UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

GONÇALO COELHO DE ALENCAR

O EMPREGO DO TEODOLITO ARTESANAL NO ESTUDO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRIGIDO A ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

JUAZEIRO - BA
2020

GONÇALO COELHO DE ALENCAR

O EMPREGO DO TEODOLITO ARTESANAL NO ESTUDO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRIGIDO A ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho apresentado à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho.

JUAZEIRO - BA
2020

Alencar, Gonçalo Coelho de
A368e O emprego do Teodolito artesanal no estudo das razões trigonométricas dirigido a estudantes do 9º ano do ensino fundamental / Gonçalo Coelho de Alencar. – Juazeiro - 2020
xii; 81 f: il. 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro-BA, 2020.

Orientador: Prof.º Me. Fábio Henrique Carvalho.

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Trigonometria. 3. Teodolito artesanal. 4. Ensino de Matemática - *Ensino Fundamental. 5. Ferramenta pedagógica - Matemática.* I. Título. II. Carvalho, Fábio Henrique. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 510.07

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UNIVASF.
Bibliotecária: Louise Machado Freire Dias CRB – 4/2267

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

GONÇALO COELHO DE ALENCAR

O EMPREGO DO TEODOLITO ARTESANAL NO ESTUDO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRIGIDO A ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco, como requisito necessário à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 18 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho, PROFMAT/UNIVASF

____
Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, PROFMAT/UNIVASF

____
Prof. Dr. Evanilson Landim Alves, LIC. MAT./UPE

Dedico a Deus, que me abençoa passo a passo nesta escada de conhecimentos, que sua presença continue marcante em minha vida, mostrando-me o caminho do amor, da credibilidade e da esperança de dias melhores.

A todos os amigos que, direta ou indiretamente, me apoiaram durante os momentos de estudo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor da vida, mistério que se faz acontecer na nossa existência, concedendo-nos capacidade e inteligência.

A minha família, minha base, por todo o apoio e por toda a compreensão.

A todos aqueles que acreditaram na concretização de mais um sonho realizado.

Aos meus Professores do PROFMAT/UNIVASF, pela dedicação e paciência em todo o curso e de modo especial ao meu orientador, Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho, pelas sugestões apresentadas, por acreditar em mim, pela orientação e pelos conhecimentos.

Aos colegas de curso, pela amizade.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização desta pesquisa.

“Não é somente o acúmulo de conhecimento que é importante, mas também o modo pelo qual esse conhecimento é utilizado para produzir ideias e soluções”.

Samuel A. Kirk , 1991

RESUMO

A presente pesquisa aborda o tema O emprego do Teodolito artesanal no estudo das razões trigonométricas dirigido a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. O estudo tem como objetivo investigar a importância da confecção e emprego do Teodolito como recurso facilitador no ensino e na aprendizagem de conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo para os estudantes. A pesquisa se caracteriza como estudo de caso exploratório, com abordagem predominantemente qualitativa. Foi realizada no Colégio da Polícia Militar de Pernambuco – Anexo I, Petrolina-PE. Os participantes da pesquisa foram 60 (sessenta) alunos do 9º ano. Este estudo desenvolveu-se por meio de testes e atividades práticas realizadas com os alunos participantes que estudam na unidade de ensino. Durante o período do desenvolvimento do trabalho, mediante a orientação do professor, os estudantes vivenciaram, na prática do próprio colégio, a aplicação da trigonometria medindo a altura de espaços solicitados. Após o estudo do assunto, da construção e aplicação do Teodolito artesanal e, também, da análise dos testes e atividade prática aplicadas, foram obtidos resultados positivos no ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Para respondermos à pergunta da investigação, analisamos os conceitos dos estudantes durante a confecção do Teodolito em sala de aula e suas soluções na atividade prática dentro do espaço escolar e nos testes escritos aplicados. Concluímos que os resultados foram positivos na evolução dos conhecimentos dos estudantes das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Palavras-chave: Matemática. Trigonometria.Teodolito Artesanal, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present research addresses the theme The use of artisanal theodolite in the study of trigonometric reasons for students in the 9th grade of elementary school. The study aims to investigate the importance of making and using Theodolite as a facilitating resource in teaching and learning concepts of trigonometric ratios in the right triangle for students. The research is characterized as an exploratory case study, with a predominantly qualitative approach. It was held at the Pernambuco Military Police College - Annex I, Petrolina-PE. The research participants were 60 (sixty) 9th grade students. This study was developed through tests and practical activities carried out with participating students who study at the teaching unit. During the period of development of the work, under the guidance of the teacher, the students experienced, in the practice of the school itself, the application of trigonometry by measuring the height of requested spaces. After the study of the subject, the construction and application of the handmade Theodolite and, also, the analysis of the applied tests and practical activity, positive results were obtained in the teaching of trigonometric relations in the right triangle. In order to answer the research question, we analyze the students' concepts during the making of the theololite in the classroom and their solutions in practical activity within the school space and in the written tests applied. We conclude that the results were positive in the evolution of students' knowledge of trigonometric ratios in the right triangle.

Keywords: Mathematics. Trigonometry. Homemade Theodolite. Mathematics Teaching.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa apresenta um estudo de caso exploratório de abordagem qualitativa, com o tema O Emprego do Teodolito artesanal no estudo das razões trigonométricas dirigido a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. A prática pedagógica em sala de aula com a contribuição do Teodolito artesanal nos dá condições essenciais para realizar cálculos de alturas e distâncias desejadas.

A trigonometria é um dos ramos da Matemática mais antigos. De acordo com estudos, é de origem incerta, mas esses mesmos estudos atribuem o seu surgimento, possivelmente, na antiguidade com as civilizações egípcias e babilônicas. Tem-se citação sobre a trigonometria em estudos relacionados aos gregos, tendo em Ptolomeu de Alexandria o estudo mais significativo sobre o tema ao compilar uma obra com treze livros escritos intitulados *Syntaxis mathematica*.

Frente à importância e magnitude da trigonometria no âmbito das resoluções de problemas, com o passar dos tempos, o homem, diante da necessidade cotidiana, faz novas descobertas, aperfeiçoando seus conhecimentos, implementando artifícios que possibilitam a utilização deste ramo da Matemática para melhoria de vida.

Com a inquietação de descobrir como o Teodolito contribui na aprendizagem dos estudantes, fizemos um estudo de caso exploratório, com análise qualitativa de forma descritiva. Nossa preferência dá-se ao fato de que, ao se trabalhar com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, analisamos as dificuldades que os estudantes apresentam em relação ao estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, seja em relação às definições, seja relativa à aplicação na resolução de problemas do cotidiano.

Assim, buscamos uma metodologia alternativa que possa facilitar a compreensão desses conceitos, por meio da utilização de materiais manipuláveis como motivador do processo de ensino e de aprendizagem em Matemática, e observamos o quanto essa ferramenta contribui para a aprendizagem dos estudantes.

O objetivo é assegurar um processo de aprendizagem que desperte interesse dos estudantes na confecção e no emprego do Teodolito como recurso motivador da compreensão de conceitos relacionados às razões trigonométricas no triângulo retângulo.

A utilização de atividades, usando o Teodolito, tem importância para a visualização na resolução de questões do cotidiano. Empregar o Teodolito nos cálculos de medidas inacessíveis como, por exemplo, de uma montanha. Nesse tipo de situação, basta determinar a distância entre o observador e um ponto no solo do objeto a ser observado. Assim, estabelece-se a tangente do ângulo observado, para que, em seguida, seja calculada, por meio da razão trigonométrica tangente, a altura aproximada de medidas incalculáveis, como, por exemplo, montanhas, torres e edifícios. Por meio desse exemplo, compreendemos que a aplicação do Teodolito pode facilitar no cálculo de medidas, sejam elas acessíveis ou inacessíveis.

Nossa intenção, ao conduzirmos o conhecimento, tem por finalidade mediar e facilitar a aprendizagem dos estudantes, diante da realidade encontrada e das adversidades enfrentadas por estes em relação ao estudo das razões trigonométricas, buscando meios pelos quais eles possam encarar o mundo de forma dinâmica e comunicativa por meio da Matemática.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos, as referências, os apêndices e, logo após, os anexos.

No primeiro capítulo, apresentamos "A Trajetória Metodológica", o problema da investigação, a pergunta da investigação, seu objetivo geral e seus objetivos específicos, e a justificativa.

O segundo capítulo aborda o “Referencial Teórico”, e nas categorias eleitas são discutidos conceitos e aspectos teóricos no contexto da trigonometria, com a utilização de materiais didáticos nas aulas de Matemática e a descrição do uso do Teodolito para o ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo.

O terceiro capítulo retrata o marco metodológico da pesquisa, apresentando o tipo de estudo, as unidades de análises, o *lócus* da pesquisa, os sujeitos da pesquisa, o instrumento da coleta de dados, o instrumento da análise de dados, bem como a análise dos dados qualitativos que foram utilizados.

O quarto capítulo, “Apresentação e Discussão dos Resultados”, apresenta uma análise dos resultados obtidos por meio do confronto dos objetivos com os dados empíricos.

Finalizando, o quinto capítulo, oferece as considerações finais, abordando os objetivos traçados, os dados obtidos nos testes de experiência, as dificuldades e limitações dos alunos em sala de aula e as sugestões para novos objetos de pesquisa.

Capítulo 1

A TRAJETÓRIA METODOLÓGICA

1.1 Problema da investigação

Este trabalho de pesquisa tem como problema investigar e responder como se dá a importância do emprego do Teodolito artesanal no estudo das razões trigonométricas dirigido a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, no intuito de que o uso desse tipo de metodologia possa auxiliar e contribuir no avanço das pesquisas voltadas ao ensino e à aprendizagem dos alunos, estimulando-os a questionarem, a levantarem hipóteses e a sugerirem opiniões.

A vivência na sala de aula, ministrando as aulas de Matemática no Ensino Fundamental, tem evidenciado que a base do ensino do conteúdo abordado persiste, principalmente, os pressupostos da pedagogia tradicional no que diz respeito à relação conteúdo/forma.

Conhecer as situações enfrentadas pelos alunos em sala de aula e no cotidiano, identificar as dificuldades e facilidades vivenciadas pelos alunos na escola, o que pensam os discentes acerca do uso do Teodolito, bem como ampliar seus conhecimentos sobre as razões trigonométricas e quais concepções são apropriadas na visão desses protagonistas, são algumas das ações desse trabalho.

Oliveira (2010) em sua pesquisa, investigou uma abordagem de ensino da Trigonometria desde o triângulo retângulo até sua forma analítica no ciclo trigonométrico com alunos do Ensino Médio. Seu principal objetivo foi analisar a mudança da prática docente, quando o professor se propõe a vivenciar novas experiências com base nas mais diversas áreas. Concluiu-se que, independente do referencial, foi possível motivar os alunos no estudo da Matemática.

Sendo assim, as investigações pertinentes ao tema se voltam para as relações trigonométricas com ângulos no triângulo retângulo para o ensino e a aprendizagem do referido conceito. Dessa forma, deixam, margem para uma pretensão que se perdura por muito tempo: iniciar o ensino da trigonometria no 9º ano do Ensino Fundamental.

1.2 Pergunta da investigação

O presente estudo de investigação buscou elucidar e responder à seguinte pergunta da pesquisa:

- Qual é a importância da confecção e do emprego do Teodolito artesanal no estudo das razões trigonométricas dirigido a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral:

- Investigar a importância da confecção e do emprego do Teodolito artesanal no estudo das razões trigonométricas dirigido a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

1.3.2 Objetivos específicos:

- Compreender como o funcionamento e manuseio do Teodolito confeccionado em sala de aula pode contribuir no aprendizado dos conceitos de trigonometria;
- Observar a evolução do desempenho dos estudantes nos cálculos e entendimento dos conceitos trigonométricos em um triângulo retângulo;
- Identificar as dificuldades e potencialidades dos estudantes frente a tarefas voltadas às razões trigonométricas.

1.4 Justificativa

A insuficiência no desempenho em Matemática, no âmbito do Ensino Fundamental brasileiro, tem suscitado grandes e estratégicas discussões pedagógicas com a finalidade de construir um ambiente educativo dinâmico e estimulante, onde a disciplina, seus pressupostos e conceitos sejam trabalhados de modo a solucionar as fragilidades que rodeiam o imaginário dos estudantes.

Com baixos índices de proficiência e encarada como a vilã das reprovações nas escolas, a Matemática tem sido sustentada a partir de representações de complexidade, de um componente, que estimula a memorização de conteúdos. Pouco consegue se apropriar da prática para desenvolver um olhar mais decisório, engajado e, também, atuante no tocante a problemas, fenômenos e questões do cotidiano (DUCK, 2004; BLUMENTHAL, 2013).

> É importante ressaltar que nem todas as aplicações da Matemática são fáceis de serem percebidas e tão pouco aplicadas. Muitas são as reclamações acerca do modelo atual do ensino da Matemática e frisa-se bastante a questão de que a Matemática da escola é descontextualizada da utilizada na vida prática do aluno e assim, essa realidade do ensino da Matemática, torna as aulas pouco atrativas e o aluno não sente necessidade de aprender tal matéria, que para ele é desvinculada da sua vida cotidiana, justificando assim uma pesquisa sobre tal situação à busca de encontrar sugestões para a melhoria dessa situação (NASCIMENTO; CURI, 2018, p. 17).

Seja por meio de ação e pedagogias ainda conservadoras, hoje incompatíveis com o cenário de mudanças expressivas no campo da educação básica, ou também a partir da deficiência na busca por recursos mais inovadores como meios facilitadores à apropriação do conhecimento, o processo de ensino em Matemática, apesar dos avanços tímidos, ainda é cercado por dificuldades no fortalecimento da aprendizagem e evolução nos níveis de resultado (NUNES; MENDES, 2016).

E esses resultados frágeis têm sido refletidos em exames nacionais. Segundo dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), realizado em 2017, o desempenho dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, das escolas públicas apresentou baixo rendimento em Matemática. Isso demonstra que há um longo caminho a ser percorrido no sentido de potencializar, no resultado, ações de excelência.

Segundo a Avaliação do Fórum Econômico Mundial (2016), a educação em Matemática no Brasil encontra-se desprivilegiada. Dos 139 países avaliados, o Brasil ocupa a 133ª colocação. Hoje, nosso país dentre outros possui um alto índice de estudantes com baixo rendimento escolar em Matemática (OCDE, 2016), estando o mesmo entre as dez nações com menor rendimento.

Produto das representações dos estudantes que definem a Matemática como uma disciplina consideravelmente complexa, entediante e trabalhosa, a insuficiência nos níveis de desempenho nesta área de conhecimento também coincide com um deficiente parâmetro de ensino tradicional, que ainda traduz as contradições de suas épocas, sem colaborar para o desenvolvimento da aprendizagem Matemática mais eficiente e assertiva, tampouco contribui para maior interação do estudante de modo a possibilitá-lo enxergar na Matemática o instrumento para se definir soluções tangíveis aos problemas cotidianos (ANDRADE, 2013; NUNES; MENDES, 2016).

Enxerga-se, pois, reafirmando essas problemáticas, que a precarização da Educação Básica causa fragilidade em conhecimentos elementares em Matemática, inclusive nos estudantes que cursam a última etapa do Ensino Fundamental, às portas de uma nova fase de produção e construção de conhecimento. Dessa forma, os alunos fracassados no Ensino Fundamental entrarão no Ensino Médio com um olhar de maior dificuldade para se adaptar, potencializando a evasão, baixas notas e desempenho aquém do esperado pelo mercado de trabalho (BLUMENTHAL, 2013; SILVA *et al.*, 2019).

Enquanto mecanismos para a promoção de configurações nesse cenário, os professores têm sido estimulados a apresentarem propostas cada vez mais lúdicas e atraentes, integrando os estudantes no exercício do uso de materiais e instrumentos que suscitem a motivação, curiosidade e o interesse em aprender Matemática de forma inovadora e produtiva dentro de sala de aula, tornando o processo facilitado e mais efetivo (SILVA *et al.*, 2019).

> É preciso frisar que a ludicidade quando bem trabalhada proporciona ao professor grande produtividade no exercício profissional desenvolvendo no aluno habilidades nunca imaginadas numa aula tradicional. Os benefícios são inúmeros principalmente no que diz respeito à interação dos alunos com o professor criando um clima afetivo na sala de aula além, é claro, de desenvolver no aluno uma maior capacidade de concentração, intuição e de criatividade frente aos desafios de jogos ou instrumentos que devem ser bem pensados para que estimulem todas essas habilidades (PEREIRA; OLIVEIRA, 2016, p. 22-23).

Aplicando esses conceitos e pressupostos na compreensão da trigonometria, no estudo das razões, métodos e cálculos associados, percebemos que a ludicidade como ferramenta catalisadora da aprendizagem, no caráter mais prático, tende, pois, a possibilitar maior assimilação dos conteúdos, uma vez que a participação e ações por parte dos estudantes são mais evidentes e perceptíveis (SILVA *et al.*, 2013).

Nesse sentido, o uso e a confecção do Teodolito define-se como uma estratégia dos processos de ensino e de aprendizagem que possibilita desencadear práticas mais facilitadas de compreensão dos conceitos e de métodos trigonométricos envolvendo o triângulo retângulo, enquanto fundamento matemático relevante para os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Por meio da confecção e utilização do Teodolito juntamente com uma turma constituída por alunos de 9º ano do Ensino Fundamental, além do que espera o senso comum de reconhecer relevância do emprego de materiais manipuláveis nas didáticas e práticas de ensino, nossa pretensão foi investigar e observar a evolução do desempenho dos estudantes nos cálculos e entendimento dos conceitos trigonométricos em um triângulo retângulo.

A utilização do Teodolito em uma das turmas em detrimento do conhecimento oriundo da teoria e cálculo manual sem qualquer suporte ou aparato lúdico, sendo que na outra turma, sem a construção e aplicação do Teodolito demonstrou com clareza, em caráter comparativo, que, de fato, a aplicação desse instrumento torna a assimilação do conhecimento matemático e trigonométrico mais acessível e facilitado. Espera-se que o Teodolito contribua de forma positiva para o fortalecimento dos processos de ensino e de aprendizagem na turma onde a dinâmica foi aplicada.

Na literatura científica, estudos desenvolvidos por autores, a exemplo de Silva *et al.* (2013), Dornelles *et al.* (2014), Santos e Carpes (2016), Costa Júnior *et al.* (2017), dentre outros, apontaram as contribuições da introdução do Teodolito como um recurso potencializador da aprendizagem no contexto escolar, entretanto poucos são, de fato, as análises acerca do olhar mais atento para o Ensino Fundamental, gerando um campo de investigação muito importante para a realização da presente pesquisa.

Capítulo 2

REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo se designa à apresentação de conceitos relacionados à definição de semelhança, permitindo que se desenvolva a compreensão a respeito de toda a teoria de modo elementar. Obteremos, principalmente, os resultados em relação à semelhança de triângulos. Além disso, apresentamos um breve levantamento da compreensão dos conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo no Ensino Fundamental, a Matemática lúdica como auxílio de aprendizagem e o uso do Teodolito como recurso facilitador da aprendizagem.

2.1 Semelhança de segmentos

Os conceitos, definições, demonstrações e teoremas apresentados nesta seção foram baseados nos livros “Medida e Forma em Geometria” de Elon Lages Lima; “Geometria” Coleção do PROFMAT de Antonio Caminha Muniz Neto; “Fundamentos da Matemática Elementar 9, Geometria Plana” de Osvaldo Dolce.

Antes de definirmos semelhança, vamos apresentar alguns conceitos primitivos de ponto, reta e segmento de reta e, para compreendermos melhor os conceitos de semelhança, apresentaremos os conceitos de razão e proporcionalidade.

Por conveniência, todas as medidas apresentadas serão tomadas na mesma unidade de medida.

Conceitos primitivos:

Ponto: é um lugar geométrico no plano ou no espaço, que não tem dimensões.

Reta: é a união de infinitos pontos alinhados.

Semirreta: dados dois pontos A e B, uma semirreta é parte de uma reta, que se prolonga em um único sentido, ou seja, é limitada por um ponto chamado de origem, A passando por B e indicamos pela notação $\overrightarrow{AB}$.

Segmento de reta: dados dois pontos sobre uma reta A e B distintos, a reunião desses dois pontos com o conjunto de pontos, que estão entre eles, é um segmento de reta. (Figura 2. 1)

Figura 2.1 – Segmento de reta $\overline{AB}$.

Fonte: Autor

Indicaremos a notação $\overline{AB}$ para representar o segmento de reta entre os pontos A e B, a notação AB para expressar a medida desse segmento $\overline{AB}$ e $\overrightarrow{AB}$ para indicar a semirreta que tem origem em A no sentido de B.

Razão: Dados dois segmentos de reta cujas medidas são AB e CD, chama-se razão entre esses o número real positivo k, tal que: $\frac{AB}{CD} = k$

Observe que a razão de proporcionalidade, ou seja, a razão entre seus lados correspondentes representada por uma constante depende da ordem pela qual tomamos os segmentos. Se mudarmos essa ordem, obteremos a razão de proporcionalidade inversa, isto é, se a razão de proporcionalidade entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é k, então, a razão de proporcionalidade entre os segmentos $\overline{CD}$ e$\overline{AB}$ é $\frac{1}{k}$.

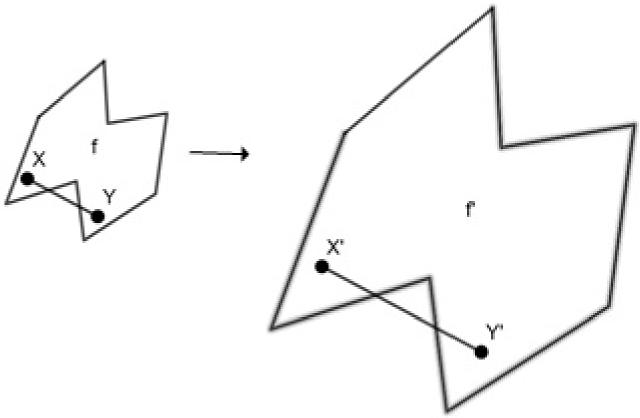
Proporção: Consideremos quatro segmentos, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$. Nessa ordem, diz-se que esses segmentos são proporcionais quando a razão entre os dois primeiros for igual à razão entre os dois últimos, ou seja: $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = k$, com $k > 0$.

Assim, se quatro segmentos de reta são proporcionais, podemos dizer que esses segmentos são semelhantes, de acordo com as definições a seguir.

Para Lima (1991), a noção de semelhança corresponde á ideia natural de “mudança de escala”, isto é, ampliação ou redução de um conjunto de pontos, alterando seu tamanho sem modificar suas proporções.

Definição: Sejam os conjuntos de pontos f e f', do plano ou do espaço, diz-se que f e f' são semelhantes, de razão k, com k real, se existir uma relação biunívoca $\rho : \ f \rightarrow f'$, em que os pontos X e Y relacionam a X' e Y' segundo X = $\rho\ (X')$ e Y = $\rho\ (Y')$, de modo que $\overline{X'Y'}$ = $k\overline{XY}$, sendo os segmentos $\overline{XY}$ e $\overline{X'Y'}$ correspondentes. (Figura 2.2)

Figura 2.2 – Semelhança de figuras



Fonte: Autor

A seguir, destacamos algumas propriedades da relação de semelhança.

Transitividade: se f é semelhante a f', e f' é semelhante a f'', então f é semelhante a f'';

Simétrica: se f é semelhante a f', então f' é semelhante a f, pois dada uma semelhança ρ = $f \rightarrow f'$ de razão k, a função inversa ρ^{-1} = $f' \rightarrow f$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{k}$.

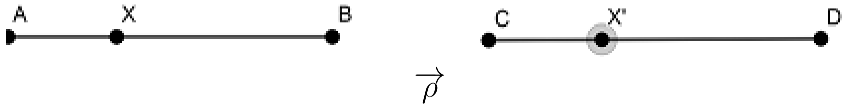
Reflexiva: f é semelhante a si mesmo.

Uma isometria é quando a semelhança tem razão 1. Sendo assim, existindo uma isometria entre duas figuras, então, elas são congruentes.

As propriedades, acima apresentadas, fazem com que a relação de semelhança seja uma relação de equivalência.

Exemplo 1: Considere os segmentos de reta quaisquer, cujas medidas são AB e CD cuja razão $\frac{CD}{AB}$ é igual a k. (Figura 2.3)

Figura 2.3 – Segmentos semelhantes



Fonte: Autor

Sendo, $\overline{CD}$ = $k\overline{AB}$, podemos determinar a semelhança $\rho: \ AB \rightarrow CD$ de razão k, estabelecendo uma correspondência a cada ponto do segmento $\overline{AB}$ o ponto X' = $\rho\,(X)$ de $\overline{CD}$, com $\overline{CX'}$ = $k\ \overline{AX}$. Portanto, a função ρ está bem definida, de modo que, para todo $X \in \overline{AB}$, tem-se $X' \in \overline{CD}$.

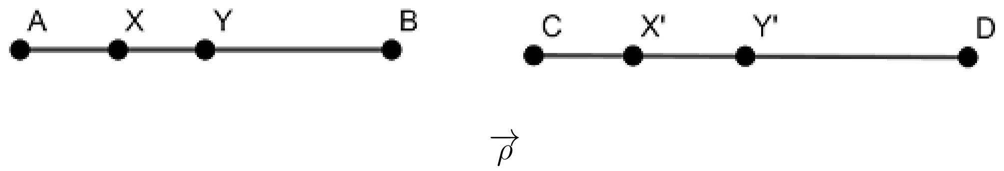
Para demonstrar o que acabamos de mencionar, seja,

$$CX' = AX\ \frac{CD}{AB}$$
$$CX' = CD\ \frac{AX}{AB}$$

Se $X \in AB$, tem-se $AX < AB$, portanto $\frac{AX}{AB} < 1$, então, $CX' = CD\ \frac{AX}{AB} < CD$. Como $CX' < CD$, assim $X' \in CD$.

Apresentaremos, a seguir, a demonstração que ρ, realmente, é uma semelhança. Considere os pontos X e Y quaisquer em AB, com X entre A e Y. Daí tem-se que $AX < AY$. Assim, X' está entre C e Y'. (Figura 2.4)

Figura 2.4 – Relação biunívoca de segmento de reta



Fonte: Autor

Como exemplo, provaremos que: $X'Y' = kXY$

$$\begin{aligned} X'Y' &= CY' - CX' \\ &= kAY - kAX \\ &= k(AY - AX) \\ &= kXY \end{aligned}$$

Como temos que

$$CX' = kAX$$

e

$$CY' = kAY$$

Então,

$$\begin{aligned} CX' &= kAX \\ &< kAY \\ &= CY'. \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{CX'} < \overline{CY'}$ e, assim, X' está entre C e Y'.

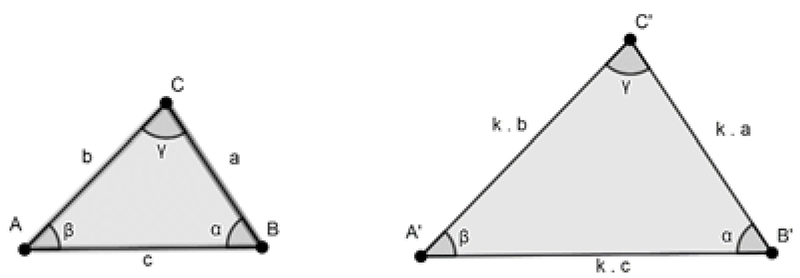
Logo,

$$\begin{aligned} X'Y' &= CY' - CX' \\ &= kAY - KAX \\ &= k(AY - AX) \\ &= kXY \end{aligned}$$

■.

Dizemos que duas poligonais fechadas são semelhantes, quando seus respectivos segmentos têm a mesma razão de proporcionalidade, ou seja, significa que uma figura difere ou não da outra, apenas em termos de tamanho, já que os seus segmentos mantêm respectivamente a mesma proporção. Consequentemente, os triângulos semelhantes são aqueles que têm uma relação de semelhança e, por conseguinte, uma forma similar (Figura 2.5). Ao contrário de outras figuras, os triângulos semelhantes dependem unicamente dos seus ângulos.

Figura 2.5 – Triângulos semelhantes.



Fonte: Autor

Sejam f e f' duas figuras geométricas e r um número real positivo.

Definição: Dizemos que f e f' são semelhantes, com razão de semelhança r, se existe uma bijeção $X \mapsto X' = \varphi(X)$, entre os pontos de F e os pontos de F' , satisfazendo

$$X'Y' = \varphi(X)\varphi(Y) \quad = \quad rXY,$$

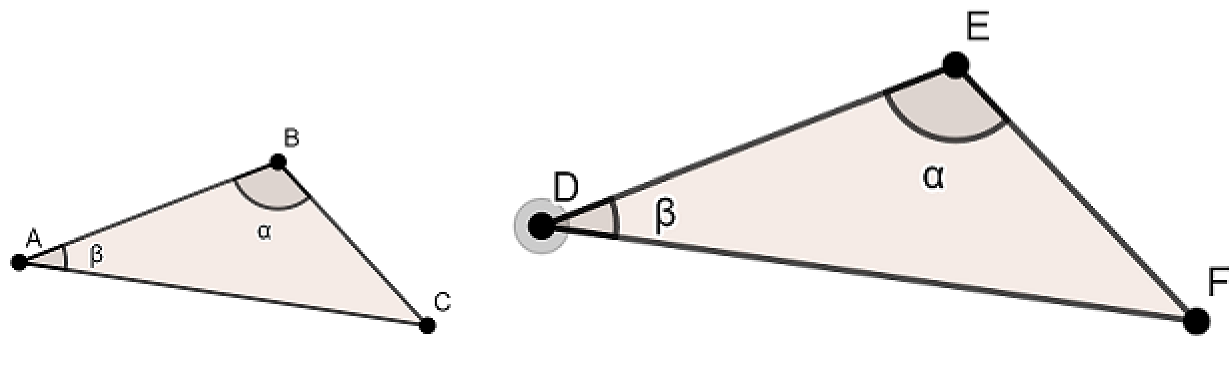
para quaisquer pontos X, Y pertencentes à figura F. A bijeção $\varphi : f \to f'$ chama-se uma semelhança de razão r entre as figuras geométricas F e F' . A fim de simplificar a notação, denotaremos por $X' = \varphi(X)$ e $Y' = \varphi(Y)$ as imagens dos pontos X e Y pela bijeção φ.

2.1.1 Semelhança de Triângulos

Apresentaremos a seguir, de acordo com Elon Lajes Lima (1991), a definição de semelhança de semelhança de triângulo.

Definição: Dois triângulos ABC e DEF são semelhantes se e somente se existir uma relação biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados equivalentes seja sempre a mesma (Figura 2.6).

Figura 2.6 – Dois triângulos semelhantes.



Fonte: Autor

Assim, se ABC e DEF são triângulos semelhantes, então, podemos estabelecer as seguintes relações, e representaremos por:

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF \Leftrightarrow$

$$\hat{A} \approxeq \hat{D}$$

$$\hat{B} \approxeq \hat{E}$$

$$\hat{C} \approxeq \hat{F}$$

e

$\frac{BC}{EF}$ = $\frac{AC}{DF}$ = $\frac{AB}{DE}$ = k

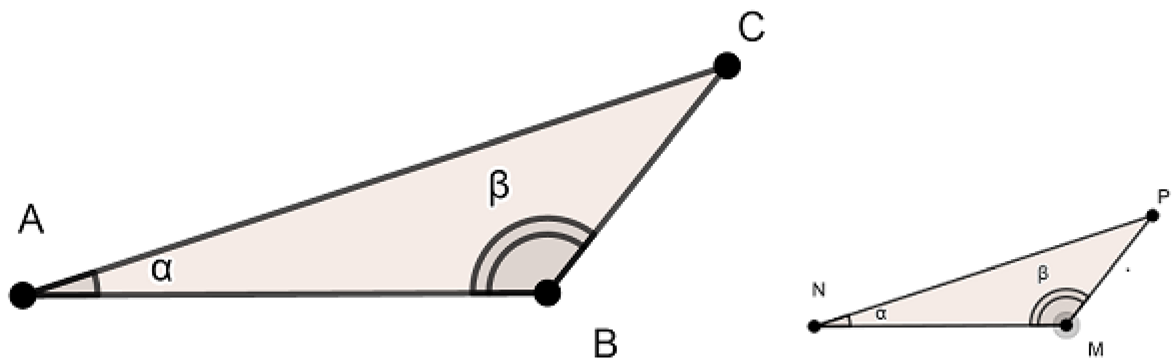
Logo, o número real positivo k é chamado de razão de semelhança entre os triângulos ABC e DEF nessa ordem. Note que a razão de semelhança entre os triângulos DEF e ABC é $\frac{1}{K}$ de acordo com o conceito de proporcionalidade.

2.1.2 Critérios de semelhança

Para assegurar que dois triângulos são semelhantes, é necessário mostrar que satisfazem a pelo menos um dos três critérios de semelhança (critério – LLL – lado, lado, lado), (critério – ALA – ângulo, lado, ângulo) ou (critério – AA – ângulo, ângulo). Porém, provaremos, aqui, o caso (AA – ângulo, ângulo), que será utilizado para demonstrar a semelhança no triângulo retângulo. Para tanto, consideremos provados os demais casos, cujas demonstrações são também simples.

Teorema: (ângulo – ângulo – AA). Se dois triângulos ABC e NMP, tem-se $\hat{A} \approxeq \hat{N}$ e $\hat{B} \approxeq \hat{M}$, então os triângulos são semelhantes. Observe os triângulos, ABC e NMP, com dois ângulos congruentes; provaremos que são semelhantes.

Figura 2.7 – Triângulos semelhantes (caso – AA).



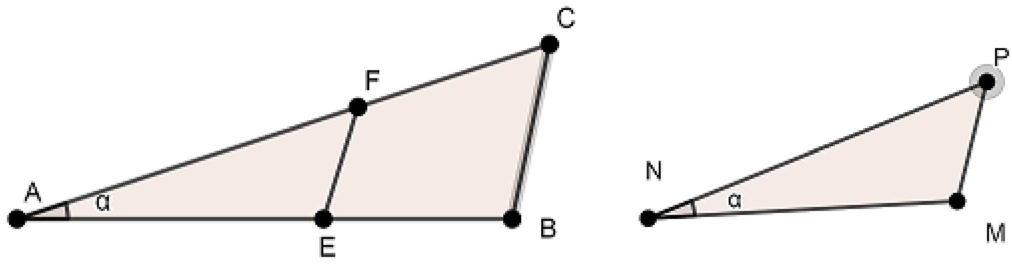
Fonte: Autor

Demonstração: Se $\overline{AB} \approxeq \overline{NM}$, tem-se que os $\Delta ABC \approxeq \Delta NMP$, pelo caso ALA (ângulo – lado – ângulo), logo, o $\Delta ABC \approxeq \Delta NMP$, pois triângulos congruentes apresentam razão de semelhança 1.

Suponha, agora, que, AB > NM.

Tomemos o ponto E sobre $\overline{AB}$, tal que $\overline{AE}$ = $\overline{NM}$, por E vamos traçar $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$. (Figura 2.8)

Figura 2.8 – Triângulos semelhantes com lados de medidas diferentes (caso – AA).



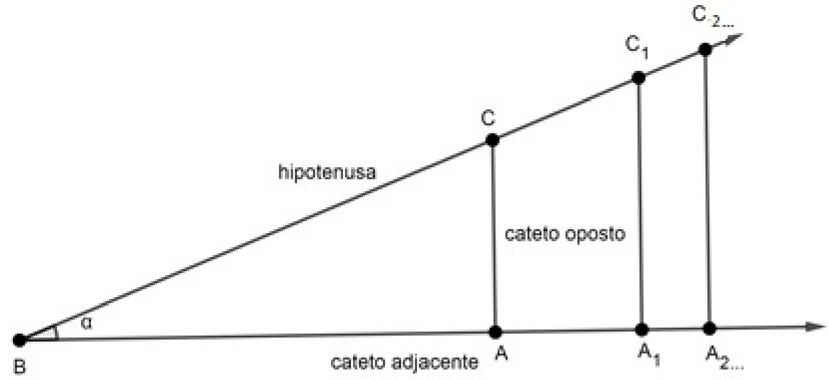
Fonte: Autor

Assim, $A\hat{E}F \approxeq A\hat{B}C$ (ângulo) correspondentes nas retas paralelas cortadas por uma transversal). Logo, pelo caso ALA, tem-se que os triângulos AEF e NMP são semelhantes, pois $\hat{A} \approxeq \hat{N}$ e como $\hat{B} \approxeq \hat{M}$ implica dizer que $A\hat{E}F \approxeq \hat{M}$. Além disso, $AE = NM$. Pela definição de congruência de triângulos, se $\triangle\ AEF \approxeq \triangle\ NMP$, então, $\triangle AEF \approxeq \triangle NMP$. Portanto, pela definição de semelhança de triângulo, segue que os triângulos ABC e NMP também são semelhantes.

2.1.3 Semelhança no triângulo retângulo

Considere, agora, a (Figura 2.9), que apresenta a medida do ângulo $\angle\ ABC$ = α, sendo 0 $<$ α $<$ 90. Sobre a semirreta $\overrightarrow{BA}$, marcamos os pontos A, A_1, A_2, A_3, e, a partir desses pontos traçamos perpendiculares passando por eles e interceptando a semirreta $\overrightarrow{BC}$, nos pontos C, C_1, C_2, C_3, Por possuírem os mesmos ângulos, os triângulos ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, ... pelo (caso – AA – ângulo, ângulo) são semelhantes (Figura 2.9).

Figura 2.9 – Semelhança de triângulo retângulo e razões trigonométricas.



Fonte: Autor.

Com isso, podem-se definir as seguintes relações entre seus lados correspondentes.

$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = ... = r_1$

$\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = ... = r_2$

$\frac{AC}{BA} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = ... = r_3$

Por meio dessas relações, percebe-se que r_1, r_2, r_3, dependem exclusivamente da medida do ângulo e não do tamanho do triângulo.

A partir delas, podem-se nomear essas razões, já bem conhecidas na Matemática, da seguinte maneira:

$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = ... = r_1 = sen\alpha$

$\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = ... = r_2 = \cos\alpha$

$\frac{AC}{BA} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = ... = r_3 = \tan\alpha$

Assim, dado um triângulo ABC retângulo em A (Figura 2.9), chama-se de seno do ângulo α, a razão entre o cateto oposto ao ângulo α “representado pelo segmento $\overline{AC}$", e a hipotenusa, “que é o maior lado do triângulo retângulo” representado por $\overline{BC}$. Cosseno do ângulo α é a razão formada entre o cateto adjacente a α, “representado por $\overline{AB}$"e a hipotenusa, já a tangente desse mesmo ângulo é dada pela razão entre o cateto adjacente pelo cateto oposto ao ângulo.

2.2 Matemática: breve levantamento teórico sobre a trigonometria

A palavra trigonometria tem sua origem no grego *trigonos* (triângulo) mais *metrum* (medida). Tem como foco principal as relações entre os lados e ângulos de um triângulo e nasce como resposta às necessidades, tais como a Astronomia e a Navegação.

A trigonometria é uma das abordagens mais longevas da Matemática. Autores já reportam o uso da mesma desde as civilizações antigas, a exemplo dos sumérios, povo que habitou a região da Mesopotâmia e que também legou para a humanidade a primeira forma de escrita conhecida como cuneiforme. De acordo com os autores abaixo:

> Por volta de 2000 a. C., os sumérios que viviam ao sul da Mesopotâmia, na região do atual Iraque, impulsionados pela busca de soluções nas áreas da Navegação, Geografia, Arquitetura e Astronomia, desenvolveram estudos ligados ao ramo da Matemática, hoje conhecida como Trigonometria. Tendo a cultura dos sumérios sido repassa aos babilônios e egípcios, estes aperfeiçoaram os estudos da Matemática para a aplicação na determinação de distâncias inacessíveis, rotas de navegação, também estabelecimento de calendários, na previsão de eclipses, etc (OLIVEIRA; FERNANDES, 2010, p. 23).

A história tradicional relata que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que viajou pela Grécia e pelo Egito e influenciou o desenvolvimento da Matemática demonstrativa. Foi influenciado pelos conhecimentos dos egípcios, povos que desenvolveram um rigoroso sistema de medição de terras e também conhecidos pela adoção de métodos empíricos de calcular distâncias com cordas (BOYER, 1996).

Ao que parece, Tales teria medido a altura de objetos pequenos, de forma que pudesse alcançar sua altura e observado a posição do Sol medindo o comprimento da sombra dos objetos e deduzido que, no momento em que o comprimento da sombra equivalesse à altura do objeto, o mesmo seria válido para a pirâmide. Santos (2012, p.51) evidencia este pensamento afirmando que “Tales teria escrito a razão entre as medidas do comprimento do objeto e da sombra projetada e, imediatamente, registrado o comprimento da sombra projetada pela pirâmide e relacionado com a altura desconhecida da pirâmide”. Tales, conhecendo a ideia de proporcionalidade, poderia desenvolver corretamente os cálculos necessários.

Segundo historiadores, o grego Hiparco de Niceia (180 a.C – 125 a.C) foi o primeiro a elaborar uma tabela, relacionando os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, equivalente à atual tabela das razões trigonométricas dos ângulos agudos do triângulo retângulo, isso por volta do ano 140 a.C e, portanto, tornou-se um dos fundadores da trigonometria (CELSO, 2015). Ainda de acordo com estudo, desde os tempos de Hiparco aos tempos modernos, não existia registro de tabelas como as razões trigonométricas para o triângulo retângulo, como aborda o autor, a seguir:

> Deve-se lembrar que desde os dias de Hiparco até os tempos modernos não havia coisas como razões trigonométricas. Os Gregos, e depois deles os hindus e os árabes, usavam linhas trigonométricas. Essas, a princípio, tiveram a forma de cordas num círculo, e coube a Ptolomeu associar valores numéricos (ou aproximações) às cordas (BOYER, 2001, p.113).

Nos dias atuais, podemos destacar que a trigonometria é utilizada na prática em diversas profissões, entre elas engenheiros, bem como para fazer medições de astros, distâncias, etc., observando o tamanho angular que analisamos os astros da Terra, na construção, na determinação de distâncias entre estrelas, na sociologia e em outras áreas científicas. Portanto, o seu estudo é indispensável praticamente para todos os pesquisadores dessas áreas.

Entre os colaboradores da trigonometria do século XVII, podemos destacar Napier, um matemático escocês, que formulou dois métodos trigonométricos para explicar e resolver triângulos esféricos obliquângulos e Oughtred, matemático inglês, que publicou um trabalho na tentativa de tornar-se o primeiro a estabelecer abreviações para os nomes das razões trigonométricas. Ele fez diversas colaborações e deu destaque à linguagem Matemática utilizada até os dias de hoje, entre os quais o $"X"$ para multiplicação.

Por volta do século IX, o que hoje conhecemos na moderna trigonometria pelo nome de tangente, a civilização árabe, pelo menos, associava à sombra projetada por uma haste colocada na horizontal. Assim, de acordo com a posição do Sol na abóbada celeste, os raios solares provocavam uma variação no ângulo de incidência e, consequentemente, provocavam também uma variação no comprimento da sombra da haste. Dessa forma, o comprimento da sombra teve sua relevância na invenção do relógio de Sol e foi por meio da medição de sombras que se supõe que Tales de Mileto, personagem que teria vivido entre os anos de 624 e 547 AC, encontrou as alturas das pirâmides, usando a semelhança de triângulos.

Rooney (2012) afirma que os árabes, por volta de 860, construíram as primeiras tabelas de sombras.

> A primeira tabela de tangente e cotangente foi criada por volta de 860 pelo astrônomo persa al-Hāsib al-Marwazy (c.778–870), o astrônomo sírio al Battani (c.858–929) formulou uma regra para determinar a elevação do sol acima do horizonte medindo uma sombra (o princípio de funcionamento dos relógio de sol). Sua "tabela de sombras" é efetivamente uma tabela de cotangente para ângulos de 1° até 90°, com intervalos de 1°. (ROONEY, 2012, p.91).

Portanto, os conceitos de tangente e de cotangente originaram-se de formas diferentes da ideia de seno de um ângulo. Sendo assim, esses conceitos foram desenvolvidos juntos e não foram associados primeiramente a ângulos.

Muitas das informações sobre a Matemática do Egito são obtidas, atualmente, em pedras e papiros. Um desses documentos escrito por um escriba chamado Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, é um texto matemático escrito na forma de manual prático, datado de aproximadamente 1650 a.C. Nele, há algumas noções de trigonometria, conforme Boyer:

> O problema 56 do papiro de Rhind tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo (BOYER, 2001, p. 13).

Posteriormente, Ptolomeu (85 a 165 d.C.) influenciou o desenvolvimento da trigonometria por muitos séculos, por ampliar o trabalho de Hiparco. Em sua obra "Almagesto", apresenta uma tabela de valores numéricos (ou aproximações) associados a cordas correspondentes a diversos ângulos, em ordem crescente e em função da metade do ângulo, o que equivale a uma tabela de senos.

2.3 Os desafios encontrados no contexto de aprendizagem em Matemática

No Brasil, na Educação Básica, a Trigonometria é tratada no final do Ensino Fundamental, quando se iniciam os conceitos direcionados ao ensino da trigonometria.

Os PCNEM (BRASIL, 2000) sinalizam à importância contextualizada sociocultural do ensino da Trigonometria como forma de aproximar o estudante da realidade e fazê-lo vivenciar situações que lhe possibilitem reconhecer a diversidade que o cerca.

É importante salientar que, na sociedade atual, a capacidade de compreensão do saber matemático é primordial em uma grande variedade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento e como ferramenta para lidar com situações da vida diária.

Silva e Thomaz Neto (2006) realizaram uma pesquisa, tendo como objetivo verificar os conhecimentos dos alunos sobre as definições, as relações e os problemas, envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Para coleta de dados, foi aplicado um teste escrito com 5 questões a 37 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Pará. Os pesquisadores chegaram à conclusão de que as principais dificuldades apresentadas pelos alunos estão em identificar corretamente o que é a hipotenusa e o que são os catetos; em utilizar, adequadamente, as relações trigonométricas; e em resolver problemas que não têm a representação geométrica.

Dessa forma, observamos, por meio de suas justificativas, que, ao problematizarmos nosso tema, através da confecção e aplicação do Teodolito artesanal, a atividade prática possibilitou a compreensão desses conceitos. Os alunos conseguiram encontrar, por meio da razão trigonométrica tangente, as alturas estabelecidas, facilitando o entendimento nas resoluções de questões posteriores, tornando-se essa ferramenta essencial para proporcionar condições necessárias para que todos possam ter um melhor entendimento do assunto abordado. Além disso, transformou a sala de aula em local dinâmico e atrativo, contribuindo para que se tenham interações com o cotidiano, oportunizando à aprendizagem mais significativa.

O processo do desenvolvimento da aprendizagem acontece pela relação nos diálogos, na socialização. Vygotsky entende o homem e seu desenvolvimento numa perspectiva sociocultural, ou seja, percebe que o homem se constitui na interação com o meio em que está inserido (RESENDE, 2009) . Desse modo, o estudante adquire o conhecimento a partir das contribuições de uma pessoa mais experiente.

O professor, na sala, de aula é o mediador da aprendizagem. Ele ensina aos estudantes, sugerindo desafios e contribuição na resolução das atividades por meio de discussões, debates produzidos por uma causa em decorrência de valorizar e nortear os estudantes. Sendo assim, o professor passa a ser uma peça chave no desenvolvimento da aprendizagem do aluno. De acordo com Freire, “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (FREIRE, 1996, p. 25). Dessa forma, o professor abre um leque de possibilidades ao transmitir informações essenciais, as quais o estudante não é capaz de adquirir sozinho. Portanto, o professor é responsável por estabelecer estratégias utilizadas em sala de aula, por proporcionar discussões sobre as soluções e procedimentos, estimular, enaltecer os resultados mais pertinentes dos estudantes.

Dessa maneira, “[...] na base do processo educativo, deve estar a atividade pessoal do aluno, e toda a arte do educador deve se restringir a orientar e regular essa atividade” (VYGOTSKI, 2003, p. 75).

Como Burak (2010) e Bassanezi (2004) têm demonstrado, de modo geral, os conteúdos da Matemática se tornam compreendidos quando é dada ao estudante a possibilidade de experiências cotidianas até que se alcance um modelo adequado à situação em estudo, de modo que a abstração sempre seja o ponto de chegada. É a partir disso que o aluno constrói seus conceitos.

É fato, que cada professor possui uma prática diferenciada de trabalhar os conteúdos de Matemática. Assim, é necessário entender que as dificuldades como ausência de material pedagógico apropriado para trabalhar e a falta de interesse dos estudantes são vencidas cotidianamente com práticas inovadoras do próprio educador. É essencial realizar uma busca da ferramenta adequada para trabalhar determinados conteúdos matemáticos. Deve-se refletir sobre o paradigma do professor e sobre o papel de cada um.

Também, deve-se questionar sobre a realidade do estudante, o tipo de aluno que se pretende formar e, principalmente, sobre qual Matemática é importante para esse aluno.

Os grandes desafios de aprender os conteúdos matemáticos são variados. Existem inúmeros fatores. Acreditamos que, para vencer as barreiras, faz-se necessário o diálogo e a maneira como é vivenciado cada conteúdo na prática pedagógica diária com os alunos em cada faixa etária.

Nesse sentido, a Matemática deve ser trabalhada de acordo com cada estágio de desenvolvimento cognitivo, o que não tem acontecido, uma vez que alguns dos conteúdos de Matemática não são trabalhados nos respectivos anos, ficando, assim, acumulados para o ano seguinte, a exemplo disso, as razões trigonométricas no triângulo que, na maioria das escolas, não é trabalhado, gerando mais tarde, dificuldades nessa área do conhecimento. O aluno chega aos anos finais do Ensino Fundamental com defasagem; em sua maioria, os conteúdos estudados em Matemática podem não apresentar uma situação prática de imediato no cotidiano. E isso pode deixar o estudante com dificuldades em desenvolver as atividades vivenciadas em sala de aula.

É comum a observância em grande quantidade nas escolas, em documentos como censo escolar e resultados das avaliações internas e externas, o alto índice de alunos com dificuldades nos conteúdos da disciplina Matemática. Com isso perdem o interesse em aprender. De acordo com Prado (2000, p. 93), as atitudes dos estudantes acentuam a falta de: “atenção às aulas, atenção nos cálculos, base na matéria, interesse, tempo, treino e repetição, cumprir as tarefas de casa e acompanhamento dos pais”.

Sendo assim, entendemos que a aprendizagem se constitui por meio de intervenções e ações. Diante disso, Vygotski (2003) ressalta o quanto é importante a atuação dos demais membros do grupo social na intermediação entre indivíduo e cultura, uma vez que o processo de ensino e de aprendizagem ocorre pela socialização do conhecimento, ou seja, o indivíduo não é capaz de aprender sozinho a descobrir suas soluções. Portanto, o professor é peça fundamental nesse processo. Sendo assim, é importante que o educador, na sua prática pedagógica, considere o processo histórico-cultural da criança, e o da própria Matemática.

Com isso, os desafios enfrentados pelos professores é saber o que os alunos sabem para poderem avançar. Portanto, o professor precisa ensinar de forma individual, o que na realidade em que se encontra a educação pública hoje com salas lotadas é quase impossível. Além disso, deparam-se os professores com alunos repetentes, que, muitas das vezes, estão sem estímulos para estudar e com a ausência da família para acompanhar seus filhos no processo de ensino e de aprendizagem. A gestão escolar não percebe as dificuldades enfrentadas pelo professor em sala de aula, assim, não desenvolve ações que possam contribuir nesse processo. A burocracia também é um fator que, às vezes, faz com que o professor deixe de realizar uma ação que possa facilitar a compreensão dos conteúdos para fazer todos os registros, que são exigidos.

A falta de formação continuada é outro fator preocupante, pois é necessário para que o professor possa fazer articulação entre teoria e a prática e, que, muitas vezes, não é oferecido por parte do poder público; a defasagem salarial também faz com que o professor tenha que se sobrecarregar, trabalhando em duas ou mais escolas, ficando sem tempo para pesquisar e preparar materiais que possam ajudar na sua prática e isso tem afetado diretamente no processo de ensino e de aprendizagem.

2.4 A Matemática lúdica como auxílio de aprendizagem da Matemática: olhar sobre resultados no desempenho escolar

Buscando superar a ideia representativa de uma disciplina complicada e com reduzida aplicação prática, tem-se enxergado a necessidade de proporcionar aos alunos um espaço de aprendizagem mais dinâmico, facilitado e estimulante, de maneira a intervir nas deficiências observadas quanto à assimilação dos conteúdos didáticos (SOUZA; OHIRA; PEREIRA, 2018) e, assim, introduzir outras formas de ensino em Matemática.

A partir desse ponto de vista, conforme entendimento teórico dessa autora:

> A transformação da sala de aula em laboratório de ensino e aprendizagem irá gerar um novo ambiente escolar. A inserção do aluno como sujeito ativo no processo escolar possibilitará uma nova realidade na escola. Assim, é necessário desenvolver uma Metodologia para o Ensino de Matemática que agregue uma evolução tecnológico ao desenvolvimento motor, associando a investigação em sala de aula aos recursos eletrônicos e materiais didáticos artesanais construídos pelos alunos, no intuito de uma melhor compreensão dos conteúdos curriculares (DUCK, 2004, p.37).

Ademais, na atualidade, os docentes necessitam, cada vez mais, exercer um trabalho pedagógico que estimule outras formas de competências necessárias à aprendizagem do estudante, de modo diferenciado e mais próxima da realidade do mesmo. Para tanto, a aplicação de ações e ferramentas lúdicas, que envolvam esses estudantes na compreensão Matemática, têm sido evidenciadas dentro de ambientes escolares, refletindo sobre a maximização do desempenho (aprendizagem) e sobre o maior engajamento no desenvolvimento das atividades didáticas (PEREIRA *et al.*, 2019).

A Matemática, do ponto de vista lúdico e também participativo, torna-se uma ferramenta estratégica, que subsidia a capacidade de elaboração das próprias ações e materiais da prática pedagógica como recurso potencializador da aprendizagem na disciplina. Por meio dessa nova abordagem metodológica, mais compatível com este cenário de profundas mudanças e fragilidades educativas, é possível construir uma interação entre professor e alunos, a fim de estimar apropriação do conhecimento matemático, interpretação de fenômenos e articulação de métodos para argumentar e concretizar os problemas (NUNES; MENDES, 2016).

Tanto quanto aplicar o conhecimento matemático na composição de ações e instrumentos lúdicos a serem utilizados em sala de aula, o educador, que também se envolve juntamente com os seus estudantes no planejamento e na construção dos próprios objetos e métodos de estudo, tende a experienciar melhores resultados em Matemática, considerando que, ao atuarem pessoalmente na elaboração de recurso pedagógico próprio, o aluno sente-se mais motivado e concentrado para aprender (NASCIMENTO; CURI, 2018).

Logo, a utilização dos materiais manipuláveis é de suma importância para o ensino da Matemática, uma vez que proporciona o manuseio de objetos de estudo e, também, o maior contato com o conhecimento prático, além de ser um processo de constante análise sobre o recurso manuseado e que exige o uso constante dos seus conhecimentos matemáticos sobre o material trabalhado, oportunizando a reflexão da prática sobre a atuação de um problema cotidiano, estabelecer relações, aplicar o saber apropriado e, dessa maneira, evoluir na apresentação de resultados (DUCK, 2004; NUNES; MENDES, 2016; NASCIMENTO; CURI, 2018).

Conceitualmente, em um nível introdutório, define-se um material manipulável como qualquer instrumento de cunho didático-pedagógico fundamental ao desenvolvimento da aprendizagem. Existem, dentro do conceito anterior, dois segmentos de materiais manipuláveis: o estático, sendo que esse recurso não permite alteração, a partir da manipulação realizada, ou seja, preservando a sua estrutura física, onde o sujeito apenas tenta extrair informações com o seu uso a respeito do assunto abordado; e o dinâmico, que possibilita a mudança de sua estrutura física à medida que o mesmo vai sofrendo alteração no exercício da atividade experimental, facilitando a percepção das propriedades apresentadas nos conteúdos trabalhados (PEREIRA; OLIVEIRA, 2016). De acordo com argumento desses autores:

> Nesse sentido, o que entendemos por materiais manipuláveis não descarta uma folha de papel, régua, uma tesoura, pois, apesar de eles não serem necessariamente utilizados para trabalhar ideias matemáticas, podem ser usados pelos estudantes para realizarem alguma manipulação que favoreça a elaboração de conjecturas ou ideias sobre um tópico da Matemática. Desse modo, o material manipulável pode ser uma ferramenta interessante para promover a aprendizagem, uma vez que permite a manutenção de um momento grupal, no qual alguns estudantes podem interagir, trocar informações, gestos e modos de falar e agir sobre determinadas situações, a partir dos materiais manipuláveis (PEREIRA; OLIVEIRA, 2016, p. 2).

Frente à magnitude expressiva da Matemática na formação social dos sujeitos e da relevância da assimilação de seus conteúdos, em especial, a trigonometria e os conceitos associados, observa-se, pois, a necessidade de se aplicar em sala de aula uma metodologia que possa associar o conteúdo trabalhado e o cotidiano (COSTA JÚNIOR *et al.*, 2017).

Entre as modelagens matemáticas utilizadas em sala de aula, para a difusão do conhecimento trigonométrico, o Teodolito (instrumento óptico de medida utilizado para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, construção civil, navegação e agricultura e na construção das estradas) constitui-se enquanto recurso acessível para a aprendizagem, sendo, pois, um elo entre o conhecimento teórico e a prática do estudante (COSTA JÚNIOR *et al.*, 2017).

Por meio da aplicação do Teodolito como recurso facilitador da compreensão dos conteúdos didáticos, é possível relacionar medidas de ângulos aos conceitos de tangente de ângulo agudo e, dessa maneira, determinar distâncias, utilizando a trigonometria no triângulo retângulo. O uso do Teodolito é de suma importância na resolução de situações-problema do cotidiano, já que esse recurso pode auxiliar no cálculo de distâncias, sejam elas acessíveis (possíveis de mensurar) ou inacessíveis (não se pode atingir ou alcançar com facilidade) (DORNELLES *et al.*, 2014).

Para entender a Matemática e seus pressupostos, não basta apenas resolver questões propostas em exercícios; é necessário aplicá-las em situações do cotidiano, em especial por meio do emprego de mecanismos facilitadores e motivadores, como o uso da calculadora, da régua e do Teodolito. De fato, é indispensável o querer aprender e o gosto em fazer novas descobertas. Além disso, é preciso estudo e empenho contínuo, que articulem imaginação às habilidades matemáticas desenvolvidas. Nesse contexto, vejamos o que dizem estes autores:

> Ao trabalhar com diversos “problemas reais” existentes, questões sociais, econômicas, culturais e políticas são pensadas como parte do contexto no qual a Matemática está sendo desenvolvida. É na interação do aluno com esses contextos que ele se constitui enquanto um ser capaz de promover a transformação da sua realidade. Dito de outra forma, o professor, ao utilizar atividades de modelagem em sala de aula, oportunizará que o aluno esteja aprendendo para o seu conhecimento matemático e aprendendo para a sua vida social (BUENO; NETO, 2018, p. 9).

Frente à importância da trigonometria no âmbito das resoluções de problemas do cotidiano e com o intuito de propiciar meios que venham despertar no estudante o interesse pela Matemática, dentro do viés do Ensino Fundamental, é importante desenvolver um trabalho com a finalidade de compreender os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, com o auxílio do Teodolito construído em sala de aula, já que o Teodolito é um instrumento mais apropriado, por contribuir para a maximização da aprendizagem de conteúdos teóricos, despertando, dessa maneira, a curiosidade nos alunos e motivando-os para desenvolver o senso investigativo (SILVA *et al.*, 2013; COSTA JÚNIOR *et al.*, 2017).

De acordo com Silva *et al.* (2013, p. 21), "a utilização desse material concreto não terá função apenas ilustrativa, mas a produção do conhecimento será intrínseca à realização da atividade, abordando a razão trigonométrica tangente".

É importante ressaltar que, durante a construção do Teodolito, os alunos demonstraram motivação, interesse e participação coletiva e foi possível constatar que, produzindo seu próprio material, estavam desenvolvendo a capacidade cognitiva e respeito mútuo.

Notamos que, dessa forma, é mais fácil ensinar e muito mais divertido aprender, e o quanto é gratificante, quando, realmente, atividades como essas podem contribuir nos processos de ensino e de aprendizagem dos discentes.

Destacamos que a confecção do Teodolito possibilita ao professor trabalhar os conceitos matemáticos relacionados a ponto, reta, ângulos, medidas de comprimento, manuseio do transferidor, razões e proporcionalidade, simetria, semelhança e congruência de triângulos e as razões trigonométricas.

2.5 O uso do Teodolito como recurso de ensino e de aprendizagem em trigonometria para Ensino Fundamental: pressupostos centrais e estudos teóricos

O Teodolito é uma ferramenta utilizada com a finalidade de realizar medições, geralmente, na topografia e na engenharia civil, para coletar medidas de ângulos horizontais e verticais, a fim de medir a extensão de terrenos, e na construção de rodovias.

Em busca de nossos referenciais, respaldamo-nos em Moreira (2010) por estar bastante semelhante ao que acreditamos, visto que procuramos significar o ensino com a utilização de ferramentas concretas. Salientamos, assim, a sua relevância, conforme sugere o autor, a respeito da reorganização do conhecimento e importância com o uso de material potencialmente significativo:

> Nesse processo, ao mesmo tempo que está progressivamente diferenciando sua estrutura cognitiva, está também fazendo a reconciliação integradora de modo a identificar semelhanças e diferenças e reorganizar seu conhecimento. Quer dizer, o aprendiz constrói seu conhecimento, produz seu conhecimento. (MOREIRA, 2010, p. 5)

O uso prático da trigonometria no cotidiano se amplia em variados campos da Matemática. Como exemplo, podemos citar: a Engenharia Civil. Nessa área, o Teodolito é de extrema necessidade a fim de desempenhar atividades táticas, para facilitar a medição de ângulos horizontais e verticais.

O Teodolito possibilita o entendimento da trigonometria com a ajuda do triangulo retângulo, o que possibilita criar uma ligação entre o ensino da trigonometria e a realidade do estudante.

Para Ausubel (1982), a ocorrência da aprendizagem significativa pressupõe três fatores imprescindíveis, quais sejam:

• a disposição do estudante em relacionar o material a ser aprendido de modo substantivo e não arbitrário à sua estrutura cognitiva;

• a presença de ideias relevantes na estrutura cognitiva do estudante;

• material potencialmente significativo.

Dessa forma, entende-se que o material de aprendizagem deve se relacionar com a estrutura cognitiva do estudante, para que haja a aprendizagem significativa.

O outro pressuposto requer que o estudante, realmente, possua ideias para dar significado ao conhecimento na estrutura cognitiva, para, então, ter condições de relacionar, de forma substantiva e não arbitrária, o novo conteúdo com aquilo que já conhece.

Uma das condições disponíveis aos professores é o uso de materiais concretos no roteiro cotidiano de suas aulas, tornando o conteúdo mais interessante, chamando a atenção dos estudantes e, desse modo, participarem individualmente e no coletivo, expressando suas opiniões sobre o assunto estudado.

Nesse sentido, o uso desse tipo de método no âmbito do Ensino Fundamental auxilia consideravelmente nos processos de ensino e de aprendizagem dos educandos, facilitando a compreensão dos conceitos abordados.

Em diversos trabalhos, observamos a pesquisa do Ensino de Trigonometria e a utilização de materiais concretos.

Lopes (2010), em seu estudo, investigou as características e as delimitações do software GeoGebra na transferência de conhecimento de trigonometria. A autora se baseou na inquietação: "como utilizar os recursos do *software* GeoGebra para criar condições favoráveis de aprendizagem de trigonometria". A base de referência teórica foi Didática da Matemática, a Tecnologia Informática (TI), seguindo as opiniões de autores, como Borba e Penteado (2007), Valente (1999) e Zullato (2002,2007). Para tanto, foi aplicado um módulo de atividades investigativas com os estudantes e a análise das atividades contribuiu para entender a maneira de execução e construção do procedimento de mover as figuras na tela do computador. As atividades com o recurso do *software* GeoGebra levaram a afirmar sobre as alternativas e performance dos alunos face à solução de alguns problemas de Trigonometria.

Domingos Neto (2014), em sua pesquisa, investigou a qualidade do uso da calculadora científica, Teodolito, prancha trigonométrica e o *software* GeoGeobra tornando o ensino de trigonometria mais expressivo por meio da utilização de ferramentas básicas.

Tais trabalhos destacam a importância do objeto de estudo proposto nesta pesquisa. Salientamos que o material concreto ajuda no desenvolvimento da aprendizagem. O uso desse tipo de metodologia, além de transformar a sala de aula em ambiente dinâmico, possibilita a inserção do aluno como sujeito ativo no processo escolar, permitindo aos estudantes construírem os conceitos e representações que servirão de modelos matemáticos para a compreensão dos conteúdos curriculares abordados em sala de aula.

A finalidade da construção do Teodolito é utilizar o mesmo como recurso auxiliar facilitador, proporcionando ao professor atuar como mediador a partir das aplicações e manuseio desse material, tornando o ambiente escolar construtivo e motivador.

Acreditamos que esses recursos possam envolver uma variedade de elementos utilizados no suporte da aprendizagem. Com isso, eles podem servir como instrumentos necessários para uma melhor compreensão de conceitos, envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo, contribuindo, assim, na aprendizagem dos estudantes.

Capítulo 3

MARCO METODOLÓGICO DA PESQUISA

3.1 Tipo de estudo

A pesquisa caracteriza-se como um estudo de caso exploratório e de análise comparativa, com abordagem predominantemente qualitativa. A partir disso, buscamos investigar o nível de aprendizagem dos alunos antes e após a aplicação do uso do Teodolito como recurso facilitador na transmissão dos conteúdos didáticos acerca das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Assim, nesse sentido:

> O objetivo de uma pesquisa exploratória é familiarizar-se com um assunto ainda pouco conhecido, pouco explorado. Ao final de uma pesquisa exploratória, você conhecerá mais sobre aquele assunto, e estará apto a construir hipóteses. Como qualquer exploração, a pesquisa exploratória depende da intuição do explorador (neste caso, da intuição do pesquisador). Por ser um tipo de pesquisa muito específica, quase sempre ela assume a forma de um estudo de caso. (GIL, 2008, p. 119).

A partir do estudo exploratório e qualitativo, associado ao estudo e aos métodos de análise comparada, pretendemos investigar as dificuldades na aprendizagem e também a assimilação dos conteúdos das razões trigonométricas, observando, dessa forma, se o uso do Teodolito confeccionado em sala de aula efetivou-se como ferramenta de ensino e aprendizagem exitosa.

O local de desenvolvimento da pesquisa foi o Colégio da Polícia Militar de Pernambuco, Anexo I, na cidade de Petrolina-PE, com uma amostra de 60 (sessenta) alunos de duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II. Como critérios de inclusão, admitimos somente a participação dos estudantes das duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, independentemente da idade, o desempenho apresentado na disciplina e o gênero, enquanto, em relação aos critérios de exclusão, foram desconsiderados alunos de outras séries (6º ao 8º anos, como também, do Ensino Médio), bem como discentes com menos de 40% de frequência às aulas da disciplina Matemática.

A limitação do universo da pesquisa aos 60 discentes das duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental ocorre, pois essa investigação foi fundamentada pela representação dos alunos da respectiva unidade de Ensino.

A partir dos testes e da atividade prática realizados no Colégio da Polícia Militar de Pernambuco Anexo I, que faz parte desta pesquisa, tivemos a participação de alunos do sexo masculino e feminino.

Os dados da presente investigação foram coletados por meio de dois testes e atividade prática realizada com os mesmos.

Após a coleta dos dados e, também, a observância do método comparativo, foi desenvolvido um sistemático levantamento teórico para fundamentar os resultados encontrados nas duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, com a finalidade de perceber a relevância de se utilizar a metodologia alternativa, a exemplo do Teodolito confeccionado com material manipulável, que possa, assim, facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos associados à prática e ao cotidiano.

Os dados qualitativos foram obtidos a partir da aplicação dos testes 1 e 2 (Apêndices A e C) e atividade prática (Apêndice B) previamente agendados com os alunos e as soluções das atividades práticas e comentários apresentados no (Apêndice D).

Após a aceitação do gestor do colégio e dos discentes, as atividades foram registradas por meio de fotos, mantendo-se o sigilo dos nomes dos participantes.

Materiais utilizados

Para a confecção do Teodolito com os discentes, a aula foi iniciada com um diálogo sobre como se monta o aparelho.

Logo depois, os alunos compreenderam que seria possível construir o Teodolito artesanal, utilizando apenas os seguintes materiais:

- Transferidor de 180º sendo 1 em madeira tamanho maior e 5 de plástico;
- Canudo de aproximadamente 15 cm a 20 cm;
- Cola quente;
- Fita adesiva;
- Barbante de 10 cm de comprimento;
- Porca de parafuso;
- Tesoura;

Passo a passo da construção do Teodolito artesanal

Para a construção do Teodolito artesanal, foi feita uma pesquisa do modelo mais simples e viável, tanto na construção como na utilização do mesmo na atividade prática.

1. Com a ponta da tesoura foi feito um furo no centro de cada transferidor, para ser colocado o barbante;

2. Colamos o canudo de forma adequada (na posição de melhor apoio para o aluno) com cola quente no transferidor de madeira e cola durex nos transferidores de plástico;

3. Demos um nó em uma das extremidades do barbante e passamos pelo furo do transferidor e, na outra extremidade, colocamos a porca de parafuso para servir de peso.

Figura 3.1 – Confecção do Teodolito pelos alunos

Fonte: Acervo pessoal

Aplicação do Teodolito Artesanal na atividade prática

Logo após a conclusão da confecção do Teodolito e feitas algumas observações a respeito do uso adequado, foi a vez de realizarmos a atividade prática. Nesta etapa, cada grupo recebeu a missão de determinar a altura da caixa d'água e do pilar da cobertura do pátio (Figura 3.6).

A realização dessa atividade contou com a colaboração de alguns monitores, para auxiliar os alunos na coleta dos dados. Em cada grupo, os alunos se organizavam a fim de atribuir uma função para realizar a tarefa: um seria o observador para utilizar o Teodolito; encontrar a medida do ângulo da altura dos seus olhos; o ponto mais alto do pilar e da caixa d'água, a uma distância qualquer do ponto de observação. Outros faziam a medição dessa distância com a trena, enquanto os demais faziam as anotações necessárias (Figura 3.2). Ao final da coleta dos dados, os alunos voltavam para a sala onde faziam as discussões e realizavam os cálculos necessários, utilizando a relação $\tan\alpha = \frac{catetoopostoaonguloα}{catetoadjacenteaonguloα}$, no qual $\alpha = (90 - \beta)$ representa o ângulo de visão do observador e β é o ângulo apontado pelo transferidor, para, assim, encontrar parte da altura do pilar e, em seguida, somar com a altura do observador (Figura 3.5), e com isso encontrar a altura total do pilar.

Seguem abaixo algumas fotos registradas durante a realização da atividade e, em seguida, algumas considerações a respeito das resoluções encontradas por cada grupo.

Figura 3.2 – Medindo ângulo e a distância do pilar ao observador

Fonte: Acervo pessoal

Figura 3.3 – Medindo a distância do observador ao pilar

Fonte: Acervo pessoal

Figura 3.4 – Medindo o ângulo e alunos observando

Fonte: Acervo pessoal

Figura 3.5 – Medindo altura do observador

Fonte: Acervo pessoal

Figura 3.6 – Caixa d'água e pilar da cobertura do pátio.

Fonte: Acervo pessoal

Para concluir a pesquisa, foi realizado um segundo teste sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo, a fim de verificar as contribuições dessa metodologia no processo de ensino e de aprendizagem. Os resultados e as análises desses dados estão apresentados no capítulo 4.

Assim, podemos destacar que esse tipo de metodologia permite ao aluno ao trabalhar com situações ligadas à sua realidade; faz com que ele compreenda de fato os conceitos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam um instrumento capaz para resolver problemas nem para a aprendizagem nem para a construção de novos conceitos.

> É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidade intelectuais, na estrutura do pensamento, na aquisição do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação em problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo de trabalho e no apoio à construções de conhecimentos em outras áreas curriculares. (PCNs, 2000,p.58).

Portanto, é fundamental que, em sua prática pedagógica, o professor utilize uma metodologia que contribua para o desenvolvimento escolar dos alunos. Nessa perspectiva, faz-se necessário uma discussão praticada de forma coletiva, fruto de debates e da consistência de propósitos que envolvem conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo.

Capítulo 4

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 Resultados e discussões da abordagem qualitativa

Resultados – Alunos

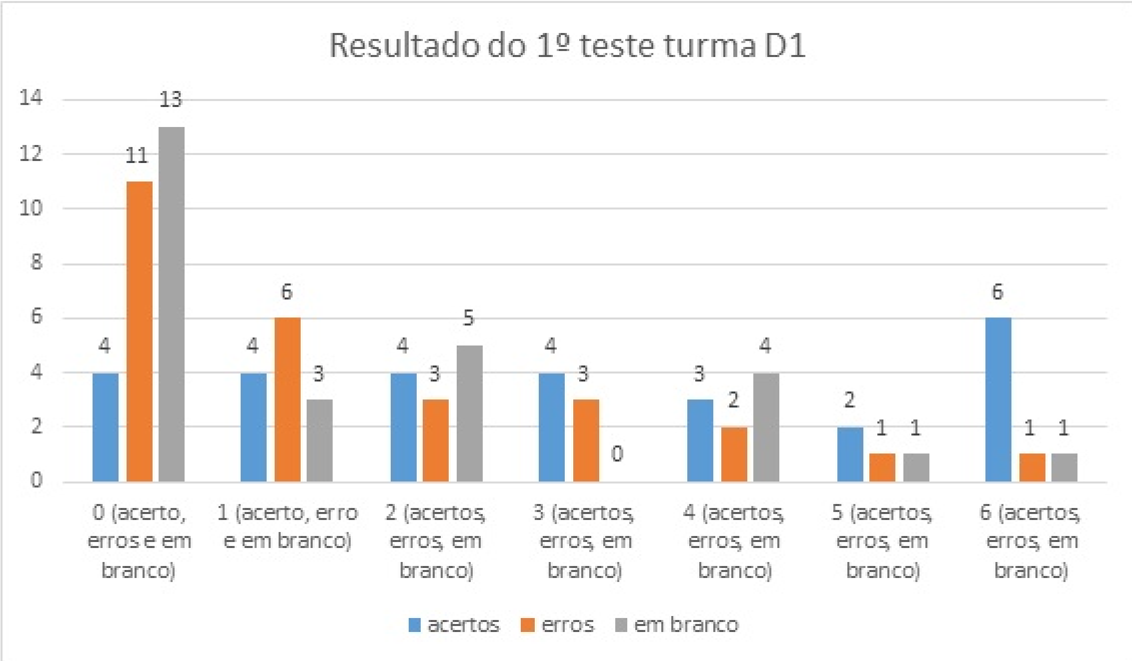
Os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação para a realização do estudo dos dados foram coletados por meio de aplicação de duas atividades. Por meio do estudo dos dados, ficou constatado que a maioria dos alunos não obteve bons resultados no primeiro instrumento avaliativo. Esses dados serão apresentados e analisados a seguir.

4.1.1 Dados coletados no primeiro teste (instrumento) de pesquisa

O primeiro teste da pesquisa (Apêndice A), contendo 6(seis) questões, foi respondido por 54 alunos, de duas turmas do 9º ano (D1 e D2) do Ensino Fundamental, em duas aulas de 45 minutos cada. A realização do primeiro teste foi antes da aplicação da atividade prática. A seguir, são apresentados os resultados referentes ao primeiro teste nas turmas avaliadas (Figura 4.1) e (Figura 4.2).

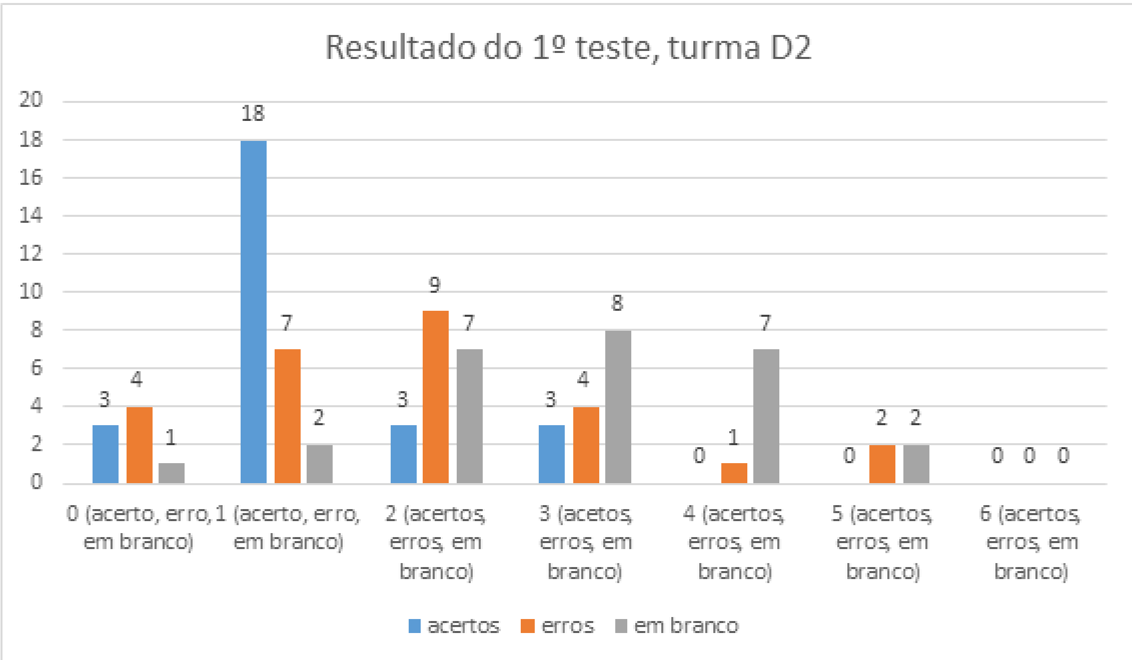
Nos gráficos apresentados nesta seção, o eixo horizontal refere-se ao total de acertos, erros e questões em branco nos testes realizados, enquanto o eixo vertical apresenta o número de alunos que obtiveram esses resultados.

Figura 4.1 – Gráfico 1: Resultados do primeiro teste turma D1



Fonte: Acervo pessoal

Figura 4.2 – Gráfico 2: Resultados do primeiro teste turma D2.



Fonte: Acervo pessoal

De acordo com os dados obtidos neste primeiro teste por meio da pesquisa realizada, verificou-se que não há um resultado satisfatório. No entanto, pela análise desses dados, percebe-se que, na turma D1, 6(seis) alunos obtiveram 100% de aproveitamento, enquanto 1(um) aluno errou todas as questões. Por outro lado, a maioria dos estudantes errou ou deixou em branco uma grande quantidade de questões. Observa-se que a turma D2 apresenta um resultado inferior. Nessa turma, 18 alunos obtiveram apenas um acerto e nenhum aluno conseguiu acertar 4 ou mais questões.

Esses resultados mostram a realidade dos alunos, que não tinham conhecimento básico necessário no assunto abordado. Com isso, é imprescindível refletir sobre a colaboração estratégica que a Matemática exerce na formação dos educandos, sendo, portanto, fundamental para a construção de mecanismos de ensino e de aprendizagem que se constituem mais exitosos.

A Matemática, como disciplina que contribui para o exercício da cidadania, nem sempre é trabalhada e concebida de maneira a produzir nos alunos a percepção de associação do saber com a prática cotidiana, o que potencializa, consideravelmente, a sua compreensão como significante apenas para a realização de exames e, também, para a memorização de fórmulas e padrões lógicos pouco usuais.

Nesse sentido, considerando a importância da Matemática como um meio de participação e atuação no contexto social e no exercício da cidadania, sabe-se que, sob a ótica do baixo nível de desempenho e aprendizagem Matemática evidenciado no viés da educação brasileira, torna-se preponderante idealizá-la como instrumento que potencialize o desenvolvimento formal e social dos estudantes, munindo-os com os conhecimentos necessários para transformá-los em agentes de mudança social e de eficiente engajamento no cotidiano, assim, sempre que há um tipo de troca (relação) existe aprendizagem, afirma (VYGOTSKY, 2003).

De modo especial, o ensino de trigonometria é abordado, muitas vezes, por alguns docentes de forma tradicionalista, onde há por parte do aluno uma aprendizagem de forma mecanizada, utilizando-se da memorização, o que gera em muitos alunos uma dificuldade maior de assimilação. Tal dificuldade está em relacionar as razões trigonométricas no triângulo retângulo a situações do cotidiano do sujeito. Assim, da maneira como muitos destes conhecimentos são apresentados e abordados em sala de aula, utilizando de metodologias tradicionais, cria-se uma aversão a esta disciplina tão importante do conhecimento (NUNES; MENDES, 2016).

4.1.2 Dados coletados na prática com o uso do Teodolito Artesanal

Diante dos resultados no primeiro teste, percebemos a necessidade de desenvolver a atividade prática, dando condições para uma aprendizagem significativa. No experimento, adotamos o Teodolito artesanal como ferramenta auxiliar para incentivar na referida atividade, fazendo, assim, uma ligação entre os conteúdos estudados na sala de aula e sua aplicação no cotidiano. O objetivo dessa etapa era descobrir o domínio que os participantes têm em relacionar os conceitos, envolvendo a razão trigonométrica tangente, para determinar a altura desejada.

Assim, e de posse do material necessário para coletar os dados, foi possível perceber que, durante a realização da atividade prática, os alunos concluíram com êxito a mesma. Portanto, acreditamos que atividades trabalhadas de forma dinâmica, podem favorecer o ensino e a aprendizagem, uma vez que possibilitam ao aluno a vivenciar a Matemática por meio de métodos inovadores e, assim, proporcionando um ensino com mais qualidade.

Verificamos, no andamento da atividade, que os estudantes apresentavam algumas dificuldades relacionadas à utilização do Teodolito, bem como à associar os dados coletados com o desenho construído. Também surgiram alguns questionamentos a respeitos da diferença dos resultados encontrados por cada grupo. Diante disso, foram feitas intervenções para o esclarecimento das dúvidas apresentadas em sala de aula. Ao finalizar esta atividade, pudemos destacar, através dos resultados, que foi possível compreendermos as relações trigonométricas no triângulo retângulo, através do uso do Teodolito, uma vez que os estudantes conseguiram avançar, reduzindo, assim, a quantidade de questões em branco e também em relação a quantidade de erros. Apesar desses avanços, sabemos que, ainda, temos muito a fazer, para que possamos atingir o máximo possível de estudantes.

Para a realização da atividade prática, a turma D1 foi dividida em 5 grupos e cada grupo, com o auxílio do Teodolito teve a tarefa de encontrar a medida do ângulo de visão e, assim, usar a relação tangente e encontrar a altura da caixa d'água, pilar da cobertura do pátio e da sala. Observamos, nesta etapa da pesquisa, que 80% dos participantes obtiveram êxito na tarefa realizada, fazendo, pois, uma relação com os conteúdos das aulas e a prática.

Após a realização desta atividade prática, foi aplicado um segundo teste, nas duas turmas, para verificar a eficácia da metodologia não convencional, com o uso de materiais manipuláveis (Teodolito artesanal).

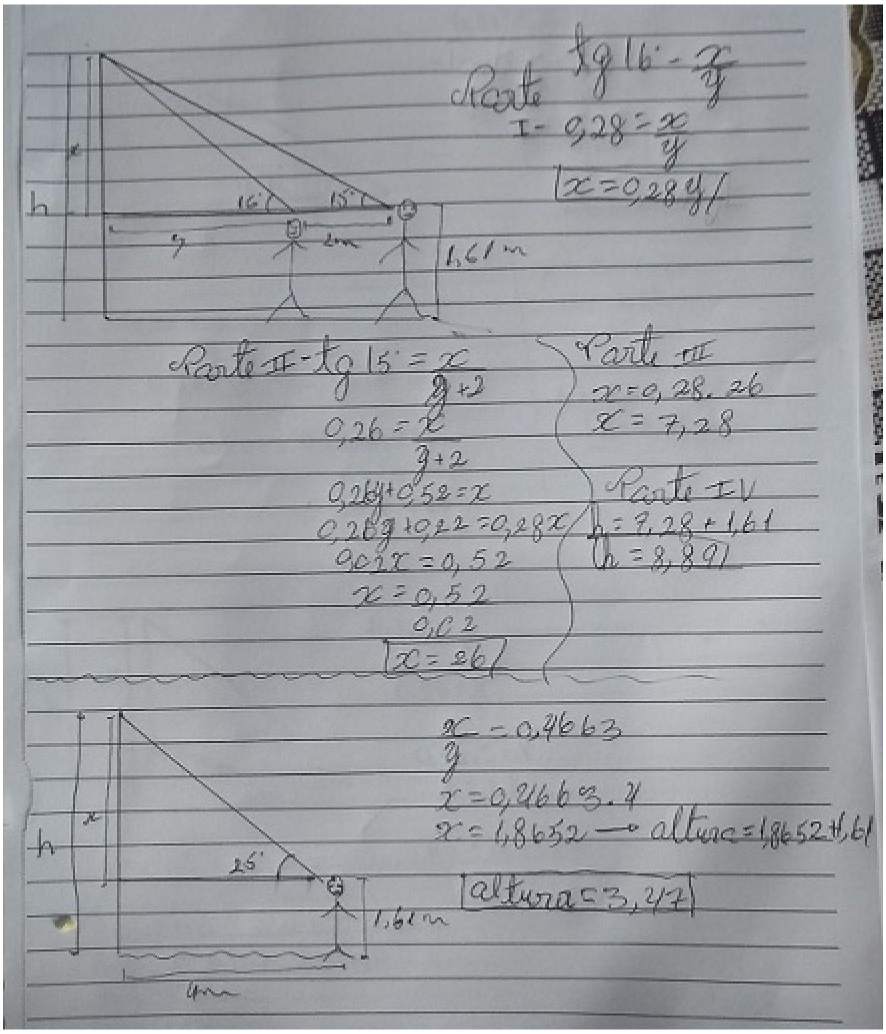
Na conclusão desta atividade, fizemos o seguinte questionamento: “A atividade prática com o uso do Teodolito ajudou a compreender melhor as razões trigonométricas no triângulo retângulo?” a) Sim b) Não

Diante das respostas, podemos destacar que foi satisfatório o resultado, pois dos 27 alunos participantes da atividade, 23 alunos responderam sim, justificando que aplicação do Teodolito tinha facilitado a compreensão do conteúdo; 1 aluno disse que não tinha visto nenhuma diferença, ou seja, que a atividade não contribuiu na sua aprendizagem e 3 alunos deixaram em branco. Assim, consideramos que a atividade desenvolvida contribuiu na aprendizagem dos alunos.

4.1.2.1 Exposição das soluções nas atividades com o uso do Teodolito artesanal

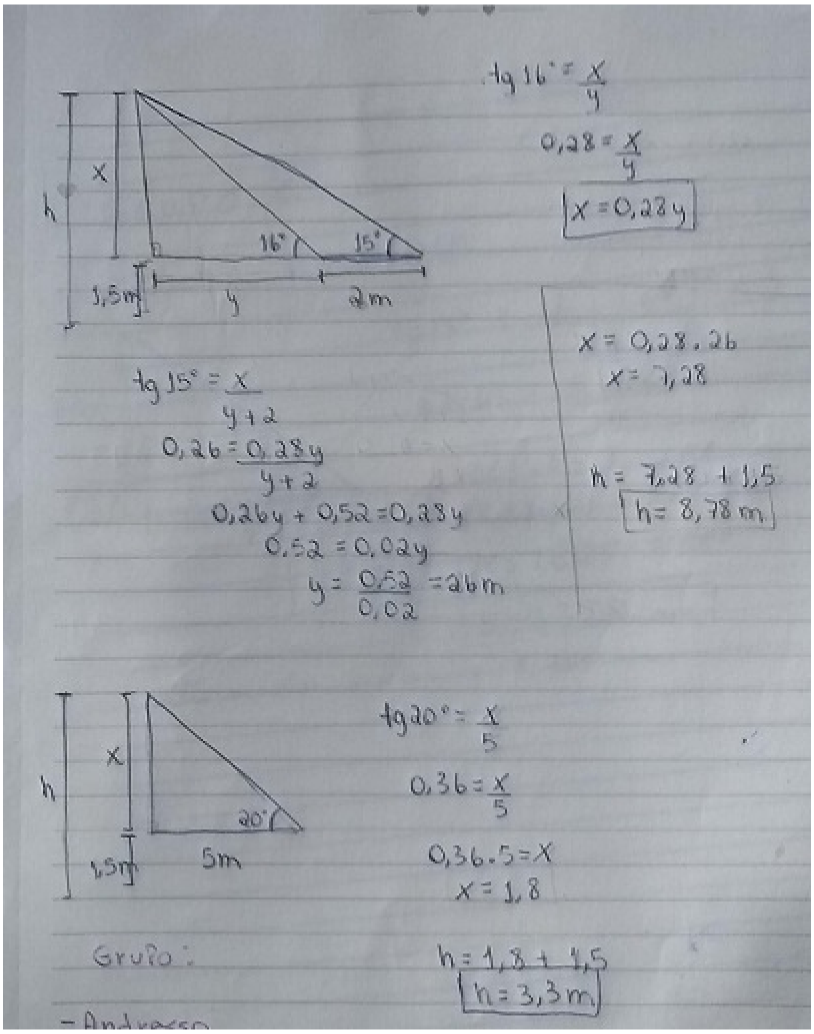
Segue, abaixo, a exposição de algumas das soluções dos grupos na atividade pratica. Dentre as várias opções, foram escolhidos a altura do pilar da cobertura do pátio e altura da caixa d’água. Assim, cada grupo ficou responsável para realizar a atividade.

Figura 4.3 – Solução da atividade prática apresentada pelo grupo A. (1ª solução altura da caixa d'água e a segunda altura do pilar).



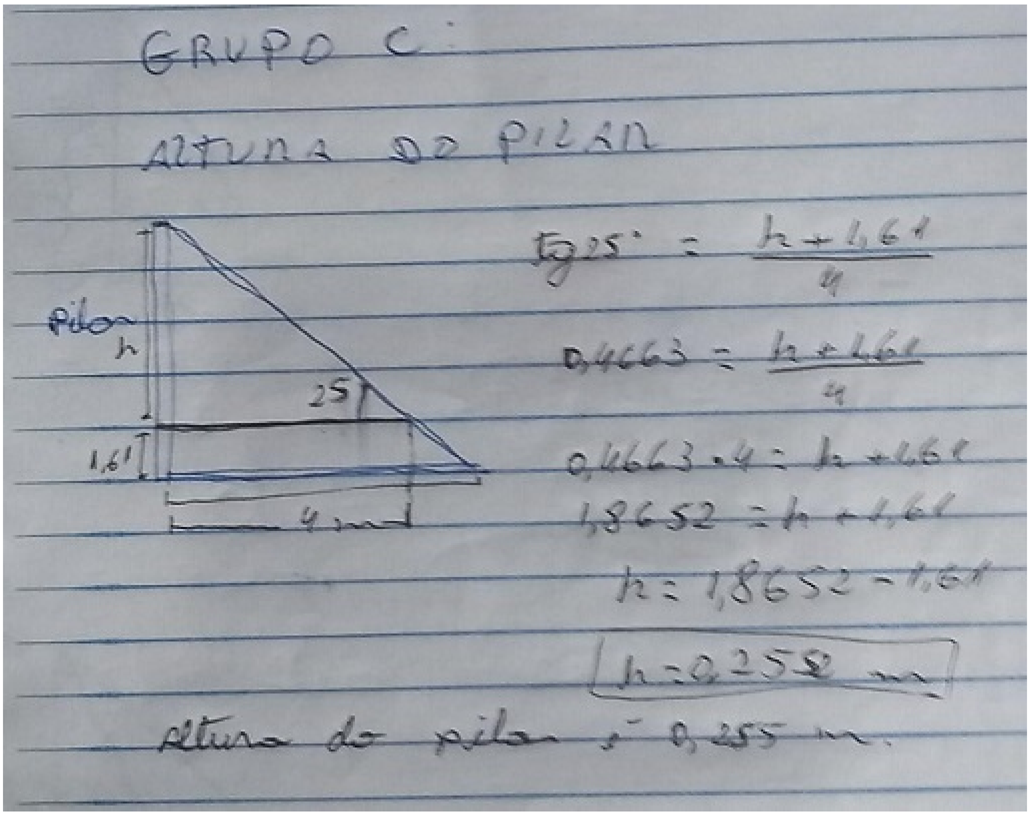
Fonte: Acervo pessoal

Figura 4.4 – Solução da atividade prática apresentada pelo grupo B. (1ª solução altura da caixa d’água e a segunda altura do pilar)



Fonte: Acervo pessoal

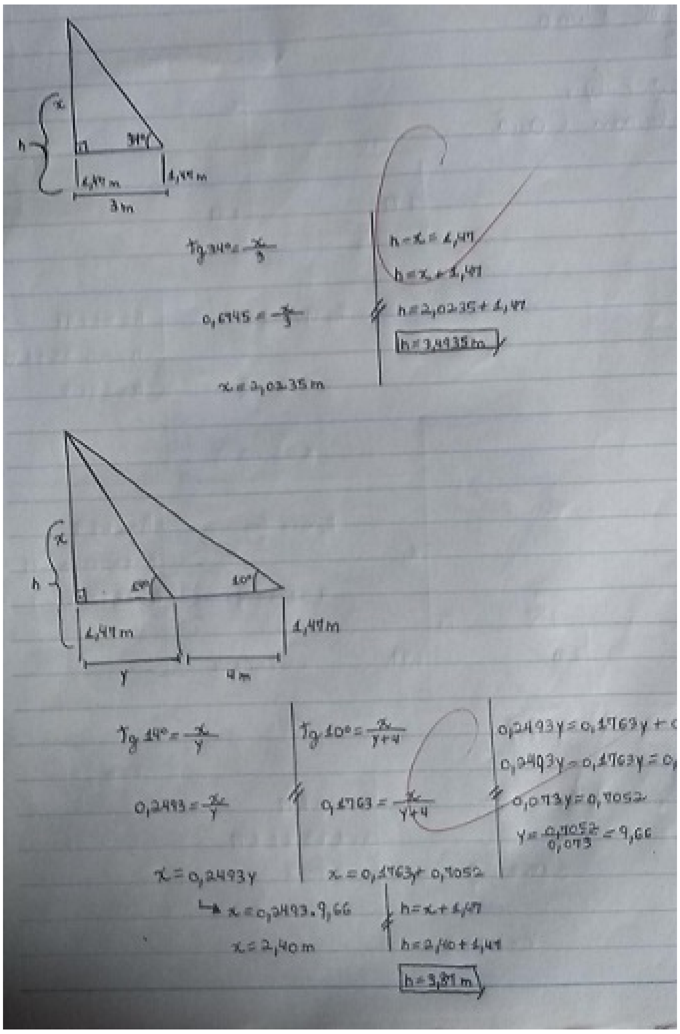
Figura 4.5 – Solução da atividade prática apresentada pelo grupo C. (1ª solução altura do pilar e a segunda altura da caixa d'água).



Fonte: Acervo pessoal

Percebemos que, apesar de o grupo C ter descrito o procedimento correto na representação do desenho para a solução da situação, o mesmo cometeu um erro ao somar o valor da altura do observador ao cateto oposto e utilizar a altura total (h + 1,61) na relação e, com isso, encontrou um valor não esperado. O grupo não esteve atento ao desenho que eles construíram, pois, à medida que realizaram a soma, e ao utilizarem no cateto oposto, não verificou que a distância do observador aumentaria, e mesmo que observasse a variação da distância e tentasse apresentar uma solução, encontraria uma situação mais complexa. Esse grupo não conseguiu encontrar a altura da caixa d'água.

Figura 4.6 – Solução da atividade prática apresentada pelo grupo D. Esse grupo apresentou duas maneiras diferentes para calcular a altura do pilar



Fonte: Acervo pessoal

De acordo com os resultados acima apresentados pelos grupos, percebemos que os grupos A, B e D conseguiram realizar com êxito a atividade proposta, encontrando os resultados com aproximações dentro do esperado. Dessa forma, podemos ressaltar que esses resultados mostram que nesta pesquisa, houve, por grande parte dos alunos, uma compreensão do assunto estudado através da aplicação do material aplicado. Além disso, observamos o quanto os estudantes conseguiram avançar com seus erros, nos quais identificaram os procedimentos corretos para a resolução das demais atividades.

Destacamos que, após a aplicação da atividade prática, foi possível comprovar que os alunos obtiveram êxito na resolução das atividades posteriores, apresentando uma redução no número de questões em branco e, também, verificar a eficácia da metodologia do Teodolito utilizada em uma das turmas do 9º ano do Ensino Fundamental.

Entres os vários mecanismos que podem ser utilizados, por professores nas aulas de Matemática, a fim de auxiliar o ensino e a aprendizagem, estão os materiais manipuláveis. Por isso, o uso e a confecção do Teodolito define-se como uma estratégia do processo de ensino, que desencadeia em práticas mais facilitadas de compreensão dos conceitos e de métodos trigonométricos, envolvendo o triângulo retângulo, enquanto fundamento matemático relevante para os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. O Teodolito é um ótimo recurso para a aplicação do conteúdo das razões trigonométricas, pois sua utilização possibilita aos estudantes porem em prática os conceitos trigonométricos associados ao cotidiano (COSTA JÚNIOR *et al.*, 2017).

Com a confecção e aplicação do Teodolito com uma das duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, esse material pode ajudar na evolução do desempenho dos estudantes nos cálculos e no entendimento dos conceitos trigonométricos em um triângulo retângulo.

Desse modo, nosso trabalho oportunizou aos estudantes a utilização de materiais dinâmicos, lúdicos nas aulas de Matemática. Além disso, constatamos a relevância do emprego de materiais manipuláveis nas didáticas e práticas de ensino, assim como a importância de associar conteúdo com aplicação que pode ser utilizado na prática cotidiana.

No desenvolvimento desta atividade, podemos observar a curiosidade dos alunos em encontrarem alturas de objetos sem a necessidade de medir, bem como a satisfação dos mesmos ao perceberem a importância que a Matemática exerce no cotidiano. Por mais complicada que seja, diante da satisfação dos alunos, destacamos que, quando se faz um trabalho voltado para a aplicação de conteúdo à realidade dos alunos, é possível sanar algumas dificuldades encontradas, além de tornar as aulas mais atrativas.

Durante a realização desta atividade, percebemos o quanto é gratificante o reconhecimento pelos alunos, quanto à contribuição de um trabalho tão simples como este, e que faz a diferença na aprendizagem. É importante salientar que, muitas vezes, “a Matemática é geralmente considerada uma ciência à parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra de um gabinete fechado, onde não entram ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores do homem. Porém, isso só é verdade em parte." (CARAÇA, 1975, p. 13). Desde a hora em que acordamos ao momento em que vamos dormir, vivenciamos a Matemática em nossas vidas e utilizamos conceitos matemáticos incorporados às nossas atividades diárias.

Foi possível constatar as contribuições deste trabalho por meio de comentários feitos pelos estudantes, nos quais destacam que, apesar das dificuldades em assimilar os conteúdos de Matemática, conseguiram realizar as atividades de forma prática e, além disso, percebemos a empolgação dos alunos durante a realização da atividade, desde a construção do Teodolito até a finalização da tarefa, bem como a interação e a participação de todos na busca de solucionar e encontrar os resultados. Esses resultados só foram possíveis devido ao empenho de cada um dos estudantes, por terem engajado no projeto com responsabilidade e compromisso. O grau de satisfação dos alunos pode ser observado nos comentários apresentados na (Figura 4.7).

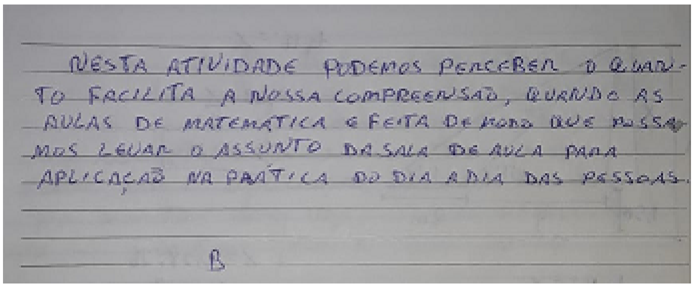
Esta atividade proporcionou a participação dos alunos na compreensão dos conceitos das razões trigonométricas, contribuindo, assim, com o ensino e a aprendizagem, além de ser uma atividade diferenciada com o manuseio de objetos físicos, envolvendo situações práticas. Ao concluírem e apresentarem os resultados, surgiram algumas dúvidas a respeito dos resultados encontrados por cada grupo, tais como: por que a altura do pilar varia de resultado de um grupo para outro? Não era para ser o mesmo?

Após esses questionamentos, foi explicado que essas diferenças mínimas vão ocorrer e isso acontece devido a algumas medições, tais como: o modelo utilizado não oferece um valor exato da medida do ângulo. Sendo assim, a altura que desejamos encontrar é aproximada. Além disso, outros erros podem ter sido cometidos na coleta da distância do objeto ao observador, ao aproximar a medida do ângulo e, até mesmo, na medição da altura do observador.

Apesar dessas observações, o resultado esperado para a altura do pilar era entre 3 e 3,5 metros; para a altura da caixa d'água entre 8,5 e 9,5 metros e foi verificado que a maioria dos grupos encontrou a resposta esperada.

Apresentaremos, a seguir, os comentários feitos por um dos grupos, destacando a importância da realização da atividade prática.

Figura 4.7 – Grupo B:


NESTA ATIVIDADE PODEMOS PERCEBER O QUAN-
TO FACILITA A NOSSA COMPREENSÃO, QUANDO AS
AULAS DE MATEMÁTICA É FEITA DE MODO QUE POSSA-
MOS LEVAR O ASSUNTO DA SALA DE AULA PARA
APLICAÇÃO NA PRÁTICA DO DIA A DIA DAS PESSOAS.
B

Fonte: Acervo pessoal

Diante dos comentários expostos, podemos destacar a relevância de realizar um trabalho voltado a situações práticas do dia a dia, contribuindo para promover uma análise das propostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar e contestar.

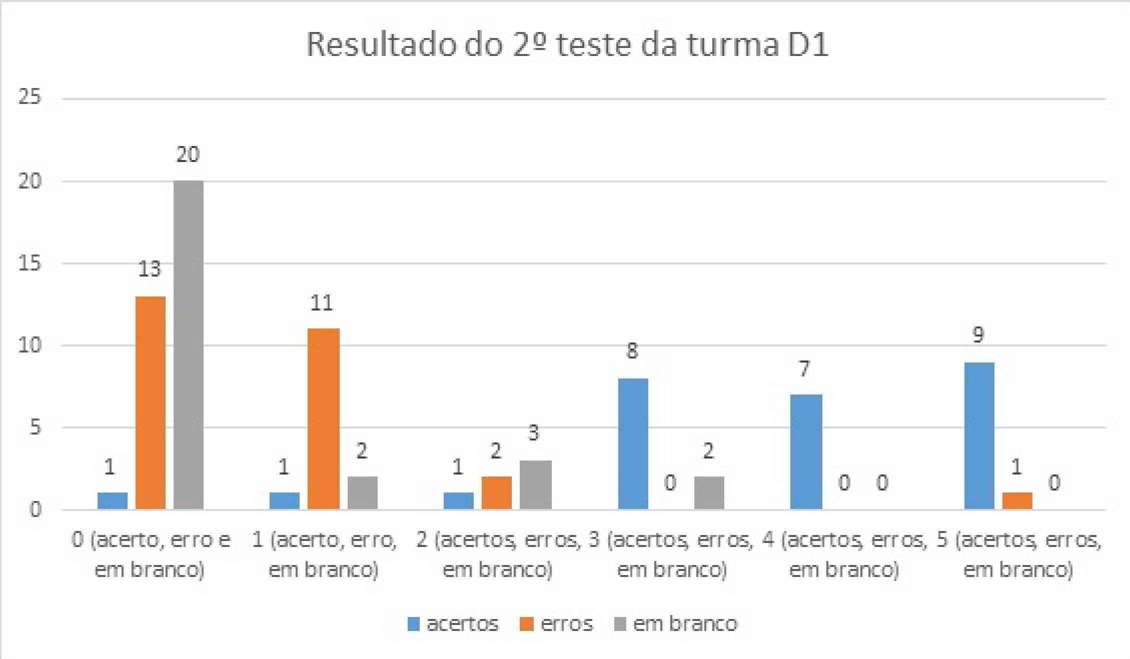
Observamos, nas falas dos estudantes, a importância da atividade prática, uma vez que, por meio da mesma, foi possível relacionar os conceitos estudados em sala de aula, despertando no aluno o interesse pelo tema abordado, enfatizando o quanto foi gratificante a participação nessa atividade, contribuindo no processo de ensino e de aprendizagem. Essas contribuições podem ser observadas nos resultados do segundo teste, já que os alunos apresentaram um rendimento melhor que no primeiro teste.

4.1.3 Dados coletados no segundo teste (instrumento) de pesquisa

O segundo teste da pesquisa (Apêndice C), contendo 5(cinco) questões, foi respondido por 52 alunos, de duas turmas do 9º ano (D1 e D2) do Ensino Fundamental II, em duas aulas de 45 minutos cada. Os resultados obtidos nesta etapa da pesquisa serão apresentados e analisados a seguir:

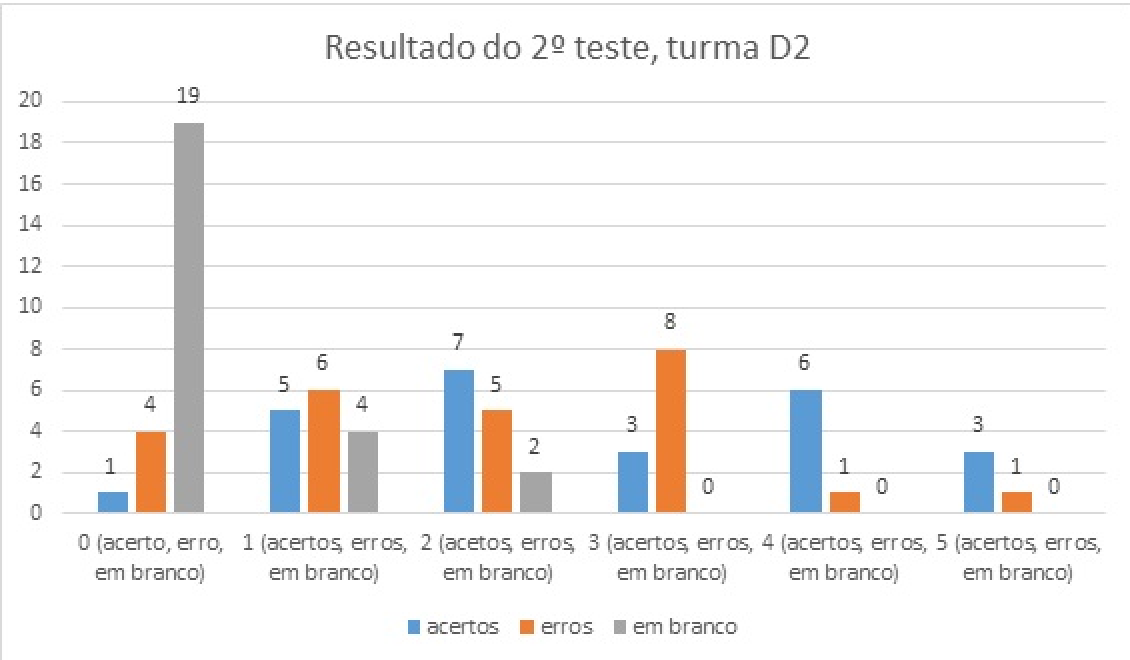
Nas (Figuras 4.8 e 4.9), estão representados os resultados do segundo teste nas turmas D1 e D2.

Figura 4.8 – Gráfico 4: resultados do segundo teste turma D1



Fonte: Acervo pessoal

Figura 4.9 – Gráfico 5: resultados do segundo teste turma D2



Fonte: Acervo pessoal

De acordo com os dados expostos no gráfico 4.8 e 4.9, percebemos que: a turma D1 obteve, em média, 3 acertos por aluno no primeiro teste, tendo, assim, um aproveitamento de 50% em relação ao total de questões. No segundo teste, essa mesma turma conseguiu, em média, 3,7 questões corretas e, assim, conseguindo

74% de rendimento, nesta atividade. Enquanto a turma D2 conseguiu 1,26 acertos por estudante no primeiro instrumento avaliativo e, assim, conseguindo apenas 21% de aproveitamento desta atividade, no segundo teste, obtiveram 2,8 acertos em média e tiveram 56% de aproveitamento por aluno.

No entanto, no que se refere aos erros, observamos que a turma D1 tinha em média 1,52 erros por aluno na primeira atividade e, na segunda, 0,74 erros por aluno, obtendo, assim, uma redução de 51% em relação à primeira atividade. Já a turma D2 obteve em média 1,89 erros por estudante no primeiro instrumento avaliativo e 1,96 erros em média no segundo, um aumento de 3,7% na segunda atividade em relação à primeira.

Diante dos resultados obtidos nesta pesquisa, verificamos que há um elevado índice de aproveitamento escolar na disciplina Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental, quando se faz o uso de metodologia alternativa, associando os conteúdos estudados em sala de aula com a prática. Portanto, o emprego de material concreto nas aulas em geral e, em específico, nas aulas de Matemática, oportuniza ao estudante um acesso maior a recursos que facilitem sua compreensão. E isso acarreta a diminuição da dificuldade de aprendizagem, pois o sujeito passa a ter uma visão real do problema proposto. A utilização do Teodolito artesanal como recurso manipulável, contribui para à aprendizagem, pois o mesmo desperta curiosidade, torna o ambiente favorável a discussões e associa teoria a prática (SILVA *et al.*, 2013; COSTA JÚNIOR *et al.*, 2017).

Os materiais manipuláveis são objetos lúdicos dinâmicos e intuitivos, com uso no cotidiano escolar, que têm como objetivo auxiliar na definição e na classificação de conceitos que, conforme o seu nível de abstração e dificuldade na assimilação, necessitam de um maior suporte físico para orientar a compreensão, formalização e estruturação dos mesmos (SANTANA, 2019).

Nesse sentido, o uso desse tipo de metodologia pode auxiliar no ensino - aprendizagem dos alunos, estimulando-os a questionar, levantar hipóteses e sugerir opiniões. Assim, uso de materiais didáticos para auxiliar o processo de ensino e de aprendizagem pode ser uma grande ferramenta à disposição do professor de Matemática. Sua aplicação permite ao aluno desenvolver habilidades e colocar sentido no objeto em estudo, conseguindo compreender e entender melhor o assunto.

Diante dos resultados, é necessário incentivar a criatividade dos alunos, priorizar a construção do conhecimento pelo fazer e pensar do aluno, facilitando a aprendizagem. O professor deve ter a capacidade para a adaptação de métodos pedagógicos, ser competente em termos de escolha da metodologia pela qual tais conteúdos serão trabalhados, incluindo, necessariamente, o domínio dos instrumentos que permitem proporcionar um aprendizado eficiente e de qualidade. Nesse sentido, torna-se necessário que os professores desenvolvam conhecimentos que extrapolem as fronteiras de sua disciplina, posicionando-se como "pesquisador", procurando relacionar Matemática e sociedade, fazendo reflexão sobre sua prática.

Capítulo 5

CONCLUSÕES

5.1 Considerações finais

Esta pesquisa teve como objetivo investigar o uso do Teodolito artesanal como recurso, que contribui no processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, na resolução de situações problemas das razões trigonométricas. Destacamos a importância de nosso trabalho por ter motivado a elaboração e a execução de uma ferramenta pedagógica eficaz, possibilitando construir novos saberes sem a necessidades da memorização de fórmulas matemáticas.

Dessa forma, propusemos uma experiência em que os alunos puderam criar significado entre o ensino das razões trigonométricas e situações do cotidiano. Com isso, buscamos estimular a participação de todos na construção do conhecimento. Assim, acredita-se que a utilização de materiais manipuláveis, nas aulas de Matemática, possibilita ao estudante o prazer pela descoberta e abstração de fórmulas matemáticas, evitando a memorização desses conceitos e fórmulas, tornando o ensino mais criativo e dinâmico.

Nesse sentido, o propósito do ensino é indicar estratégias que auxiliem o estudante a encarar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, na construção do seu próprio conhecimento.

No entanto, a prática, mais frequente, de estratégias metodológicas, consiste em transmitir um conceito, procedimento ou técnica. Porém, os enfrentamentos aos desafios enfrentados pelo professor não são tarefas simples, não podem ser feitas solitariamente, mas muitos professores já estão trabalhando para mudar isso.

Acreditamos, assim, que nossos objetivos foram atingidos, uma vez que conseguimos obter êxito nas atividades após a aplicação do nosso objeto de estudo. Além disso, ressaltamos que esta pesquisa facilitou o ensino e aprendizagem, por permitir estabelecer uma relação entre o conteúdo estudado e a aplicação na prática.

Consideramos que a experiência se mostrou interessante para o ensino do tema abordado, pela análise do trabalho no coletivo, estimulando os alunos a repensarem sobre o uso no seu dia a dia.

A praticidade da construção do Teodolito em sala de aula propiciou aos estudantes mais interação com os colegas de sala e possibilitou desenvolver habilidades com o conteúdo estudado.

Nos dias atuais, ensinar os conteúdos matemáticos requer conhecer e compreender a realidade dos estudantes para vivenciar o ensino de qualidade. Portanto, a Matemática a ser ensinada na escola deve estar inserida no cotidiano, associada a situações-problema do dia a dia.

Na realização desta pesquisa, colocamos em prática a ideia de se vivenciar o tema confeccionando o próprio Teodolito, propondo atividades práticas relacionadas aos conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Assim, é fundamental que o professor conheça diversas possibilidades de trabalhar em sala de aula, em busca de transformar sua prática mais criativa na condução de um aprendizado significativo.

Podemos destacar que, nas razões trigonométricas, o Teodolito artesanal está entre as principais ferramentas que o professor pode utilizar a fim de fornecer contexto aos problemas, servindo como estratégia para a construção da aprendizagem.

Destacamos, neste estudo, o desenvolvimento da capacidade dos alunos em produzir sua própria ferramenta, contribuindo para desenvolver suas habilidades em relação à aprendizagem em Matemática. Assim, é fundamental utilizar-se de ferramentas que possam estabelecer um significado entre o cotidiano e conteúdo de Matemática.

Podemos constatar que a utilização do Teodolito como ferramenta auxiliar foi eficaz, pois produziu bons resultados, despertou nos participantes o interesse pelo assunto abordado, além de tornar o ambiente favorável a discussões e possibilitou aos alunos a associarem a teoria do conteúdo a prática, fazendo com, que estudantes percebessem a importância da Matemática nas resoluções de situações do dia a dia.

Da análise dos resultados, podemos afirmar que houve uma evolução conceitual sobre o tema: razões trigonométricas no triângulo retângulo, já que foi identificada uma mudança da linguagem Matemática dos educandos, utilizada na resolução das questões propostas.

Salientamos que, durante o período das atividades vivenciadas, os grupos formados tiveram a oportunidade de exercer, na prática, o uso da trigonometria, medindo a altura aproximada de pontos direcionados pelo professor dentro do próprio anexo escolar, utilizando a razão trigonométrica tangente mediados pelo professor.

Percebemos, no decorrer da pesquisa, que nenhuma metodologia, por melhor que seja, é capaz de resolver todos os problemas de características peculiares da sala de aula.

Inferimos que alguns estudantes evoluíram pouco em relação a outros diante das atividades propostas. Isso leva necessariamente a um aprimoramento do trabalho a fim de abranger a maioria dos alunos, considerando os diferentes ritmos de aprendizado.

Entendemos que, a fim de alcançarmos duas realidades diferentes, é essencial explicarmos os assuntos fundamentais, com o intuito de assimilar os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, entre os quais podemos destacar: razão, proporção, semelhança, teorema de Pitágoras, dentre outros.

Destacamos que, nesta pesquisa, podemos considerar que houve uma evolução dos estudantes quanto à interação em sala de aula, participação e construção do conhecimento, contribuindo, assim, para a troca de experiência e assimilação dos assuntos estudados.

Ao finalizarmos, constatamos que a presente pesquisa promoverá a inserção de recursos pedagógicos alternativos à prática pedagógica do professor, pois nos permitiu vivenciar e observar os benefícios que uma mudança na estrutura das atividades pedagógicas propostas pode trazer para a aquisição do conhecimento dos estudantes. Permitiu também comprovar a importância do educador vivenciar em sala de aula inovação, produzindo suas ferramentas de trabalho, bem como realizar pesquisas constantes sobre a prática de outros educadores para, assim, contribuir com a aprendizagem dos estudantes e dele próprio, sabendo que, a cada dia, vivenciamos um novo aprendizado tanto no que diz respeito à Matemática como em outras áreas de ensino.

5.2 Sugestões de novas linhas de pesquisa

Com base nos estudos realizados nesta pesquisa, estudo de caso exploratório e de análise comparativa, com abordagem predominantemente qualitativa, consideramos que algumas outras contribuições científicas poderão contribuir com o trabalho de profissionais da área que se interessarem por mais informações sobre o tema. Recomendamos mais estudos e pesquisas sobre os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo:

- Estudar novas metodologias para o ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo;
- Estudar os segredos do triângulo retângulo por meio de aulas práticas;
- Estudar as operações para o manuseio do Teodolito.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Cintia. **O Ensino da Matemática para o cotidiano.**: 48 f. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2013.

AUSUBEL, Devid Paul. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **. Ensino aprendizagem com modelagem Matemática**: Uma nova estratégia. 2. Ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resultados do SAEB 2017**: Brasília, 2017

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. **Ministério da Educação. Análise e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros/OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico**: MEC/INEP, São Paulo: Fundação Santillana, 2016

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática** : 2ª ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática** : 2ª ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

BUENO, Caroline; NETO, João. **Objetos de aprendizagem e o ensino de Matemática:** : possíveis aproximações. Revista Ciências Ideias, v. 9, n. 2, 2018.

BLUMENTHAL, Gladis. **Os PCNs e o Ensino Fundamental em Matemática**: um avanço ou um retrocesso. Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) . Porto Alegre (RS), 2013

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Gradiva, 2014.

CELSO, Ana Berenice Pedroso Biazutti. **Trigonometria no triângulo retângulo: Uma Abordagem Prática para a Construção de Conceitos.** 2015.30 f. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Federal de São João Del-Rei-UFSJ, São José do Rei, Minas Gerais, 2015.

COSTA JUNIOR, Edson, et al. . **O uso do Teodolito no ensino de trigonometria.** Revista do Encontro Goiano de Educação Matemática, v. 6, n. 6, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Telares Matemática**: Ensino Fundamental, 9º ano. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2018.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar, 9: geometria plana**: 7ª edição. São Paulo: Atual, 2015.

DOMINGOS NETO, Silvino. **Ferramentas auxiliares no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica.** : Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa. MG, 2014.

DORNELLES, Bruna Celene Marques; et al. **O ensino da Mtemática por meio do Teodolito horizontal caseiro.**: In: IV EIEMAT -Escola de Inverno de Educação Matemática e II Encontro Nacional do PIBID - Matemática, 2014, Santa Maria - RS. Educação Matemática para o Século XXI: trajetória e perspectivas, 2014.

DUCK, Suely. **A crise no ensino de Matemática no Brasil** : Revista do professor de Matemática, v. 2, n. 4, 2004.

FÓRUM ECONÔMICO MUNDIAL. **Avaliação da Educação em Matemática no Brasil**: Global Information Technology, 2016. Disponível em: https://veja.abril.com.br/educacao/brasil-e-um-dos-piores-em-educacao-de-matematica-e-ciencias/. <Acesso em: 20/11/2019>.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia.Saberes necessários à prática educativa**: São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa** : 5. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A Conquista da Matemática, 9º ano** : Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009. :

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa** : 2ª ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2005.

IEZZI, Gelson. [et al.]. **Matemática: Ciências e Aplicações** : volume 1: ensino médio. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria** : 2ª ed. Coleção Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LOPES, Maria Maroni. **Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando software geogebra** : Natal, RN, 2010.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Coleção PROFMAT**: Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NASCIMENTO, Julia; CURI, Edda. **Ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no Brasil**: o que dizem as pesquisas apresentadas no XII ENEM-2016. Research, Society and Development, v. 7, n. 7, 2018.

NUNES, Claudinéa; MENDES, Adriane. **História da Matemática no Ensino Fundamental** : propostas de atividade. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, v. 12, 2016.

MOREIRA, Marco António **Aprendizagem Significativa Crítica** : Porto Alegre, RS: UFRGS, 2010.

OLIVEIRA, Gerson; FERNANDES, Ricardo. **O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção da aprendizagem** :Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Matemática, v. 12, n. 3, 2010.

OLIVEIRA, Wander de. **Matemática e Música: Interdisciplinaridade do ensino da trigonometria e uma proposta para a sala de aula** : Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Paraná, 2015.

PEREIRA, James; OLIVEIRA, Andreia. **Materiais manipuláveis e interação de estudantes nas aulas de Matemática envolvendo tópicos de geometria** : Ciência Educação, v. 22, n. 1, 2016.

PEREIRA, Camila, et al. **O ensino aprendizagem da Matemática através do lúdico** : Revista Científica FAGOC-Multidisciplinar, v. 3, n. 2, 2019.

PRADO, Ivanildo Gomes do. Ensino de Matemática: **Ensino de Matemática: O Ponto de Vista de Educadores e de seus Alunos sobre Aspectos da pratica pedagógica** : Rio Claro 2000. 255 f. Tese de Doutorado – Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciências exatas (UNESP).

RESENDE, Muriel Lemes Moreira. Vygotsky. **um olhar sociointeracionista do desenvolvimento da língua escrita**: Disponível em: http://www.psicopedagogia.com.br/artigos/artigo.asp?entrID=1195. Publicado em: 25/11/2009.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**: M. Books, São Paulo, 2012.

SANTOS, Márcia Nunes dos. **A história da Matemática como desencadeadora de atividades investigatórias sobre o teorema de Tales**: uma experiência realizada com uma classe do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2012.

SANTOS, Paola; CARPES, Patrícia. **Emprego de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis para ensino de trigonometria. In**: Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão, v. 7, n. 1, 2016.

SILVA, Dilvana Maria Melo; THOMAZ NETO, Mario Oliveira. **Conhecimentos de Estudantes do Ensino Médio sobre Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo**:In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Recife. Anais... Recife: UFPE, 2006, 11 p. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/SIPEMAT06/artigos/silvathomazneto.pdf>

SILVA, Giselle, et al. **O uso do Teodolito como uma ferramenta no ensino de trigonometria**: In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2013.

SILVA, Maria; LIMA, Deisiane; SOUZA, Maria.**História da Tatemática e as atividades com o Teodolito: contribuições do Pibid/Uva para a aprendizagem da trigonometria**: Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 4, n. 12, 2017.

SILVA, Ronnie, et al. **Obstáculos no ensino-aprendizagem da Matemática nos anos finais do ensino fundamental**: Revista Ciência Saberes, v. 4, n. 4, 2019.

SOUZA, Arnold; OHIRA, Marcio; PEREIRA, Ana. **A arte de resolver problemas no ensino da Matemática**: Revista Valore, v. 3, 2018.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. **Psicologia pedagógica**: Porto Alegre: Artmed, 2003.

APÊNDICE A - TESTE 1

COLÉGIO DA POLÍCIA MILITAR DE PERNAMBUCO – ANEXO I / PETROLINA

DISCIPLINA: GEOMETRIA

PROFESSOR: GONÇALO COELHO DE ALENCAR

ENSINO FUNDAMENTAL II – 9º ANO - TURMA – D

Aluno(a):

Matrícula:

Data:

Observações:

Esta atividade tem como objetivo, apenas, avaliar seus conhecimentos sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Sua participação será muito importante na conclusão deste trabalho.

Seus dados serão preservados e de forma alguma serão divulgados; apenas o professor pesquisador terá acesso aos resultados desta atividade.

1. (Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos, Novo Praticando Matemática, 9º ano) Observe a figura a seguir e identifique:

   (a) Cateto oposto ao ângulo α;

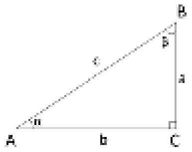
   (b) Cateto adjacente ao ângulo α;

   (c) Cateto oposto ao ângulo β;

   (d) Cateto adjacente ao ângulo β;

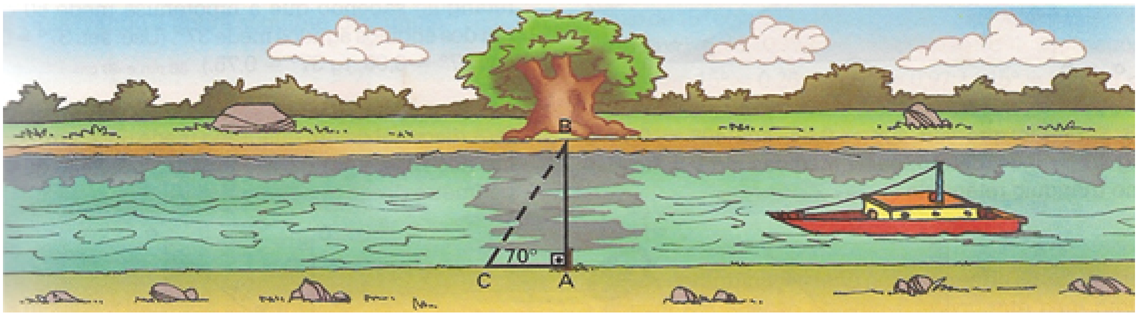
   (e) A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo β;

   (f) A tangente do ângulo β.



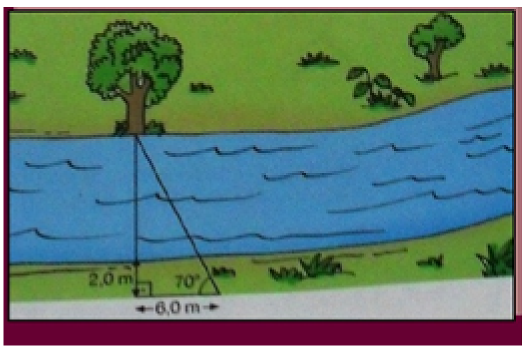
Fonte: Praticando Matemática, 9º ano

2. (José Rui Geovanni, A conquista da Matemática, 9º ano) Use seus conhecimentos analisando a figura para determinar a largura do rio. Verifique qual a melhor opção para este cálculo, sendo: (Dado: 70 = 0,94; $\cos 70$ = 0,34 e $\tan 70$ = 2,74).



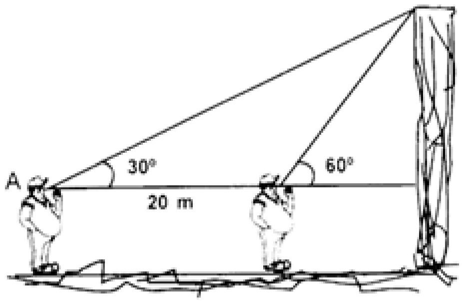
Fonte: A Conquista da Matemática, 9º ano

3. (José Rui Geovanni, A conquista da Matemática, 9º ano) Para medir a largura aproximada do rio, Miriam usou como referência uma árvore em uma das margens para marcar as medidas mostradas no desenho. Qual a largura aproximada do rio? (Use: sen 70 = 0,94; cos 70 = 0,34 e tg 70 = 2, 74).



Fonte: A Conquista da Matemática, 9º ano

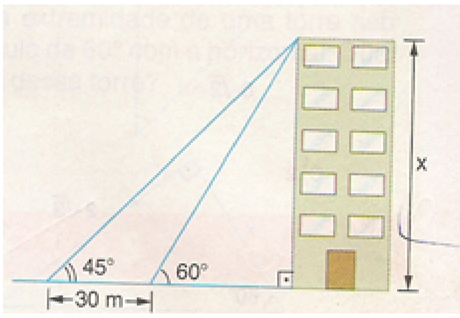
4. (https://brainly.com.br/tarefa/256707) Para medir a altura de um barranco, um observador desloca-se na direção desse barranco até que sua linha de visão, em A, forme 30º com a horizontal.



Fonte: brainly.com.br

A seguir, o observador desloca-se de 20 m de forma que a nova linha de visão faça 60 com a horizontal. Considerando-se a altura do observador de 2m e adotando $\sqrt{3}$ = 1,7, quanto será a altura do barranco, aproximadamente?

5. (José Roberto Bonjorno, Matemática: Fazendo a diferença, 9º ano) Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60. Se ele se afastar do edifício mais 30 m, passará a vê–lo sob ângulo de 45. Calcule a altura do edifício.

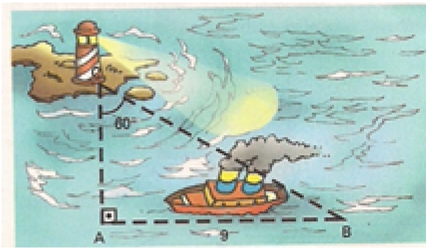


Fonte: Matemática: Fazendo a diferença, 9º ano

6. (José Rui Geovanni, A conquista da Matemática, 9º ano) Um navio, navegando em linha reta, vai de um ponto B até um ponto A. Quando o navio está no ponto B, é possível observar um farol situado num ponto C de tal forma que o ângulo A$\hat{C}$B= 60. Sabendo que o ângulo C$\hat{A}$B é reto e que a distância entre os pontos A e B é de 9 milhas, calcule a distância, em milhas:(Faça: $\sqrt{3}$ = 1,73)

   (a) do ponto A ao farol;

   (b) do ponto B ao farol.



Fonte: A Conquista da Matemática, 9º ano

APÊNDICE B - ATIVIDADE PRÁTICA

1º Atividade prática:

Cada grupo, deverá fazer o seguinte:

a) Posicione-se a uma distância qualquer do pilar de sustentação da cobertura do pátio, use o Teodolito para determinar o ângulo de visão do topo do pilar e determine sua altura.

b) Posicione-se a uma distância qualquer da caixa d'água e use o Teodolito para determinar o ângulo de visão do topo da caixa d'água, afaste-se mais 4 metros do ponto em que você estava para determinar o novo ângulo de visão e determine a altura da caixa.

Questões feitas para saber a opinião dos alunos após a realização da atividade prática.

A atividade prática com o uso do Teodolito ajudou a compreender melhor as razões trigonométricas no triângulo retângulo? Por quê?

a) Sim

b) Não

Observação: Esta atividade só foi realizada com a turma D1, a fim de fazer a comparação dos resultados nas duas turmas, antes e após o uso e após o uso do Teodolito.

APÊNDICE C - TESTE 2

COLÉGIO DA POLÍCIA MILITAR DE PERNAMBUCO – ANEXO I / PETROLINA

DISCIPLINA: GEOMETRIA

PROFESSOR: GONÇALO COELHO DE ALENCAR

ENSINO FUNDAMENTAL II – 9º ANO - TURMA – D

Aluno(a):

Matrícula:

Data:

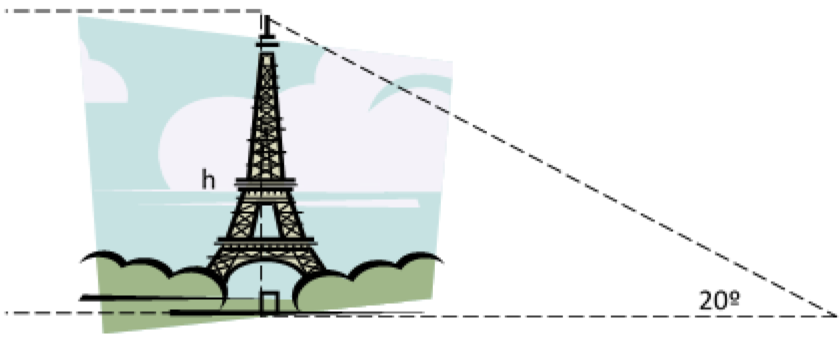
Observações:

Esta atividade tem como objetivo, apenas, avaliar seus conhecimentos sobre razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Sua participação será muito importante na conclusão deste trabalho.

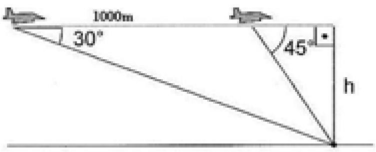
Seus dados serão preservados e de forma alguma serão divulgados; apenas o professor pesquisador terá acesso aos resultados desta atividade.

1. (https://brainly.com.br/tarefa/402473) A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo de 20º, como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre. (sen 20º = 0,34 , cos 20º = 0, 94 . tg 20º = 0, 36)



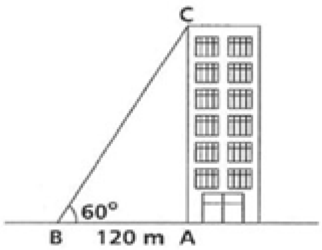
Fonte: brainly.com.br

2. (https://brainly.com.br/tarefa/11081646) Um caça localiza, por meio de um radar, um alvo no solo, que forma um ângulo de visão de com a horizontal. Após percorrer 1000m, o piloto do caça nota que esse ângulo passa , conforme a figura abaixo. A altura que o caça está do solo é:



Fonte: brainly.com.br

3. (PUCCAMP) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura abaixo:

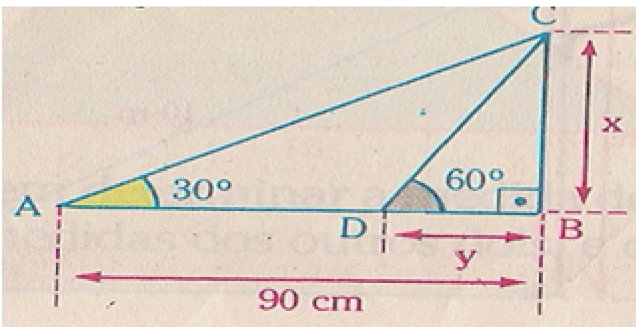


Fonte: PUCCAMP

Se ela caminhar 120 metros em linha reta, chegará ao ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio sob um ângulo de 60. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo 30?

4. (FUVEST) Dois pontos, A e B, estão situados na margem de um rio e distantes 40 m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo C$\hat{A}$B mede 75 e o ângulo A$\hat{C}$B mede 15. Determine a largura do rio.

5. (José Rui Geovanni, A conquista da Matemática, 9º ano) Observando a figura abaixo, determine as medidas de x e y:



Fonte: A conquista da Matemática, 9º ano

APÊNDICE D - TERMO DE AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA

Figura D - 1 – Termo de autorização para a divulgação do nome da instituição

UNIVASF
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

TERMO DE SOLICITAÇÃO E AUTORIZAÇÃO PARA DIVULGAÇÃO DO NOME DA INSTITUIÇÃO

Exmo. Celso Alves Júnior – TEN CEL PM

Sou **Gonçalo Coelho de Alencar**, brasileiro , professor, aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Estou no momento trabalhando na minha dissertação, sob supervisão e orientação do **Prof. Me. Fábio Henrique de Carvalho** da Universidade Federal do Vale do São Francisco, cuja pesquisa intitulada como "**O emprego do teodolito artesanal no estudo das razões trigonométricas dirigido a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental**".

O objetivo da minha pesquisa é investigar a importância da confecção e emprego do teodolito no ensino e na aprendizagem de conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo para os estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental.

Pretendo usar o nome da instituição (**Anexo I do Colégio da Polícia Militar de Pernambuco**) e imagens dos discentes, onde realizarei a pesquisa. E estou a solicitar sua autorização para utilizar o nome da instituição na minha dissertação de mestrado, bem como mostrar as imagens necessárias para adequação aos objetivos da pesquisa. O mesmo será utilizado de forma devidamente referenciada.

Desde já agradeço pela atenção.

Cordialmente,

Gonçalo Coelho de Alencar.

Petrolina, 21 de dezembro de 2020

Celso Alves Júnior – TEN CEL PM
Comandante do Anexo I, do CPM

CELSO Alves Júnior
Ten Cel PM
Mat. 920525-0