UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

FACULDADE DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E LETRAS DO SERTÃO CENTRAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TIAGO ARAUJO RODRIGUES

AS CONSTANTES π E e: SUA IRRACIONALIDADE, TRANSCENDÊNCIA E UMA ABORDAGEM DIDÁTICA NO ENSINO BÁSICO

QUIXADÁ – CEARÁ

2020

TIAGO ARAUJO RODRIGUES

AS CONSTANTES π E e: SUA IRRACIONALIDADE, TRANSCENDÊNCIA E UMA ABORDAGEM DIDÁTICA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ulisses Lima Parente.

QUIXADÁ – CEARÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Rodrigues, Tiago Araujo .
As constantes π e e: sua irracionalidade, transcendência e uma abordagem didática no ensino básico [recurso eletrônico] / Tiago Araujo Rodrigues. - 2020
Um arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 55 folhas.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Quixadá, 2020.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Ulisses Lima Parente..

1. Constantes ? e e. 2. Irracionais. 3. Transcendentes. I. Título.

TIAGO ARAUJO RODRIGUES

AS CONSTANTES π E e: SUA IRRACIONALIDADE, TRANSCENDÊNCIA E UMA ABORDAGEM DIDÁTICA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovado em: 29 de dezembro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente (PROFMAT/UECE/QUIXADÁ)

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira (PROFMAT/UECE/QUIXADÁ)

Prof. Dr. Diego de Sousa Rodrigues (IFCE)

Dedico aos meus (pais) Gerardo Rodrigues e Maria da Conceição Ferreira de Araújo pelo amor que sempre me deram e pelo apoio em superar todos os meus desafios.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, à minha família que sempre me incentivou, apoiou e também me ajudou nos momentos de dificuldade. Destaques para meu pai Gerardo Rodrigues e minha mãe Maria da Conceição Ferreira de Araújo.

Também agradeço à minha irmã Thyara Araújo Rodrigues Lavor pelo carinho e conselhos.

Aos meus amigos e familiares que me ajudaram de forma direta e indiretamente na realização desse trabalho.

Aos meus colegas de turma, pelos laços de amizade que construímos de uma forma que jamais esquecerei.

Não poderia deixar de agradecer ao meu professor orientador Ulisses Parente Lima, pelas suas intervenções na construção desse trabalho.

Aos demais professores do PROFMAT que sempre me apoiaram, em alguns momentos de dificuldade, ao longo do curso.

“A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza”.

(Bertrand Russel)

RESUMO

Este presente trabalho tem como proposta realizar um amplo estudo das constantes π e e. Para isso, iremos apresentar uma breve abordagem do conjunto dos números irracionais dando um destaque na prova da irracionalidade da $\sqrt{2}$. Apresentaremos dois conjuntos a saber: O conjunto dos números algébricos e o conjunto dos números transcendentes. Faremos também a prova de que as constantes π e e pertencem tanto ao conjunto dos números irracionais quanto ao conjunto dos números transcendentes, através de conceitos da Teoria dos Números, Análise, Cálculo Diferencial e Integral. E finalmente serão apresentadas três propostas didáticas com suas devidas orientações e recomendações de aplicação em sala de aula, além de soluções de problemas propostos, sendo que duas dessas atividades propostas irão abordar um cálculo para a aproximação do número π e uma para o número e e a última atividade proposta dedicada ao cálculo do cosseno de 75° e em seguida mostrar se o mesmo é um número algébrico.

Palavras-chave: Constantes π e e. Irracionais. Transcendentes.

ABSTRACT

This work proposes to carry out a wide study of the constant π and e. For this, we will present a brief approach to the set of irrational numbers, highlighting the proof of irrationality of $\sqrt{2}$. We will present two sets, namely: The set of algebraic numbers and the set of transcendent numbers. We will also prove that the constant π and e they belong to both the set of irrational numbers and the set of transcendent numbers, through concepts from Number Theory, Analysis, Differential and Integral Calculus. nd finally, three didactic proposals will be presented with their guidelines and recommendations for application in the classroom, as well as solutions to proposed problems, two of these proposed activities will address a calculation to approximate the number π and one for the number e and the last proposed activity dedicated to calculating the cosine of 75° and then showing whether it is an algebraic number.

Keywords: Constants π and e. Irrational. Transcendent.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\overline{\mathbb{Q}}$	Conjunto dos números algébricos
$\mathbb{T}$	Conjunto dos números transcendentes
$n!$	Fatorial de n
$\binom{k}{n}$	Coeficiente binomial de k, n a n
$D^k f$	k-ésima derivada da função f
$\mathbb{Q}[\mathrm{x}]$	Polinômio na variável x com coeficientes em $\mathbb{Q}$
$\overline{\mathbb{Q}_{\mathrm{m}}}$	Conjunto dos números algébricos de grau m
F'	Derivada da função F
$P^{(r)}$	Derivada de ordem r em P
∂Q	Grau do polinômio Q
$a \mid b$	a divide b
$a \nmid b$	a não divide b
$\lvert z \rvert$	módulo do número complexo z

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história da humanidade houve a necessidade do homem contar, seja em pequenas quantidades a valores exorbitantes. Diante disso, os números passaram a ter um papel de suma importância na vida do homem, ao longo do tempo, com os estudos mais aprofundados e nos avanços tecnológicos, alguns números entram em destaque através de seu comportamento ou de suas características e de certas propriedades que os mesmos apresentam.

Neste trabalho temos como objetivo fazer um amplo estudo em torno de duas constantes, a saber: π e e. Iremos também mencionar alguns conjuntos numéricos, como por exemplo os algébricos e transcendentes, que ajudarão no estudo dessas constantes através de algumas demonstrações da existência e pertinência ou não de π e e nesses tais conjuntos.

A metodologia aqui utilizada teve como propósito a escrita explicativa, já que buscamos um apanhado do estudo das constantes π e e que irá de uma certa forma, favorecer a formação dos discentes ou até mesmo servir como fonte de inspiração para estudos futuros mais aprofundados para docentes da educação básica.

No capítulo 2 faremos uma breve abordagem sobre os números irracionais dando ênfase ao ponto de vista aritmético e geométrico, tendo como gancho a extração de raízes de números reais positivos, apresentando um breve comentário sobre as constantes π e e. Por fim, falaremos sobre a irracionalidade da raiz quadrada de 2 e em seguida faremos a demostração da irracionalidade de π e e.

No capítulo 3 falaremos sobre o conjunto dos números algébricos que são soluções de equações polinomiais de coeficientes inteiros, apresentaremos também algumas propriedades e caracterizações. Em seguida trataremos do conjunto dos números transcendentes que são números que não podem ser soluções de equações polinomiais de coeficientes inteiros, isto é, que não pertencem ao conjunto dos números algébricos.

Finalmente, no capítulo 4 será demonstrada a transcendência de π e e, no capítulo 5 serão apresentadas três propostas didáticas com orientações e recomendações de aplicação em sala de aula, além de soluções de problemas propostos, e por fim, no capítulo 6 trataremos das considerações finais.

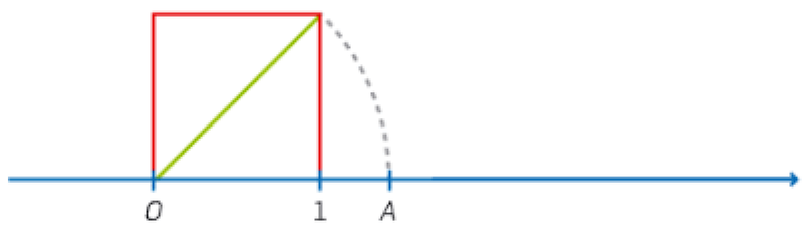
2 UMA BREVE ABORDAGEM SOBRE OS IRRACIONAIS

Um número é dito irracional, quando o mesmo é real, mas não é racional, em outras palavras, podemos dizer que o conjunto dos números irracionais é a diferença entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos números racionais. Neste trabalho, denotaremos por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Quando tratar do ponto de vista aritmético, podemos enxergar o conjunto dos números irracionais como sendo aqueles números que não podem ser escritos como quocientes de dois números inteiros ou, ainda, aqueles que tem uma representação decimal infinita e aperiódica. Uma situação importante quando tratamos de irracionais, quando extraímos raízes de números reais positivos, isto é, considerando $m > 0$ real e $n \in \mathbb{N}$, podemos mostrar que existe um único real positivo p tal que $p^n = m$, ou podemos escrever como $p = \sqrt[n]{m}$ denominando raiz n-ésima de m, ou, ainda, a raíz de índice n de m, logo, teremos $p = \sqrt[n]{m} \Leftrightarrow m = p^n$. Quando temos $n = 2$ e $x > 0$, podemos escrever $\sqrt{x}$ ao invés de $\sqrt[2]{x}$, sendo assim, dizemos que $\sqrt{x}$ é denominado raiz quadrada de x. Quando temos $n = 3$, dizemos que $\sqrt[3]{x}$ é a raiz cúbica de x.

Em se tratando do ponto de vista geométrico, quando se fala de irracionais, não podemos deixar de citar os segmentos icomensuráveis, onde dois desses segmentos não existe um submúltiplo comum a esses dois segmentos, um exemplo disso, seria a $\sqrt{2}$ por ser o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário onde a mesma não pode ser expresso sob a forma a/b com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, isto é, não pode ser um número racional, daí dizemos que esse número é irracional de acordo com a figura 1. (tal prova abordaremos nos apêndices desse trabalho).

Figura 1 - Representação geométrica da raiz quadrada de dois na reta real



Fonte: https://alfamathema.files.wordpress.com/2014/11/2-13-pontos-irracionais-da-reta-numc3a9rica.pdf

Podemos também citar outras situações no estudo da Matemática em que os números irracionais surgem, como por exemplo a razão entre o comprimento de uma circunferência e o comprimento de seu diâmetro, que é o número π. Outro exemplo que ocorre é o cálculo do valor numérico da função logarítmica lnx, mesmo que, atribuíndo valores racionais para x, podemos, quase que sempre, encontrar valores que correspondem a números irracionais, ou até mesmo quando atribuírmos a x na função logarítimica lnx um valor conveniente, obtemos como valor númerico igual a 1, sendo que esse "valor conveniente" é o número e.

Note que, ao mencionarmos no parágrafo anterior os números π e e, não ficou esclarecido a qual conjunto numérico esses números pertencem, e de antemão, podemos dizer que π e e são números irracionais, onde tal demonstração será abordada nos subtópicos a seguir.

2.1 A irracionalidade de π

A irracionalidade de π, foi demonstrada pela primeira vez pelo matemático francês J. H. Lambert, em 1761, utilizando frações contínuas. A demonstração da irracionaldade de π que será apresentada aqui é devida a I. Niven, em artigo publicado no Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (1947), página 509, no qual usou um método desenvolvido por Hermite para provar a transcedência de e, assunto a ser abordado em um capítulo mais adiante.

Passemos à demonstração da irracionalidade de π.

Dem.: Seja a função

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \qquad (2.1.1)$$

onde n é um número inteiro positivo. Provamos a seguir dois Lemas que serão de grande importância para dar sequência à demonstração:

Lema 1: $D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0,1,2, \ldots$, onde $D^k f$ representa a $k-$ésima derivada de f e $D^0 f = f$.

Prova.: Utilizando a chamada fórmula de Leibnitz para as derivadas de um produto de duas funções, g e h:

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j g \cdot D^{k-j} h. \qquad (2.1.2.)$$

Daí aplicando (2.1.2.) à função definida em (2.1.1) temos que:

$$D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j x^n D^{k-j} (1-x)^n \qquad (2.1.3)$$

Agora observe que

$$D^j x^n|_{x=0} = \begin{cases} 0 \; se \; j < n \\ n! \; se \; j = n \\ 0 \; se \; j > n \end{cases} \qquad (2.1.4)$$

onde a barra com o $x = 0$ significa que a derivada é calculada no ponto $x = 0$. Logo, de (2.1.3) e (2.1.4) concluímos que

$$D^k f(0) = 0 \text{ se } k < n \qquad (2.1.5)$$

e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n!\, D^{k-n} (1-x)^n|_{x=0}, \text{ se } k \geq n. \quad (2.1.6)$$

Note que, como os coeficientes binomiais são inteiros, segue-se então que a expressão no segundo membro de (2.1.6) é um inteiro.

Lema 2: $D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0,1,2, \dots$.

Prova: Segue do lema anterior e do fato de que $f(1-x) = f(x)$.

Voltando à demonstração, suponha que $\pi^2 = {}^{p}/_{q}$ fração irredutível e considere a função $F(x)$ abaixo:

$$F(x) = q^n \{\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)\}. \quad (2.1.7)$$

Pelos lemas 1 e 2, e da hipótese $\pi^2 = {}^{p}/_{q}$, temos que $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros. A seguir, observe que

$$\{F'(x)\text{sen }\pi x - \pi F(x)\cos \pi x\}' = F''(x)\text{sen }\pi x + \pi^2 F(x)\text{sen }\pi x \qquad (2.1.8)$$

onde a' representa a derivada. O cálculo da derivada segunda, F'', de F nos dá

$$\{F'(x)\text{sen }\pi x - \pi F(x)\cos \pi x\}' = p^n\pi^2 f(x)\text{sen }\pi x. \qquad (2.1.9)$$

Daí, aplicando o teorema fundamental do cálculo $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ $\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0)$ à $g(x) = F'(x)\text{sen }\pi x - \pi F(x)\cos \pi x$, obtemos então em virtude de (2.1.9) que

$$p^n\pi^2 \int_0^1 f(x)\text{sen }\pi x\, dx = \pi F(1) + \pi F(0),$$

ou seja,

$$\pi p^n \int_0^1 f(x)\text{sen }\pi x\, dx = F(1) + F(0). \qquad (2.1.10)$$

Observe que o segundo membro de (2.1.10) é inteiro, pois $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros, portanto basta mostrar que para um $n \in \mathbb{N}$ conveniente, que o primeiro membro de (2.1.10) é um número positivo estritamente menor que 1, daí teremos o absurdo. Diante disso, para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!} \qquad (2.1.11)$$

Usando a desigualdade (2.1.11) em (2.1.10), temos que

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x)\text{sen }\pi x\, dx < \pi \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \text{sen }\pi x\, dx = \frac{2p^n}{n!}. \qquad (2.1.12)$$

Logo, como $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$, segue-se que podemos tomar um $n \in \mathbb{N}$ tal que ${}^{2p^n}/_{n!} < 1$ e encontramos o absurdo, portanto π é um número irracional. ■

2.2 A irracionalidade de e

O número e é definido como o número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Além disso ele pode ser representado por um limite, uma série. Diante, disso, iremos escrever o número e sob a forma

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \quad (2.2.1)$$

Iremos agora demonstrar a irracionalidade de e.

Dem.: Suponhamos por absurdo que e seja racional, isto é, e possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ e são primos entre si. Daí, de (2.2.1), segue-se que:

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \qquad (2.2.2)$$

Diante disso, fazendo uma estimativa do segundo membro de (2.2.2), temos que:

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right) < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right). \quad (2.2.3)$$

Note que a expressão apresentada em parênteses do último membro de (2.2.3) é um série geométrica da forma $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, a qual para $0 < r < 1$, tem soma igual a $\frac{r}{(1-r)}$. Usando esse fato em (2.2.3) obtemos

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q} \qquad (2.2.4)$$

Logo, voltando a (2.2.2) e usando a estimativa de (2.2.4), temos que:

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

logo, temos que:

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}. \qquad (2.2.5)$$

Portanto, observando (2.2.5) temos que o termo médio é inteiro pois $q!$ cancela todos os denominadores das frações. Absurdo, pois sendo $\frac{1}{q} \leq 1$ a expressão (2.2.5) afirmaria que o termo médio é um inteiro positivo estritamente menor que 1. Logo e é irracional.

■

3 CONJUNTO DOS NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

3.1 Os inteiros algébricos

Um número é dito inteiro algébrico quando é solução de uma equação polinomial da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0, \qquad (3.1.1)$$

onde os coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros. Assim, qualquer número inteiro b é álgébrico, pois é solução da equação $x - b = 0$.

Um fato importante será a demonstração do teorema a seguir que menciona o fato de um inteiro algébrico ser um número inteiro ou um número irracional.

Teorema 3.1 Um inteiro algébrico (real) é inteiro ou irracional

Dem.: Seja α um inteiro algébrico. Suponhamos por absurdo, que $\alpha = {}^{p}/_{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e $q > 1$, com p e q primos entre si, com isto, α será um número racional que não é inteiro. Como α é solução de uma equação do tipo (3.1.1), substituíndo x por ${}^{p}/_{q}$ na equação (3.1.1) temos que:

$$p^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-2}p^{n-2}q^2 - \cdots - a_1pq^{n-1} - a_0q^n \qquad (3.1.2)$$

Daí, segue-se que:

$$p^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \cdots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}). \quad (3.1.3)$$

Logo, q divide p^n. Agora, seja r um fator primo de q, com $r \neq 1$ (para $r = q$ quando q for primo), assim r divide p^n e consequentemente r divide p, absurdo, pois teríamos que r divide p e q, o que contradiz o fato de eles serem primos entre si, e portanto, α não pode ser um número racional, logo só pode ser inteiro ou irracional.

3.2 Os números algébricos

Considere a seguinte equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (3.2.1)$$

onde os coeficientes inteiros a_i's são inteiros, chamamos de número algébrico qualquer solução dessa equação polinomial. Note que, pelo fato dessa definição, podemos comparar com a definição que foi dada em 3.1, isto é, um número qualquer *α* será algébrico, se conseguirmos construir uma equação polinomial com coeficientes inteiros tal que *α* seja raiz. Portanto, pode-se dizer que qualquer número inteiro algébrico é também um número algébrico.

Mais adiante, mostraremos que existem números que não são algébricos. Tais números serão chamados de transcendentes.

3.3 Propriedade dos números algébricos

Apresentamos a seguir, algumas propriedades dos números algébricos:

(i) A soma de dois números algébricos é algébrica;

(ii) O produto de dois números algébricos é algébrico;

(iii) O simétrico de $-\alpha$, de um número algébrico é algébrico;

(iv) O inverso de α^{-1} de um número algébrico $\alpha \neq 0$ é algébrico.

As demonstrações de (iii) e (iv) estão descritas abaixo:

Dem. (iii) : De fato, se *α* é algébrico, então, o mesmo é raiz de uma equação que foi mencionada em (3.2.1), logo – *α* é raiz da seguinte equação:

$$(-1)^n a_n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + (-1) a_1 x + a_0 = 0.$$

Dem. (iv): De fato, se *α* é raiz da equação (3.2.1), com $\alpha \neq 0$, então α^{-1} será raiz da seguinte equação

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Para as demonstrações (i) e (ii) iremos utilizar um lema auxiliar (sua demonstração está destacada no apêndice desse trabalho).

Lema 1: Dados $n+1$ formas lineares

$$X_1 = q_{11}x_1 + \cdots + q_{1n}x_n$$
$$\vdots$$
$$X_{n+1} = q_{n+1,1}x_1 + \cdots + q_{n+1,n}x_n$$

Elas são linearmente dependentes sobre os racionais, isto é, existem, $r_1, \dots, r_{n+1} \in \mathbb{Q}$, com alguns (ou todos) diferentes de zero, tais que

$$r_1X_1 + \cdots + r_{n+1}X_{n+1} = 0.$$

Com isso, a demonstração de (i) segue abaixo:

Dem.: Considere α e β números algébricos, daí existem equações polinomiais

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \qquad (3.3.1)$$
$$x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0 = 0 \qquad (3.3.2)$$

Com coeficiente racionais tais que α seja raiz de (3.3.1) e β raiz de (3.3.2) daí obtemos

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\alpha - a_0, \qquad (3.3.3)$$

isto é, a mesma está expressa como uma combinação linear de $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$, usando coeficientes racionais. Multiplicando-se (3.3.3) por α e substituíndo-se o α^n, obtido na expressão pelo seu valor dado em (3.3.3), obtemos

$$\alpha^n \cdot \alpha = -a_{n-1}\alpha^{n-1} \cdot \alpha - \cdots - a_1\alpha \cdot \alpha - a_0 \cdot \alpha$$

logo,

$$\alpha^{n+1} = -a_{n-1}\alpha^n - \cdots - a_1\alpha^2 - a_0\alpha$$

onde α^{n+1} é expresso como combinação linear dos mesmos $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ usando também coeficientes racionais, e assim, sucessivamente, todas as potências α^j, para $j \geq n$, são expressas como combinações lineares de $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$, usando coeficientes racionais.

De modo análogo, exprimindo as potências β^k, para $k = m, m+1, \ldots$, como combinações lineares de $1, \beta, \ldots, \beta^{m-1}$ usando coeficientes racionais.

Logo, devemos mostrar que $\alpha + \beta$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais, implicando então que $\alpha + \beta$ é algébrico. Considere os $mn + 1$ números

$$1, \alpha + \beta, (\alpha + \beta)^2, \ldots, (\alpha + \beta)^{mn}\,. \qquad (3.3.4)$$

Desenvolvendo essas potências, e usando o fato visto anteriormente sobre a representação das potências α^j, $j \geq n$ e β^k, $k \geq m$, obtemos que os números em (3.3.4) podem ser expressos como combinações lineares dos mn números $\alpha^j \beta^k$, $0 \leq j \leq n-1$, $0 \leq k \leq m-1$, usando-se coeficientes racionais.

Portanto, aplicando o Lema: os X_i,s são os $mn + 1$ números de (3.3.4), os x_i,s são os mn números $\alpha^j \beta^k$. Logo, existem racionais $r_0, r_1, \ldots, r_{mn}$ tais que

$$r_0 + r_1(\alpha + \beta) + \cdots + r_{mn}(\alpha + \beta)^{mn} = 0,$$

mostrando que $\alpha + \beta$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais.

A demostração de (ii) é feita de forma análoga a (i), considerando as potências $1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, \ldots, (\alpha\beta)^{mn}$.

3.4 Caracterização do conjunto dos números algébricos

Para o que segue o conjunto dos números algébricos, será denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$. A seguir, iremos caracterizar esse conjunto através de algumas proposições:

Proposição 1: O conjunto dos números algébricos é enumerável

Dem.: Considere $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, denotaremos por R_p, o conjunto das raízes de P. Note que R_p tem no máximo n elementos. Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe apenas um quantidade enumerável de polinômios, em $\mathbb{Q}[\mathrm{x}]$, com grau n. De fato, considere $X_n = \{\mathrm{Q} \in \mathbb{Q}[\mathrm{x}] : \partial Q = n\}$. Tome $\varphi: \underbrace{\mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}^*}_{n+1\ cópias} \to X_n$ dada por:

$$\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 + \dots + a_n x^n$$

Note que φ é uma bijeção e como $\mathbb{Q}$ x … x $\mathbb{Q}^*$ é enumerável, segue-se que X_n também o é.

Iremos agora definir $A_n = \bigcup_{\partial P=n} R_p$. Segue do fato de que a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável, segue-se então que A_n é enumerável, portanto, temos que $\overline{\mathbb{Q}}$ é enúmerável. ■

Para demonstrarmos a próxima proposição, usaremos que a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ garante também a densidade em $\overline{\mathbb{Q}}$ em $\mathbb{R}$. Denotaremos o conjunto dos números algébricos de grau m por $\overline{\mathbb{Q}_{\mathrm{m}}}$, temos em particular que $\overline{\mathbb{Q}_1} = \mathbb{Q}$.

Proposição 2: Para todo $m \geq 1$, o conjunto $\overline{\mathbb{Q}_{\mathrm{m}}}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Dem.: Definimos o conjunto $P_m := \{Q(1 + \sqrt[m]{2}) : Q \in \mathbb{Q}\}$, observe que esse conjunto é denso em $\mathbb{R}$, pois se $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, então existe um $Q \in \mathbb{Q}$ no intervalo $\left(\frac{a}{1+\sqrt[m]{2}}, \frac{b}{1+\sqrt[m]{2}}\right)$. Portanto $P_m \cap (a, b) \neq \emptyset$, daí o resultado segue pois $1 + \sqrt[m]{p}$ é raíz de $P(x) = (x - 1)^m - p$ que é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

■

3.5 Conjunto dos números transcendentes

No capítulo anterior vimos que existe um conjunto númerico chamado de conjunto dos números algébricos e o denotamos por $\overline{\mathbb{Q}}$. Podemos fazer a seguinte pergunta: Será que existe um (ou mais de um) número que não seja algébrico, isto é, que não é solução de uma equação polinomial de coeficientes inteiros? E a resposta é sim, e a esse ou esses números chamaremos de números transcendentes e denotaremos o conjunto dos números transcendentes por $\mathbb{T}$.

A teoria dos números transcendentes foi originado no século XIX por Lioville. Neste trabalho abordaremos as transcendências das constantes π e e, isto é, mostraremos através de demonstrações que os mesmos são números transcendentes. Para Marques:

> Desde meados do século XVIII, o estudo dos números transcendentes forma uma área central da teoria dos números: a teoria dos números transcendentes. Essa teoria vive um grande paradoxo: se quase todos os números são

> transcendentes, por que demonstrar a transcendência de um dado número é, em geral, uma tarefa tão complicada? (Marques, 2013, prefácio)

ainda que para Marques:

> A teoria transcendente vive um intrigante dilema: enquanto que, essencialmente, todos os números são transcendentes, estabelecer a transcendência de um número particular é uma tarefa bastante complicada. O principal obstáculo é que um número transcendente é definido não pelo que ele é, mas em vez disso, pelo que ele não é. (Marques, 2013, p. 2)

3.6 Existência dos números transcendentes

A existência dos números transcendentes fica bem caracterizada, pelo teorema a seguir:

Teorema 3.6.1 O conjunto dos números transcendentes são não enumeráveis

Dem.: Suponhamos que os seguintes números transcendentes $t_1, t_2, t_3, \ldots$ fossem enúmeráveis, mas, como pela Proposição 1 da seção 3.4. temos que os números algébricos são enumeráveis, como por exemplo, $a_1, a_2, a_3, \ldots$, daí, o conjunto dos números reais poderia ser escrito como $t_1, a_1, t_2, a_2, t_3, a_3, \ldots$, mas, como o conjunto dos números reais não é enumerável (tal prova abordaremos no apêndice desse trabalho), temos uma contradição, logo, o conjunto dos números transcendentes são não enumeráveis.

$\blacksquare$

4 A TRANSCENDÊNCIA DE π E e

Neste capítulo, iremos demonstrar a transcendência de π e e.

4.1 A transcendência de e

A demonstração da transcendência de e foi dada pelo matemático francês C. Hermite em 1837 numa série de notas publicadas no Comptes Rendus de 1'Acadèmie des Sciences de Paris.

A demonstração original de C. Hermite sofreu uma série de modificações por grandes matemáticos famosos como Jordan (1882), Markhoff (1883), Rouché (1883), Weierstrass (1885), Hilbert (1893), Hurwitz (1893) e por Veblen (1904).

A demonstração apresentada a seguir, é baseada naquela de Hurwitz que será composta por uma série de proposições seguidas de suas respectivas demonstrações.

Proposição 1: Seja $P(x)$ um polinômio de grau r. Seja a função

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x) \qquad (4.1.1)$$

onde $P^{(r)}$ representa a derivada de ordem r em P, então

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}P(x).$$

Dem.: Seja $F'(x) = P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x)$, pois $P^{(r+1)}(x) = 0$. Note que:

$$F'(x) = F(x) - P(x),$$

daí temos que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) = -e^{-x}F(x) + e^{-x}[F(x) - P(x)].$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}P(x). \qquad \blacksquare$$

Proposição 2: Aplicando o teorema do valor médio à função $e^{-x}F(x)$ mostre que

$$F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k) \qquad (4.1.2)$$

para todo $k > 0$, onde θ_k é um número real entre 0 e 1.

Dem.: Seja $G(x)$ uma função derivável em $\mathbb{R}$, aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[0, k]$ com $k \in \mathbb{N}$, temos que existe um θ_k com $0 < \theta_k < 1$ tal que

$$G(k) - G(0) = (k-0)G'\left(0 + \theta_k(k-0)\right) = kG'(k\theta_k),$$

logo,

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -ke^{k\theta_k}P(k\theta_k),$$

multiplicando por e^ksegue-se que

$F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$ para todo para todo $k > 0$ e $0 < \theta_k < 1$. $\blacksquare$

Proposição 3: Considere

$$\epsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k) \qquad (4.1.3)$$

suponha que e seja algébrico, isto é, existem inteiros $c_0, c_1, \dots, c_n$ (podemos tomar $c_0 > 0$) tais que

$$c_ne^n + \cdots + c_1e + c_0 = 0 \qquad (4.1.4)$$

mostre que

$$c_0F_0 + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n. \qquad (4.1.5)$$

Dem.: sabemos que por (4.1.2) temos

$$\epsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k) = F(k) - e^k F(0),$$

isto é,

$$F(k) - \epsilon_k = e^k F(0),$$

para todo $k > 0$, logo, segue-se que:

$$c_0F_0 + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) - (c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n) =$$
$$= c_n(F(n) - \epsilon_n) + \cdots + c_1(F(1) - \epsilon_1) + c_0F(0)$$
$$= c_ne^nF(0) + \cdots + c_1eF(0) + c_0F(0)$$
$$= F(0)[c_ne^n + \cdots + c_1e + c_0] = F(0) \cdot 0 = 0 \qquad \blacksquare$$

Considere o seguinte polinômio

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^p \cdots (n-x)^p, \text{ (4.1.6)}$$

sendo p um número primo tal que $p > n$, $p > c_0$, onde n e c_0 são dados em (4.1.4), daí temos que demonstrar que para tal polinômio P, o lado esquerdo de (4.1.5) é um inteiro não divisível por p, enquanto o lado direito é menor que 1 em valor absoluto.

Proposição 4: Seja $Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_i x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros, e seja $p < r$. Mostre que

$$Q^i(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_i x^{j-i}, i \leq r. \qquad \text{(4.1.7)}$$

Utilizando (4.1.7) mostre que

$$\frac{1}{(p-1)!} Q^i(x), \qquad \text{(4.1.7.1)}$$

para $i \geq p$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Dem.: Inicialmente faremos a demostração de (4.1.7):

Sabendo que

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_i x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r,$$

temos:

$$Q^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + r a_r x^{r-1}$$
$$Q^{(2)}(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + r(r-1) a_r x^{r-2}$$
$$Q^{(3)}(x) = 6a_3 + 24a_4 x + \cdots + r(r-1)(r-2) a_r x^{r-3} =$$
$$= \frac{3!}{0!} a_3 + \frac{4!}{1!} a_4 x + \cdots + \frac{r!}{(r-3)!} a_r x^{r-3}$$

Logo, segue-se que

$$Q^i(x) = \frac{i!}{0!} a_1 + \frac{(i+1)!}{1!} a_{i+1} x + \frac{(i+2)!}{2!} a_{i+2} x^2 + \cdots + \frac{r!}{(r-1)!} a_r x^{r-1},$$

isto é,

$$Q^i(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_i x^{j-i}, i \leq r,$$

o que demonstra (5.1.7).

Já para (4.1.7.1), sejam $p \in \mathbb{N}$ com $p \leq i \leq r$ e seja $j \in \{i, \dots, r\}$, diante disso, temos:

$$\frac{1}{(p-1)!} Q^i(x) =$$
$$= \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(p-1)!\,(j-i)!} a_i x^{j-i}$$
$$= \sum_{j=i}^{r} \frac{i \cdots p \cdot j!}{i \cdots p \cdot (p-1)!\,(j-i)!} a_i x^{j-i} = \sum_{j=i}^{r} i \cdots p \cdot j! \binom{j}{p} a_i x^{j-i}$$

Observe que $\binom{j}{p} \in \mathbb{Z}$, $i \cdots p \in \mathbb{Z}$ e o fator p aparece pelo menos uma vez em $i \cdots p$ já que $p \leq i$, logo $i \cdots p \cdot \binom{j}{p} \cdot a_j$ são inteiros e divisíveis por p, ou seja, os coeficiente de $\frac{1}{(p-1)!} Q^i(x)$ são inteiros divisíveis por p. ■

Proposição 5: Considere o polinômio $P(x)$ definido em (4.1.6). Mostre que $P(x)$ é da forma

$$P(x) = \frac{(n!)^P}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!} x^p + \cdots \qquad (4.1.8)$$

Mostre que

$$P^{(i)}(k) = 0; \qquad k = 1, \ldots, n; \qquad i > p, \qquad (4.1.9)$$

e

$$P^{(p-1)}(0) = (n!)^p \text{ e } P^{(i)}(0) = 0,\ i > p-1 \qquad (4.1.10)$$

Dem.: Para (4.1.8) temos que

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \cdot (1-x)^p \cdot (2-x)^p \cdots (n-x)^p =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1^p + \cdots + x^p) \cdot \ldots \cdot (n^p + \cdots x^p) =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \cdot 1^p \cdots n^p + \frac{b_0}{(p-1)!} x^p + \cdots =$$
$$\frac{(n!)^P}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!} x^p + \cdots + \frac{b_{n,p-1}}{(p-1)!} x^{(p+n)(p+1)}$$

o que prova (4.1.8).

Para (4.1.9), temos:

$$P^{(i)}(k) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \cdot D^j\,(x^p) \cdot D^{i-j}[(1-x) \cdots (n-x)^p].$$

Agora, note que

$$i < p \Rightarrow i \leq p - 1 \Rightarrow i - j \in \{0, 1, \dots, p - 1\} \Rightarrow D^{i-j}[(1 - x) \cdots (n - x)^p]$$

contém o fator $(1 - x) \cdots (n - x)$ em sua derivação, pelo menos uma vez, logo temos $P^{(i)}(k) = 0, k = 1, \dots, n \; e \; i > p,$ o que prova (4.1.9).

Para (4.1.10) temos:

$$P^{(p-1)}(x) = (n!)^p + \frac{d_0}{(p-1)!}x^1 + \cdots + \frac{d_{n,p-1}}{(p-1)!}x^{np}$$

daí tem os que $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$. Note que

$$i < p - 1 \Rightarrow i \leq p - 2 \Rightarrow j \leq i \leq p - 2 \Rightarrow D^j[x^{p-1}](0) = 0$$

para todo $j \in \{0, 1, \dots, i\}$, portanto temos que $P^{(i)}(0) = 0$ com $i > p - 1$ o que prova (4.1.10). ■

Proposição 6: Use as proposições 4 e 5 para mostrar que $F(k)$ para $k = 1, \dots, n$, é um inteiro divisível por p. E também mostre que $F(0)$ é um inteiro não divisível por p. (Use o fato que $(n!)^p$ não é divisível por p, uma ves que $p > n$ e p é primo)

Dem.: Seja

$$Q(x) = x^{p-1} \cdot (1 - x)^p \cdot (2 - x)^p \cdots (n - x)^p,$$

daí temos que:

$$Q(x) = n! \cdot x^{p-1} + b_0 x^p + \cdots + b_{n,p-1} x^{(p+n)(p+1)} \in \mathbb{Z}[x]$$

onde

$$\partial Q = n \cdot (p - 1) := r > p.$$

Logo, $Q(x)$ satisfaz E.4. e $P(x) = \frac{1}{(p-1)!}Q(x)$ em (4.1.8), daí, para

$$i \geq p,\ P^{(i)}(x) = \frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros e divisíveis por p, tendo $i \geq p$ e $P^{(i)}(k)$ é um número inteiro divisível por p, para todo $p \in \mathbb{Z}$, em particular, para $k = 1, \dots, n$. entretanto, para $i > p$, $P^{(i)}(k) = 0$ para $k = 1, \dots, n$, qualquer que seja o caso, segue-se que $P^{(i)}(k)$ é um número inteiro divisível por p para $k = 1, \dots, n$ onde $0 \leq i \leq r := (p+n)(p-1)$.

Portanto, temos que $F(k) = P(k) + P'(k) + \cdots + P^{(r)}(k)$ é um número inteiro divisível por p, para qualquer $k \in \{1, \dots, n\}$.

Já para,

$$F(0) = P(0) + P'(0) + \cdots P^{(p-2)}(0) + P^{(p-1)}(0) + P^{(p)}(0) + \cdots + P^{(r)}(0),$$

pela proposição 5, temos que

$$F(0) = (n!)^p + P^{(p)}(0) + \cdots + P^{(r)}(0),$$

como $P^{(i)}(0)$ é um número inteiro divisível por p, para $i \geq p$ e $k = 0$, segue-se que p divide $P^{(p)}(0) + \cdots + P^{(r)}(0)$, uma vez que p divide $P^{(p)}(0), \dots, P^{(r)}(0)$, mas note que, como p não divide $(n!)^p$, pois p é primo e $p > n$, então temos que p não divide $(n!)^p + P^{(p)}(0) + \cdots + P^{(r)}(0)$, logo, $F(0)$ é um inteiro não divisível por p.

■

Proposição 7: Como $0 \leq c_0 \leq p$, mostre utilizandona proposição 6 que $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$ é um inteiro divisível por p.

Dem.: Como

$$p|\ F(1), \dots, F(n) \Rightarrow p|c_1F(1), \dots, c_nF(n) \Rightarrow p|\ c_1F(1) + \cdots + c_nF(n),$$

com p primo e $0 \leq c_0 \leq p$. Agora, supondo que

$$p|c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n),$$

temos que $p\ |c_0F(0)$, o que segue que $p|c_0$ ou $p|F(0)$, mas pela proposição 6 $p \nmid F(0)$, então $p|F(0)$, e com isso temos que $p \leq c_0$, absurdo, pois $0 \leq c_0 \leq p$, portanto segue-se que $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$ é um inteiro divisível por p.

■

Proposição 8: observe que os ϵ_k, definidos em (4.1.3), e calculados para o polinômio $P(x)$, definido em (4.1.6), têm a forma

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}\frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p \cdots (n-k\theta_k)^p. \qquad (4.1.11)$$

Usando (4.1.11) e o fato de que $0 < \theta_k < 1$, mostre que

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}, \text{ para } k \leq n. \qquad (4.1.12)$$

Dem.: Fazendo $x = \theta_k$ no polinômio $P(x)$ definido em (4.1.6) e substituíndo esse valor em (4.1.3) temos que:

$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}\frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p \cdot (2-k\theta_k)^p \cdots (n-k\theta_k)^p$. Como $0 < \theta_k < 1$

e $k \leq n$, temos

$$|\varepsilon_k|(p-1)! = \left|ke^{k(1-\theta_k)}k^{p-1}{\theta_k}^{p-1}(1-k\theta_k)^p \cdots (n-k\theta_k)^p\right|. \text{ Com } 0 < \theta_k < 1 \Rightarrow j - k\theta_k < j \text{ e } j = 1, \dots, n,$$

daí temos

$$|\varepsilon_k|(p-1)! < \left|k^p e^{k(1-\theta_k)}(\theta_k)^{p-1}1^p 2^p \cdots n^p\right|$$

ainda que tenhamos

$$0 < \theta_k < 1 \Rightarrow \; k(1 - \; k\theta_k) < k$$

segue-se que

$$|\varepsilon_k|(p-1)! < |k^p e^k (\theta_k)^{p-1} (n!)^p|$$

e ainda usando o fato de $0 < \theta_k < 1$, temos

$$|\varepsilon_k|(p-1)! < |k^p e^k (1)^{p-1} (n!)^p|.$$

Diante disso,

$$|\varepsilon_k| < \frac{|k^p e^k (n!)^p|}{(p-1)!}, \text{ como } k \leq n,$$

então

$$|\varepsilon_k| < \frac{k^p e^k (n!)^p}{(p-1)!} \, ,$$

portanto

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}.$$

■

Exercício 9: Mostre que se p for um primo suficientemente grande, então

$$|c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n| < 1.$$

Dem.: Sabendo que

$$|c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n| \leq |c_1\epsilon_1| + \cdots + |c_n\epsilon_n| = |c_1||\epsilon_1| + \cdots + |c_n||\epsilon_n|$$

e como

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!},$$

temos que

$$|c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n| < (|c_1| + \cdots + |c_n|)\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = \frac{Cn^p e^n (n!)^p}{(p-1)!},$$

onde

$$C = |c_1| + \cdots + |c_n|.$$

Diante dos fatos, vamos mostrar que existe um p primo, suficiente grande, tal que $\frac{Cn^p e^n (n!)^p}{(p-1)!} < 1$. Para isso, fazendo $\frac{Cn^p e^n (n!)^p}{(p-1)!} = x_p$ e devemos mostrar que essa sequencia converge para 0. Tomando

$$\left(\frac{x_{p+1}}{x_p}\right) = \frac{Cn^{p+1} e^n (n!)^{p+1}}{[(p+1)-1]!} \cdot \frac{(p-1)!}{Cn^p e^n (n!)^p} = \frac{Cn^p n e^n (n!)^p (n!)(p-1)!}{p(p-1)! Cn^p e^n (n!)^p} = \frac{n! \cdot n}{p}.$$

Logo, temos que

$$\lim_{p \to \infty} \left(\frac{x_{p+1}}{x_p}\right) = \frac{n! \cdot n}{p} = 0,$$

assim a sequencia converge e portanto temos um primo p suficientemente grande com

$$|c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n| < 1.$$

Por fim, podemos observar que as proposições 7 e 9 implicam que

$$c_0F_0 + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n),$$

da igualdade (4.1.5), seja um número inteiro não divisível por p, no qual é simultaneamente menor que 1, ou seja igual a zero. Absurdo, pois como inteiro não divisível por

p, temos que esse número não pode ser zero. Essa contradição surge do fato de supor que e fosse algébrico, logo e é transcendente. ■

4.2 A transcendência de π

A demonstração que mostraremos nesse trabalho é baseada naquela de R. Moritz, em Annals of Mathematics, vol 2 (1901), páginas 57-79, na qual, foi inspirada na prova de Hurwitz para a transcendência de e.

Antes de mostrarmos tal demostração, inicialmente faremos um demonstração de um teorema auxiliar que será aplicado na demonstração da transcendência de π, diante disso, vamos demonstrá-lo.

Teorema 4.2.1 Seja $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica e sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))|: 0 \leq \lambda \leq 1\}, \qquad (4.2.1)$$

onde $|z|$ representa o módulo do complexo $z = x + iy$, isto é, $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

Dem.: Inicialmente iremos demonstrar que

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| sup\{|f'(\lambda z_0)|: 0 \leq \lambda \leq 1\}, \qquad (4.2.2)$$

com isso, (4.2.1) segue-se facilmente pela aplicação de (4.2.2) à função $g(z) = f(z + z_1)$ e ao ponto $z_0 = z_2 - z_1$. Sejam u e v as partes real e imaginária respectivamente de $f(z)$. Dado $z_0 = x_0 + iy_0$, definimos as funções $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pelas expressões

$$\phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0), \psi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0).$$

Aplicando o teorema do valor médio às funções reais ϕ e ψ obtemos

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1), 0 < \lambda_1 < 1, \qquad (4.2.3)$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_2), 0 < \lambda_2 < 1. \qquad (4.2.3')$$

Para calcularmos as derivadas de ϕ e ψ, usaremos o teorema de derivação das funções compostas e obtemos de (4.2.3) e (4.2.3')

$$u(x_0,y_0)-u(0{,}0)=u_x(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)x_0+u_y(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)y_0,$$
$$v(x_0,y_0)-v(0{,}0)=v_x(\lambda_2x_0,\lambda_2y_0)x_0+v_y(\lambda_2x_0,\lambda_2y_0)y_0.$$

Daí temos que

$$f(z_0)-f(0)=u_x(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)x_0+u_y(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)y_0+i\{v_x(\lambda_2x_0,\lambda_2y_0)x_0+ v_y(\lambda_2x_0,\lambda_2y_0)y_0\}. \quad (4.2.4)$$

Diante disso, usando a desigualdade $|z|\leq|x|+|y|$, indicando que o módulo de z é menor ou igual a soma dos módulos das partes real e imaginária, bem como a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|a_1b_1+a_2b_2|\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2},$$

onde $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$.

Aplicando essas desigualdades em (4.2.4), temos que

$$|f(z_0)-f(0)|\leq\sqrt{u_x^2(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)+u_y^2(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)}\sqrt{x_0^2+y_0^2}+$$
$$+\sqrt{v_x^2(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)+v_y^2(\lambda_1x_0,\lambda_1y_0)}\sqrt{x_0^2+y_0^2} \qquad (4.2.5)$$

note que, pelo fato das equações de Cauchy-Riemman, os radicais de (4.2.5), envolvendo u e v são exatamente o módulo de f' calculado em certos pontos, isto é,

$$|f(z_0)-f(0)|\leq|f'(\lambda_1z_0)||z_0|+|f'(\lambda_2z_0)||z_0|,$$

de onde (4.2.2) segue imediatamente, demonstrando o teorema.

Iremos agora demonstrar a transcendência de π. Suponhamos que π seja algébrico, daí, $i\pi$ com $i=\sqrt{-1}$, também seria algébrico, isto é, como um produto de dois números reais, logo $i\pi$ seria raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros, ou seja,

$$P_1(x) = 0. \qquad (4.2.6)$$

Indicaremos as raízes de (4.2.6) por $i\pi, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, como $e^{i\pi} = -1$, segue-se então que

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1 + e^{\alpha j}\right) = 0. \qquad (4.2.7)$$

Desenvolvendo o produto indicado em (4.2.7), obtemos uma expressão da seguinte forma: 1 + somatório de exponenciais cujos expoentes são:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n & (4.2.8.1) \\
\alpha_i + \alpha_j, \text{ para todo } i < j & (4.2.8.2) \\
\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \text{ para todos } i < j < k & (4.2.8.3) \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\
\alpha_1 + \cdots + \alpha_n. & (4.2.8.n)
\end{array}$$

Note que o número de ternos em (4.2.8.1) é n, em (4.2.8.2) é $\binom{n}{2}$, em (4.2.8.3) é $\binom{n}{3}$, ..., (4.2.8.n) é $\binom{n}{n} = 1$, onde $\binom{n}{m}$ são os coeficientes binomiais, ou seja,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ com } 0 \leq m \leq n.$$

Observe que, pelo fato de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ satisfazerem uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, temos que:

(i) os números em (4.2.8.2) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros, isto é,

$$P_2(x) = 0; \qquad (4.2.8)$$

(ii) os números em (4.2.8.3) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{3}$ com coeficientes inteiros, isto é,

$$P_3(x) = 0,$$

e assim sucessivamente.

Diante disso, os números em (4.2.8.1) . . . (4.2.8.n) satisfazem a equação polinomial

$$P_1(x) \ldots P_n(x) = 0 \qquad (4.2.9)$$

de coeficientes inteiros cujo grau é

$$n + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Agora, podemos notar que algum dos números em (4.2.8.1) . . . (4.2.8.n) podem se anular, supondo que m deles sejam diferentes de zero e podemos representá-los por $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Sendo assim, simplificando de (4.2.9) os fatores da forma x^q com $q > 0$, obtemos que $\beta_1, \ldots, \beta_n$ são raízes de uma equação

$$R(x) \equiv cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0 \qquad (4.2.10)$$

com coeficientes inteiros.

Com isso, calculamos o produto de (4.2.7) obtendo como resultado

$$k + e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_m} = 0. \qquad (4.2.11)$$

Daí, seja o polinômio

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} \big(R(x)\big)^p, \qquad (4.2.12)$$

onde $s = mp - 1$ e p é um número primo a ser escolhido posteriormente. Note que o grau de P é $r = s + p$. Agora considere

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(s+p)}(x). \qquad (4.2.13)$$

com isso, segue-se do exercício E.1. que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}P(x). \qquad (4.2.14)$$

Agora, aplicando o teorema 1 à função $f(z) = e^{-x}F(z)$, temos que

$$\left|e^{-\beta_j}F(\beta_j) - F(0)\right| \leq 2|\beta_j| sup\left\{\left|e^{-\lambda\beta_j}P(\lambda\beta_j)\right| : 0 \leq \lambda \leq 1\right\} \qquad (4.2.15)$$

para $j = 1, \dots, m$. Logo, fazendo

$$\epsilon_j = 2|\beta_j| sup\left\{\left|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)\right| : 0 \leq \lambda \leq 1\right\} \qquad (4.2.16)$$

obtemos de (4.2.15) que

$$\left|F(\beta_j) - e^{\beta_j}F(0)\right| \leq \epsilon_j. \qquad (4.2.17)$$

Usando (4.2.11) e a expressão (4.2.17) para $j = 1, \dots, m$ teremos

$$\left|kF(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j. \qquad (4.2.18)$$

Iremos mostrar que o lado esquerdo de (4.2.18) é um inteiro não nulo, e que o lado direito, para p conviniente, é menor que 1. Para isso, devemos calcular as derivadas de $P(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \dots, \beta_m$. Para, as derivadas de ordem $i > p$, procederemos de acordo com a proposição 5, com isso, o polinõmio definido em (4.2.12) será da forma

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}\left\{c_0^p x^{p-1} + bx^p + \cdots\right\}.$$

Logo temos que,

$$P^{(i)}(0) = 0, \text{ para } i < p - 1, \text{ e} P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \qquad (4.2.19)$$

Por outro lado, segue-se diretamente de (4.2.12) que

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0,\ i < p,\ j = 1, \dots, m, \qquad (4.2.20)$$

uma vez que as derivadas de $P^{(i)}(x)$, para $i < p$, a expressão $R(x)$ é um fator comum e $R(\beta_j) = 0$.

Agora, para as derivadas de ordem $i \leq p$, usaremos, primeiramente, o exercício E.4. para concluírmos que os coeficientes de $P^{(i)}(x)$ são inteiros divisíveis por p e podemos concluir que os coeficientes de $P^{(i)}(x)$, $i \leq p$, são inteiros divisíveis por pc^s. (4.2.21)

logo, de (4.2.19) e (4.2.21) temos que

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, \qquad (4.2.22)$$

onde k_0 é um número inteiro cujo valor não importa para os nossos objetivos. Já para os demais $F(\beta_j)$ notemos que

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \geq p} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i \geq p} \sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j). \quad (4.2.23)$$

Observando a expressão

$$\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j) \qquad (4.2.24)$$

para cada i fixado, com $p \leq i \leq s + p$, por (4.2.21) o polinômio $P^{(i)}$ tem coeficientes inteiros divisíveis por pc^s. Além disso, como P tem grau $s + p$, segue-se que $P^{(i)}$ tem grau $s + p - i \leq s$, pois $p \leq i$. Logo, a expressão (4.2.24) pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, \dots, \beta_m), \qquad (4.2.25)$$

onde $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio em que os $\beta_i's$ tem grau menor que s, com coeficiente inteiros. Observe que $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos β_i, s com coeficientes inteiros. Daí, existe um polinômio $G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ de grau menor ou igual a s com coeficientes inteiros e onde $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ são os polinômios simétricos elementares em $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tal que

$$Q(\beta_1, \ldots, \beta_m) = G(\sigma_1, \ldots, \sigma_m). \qquad (4.2.26)$$

Temos que

$$\sigma_1 = c^{-1}c_{m-1},\ \sigma_2 = c^{-1}c_{m-2},\ \ldots,\ \sigma_m = c^{-1}c_0. \qquad (4.2.27)$$

Sendo assim, de (4.2.25), (4.2.26) e (4.2.27) segue-se então que a expressão (4.2.24) é um inteiro divisível por p. Retornando a expressão (4.2.23) concluimos que

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = pK_1, \qquad (4.2.28)$$

onde K_1 é um inteiro cujo valor é irrelevante para nossos objetivos, daí, usando (4.2.22) e (4.2.28) obtemos que o lado direito de (4.2.18) será um inteiro da forma

$$\left|kc^s c_0^p + pK\right| \qquad (4.2.29)$$

onde

$$K = c^s k_0 + K_1.$$

Assim, escolhendo o número primo p de modo que ele seja maior que k, c e c_0. Logo, o inteiro (4.2.29) não é divisível por p, e, consequentemente, é um inteiro não nulo.

Portanto, para concluirmos a demonstração, precisaremos fazer uma estimativa do termo do lado direito de (4.2.18), para isso, temos que

$$M = max(|\beta_1|, \ldots, |\beta_m|).$$

Logo,

$$\epsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} sup\left\{\left|\lambda\beta_j\right|^{p-1}\left|R\left(\lambda\beta_j\right)\right|^p : 0 \leq \lambda \leq 1\right\}, \qquad (4.2.30)$$

usando o fato de que $0 \leq \lambda \leq 1$, seja a seguir $N = max\{|R(z)| : |z| < m\}$, na qual usada em (4.2.30) nos fornece que

$$\epsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1}N^P.$$

Agora, com o fato de que o fatorial domina qualquer exponencial, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n!} = 0$$

para qualquer $A > 0$, segue-se então que, para p suficientemente grande, podemos fazer $\epsilon_j < \frac{1}{m+1}$, daí,

$$\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j \leq \frac{m}{m+1} < 1. \qquad (4.2.31)$$

Diante disso, a expressão (4.2.31) juntamente com o fato de que o lado esquerdo de (4.2.18) é um inteiro não nulo, chegamos a um absurdo, logo, π é transcendente. ■

5 AS CONSTANTES π *e* E OS NÚMEROS ALGÉBRICOS NUMA PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, trataremos de uma proposta didática que pode ser usada como atividade para alunos tanto do ensino fundamental quanto para o ensino médio, já que os discentes têm os primeiros contatos com esses números ainda no ensino fundamental, no caso do número π, e para o número e, os algébricos podem ser abordados nos primeiros anos do ensino médio.

Quando se trata de alguma atividade seja ela em qualquer âmbito de ensino básico, devemos sempre buscar como melhor viabilizar tais recursos para uma atividade seja ela em forma de projeto ou até mesmo uma atividade feita em sala de aula, pois para Ribeiro,

> Procura-se comtemplar a ideia de projeto como um caminho altamente significativo no processo de ensino e aprendizagem nas escolas, bem como suas diferentes etapas, desde a escolha do tema como ponto de partida da atividade, até a retomada de todo o projeto. (Ribeiro, 2009, p. 71)

Dessa forma, a proposta de atividade que será descrita nesse trabalho, tende a dar uma melhoria no processo ensino-aprendizagem no que tange os temas mencionados no início desse capítulo, visto que ao pensar em um projeto de atividade em sala de aula, deve se preocupar de como será trabalhado tal projeto, escolher bem tal conteúdo que se encaixa bem na atividade proposta, já que para Hernádez e Ventura,

> favorecer a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares em relação a: 1) o tratamento da informação, e 2) a relação entre os diferentes conteúdos em torno de problemas ou hipótese que facilitem aos alunos a construção de seus conhecimentos, a transformação da informação procedente dos diferentes saberes disciplinares em conhecimento próprio. (Hernádez e Ventura, 1998, p. 63)

Diante disso, iremos apresentar três propostas didáticas referentes aos assuntos mencionados nesse capítulo e ao longo desse trabalho.

5.1 Proposta de atividade 1: Uma aproximação do cálculo de $\boldsymbol{\pi}$

A atividade que será abordada, tem como público alvo alunos do ensino fundamental que estão tendo o primeiro contato com o estudo da circunferência e de polígonos regulares, é sabido que os discentes já tenham um contato inicial com os elementos de uma circunfêrencia e de polígonos regulares, cálculo do perímetro de figuras planas e também ter conhecimento que a medida do comprimento do diâmetro da circunferência é o dobro da medida do raio da mesma.

1) Cálculo do $\boldsymbol{\pi}$ atráves da razão entre o perímetro de uma circunferência e o diâmetro da mesma com o uso de materiais.

Para essa atividade, os alunos irão precisar dos seguintes materiais: Qualquer material redondo para que o aluno possa calcular o comprimento uma circunferência; um barbante; lápis e borracha; régua. Cada aluno com o uso do barbante irá contornar o material redondo e fixar uma marcação para que possam calcular o comprimento da circunferência. O próximo passo seria determinar o raio da circunferência que contém o material, mas aí vem um questionamento: Como que o discente iria encontrar com presição o centro da circunferência desse material? A resposta para isso está justamente na atividade proposta, o aluno deve fazer uma estimação de onde está localizado o centro da circunferência, daí vem a esperteza do discente para o manuseio dessa localização.

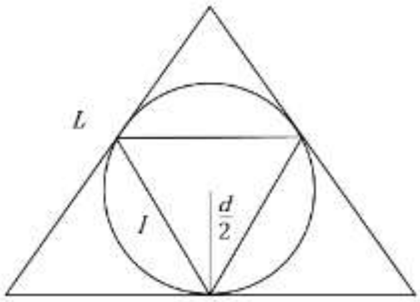
Portanto, após o aluno descobrir a medida do raio da circunferência, encontra-se a medida do diâmetro da mesma e já tendo em mãos o comprimento ou perímetro da circunferência, o discente calcula a razão pedida na proposta dessa atividade e o mesmo irá encontrar uma aproximação para o número π.

2) Uma aproximação de $\boldsymbol{\pi}$ atráves de polígonos regulares inscrito e circunscrito em um círculo.

Já para essa atividade, a mesma será dividida em três etapas:

(i) Aproximação de $\boldsymbol{\pi}$ para um triângulo equilátero inscrito e circunscrito em um círculo.

Figura 2 - Triângulo equilátero inscrito e circunscrito em um círculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo coma figura, iremos considerar $\boldsymbol{c}$ a medida do comprimento da circunferência e $\boldsymbol{d}$ a medida do diâmetro da circunferência e sabendo que $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{\pi}$ segue-se que:

$$\mathbf{3}\boldsymbol{l} < \boldsymbol{c} < \mathbf{3}\boldsymbol{L}$$

sabendo que $\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{d}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$ e $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{d}\sqrt{\mathbf{3}}$, e substituíndo na desigualdade acima, temos então que:

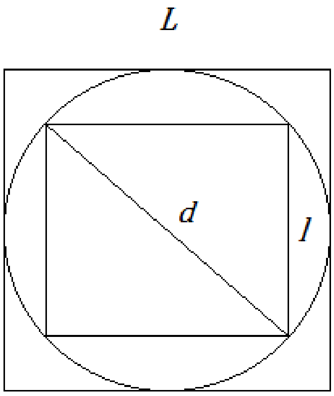
$$\mathbf{3} \cdot \frac{\boldsymbol{d}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{c} < \mathbf{3} \cdot \boldsymbol{d}\sqrt{\mathbf{3}}$$

dividindo a desigualdade por $\boldsymbol{d}$, e considerando a aproximação $\sqrt{\mathbf{3}} = \mathbf{1,73}$, segue-se que:

$$\frac{\mathbf{3} \cdot \mathbf{1,73}}{\mathbf{2}} < \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} < \mathbf{3} \cdot \mathbf{1,73} \therefore \mathbf{2,595} < \boldsymbol{\pi} < \mathbf{5,19}$$

(ii) Aproximação de $\boldsymbol{\pi}$ para um quadrado inscrito e circunscrito em um círculo.

Figura 3 - Quadrado inscrito e circunscrito em um círculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já para o quadrado, ainda considerando $\boldsymbol{c}$ como a medida do comprimento da circunferência e $\boldsymbol{d}$ como a medida do diâmetro da circunferência e ainda usando o fato de que $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{\pi}$ segue-se que:

$$\mathbf{4}\boldsymbol{l} < \boldsymbol{c} < \mathbf{4}\boldsymbol{L}$$

sabendo que $\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{d}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ e $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{d}$, e substituíndo na desigualdade acima, temos então que:

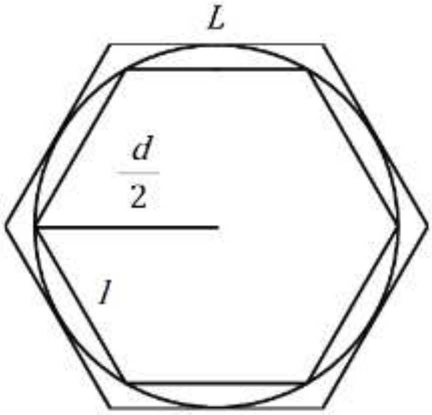
$$\mathbf{4} \cdot \frac{\boldsymbol{d}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{c} < \mathbf{4} \cdot \boldsymbol{d}$$

dividindo a desigualdade por $\boldsymbol{d}$, e considerando a aproximação $\sqrt{\mathbf{2}} = \mathbf{1,41}$, segue-se que:

$$\frac{\mathbf{4} \cdot \mathbf{1,41}}{\mathbf{2}} < \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} < \mathbf{4} \therefore \mathbf{2,82} < \boldsymbol{\pi} < \mathbf{4}$$

(iii) Aproximação de $\boldsymbol{\pi}$ para um hexágono regular inscrito e circunscrito em um círculo.

Figura 4 - Hexágono regular inscrito e circunscrito em um círculo



Fonte: Elaborado pelo autor.

E finalmente para o hexágono regular, considerando $\boldsymbol{c}$ como a medida do comprimento da circunferência e $\boldsymbol{d}$ como a medida do diâmetro da circunferência e $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{\pi}$ segue-se que:

$$\boldsymbol{6l < c < 6L}$$

sabendo que $\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{2}}$ e $\boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{d\sqrt{3}}}{\boldsymbol{3}}$, e substituíndo na desigualdade acima, temos então que:

$$\boldsymbol{6 \cdot \frac{d}{2} < c < 6 \cdot \frac{d\sqrt{3}}{3}}$$

dividindo a desigualdade por $\boldsymbol{d}$, e considerando a aproximação $\boldsymbol{\sqrt{3} = 1,73}$, segue-se que:

$$\boldsymbol{3 < \frac{c}{d} < 6 \cdot \frac{1,73}{3} \therefore 3 < \pi < 3,46}$$

Portanto, o discente irá observar nessa atividade que, a medida em que aumentamos o número de lados do polígono regular, mais precisa será a aproximação para o número $\boldsymbol{\pi}$.

5.2 Proposta de atividade 2: Uma aproximação para o número e

Vimos que no capítulo 2 que o número e pode ser expresso a seguinte forma:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots +$$

mas, e também pode ser escrito sob a forma:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a partir daí, propomos a seguinte atividade:

Uma instituição financeira usa em suas operações financeiras o que podemos chamar de composição de juros: anual, semestral, trimestral, bimestral ou até mesmo diário. Essa composição será feita x vezes ao ano e para cada período de composição. Essa instituição tem taxa de juros anual dividida por x, e considerando t anos, teríamos a seguinte espressão

$$M = \mathrm{C}\left(1 + \tfrac{1}{nx}\right)^{nt} \text{ (I).}$$

Iremos considerar um capital C unitário e num período de um ano teríamos a seguinte expressão:

$$M = \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^{x} \text{ (II).}$$

Faça uma tabela com os seguintes dados:

- Considere os seguintes valores para n (1, 2, 4, 5, 10, 100 e 1000);
- Em seguida substitua os valores de n na expressão (II);

Em seguida, faça uma observação dos resultados obtidos.

Nessa atividade é interessante mencionar o comportamento dos valores obtidos ao considerar valores para n na expressão (II) e comparando os resultados obtidos entre os discentes e após como uma avaliação de tudo isso, mostrar aos discentes a motivação de tal atividade para abordar de como foi, de um a certa forma, o descobrimento o número e.

5.3 Proposta de atividade 3: verificação se um número dado é algébrico

Para essa atividade, deve ser feita a discentes questões no segundo ano do ensino médio ou mesmo a aqueles que por ventura irão prestar seleções seja ela para concursos ou vestibulares.

Portanto, segue abaixo a atividade proposta:

1) Calcular $\cos 75°$.

Solução:

Podemos escrever $75°$ como a seguinte soma: $75° = 45° + 30°$ e usando uma das fórmulas de adição de arcos da Trigonometria, temos que:

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{sen} 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

2) Verificar se $\cos 75°$ é um número algébrico.

Solução:

Pelo item 1), vimos que $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e supondo que $x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, e elevando ambos os membros ao quadrado, temos que:

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{6 - 2\sqrt{12} + 2}{16} \Rightarrow 16x^2 = 8 - 4\sqrt{3} \Rightarrow 4x^2 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2 - 2 = -\sqrt{3}$$

elevando novamente ambos os membros ao quadrado, segue-se que:

$$(4x^2 - 2)^2 = -\sqrt{3} \Rightarrow 16x^4 - 16x^2 + 4 = 3 \Rightarrow 16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$$

Note que $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ é raiz da equação $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$ e portanto, podemos concluir que $\cos 75°$ é um número algébrico.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não há dúvidas de que com o passar dos anos, o homem ainda busca um maior entendimento sobre o ensino da Matemática e até mesmo, por que não da própria Matemática, poderíamos ter como exemplo, recentemente o descobrimento de mais casas decimais do número π, temos também que apesar desse trabalho mencionar a prova da transcendência de π e e, podemos também salientar que com o avanço do estudo dos números transcendentes, Linderman com a ajuda dos métodos de Hermite, provou a transcendência de e^{α} desde que α não seja um número algébrico, há também alguns números que são transcendentes como por exemplo log2, $e^{\sqrt{2}}$ e cos1. Vale mencionar que mesmo depois de mais de 120 anos da prova da transcedência π e e, ainda não se sabe da natureza aritmética de $e + \pi$ e $e\pi$.

Que esse trabalho possa ajudar aos discentes da educação básica entenderem mais o que é pensar Matemática, através da importância do conhecimento e do saber de certas demonstrações, que os mesmos possam obter mais interesse em aprofundar os estudos dessas constantes π e e, dos tais conjuntos referidos nesse trabalho que são os conjuntos dos números algébricos e transcendentes, e até mesmo para os docentes da Matemática que possam fazer comentários em sala de aula sobre esses conjuntos e da mesma forma com a ajuda é claro das propostas didáticas mencionadas nesse trabalho.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, D.G. **Números Irracionais e Transcendentes.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM. 2011. (Coleção Iniciação Científica).

HERNÁNDEZ, F.; VENTURA, M. **A organização do currículo por projetos de trabalho**: o conhecimento é um caleidoscópio. Porto Alegre: Artmed, 1998

LIMA, E. L. **Análise Real volume 1 Funções de uma variável.**12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. **Logaritmos.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática).

MAOR, E. ***e:*** a História de um Número. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARQUES, Diego. **Teoria dos Números Transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Textos Universitários).

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar Volume 1 Números reais**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção do Professor de Matemática).

NIVEN, I. **Números:** Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Iniciação Científica).

RIBEIRO, F. D. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática.** São Paulo: Saraiva, 2009

APÊNDICE A - PROVA DA IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

Dem: Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja um número racional, daí poderíamos escrever $\sqrt{2}$ sob a forma $\frac{p}{q}$, isto é, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ onde p e q são números inteiros com $q \neq 0$ e primos entre si. Diante disso elevando a expressão ao quadrado temos que:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Como o termo do lado direito $2q^2$ representa um número par, então temos que p^2 é um número par, logo p é um número par. Por outro lado, como p é um número par, o mesmo pode ser escrito soba forma $2k$, com k inteiro, ou seja, $p = 2k$. Daí substituíndo p por $2k$ em $p^2 = 2q^2$, temos que:

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Note que o termo $2k^2$ é um número par, logo q^2 é par, e portanto q é par. Absurdo, pois se p e q fossem pares, teríamos $mdc(p, q) \geq 2$ e por hipótese, os mesmos são primos entre si, isto é, o $mdc(p, q) = 1$. Portanto, $\sqrt{2}$ é um número irracional. ■

Prova de que o conjunto dos números reais não são enumeráveis

Dem: Devemos mostra que não existe um função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva. Com isso, vamos supor que, para uma f dada, escrevemos uma sequencia descrecente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ com intervalos fechados e limitados tais que $f(n) \notin I_n$. Daí, se c é um número real que pertence a todos os I_n, então nenhum dos valores de $f(n)$ pode ser igual a c e diante disso, f não pode ser sobrejetiva. Agora, para obter os intervalos, iremos tomar $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$ e, supondo $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ tais que $f(j) \notin I_j$, podemos olhar para $I_n = [a_n, b_n]$. Se considerarmos $f(n+1) \notin I_n$, podemos então tomar $I_{n+1} = I_n$. Mas, se $f(n+1) \in I_n$, temos que, pelo menos um dos extremos, por exemplo a_n, será diferente de $f(n+1)$, isto é, $a_n < f(n+1)$. Com isso, podemos concluir que,

$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, com $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = a_n + {}^{f(n+1)}/_{2}$. ■

Prova do lema auxiliar do capítulo 3

Dem: Devemos substituir os X_i, s em

$$X_1 = q_{11}x_1 + \cdots + q_{1n}x_n$$
$$\vdots$$
$$X_{n+1} = q_{n+1,1}x_1 + \cdots + q_{n+1,n}x_n$$

daí, temos que a equação $r_1X_1 + \cdots + r_{n+1}X_{n+1} = 0$ será satisfeita se os r_i, s forem as soluções do sistema linear com n equações e $n + 1$ incógnitas

$$\begin{cases} q_{11}r_1 + q_{12}r_2 + \cdots + q_{n+1,1}r_{n+1} = 0 \\ \quad\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ q_{1n}r_1 + q_{2n}r_2 + \cdots + q_{n+1,n}r_{n+1} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Logo, o sistema (1) terá soluções $r_1, \cdots, r_{n+1} \in \mathbb{Q}$, desde que os coeficientes do sistema são também pertencentes a $\mathbb{Q}$. Com isso, considere a matriz dos coeficientes que cotém uma matriz $n\ x\ n$, cujo determinante é diferente de zero, e a partir daí, podemos supor que, trocando os índices dos r'_i, s se necessário, que

$$\begin{vmatrix} q_{11} \cdots q_{n1} \\ q_{1n} \cdots q_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sendo assim, tomando $r_{n+1} = 1$ e iremos obter os demais r_i, s resolvendo o sistema de com n equações e n incógnitas. Com isso, se nenhuma matriz $n\ x\ n$ tiver o determinante diferente de zero, então podemos supor sem perca de generalidade que

$$\begin{vmatrix} q_{11} \cdots q_{m1} \\ q_{1m} \cdots q_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Para este caso, tomando $r_{m+1} = 1$, $r_{m+2} = \cdots = r_{n+1} = 0$ mostramos que as soluções $r_1, \cdots, r_m$ do sistema

$$\begin{cases} q_{11}r_1 + \cdots + q_{m,1}r_m = -q_{m+1,1} \\ \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ q_{1m}r_1 + \cdots + q_{m,m}r_m = -q_{m+1,m} \end{cases} \quad (3)$$

satisfaz as equações

$$q_{1j}r_1 + \cdots + q_{m,j}r_m = -q_{m+1,j} \quad (4)$$

para $j = m + 1, \cdots, n$. Diante disso, vamos supor que, por absurdo, que (4) não ocorra para um certo j. Então, pela propriedade dos determinantes, segue-se que

$$\begin{vmatrix} q_{11} \cdots q_{m1} & q_{m+1,1} \\ \vdots & \\ q_{1m} \cdots q_{mm} & q_{m+1,m} \\ q_{1j} \cdots q_{mj} & q_{m+1,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} \cdots q_{m1} & 0 \\ \vdots & \\ q_{1m} \cdots q_{mm} & 0 \\ q_{1j} \cdots q_{mj} & A \end{vmatrix} \neq 0 \ (5)$$

onde $A = q_{1j}r_1 + \cdots + q_{mj}r_n + q_{m+1,j} \neq 0$, daí, a desigualdade em (5) contradiz a hipótese de que a matriz cujos elementos estão em (2) é a maior matriz quadrada dentro da matriz dos coeficentes de (1) que tenha determinante diferente de zero. ■