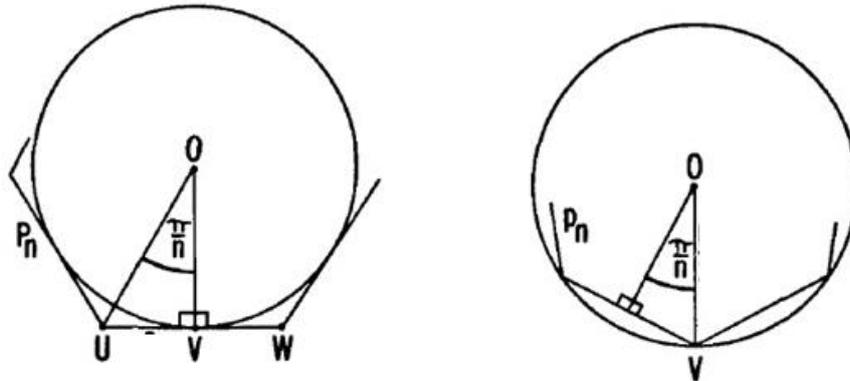
Prova: Pelo Lema 2 temos que $\overline{AB} \leq h$. Por definição sabemos que as retas suportes paralelas r_1 e r_2 tem distância h . Como A e B são pontos de r_1 e r_2 , temos que a distância entre elas pode ser $\overline{AB} \geq h$. Portanto $\overline{AB} = h$, logo \overline{AB} é perpendicular a r_1 e r_2 .

Lema 3.4 Duas retas suporte e paralelas r_1 e r_2 interceptam α em apenas um ponto.

Prova: Suponhamos que r_1 toca α em dois pontos A e C . Sendo B o ponto em comum entre r_2 e α pelo Lema 3.3 temos que \overline{AB} e \overline{BC} é perpendicular a r_1 e r_2 . Assim temos duas perpendiculares que saem de B para r_1 , absurdo. Portanto α tem um único ponto em comum com cada uma das retas r_1 e r_2 .

Podemos dá início a prova do teorema de Barbier. Aqui vamos comparar o comprimento de uma curva convexa e contínua α de largura constante h , com uma circunferência β de diâmetro h . Começamos por circunscrever um círculo de diâmetro h com um polígono regular de n lados, P_n (figura 27).

Figura 737 – Ilustração da prova do Teorema de Barbier



Fonte: Honsberger, 1970

De acordo com a figura podemos observar que $U\hat{O}W = \frac{2\pi}{n}$, logo $U\hat{O}V = \frac{\pi}{n}$, $\overline{OV} = \frac{h}{2}$. Sendo m a medida do lado de P_n , temos $\overline{UV} = \frac{m}{2}$. Fazendo uso da trigonometria obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\frac{m}{2}}{\frac{h}{2}} = \tan \frac{\pi}{n}, \text{ logo } m = h \cdot \tan \frac{\pi}{n}.$$

Podemos utilizar esse resultado para definir o perímetro de P_n , diante do exposto e sabendo que o perímetro de P_n é n vezes a medida m .

$$P_n = n \cdot h \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

O ponto médio de cada lado do polígono regular é um ponto de contato com o círculo, temos n pontos médios. Podemos então tomar esses n pontos como vértices de um polígono regular p_n inscrito no círculo. Analisando a figura e seguindo o raciocínio utilizado anteriormente para o polígono circunscrito. Identificamos o perímetro de p_n como

$$p_n = n \cdot h \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

Assim temos que, $p_n < \text{comprimento de } \alpha < P_n$, ou seja,

Os pontos B_i e B_{i+n} pertencem a intersecção de α com um dos seus pares de retas suportes pelo Lema 3 o segmento $B_i B_{i+n}$ é perpendicular a esse par de retas tangentes a α . Do mesmo modo com o segmento produzido a partir dos pontos B_{i+1} e B_{i+1+n} , sendo este perpendicular a outros de par de retas suporte a α . O ponto C_i está na intersecção destes dos segmentos $B_i B_{i+n}$ e $B_{i+1} B_{i+1+n}$, prolongando o último segmento ele intercepta as retas suportes $A_i A_{i+n}$ e $A_{i+1} A_{i+1+n}$ nos pontos D e D'. Os triângulos $\Delta B_i C_i D$ e $\Delta B_{i+1} A_{i+1} D$ são retângulos, logo são semelhantes pelo caso AA. Assim temos que $\angle B_{i+1} A_{i+1} D$ tem a mesma medida de $\angle B_i C_i D$.

Se construirmos um polígono regular P_{2n} , que possui $2n$ lados, circunscrito a uma circunferência β de diâmetro h . É fácil perceber que temos a mesma quantidade n de vértices e lados em P_{2n} . Consequentemente as retas suportes de α e β são paralelas.

Da figura podemos destacar que o segmento $A_{i+1} B_{i+1}$ é menor que $\overline{A_{i+1} D}$ então:

$$\overline{A_{i+1} B_{i+1}} + \overline{A_{i+1} B_i} < \overline{A_{i+1} D} + \overline{A_{i+1} B_i} = \overline{B_i D}$$

O $\Delta B_i C_i D$ é um triângulo retângulo, logo $\overline{B_i D} = \overline{B_i C_i} \cdot \tan \frac{\pi}{n}$. Temos então:

$$(1) \overline{A_{i+1} B_{i+1}} + \overline{A_{i+1} B_i} < \overline{B_i C_i} \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

No $\Delta B_{i+n} C_i D'$, de maneira similar ao que foi feito anteriormente chegamos a seguinte sentença:

$$(2) \overline{A_{i+1+n} B_{i+1+n}} + \overline{A_{i+1+n} B_{i+n}} < \overline{A_{i+1+n} D'} + \overline{A_{i+1+n} B_{i+n}} = \overline{B_{i+n} D'} = \overline{B_{i+n} C_i} \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

De (1) e (2) concluímos que

$$\overline{A_{i+1} B_{i+1}} + \overline{A_{i+1} B_i} + \overline{A_{i+1+n} B_{i+1+n}} + \overline{A_{i+1+n} B_{i+n}} < (\overline{B_i C_i} + \overline{B_{i+n} C_i}) \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

$$\overline{A_{i+1} B_{i+1}} + \overline{A_{i+1} B_i} + \overline{A_{i+1+n} B_{i+1+n}} + \overline{A_{i+1+n} B_{i+n}} < \overline{B_i B_{i+n}} \cdot \tan \frac{\pi}{n} = l \cdot \tan \frac{\pi}{n}$$

Como temos n pares de segmentos que constituem o polígono Q_{2n} , logo perímetro de $Q_{2n} < n \cdot l \cdot \tan \frac{\pi}{n} =$ perímetro de P_n .

Para provar que o perímetro de $q_{2n} >$ perímetro de p_{2n} vamos traçar $\overline{B_{i+1} F}$ e $\overline{B_{i+1+n} G}$ que são duas perpendiculares ao segmento $\overline{B_i B_{i+n}}$. Concluímos então

$$(3) \overline{B_i B_{i+1}} > \overline{B_{i+1} F} = \overline{B_{i+1} C_i} \cdot \sen \frac{\pi}{n};$$

$$(4) \overline{B_{i+n} B_{i+1+n}} > \overline{B_{i+1+n} G} = \overline{B_{i+1+n} C_i} \cdot \sen \frac{\pi}{n};$$

Somando (3) e (4) obtemos:

$$\overline{B_i B_{i+1}} + \overline{B_{i+n} B_{i+1+n}} > (\overline{B_{i+1} C_i} + \overline{B_{i+1+n} C_i}) \cdot \sen \frac{\pi}{n} = l \cdot \sen \frac{\pi}{n}$$

Sabendo que o polígono q_{2n} tem n então (perímetro de q_{2n}) $> n \cdot l \cdot \text{sen} \frac{\pi}{n} =$ (perímetro de p_{2n}), provando que os perímetros dos polígonos P_{2n} , p_{2n} , Q_{2n} e q_{2n} obedecem a seguinte desigualdade $p_{2n} < q_{2n} < Q_{2n} < P_{2n}$, validando o Teorema de Barbier.

3.5 Teorema de Lebesgue

A área de uma curva de largura constante é mais uma propriedade que podemos destacar. Em diferentes etapas do Ensino Básico estudamos que a área A_O do círculo O de diâmetro h é $\pi \frac{h^2}{4}$. Também podemos calcular a área de um triângulo de Reuleaux T de largura h , inserindo essa situação problema dentro de atividades de geometria plana ou como proposta de desafio matemático. Da construção feita na figura 15 sabemos que T é originado a partir de três setores de circulares de ângulo central $\frac{\pi}{3}$ radianos, subtraído de duas vezes da área do triângulo equilátero de lado h . Então temos que a área de T equivale:

$$A_T = 3 \times \frac{\pi \cdot h^2}{6} - 2 \times \frac{h^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{h^2}{2} (\pi - \sqrt{3})$$

Assim temos que $A_T < A_O$. Sabemos que existem infinitas curvas de largura constante, Blaschke – Lebesgue afirmam que há uma propriedade que relaciona o triângulo de Reuleaux, o círculo e as demais curvas de largura constante.

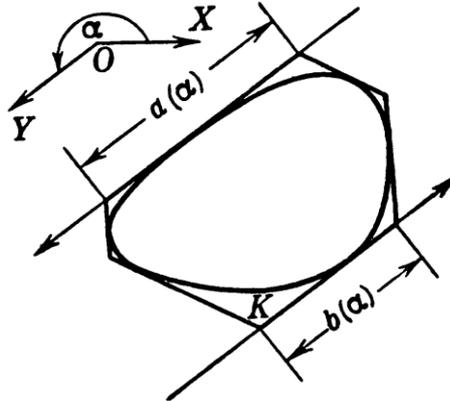
Teorema 3.7 (Blaschke – Lebesgue) Do conjunto das curvas convexas de largura constante o triângulo de Reuleaux é a que tem menor área e o círculo é a que tem maior área.

Para a demonstração do teorema vamos utilizar os seguintes resultados:

Lema 3.5: Um hexágono com os ângulos com mesma medida e dois lados opostos iguais podem circunscrever uma curva convexa.

Prova: Um único hexágono de ângulos todos iguais poderá circunscrever uma dada curva convexa, sendo que um dos lados do hexágono tem uma direção OY que é referente a α , no caso o maior ângulo formado entre OY e OX .

Figura 759 – Ilustração do Lema 3.5



Fonte: Yaglom e Boltyanskii, (1961, p.144).

O lado do hexágono de direção OY denotamos por $a(\alpha)$ e o lado paralelo a ele chamamos de $b(\alpha)$, supomos que $a(\alpha) \neq b(\alpha)$. Se tomarmos $a(\alpha) > b(\alpha)$, temos que $a(\alpha) - b(\alpha) > 0$. Substituindo α por $\alpha + 180^\circ$ o hexágono não sofre alterações e obtemos o seguinte resultado:

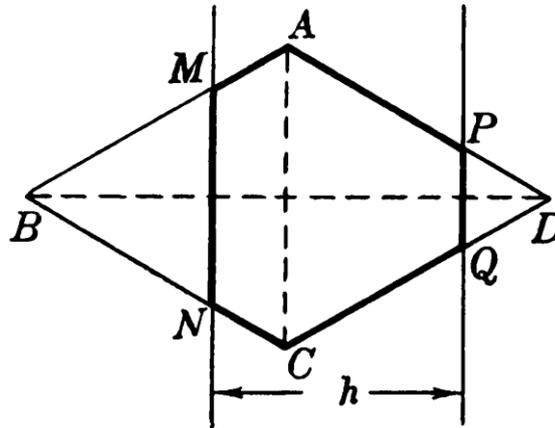
$$a(\alpha + 180^\circ) = b(\alpha) \text{ e } b(\alpha + 180^\circ) = a(\alpha)$$

$$a(\alpha + 180^\circ) - b(\alpha + 180^\circ) = b(\alpha) - a(\alpha) > 0$$

Sabendo que $a(\alpha) - b(\alpha)$ é uma função contínua, então deve existir um ângulo α_0 entre α e $\alpha + 180^\circ$ tal que $a(\alpha_0) - b(\alpha_0) = 0$ desse modo $a(\alpha_0) = b(\alpha_0)$. Concluimos que o hexágono tem dois lados opostos iguais.

Lema 3.6 Seja $ABCD$ um losango e MN e PQ dois segmentos opostos perpendiculares à diagonal BD com uma distância h entre eles. A área do hexágono $AMNCQP$ assume seu valor máximo quando a distância entre MN e PQ é $\frac{h}{2}$ da diagonal AC do losango e atinge seu valor mínimo quando MN passa pelo vértice B (ou PQ passa pelo vértice D) do losango.

Figura 30 – Ilustração do Lema 3.6



Fonte: Yaglom e Boltyanskii, (1961, p.245).

Prova: A área do hexágono $AMNCQP$ equivale a área do losango subtraído das áreas dos triângulos BMN e DPQ , a altura destes triângulos são respectivamente h_1 e h_2 . Suas áreas são proporcionais ao quadrado das suas alturas. Dessa forma a soma das áreas dos triângulos são proporcionais a soma $h_1^2 + h_2^2$. Basta agora determinar a posição dos segmentos MN e PQ para que a soma seja máxima $h_1^2 + h_2^2$.

Seja a a medida diagonal maior do losango, a soma $h_1 + h_2 = a - h$ não depende das posições dos segmentos MN e PQ .

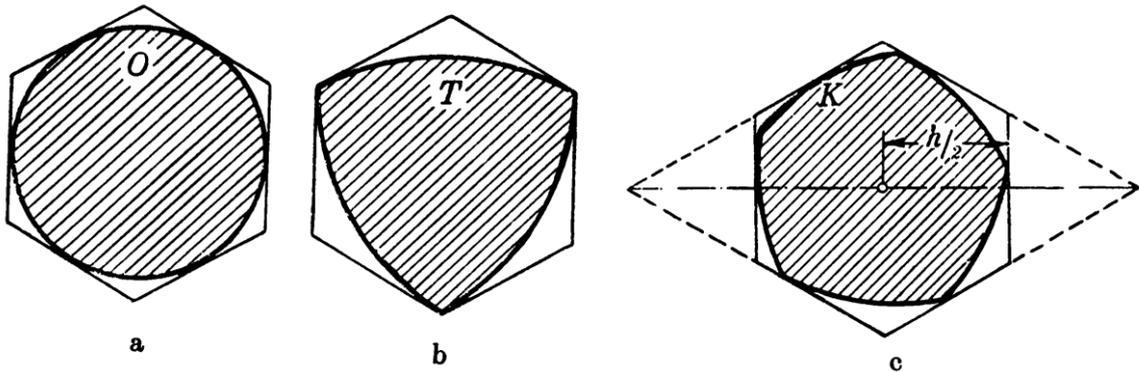
$$h_1^2 + h_2^2 = \frac{1}{2}[(h_1 + h_2)^2 + (h_1 - h_2)^2]$$

$$h_1^2 + h_2^2 = \frac{1}{2}[(a - h)^2 + (h_1 - h_2)^2]$$

A soma $h_1^2 + h_2^2$ assume menor valor quando $h_1 - h_2 = 0$, consequentemente $h_1 = h_2$, isso só acontece quando a posição dos segmentos MN e PQ estão a uma distância $\frac{h}{2}$ do centro do losango. Para $h_1^2 + h_2^2$ assumir valor máximo então $|h_1 - h_2| = a - h$ fato que só acontece se $h_1 = 0$ ou $h_2 = 0$, ou seja, MN ou PQ passam no vértice do losango.

Agora iniciaremos à demonstração do Teorema do Blaschke – Lebesgue. Iniciamos provando que é possível circunscrever com um hexágono regular uma curva convexa K de largura constante h .

Figura 761 – Curvas O , T e K inscritas num hexágono regular

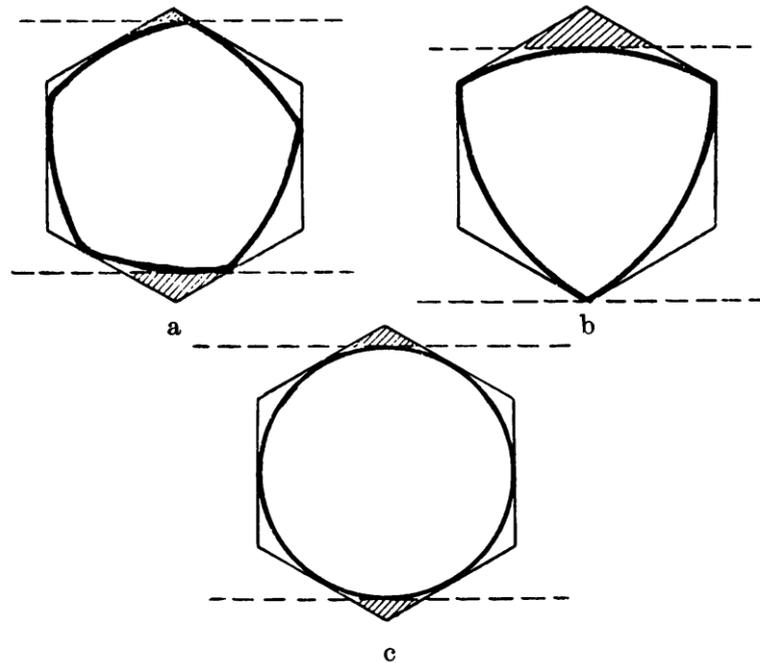


Fonte: Yaglom e Boltyanskii, (1961, p.250).

Partindo do Lema 3.5, sabemos que é possível circunscrever as curvas O , T e K com um hexágono equiangular (figura 30) de largura constante h e que tem um par de lados opostos iguais. Prolongando os demais lados formamos um paralelogramo de altura h com dois ângulos medindo 120° . Temos ainda que os lados opostos são perpendiculares a diagonal maior do paralelogramo e que eles estão a uma distância $\frac{h}{2}$ do centro do paralelogramo, fato decorrente da afirmação, que o par de lados opostos são iguais. Utilizando os casos de congruência triangular, podemos afirmar que o hexágono é regular. Também percebemos que o hexágono regular e o triângulo de Reuleaux T circunscrito tem 3 vértices em comum.

Traçando os pares de retas suportes as curvas O , T e K de dois lados consecutivos do hexágono e seus respectivos lados opostos, cortando esses segmentos conforme a figura 32. Fazendo isso, consecutivamente, até passar por todos os pares de lados do polígono, conseguimos dobrar o número de lados, de 6 lados para 12 e continuando o processo teremos 24, 48, ..., $(3 \cdot 2^n)$ com $n \in \mathbb{N}$.

Figura 772 – Pares de retas suportes das curvas K, T e O



Fonte: Yaglom; Boltyanskii, (1961, p.251).

Partindo do polígono de ângulos congruentes com $3 \cdot 2^n$ lados, que circunscreve O, T e K , denotando por A_T, A_K e A_O a área dos polígonos que circunscrevem respectivamente O, T e K . Provaremos que para cada n temos $A_T \leq A_K \leq A_O$, para isso utilizaremos o cálculo de indução. Para $n = 1$, as áreas dos hexágonos circunscritos a O, T e K são iguais. Agora suponhamos que para os polígonos com $3 \cdot 2^n$ lados é válido $A_T \leq A_K \leq A_O$, então provaremos que o teorema vale para $3 \cdot 2^{n+1}$. Começamos por calcular a área do polígono de $3 \cdot 2^{n+1}$ lados a partir dos polígonos de $3 \cdot 2^n$ lados circunscritos a O, T e K , deles consideramos os losangos que são formados por dois lados adjacentes l_1 e l_2 e os outros dois lados paralelos a eles, l_3 e l_4 , respectivamente. No caso obtemos 3 losangos de altura h e um par de ângulos comuns, já que equivalem ao ângulo do polígono regular e medem $\frac{180^\circ(3 \cdot 2^n - 2)}{3 \cdot 2^n}$, logo os losangos são congruentes. Seguindo o Lema 3.6, em relação a curva O podemos dizer que a área determinada pela intersecção de dois lados paralelos do polígono $3 \cdot 2^{n+1}$ com os lados do losango, é máxima já que as retas paralelas estão a uma mesma distância do centro do círculo. Já em relação ao polígono circunscrito ao triângulo de Reuleaux teríamos área mínima, pois uma das retas paralelas passa pelo vértice do Losango.

Para que a área dos polígonos de lados $3 \cdot 2^{n+1}$ que circunscrevem O e K serem iguais, é necessário que as retas suportes de K sejam simétricas em relação ao centro do losango formado a partir do polígono de $3 \cdot 2^{n+1}$ lados. Conseqüentemente os polígono de $3 \cdot 2^n$ lados circunscritos a K tem um centro de simetria que por sua vez garante que esse seja comum ao hexágono. Pelo Teorema 3.2 a curva K teria um centro de simetria, e portanto, seria um círculo.

Comparando a área dos polígonos de lados $3 \cdot 2^{n+1}$ que circunscrevem O e T , para serem iguais, todos os polígonos circunscritos a O e T anteriores a eles precisam ter a mesma área, ou seja, ao traçar as retas suportes de O e T quando estas estão circunscritas pelo hexágono e extraindo os triângulos gerados pela intersecção da retas com os lados do polígono, os dodecágonos obtidos necessariamente têm a mesma área. Para isso acontecer umas das retas suportes de K precisa passar pelo vértice do hexágono, e isso só é possível se K tiver um vértice em comum com o hexágono regular circunscrito a ele, o que acarretaria um ponto de canto da curva K medir 120° , sendo assim um triângulo de Reuleaux. Então temos que a área do polígono de lados $3 \cdot 2^n$ circunscrito a K seria $A_T \leq A_K \leq A_O$. Assim quando n tende ao infinito T é a curva de menor área e O a de maior área.

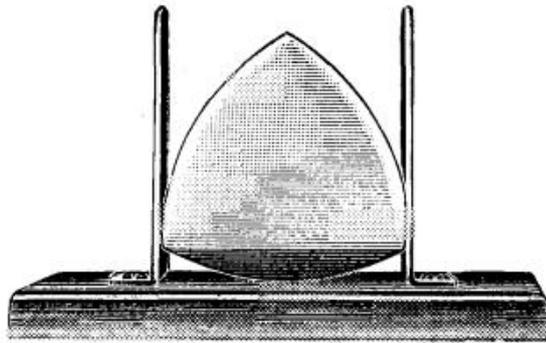
4 POLIEDROS DE REULEAUX E MEISSNER

4.1 Poliedros de reuleaux

Já vimos que no plano existem infinitas curvas convexas de largura constante, fato análogo acontece no espaço tridimensional. A partir dos polígonos de Reuleaux vamos apresentar alguns corpos de largura constante.

Definição 4.1 Um corpo convexo colocado entre dois planos paralelos tangentes a ele é dito de largura constante, se pudermos girá-lo em qualquer direção e o corpo continua tangenciando os planos.

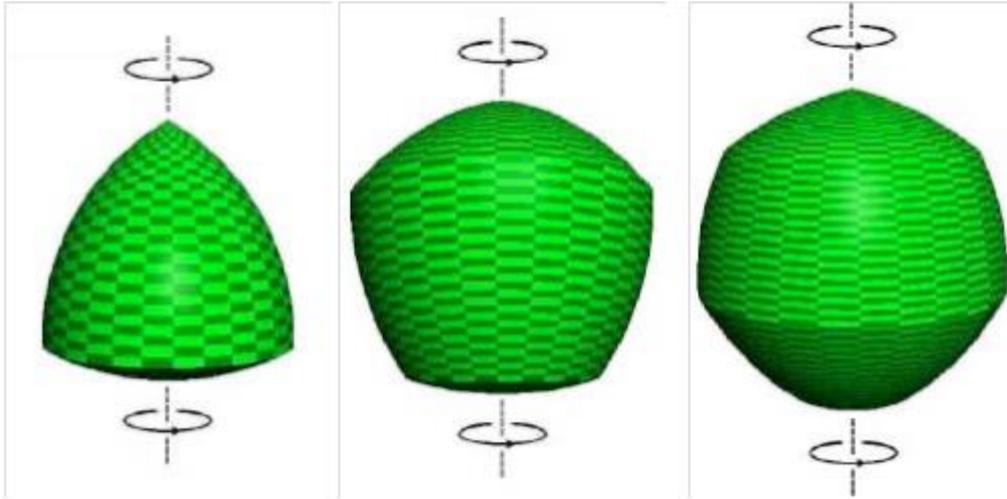
Figura 783 – Triângulo de Reuleaux girado entre dois planos paralelos



Fonte: Kawohl e Weber, (2011).

Tomemos um polígono de Reuleaux, em torno de um dos seus eixos de simetria vamos girar a figura até completar uma volta figura(). Os corpos resultantes dos movimentos dos polígonos são de largura constante. Podemos chamar as figuras espaciais obtidas de sólidos de Reuleaux de revolução.

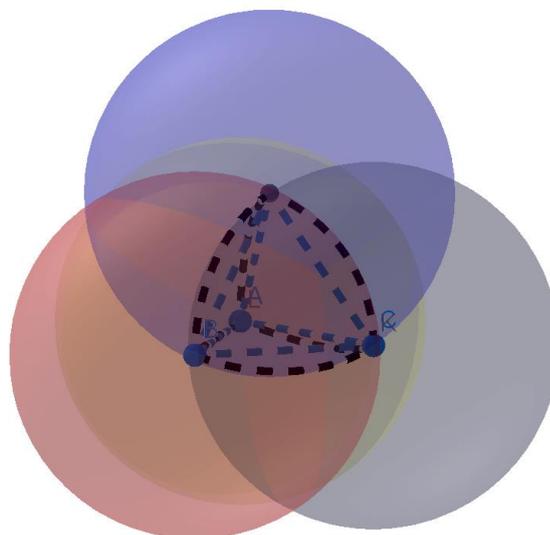
Figura 794 – Sólidos de Reuleaux de Revolução



Fonte: https://www.swisseduc.ch/mathematik/geometrie/gleichdick/docs/meissner_en.pdf

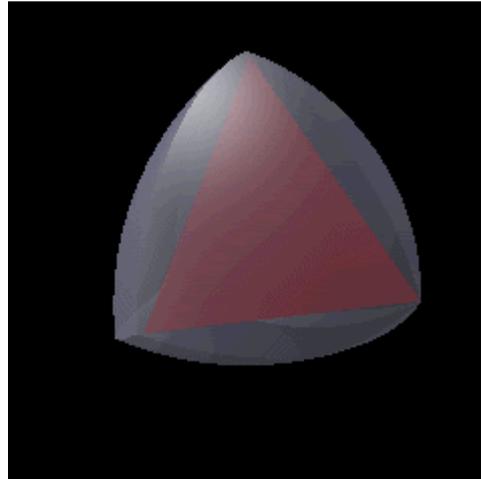
De maneira semelhante ao que é feito para a construção do triângulo de Reuleaux, construiremos o tetraedro de Reuleaux, enquanto no primeiro utilizamos a intersecção de 3 círculos, no segundo precisaremos do encontro de 4 esferas de mesmo raio figura 35. Partindo de um tetraedro regular com aresta medindo R , centrada em cada um de seus vértices construímos esferas de raio R (figura). O resultado é o tetraedro de Reuleaux figura 36 que no caso têm 4 faces curvas formadas por seis arestas de arco circular e 4 vértices.

Figura 805 – Intersecção de esferas formando o Tetraedro de Reuleaux



Fonte: Elaborado pelo autor, (2020).

Figura 816 – Tetraedro de Reuleaux



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/44/ReuleauxTetraedron_Animation.gif

Podemos afirmar que o tetraedro de Reuleaux não é de largura constante já que ao tocar um de seus vértices e o plano oposto a ele teríamos uma distância menor que na situação de os planos tocarem o ponto médio de duas arestas opostas.

A área e volume do tetraedro de Reuleaux formado por esferas de raio r são apresentados por Weisstein, Eric W (2020) onde ele utiliza a fórmula de Gauss-Bonnet para calcular a área, em relação ao volume, também é utilizado um procedimento que se distancia do objetivo do trabalho, a princípio não apresentaremos o desenvolvimento dos cálculos, apenas o resultado final:

Área do Tetraedro de Reuleaux

$$S = r^2 \cdot \left[8\pi - 18 \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] \cong r^2 \cdot 2,975471 \dots$$

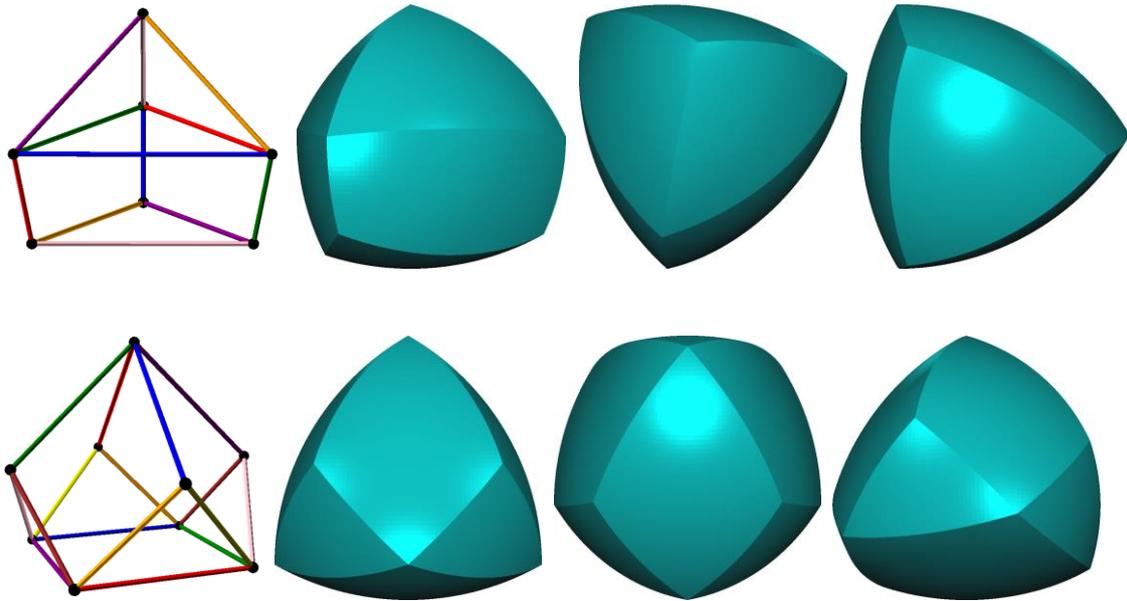
Volume do Tetraedro de Reuleaux

$$V = r^3 \cdot \left[\left(\frac{8}{3} \right) \pi - 27 \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) \sqrt{2} \right] \cong r^3 \cdot 0,42215773 \dots$$

Pensado e Montejano (2016) apresentam uma generalização para a definição do que seria um poliedro de Reuleaux. Destacam também que esses corpos são autoduais, ou seja, para cada vértice do poliedro há sempre uma face oposta a ele.

Definição: Seja K um poliedro, a interseção finita das esferas centradas nos vértices de K determinam um Poliedro de Reuleaux K .

Figura 827 – Poliedros de Reuleaux



Fonte: <https://arxiv.org/pdf/1608.06354.pdf>

Meissner (1911) afirmou não existir outro corpo de largura constante além da esfera formada por peças esféricas. O próprio Meissner demonstrou como modificar o triângulo de Reuleaux para que passasse a ser um corpo de largura constante. Abordaremos este assunto no tópico seguinte.

4.2 Poliedros de meissner

Antes de tratarmos dos poliedros de largura constante, vamos apresentar um pouco da história do matemático Meissner responsável por importantes descobertas nesse campo de estudo.

Figura 838 – Ernst Meissner

Fonte: Kawohl; Weber (2011).

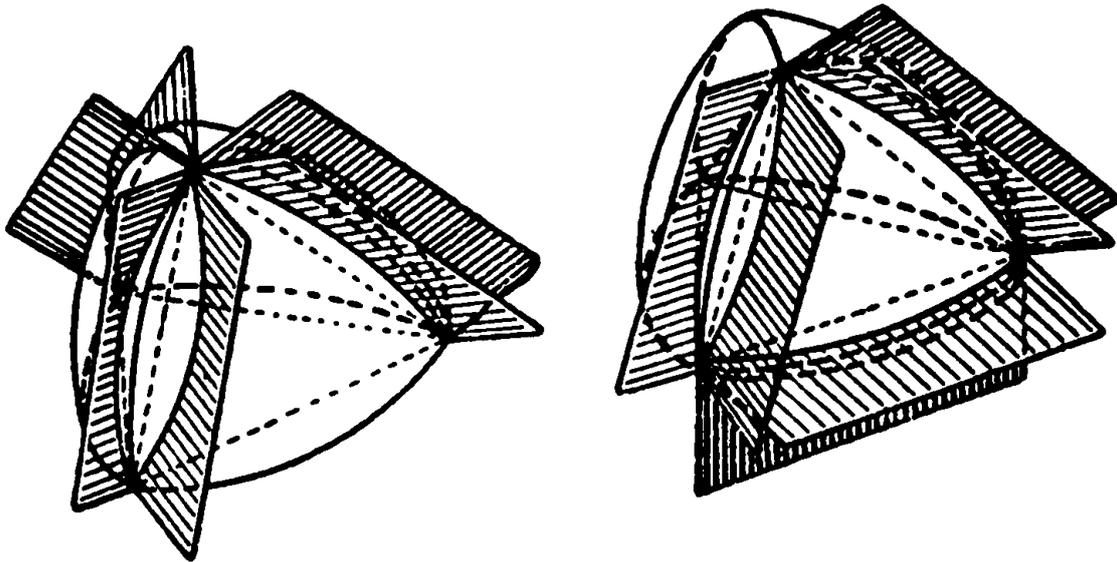
Ernst Meissner nasceu em 01 de setembro de 1883 em Zofingen, Suíça. Filho de empresário, estudou em Kantonsschule Aarau onde teve como professor de matemática Heinrich Ganter, que anteriormente, lecionou para Albert Einstein. Após concluir o que hoje chamamos de Ensino Médio, foi estudar em Zurique na instituição atualmente conhecida como Instituto Federal Suíço de Tecnologia (ETH), ficando de 1902 a 1906, mais tarde retornou para ser professor dessa mesma Universidade. Antes, fez doutorado na Universidade de Zurique, onde apresentou um trabalho sobre a Teoria dos Números, em seguida passou um ano estudando com Herman Minkowski, Felix Klein e David Hilbert. Meissner trabalhou com Matemática Pura (geometria e teoria dos números), Matemática Aplicada e Mecânica Teórica. Ernst Meissner faleceu no dia 17 de março de 1939 em Zollikon.

Foram muitas as contribuições científicas de Meissner, aqui daremos destaque ao trabalho sobre corpos de largura constante. Quando falamos de curvas convexas de largura constante no \mathbb{R}^2 mencionamos o círculo como referência para o conjunto dessas figuras, ou seja, comparamos as propriedades do círculo com as demais curvas. Na dimensão \mathbb{R}^3 prosseguimos com o mesmo raciocínio sendo a esfera o elemento principal do conjunto dos corpos de largura constante, além delas temos os corpos de revolução de Reuleaux figura () e Meissner apontou outros corpos de largura constante como citado no tópico anterior.

Yaglom e Boltyanskii (1961) apresentam os passos utilizados por Meissner para modificar o tetraedro de Reuleaux para que passasse a ser um corpo de largura constante. O procedimento seria prolongar as superfícies laterais de um par de lados

adjacente do tetraedro, para tanto retiramos parte do sólido de Reuleaux que fica entre o prolongamento das superfícies. Precisamos repetir o procedimento outras duas vezes, portanto temos duas maneiras de fazer isso, fazendo esse processo a partir de três arestas que tem origem em um mesmo vértice ou três arestas que compõe a mesma face do tetraedro de Reuleaux (figura39).

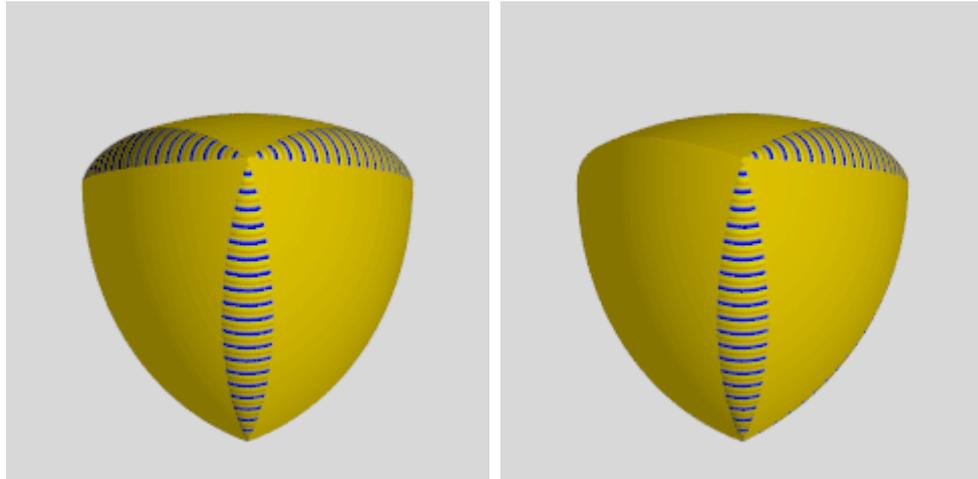
Figura 849 – Modificação do Tetraedro de Reuleaux



Fonte: Yaglom; Boltyanskii, (1961, p.81).

Removida a cunha localizada entre os dois planos, traça-se uma circunferência centrada no ponto médio da aresta oposta a parte removida do tetraedro de Reuleaux e que passa pelos vértices A e B onde foi extraída a cunha. A rotação do arco de círculo determinado pelos vértices A e B dá origem a uma superfície de revolução, que no caso substitui o espaço da peça tirada do corpo. Dando origem ao tetraedro de Meissner conforme a figura 40.

Figura 40 – Tetraedro de Meissner⁸⁵



Fonte: <http://www.xtalgrafix.com/Spheroform.htm>

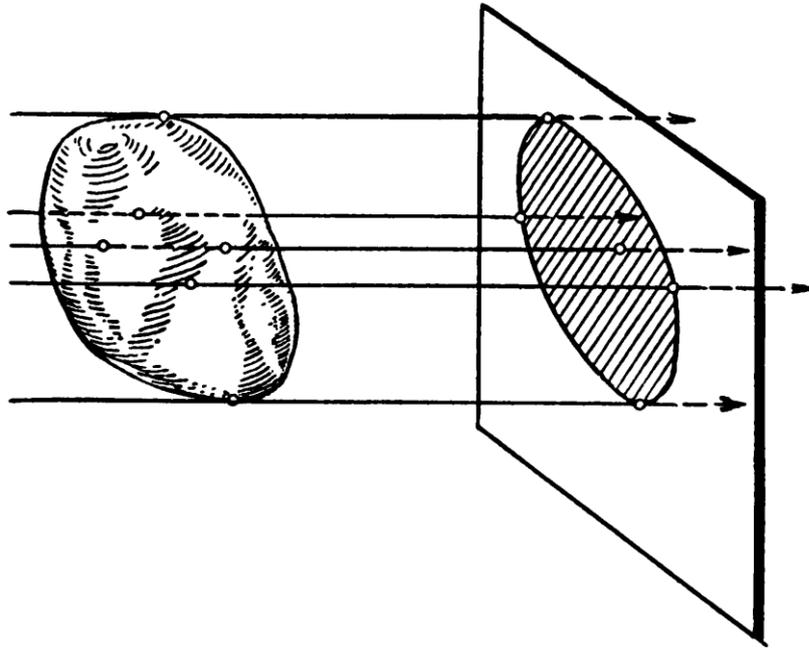
O corpo de Meissner possui 4 arestas, 3 arestas de arcos circulares, 4 faces esféricas e 3 superfícies toroidal. Como suas bordas não são iguais dizemos que os tetraedros de Meissner não têm simetria tetraédrica. Meissner utilizou a série de Fourier para provar que suas figuras espaciais são de largura constante, Patrick Roberts demonstra de maneira mais prática que os tetraedros de Meissner são de largura constante.

Segundo Kawohl e Weber (2011) o volume dos corpos são idênticos, seria aproximadamente $\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cos^{-1} \frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot d^3$, onde d é a largura do corpo. Esse resultado seria 80% do volume de uma esfera de diâmetro 1, em comparação ao poliedro de revolução originado da rotação do triângulo de Reuleaux, seria 6% menor, no caso o sólido citado tem volume igual a $\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \pi \cdot d^3$, onde d é a largura do corpo.

No teorema de Blascke temos o fato do triângulo de Reuleaux ser a figura convexa plana de largura constante que apresenta a menor área. Devido a isso, e muitos outros fatores, se conjectura, que no conjunto dos corpos convexos tridimensionais de largura constante, os que apresentariam menor volume seriam os corpos de Meissner, mas isso é algo que não foi provado. Já em relação aos corpos de revolução de largura constante foi demonstrado por Campi, Colesanti e Gronchi [1] que o corpo gerado pela rotação do triângulo de Reuleaux, por um de seus eixos de simetria, é o que tem menor volume dentre todas as figuras tridimensionais do conjunto dos corpos de Revolução.

Outra propriedade dos corpos de largura constante h é que sua projeção em um plano paralelo é uma figura de largura constante h , do teorema de Barbier podemos concluir que todas as projeções de corpos com largura constante h tem perímetro πh .

Figura 41 – Projeção de um corpo de largura constante em um plano paralelo

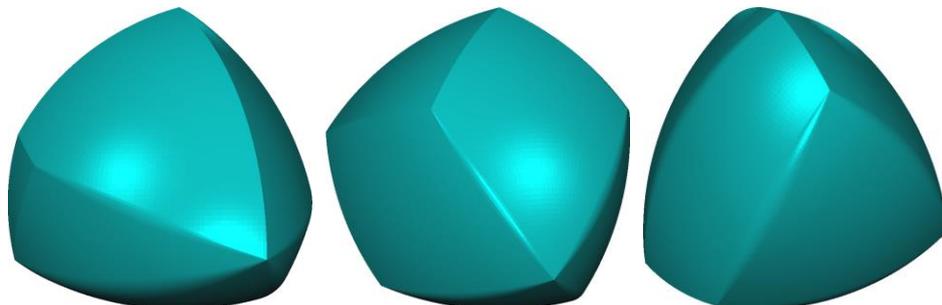


Fonte: Yaglom e Boltyanskii, 1961, p.82.

Assim como fizeram para os poliedros de Reuleaux Pensado e Montejano (2016) apresentam uma generalização para a definição do que seria um poliedro de Meissner.

Definição: Qualquer corpo de largura constante obtido a partir da modificação das arestas de um poliedro de Reuleaux K é denominado poliedro de Meissner.

Figura 42 – Poliedro de Meissner



Fonte: <https://arxiv.org/pdf/1608.06354.pdf>

5 APLICAÇÕES

Neste capítulo trataremos das curvas de largura constante no cotidiano e dos sólidos de Reuleaux e Meissner, onde encontramos essas formas e quais suas aplicações ao longo do tempo.

5.1 Formas de largura constante e suas aplicações

É fácil encontrar no cotidiano as curvas de largura constante, já que há uma infinidade de aplicações dessas formas, grande parte delas relativas ao círculo, mas podemos encontrar outras curvas nos polígonos de Reuleaux em diferentes aplicações de uso. Um primeiro exemplo seria as moedas britânicas de 20p e 50p.

Figura 863 - moedas britânicas de 20p e 50p



Fonte: <https://www.solinguainglesa.com.br/conteudo/figuras/substantivos/mathematics/50p.jpg>

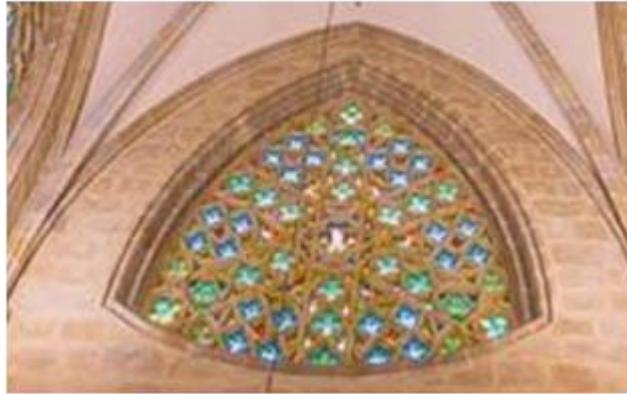
Também encontramos os polígonos de Reuleaux na engenharia de prédios e casas, nos exemplos abaixo deparamo-nos ao o uso do triângulo de Reuleaux

Figura 874 – Casa Golferichs



Fonte: <https://i.pinimg.com/originals/ed/57/c8/ed57c821655e8f99ef9618c21ba022c7.jpg>

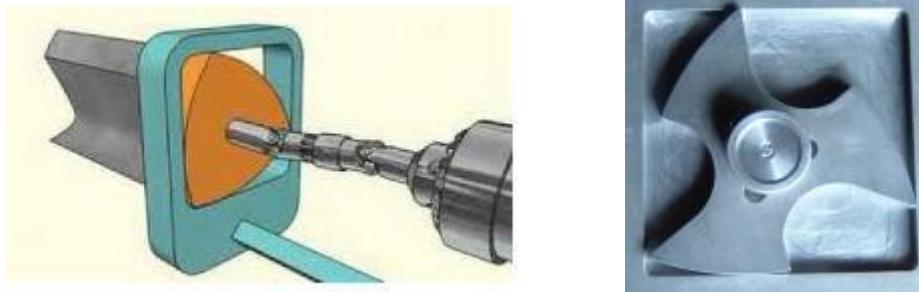
Figura 885 – Catedral de Bilbao



Fonte: <https://catedralbilbao.com/wp-content/uploads/DSC7517-HDR.jpg>

Outro uso das curvas de largura constante é como broca para fazer furos quadrados. Essa aplicação foi proposta por Harry James Watts em 1914. Para tanto, se utiliza de um rotor de Reuleaux, onde é removidas três partes para confecção da lâmina o que auxilia também na saída do material removido. O quadrado produzido não é perfeito, é visível que os cantos são constituídos de arcos.

Figura 896 – Broca para fazer furos quadrados



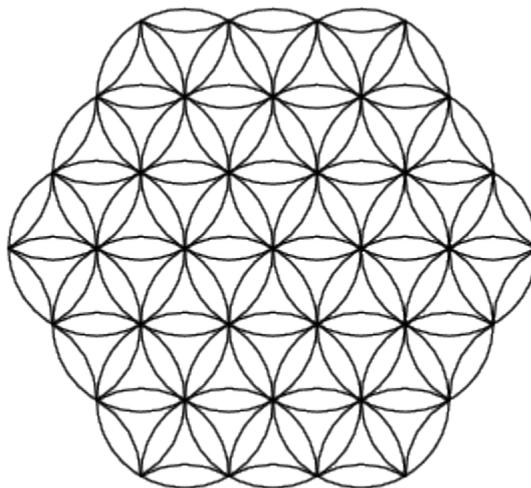
Fonte: <https://cdnb.20m.es/mati-una-profesora-muy-particular/files/2012/06/squaredrill11-150x150.jpg>

A aplicação de rotores de Reuleaux também foi utilizada na produção de motores para automóveis. O Idealizador desse tipo de motor foi Felix Wankel, a grande vantagem desse tipo de motor é que ele é mais silencioso, se comparado com os motores que se utilizam de pistão.

Figura 907 - Motor de Wankel

Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/ba/Wankel-1.jpg/220px-Wankel-1.jpg>

Existe uma série de outros objetos que em seu design carregam a forma do polígono de Reuleaux, dentre eles lápis e palheta utilizadas por músicos para tocar violão. Para fechar, falaremos de sua aplicação no campo da arte. Um exemplo deste tipo de aplicação é uma intersecção de vários círculos, que conseqüentemente, descrevem vários triângulos de Reuleaux. Essa imagem pode ser encontrada no Templo de Osíris em Abydos, Egito.

Figura 918 - Flor da Vida

Fonte: https://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/FlowerofLife_800.gif

Ainda no campo da arte, Man Ray se inspirou no tetraedro de Meissner, e pintou o que ele chamou de peças de Shakespeare, já que as imagens remetiam à partes do corpo de personagens das obras do autor.

Figura 929 - Hamlet 1949



Fonte: <https://d32dm0rphc51dk.cloudfront.net/zWBcVmwMgga0JfSnO2PztA/large.jpg>

Percebemos que o estudo sobre curvas de largura constante dentro de um universo mais vasto de formas, não se restringe apenas aos círculos, estas nos possibilitam viajar por diversos campos de estudos, atrelados direta ou indiretamente, ao conhecimento Matemático.

5.2 Possibilidades de aplicação em sala de aula

Um dos desafios do educador matemático é promover nos alunos o protagonismo da aprendizagem, para isso, é necessário dar aos estudantes, ferramentas que façam com que ele passe para o campo de ação da investigação, que se sinta desafiado, e possa enxergar a matemática como ciência, mas também como algo aplicável, que pode ser manipulado a seu favor, na resolução de situações problema, como afirma (LIMA,)

As investigações constituem para muito de nossos alunos de nossas escolas, a parte (mais atraente ou menos cansativa) da Matemática que estudam. Se forem formulados adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe.

A busca do professor por novas possibilidades dentro do ensino da matemática lhe permite navegar, não só pela aplicação desta ciência, mas por outras áreas como a história, a cultura, a tecnologia e tantas outras. Nesta seção apresentaremos um pouco das potencialidades do campo de estudo abordado no trabalho para a sala de aula.

Diante do exposto, nas seções anteriores percebemos que para turmas do Ensino Básico é possível trabalhar o tema polígonos de Reuleaux e poliedros de Meissner, já que estes proporcionam uma abertura para adentrar em conteúdos matemáticos que fogem do currículo, muitas vezes engessado ou pautado, exclusivamente, ao que está no livro didático. Além disso, possibilita também trabalhar em diferentes campos de aplicação matemática. Como foi mostrado, podemos trabalhar desde construções geométricas com ou sem uso de tecnologia, como também podemos discutir o uso das formas na engenharia e na arte. A Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BNCC) apresenta competências e habilidades que vão de encontro com a proposta de trabalhar as curvas convexas de largura constante no Ensino Básico.

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, p. 540).

Para contemplar o que está na BNCC, se faz necessário que as aulas de Matemática tenham uma abordagem que leve em consideração o uso das tecnologias digitais, já que essa ferramenta faz parte do cotidiano de boa parte dos educandos, o que conseqüentemente, traz uma maior interatividade. Os recursos tecnológicos como internet e softwares educacionais utilizados de maneira planejada, abrem uma série de possibilidades metodológicas, podendo favorecer nas relações entre professor - aluno e os demais sujeitos do processo de ensino- aprendizagem.

Dentro do ensino de Matemática temos diversas ferramentas tecnológicas que podem auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Para o ensino da

geometria, o aplicativo que tem uma série de funcionalidades e ferramentas, que auxiliam no ensino da área é o Geogebra. O aplicativo sendo direcionado de maneira adequada, possibilita a visualização de conceitos matemáticos e a construção geométrica, e permite que o educando possa exercitar sua criatividade através da experimentação.

Para a aplicação da temática do trabalho, em sala de aula, o ideal é mesclar as construções geométricas e os conceitos e cálculos matemáticos. A princípio, seria importante sua abordagem após o estudo sobre círculo, porque o aluno, com os conceitos dessa curva, se sentiria mais seguro e até mesmo desafiado a discutir sobre outras figuras que têm propriedades similares ao círculo.

O aluno de posse do conhecimento citado, seu primeiro desafio seria construir no geogebra, se já tiver familiaridade, uma curva convexa fechada que tenha a característica do círculo de poder girar entre duas retas paralelas, também é possível lançar o desafio para que ele construa no caderno ou quadro. Essa ação possibilita discussões do tipo “as rodas dos automóveis poderiam ter outro formato?” Após esse primeiro desafio, ainda seria possível lançar um outro, agora comparando poliedros de Meissner e os sólidos de revolução de largura constante.

Em seguida aos desafios iniciais seria relevante apresentar aos alunos as aplicações demonstradas no tópico anterior. Assim estes poderiam visualizar as diferentes formas e sua aplicação. Posterior a isso, poderia ser apresentado como construir no geogebra o triângulo e o tetraedro de Reuleaux, lembrando que, seria possível construir a primeira figura com régua e compasso. A continuidade dessas construções seria desenhar outras formas de largura constante, podendo até discutir se seria possível construir figuras de largura constante a partir de polígonos que tenham uma quantidade par de vértices.

A seguir algumas questões para serem resolvidas, e em grupo em seguida debater sobre os resultados, apresentando cálculos e conclusões:

1- Calcule e compare as áreas de um triângulo de Reuleaux construído a partir de um triângulo equilátero de lado 1, um pentágono de Reuleaux de largura 1 e de um círculo de diâmetro 1.

Comentário: A questão tem por objetivo incentivar o educando a perceber que dentre as curvas de largura constante apresentadas o triângulo de Reuleaux tem a menor área e o círculo a maior.

2- Calcule e compare os perímetros de um triângulo de Reuleaux construído a partir de um triângulo equilátero de lado 1, um pentágono de Reuleaux de largura 1 e de um círculo de diâmetro 1.

Comentário: A questão tem por objetivo incentivar o educando a perceber que dentre as curvas de largura constante apresentadas o triângulo de Reuleaux tem a menor área e o círculo a maior.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho trouxe diferentes contribuições para o ensino de curvas de largura constante, que podem ser utilizadas em diferentes etapas do Ensino Básico. A pesquisa também proporcionou algumas reflexões sobre o ensino da Matemática, mais especificamente, o trabalho em sala de aula com a Geometria.

Com as ferramentas e construções propostas no trabalho, promovemos o caráter desafiador da disciplina de Matemática, além de potencializar um processo de ensino, em que aluno, pode fazer conjecturas, buscar contraexemplos que possam reafirmar conceitos e procedimentos matemáticos. Utilizamos o software geogebra, que é aplicado em diversas aulas preparatórias para Olimpíadas de Matemática, a BNCC também traz na reformulação do novo currículo a indicação de uso de ferramentas digitais que facilitem o aprendizado.

O estudo dos polígonos de Reuleaux e as propostas de aplicação podem ser adaptadas para os anos do ensino fundamental, como sugere Melo (2013), além disso, também apresenta propostas de atividade sobre generalização do π , que se enquadram na perspectiva de estudo proposta no capítulo 3 da pesquisa. Há uma série de outros assuntos que podem ser abordados no ensino básico que não estão explicitamente no currículo escolar, mas são correlatos aos assuntos já existentes dentro dos programas de ensino.

A pesquisa igualmente trouxe a dimensão da Matemática enquanto ciência aplicada aos diversos campos do cotidiano, não houve o aprofundamento, mas são respostas para as perguntas corriqueiras “para que serve isso?” ou “por que estudamos isso?”. A aplicação aparenta ser a parte mais atraente para os educandos, sendo uma oportunidade de conectar a parte abstrata com a realidade. Claro que isso muitas vezes não é fácil, requer do professor pesquisa, tempo para elaboração e experimentação.

Construir um ensino da Matemática que priorize uma abordagem metodológica com uso de ferramentas tecnológicas, requer investimentos e políticas públicas que garantam aos alunos e educadores acesso à internet e equipamentos com qualidade. Também se torna necessário olhar para a formação do professor como investimento, apostando em políticas públicas que favoreçam o crescimento do educador enquanto pesquisador. Um excelente exemplo é o PROFMAT que possibilita aos professores de Matemática, que estão na rede de ensino,

aprofundarem seus conhecimentos, e conseqüentemente, maior qualificação para o exercício da profissão.

A pesquisa não se encerra, pretendo dar continuidade, principalmente em relação aos campos da Educação Matemática. Como o ensino requer que sejamos cada vez mais dinâmicos é necessário que acompanhem as evoluções tecnológicas, são inúmeras as ferramentas a serem assimiladas pelos educadores, não só de matemática como das outras áreas, nas diversas etapas de aprendizagem. Toda a reformulação proposta pela BNCC também traz impactos na rotina pedagógica do professor, já que há uma ênfase maior sobre repensar o currículo e as metodologias, portanto precisamos estar em ação na busca por conhecimento e qualificação, e assim aptos, a atuar em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. IMPA, 2013. Disponível em: <http://www.im.ufal.br/posgraduacao/posmat/index.php/livros>. Acesso em: 5 jun. 2020.
- ANDRÉ, Luciano Nascimento, **Convexidade em figuras geométricas planas**. 2018. 98f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2018. Disponível em: <http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000056/00005664.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2020.
- BALLINGER, Brad. **GeoGebra**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/aZa7Dknw>. Acesso em: 12 out. 2020.
- BRYANT, J., SANGWIN, C. **How Round is Your Circle?** New Jersey: Princeton University Press, 2008,
- CRISTE, Marília Gomes. **GeoGebra**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/u/marilia.g.criste>. Acesso em: 12 out. 2020.
- DANTAS, Sérgio. **Triângulo de Reuleaux**. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/arquivos/reuleaux.pdf>. Acesso em: 12 out. 2020.
- GÓMEZ, Joaquim Jorge Delgado; FRENSEL, Katia Rosenvald; CRISSALFF, Lhaylla dos Santos. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017. (Coleção Profmat).
- HONSBERGER, R. **Ingenuity in mathematics**. Washington: Mathematical Association of America, 1970. (New Mathematical Library).
- KAWOHL, B.; WEBER, C. **Meissner's Mysterious Bodies**. Köln: Universit Mathematisches Institut, 2011.
- KINEMATIC Models for Design - Digital Library. **Reuleaux Triangle**. Disponível em: <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>. Acesso em: 12 fev. 2020.
- LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- LÜBECK, Kelly Roberta Mazzutti. Curvas de Largura Constante e suas Generalizações. Synergismus scyentifica UTFPR, v. 4, n. 2, 2009. Disponível em: <http://revistas.utfpr.edu.br/pb/index.php/SysScy/article/view/689/393>. Acesso em: 02 fev. 2020.
- MELO, José Luiz Pastore. Polígonos de Reuleaux e a generalização de Pi. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 81, 2013.
- MONTEJANO, Luis; PENSADO, Edgardo Roldán. **Meissner Polyhedra**. Santiago de Querétaro: Instituto de Matemática, UNAM, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1608.06354>. Acesso em: 10 ago. 2020.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

RODRIGUES, André Soares. **Polígonos de Reuleaux**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=115. Acesso em: 02 fev. 2020.

REULEAUX, Franz. **Kinematics of Machinery**. Londres: Macmillan, 1876. Disponível em: https://en.wikisource.org/wiki/Page:The_Kinematics_of_Machinery.djvu/9. Acesso em: 02 fev. 2020.

TARUMOTO, Celso Itsuo. **Polígonos de Reuleaux e Aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2014. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=60435. Acesso em: 02 fev. 2020.

VOLOCH, J. F. Curvas de Largura Constante. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n 5, p. 69-75, 1987. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wpcontent/uploads/sites/27/2018/03/n05_Artigo05.pdf. Acesso em: 02 fev. 2020.

YAGLOM, I. M.; BOLTYANSKII, V. G. **Convex Figures**. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1961.

WEISSTEIN, E. W. C. **Reuleaux Triangle**. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>. Acesso em: 12 fev. 2020.