UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

FRANCISCO VALDINEY FERNANDES ARAÚJO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO: CONCEITOS E APLICAÇÕES

MOSSORÓ-RN
2020

FRANCISCO VALDINEY FERNANDES ARAÚJO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Departamento de Ciências Exatas e Naturais, com financiamento pela CAPES, para a obtenção do título de Mestre em Matemática do programa PROFMAT.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo – UFERSA.

MOSSORÓ-RN
2020

A658c Araújo, Francisco Valdiney Fernandes.
Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio: conceitos e aplicações / Francisco Valdiney Fernandes Araújo. - 2020.
112 f. : il.

Orientadora: Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2020.

1. Cálculo. 2. Derivada. 3. Integral. 4. Ensino Médio. I. Macêdo, Maria Joseane Felipe Guedes , orient. II. Título.

FRANCISCO VALDINEY FERNANDES ARAÚJO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Departamento de Ciências Exatas e Naturais, com financiamento pela CAPES, para a obtenção do título de Mestre em Matemática do programa PROFMAT.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo (UFERSA)
Presidente

Paulo César Linhares da Silva

Prof. Dr. Paulo César Linhares da Silva (UFERSA)
Membro Examinador

Walter Martins Rodrigues

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues (UFERSA)
Membro Examinador

MOSSORÓ-RN

2020

Dedico esse trabalho aos meus pais, Valdecir e Maria, por terem me dado a vida e a educação necessária para chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Maria e Valdecir, por terem me criado e me educado, possibilitando que eu chegasse até aqui.

À minha professora orientadora Joseane, por ter me orientado na confecção deste trabalho e por ser uma ótima professora na disciplina Números e Funções Reais.

Aos meus colegas, por terem compartilhado conhecimento, conteúdos, ideias, risadas, *networking* e me ajudarem durante o curso.

À minha amiga e colega de graduação Wellyngtania por ter me indicado este curso e me ajudado na parte logística ao longo da minha carreira acadêmica.

À CAPES por financiar meu curso e possibilitar que eu o conclua sem despesas referentes ao meu salário de professor.

Aos meus professores do Profmat, por terem compartilhado conhecimento, me ensinando coisas novas e ajudando no aprendizado dos componentes curriculares do curso.

A todos que contribuem direta e indiretamente com minha vida profissional e acadêmica.

“É melhor cair em contradição do que do oitavo andar”.

Falcão.

RESUMO

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das áreas mais importantes da Matemática Pura e Aplicada, no entanto, o estudante brasileiro só se depara com essa disciplina quando chega ao ensino superior, o que faz com que a grande maioria da população brasileira sequer saiba do que se trata. Os livros didáticos e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) do ensino médio no Brasil dão ênfase a uma linguagem sofisticada e a fórmulas decoradas, dando pouco espaço para a Geometria e sacrificando o Cálculo, além do que, boa parte dos professores adequa seu conteúdo ao que é cobrado em vestibulares ou no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), não lecionando assuntos como matrizes. Este trabalho mostra como se pode, uma vez superadas essas barreiras legislativas através de uma mudança de paradigma no ensino de Matemática no Brasil, ensinar esta disciplina no ensino médio através da associação entre gráficos e funções, utilizando as propriedades de derivada e integral, de modo a fugir das complexas e tediosas definições formais de limite. São abordados também alguns dos pré-requisitos para o estudo do Cálculo, como razão e proporção, expressões algébricas, equações e funções, bem como a geometrização de problemas e aplicações de limites de séries sem a definição formal. Por fim, fala-se sobre as aplicações do Cálculo nas diversas área das ciências exatas, com resoluções de problemas e exemplos de grandezas físicas que podem ser expressas como derivadas.

Palavras-chave: Cálculo, Derivada, Integral, Ensino Médio.

ABSTRACT

Differential and Integral Calculus is one of the most important areas of Pure and Applied Mathematics, however, the Brazilian student only comes across this discipline when he arrives at higher education, which makes most of the Brazilian population not even know what it comes. High school textbooks and the BNCC (Common National Curriculum Base) in Brazil emphasize a sophisticated language and decorated formulas, giving little space to Geometry and sacrificing Calculus, its content to what is charged in entrance exams or ENEM (National High School Exam), not teaching subjects such as matrices. This work shows how, once these legislative barriers are overcome through a paradigm shift in the teaching of Mathematics in Brazil, teaching this discipline in high school through the association between graphs and functions, using the properties of derivative and integral, in a way to escape the complex and tedious formal definitions of limit. Some of the prerequisites for the study of Calculus are also addressed, such as reason and proportion, algebraic expressions, equations and functions, as well as the geometry of problems and series limit applications without formal definition. Finally, we talk about the applications of Calculus in the various areas of the exact sciences, with problem solving and examples of physical quantities that can be expressed as derivatives.

Keywords: Calculus, Derivative, Integral, High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Mudanças não tão recentes na forma de se ensinar matemática no Brasil, dentre outras variáveis, têm feito nosso país amargar as últimas posições em rankings de aprendizado no ensino público no mundo. Dentre essas mudanças, nota-se a maior promoção de conteúdos algébricos e analíticos, e a supressão de conteúdos visuais, dentre eles o Cálculo. A esse respeito, o professor Geraldo Ávila (1991) indaga:

> "Por que não ensinamos Cálculo na escola de 2° grau? Será que *é* um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o Cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o Cálculo no ensino? Por quê? Como fazer isso?" (ÁVILA, 1991).

Questionamentos como esses dizem respeito não apenas ao ensino de Cálculo em si, mas também ao modo como se ensina matemática no Brasil, que, nas últimas décadas, tem se tornado cada vez mais algebrizado e menos geometrizado, adotando um currículo baseado no **Movimento da Matemática Moderna**, que se concentra no rigor do formalismo matemático e da linguagem de conjuntos, ao contrário de uma didática baseada em visualização de figuras e resolução de problemas, o que dificulta bastante para o aluno compreender, abstrair, colher informações e resolver problemas matemáticos e de outras ciências exatas.

Com isso, o ensino de Geometria e de Cálculo, cujo formalismo é extenso, foi suprimido, e muitos problemas que utilizam destas áreas para sua resolução passaram a ser resolvidos algebricamente e com um certo zelo linguístico. "Por exemplo, é muito mais natural e mais fácil dizer '2 e 5 são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$' do que 'o conjunto verdade da sentença $x^2 - 7x + 10 = 0$ é $V = \{2,5\}$'" (ÁVILA, 1993). Ora, se um matemático costuma falar a primeira frase, por que um estudante de ensino médio deve falar a segunda? Embora seja importante se usar as duas formas, adicionar um elemento "linguagem de conjuntos" torna a sentença mais complexa para um estudante de ensino médio.

Voltando para o Cálculo, Ávila salienta que nos Estados Unidos e em outros países onde o equivalente ao nosso ensino médio ocorre de modo que os alunos decidem as disciplinas que vão estudar, o Cálculo é ensinado visando o ensino superior, enquanto isso no Brasil, que adotou a cartilha da Matemática Moderna, o aluno só se depara com Cálculo a primeira vez no curso de graduação, sem sequer ter ouvido a palavra "derivada" antes disso. Apesar de Ávila ter escrito os artigos "*O ensino do cálculo no 2º grau*" e "*O ensino de matemática*" em 1991 e 1993, respectivamente, eles se mostram mais atuais do que nunca, ainda mais num cenário de estagnação da educação brasileira, seja por má vontade do estado em modificar a BNCC de modo a se adequar a modelos de ensino mais eficientes, seja pela baixa liberdade das escolas e professores em criar e recriar sua própria grade curricular, levando o Brasil a posições cada vez piores nos indicadores educacionais do mundo.

Este trabalho tem como objetivo propor uma possibilidade de reintroduzir o Cálculo no ensino médio, não apenas como disciplina específica, mas de forma mais simples e sem muitos formalismos. De modo que o aluno possa entender melhor assuntos relacionados a grandezas físicas como velocidade, aceleração, força, potência, corrente elétrica, vazão; além de funções e seus comportamentos, Geometria atrelada à Álgebra, e Estatística, tudo isso longe das definições formais de limite e somatório infinitesimal de áreas, pelo menos nesse primeiro contato com a disciplina. O Cálculo (que aqui será escrito com letra maiúscula para diferenciar do "cálculo" de operações fundamentais) e seus conceitos poderão aparecer em tópicos como funções, Geometria Analítica, Cinemática, Dinâmica, Termodinâmica, Eletrostática, Eletrodinâmica, Matemática Financeira, ou na sua forma pura.

No Capítulo 2, será abordada uma breve história do Cálculo no ensino médio no Brasil, o motivo de seu abandono, seu reaparecimento como disciplina específica nos livros didáticos em 2009, os indicadores educacionais de Matemática do Brasil nos últimos anos, a forma como a matemática é ensinada e como o ensino de Cálculo pode quebrar esse paradigma. Também será apresentada a teoria do Cálculo com alguns formalismos usados no ensino superior, e porque essa é uma forma pouco produtiva e difícil para os alunos do ensino médio.

Em seguida, no Capítulo 3, será apresentada uma forma de como introduzir o Cálculo no ensino médio, com uma adaptação aos seus pré-requisitos de modo a geometrizar problemas algébricos. O conceito de derivada será abordado geometricamente e algebricamente sem o uso de limites, tendo como base os coeficientes lineares das funções afim e constante, as propriedades de derivada da soma, subtração, produto, quociente, e a regra da cadeia, além do uso da derivada implícita. O estudo sobre integral se iniciará com o cálculo de áreas de polígonos como o retângulo, o triângulo e o trapézio, e sua associação com as funções afim e constante. Para as outras funções, a abordagem será inicialmente algébrica, estendendo a definição de área sob a curva e aplicando as propriedades de integral da soma, subtração, produto, bem como a substituição de uma variável por outra. Já o limite será abordado de maneira breve e informal, apresentando uma maneira de introduzir esse conceito para o cálculo de séries infinitas convergentes e a Regra de L'Hospital, um dispositivo bastante usado na resolução de limites através do uso de derivadas.

No Capítulo 4 será mostrado algumas das áreas da Matemática onde o Cálculo pode ser aplicado, como em Otimização, Geometria Plana e Espacial, assim como sua abordagem na Física e em outras Ciências Naturais. Alguns problemas referentes aos temas abordados serão resolvidos utilizando os conhecimentos de Cálculo obtidos no Capítulo 3.

Exceto quando referenciado, as teorizações, indagações, demonstrações e aplicações dos conteúdos referentes a este trabalho serão de autoria própria, mesmo que algum conteúdo já tenha sido criado anteriormente. Vale ressaltar que este trabalho será focado no conteúdo acadêmico e não na metodologia, sendo esta de livre preferência do professor que porventura venha a aplicar os conhecimentos de Cálculo em sala de aula, desde que não desvirtue seu objetivo.

2. ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL

Segundo o matemático e educador Geraldo Ávila, o cálculo...

> "...fazia parte do programa da 3.ª série do chamado *curso científico o* ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro da educação na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da Reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5.ª à 8.ª *série* mais o 2.° grau era o curso *ginasial de 5 anos,* seguido por dois anos de *pré-universitário,* já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia." (ÁVILA, 1991).

Por volta do fim da década de 1950 e início da década de 1960, o ensino de matemática sofreu grandes alterações no seu currículo, influenciado pelo movimento conhecido como *Matemática Moderna*, de modo que sua metodologia se tornou mais axiomática, com "ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, à custa, inclusive, de retirar dos programas tópicos importantes no ensino, como a Geometria e o Cálculo" (ÁVILA, 1991). Isso ocorreu porque os axiomas que definem a Geometria e o Cálculo Diferencial e Integral (que será referido como Cálculo com C maiúsculo para diferir do cálculo de operações) são extensos, e apresentá-los aos alunos como forma introdutória tomaria muito tempo de aula, o que acabou por suprimir boa parte desses conteúdos.

O Cálculo volta a aparecer na grade curricular do ensino médio em 2009, nos livros didáticos do 3º ano no ciclo 2009-2011, como uma continuação do estudo sobre Geometria Analítica, mas ainda de forma específica, como conteúdo isolado e sem afetar a dinâmica do ensino de matemática como um todo.

Atualmente, pouco se fala em Cálculo nas escolas de ensino médio, seja porque o professor de matemática vê esse assunto como um conhecimento específico do ensino superior, seja porque não há questões específicas de Cálculo no ENEM ou em outros exames de qualificação no nível médio ou inferior (neste caso, há uma forte discussão entre os professores no que diz respeito ao ensino de matrizes, pois não é um assunto que "cai no ENEM").

Esse método de selecionar o conteúdo baseado no que “cai no ENEM” pode ser prejudicial ao aluno, pois ele passa a ver a Matemática como técnicas para passar na prova, de modo que passa a vinculá-la apenas à escola e a um posterior ingresso na universidade, não usufruindo de seus conhecimentos fora do ambiente acadêmico.

As consequências negativas deste método de ensino-aprendizagem de matemática são sentidas no Brasil. Segundo o professor Nílson José Machado (2015), “não tem nenhum sentido, numa escola de ensino básico, deixar de tratar um assunto que os alunos acham muito interessante, para ensinar em seu lugar um amontoado de técnicas que os alunos nem sempre acham interessantes”, em referência à forma como a matemática é ensinada hoje em dia, com seu excesso de fórmulas decoradas, Álgebra e Aritmética em detrimento da intuição, Geometria e Cálculo.

Exemplo disso é um extenso conteúdo sobre linguagem de conjuntos que geralmente é utilizado no início do 1º ano como um pré-requisito para o ensino de funções, e nas próprias funções, dá-se muita ênfase a conceitos como função injetora, sobrejetora, bijetora, inversa e composta, enfim, temas com pouca aplicabilidade no nível médio e que o aluno só verá novamente em Cálculo, caso ingresse no ensino superior. A regra de três, utilizada constantemente em problemas de proporção tanto em Matemática quanto em Física, é usada de forma algébrica e raramente geométrica, e o mesmo se aplica aos produtos notáveis, a sistemas de equações do 1º grau e à equação do 2º grau, este último geralmente ensinado no 9º ano com um enfoque voltado para a fórmula de Bháskara e não para o método de completar quadrados.

2.1. Não só um conteúdo: uma mudança de paradigma

De acordo com dados do Pisa (*Programme for International Student Assessment*) de 2018:

> “o Brasil tem baixa proficiência em leitura, matemática e ciências, se comparado com outros 78 países que participaram da avaliação. A edição 2018, divulgada mundialmente na terça-feira, 3 de dezembro, revela que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de

matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania." (INEP, 2019)

O mesmo estudo aponta que na América do Sul, o Brasil só está à frente da Argentina, com 384 a 379 pontos, respectivamente, e atrás do Uruguai (418 pontos), Chile (417 pontos), Peru (400 pontos) e Colômbia (396 pontos), apontando para o fato de que "mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do Pisa apresentou nível máximo de proficiência na área" (INEP, 2019).

O artigo mostra que a deficiência no ensino no Brasil não se restringe à matemática, mas se aplica também à linguagem e às ciências, expondo uma falha estrutural no ensino brasileiro, principalmente o público estadual e municipal. Com relação ao ensino fundamental, a professora Marcelina da Costa Chaves (2012) argumenta que "o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina", e por isso "sente dificuldades em utilizar o conhecimento 'adquirido'". O professor, por outro lado, procura outros métodos de ensino, envolvendo atividades lúdicas e jogos, mas não tem um objetivo claro quanto à sua aplicabilidade, consequentemente não atingindo o objetivo de aprendizagem esperado.

Caminhando para os anos finais do ensino fundamental e início do ensino médio, Schuler (2012) salienta que "currículos extensos, sem significado para o aluno, carência de professores permanentemente qualificados, ou motivados a trabalhar a Matemática de maneira interessante, são alguns nós que precisam ser desatados". Alguns desses problemas são de natureza estrutural como a carência de professores qualificados e um modelo de ensino centralizado e feito para "passar no ENEM" e não para ensinar; outros dizem respeito à pratica de ensino-aprendizagem como os conteúdos, objetivos e metodologias, que, como citados anteriormente, levam o aluno a decorar fórmulas e resolver um problema sem abstraí-lo.

Tanto Ávila quanto Machado propõem a reintrodução do Cálculo no ensino médio (Machado também a defende no ensino fundamental) não apenas como um conteúdo isolado, mas como uma mudança de paradigma em todo o ensino médio, pois ele se aplica a várias áreas do conhecimento e é um conteúdo novo, uma forma interessante de ver a matemática e as ciências naturais que visa atrair o aluno e melhorar seu desempenho. Machado exemplifica com um problema que pode ser resolvido através do Cálculo, mas é ensinado utilizando fórmulas decoradas: encontrar o vértice de uma parábola que representa uma função quadrática. Em termos algébricos, encontrar $V(x_0, y_0)$, onde V é o vértice da parábola, x_0 e y_0 são suas coordenadas no plano cartesiano.

Provar isso de maneira algébrica sem usar as ferramentas do Cálculo é trabalhoso, pois o aluno precisa saber a propriedade simétrica da parábola, e verificar que $f(x_0 - m) = f(x_0 + m)$, sendo $m \geq 0$. Diante desse cenário, onde às vezes nem o professor consegue executar a prova do caso geral, ele pula para a fórmula pronta usando os coeficientes da função e o delta Δ da fórmula de Bhaskara para encontrar x_0 e y_0. Mas, se for utilizada a noção de derivada, o aluno pode perceber que o vértice da parábola é o ponto em que a função f não é crescente nem decrescente, logo sua derivada deve ser 0, então o aluno se torna autor de parte do cálculo que determina x, não sendo um mero decorador de fórmulas.

Embora a determinação de uma derivada utilize noções de limite, que são a princípio tão complexas quanto a prova algébrica usando simetria, uma visualização geométrica do gráfico de f e sua derivada podem dar uma melhor noção do valor de x procurado.

2.2. O Cálculo como é ensinado na universidade

No ensino superior, o aluno recém-saído da escola se depara com uma nova gama de conhecimentos que é, em sua maior parte, novidades que o mesmo nem sequer pensou que estudaria, e o Cálculo é uma delas. Isso se deve ao fato de que nada ou quase nada do que o estudante viu em matemática ou física na escola remeta ao conhecimento do Cálculo, sendo o mais próximo do assunto a “taxa de variação” em uma função afim ou os gráficos de velocidade e aceleração em Cinemática. Mas em nenhum deles a palavra *derivada* é mencionada. Isso torna o Cálculo uma disciplina “vilã” nos currículos superiores dos cursos de exatas ou outros onde ela é exigida, e como consequência a taxa de reprovação nela é altíssima.

Ávila salienta que:

> “Em outros países o Cálculo é ensinado na escola secundária. E às vezes até em quantidade substancial, como acontece nos Estados Unidos. Lá o sistema de ensino, embora varie de Estado para Estado, e mesmo nos diferentes distritos educacionais de um mesmo Estado, é organizado de maneira a ter maior flexibilidade nos anos finais, que formam o chamado *senior*

high-school, correspondente aproximadamente ao que aqui chamamos de 2.º grau. Assim, um aluno no *senior high* pode preferir estudar mais Matemática, mais Ciências ou mais Humanidades. Na primeira hipótese, ele terá à sua disposição cursos substanciais de Álgebra (incluindo Trigonometria e Geometria Analítica), Geometria e Cálculo. E, geralmente, o aluno que faz Cálculo no *senior high*, quando entra na universidade, apresenta um certificado de proficiência que o dispensa do curso de Cálculo do primeiro semestre e, às vezes, do ano todo..." (ÁVILA, 1991)

Nílson José Machado (2015) mostra uma realidade totalmente diferente no Brasil, apontando que "já houve várias tentativas de ensinar Cálculo na escola básica" e "já foi tema obrigatório na Fuvest" antes de 1970, "mas do modo como era ensinado, não podia dar certo, pois era tão somente uma antecipação do modo como era ensinado na faculdade", conclui. Logo, para ele, se faz necessário mudar a didática do ensino do Cálculo na escola.

Dando continuidade à entrevista, Machado afirma que o Cálculo fora utilizado desde Aristóteles para a determinação de áreas de superfícies, e até o Século XVII, Newton e Leibniz utilizavam esse conhecimento com sucesso, mas de forma confusa. Cauchy e outros matemáticos deram ao Cálculo uma maior formalidade no Século IXX, mas fizeram isso com uma "ferramenta pesadíssima", a ideia formal de limite. Machado (2015) afirma que "enquanto a ideia intuitiva de limite é simples, pois é a ideia de aproximações sucessivas" o conceito formal é pesado, e "então, na faculdade, a maioria dos cursos começa com o conceito formal de limite, e isso foi introduzido na escola básica", e deu errado.

A ideia principal do nosso trabalho é dar uma abordagem para o Cálculo ser ensinado no nível básico de ensino, mais precisamente no ensino médio. No entanto, essa nossa proposta será feita a partir do Capítulo 3. O intuito deste capítulo, é formalizar algumas definições necessárias para os capítulos subsequentes. Desse modo, a abordagem feita aqui remeterá aos formalismos necessários do Cálculo como estudado na universidade. Para o leitor que já está familiarizado com o assunto, pode seguir para o Capítulo 3. Caso contrário, a seção seguinte irá revisar de maneira resumida alguns conceitos do Cálculo necessários para o nosso estudo.

2.3 Conceitos Preliminares sobre limites, derivadas e integral

Normalmente a disciplina de Cálculo I na universidade é ensinada partido do conceito de limite de uma função real a valores reais. Inicialmente é dada a noção intuitiva de limite, para em seguida abordar a formalização do conceito propriamente dito. A partir de limite, estuda-se a derivada definida como um limite. Esta seção está fortemente baseada nos livros "Um curso de Cálculo" e "Cálculo A", e tem como objetivo principal revisar alguns conceitos básicos sobre limites, derivadas e integral, necessários ao bom entendimento do trabalho. No entanto são apenas tópicos a título de revisão, para mais detalhes ver (Guidorizzi, 2002) e (Flemming, 2006).

2.3.1 Limites

Uma maneira de introduzir a noção intuitiva de limite pode ser através de sucessões ou sequências numéricas. Em uma sequência infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots)$ investigar o seu limite significa que analisar o que ocorre com o valor da sequência à medida que n cresce e denotamos por

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} a_n = L,$$

onde L é o limite.

Antonio Caminha Muniz Neto (2015, p. 76), define limite de uma sequência da seguinte forma.

Definição 2.1 Dizemos que uma sequência (a_n) converge para um (número) real L quando, fixado arbitrariamente um $\varepsilon > 0$ para o valor de L, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Alternativamente, se (a_n), com $n \geq 1$, convergir para L, diremos que a sequência é convergente e L é o *limite* da mesma.

Pode ser utilizada as seguintes notações,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L, ou \;\; a_n \overset{n}{\to} L \;\; ou \;\; a_n \to L.$$

Quando tal limite não existe, dizemos que a sequência é divergente.

Por outro lado, no cálculo de limites de função o intuito é investigar o que acontece com uma função f a medida que x se aproxima de um valor a, onde pode ocorrer de a não pertencer ao domínio da função f. Desse modo, dizer que f tem limite L quando x tende para a, significa que $f(x)$ está arbitrariamente próximo de L desde que tenhamos valores x, com $x \neq a$, suficientemente próximos de a.

Definição 2.2 Seja f uma função definida num intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que f tem limite L quando x tende para a, e denotamos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{2.1}$$

se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que para todo $x \in D(f)$ temos que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Além disso, o limite quando existe é único. A demonstração desse fato pode ser encontrada em (Flemming, 2006, p.68).

Propriedades 2.1 Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ e c uma constante real qualquer, então vale:

a) $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$;
(O limite da soma é igual a soma dos limites)

b) $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$;
(O limite da diferença é igual a diferença dos limites)

c) $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$;
(O limite do produto é igual ao produto dos limites)

d) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$;
(O limite do quociente é igual ao quociente dos limites)

e) $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L_1^n$, para qualquer inteiro positivo n;

A demonstração para tais propriedades pode ser encontrada em (Flemming, 2006, p.69).

A seguir definiremos a continuidade de uma função num ponto, usando o conceito de limite já explanado.

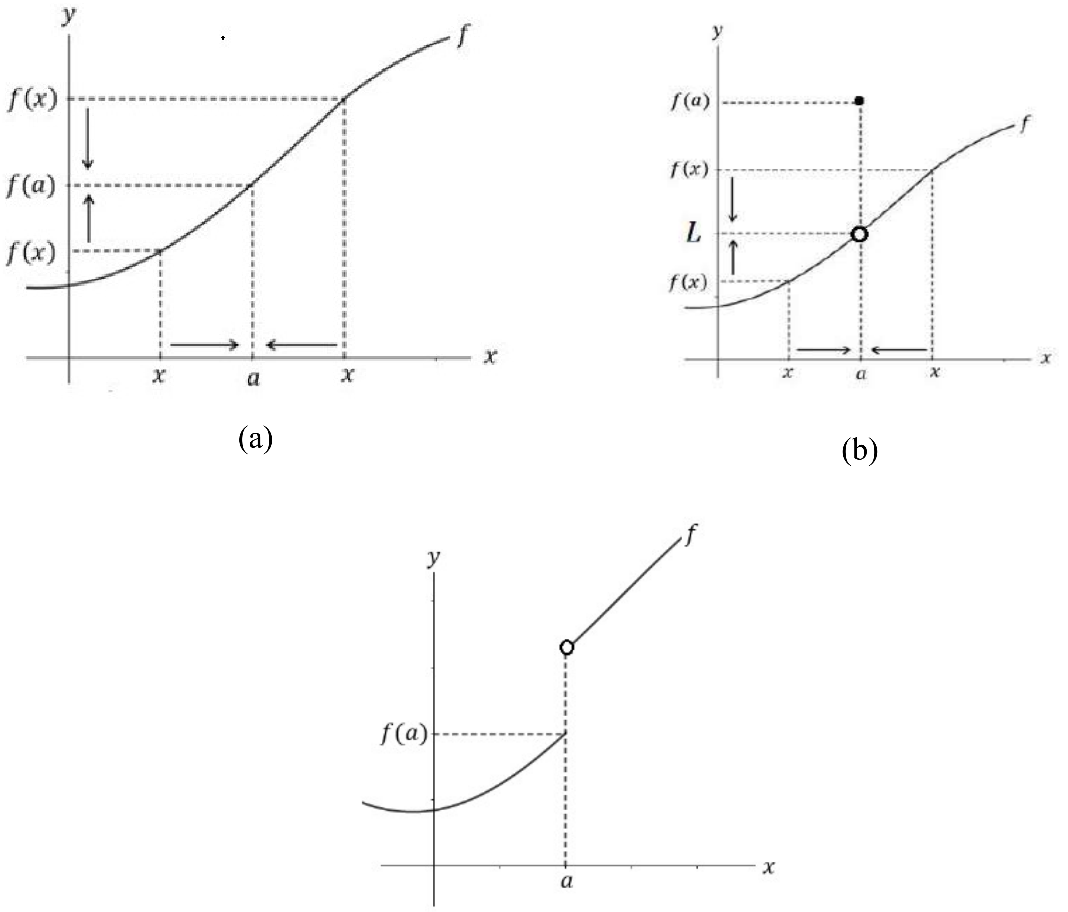
Definição 2.3 Dizemos que uma função f é contínua em a se as seguintes condições são satisfeitas:

I. f é definida em a;

II. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

III. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A Figura 1(a) ilustra graficamente o caso de função uma contínua em um ponto a, enquanto que as Figuras 1(b) e 1(c) ilustram graficamente duas funções não contínuas em um ponto a do seu domínio.



(a) (b)

(c)

Figura 1: (a) exemplo de função contínua em a; (b) e (c) exemplos de funções não contínuas em a

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Limit.svg

Vale salientar que o conceito de continuidade é local, isto significa que uma função pode ser contínua num determinado ponto e não o ser em outro ponto do seu domínio.

Definição 2.4 Dizemos que f é contínua num subconjunto do seu domínio, digamos $A \subset D(f)$, se f for contínua em todo $a \in A$. Caso f seja contínua em todo ponto do seu domínio, diremos simplesmente que f é contínua.

2.3.2 A derivada como um limite

No Cálculo a derivada é na verdade um tipo especial de limite, assim tendo definido formalmente o conceito de limite, pode-se estabelecer o conceito de derivada. Comecemos através da definição da derivada num ponto e em seguida estenderemos o conceito para função derivada. Uma vez que a derivada é um limite, para defini-la precisamos que a função f esteja definida num intervalo I contendo a, exceto possivelmente no próprio a.

Definição 2.5 (Derivada de f em a) Dizemos que a função f é derivável em a, se o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe e é finito. Neste caso, tal limite é chamado de derivada de f em a e denotaremos por $f'(a)$ (lê-se f linha de a). Assim,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad . \tag{2.2}$$

Fazendo uma simples mudança de variável, isto é, fazendo a substituição $\mathrm{h} = x - a$, podemos reescrever a Equação (2.2) da seguinte maneira,

$$f'(a) = \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{f(a + \mathrm{h}) - f(a)}{\mathrm{h}}.$$

Definição 2.6 (Derivada de uma função) A derivada de uma função f, é a função denotada por f' (lê-se f linha), tal que o seu valor em qualquer ponto do domínio de f, $x \in D(f)$, é dado por

$$f'(x) = \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}}, \tag{2.3}$$

se tal limite existe e é um número finito, $f'(x)$ (lê-se f linha de x).

Uma função é dita derivável (ou diferenciável) quando sua derivada existe em cada ponto do seu domínio.

Outras notações para derivada de uma função também são bastante utilizadas, como por exemplo, D_{xf} (lê-se derivada de f em relação a x) ou a notação devida a Leibniz $\frac{df}{dx}$ (lê-se derivada de f em relação a x).

Geometricamente, a derivada num ponto representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em tal ponto. As Figuras 2(a) e 2(b) exemplificam esse limite à medida que h tende a 0, onde a reta secante ao gráfico da função tende à reta tangente ao gráfico no ponto x.

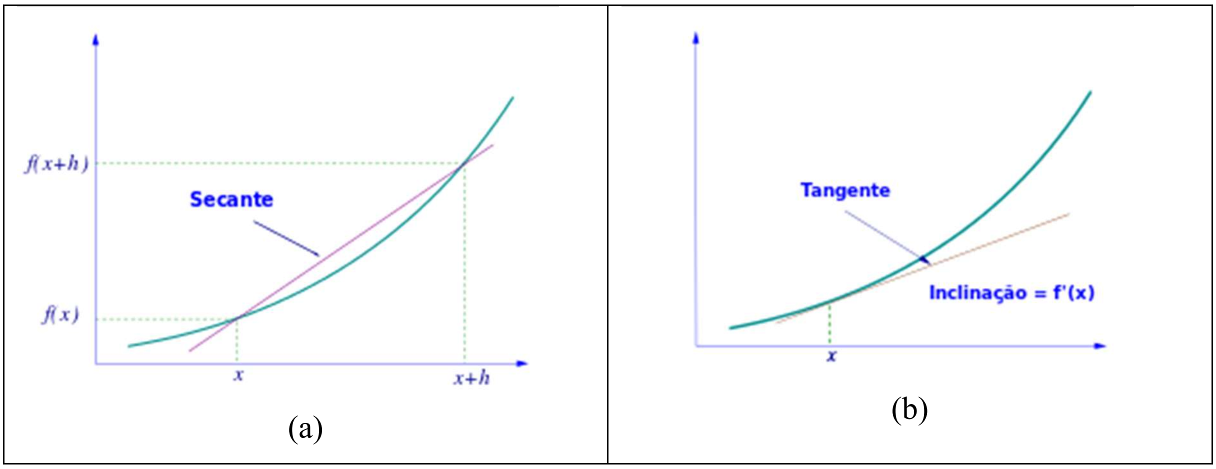


Figura 2: (a) reta secante à função f nos pontos x e $x + h$; (b) reta tangente a f no ponto x

Fonte: Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada

A propriedade a seguir nos ensina como calcular a derivada de uma função sem ter que recorrer ao conceito de limite, isto é, sem precisar utilizar a Definição 2.5.

Propriedade 2.2 (Regras de derivação) Sejam f e g duas funções deriváveis e c uma constante real qualquer.

a) (Derivada de uma constante) Se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$.
b) (Regra da potência) Seja n é um inteiro positivo. Vale:
   i. Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.
   ii. Se $f(x) = x^{-n}$, então $f'(x) = -nx^{-n-1}$.
   iii. Se $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, então $f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, onde $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar ($n \geq 2$).
c) (Derivada do produto de uma constante por uma função) Se $g(x) = c \cdot f(x)$, então $g'(x) = c \cdot f'(x)$.
d) (Derivada da soma) Se $h(x) = f(x) + g(x)$, então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$. O mesmo vale para diferença, uma vez que a diferença pode ser vista como uma soma.
e) (Derivada do produto) Se $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, então $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
f) (Derivada do quociente) Se $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, então $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Um resultado muito importante no estudo de derivada de uma função é a Regra da Cadeia. Sejam $y = g(u)$ e $u = f(x)$ as regras de duas funções deriváveis. Para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g, podemos escrever $y = g(u) = g(f(x))$, isto é, podemos considerar a função composta $(g \circ f)(x)$. A proposição a seguir nos mostra que a função composta $g \circ f$ é derivável e que sua derivada é dada em termos das derivadas de f e g.

Proposição 2.1 (Regra da Cadeia) Se $y = g(u)$, $u = f(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g(f(x))$ tem derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ou

$$y'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x). \tag{2.4}$$

As demonstrações das regras de derivação apresentadas na Propriedade 2.2 e a Proposição 2.1 podem ser encontradas em (Guidorizzi, 2002) e (Flemming, 2006), ou em qualquer outro livro de Cálculo Diferencial. Também podemos encontrar em tais referências as derivadas das funções elementares, como as funções exponencial e logarítmica e as funções trigonométricas. No entanto, omitiremos essa informação aqui, uma vez que as derivadas de tais funções serão exploradas no Capítulo 3 com o foco para o ensino básico.

Um outro aspecto das derivadas é o fato de que determinadas funções podem ser derivadas várias vezes, estamos falando aqui das derivadas de ordem superior. Para isso, considere f uma função e A o conjunto dos elementos x para os quais existe $f'(x)$. Já vimos que a função $f': A \to \mathbb{R}$ dada por $x \to f'(x)$, denomina-se *função derivada*. Diremos que f' é a derivada de primeira ordem de f. Seguindo com este raciocínio, a derivada de f', denomina-se *derivada de segunda ordem de* f e é indicada por f'', logo $f''(x) = (f')'(x)$. De maneira análoga, define-se as demais derivadas de ordens superiores. No entanto, a partir da quarta derivada, escrevemos $f^{(n)}(x)$, com n natural. Desse modo, para derivadas de ordem $n \geq 2$, escrevemos:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \ ou \ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2.3.3 A integral como um limite e família de primitivas

Para finalizar este capítulo, abordaremos nesta seção o conceito de integral indefinida, integral definida e algumas técnicas de integração como substituição e integração por partes. O objetivo principal desta seção é fazer uma revisão rápida, baseada em (Flemming 2006), apenas para dar um embasamento para o nosso estudo. Já no Capítulo 3, iremos rever o conceito de integral numa linguagem mais intuitiva e focada para o aluno do ensino médio, onde será explorada a noção geométrica que relaciona a integral com o problema de determinar a área de uma figura plana.

Definição 2.7 (Primitiva) Uma função F é chamada de primitiva de uma função f num intervalo I, se para todo $x \in I$, temos que $F'(x) = f(x)$.
Note que utilizaremos letras maiúsculas para denotar primitivas.

Proposição 2.2 Seja F uma primitiva da função f. Se c é uma constante real qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é uma primitiva de f.
Demonstração. Uma vez que F é primitiva de f, segue $F'(x) = f(x)$. Logo,

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x),$$

como queríamos demonstrar. ∎

A proposição a seguir nos apresenta o fato de que o problema de determinar as primitivas de uma função qualquer se resume a determinar uma primitiva particular.

Proposição 2.3 Se F e G são duas primitivas de uma função f no intervalo I, então existe uma constante c tal que $G(x) = F(x) + c$, para todo $x \in I$.
Demonstração. (Flemming, 2006, p. 241)

Agora estamos preparados para a seguinte definição.

Definição 2.8 Se F é uma primitiva de f, a expressão $F(x) + c$ é chamada de *integral indefinida* da função f, a qual denotaremos por

$$\int f(x)dx = F(x) + c. \tag{2.5}$$

O símbolo $\int$ é chamado de *sinal de integração*, $f(x)dx$ é o integrando. O símbolo dx nos sinaliza qual é a variável de integração.

Desse modo, da Definição 2.7 podemos concluir que,

$$\int f(x)dx = F(x) + c \;\Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Além disso, $\int f(x)dx$ representa uma família de funções primitivas. Vejamos, a seguir, algumas propriedades da integral indefinida.

Proposição 2.4 Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ e K uma constante real qualquer. Vale:

a) $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$
b) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Demonstração. (Flemming, 2006, p. 242)

Com base no que foi revisado até aqui, e de posso de uma tabela de integrais imediatas (baseada no conhecimento acerca de derivada) é possível calcular a integral de algumas funções. Vamos fugir desses cálculos, pois não é o nosso objetivo aqui. A seguir, vamos apresentar dois métodos de integração que serão bastante úteis no nosso estudo sobre integrais no Capítulo 3, a saber o método de integração por substituição (ou mudança de variável) e integração por partes.

2.3.3.1 Método de Integração por Substituição ou Mudança de Variável

Em algumas situações, é necessário fazer alguma mudança de variável afim de determinar a integral de uma função a partir das fórmulas básicas de integração. Para isso, consideremos duas funções f e F, dadas por $f(x)$ e $F(x)$ e tal que F seja primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$. Seja g uma função derivável cuja imagem esteja contida no domínio de F. Assim, podemos considerar a função composta $F \circ g$. Logo, pela Regra da Cadeia, temos que

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

donde concluímos que $F(g(x))$ é primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Portanto,

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c. \tag{2.5}$$

Fazendo $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$ e substituído na Equação (2.5), temos que

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c. \tag{2.6}$$

2.3.3.2 Método de Integração por Partes

Outra técnica de integração bastante utilizada é a integração por partes. Sejam f e g duas funções deriváveis no intervalo I. Assim,

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x)$$

Integrando ambos os membros da equação anterior, temos

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = \int [f(x) \cdot g(x)]'dx - \int g(x) \cdot f'(x)dx \Rightarrow$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx.$$

Fazendo $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ e $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$, chegamos na fórmula de integração por partes, como segue

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du.$$

Aqui encerramos a nossa revisão acerca de alguns conceitos básicos que necessitaremos nos capítulos seguintes. No capítulo a seguir, vamos passear novamente por alguns conceitos, aqui estudos, à luz de uma abordagem que propomos e acreditamos ser adequada para o aluno do ensino básico.

3. CONCEITOS TEÓRICOS DO CÁLCULO NO CONTEXTO DO ENSINO MÉDIO

Um dos vários aspectos que praticamente impede o ensino de Cálculo no ensino médio no Brasil é, como dito anteriormente, é necessidade do conceito formal de limites, que é complexo até para o graduando. Uma abordagem adequada ao ensino médio deve ser voltada à geometrização de problemas, à visualização de gráficos de dados estatísticos.

Para Machado, em uma abordagem correta para o ensino de Cálculo na escola

> "O professor começa com a ideia mais simples, que é a de integral, e com as funções mais simples, que são as funções polinomiais de primeiro grau. Depois ele trabalha a ideia de derivada. E depois, a de equação diferencial. Assim, sempre trabalhando apenas com funções polinomiais de grau 1, o professor passa as ideias mais importantes do cálculo. Isso dá para fazer em poucas aulas." (MACHADO, 2015)

Note que, diferente de outras abordagens, o ensino da integral pode ser de mais fácil compreensão para o aluno do que o de derivada, desde que se inicie com funções do 1º grau. É fácil notar que a área sob uma curva reta sobre o eixo x num intervalo $[a, b]$ em um plano cartesiano forma um trapézio se a função que a representa for do 1º grau, e um retângulo se for uma função constante (de grau 0). Dividir essa figura em pequenos retângulos verticais e calcular a soma de suas áreas não é uma tarefa difícil, e o entendimento do que é uma integral surge quando o aluno imagina uma quantidade cada vez maior de retângulos com espessura cada vez menor, de modo que a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob a curva.

O conceito de derivada pode ser entendido como a função *taxa de variação* de uma função f dada, ou seja, dado um função $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo $[a, b]$, cada valor de y em f', que podemos chamar y', representa a taxa de variação de f em cada ponto do intervalo $[a, b]$. Essa taxa de variação representa o quanto o valor de y varia instantaneamente à medida que x varia.

É comum no estudo de funções afins, se determinar a taxa de variação, uma vez que ela é a mesma para toda a função, porém esse assunto é praticamente abandonado em matemática quando se estuda outros tipos de função e o nome derivada não é mencionado. O mais próximo que temos do estudo da taxa de variação instantânea está em física, no movimento retilíneo uniformemente variado.

Machado (2015) continua seu raciocínio:

> "E daí ele recomeça, mas desta vez com funções polinomiais de grau 2. Agora, a curva da função não é mais uma reta, mas uma parábola. O aluno vai perceber que, se sabe calcular a área de um retângulo, pode calcular a área aproximada debaixo de uma função polinomial do tipo $y = ax^2 + bx + c$ num intervalo qualquer: basta dividir o intervalo em n retângulos. Quanto maior o número de retângulos, melhor a aproximação.
> A ideia de derivada também é simples: o aluno calcula o valor do polinômio para $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, etc. Vai ver que a taxa de variação por unidade não é mais constante, mas a taxa de variação da taxa de variação é constante! E isso ele descobre muito simplesmente, com tabelas.".

Nota-se que a abordagem proposta por Machado é intuitiva, baseada em cálculos de áreas, taxas de variação e não envolve o conceito formal de limite. Então, uma vez que o aluno entende o que é integral e derivada, o assunto pode evoluir para outros tipos de função como as polinomiais de grau maior que 2, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Para efeito de ordenação, este trabalho abordará o estudo da derivada antes do da integral, mas entre as duas a ordem de ensino não importa, sendo que ambas podem ser ensinadas ao mesmo tempo, inclusive. Vale salientar que para que um aluno seja bem-sucedido no estudo do Cálculo, ele precisa ter um conhecimento básico sobre outras áreas da matemática, como a Aritmética, Álgebra e Geometria Plana.

A seguir, abordaremos alguns conceitos matemáticos que podem servir como pré-requisitos ou ser estudados concomitantemente com o Cálculo.

3.1. Pré-requisitos para o ensino-aprendizagem do Cálculo

Como todo conteúdo de ensino médio, o Cálculo exige um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos que devem ser estudados anteriormente no ensino fundamental, ou em consonância com ele no ensino médio. Por ser uma disciplina que alia Geometria e Álgebra, é importante ensinar ambos os conteúdos também em consonância, de forma interligada, e não em compartimentos separados como geralmente se ensina no Brasil, para que o aluno se adeque à interdisciplinaridade dentro da matemática e o Cálculo se torne mais fácil de ser compreendido e executado.

As subseções da Seção **3.1.** tratarão de uma possível abordagem para alguns dos pré-requisitos em sala de aula.

3.1.1. Razão e proporção

Em matemática, razão é a comparação entre dois números ou grandezas, determinada pelo quociente entre eles, enquanto proporção é a igualdade entre duas ou mais razões. A importância do estudo da razão e proporção para o Cálculo diz respeito à sua aplicação na comparação entre grandezas e suas variações, representadas no plano cartesiano pelos eixos x e y. O conceito de derivada diz respeito a uma razão onde os termos dx e dy são aproximações de 0. Quando as taxas de variações em uma função f são proporcionais nos pontos x_1 e x_2, dizemos que $f'(x_1) = f'(x_2)$.

O *Teorema de Tales* estabelece uma abordagem geométrica para o conceito de proporção.

Teorema 3.1 Dado um feixe de retas paralelas e duas retas transversais a ela, o Teorema de Tales afirma que os segmentos de uma reta transversal delimitado pelas paralelas são proporcionais aos segmentos da outra reta.

Demonstração: Vincenzo Bongiovanni (2007, p. 103, 104) publica em sua tese uma prova baseada em áreas de triângulos.

“Sejam ABC um triângulo e D um ponto entre A e B. Tracemos pelo ponto D uma reta r paralela ao lado BC com $r \cap AC = E$. Provemos que $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

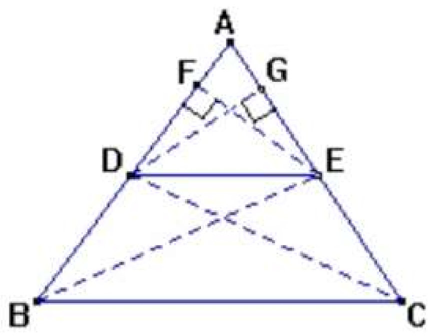


Figura 3: triângulos ABC e ADE

Fonte: REVEMAT. Disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_bongiovanni.pdf

A área do triângulo ADE pode ser calculada de duas maneiras $\frac{AD.EF}{2}$ ou $\frac{AE.DG}{2}$ Da igualdade das duas expressões conclui-se que

$$AD.EF = AE.DG \tag{1}$$

Os triângulos BDE e CED têm áreas iguais (mesma base DE e mesma altura). Logo

$$\frac{DB.EF}{2} = \frac{EC.DG}{2} \tag{2}$$

De (1) e (2) vem: $\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}$ ou $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ O caso em que os segmentos AC e DF (vide figura abaixo) formam um trapézio, recai-se no caso anterior mediante a construção de uma reta paralela a AC pelo ponto D.

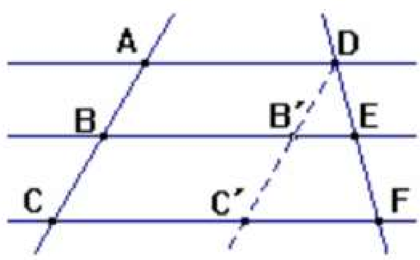


Figura 4: três retas paralelas cortadas por duas retas transversais

Fonte: REVEMAT. Disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_bongiovanni.pdf

Nesse caso teremos $\frac{DB'}{B'C'} = \frac{DE}{EF}$ e como $AB = DB'$ e $BC = B'C'$ tem-se $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$." ■

Uma vez demonstrado geometricamente, podemos usar o teorema de Tales para resolver problemas de proporcionalidade numérica, utilizando inclusive outro artifício geométrico: o de áreas de retângulos.

Exemplo 3.1 Dados os números 4, 7, 20 e x, determine o valor de x para que os dois primeiros sejam proporcionais aos dois últimos.

Resolução: A figura a seguir mostra um retângulo dividido em quatro retângulos menores cujas respectivas áreas estão representadas em seu interior.

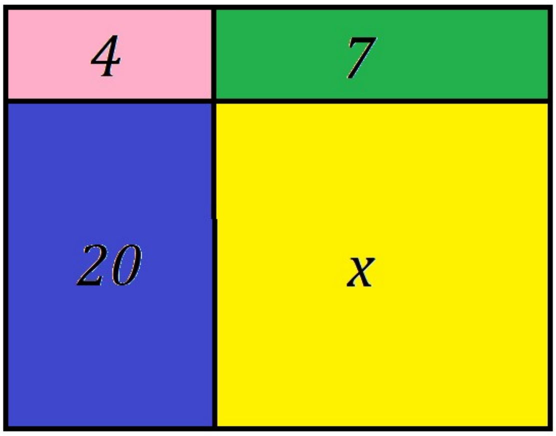


Figura 5: retângulos proporcionais com suas respectivas áreas

Fonte: autoria própria

Atribuindo valores aos lados dos retângulos menores, conseguimos descobrir o valor de x pelas medidas dos lados do retângulo correspondente.

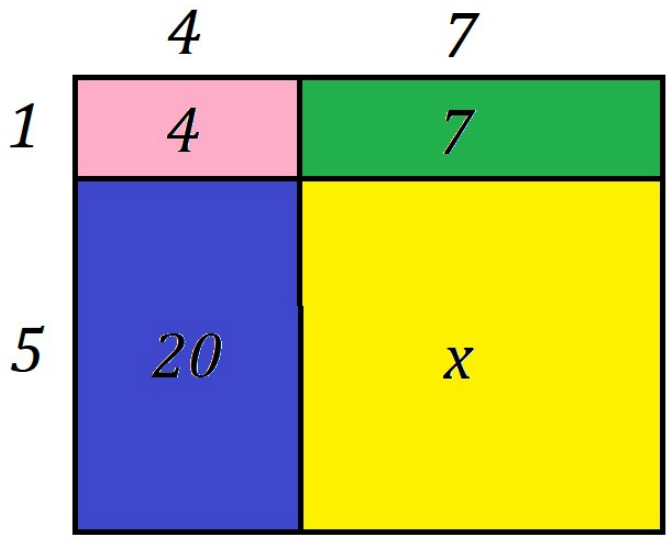


Figura 6: retângulos proporcionais com as medidas de seus respectivos lados e áreas

Fonte: autoria própria

Nesse caso, $x = 7 \cdot 5 = 35$.

3.1.2 Expressões algébricas

Expressão algébrica é um objeto matemático formado por letras, números e operações, onde as letras representam números variáveis. Cada termo de uma expressão algébrica é constituído por números e/ou variáveis e é definido pelas operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, enquanto termos distintos são separados pelas operações de adição e subtração. Termos semelhantes são aqueles que, quando somados ou subtraídos, resultam em um único termo, e para isso é necessário que eles possuam as mesmas variáveis, e cada uma delas esteja no mesmo grau (tenha o mesmo expoente) em relação ao outro termo. Esta ferramenta matemática é muito utilizada no estudo de limites, sequências e séries numéricas.

Exemplo 3.2 Os termos $2x^2y$ e $-x^2y$ são semelhantes, pois sua soma resulta em um único termo (x^2y) enquanto os termos x e x^2 não são semelhantes pois sua soma não pode ser reduzida a um termo.

Toda função é uma igualdade entre expressões algébricas de diferentes variáveis, onde uma ou mais delas são variáveis independentes, e outra é variável dependente, que é determinada pela lei de formação da função. Uma função com mais de um termo pode ser integrada ou derivada termo a termo separadamente, de acordo com a propriedade de soma e subtração das derivadas e integrais.

Os produtos notáveis são exemplos de expressões algébricas que podem ser trabalhadas usando Geometria Plana, através da área de retângulos. Dados dois números reais positivos a e b, temos as seguintes igualdades:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta igualdade é chamada Binômio de Newton, e sua representação geométrica se dá pela figura a seguir:

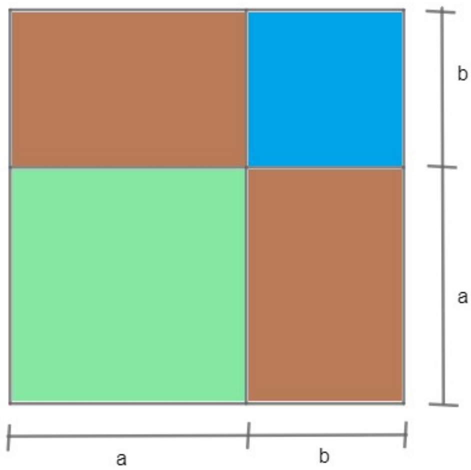


Figura 7: representação geométrica da área de um quadrado de lado $a + b$

Fonte: Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm

Na Figura 7, a área em verde equivale a a^2, as áreas em marrom medem ab e a área azul corresponde a b^2, que somadas resultam na área do quadrado maior, que vale

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

O quadrado da diferença entre dois termos é uma versão do Binômio de Newton para números de sinais opostos. Esta igualdade é denotada por:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Geometricamente, temos:

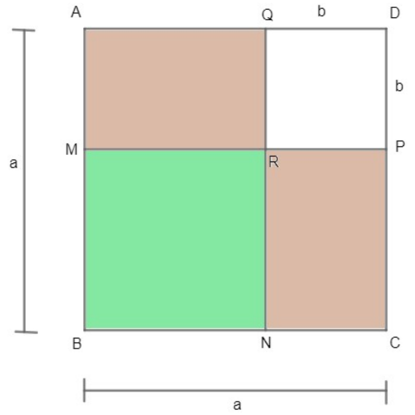


Figura 8: representação geométrica da diferença entre dois termos

Fonte: Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm

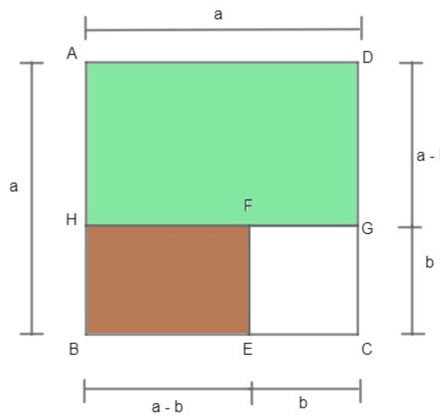
Na Figura 8, o quadrado maior tem lado a e sua área mede a^2, os retângulos marrons têm área $(a-b)b$ cada, a área em branco mede b^2 e o quadrado verde tem área $(a-b)^2$. Algebricamente, temos:

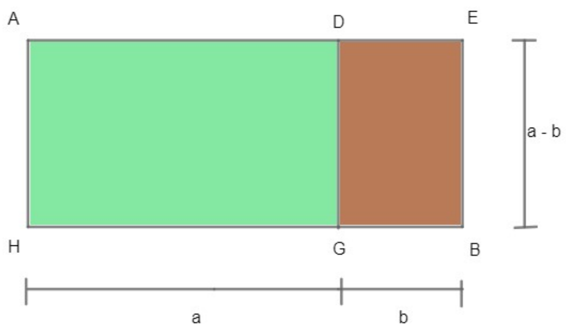
$$(a-b)^2 = a^2 - (a-b)b - (a-b)b - b^2 =$$
$$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2 =$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

O terceiro produto notável é chamado de produto da soma pela diferença, e pode ser escrito da seguinte forma:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Este produto, diferentemente dos outros dois, resulta em um retângulo não-quadrado, e pode ser descrito por meio das figuras a seguir:





Figuras 9 (a) e 9 (b): representação geométrica de $a^2 - b^2$ e $(a+b)(a-b)$

Fonte: Mundo Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm

Na Figura 9 (a), o quadrado maior tem área a^2, a área em branco mede b^2, a área em verde mede $a(a-b)$ e a área em marrom mede $b(a-b)$. Na figura 9 (b) os retângulos marrom e verde são combinados e formam um único retângulo de lados $a-b$ e $a+b$. Assim:

$$a^2 - b^2 = a(a-b) + b(a-b) =$$
$$= (a+b)(a-b).$$

3.1.3. Equações

Equação é uma igualdade entre duas expressões algébricas, que, assim como as expressões, possui letras, números e operações, mas diferentemente destas, as letras são incógnitas (valores a serem descobertos que respeitem a igualdade) e não variáveis. Os termos à esquerda do sinal de igualdade representam o 1º membro, e os termos à direita, o 2º membro.

Consideramos uma equação resolvida quando descobrimos os valores de suas incógnitas que respeitam a igualdade, embora algumas delas resultem em uma função de uma incógnita em relação à outra ou não possuam solução. Um conhecimento sobre equações atrelado à Geometria Plana ou Analítica é um importante pré-requisito para se iniciar no estudo do Cálculo, uma vez que muitos dos problemas envolvendo derivada e integral são resolvidos utilizando equações referentes a gráficos.

O primeiro tipo de equação que se estuda é a de 1º grau com uma incógnita, que pode ser associada a uma balança com pratos em equilíbrio, ilustrando a igualdade entre as massas de cada prato.

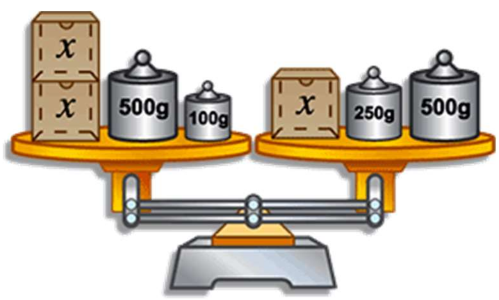


Figura 10: balança com pratos representando uma equação de 1º grau

Fonte: matematica.pt. Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/resolver-equacoes.php

Na Figura 10, cada caixa representa uma massa x e os pesos adicionais representam os termos numéricos. Para sabermos qual a massa de cada caixa, resolvemos a equação

$$2x + 600g = x + 750g.$$

Retiramos uma caixa de cada prato e o equilíbrio se mantém:

$$2x - x + 600g = x - x + 750g \Rightarrow x + 600g = 750g.$$

Retirando 600g de "pesos" de cada lado, os pratos se mantêm no mesmo nível:

$$x + 600g - 600g = 750g - 600g \Rightarrow x = 150g.$$

Logo, a massa de cada caixa é 150g.

Equações com mais de uma incógnita podem levar a funções de uma das variáveis em relação às outras, como por exemplo $2x + y = 14$, onde qualquer das infinitas soluções onde $y = 14 - 2x$ respeita a igualdade.

É comum se estudar sistemas de equações do 1º grau com mais de uma incógnita, onde o número de equações é igual ao de incógnitas. Equações do 1º grau com duas incógnitas têm seu conjunto solução representado por uma reta no plano cartesiano, por isso se chamam *equações lineares*, e descobrir o conjunto solução de um *sistema linear* com duas equações e duas incógnitas, é o mesmo que saber em que ponto no plano cartesiano elas se cruzam.

Exemplo 3.3 Descubra o conjunto solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Resolução: Podemos encontrar as retas de cada uma das equações substituindo o x por 0 e por 1 e encontrando seus respectivos valores para y.

Na primeira equação:

$$0 + y = 4 \Rightarrow y = 4$$
$$1 + y = 4 \Rightarrow y = 3$$

Os pontos descobertos são $(0, 4)$ e $(1, 3)$.

Na segunda equação:

$$2.0 - y = 5 \Rightarrow -y = 5 \Rightarrow y = -5$$
$$2.1 - y = 5 \Rightarrow -y = 5 - 2 \Rightarrow y = -3$$

Determinando os pontos $(0, -5)$ e $(1, -3)$.

Representando graficamente, temos:

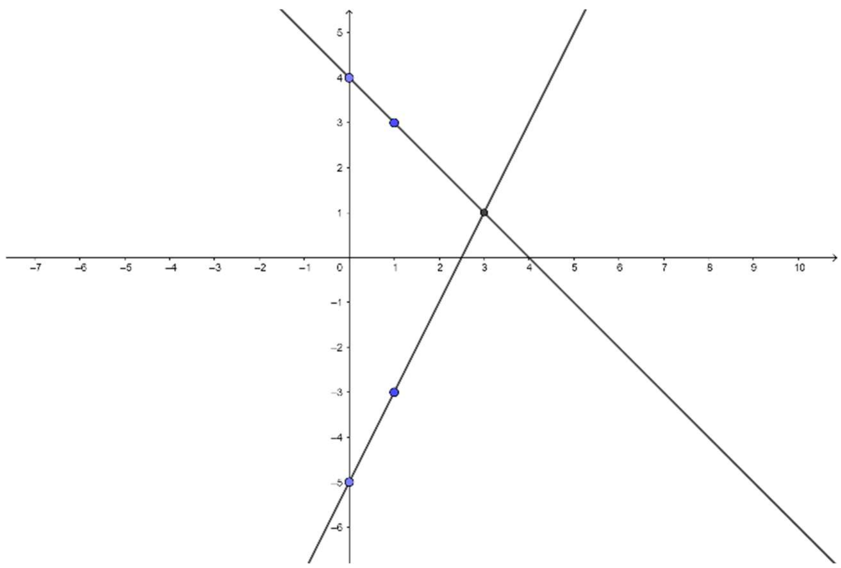


Figura 11: retas determinadas pelas equações do exemplo 3.3

Fonte: autoria própria

Note que ambas as retas se cruzam em um ponto, e são as coordenadas desse ponto que representam o conjunto solução do sistema. Analisando a figura, nota-se que o valor de x

desse ponto é maior que 1, então, podemos, aumentando o valor de x, chegar a um valor onde os valores de y de ambas as equações sejam iguais.

Valor de x	Valor de y na equação 1	Valor de y na equação 2	Diferença entre os y
0	4	-5	$4-(-5)=9$
1	3	-3	$3-(-3)=6$
2	2	-1	$2-(-1)=3$
3	1	1	$1-1=0$

Tabela 1: valores de x e y nas equações do sistema do exemplo 3.3.

Nota-se pela tabela acima que a diferença entre os valores de y em ambas as equações se anula quando $x=3$ e $y=1$, e então o ponto $(3,1)$ no gráfico fornece uma solução para o sistema. Diferentemente do cálculo do sistema linear, este tipo de resolução envolve uma percepção visual do gráfico de cada equação e faz o aluno perceber a relação entre x e y, já despertando uma ideia intuitiva de função.

Equações do 2º grau geralmente são resolvidas pela **fórmula de Bhaskara**, principalmente quando estão na sua forma *completa*, ou seja, quando os coeficientes b e c são diferentes de 0. Algebricamente, se chega à fórmula de Bhaskara em uma equação do 2º grau quando ela está em sua forma reduzida, ou seja, $ax^2+by+c=0$ da seguinte forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão na raiz quadrada é o que chamamos de delta (Δ), e ela define a quantidade de raízes reais que a equação possui. Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes, se $\Delta = 0$, ela possui uma raiz dupla, e se $\Delta < 0$, a equação não possui raiz real.

Em sala de aula, foca-se muito em "decorar" essa fórmula e esquece-se de outros modos para a resolução da equação, como a fatoração e o método de completar quadrados. Este último usa de geometria para resolver o problema, transformando a equação do 2º grau em uma equação linear, como veremos a seguir.

Exemplo 3.4 Determine as raízes da equação $x^2 + 8x - 33 = 0$:

Resolução: Desenhando um quadrado de lado $x + \frac{b}{2}$, podemos determinar sua área "completando-o" com os termos x^2 e $8x$ e um quarto termo representado por $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

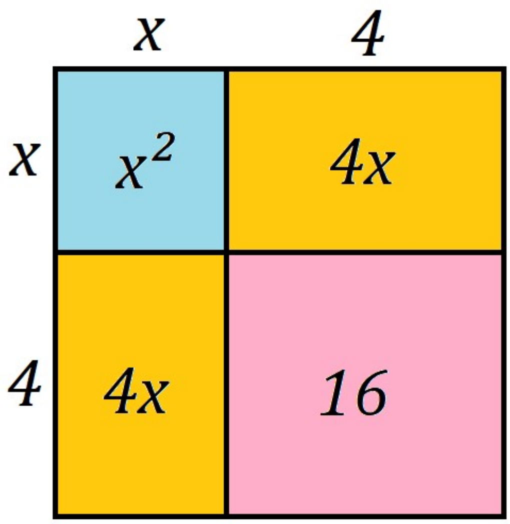


Figura 12: completando o quadrado da equação $x^2 + 8x - 33 = 0$

Fonte: autoria própria

Como o quadrado acima nos fornece $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$, devemos compensar na equação do 2º grau subtraindo o 16 na substituição.

$$x^2 + 8x - 33 = 0$$

$$(x+4)^2 - 16 - 33 = 0$$
$$(x+4)^2 - 49 = 0$$
$$(x+4)^2 = 49$$
$$x + 4 = \pm\sqrt{49}$$
$$x + 4 = \pm 7$$
$$x = \pm 7 - 4$$
$$x = 3 \; ou \; x = -11$$

Ao extrairmos a raiz quadrada de ambos os membros, a equação de 2º grau se transforma em uma de 1º grau e se torna de mais fácil resolução. Essa é uma forma mais intuitiva de resolver a equação, e possibilita ao aluno entender geometricamente o problema e saber o porquê de um número com expoente 2 ser chamado de quadrado.

3.1.4. Funções

Nesta seção faremos apenas um resumo acerca de funções, uma vez que este conteúdo já é bastante detalhado no ensino médio.

Uma função, tal como mostrada no Capítulo 2, é uma relação entre duas ou mais grandezas, relacionando cada valor de uma delas a um único valor de outra. O estudo de funções está intrinsecamente ligado ao Cálculo, e ambos podem ser estudados em conjunto a fim de se ter uma melhor compreensão das relações entre grandezas, embora no Brasil, se estude apenas funções no ensino médio e Cálculo no superior. Compreender o conceito de taxa de variação instantânea (derivada) e área sob a curva (integral) é fundamental para se ter um entendimento mais abrangente do estudo das funções, e poder aplicá-lo em outras áreas do conhecimento, inclusive à Geometria, Geografia, Física, Química, Biologia e Estatística.

Dentre os tipos de funções, se destacam algumas que chamamos de *funções elementares*, como as funções constantes, polinomiais, exponenciais, logarítmicas, raízes, trigonométricas, trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas, além da soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e composição entre elas.

A nível de ensino médio, este trabalho abordará as funções constantes, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas (seno, cosseno e tangente), como definidas a seguir.

Definição 3.1 Seja uma função $f: I \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$, temos as seguintes funções elementares:

- **Função constante**: escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = c}$; $c \in \mathbb{R}$, é uma função polinomial de grau 0 e o valor de y não depende de x. Seu gráfico é uma reta horizontal.
- **Função afim**: escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$; $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma função polinomial de grau 1. Seu gráfico é uma reta inclinada.
- **Função quadrática**: escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma função polinomial de grau 2. Seu gráfico é uma parábola.
- **Função polinomial**: escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$; $n \in \mathbb{N}$; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$ é uma função cuja variável recebe expoentes inteiros positivos. Seu gráfico pode ter os mais diversos formatos, sendo em geral uma curva sinuosa que diverge em ambos os sentidos de x.
- **Função raiz**: escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{x}}$; $n \in \mathbb{N}$, é uma função onde a variável recebe expoente racional. Tem os mais diversos tipos de gráficos, se assemelhando às funções polinomiais, e se n for par, o *radicando* não pode ser negativo.
- **Função exponencial**: escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$; $a \in \mathbb{R}, a > 0 \ e \ a \neq 1$. Seu gráfico é uma curva ascendente se $a > 1$ ou descendente se $0 < a < 1$.
- **Função logarítmica**: escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$; $a \in \mathbb{R}; a, x > 0$ e $a \neq 1$. É a função inversa da exponencial, seu gráfico é uma curva ascendente se $a > 1$ e descendente se $0 < a < 1$.
- **Função trigonométrica**: envolvem relações de x com razões trigonométricas, dentre elas o seno, cosseno e tangente, onde x representa o radiano do *círculo trigonométrico*. A função seno é escrita na forma $f(x) = sen(x)$ e seu gráfico forma uma onda contínua e cíclica. Essa é uma *função ímpar*, pois $sen(-x) = -sen(x) \to f(-x) = -f(x)$. A função cosseno é escrita na forma $f(x) = cos(x)$ e, assim como a função seno, ela forma uma onda contínua e cíclica, mas esta é uma função par, uma vez que $cos(-x) = \cos(x) \to f(-x) = f(x)$. A função tangente, escrita na forma $f(x) = tg(x)$ tem seu gráfico formado por um padrão repetitivo de curvas ascendentes infinitamente, e tal como a função seno, é ímpar, pois $tg(-x) = -tg(x) \to f(-x) = -f(x)$.

As Seções 3.2. e 3.3. tratarão de como aplicar os conceitos de derivada e integral, respectivamente, às funções elementares acima no ensino médio, sem o formalismo do limite e de forma intuitiva. A abordagem das funções trigonométricas envolvendo séries numéricas serve como um aprofundamento do ensino-aprendizagem, e o conteúdo poderá ser ministrado num contexto em que o aluno já domina boa parte dos conhecimentos de Cálculo básico e trigonometria.

3.2. Derivada

Um conceito vago de derivada é visto na escola quando o aluno começa a estudar velocidade e aceleração em Cinemática, onde ele se depara com o conceito de "posição s no tempo t", ou velocidade v_0 no instante $t = 0$, assim como nas funções velocidade e aceleração de uma partícula em *movimento retilíneo uniformemente variado* (MRUV). Em matemática, o conceito de taxa de variação aparece em funções afins, onde o coeficiente a também é chamado de coeficiente angular ou declividade, mas em nenhum momento, de derivada. Por essa falta de entendimento, o aluno dificilmente poderá imaginar uma taxa de variação cujas variáveis tendem a 0, e não saberá distinguir velocidade instantânea de velocidade média, por exemplo.

Nesse sentido, Machado entende que a derivada é o estudo do comportamento de uma variação, ou seja...

> "...uma invariância. Assim, se uma coisa varia com o tempo, o matemático começa a estudá-la para ver se acha uma invariância no modo como ela varia. Essa invariância, essa rapidez com que uma magnitude varia, é a taxa instantânea de variação, ou é a derivada: 'Isso varia o tempo todo, mas sempre assim e assado.'" (MACHADO, 2015).

Aqui temos outra perspectiva da derivada, que diz respeito não só a descobrir a taxa de variação de uma função ou um fenômeno físico, mas também ao seu comportamento, sua descrição. Assim, a velocidade (taxa de variação da posição) de um corpo em MRUV varia de forma linear, enquanto sua posição varia de forma "quadrática".

A seguir, veremos como estudar matematicamente tais taxas de variação em nível de ensino médio.

3.2.1. Derivada da função constante

Dada uma função constante $f(x) = c$, podemos calcular sua taxa de variação para quaisquer valores distintos x_1 e x_2, visto que $f(x_1) = f(x_2) = c$. Fazendo $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{c - c}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

Como podemos ter Δx e Δy tão pequenos quanto queiramos, fazemos $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$, e então

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Mostrando que a derivada da função constante é igual à sua taxa de variação, ou seja, a *função nula*.

Podemos ver a variação nula de uma função constante pelo fato dela não ser crescente ou decrescente em todo seu domínio, como mostra o gráfico a seguir.

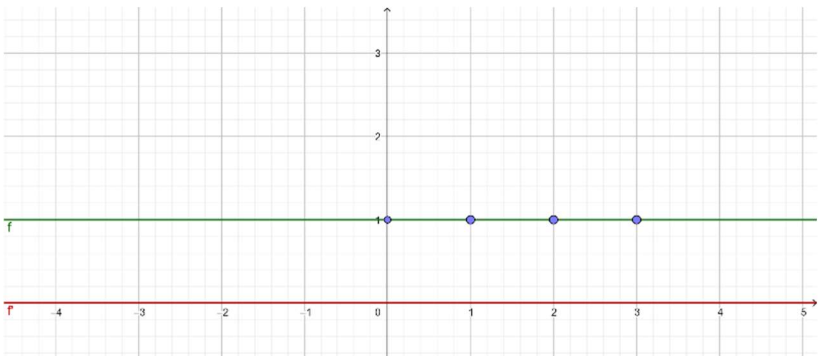


Figura 13: gráfico de $f(x) = c$, para $c = 1$ (em verde) e sua derivada $f'(x) = 0$ (em vermelho)

Fonte: autoria própria

Os quatro pontos marcados mostram que $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 1$, e para quaisquer outros pontos em f, a igualdade se manterá. Fazendo $\Delta x = 1$ e calculando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x_2 = 1, 2, 3$, temos:

$$f(1) - f(0) = 1 - 1 = 0$$
$$f(2) - f(1) = 1 - 1 = 0$$
$$f(3) - f(2) = 1 - 1 = 0$$

Exemplificando algebricamente que $f'(x) = 0$.

3.2.2. Derivada da função afim

Uma função afim, escrita na forma $f(x) = ax + b$ pode ser derivada do mesmo modo que a constante, pois seu gráfico também é uma reta e sua derivada não se altera. Tomando valores distintos x_1 e x_2, e fazendo $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_1 + b - (ax_2 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_2 - x_1} = a$$

Como podemos ter Δx e Δy tão pequenos quanto queiramos, fazemos $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$ e então

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \to \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

assim sua derivada é igual à sua taxa de variação, definida por uma função constante.

Podemos notar essa taxa de variação constante em um gráfico de uma função afim tomando pontos quaisquer do gráfico e mantendo um valor fixo para Δx.

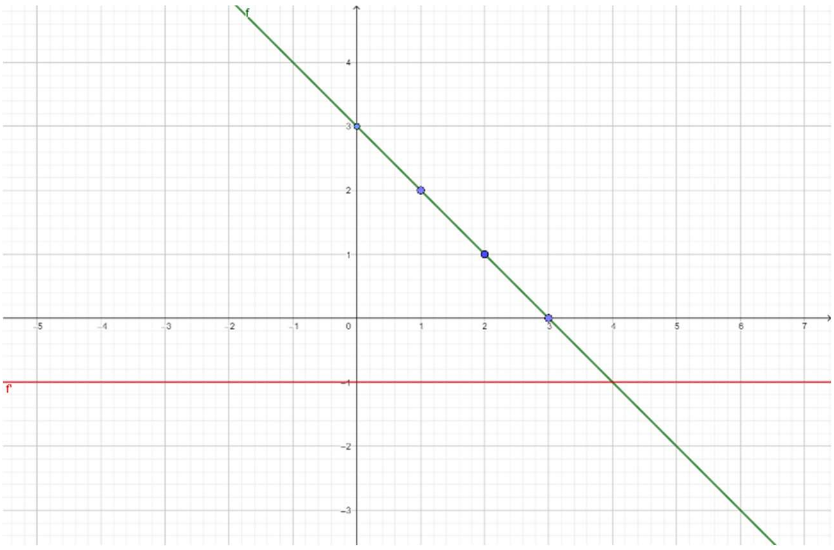


Figura 14: gráfico da função $f(x) = -x + 3$ (em verde) e sua derivada $f'(x) = -1$ (em vermelho)

Fonte: autoria própria

Na Figura 15, os pontos marcados mostram as coordenadas $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ e $(3, f(3))$. A distância entre os pontos no eixo x é de 1 unidade, logo $\Delta x = 1$. Calculando $\Delta y / \Delta x$ para $x_2 = 1, 2, 3$, temos:

$$f(1) - f(0) = -1 + 3 - (0 + 3) = -1$$
$$f(2) - f(1) = -2 + 3 - (-1 + 3) = -1$$
$$f(3) - f(2) = -3 + 3 - (-2 + 3) = -1$$

Exemplificando algebricamente que $f'(x)$ é constante.

3.2.3. Derivada da função quadrática

Aqui, a derivada já não é uma função constante, portanto ela vai variar à medida que x varia. Uma função quadrática é escrita em sua forma reduzida como $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Pela propriedade de soma de derivada, fazendo $g(x) = ax^2, h(x) = bx$ e $i(x) = c$, temos:

$$f(x) = g(x) + h(x) + i(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x) + i'(x).$$

Sabemos pelas regras de derivação das funções afim e constante que $h'(x) = b$ e $i'(x) = 0$, então trabalharemos apenas com a parte $g'(x)$. Usando a proposição da derivada do produto, temos:

$$(mn)'(x) = m'(x)n(x) + n'(x)m(x)$$

Fazendo $g(x) = mn(x)$, temos $m(x) = ax$ e $n(x) = x$, e então

$$g'(x) = (mn)'(x) = a.x + ax.1 = 2ax.$$

Logo, $f'(x) = 2ax + b$.

Esta demonstração já mostra um certo rigor algébrico, uma vez que o aluno já entendeu de que se trata a derivada nas funções constante e afim. Pode-se exemplificar que a derivada de uma função quadrática é uma função afim, desenhando seu gráfico e marcando os pontos para valores inteiros de x, de modo que $\Delta x = 1$.

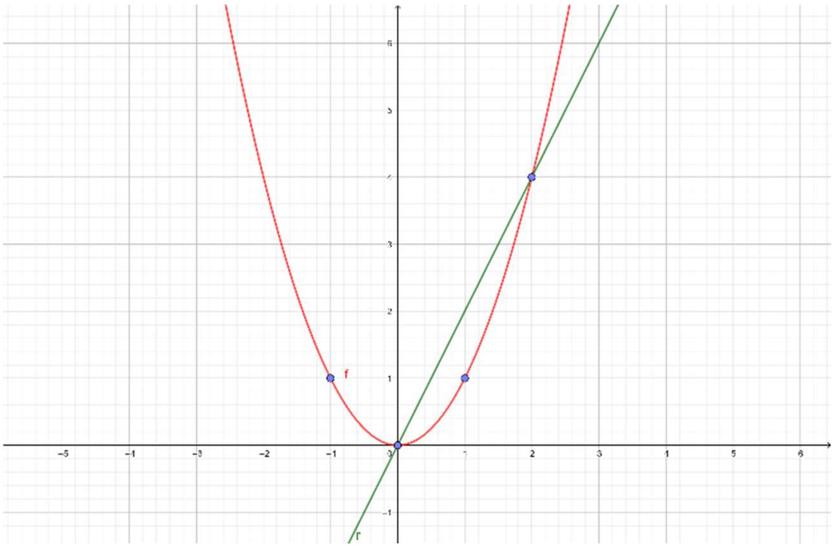


Figura 15: gráfico da função $f(x) = x_2$ (em vermelho) e sua derivada $f'(x) = 2x$ (em verde)

Fonte: autoria própria

Os pontos no gráfico acima têm 1 de distância no gráfico em relação ao eixo x. Calculando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x_2 = 0, 1, 2, 3$, temos:

$$f(0) - f(-1) = 0^2 - (-1)^2 = -1$$
$$f(1) - f(0) = 1^2 - 0^2 = 1$$
$$f(2) - f(1) = 2^2 - 1^2 = 3$$
$$f(3) - f(2) = 3^2 - 2^2 = 5.$$

Nota-se que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ forma uma progressão aritmética de razão 2, uma vez que para cada unidade adicionada em x, se adiciona duas em y, o que, continuamente, caracteriza uma função afim do tipo $f(x) = 2x + b$. Vale ressaltar que, quando a parábola atinge um valor de y mínimo (ou máximo), sua derivada é 0, como pode ser visto no gráfico de $f'(x)$ quando $f(x)$ vale 0 (valor mínimo).

3.2.4. Derivada de função polinomial de grau superior

Em funções polinomiais do tipo $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde $a_n \neq 0$ e $n \geq 3$, podemos usar a propriedade da derivada do produto para determinar a derivada de cada termo, e definir uma fórmula para qualquer n natural.

Exemplo 3.5 Determine a derivada da função $f(x) = x^3$.

Resolução: Façamos $g(x) = x^2$ e $h(x) = x$, temos $f(x) = g(x)h(x) = (gh)(x)$. Assim:

$$f'(x) = (gh)'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 2x.x + x^2.1 = 3x^2.$$

Note que o expoente de f apareceu como múltiplo da sua derivada, que é um grau inferior, o que sugere que a derivada de uma função polinomial do tipo $f(x) = ax^n; n$ natural, vale nax^{n-1}. O teorema a seguir busca demonstrar isso.

Teorema 3.2 Se $f(x) = ax^n$, $f'(x) = nax^{n-1}$.

Demonstração: Demonstramos nas subseções 3.1.2., 3.1.3. e 3.1.4. que esse resultado é válido para $n = 1, 2, 3$. Supondo válido para um n natural qualquer, mostraremos por indução que também vale para $n + 1$. Façamos $g(x) = ax^{n+1}$, tomamos $f(x) = ax^n$ e $h(x) = x$, temos $g(x) = f(x)h(x) = (fh)(x)$. Pela propriedade do produto das derivadas, temos:

$$g'(x) = (fh)'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) = nax^{n-1}.x + ax^n.1 = (n+1)ax^n$$

provando que a propriedade também vale para $n + 1$, logo, para todo n natural. ■

Uma visualização geométrica do problema é possível mostrando o gráfico de uma função de 3º grau e sua derivada, uma função quadrática já vista anteriormente como na figura a seguir.

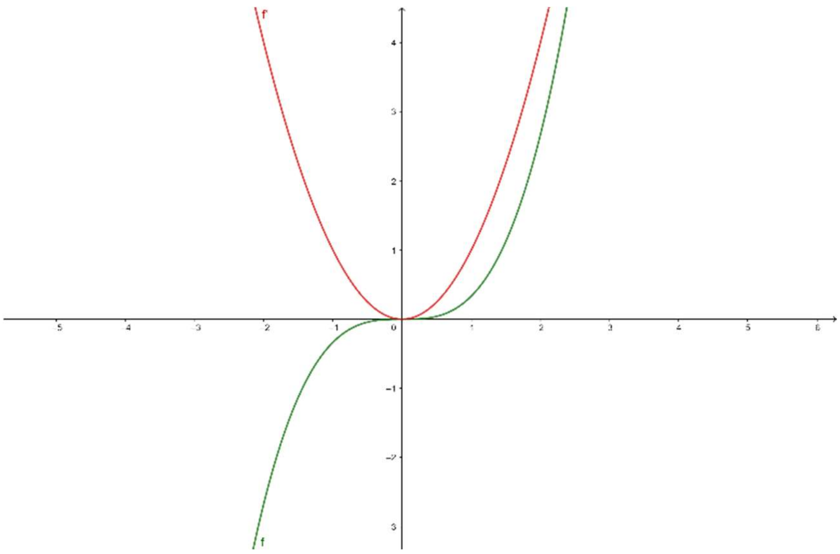


Figura 16: função $f(x) = \frac{x^3}{3}$ (em verde) e sua derivada $f(x) = x^2$ (em vermelho)

Fonte: autoria própria

Note que o comportamento da variação da função de 3º grau é de crescimento, que se anula quando $x = 0$ e torna a crescer de modo que a derivada forma uma parábola.

3.2.5. Derivada da função raiz e função de expoente racional

Uma função raiz pode ser escrita na forma $f(x) = \sqrt[n]{x}; n \in \mathbb{N}$ enquanto uma função de expoente racional é escrita como $f(x) = \sqrt[n]{x^m}; m, n \in \mathbb{N}\ e\ mdc(m, n) = 1$. Note que podemos escrever ambas as funções da seguinte forma:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \text{ e } f(x) = x^{\frac{m}{n}}.$$

Podemos determinar a derivada da função raiz quadrada usando a propriedade da derivada do produto.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x)f(x) = f^2(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x} = x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f^2)'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x)\sqrt{x} + \sqrt{x}f'(x) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{x}f'(x) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Note que essa derivada obedece a regra das funções polinomiais, onde, para todo $f(x) = x^n$ temos $f'(x) = nx^{n-1}$. Aqui, $n = \frac{1}{2}$ e a derivada pode ser escrita como

$$f'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}.$$

Podemos provar que essa propriedade vale para todo expoente racional de x usando um artifício chamado **Regra da Cadeia**.

Definição 3.2 Seja uma função composta $F(x) = f\big(g(x)\big)$, a regra da cadeia afirma que sua derivada $F'(x)$ deve ser calculada como o produto da derivada de f em função de g pela derivada de g em função de x. Matematicamente, temos:

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g(x)$$

que na *notação de Leibniz* pode ser escrita como

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df(g)}{dg}.\frac{dg}{dx}$$

Fazendo $y = g(x) = x^{\frac{m}{n}}$, temos

$$y = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y^n = (x^{\frac{m}{n}})^n = x^m.$$

Temos duas funções polinomiais: y^n e x^m. Aqui, $F(x) = y^n = x^m$ e podemos derivar F em função de x e y para depois encontrar $\frac{dy}{dx}$ que é a derivada procurada.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df(g)}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{df(g)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(x^m)}{dx} = \frac{dy^n}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mx^{m-1} = ny^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{n\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{m-\frac{m}{n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

como queríamos provar. Note que essa demonstração não distingue expoentes positivos de negativos, logo, ela também vale para expoentes negativos, inclusive inteiros.

3.2.6. Derivada de função exponencial

Uma função exponencial pode ser escrita na forma $f(x) = a^x; a > 0$ e $a \neq 1$. Para valores de a maiores que 1, essa função é crescente, logo sua derivada será sempre positiva, enquanto para valores de a entre 0 e 1, ela será decrescente e sua derivada será sempre negativa.

Para entendermos como determinar sua derivada, tomemos a função $f(x) = 2^x$ e façamos $\Delta x = 1$ para $x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ na fórmula da taxa de variação.

$$f(0) - f(-1) = 2^0 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) - f(0) = 2^1 - 2^0 = 2 - 1 = 1$$

$$f(2) - f(1) = 2^2 - 2^1 = 4 - 2 = 2$$

$$f(3) - f(2) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$
$$f(4) - f(3) = 2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$$
$$f(5) - f(4) = 2^5 - 2^4 = 32 - 16 = 16$$

Note que as taxas sucessivas de variação formam uma progressão geométrica de razão 2, o que indica que a derivada desse tipo de função é também uma exponencial. Graficamente, podemos notar esse padrão exponencial na taxa de variação de $f(x)$:

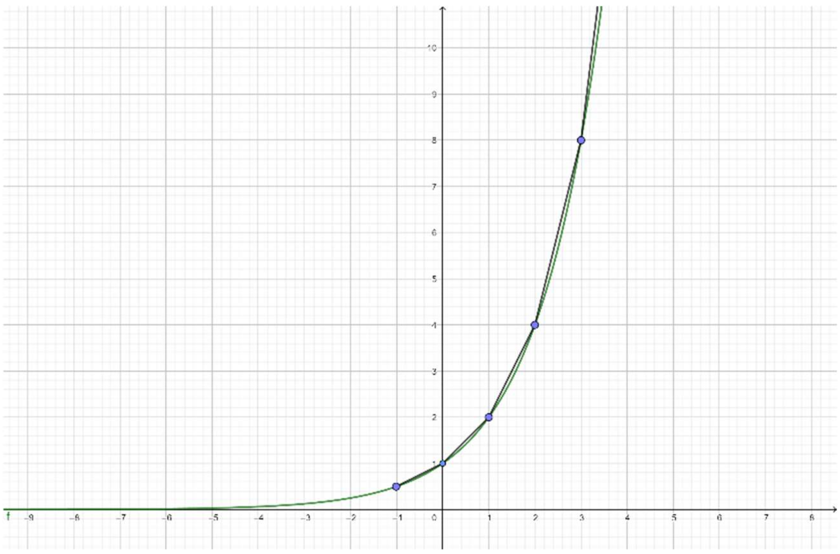


Figura 17: função $f(x) = 2^x$ e suas taxas de variação com $\Delta x = 1$

Fonte: autoria própria

Note que a taxa de variação entre 0 e 1, por exemplo, é maior que a taxa de variação instantânea $\frac{dy}{dx}$ em 0 e menor que em 1, o que significa que $f'(0) < 1 < f'(1)$. Para as taxas que calculamos, concluímos que

$$f'(-1) < \frac{1}{2} < f'(0) < 1 < f'(1) < 2 < f'(2) < 4 < f'(3) < 8 < f'(4) < 16 < f'(5).$$

Para termos uma boa aproximação da derivada em um ponto, podemos definir um valor próximo de 0 para Δx e calcular a taxa de variação nesse intervalo minúsculo. Façamos $\Delta x = \frac{1}{1000}$ e calculemos para $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ nas funções $f(x) = a^x$, com $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3,$ 4. A fórmula utilizada será a seguinte:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x+\frac{1}{1000}\right)-f(x)}{\frac{1}{1000}}=1000.\left(a^{x+\frac{1}{1000}}-a^{x}\right)$$

e os dados serão exibidos em uma tabela com três casas decimais de aproximação.

$f(x)$	$x=-2$	$x=-1$	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	-9,882	-3,294	-1,098	-0,366	-0,122	-0,041
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	-2,771	-1,385	-0,693	-0,346	-0,173	-0,087
2^x	0,173	0,347	0,693	1,387	2,774	5,547
3^x	0,122	0,366	1,099	3,298	9,893	29,679
4^x	0,087	0,347	1,387	5,549	22,196	88,784

Tabela 2: aproximações para derivadas de funções exponenciais para valores inteiros de x

Nota-se que nas funções onde $0<a<1$, as derivadas são negativas e se aproximam de 0 à medida que x aumenta, enquanto nas funções onde $a>1$ a derivada cresce rapidamente, tendendo para infinito, tão mais rápido quanto maior o valor de a. Outra característica é que para valores de a menores ou iguais a 2, temos sempre $f(x)>f'(x)$ enquanto para valores maiores ou iguais a 3, $f(x)>f'(x)$, o que pode-se verificar observando $f(0), f(1), f'(0)$ e $f'(1)$ em cada função. Isso sugere que há um valor de a entre 2 e 3 onde $f(x)=f'(x)$ para todo x real, e esse valor é o que chamamos de *número de Euler* representado pela letra $\boldsymbol{e}$, que vale aproximadamente **2,71828**. Esse número resulta do somatório infinito do inverso dos fatoriais, como mostrado a seguir.

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

Elevando e a um expoente x, o somatório fica da seguinte forma:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

Transformando esse somatório em uma função e calculando sua derivada, vemos que cada termo se converte no termo anterior, exceto o primeiro, cuja derivada é 0.

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0 + \frac{1x^{1-1}}{1!} + \frac{2x^{2-1}}{2!} + \frac{3x^{3-1}}{3!} + \frac{4x^{4-1}}{4!} + \cdots =$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Assim, a função $f(x) = e^x$ tem como sua derivada ela mesma, e a partir disso, podemos determinar a derivada das exponenciais com base diferente usando um artifício de substituição do expoente por um logaritmo conhecido por logaritmo neperiano (ou logaritmo natural), cuja base é o número e e pode ser escrito como $\log_e x$ ou $\ln x$.

Tomando $\ln a = p$, temos $e^p = a$, então podemos fazer:

$$a = e^p = e^{\ln}$$

Façamos $F(x) = a^x$, $f(x) = e^x$ e $g(x) = x.\ln a$, temos:

$$F(x) = a^x = e^{x \ln a} = f(x)^{g(x)} = f(g(x))$$

Usamos a regra da cadeia e substituindo $x.\ln a$ por u:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg}{dy} =$$
$$= \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d(e^u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} =$$
$$= e^u \cdot \frac{d(x.\ln a)}{dx} = e^{x.\ln} \quad \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

O que mostra que a derivada de qualquer função exponencial é o produto dela própria pelo logaritmo neperiano da base, que é maior que 1 se $a > e$, igual a 1 se $a = e$, entre 0 e 1 se $1 < a < e$, e negativo se $0 < a < 1$.

3.2.7. Derivada da função logarítmica

Uma função logarítmica é dada por $f(x) = \log_a x; a > 0, a \neq 1$ e $x > 0$. Entendido o conceito de logaritmo, é possível, através do estudo da função logarítmica, encontrar sua derivada. Geometricamente, podemos perceber um padrão onde à medida que x aumenta, intervalos cada vez maiores de x geram uma determinada variação Δy, como podemos ver no gráfico a seguir:

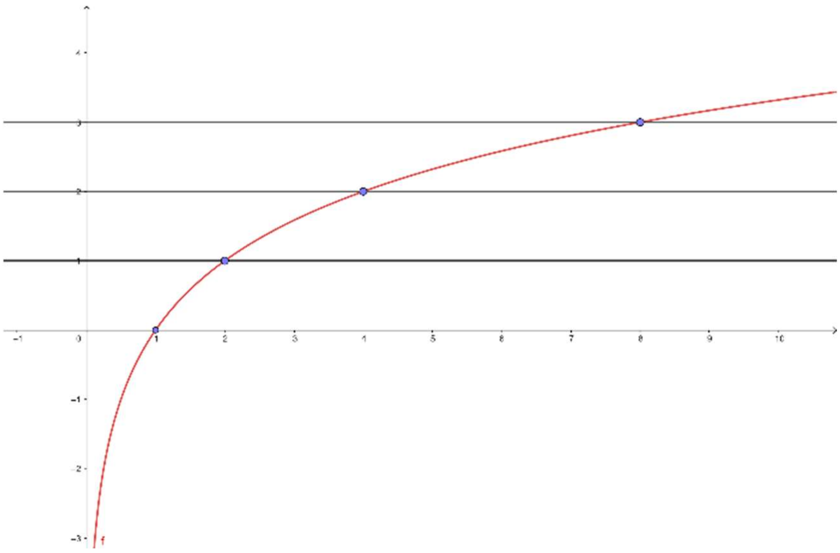


Figura 18: função logarítmica $f(x) = \log_2 x$ e retas horizontais representando $\Delta y = 1$

Fonte: autoria própria

Fazendo $\Delta y = 1$, vemos que o gráfico da função logarítmica atinge valores inteiros para y cada vez mais raramente à medida que x aumenta, nesse caso, com x dobrando a cada intervalo de 1 em y. Percebe-se que a função logarítmica é a função inversa da exponencial, onde as variáveis x e y trocam de lugar, e que sua taxa de variação tem relação inversa com o valor de x. Calculando $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $x = 1, 2, 4, 8$, temos:

$$f(2) - f(1) = \log_2 2 - \log_2 1 = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

$$f(4) - f(2) = \log_2 4 - \log_2 2 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4 - 2} = \frac{1}{2}$$

$$f(8) - f(4) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{8 - 4} = \frac{1}{4}$$

Isso sugere que uma série candidata à derivada da função logarítmica é a função $f(x) = \frac{a}{x}; a \neq 0, x > 0$, mas não é uma prova. Sabendo que a função logarítmica é a inversa da exponencial, podemos determinar sua derivada invertendo as variáveis x e y e derivar a nova função em relação a y. Primeiramente, faremos com a base do logaritmo sendo o número e, ou seja, $f(x) = \ln x$, depois para os outros possíveis valores de a.

$$f(x) = y = \ln x \Rightarrow e^y = x \Rightarrow f^{-1}(x) = f(y) = e^y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(y) = e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Demonstrando algebricamente o que se esperava pela visualização do gráfico. Sem tal visualização, é difícil para o aluno compreender como se chega à derivada. Do mesmo modo, podemos obter a derivada para um valor a qualquer da base.

$$f(x) = y = \log_a x \Rightarrow a^y = x \Rightarrow f^{-1}(x) = f(y) = a^y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(y) = a^y \ln a \Rightarrow \frac{dx}{dy} = a^y \ln a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

3.2.8. Indo um pouco além: derivada das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente

Funções trigonométricas são um tema complexo para alunos do ensino médio, uma vez que o aluno deve compreender as *razões trigonométricas* e aplicar a relação entre elas e um valor x no plano cartesiano. É difícil compreender por que as funções seno e cosseno possuem gráfico em formato de ondas, por exemplo. Compreender suas derivadas sem o uso de limites pode ajudar o aluno a abstrair melhor as ideias de seno, cosseno e tangente, principalmente no *círculo trigonométrico*.

As três "principais" funções trigonométricas são a função seno: $f(x) = sen(x)$, a função cosseno: $f(x) = cos(x)$ e a função tangente $f(x) = tg(x), x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \pi \in \mathbb{Z}$. Os valores x em questão representam o ângulo α em radianos. No círculo trigonométrico, podemos ver os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo α qualquer.

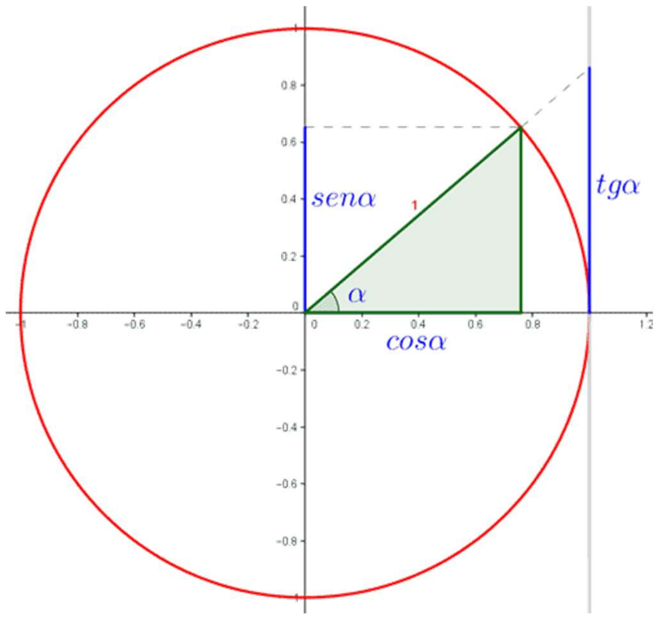


Figura 19: círculo trigonométrico com ângulo α e medidas de $sen(\alpha), cos(\alpha)\ e\ tg(\alpha)$

Fonte: matematica.pt. Disponível em https://www.matematica.pt/faq/circulo-trigonometrico.php

O círculo da Figura 19 tem raio 1 e centro na origem do sistema cartesiano. Nota-se que $sen(\alpha) = y$, $cos(\alpha) = x$ e $tg(\alpha) = \frac{y}{x}$, além disso, o valor α em radianos representa a distância que um ponto percorre em torno do círculo partindo do ponto (1, 0) até um ponto qualquer do círculo, ou seja, α é o comprimento do arco do círculo formado pelo ângulo com vértice no centro, já que seu raio mede 1. A partir da figura, podemos ver que:

$$sen(0) = 0, \cos(0) = 1, tg(0) = 0$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, tg\left(\frac{\pi}{2}\right) \nexists$$

$$sen(\pi) = 0, \cos(\pi) = -1, tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, tg\left(\frac{3\pi}{2}\right) \nexists$$

A partir desses dados, podemos desenhar em cada ponto do círculo um *vetor* “velocidade”, representando a “caminhada” de um ponto em torno desse círculo, dado que a direção do movimento coincide com a reta tangente do círculo nesse ponto, e a orientação do movimento é no sentido anti-horário, tal como na representação da velocidade de um corpo em movimento circular uniforme, como podemos ver na Figura 20.

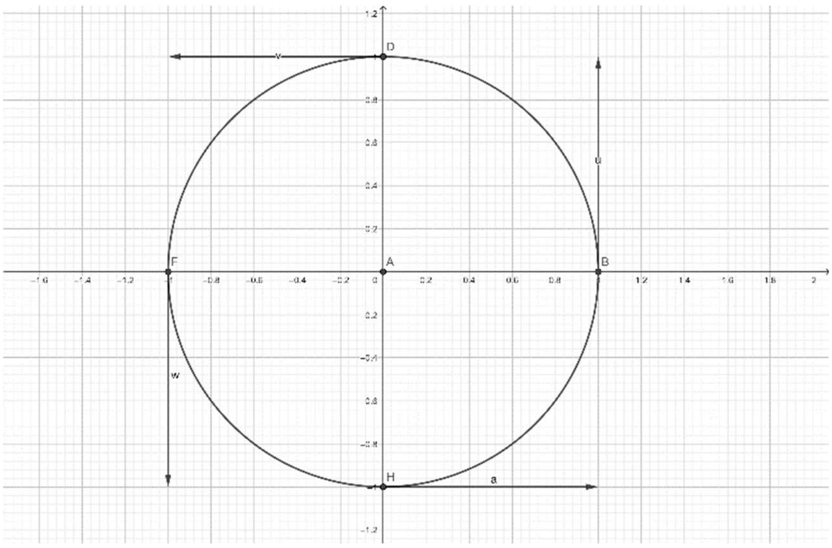


Figura 20: círculo trigonométrico e vetor velocidade nos pontos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$

Fonte: autoria própria

Os vetores u, v, w e a representam a taxa de variação da equação do círculo acima à medida que α varia, bem como dos seus parâmetros $x = \cos{(a)}$ e $y = sen(a)$. Nota-se que $u = (0,1), v = (-1,0), w = (0,-1)$ e $a = (1,0)$, o que mostra que a derivada dessa curva é obtida girando os eixos em um ângulo de 90° ou $\frac{\pi}{2} rad$ no sentido horário.

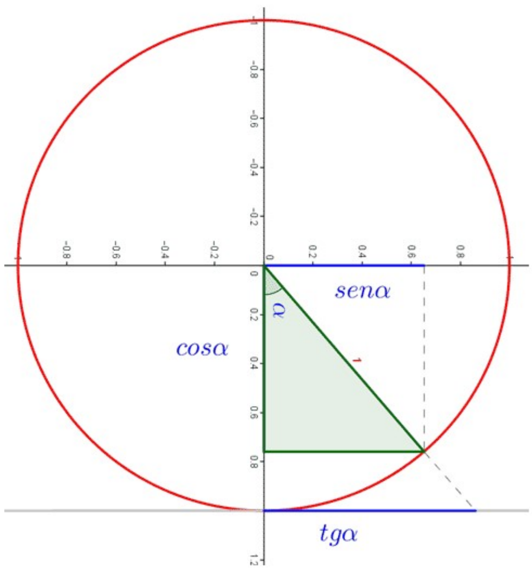


Figura 21: círculo trigonométrico girado 90° no sentido horário

Fonte: autoria própria

A Figura 22 mostra o círculo "derivado" do círculo trigonométrico, onde o eixo x aponta para baixo e o eixo y para a direita. Tomando as coordenadas desse gráfico a fim de se determinar uma derivada para as funções seno e cosseno, notamos que:

$$sen'(0) = 1 = \cos(0)\,, cos'(0) = 0 = -sen(0)$$
$$sen'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 = -sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$sen(\pi) = -1 = \cos(\pi), \cos'(\pi) = 0 = -sen(\pi)$$
$$sen'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \cos'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 = -sen\left(\frac{3\pi}{2}\right).$$

O que sugere que, para $f(x) = sen(x), f'(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \cos(x)\,, f'(x) = -sen(x)$. Algebricamente, as funções seno e cosseno resultam de polinômios infinitos conhecidos como **Séries de Taylor**.

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

e

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Derivando a primeira série, temos como resultado

$$sen'(x) = 1 - \frac{3x^{3-1}}{3!} + \frac{5x^{5-1}}{5!} - \frac{7x^{7-1}}{7!} + \cdots =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos(x)$$

derivando a segunda, temos:

$$cos'(x) = 0 - \frac{2x^{2-1}}{2!} + \frac{4x^{4-1}}{4!} - \frac{6x^{6-1}}{6!} + \cdots =$$
$$= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \cdots = -sen(x).$$

Prosseguindo, temos $\left(-sen(x)\right)' = -\cos(x)$ e $(-\cos(x))' = -(-sen(x)) = sen(x)$, completando o ciclo.

A derivada da tangente pode ser obtida usando a propriedade da derivada do quociente, já que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$.

$$tg'(x) = \frac{sen'(x)\cos(x) - cos'(x)sen(x)}{\cos^2(x)} =$$
$$= \frac{\cos(x)\cos(x) - \left(-sen(x)\right)sen(x)}{\cos^2(x)} =$$
$$= \frac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x).$$

A soma $\cos^2(x) + sen^2(x)$ faz parte de uma das identidades trigonométricas e vale 1 para qualquer valor de x, logo a derivada acima pode ser reescrita como:

$$tg'(x) = \frac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

onde $\sec(x)$ é a *secante* de x e equivale ao inverso do cosseno.

3.3. Integral

Diferentemente da ideia de derivada que é de certa forma abordada em Cinemática e funções afins, embora com outros nomes, raramente há um conteúdo que chegue perto do conceito de integral na escola. Áreas de figuras planas e volumes de sólidos são abordados em Geometria Plana, Espacial e Analítica, e em áreas da física como Termodinâmica e Mecânica dos Fluidos.

O estudo da integral envolve o cálculo de áreas e volumes através de um somatório infinito, representado por um S alongado ($\int$). Para Nílson José Machado, a integral é a mais simples dentre as ideias fundamentais do Cálculo, a qual ele descreve da seguinte forma.

> "uma quantidade está variando o tempo todo, mas, durante pequenos intervalos de tempo, vou tratar essa quantidade como se fosse constante. Por exemplo, a temperatura desta sala [*faz um gesto com as mãos para abarcar todo o escritório*] está variando o tempo todo, mas, nas próximas duas horas, posso medir a temperatura de dez em dez minutos, e considerá-la constante ao longo de cada um desses intervalos de dez minutos. Essa abordagem me permite, por exemplo, calcular a temperatura média aproximada ao longo das duas horas. [*É a soma das 12 medições dividida por 12, isto é, é a média aritmética das 12 medições*.]" (MACHADO, 2015).

O entrevistado dá a ideia de integral como um somatório entre o produto de grandezas e intervalos, ou como a média aritmética entre elas. Um exemplo como o citado acima pode ser dado, onde as primeiras 4 medições registram a temperatura de 22°C, as 5 medições seguintes marcam 23°C e as três últimas, 24°C. A temperatura média da sala será dada por

$$\frac{4 \cdot 22 + 5 \cdot 23 + 3 \cdot 24}{12} = \frac{275}{12} = 22{,}92°C.$$

Machado aponta que se a temperatura for medida com maior frequência (intervalos mais curtos), o cálculo da temperatura média será mais preciso, e mais próximo será da temperatura média real (a integral):

> "Vamos supor que você me diga que 12 medições é pouco, pois gostaria de uma aproximação mais precisa. Tudo bem: posso fazer uma medição a cada 5 minutos, ou uma por minuto, ou uma a cada 30 segundos, ou uma a cada segundo, ou uma a cada décimo de segundo. Essa é, em essência, a ideia de integral: conhecer melhor algo que está variando o tempo todo por meio de uma sequência de valores constantes. E é muito fácil trabalhar essa ideia fundamental na escola." (MACHADO, 2015).

Essa variação de temperatura, cada vez mais precisa, se aproxima de uma curva que representa a temperatura em função do tempo, e a integral representa a área entre essa curva e o eixo das abscissas, como pode ser visto na Figura 22.

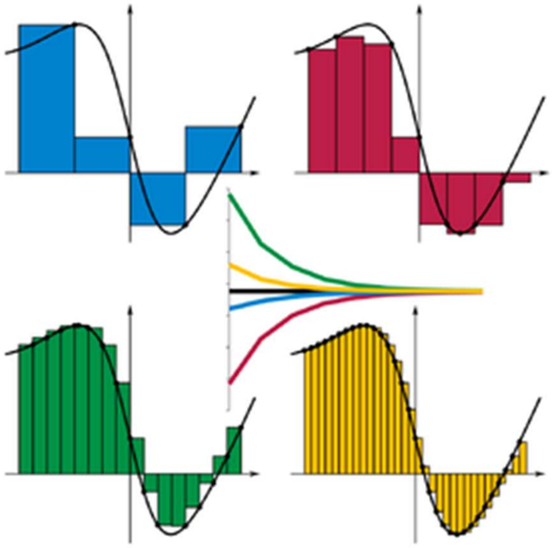


Figura 22: área sob a curva como aproximação da soma de áreas de retângulos

Fonte: Wikipédia. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

Medir a temperatura em intervalos cada vez menores significa somar áreas de retângulos com base (intervalo de tempo) cada vez menor e altura representado pelo valor da temperatura em determinado intervalo. Quando o número de medições se aproxima do infinito, as áreas dos retângulos se aproximam da "área sob a curva" e suas bases se aproximam do fator infinitesimal dt (ou dx num plano cartesiano comum).

Nas subseções seguintes, abordaremos o conceito de integral aplicado às funções elementares, bem como os conceitos de *integral definida* e *indefinida*, numa linguagem que acreditamos ser aplicável no ensino médio. Desse modo, alguns formalismos ficarão de lado dando lugar a uma linguagem mais próxima do aluno.

3.3.1. Integral da função constante

Sejam f uma função dada por $f(x) = k$, onde k é uma constante, e $[a, b]$ um intervalo no eixo das abscissas. Observe que a região delimitada entre o eixo x, o gráfico de f e o intervalo dado é representada por um retângulo. Neste caso, a integral de f no intervalo $[a, b]$ é dada pela área desse retângulo (no caso em que a função tem valor positivo), como representado na Figura 23, e é dada pelo produto da sua base pela altura.

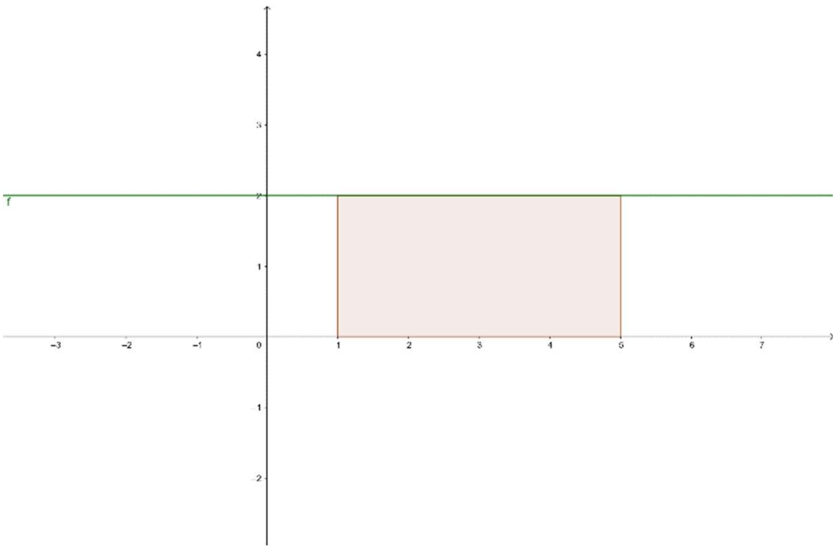


Figura 23: função constante $f(x) = 2$ definida no intervalo $[1, 5]$

Fonte: autoria própria

A área desse retângulo é dada por $(5 - 1) \cdot 2 = 8$, e como o valor de y é constante para todo x, não importa em quantos retângulos se divide a área sob a curva, a área da soma dos retângulos será sempre a mesma, o que implica que 8 é a integral de $f(x) = 2$ no intervalo $[1, 5]$. Isto é,

$$\int_1^5 2dx = 8.$$

A integral definida de uma função constante é escrita da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx = k(b - a).$$

Note que se $k < 0$, a integral assume um valor negativo, mostrando que para intervalos de funções onde $f(x) < 0$, seu valor é o oposto da **área sobre a curva**.

Fazendo $a = 0$ a integral se reduz a bc e podemos encontrar uma família de funções $F(x)$ que gera a integral da função constante para cada intervalo b representado por x no gráfico.

$$F(x) = \int kdx = kx + C,$$

onde C representa uma constante adicionada ao somatório. Uma vez que na integral definida essa constante é anulada, já que ela é a mesma para a e b, qualquer valor real que seja dado a C não influirá no resultado.

Por fim, nota-se que $F(x) = kx + C$ representa uma função afim com coeficientes k e C, o que sugere que a integral indefinida é uma função primitiva, ou seja, o inverso da derivada. Isso pode ser visto quando derivamos F e encontramos como resultado $F'(x) = k = f(x)$.

3.3.2. Integral de uma função afim

Uma função afim $f(x) = mx + n$ (aqui com os coeficientes m e n para diferenciar dos valores a e b do intervalo no eixo das abscissas) definida em um intervalo $[a, b]$ tem integral que representa a área de um trapézio se os sinais de a e b forem iguais, um triângulo se a ou b for 0 (não ambos) ou dois triângulos se a e b possuírem sinais diferentes, como mostram as figuras a seguir.

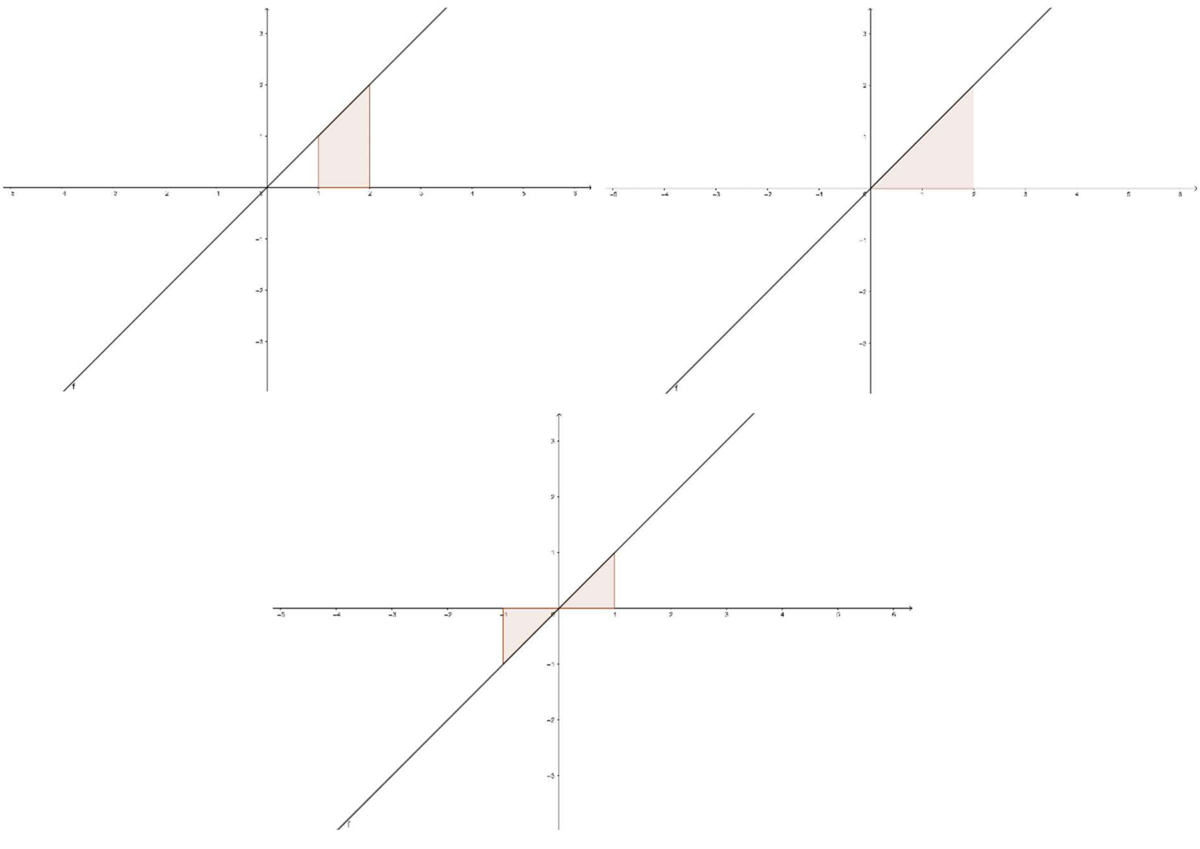


Figura 24: (a) integral de $f(x) = x$ no intervalo [1,2]; (b): integral de $f(x) = x$ no intervalo [0,2] e (c): integral de $f(x) = x$ no intervalo $[-1,1]$

Fonte: autoria própria

A área da Figura 24(a) é igual à soma da área de um quadrado de lado 1 mais a de um triângulo retângulo de catetos medindo 1, e resulta em $1 \cdot 1 + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$. Na Figura 24(b) temos um triângulo retângulo de catetos medindo 2, e sua área é dada por $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$. Já a Figura 24(c) é constituída por dois triângulos retângulos de catetos medindo 1 e sua área vale 1. No entanto, um dos triângulos está abaixo do eixo x o que implica, para o cálculo da integral, que sua "área" será negativa. Como ambos os triângulos possuem a mesma área, a integral vale 0.

Generalizando, podemos encontrar a integral de uma função afim $f(x) = mx + n$ num intervalo $[a, b]$ de x como a área de um "trapézio" de bases $f(a)$ e $f(b)$ e altura $(b - a)$ da seguinte forma:

$$\int_a^b (mx + n)dx = \frac{(mb + n + ma + n).(b - a)}{2} =$$

$$= \frac{(ma + mb + 2n).(b - a)}{2} =$$

$$= \frac{mab - ma^2 + mb^2 - mab + 2n(b - a)}{2} =$$

$$= \frac{m(b^2 - a^2)}{2} + n(b - a).$$

Nota-se que $n(b - a)$ equivale à integral da constante n no intervalo $[a, b]$, e usando a propriedade da soma e subtração das integrais, temos que

$$\int_a^b (mx + n)dx = \int_a^b mxdx + \int_a^b ndx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m(b^2 - a^2)}{2} + n(b - a) = \int_a^b mxdx + n(b - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b mxdx = \frac{m(b^2 - a^2)}{2}$$

ou seja, para funções lineares, a integral é dada pela metade do produto do coeficiente angular pela diferença entre os quadrados de a e b.

Fazendo $a = 0$ e $x = b$, podemos determinar a integral indefinida da função afim:

$$F(x) \int (mx + n)dx = \frac{mx^2}{2} + nx + C$$

que equivale à função quadrática com coeficientes $\frac{m}{2}$, n e C, cuja derivada é a própria função f.

Machado (2015) sugere que “o aluno nem precisa saber como se calcula a área de um trapézio; basta que saiba como se calcula a área de um retângulo”, o que indica que a integral de uma função afim pode ser simplificada para uma integral de função constante. As figuras a seguir ilustram esse caso.

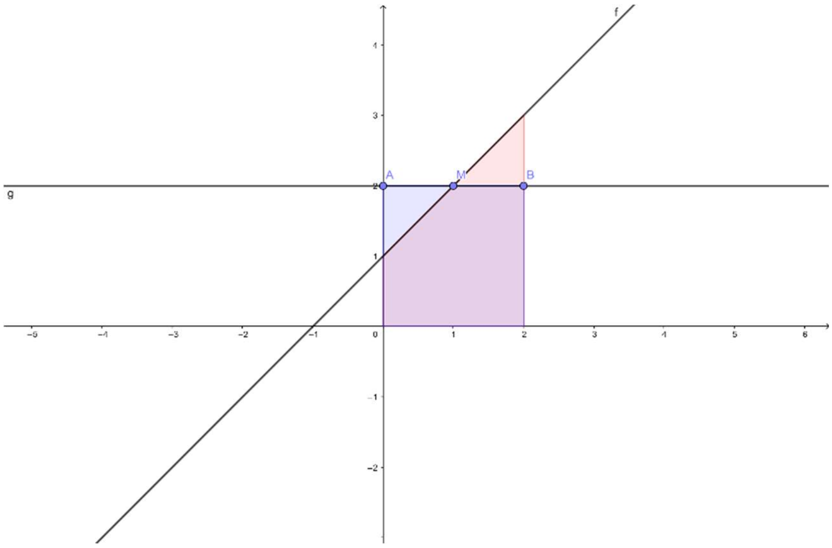


Figura 25: integrais das funções $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2$ no intervalo $[0, 2]$

Fonte: autoria própria

Sendo M o ponto médio do segmento AB, vemos que o triângulo rosa é congruente ao azul pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo), pois ambos possuem ângulos opostos pelo vértice M, um ângulo reto, e $AM = BM$, logo suas áreas são iguais. A parte roxa mais a parte rosa representam a integral da função $f(x) = x + 1$ no intervalo [0,2] e a parte roxa mais a azul, a integral de $f(x) = 2$ no mesmo intervalo, o que implica que as integrais definidas de ambas as funções em $[0, 2]$ são iguais. Algebricamente, temos:

$$\int_0^2 (x+1)dx = \frac{2^2}{2} + 2 = 2 + 2 = 4$$

e

$$\int_0^2 2dx = 2.2 = 4$$

comprovando a igualdade.

Generalizando, podemos determinar as coordenadas do ponto M, sabendo que ele é o ponto médio de $\big(a, f(a)\big)$ e $\big(b, f(b)\big)$ na função afim:

$$x_M = \frac{a+b}{2}$$

$$y_M = \frac{ma+n+mb+n}{2} = \frac{m(a+b)}{2} + n$$

Logo, as integrais das funções $f(x) = mx + n$ e $g(x) = y_M = \frac{m(a+b)}{2} + n$ serão iguais no intervalo $[a, b]$, reduzindo o cálculo da área de um trapézio (representado por $f(x)$) ao cálculo da área de um retângulo (representado por $g(x)$).

3.3.3. Integral de função polinomial de grau maior que 1

Diferentemente das demonstrações envolvendo as funções constante e afim, a partir desse caso, definiremos primeiro a integral indefinida, uma vez que o foco será maior na demonstração e menor na visualização de figuras delimitadas por intervalos.

Nas Subseções 3.3.1. e 3.3.2., demonstrou-se geometricamente e algebricamente que a integral de uma função f constante ou afim é a família de funções cuja derivada é a própria função f. Isto sugere que a integral de uma função qualquer tem relação com a primitiva, ou com uma família de primitivas que difere por uma constante. Veremos a seguir se essa regra vale para toda função do tipo $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.3 Dada uma função $f(x) = ax^n$, com $n \in \mathbb{N}$, temos $\int f(x)dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$.

Demonstração: Façamos

$$f(x) = ax^n = ax^{n-1}.x$$

e calculemos sua integral utilizando **integração por partes**.

$$\int f(x)dx = \int ax^n dx = \int ax^{n-1}.xdx$$

Seja $u = ax^{n-1}$ e $dv = xdx$, temos $du = (n-1)ax^{n-2}dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$. Substituindo na fórmula de integração por partes, temos:

$$\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ax^{n-1} \cdot xdx = ax^{n-1} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}(n-1)nax^{n-2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{2} - \int \frac{(n-1)ax^n}{2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ax^n dx + \int \frac{(n-1)ax^n}{2} dx = \frac{ax^{n+1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{n-1}{2}\right) \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{2 \cdot \frac{(n+1)}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

como queríamos demonstrar. ■

Para polinômios com mais de um membro (soma e subtração com diferentes expoentes de x), vale a propriedade da soma e subtração de integrais, ou seja:

$$\int \sum_{n=0}^{k} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C .$$

Tomando um intervalo $[p, q]$ no domínio da função, calculamos a integral definida nesse intervalo substituindo o x por p e q da seguinte forma:

$$\int_a^b ax^n dx = \frac{aq^{n+1}}{n+1} - \frac{ap^{n+1}}{n+1} = \frac{aq^{n+1} - ap^{n+1}}{n+1}.$$

Exemplo 3.6 Determine a integral da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$ no intervalo [0, 2]:
Resolução: Podemos primeiro calcular a integral indefinida e substituir os valores de x ou ir diretamente para a definida.

- Caso 1: pela integral indefinida:

$$\int (x^3 - 2x^2 + 6)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 6x + C$$

Substituindo os valores de x temos:

$$\frac{2^4}{4} - \frac{2.2^3}{3} + 6.2 + C - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{2.0^3}{3} + 6.0 + C\right) =$$
$$= \frac{16}{4} - \frac{16}{3} + 12 = \frac{48 - 64 + 144}{12} = \frac{128}{12} = \frac{32}{3}.$$

- Caso 2: pela integral definida

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + 6x)dx = \frac{2^4 - 0^4}{4} - \frac{2(2^3 - 0^3)}{3} + 6(2 - 0) =$$
$$= \frac{16 - 0}{4} - \frac{16 - 0}{3} + 12 - 0 = \frac{48 - 64 + 144}{12} = \frac{128}{12} = \frac{32}{3}.$$

Geometricamente, esse valor representa a área sob a curva descrita pela função f no intervalo $[0, 2]$, como mostrado na Figura 26.

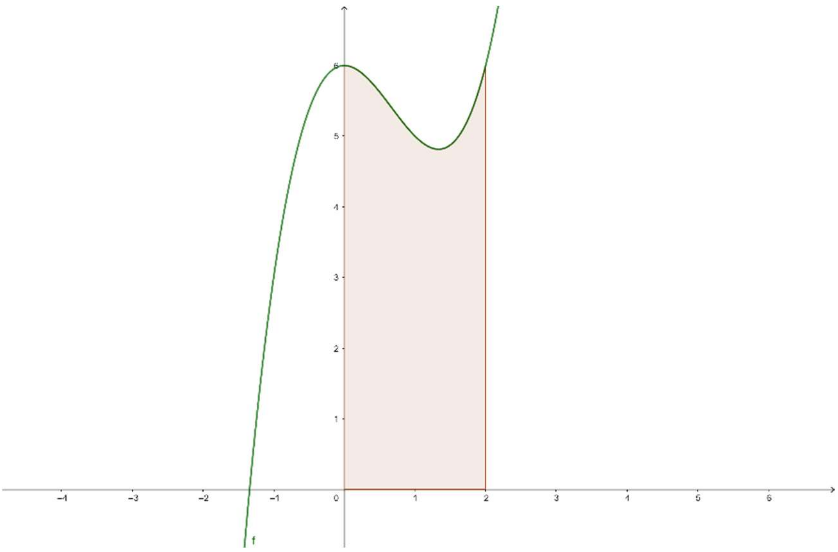


Figura 26: área sob a curva da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$ no intervalo [0, 2]

Fonte: autoria própria

3.3.4. Integral de função com expoente racional

Dada uma função do tipo $f(x) = a\sqrt[n]{x^m} = ax^{\frac{m}{n}}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0\ e\ m \neq -n$, podemos determinar sua integral através da substituição da $\sqrt[n]{x}$ por u:

$$a\sqrt[n]{x^m} = ax^{\frac{m}{n}} = a\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = a\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = au^m.$$

Assim, a função se torna uma polinomial na variável u. Sendo $u = \sqrt[n]{x}$. Neste caso, temos

$$u^m = \sqrt[n]{x^m}$$

e

$$du = \left(\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}-1}dx = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{nx}dx \Rightarrow dx = \frac{nx}{x^{\frac{1}{n}}}du = \frac{nu^n}{u}du = nu^{n-1}du.$$

Desse modo, substituindo as últimas igualdades na integral da função f e utilizando o Teorema 3.3, temos

$$\int a\sqrt[n]{x^m}dx = \int au^m nu^{n-1}du =$$

$$= an\int u^{m+n-1}du = \frac{anu^{m+n}}{m+n} + C = \frac{an\left(\sqrt[n]{x}\right)^{m+n}}{m+n} + C =$$

$$= \frac{ax^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} + C = \frac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + C.$$

como queríamos demonstrar. ■

Nota-se que esta propriedade é a mesma para as funções polinomiais, e vale para qualquer valor racional exceto o -1, pois a fração acima se reduziria a $\frac{1}{0}$, o que não pode ocorrer.

Tomando um intervalo $[p, q]$ de f, desde que todos os pontos desse intervalo pertençam ao domínio de f, podemos calcular a integral definida da seguinte forma:

$$\int_p^q a\sqrt[n]{x^m}dx = \frac{aq^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} - \frac{ap^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{aq^{\frac{m}{n}+1} - ap^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}.$$

Exemplo 3.7 Calcule a integral da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no intervalo $[0, 2]$:

Resolução: Nesse caso, temos $a = 1$, $m = 1$ e $n = 3$, então:

$$\int_0^2 \sqrt[3]{x}dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{2^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{0^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3.2^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{3.2\sqrt[3]{2}}{4} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Geometricamente, esse valor representa a área sob a curva da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no intervalo $[0, 2]$.

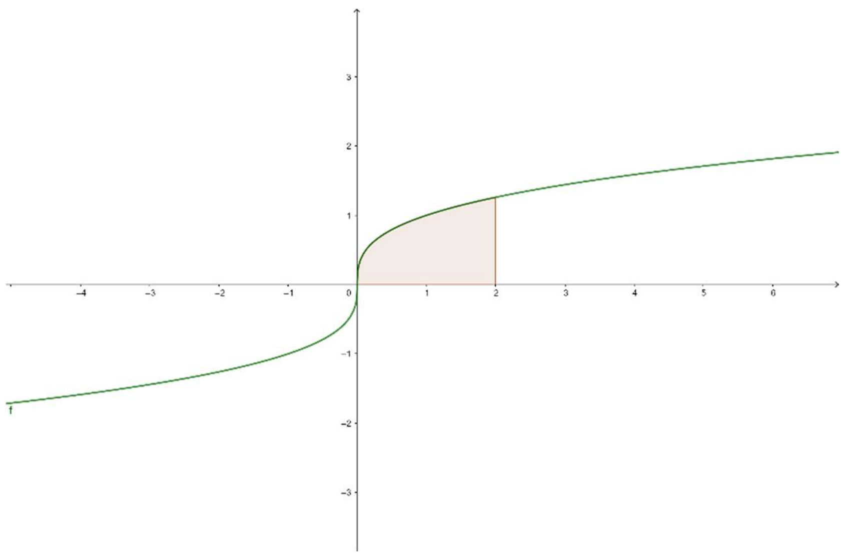


Figura 27: área sob a curva da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no intervalo [0,2]

Fonte: autoria própria

3.3.4.1. O caso $f(x) = ax^{-1}$

Uma exceção constatada na subseção anterior diz respeito à função cujo expoente de x é -1. Até agora todas as funções estudadas têm como integral indefinida uma família de primitivas que difere apenas por uma constante. Se essa tendência se mantiver neste caso, esperamos que sua integral seja $F(x) = a\ln(x) + C$, no entanto, enquanto $f(x)$ é definida para todo $x \neq 0$, $F(x)$ é definida apenas para todo $x > 0$. Analisando o gráfico de uma função $f(x)$ e sua primitiva, podemos observar o comportamento da primitiva e assim deduzir uma expressão para ela.

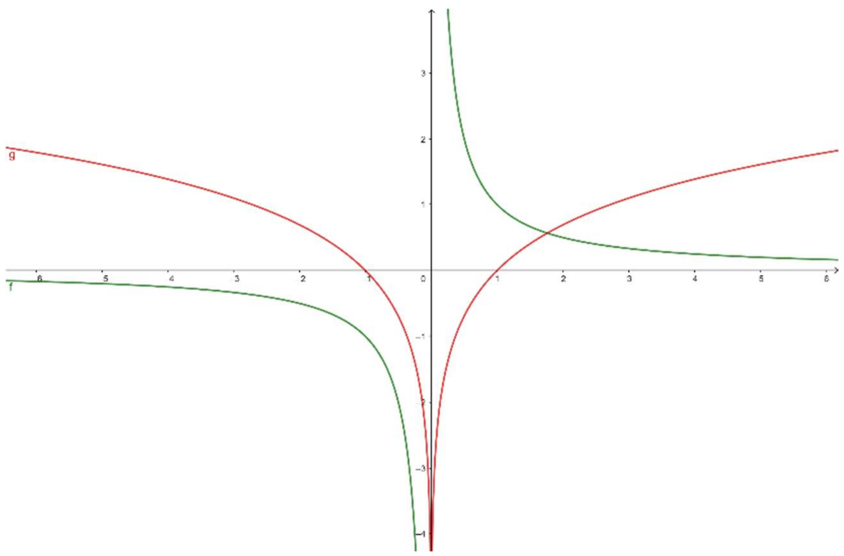


Figura 28: função $f(x) = \frac{1}{x}$ (em verde) e sua primitiva (em vermelho)

Fonte: autoria própria

Nota-se que a função primitiva é simétrica em relação ao eixo y, ou seja, para todo $x_0 \neq 0$, temos $F(x_0) = F(-x_0)$, o que caracteriza F como uma função par.

Sabe-se que a função que tem como derivada $f'(x) = \frac{a}{x}$ é a função $f(x) = a \ln(x)$. Substituindo $\ln(x)$ por u, temos:

$$a\frac{du}{dx} = \frac{a}{x}$$

Integrando ambos os lados em relação a x:

$$\int a\frac{du}{dx}dx = \int \frac{a}{x}dx \Rightarrow a\int du = \int \frac{a}{x}dx \Rightarrow \int \frac{a}{x}dx = au + C = a\ln(x) + C.$$

Como f é par, deveríamos ter

$$a\ln(x) + C = F(x) = F(-x) = a\ln(-x) + C$$

mas se por exemplo $x > 0$, temos $-x < 0$ que não possui logaritmo real. Nota-se que o sinal de x não importa para o cálculo, mas sim seu módulo, logo a integral indefinida pode ser escrita corretamente da seguinte maneira:

$$\int \frac{a}{x}dx = a\ln|x| + C.$$

Em um intervalo $[p, q]; 0 \notin [p, q]$, podemos determinar a integral substituindo x por p e q:

$$\int_p^q \frac{a}{x}dx = a\ln|q| - a\ln|p| = a\left(\ln\left|\frac{q}{p}\right|\right).$$

Mas $0 \notin [p, q]$, implicando que p e q possuem sinais iguais, logo $\frac{p}{q} > 0$, dispensando o uso de módulo. Assim

$$\int_p^q \frac{a}{x}dx = a\ln\left(\frac{q}{p}\right).$$

3.3.5. Integral de função exponencial

Como visto na Subseção 3.2.6., a função $f(x) = e^x$ pode ser escrita como uma série infinita:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Integrando ambos os termos em x, temos:

$$\int e^x dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!} + C =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + C =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 + C = e^x - 1 + C.$$

Fazendo $C = 1$, temos $\int e^x dx = e^x$, mostrando que uma das primitivas de f é a própria função f. Em geral, esta integral é calculada diretamente pela primitiva e seu resultado é dado por $e^x + C$, mas utilizando a integral da série, a fim de retirar a constante -1, atribuímos uma constante $C_1 = C - 1$.

$$\int e^x dx = e^x - 1 + C = e^x + C_1.$$

Em um intervalo $[p, q]$ de x, calculamos a integral definida da seguinte forma:

$$\int_p^q e^x dx = e^q - e^p$$

Para qualquer função exponencial $f(x) = a^x; a > 0, a \neq 1$, fazemos a substituição $a = e^{\ln(a)}$, então

$$\int a^x dx = \int \left(e^{\ln(a)}\right)^x dx = \int e^{x \ln(a)} dx.$$

Fazendo $u = x \ln(a)$, temos

$$du = \ln(a)\, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\ln(a)}.$$

Daí:

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln(a)} dx = \int \frac{e^u du}{\ln(a)} =$$

$$= \frac{1}{\ln(a)} \int e^u du = \frac{e^u + C}{\ln(a)} = \frac{e^{x \ln(a)} + C}{\ln(a)} = \frac{a^x + C}{\ln(a)}.$$

Dado um intervalo $[p, q]$ de x, a integral definida é dada da seguinte forma:

$$\int_p^q a^x dx = \frac{a^q - a^p}{\ln(a)}.$$

3.3.6. Integral da função logarítmica

Embora a função logarítmica apareça como a primitiva da função "inverso de x", há situações em que o logaritmo está na integral. Dada a função $f(x) = \ln(x)$, podemos calcular sua integral indefinida usando integração por partes. Seja $u = \ln(x)$ e $dv = dx$, temos

$$du = \frac{dx}{x}, v = x.$$

Substituindo na integral:

$$\int \ln(x)\, dx = \int udv = uv - \int vdu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x)\, dx = \ln(x) \,.\, x - \int \frac{xdx}{x} = x\ln(x) - \int dx =$$

$$= x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C.$$

Dado um intervalo $[a, b], a, b > 0$ em x, a integral definida é dada por

$$\int_a^b \ln(x)\, dx = (b\ln(b) - b) - (a\ln(a) - a) = b\ln(b) - a\ln(a) + a - b.$$

3.3.7. Integral das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente

Como visto na Subseção 3.2.8., as funções seno e cosseno podem ser escritas como séries de Taylor infinitas:

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

e

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Integrando a função seno, temos

$$\int sen(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx = \int x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots dx =$$

$$= \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + C =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right) - 1 + C = -\cos(x) - 1 + C.$$

Essa integral, assim como a da função exponencial, é geralmente calculada em relação à sua primitiva e é escrita como $-\cos(x) + C$. Tomando como base a série de Taylor, usamos a constante $C_1 = C - 1$ para eliminar o 1, e então

$$\int sen(x)dx = -\cos(x) + C_1.$$

Para um intervalo $[a, b]$ do domínio, calcula-se a integral definida:

$$\int_a^b sen(x)dx = -(\cos(b) - \cos(a)) = \cos(a) - \cos(b).$$

Para a função cosseno, temos

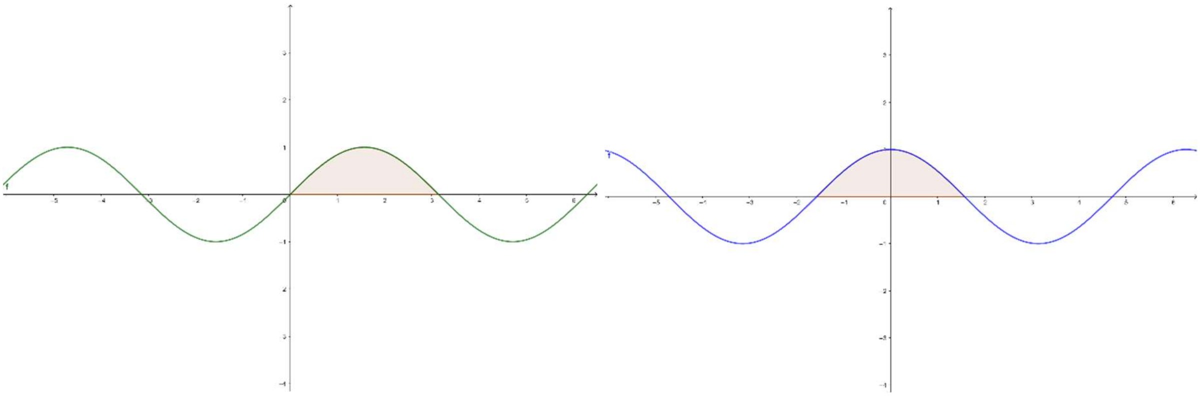
$$\int \cos(x)\, dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} dx = \int 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) + C = sen(x) + C.$$

A integral definida em um intervalo $[a, b]$ de x é dada por

$$\int_a^b \cos(x)\, dx = sen(b) - sen(a).$$

Geometricamente, as funções seno e cosseno são como ondas que oscilam entre -1 e 1 com *período* 2π. Podemos, através do cálculo integral, determinar a área de uma porção das funções sobre ou sob o eixo x, como mostrado nas figuras abaixo:



Figuras 29 (a) e (b): área sob a curva das funções $f(x) = sen(x)$ no intervalo $[0, \pi]$ (em verde) e $f(x) = \cos(x)$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (em azul)

Fonte: autoria própria

Algebricamente, temos:

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = \cos(0) - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$$

e

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

mostrando que cada "gomo" formado entre as funções seno e cosseno com o eixo x tem área 2. Como os "gomos" inferiores têm integral negativa, a integral definida das funções seno e cosseno deve pertencer ao intervalo real $[-2, 2]$.

A função tangente, por sua vez, não é definida para valores de $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$, pois nesse caso ela diverge para infinito, como mostrado na figura a seguir:

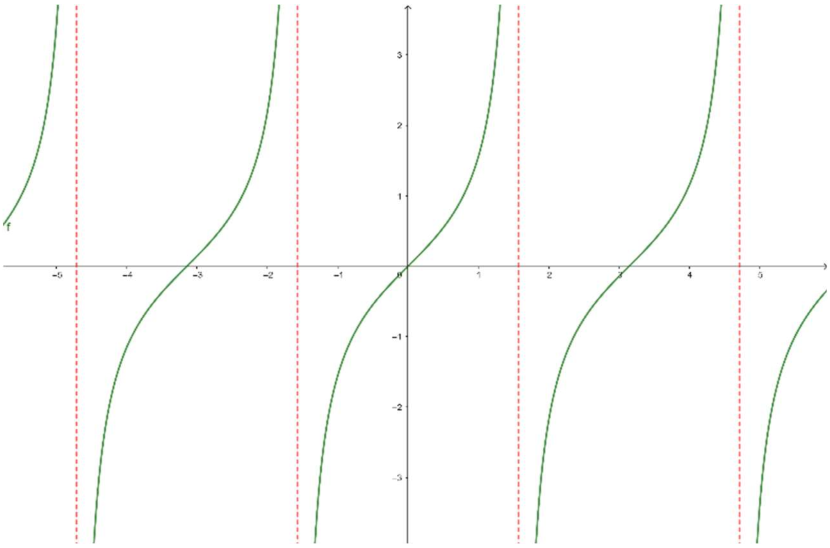


Figura 30: gráfico da função $f(x) = tg(x)$ (em verde) e suas assíntotas verticais (em vermelho)

Fonte: autoria própria

Para determinarmos sua integral definida, é necessário que o intervalo $[a, b]$ em x não contenha nenhum número na forma $\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Sabendo que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$, temos

$$\int tg(x)dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)} dx.$$

Fazendo $u = \cos(x)$, temos

$$du = -sen(x)dx \Rightarrow -du = sen(x)dx.$$

Daí

$$\int tg(x)dx = \int \frac{sen(x)}{\cos(x)} dx = \int -\frac{du}{u} = -\int \frac{1}{u} du =$$
$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|sec(x)| + C.$$

A integral definida é calculada substituindo x por a e b da seguinte forma:

$$\int_a^b tg(x) = \ln|sec(b)| - \ln|sec(a)| = \ln|cos(a)| + \ln|sec(b)|.$$

3.4. Limites

Apesar da proposta de se trabalhar o Cálculo no ensino médio não envolver o conceito de limite, esse assunto pode ser estudado de maneira informal como um complemento do estudo de sequências ou séries numéricas, bem como de resolução de alguma derivada que possa exigir o uso da **regra de L'Hospital**, longe da definição formal apresentada na disciplina de *Cálculo I* na universidade. Nesta subseção, será mostrado de maneira breve como aplicar o conceito de limite geometricamente e algebricamente levando em conta o nível de ensino-aprendizagem do público-alvo.

3.4.1. Limite de sequências e séries

Uma sequência ou série pode ser classificada como convergente ou divergente. Tanto a sequência quanto a série serão ditas convergentes quando, à medida que a ordem do termo tende ao infinito, o termo tende para um valor real L, chamado limite da sequência ou série. Quando isso não ocorre, dizemos que a sequência ou série não possui um limite, portanto, é divergente.

Exemplo 3.8 Dada uma sequência infinita (a_n), onde $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, determine se essa sequência é convergente ou divergente, e caso convirja, qual seu limite:
Resolução: Temos

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{1+\sqrt{1}}$$

$$a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}.$$

$$\ldots$$

À medida que n tende para infinito, chegamos ao limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

chamando esse valor de L, temos

$$L = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

elevando ambos os termos ao quadrado:

$$L^2 = \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}\right)^2 = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}.$$

Podemos substituir $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$ por L no segundo membro, então

$$L^2 = 1 + L \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$$

resolvendo a equação do 2º grau em L

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} =$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como devemos ter um valor L positivo, visto que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} > 1$, então a série converge para o limite $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$, também conhecido como *número áureo*.

Exemplo 3.9 Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge ou diverge, e em caso de convergência, qual seu valor:

Resolução: Dizer se uma série infinita converge ou diverge equivale a dizer se a sequência (s_n) da soma dos termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ converge ou diverge à medida que n tende ao infinito. No somatório acima, temos:

$$s_1 = \frac{1}{2}$$
$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Podemos ter uma representação geométrica desse somatório considerando um quadrado de lado 1, e cada parcela sendo obtida através de partições do quadrado, cada uma delas com metade da área anterior, como na figura a seguir.

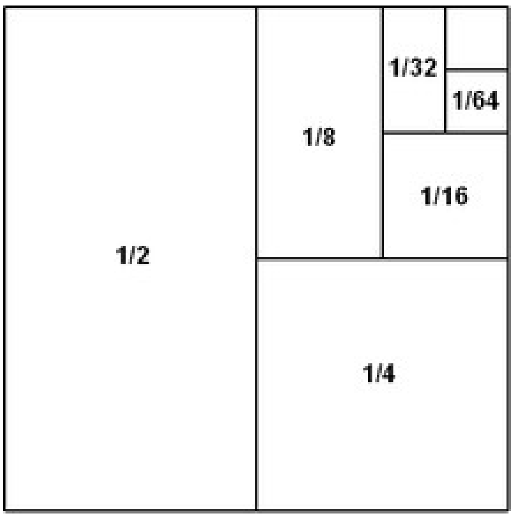


Figura 31: quadrado de lado 1 formado por adições de áreas $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots$

Fonte: Wikipédia. Disponível em

https://en.wikipedia.org/wiki/1/2_%2B_1/4_%2B_1/8_%2B_1/16_%2B_%E2%8B%AF

Nota-se que à medida que mais parcelas são adicionadas, a área da figura se aproxima da área do quadrado, que nesse caso vale 1. Chamando o somatório infinito de S podemos mostrar algebricamente se ele realmente converge para 1

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S = \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots = 1 + S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2S - S = 1 \Rightarrow S = 1$$

mostrando que a série converge para 1, como sugere a figura.

Essa série pode ser generalizada para qualquer valor de $x, |x| > 1$, pois nesse caso a sequência dos termos $a_n = \frac{1}{x^n}$ converge para 0. Chamando essa soma de S_x, temos:

$$S_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xS_x = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots\right) = \frac{x}{x} + \frac{x}{x^2} + \frac{x}{x^3} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots = 1 + S_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xS_x - S_x = 1 \Rightarrow (x-1)S_x = 1 \Rightarrow S_x = \frac{1}{x-1}.$$

3.4.2. Regra de L'Hospital

As Regras de L'Hospital, que recebem esse nome do marquês de L'Hospital, **Guillaume François Antoine** devido a sua publicação em um livro, é um método para resolver limites de quocientes que levam a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\pm\frac{\infty}{\infty}$.

De acordo com Flemming (2006) as Regras de L'Hospital são dadas como segue.

Teorema 3.4 (Regras de L'Hospital): Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $x_0 \in I$. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq x_0$ em I.

i. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$;

ii. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ e $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, então $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

No item (ii) podemos substituir ∞ por $-\infty$, inclusive os limites de f e g podem tender para infinito com sinais contrários. A demonstração será omitida, mas pode ser vista em (Flemming 2006, p. 227).

Geometricamente, podemos notar isso à medida que aproximamos o gráfico de duas funções que convergem para 0 num ponto x_0, de modo que suas curvas se aproximam de retas com coeficientes angulares $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$, como no exemplo a seguir:

Exemplo 3.10 Dados $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = x$, calcule $\frac{f(0)}{g(0)}$:

Resolução: Observa-se o gráfico de ambas as funções

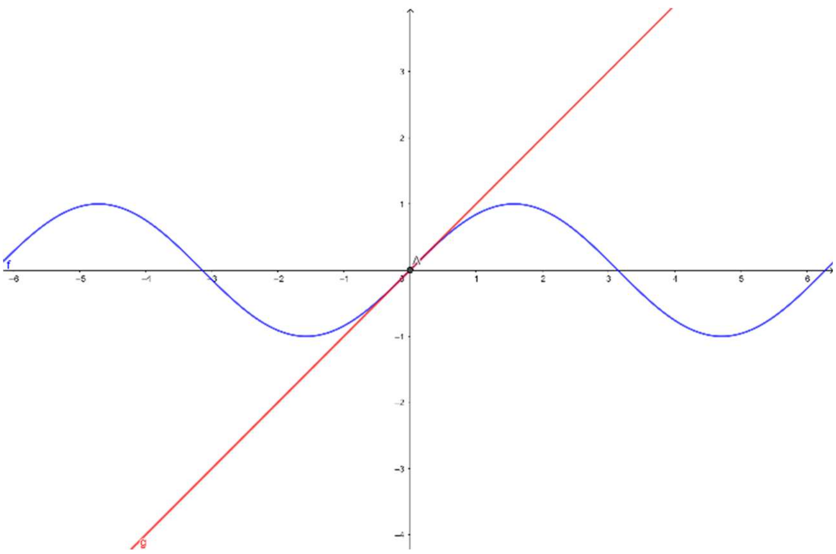


Figura 32: funções $f(x) = sen(x)$ (em azul) e $g(x) = x$ (em vermelho)

Fonte: autoria própria

Nota-se que ambas as funções se intersectam no ponto $A(0, 0)$, levando à indeterminação

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{0}$$

e à medida que f se aproxima de A, sua inclinação vai se aproximando da inclinação de g que é 1, sugerindo que a razão supracitada vale 1. Utilizando a regra de L'Hospital, podemos verificar se a informação procede:

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(sen(x)\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

como o gráfico sugeriu.

Em casos onde a indeterminação é do tipo $\pm\frac{\infty}{\infty}$, pode-se fazer

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\frac{1}{g(x_0)}}{\frac{1}{f(x_0)}} = \pm\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

culminando na mesma indeterminação que pode ser visualizada geometricamente, embora algebricamente esse cálculo não seja necessário.

4. APLICAÇÕES DO CÁLCULO E INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO MÉDIO

Propor o ensino de Cálculo na grade curricular de Matemática e Ciências Exatas no ensino médio é um desafio que, como dito, quebraria diversos paradigmas e reinventaria boa parte dos conteúdos propostos nos livros didáticos, para além dos tímidos conteúdos de derivada e integral no final dos livros didáticos da 3ª série. Também traria para a discussão novos conteúdos e uma maior associação entre a álgebra e a geometria, que é deficiente no ensino-aprendizagem brasileiro, muito preocupado com a *algebrização* de problemas e fórmulas decoradas.

Uma metodologia baseada na geometrização de problemas é visualmente mais atrativa, e mostra de maneira concreta o que um problema puramente algébrico não consegue, permitindo um maior poder de abstração e noção de estruturas matemáticas, uma melhor interpretação do problema e, consequentemente, um melhor aprendizado.

Neste capítulo vamos explorar alguns conteúdos que podem ser abordados à luz do Cálculo ainda no ensino básico. O objetivo principal aqui é tratar as aplicações de conteúdos de Cálculo numa linguagem acessível ao aluno desse nível de ensino. Além disso, as aplicações têm um caráter motivacional para o aluno, o que é importante de ser explorado. Novas percepções e horizontes à luz da Matemática, usando o Cálculo.

4.1. Áreas de superfícies planas

Em Geometria Plana, calcula-se áreas de determinadas figuras com base em suas propriedades, como por exemplo o quadrado e o retângulo baseando-se em seus lados, o losango em suas diagonais, o triângulo em sua base e sua altura, e o círculo em relação ao raio. No entanto, o cálculo de figuras mais complexas como um segmento parabólico ou uma região delimitada por curvas e segmentos se torna extremamente difícil. Utilizando as propriedades de integral, pode-se calcular essas áreas da mesma forma que em uma superfície mais simples como as acima citadas.

Por exemplo: para calcular a área de um segmento parabólico, podemos calcular a diferença entre a integral da função quadrática correspondente a ela em determinado intervalo e a integral da função afim que contém o segmento de reta que limita o segmento parabólico nesse intervalo. Na figura a seguir, temos uma parábola representando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e uma reta representando a função $g(x) = ux + v$, onde sua intersecção se dá nos pontos $A(m, n)$ e $B(p, q)$:

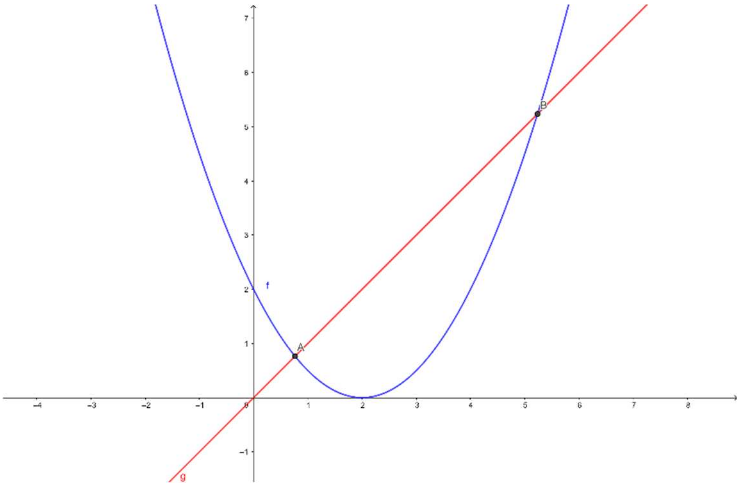
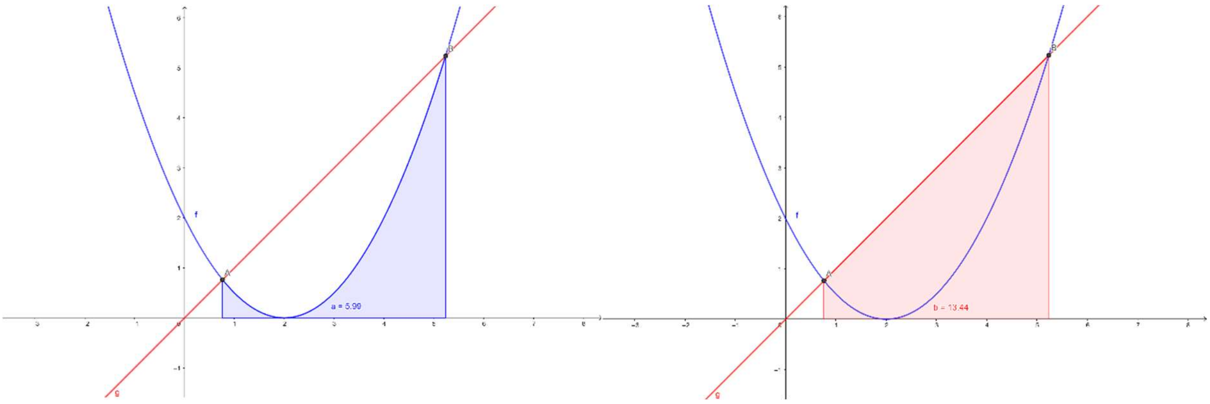


Figura 33: parábola f (em azul), reta g (em vermelho) e seus pontos de intersecção
Fonte: autoria própria

A integral de cada uma das figuras é representada geometricamente pela área entre essas figuras e o eixo x no intervalo $[m, p]$, como nas figuras a seguir:



Figuras 34 (a): integral da função f (em azul), e (b): integral da função g (em vermelho)
Fonte: autoria própria

A integral de cada uma das figuras é representada geometricamente pela área delimitada entre a curva da função, o eixo x e o intervalo $[m, p]$, como na figura a seguir (o módulo é utilizado pois o valor da área é sempre positivo).

$$S = \left| \int_m^p f(x)dx - \int_m^p g(x)dx \right| =$$

$$= \left| \int_m^p (ux + v)dx - \int_m^p (ax^2 + bx + c)dx \right| =$$

$$= \left| \frac{u(p^2 - m^2)}{2} + v(p - m) - \left(\frac{a(p^3 - m^3)}{3} + \frac{b(p^2 - m^2)}{2} + c(p - m) \right) \right| =$$

$$= \left|\frac{a(m^3 - p^3)}{3} + \frac{(u-b)(p^2 - m^2)}{2} + (v-c)(p-m)\right|.$$

A parte em vermelho na Figura 35 mostra a área representada por esta expressão:

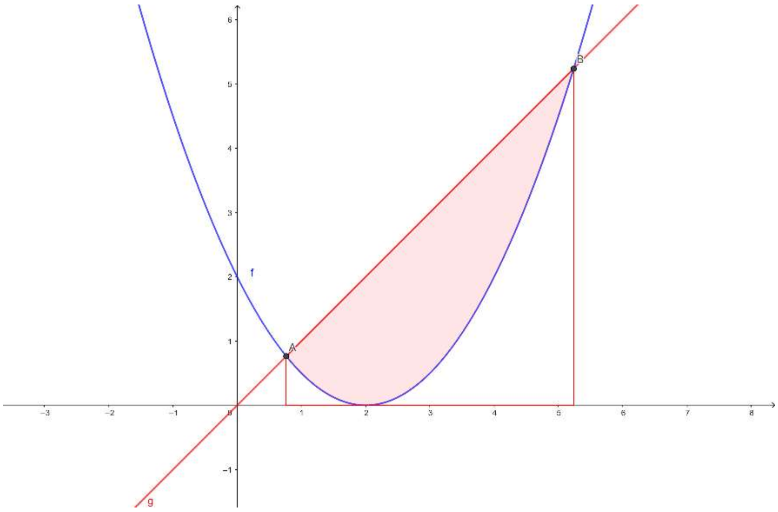


Figura 35: segmento parabólico entre as funções f e g

Fonte: autoria própria

Exemplo 4.1 Calcule a área do segmento parabólico formado pelas curvas cujas funções são dadas por $f(x) = -x^2 - 2$ e $g(x) = 2x - 3$:

Resolução: Primeiramente devemos encontrar os valores de x dos pontos de intersecção entre f e g. Nesse caso, devemos fazer $f(x) = g(x)$ a fim de obter os valores x_1 e x_2 que são as abscissas dos pontos de intersecção entre as curvas.

$$f(x) = g(x) \rightarrow -x^2 - 2 = 2x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{2};\ x_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Agora, calculamos o módulo da diferença entre as integrais definidas de f e g no intervalo $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$:

$$\left|\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (-x^2 - 2)dx - \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (2x - 3)dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (-x^2 - 2 - 2x + 3)dx\right| = \left|\int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (-x^2 - 2x + 1)dx\right| =$$

$$\left|-\frac{\left(-1+\sqrt{2}-(-1-\sqrt{2})\right)^3}{3} - \frac{2\left(-1+\sqrt{2}-(-1-\sqrt{2})\right)^2}{2} + \left(-1+\sqrt{2}-(-1-\sqrt{2})\right)\right|$$

$$= \left| -\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^3}{3} - \left(-2\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} \right| = \left| \frac{16\sqrt{2}}{3} - 8 + 2\sqrt{2} \right| =$$

$$= \left| \frac{22\sqrt{2}}{3} - 8 \right| = \frac{22\sqrt{2}}{3} - 8$$

que é a área em verde da figura a seguir.

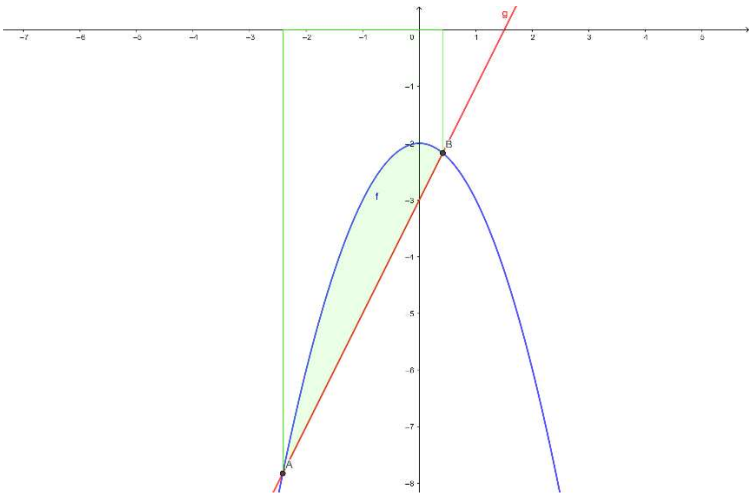


Figura 36: segmento parabólico entre as funções $f(x) = -x^2 - 2$ e $g(x) = 2x - 3$
Fonte: autoria própria

4.2 Máximos e mínimos locais em funções

Máximos e mínimos locais são o que chamamos de **pontos críticos** de uma função. A seguir, definimos seu conceito.

Definição 4.1 Dada uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ no eixo das abscissas, chamamos de máximo local um ponto $(x_0, f(x_0)); x_0 \in (a, b)$ tal que, se tomarmos um intervalo $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x) \subset [a, b]$, teremos $f(x_0) > f(x), \forall x \in (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$. Para um ponto ser mínimo local, teremos $f(x_0) < f(x), \forall x \in (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$.

Tomando como exemplo o vértice da parábola, podemos notar em seu gráfico que ele corresponde a um ponto crítico (máximo ou mínimo local), dependendo do sentido da sua concavidade. Utilizando o conceito de derivada, é possível determinar as coordenadas desse vértice, pois, sendo a parábola uma curva suave e notando que no seu vértice a função é não-decrescente e não-crescente, então a derivada nesse ponto é 0.

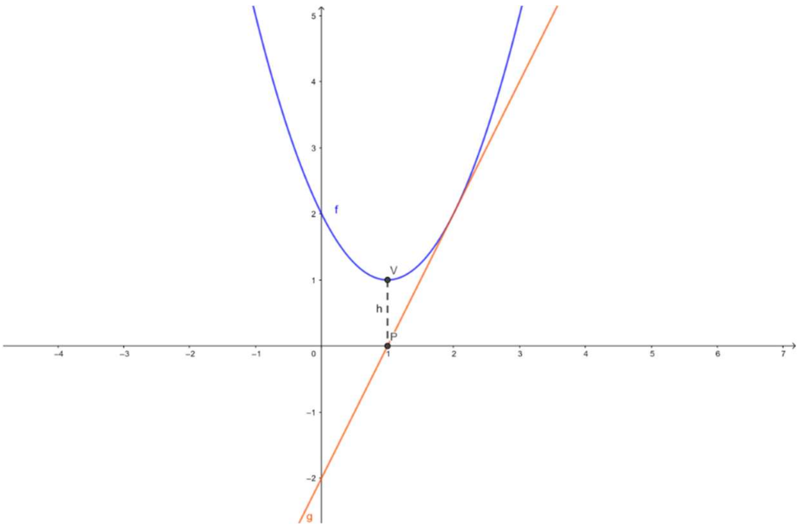


Figura 37: gráfico de função quadrática f (azul) e sua derivada g (laranja)
Fonte: autoria própria

Dada a parábola da equação $y = ax^2 + bx + c$, onde $y = f(x)$, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b.$$

Fazendo $f'(x) = 0$, temos:

$$2ax + b = 0$$
$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Substituindo x em f, achamos y:

$$y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \mathrm{a}\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + \mathrm{b}\left(-\frac{b}{2a}\right) + \mathrm{c} =$$
$$\frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$$
$$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$
$$\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, achamos o vértice V sem apelarmos para fórmulas decoradas ou uma extensa prova algébrica envolvendo o caráter simétrico da parábola. No caso da concavidade da parábola ser para baixo, seu vértice será um ponto de máximo, e se a concavidade for para cima, seu vértice será um ponto de mínimo. Esta conclusão pode ser demonstrada pelo teorema a seguir, que é uma releitura do critério da derivada segunda.

Teorema 4.1 Dado um ponto crítico $\left(x_0, f(x_0)\right)$, esse ponto será de máximo se a derivada da derivada (ou segunda derivada ou derivada segunda) for negativa ($f''(x_0) < 0$), ou será de mínimo se $f''(x_0) > 0$.

Demonstração: A vizinhança de um ponto de máximo local $\left(x_0, f(x_0)\right)$ delimitada por um intervalo aberto é tal que $f(x_0) > f(x),\ \forall x \in (x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ com $\Delta x > 0$. Por outro lado, $\forall x \in (x_0 - \Delta x, x_0)$ temos que $x_0 > x$, logo isto implica em

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} > 0.$$

Ou seja, a taxa de variação entre x e x_0 será positiva para qualquer valor de x pertencente ao intervalo, e a derivada de f será positiva à esquerda de x_0.

Já no intervalo $(x_0, x_0 + \Delta x)$, teremos $x_0 < x$, logo

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} < 0$$

e a taxa de variação entre x e x_0 será negativa para qualquer valor de x pertencente ao intervalo. Nesse caso, a derivada de f será negativa à direita de x_0.

Unindo-se as duas informações, vemos que da esquerda para a direita de x_0 a derivada decresce, logo a derivada da derivada de $f(x_0)$ é negativa. A prova para o ponto mínimo é análoga.

Esse conteúdo é bastante utilizado em problemas de otimização, onde se deve encontrar um valor mínimo ou máximo local para uma determinada função (tal função pode representar a área, volume, distância, lucro). Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.2 Encontre a razão entre o raio da base e a altura de um cilindro para que, dada uma superfície S constante, seu volume V seja o maior possível:

Resolução: Seja r o raio da base e h a altura do cilindro, temos

$$S = 2\pi r(r + h), e$$
$$V = \pi r^2 h.$$

Fazendo r em função de h em S, temos:

$$S = 2\pi r(r + h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\pi r h = S - 2\pi r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{S}{2\pi r} - r.$$

Substituindo na equação do volume, temos que

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r\right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3.$$

Para encontrar o valor máximo do volume, derivamos V em função de r.

$$\begin{gathered} V = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = \frac{2\pi r(r+h)}{2} - 3\pi r^2 = \\ = \pi r^2 + \pi r h - 3\pi r^2 = \pi r h - 2\pi r^2. \end{gathered}$$

Igualando essa derivada a 0, temos:

$$\begin{gathered} \pi r h - 2\pi r^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi r h = 2\pi r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow h = \frac{2\pi r^2}{\pi r} = 2r \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{2}. \end{gathered}$$

Para saber se essa razão representa um ponto de máximo ou mínimo para V, derivamos o volume novamente em r:

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{d(\pi r h - 2\pi r^2)}{dr} = \pi h - 4\pi r.$$

Substituindo $r = \frac{h}{2}$ na equação anterior, temos

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \pi h - 4\pi\left(\frac{h}{2}\right) = \pi h - 2\pi h = -\pi h < 0$$

uma vez que $h > 0$, logo o volume assume máximo em $r = \frac{h}{2}$ e a razão procurada é $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$.

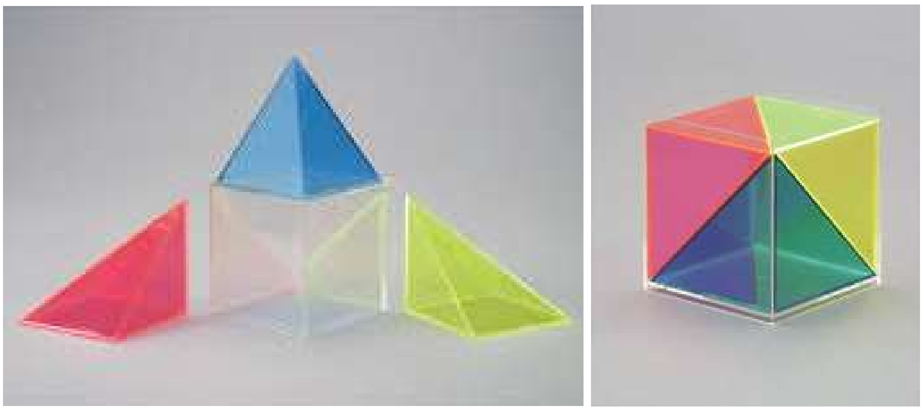
4.3. Volumes de sólidos de revolução

Na escola estudamos os sólidos de revolução à luz da Geometria Espacial como *corpos redondos*, e aprendemos a calcular o volume de três deles: o cone, o cilindro e a esfera. O volume do cilindro é o mais intuitivo dos três, pois a forma e o tamanho da seção transversal circular se mantém à medida que o plano paralelo à base perpassa pelo sólido, de modo que basta multiplicar a área da base pela altura. Ou seja, sendo R o raio da base a h a altura do cilindro, temos que o seu volume é dado por

$$V = \pi R^2 h.$$

No caso do cone, se usa o Princípio de Cavalieri para compará-lo ao volume de uma pirâmide de altura e área da base iguais.

É mostrado nas figuras a seguir que um cubo de aresta a é formado por três pirâmides idênticas cuja base é um quadrado de lado a e suas alturas medem a, logo o volume de cada pirâmide será a terça parte do volume do cubo:



Figuras 38(a): pirâmides congruentes de base quadrada, e (b): pirâmides inscritas no cubo
Fonte: 3b Scientific. Disponível em: https://www.3bscientific.com.br/cubo-com-tres-piramides-removiveis-1019342-u12412,p_1376_27009.html

Neste caso, temos que o volume da pirâmide ou cone é dado por

$$V = \frac{a^3}{3}$$

Assim, utilizando o Princípio de Cavalieri, tomamos um cone de altura a e área da base a^2. Nota-se que a área da seção transversal da pirâmide e do cone tomada em qualquer altura será sempre a mesma, já que as áreas das seções do cone e da pirâmide aumentam ou diminuem de forma diretamente proporcional. Pode-se mostrar ao aluno que isso funciona com qualquer pirâmide ou cone de mesma altura e mesma área da base.

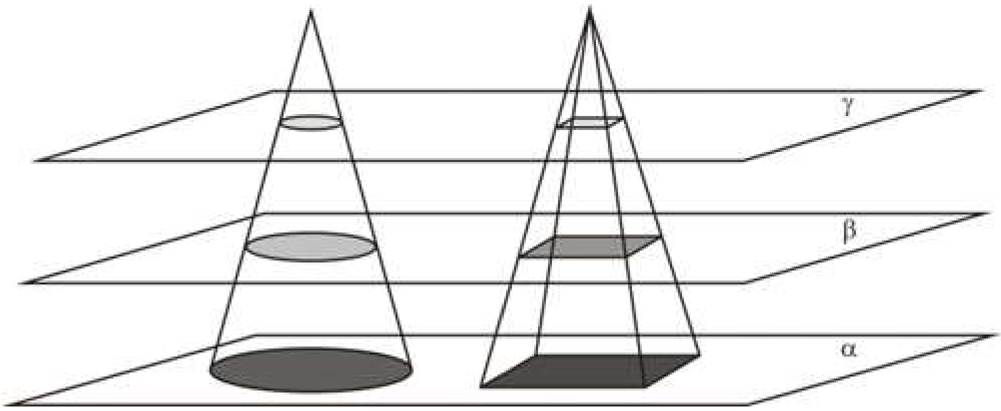


Figura 39: princípio de Cavalieri aplicado ao cone e à pirâmide
Fonte: O baricentro da mente. Disponível em https://www.obaricentrodamente.com/2009/12/o-principio-de-cavalieri.html

Representando a área da base por A_b e a altura por h, temos que o volume do cone é:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

Mas A_b é a área do círculo base do cone, que é dada por πr^2, onde r é o raio do círculo. Logo, o volume é dado por:

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}.$$

A área da esfera é ainda mais complexa, e resulta da diferença entre a área de um cilindro reto de raio da base r e altura $2r$ e dois cones de raio da base r e altura r, de modo que as bases dos cones coincidem com as do cilindro e ambos possuem o mesmo vértice, ver Figura 40. Nota-se que a diferença entre a área do cilindro e dos cones em uma altura x qualquer corresponde à região anular entre a superfície do cilindro e a do cone.

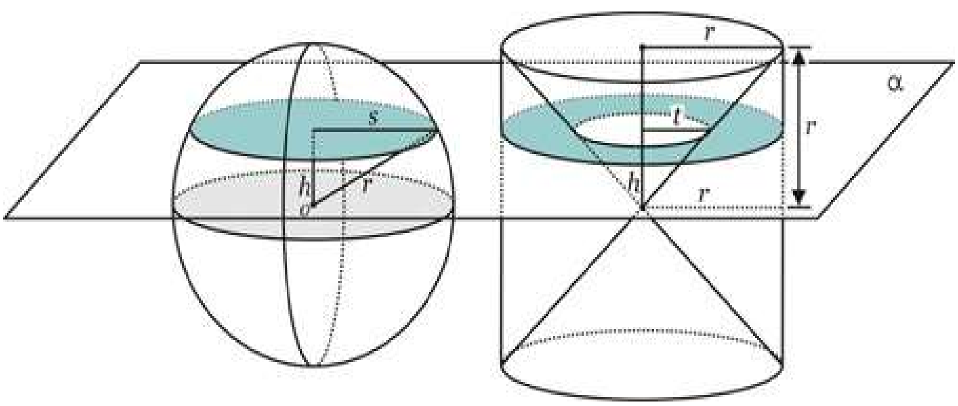


Figura 40: princípio de Cavalieri aplicado à esfera e ao cilindro com cones inscritos

Fonte: blog Portal da Matemática. Disponível em: http://mauroweigel.blogspot.com/2010/08/atividade-1.html

Tomando uma seção transversal qualquer, podemos calcular a área dessa região onde r representa o raio do círculo maior, e t o raio do círculo menor, logo a área será dada por $\pi(r^2 - t^2)$.

Supondo uma esfera de raio R e tomando uma seção transversal, vemos que seu raio s e sua área πs^2 podem ser dados em função de R e da distância h de seu centro ao plano que corta a esfera, já que três dos segmentos com essas medidas formam um triângulo retângulo de hipotenusa R:

Calculamos s^2 utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = h^2 + s^2$$
$$s^2 = R^2 - h^2.$$

Logo sua área é $\pi(R^2 - h^2)$, mas tomando por base a figura anterior, vemos que $d = r$, qualquer que seja a altura da seção transversal que corta ambas as figuras, já que o triângulo formado por h, r e parte de R no cilindro é retângulo e isósceles. Assim, a área da seção transversal na esfera é $\pi(R^2 - r^2)$, a mesma da figura anterior.

Assim, o volume da esfera será dado por:

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2\frac{\pi R^2 \cdot R}{3}$$
$$V = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Percebe-se aí o caminho que percorremos para demonstrar o volume do cilindro, do cone e da esfera através da Geometria Espacial, passando pela exibição das pirâmides no cubo, pelo Princípio de Cavalieri e pela diferença de volumes.

Pela Geometria Analítica, e mais especificamente pelo Cálculo, podemos calcular o volume de um sólido de revolução utilizando o mesmo método para diversos sólidos possíveis: a integral.

A superfície "lateral" de um sólido de revolução pode ser uma função de x em y. Nesse caso, $r = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, onde $b - a$ é a altura do sólido, e podemos determinar um volume aproximado para o volume do sólido fazendo uma soma dos volumes de cilindros de altura h/p (p natural) e raio da base $f(x)$ com x pertencendo a cada intervalo de comprimento h/p. Quando aproximamos p de infinito, vemos que as somas dos volumes dos cilindros tendem ao volume do sólido, e podemos representa-lo por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Assim, podemos calcular a área do cilindro, do cone, da esfera e de outros sólidos de revolução sem passar pelas provas da Geometria Espacial, embora seja necessário entender a princípio o que é uma integral.

Note que um cilindro é uma região gerada pela revolução de um segmento de reta horizontal (função constante) em torno de um eixo horizontal (eixo x):

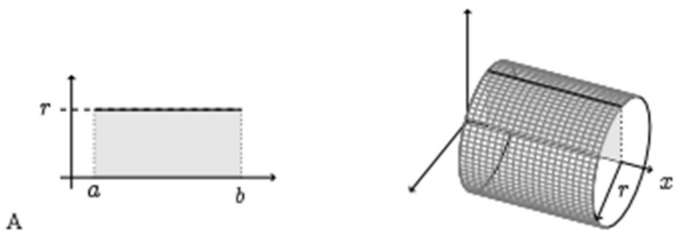


Figura 41: cilindro como um segmento horizontal de revolução
Fonte: e-scola. Disponível em https://www.e-scola.edu.gov.cv/index.php?option=com_rea&id_disciplina=1&id_materia=6&id_capitulo=72&Itemid=220

Assim, o volume de um cilindro de raio r e altura $h = b - a$ pode ser calculado fazendo:

$$V = \pi \int_a^b r^2 dx = \pi r^2 (b - a) = \pi r^2 h.$$

O cone por sua vez resulta da revolução de um segmento de reta partindo da origem até um ponto fora dos eixos cartesianos, nesse caso $a = 0$ e $b = h$.

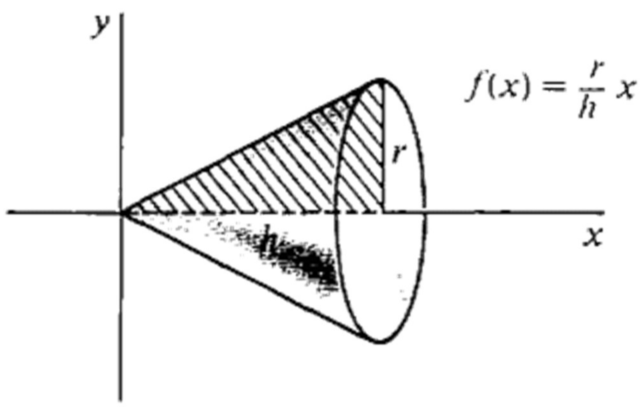


Figura 42: cone como um segmento inclinado de revolução
Fonte: Elementary Calculus. Disponível em: http://www.vias.org/calculus/06_applications_of_the_integral_02_03.html

A função da reta que contém o segmento é $f(x) = rx/h$, onde r é o raio da base do cone. Seu volume será:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2} dx = \pi \frac{r^2h^3}{3h^2} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Para o volume da esfera, vemos que ele é a revolução de um semicírculo em torno do seu diâmetro. Tomando um círculo centrado na origem do plano cartesiano e raio r, temos que sua equação é dada por $x^2 + y^2 = r^2$. Fazendo y em função de x chegamos a:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Para que essa equação se torne uma função, devemos considerar apenas a parte positiva de y (ou apenas a negativa), assim, o volume da esfera pode ser dado por:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-R}^{R} (r^2 - x^2) dx =$$
$$\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Desde que um sólido de revolução tenha uma "silhueta" que possa ser representada por uma função integrável, podemos determinar o volume de qualquer sólido geométrico desse tipo por meio de integral, e então o aluno se vê diante de uma nova gama de possibilidades, podendo calcular o volume de figuras diferentes, como uma região paraboloide ou de um "senoide de revolução", como no exemplo a seguir:

Exemplo 4.4 Calcule o volume do senoide de revolução cuja função é $f(x) = sen(x)$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:
Resolução: Utilizando a fórmula do volume por integral, temos:

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(sen(x)\big)^2 dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen^2(x) dx.$$

Usando a identidade $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, a integral fica

$$\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx.$$

Substituindo $2x$ por u, temos $du = 2dx$, logo

$$V = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)\, du}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4}(1+1) = \frac{\pi^2-\pi}{2}.$$

4.4. O Cálculo nas ciências naturais

Grande parte da linguagem das ciências naturais, principalmente a Física, é baseada em fórmulas matemáticas aplicadas a fenômenos naturais, e estas usam grandezas físicas como variáveis. O tempo é a grandeza que majoritariamente cumpre o papel de variável independente em grandezas que dependem dele, e é dele que surge a ideia intuitiva de derivada. Segundo Nilson José Maciado:

> “...a ideia de derivada nasce assim: quando uma coisa varia com o tempo, é muito natural que eu queira saber como ela varia. Em outras palavras, é muito natural que eu procure uma regularidade nessa variação. Caso eu ache uma regularidade, daí posso dizer coisas como ‘ontem esta árvore estava crescendo à taxa de cinco centímetros por mês’, ‘quando começamos a entrevista, a temperatura desta sala estava subindo à taxa de dois graus centígrados por hora.” MACHADO (2015).

A ideia de integral, mais ligada a áreas, também pode ser associada ao tempo, onde Machado sugere a medição da temperatura de uma sala a cada 10 minutos para no fim encontrar sua temperatura média nas próximas duas horas (somando as 12 medições e dividindo por 12). À medida que o intervalo de tempo entre as medições durante as duas horas diminui, o valor obtido no cálculo da média aritmética entre elas se aproxima do que chamamos de integral da função $T(t)$ nesse intervalo, onde t representa o tempo e T, a temperatura.

4.4.1. Grandezas primitivas e derivadas

Na Física existe o que chamamos de grandeza física, que se refere a propriedades mensuráveis de um fenômeno natural. O Sistema Internacional de Unidades (SI) estabelece as unidades físicas para sete grandezas fundamentais, sendo elas:

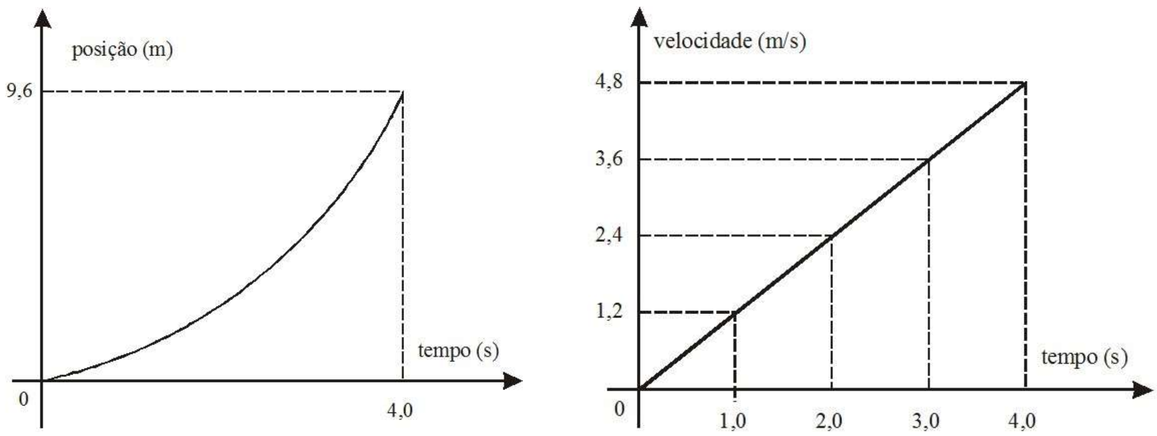
Unidade	**Símbolo**	**Grandeza**
Metro	m	Comprimento
Segundo	s	Tempo
Ampere	A	Corrente elétrica
Quilograma	kg	Massa
Kelvin	K	Temperatura
Mol	mol	Quantidade de substância
Candela	cd	Intensidade luminosa

Tabela 3: unidades fundamentais da Física

Dessas sete grandezas, cinco são matematicamente primitivas, enquanto a candela e a corrente elétrica se comportam como grandezas derivadas. Para o caso da candela, seu entendimento é complexo, mas entende-se como uma grandeza derivada por depender da intensidade luminosa, que por sua vez depende da continuidade do tempo, enquanto que a corrente elétrica resulta do fluxo contínuo e ordenado de partículas portadoras de carga elétrica em relação ao tempo. A unidade ampere é resultante da quantidade de carga elétrica (unidade *coulomb* e símbolo C) que se movimenta ordenadamente em um meio condutor por unidade de tempo, ou seja, $1A = 1C/s$.

Todas as outras grandezas resultam da combinação entre estas sete, ou às vezes do coulomb como é o caso do campo elétrico, e muitas delas resultam de (ou em) funções derivadas ou primitivas, sobretudo aquelas que dependem de uma grandeza contínua como o tempo para serem definidas.

Os livros didáticos de Física do ensino médio pouco ou nada utilizam o conceito de derivada para definir uma grandeza dessa natureza, sendo usado em seu lugar termos como "quantidade de" ou "variação". Sendo assim, a velocidade é a "variação da posição em relação ao tempo" e a potência é a "quantidade de energia por unidade de tempo". Não conseguindo entender que velocidade e aceleração são grandezas derivadas, dificilmente o aluno entenderá por que na função de posição $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ aparece o coeficiente $\frac{1}{2}$ em t^2. Com a adoção do termo "derivada" para definir essas grandezas, entende-se que a função supracitada deriva na função velocidade $v(t) = v_0 + at$ e é primitiva desta, como nas figuras a seguir:



Figuras 43 (a): gráfico de $s(t) = 0{,}6t^2$ e (b): $v(t) = 1{,}2t$
Fonte: Globo educação. Disponível em: http://educacao.globo.com/fisica/assunto/mecanica/analise-grafica-dos-movimentos.html

Usando a derivada da função polinomial, percebe-se que $s(t) = 0{,}6t^2$ implica $s'(t) = 2(0{,}6t^{2-1}) = 1{,}2t = v(t)$, logo ambos os gráficos descrevem o mesmo movimento. Também pode-se entender que a área do "trapézio" formado pela função v em um intervalo Δt de tempo equivale à variação de posição Δs nesse intervalo, aplicando-se aí a integral de v.

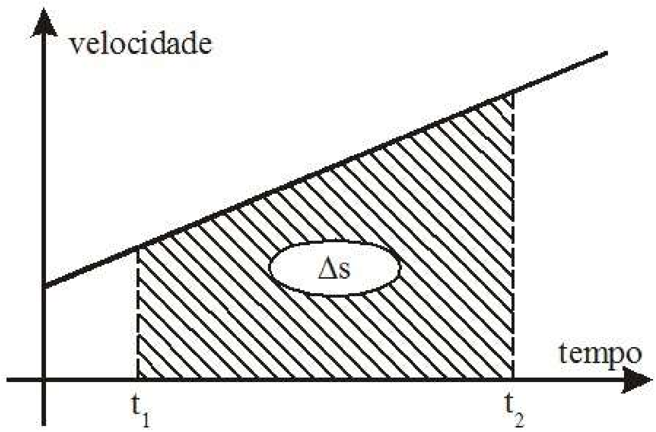


Figura 44: função $v(t)$ e sua integral Δs no intervalo $\Delta t = [t_1,\ t_2]$
Fonte: Globo educação. Disponível em: http://educacao.globo.com/fisica/assunto/mecanica/analise-grafica-dos-movimentos.html

A letra delta maiúscula do alfabeto grego (Δ) em Física representa diferença ou variação de alguma grandeza, e pode ser usada para calcular uma quantidade média de grandeza resultante da razão entre duas variações, como no caso da velocidade média (v_m) que é dada pela fórmula:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Quando nos referimos à velocidade instantânea, temos aí o conceito de derivada aplicada, e podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Lemos a fórmula acima como "a velocidade instantânea é a derivada da posição em relação ao tempo naquele instante". Para a aceleração instantânea, temos:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Ou seja, a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo e a segunda derivada da posição em relação ao tempo.

Pode-se criar infinitas grandezas derivadas através do uso da posição e do tempo, como por exemplo a arrancada (terceira derivada) e outras derivadas superiores, mas, a medida que o grau de derivação aumenta, seu uso se torna menos comum em Física.

Outras grandezas derivadas são:

- Força: derivada do momento linear em relação ao tempo. A unidade de força no SI é o newton (N) onde $1N = 1kg.m/s^2$ e a unidade de momento linear é o quilograma-metro por segundo (p) onde $1p = 1kg.m/s$.
- Potência: derivada da quantidade de energia em relação ao tempo. A unidade de potência no SI é o watt (W) onde $1W = 1kg.m^2/s^3$ e a unidade de energia é o joule (J) onde $1J = 1kg.m^2/s^2$.
- Vazão: derivada do volume em relação ao tempo. A unidade de vazão no SI é m^3/s e a de volume é m^3.
- Frequência: derivada do número de eventos em relação ao tempo. Sua unidade no SI é o hertz (Hz) onde $1Hz = 1s^{-1} = 1/s$.
- Potência térmica: derivada da quantidade de calor em relação ao tempo. Sua grandeza no SI é o joule por segundo (J/s) ou caloria por segundo (cal/s).

Nota-se que o conceito de derivada aparece na maioria dos ramos da Física, e eventualmente em Química e Biologia, como no decaimento radioativo ou na taxa de crescimento de uma população, por exemplo.

Ao mesmo tempo em que se estuda função em matemática no 1º ano do ensino médio, se estuda cinemática em física, e inserir os conceitos de derivada e integral em ambas as disciplinas pode ajudar o aluno a compreender melhor o conteúdo, tanto matematicamente quanto como uma forma de descrever fenômenos. O exemplo a seguir ilustra bem como o Cálculo pode ser usado.

Exemplo 4.5 Uma partícula em movimento retilíneo uniformemente variado está, no instante $t_0 = 0\ s$, na posição $s_0 = 0\ m$; no instante $t_1 = 10\ s$, na posição $s_1 = 100\ m$, e em $t_2 = 20\ s$, na posição $s_2 = 40\ m$. Determine o instante em que a partícula muda o sentido de sua trajetória:

Resolução: O gráfico $s(t)$ dessa partícula descreve uma parábola, e encontrar o instante em que a partícula muda de trajetória equivale a encontrar seu ponto crítico, ou seja, o valor de t tal que sua derivada $v(t) = 0$.

Sabemos que

$$s(0) = 0$$
$$s(10) = 100$$
$$s(20) = 40.$$

Levando em conta que $s_0 = 0m$, temos $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, assim

$$s(0) = v_0.0 + \frac{a.0^2}{2} = 0$$
$$s(10) = v_0.10 + \frac{a.10^2}{2} = 10v_0 + 50a = 100$$
$$s(20) = v_0.20 + \frac{a.20^2}{2} = 20v_0 + 200a = 40.$$

Como a primeira equação vale para quaisquer valores de v_0 e a, podemos encontrar o valor desses coeficientes utilizando um sistema linear formado pela segunda e terceira equações:

$$\begin{cases} 10v_0 + 50a = 100 \\ 20v_0 + 200a = 40 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo a segunda, temos

$$2(10v_0 + 50a) - (20v_0 + 200a) = 200 - 40 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20v_0 + 100a - 20v_0 - 200a = 160 \Rightarrow$$
$$v - 100a = 160 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = -1{,}6m/s^2.$$

Substituindo na primeira equação:

$$10v_0 + 50(-1{,}6) = 100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10v_0 - 80 = 100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10v_0 = -180 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_0 = 18\ m/s.$$

Logo, $s(t) = 18t - \frac{1{,}6t^2}{2} = 18t - 0{,}8t^2$. Derivando com relação a t, temos:

$$s'(t) = v(t) = 18 - 1{,}6t$$

e o instante em que a partícula muda o sentido da trajetória é dado por

$$18 - 1{,}6t = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}6t = 18 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = 11{,}25\ s.$$

O uso dos conceitos de derivada e integral por parte do professor de Física, não apenas em fórmulas, mas nas relações entre as grandezas físicas, pode reforçar ainda mais a ideia intuitiva de Cálculo proposta por Machado, além de enriquecer o conteúdo desta disciplina e dar uma nova visão acerca dos fenômenos naturais, reforçar a ideia de continuidade, taxa de variação e valor médio referente a essas grandezas.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi feita uma abordagem das noções básicas de Cálculo como derivada e integral de funções elementares, além de tópicos que podem servir como pré-requisito ou complemento para o ensino do Cálculo como razão, proporção, expressões algébricas, Geometria Analítica, funções e limite. A princípio foi feita uma abordagem histórica do ensino do Cálculo no Brasil e uma proposta de mudança de paradigma.

O cerne do trabalho se desenvolveu de modo a mostrar algumas possibilidades de como ensinar Cálculo no ensino médio sem os formalismos da notação de limite. Abordando várias maneiras de derivar e integrar, indo desde a abordagem geométrica na derivação e integração de funções constantes e afim, passando pelas propriedades de soma, produto, derivação, integração por partes e substituição.

Os objetivos atingidos foram a geometrização de problemas e as definições de derivada e integral sem a definição formal de limite, sendo que os tópicos de Cálculo foram produzidos baseados em demonstrações, visualizações geométricas e aplicações das propriedades, de modo a facilitar o entendimento por parte do aluno de ensino médio. A dificuldade em se produzir um conteúdo de Cálculo para esse nível de ensino se dá em grande parte pelo fato de que as instituições de ensino superior introduzirem os conteúdos de Cálculo pela definição de limite, o que pode dificultar a criação de um novo conteúdo por parte de um autor, e a assimilação e sua aplicação em sala de aula por parte do professor.

Sendo assim, faz-se necessária uma reforma em todo o ensino de Matemática no Brasil, de forma a diminuir o preciosismo linguístico e as fórmulas decoradas, e dar mais ênfase a resolução de problemas, demonstrações de teoremas e associações entre a Geometria e a Álgebra. Enfim, habilidades que se desenvolvem com o estudo do Cálculo. Logo, um professor que utilize desta metodologia e aplique seus conteúdos, mesmo estes não sendo cobrados no ENEM, por exemplo, pode utilizar o nosso estudo como base para seu ensino.

Vale ressaltar que, a maneira como a proposta de ensino de Cálculo é apresentada neste trabalho não é a única possível sem a utilização de definições formais, podendo ser acrescida outras abordagens para cada tipo de função estudada. Portanto, este não é um conteúdo pronto e acabado, mas que pode ser aperfeiçoado por autores e professores que pensem em abordar esse assunto no ensino médio e superior. Nos tópicos referentes a integrais de funções constante e afim, por exemplo, foi mostrada primeiro a integral definida para depois explicar a indefinida, por acreditar ser mais intuitivo dessa forma. Já em outras seções a abordagem foi feita na ordem tradicional.

Quem estiver interessado em pesquisas com esse enfoque pode fazer adaptações e utilizar um método próprio para ensinar Cálculo. Como, por exemplo, utilizar *softwares* como o *GeoGebra* ou criar desafios de como derivar uma mesma função de maneiras distintas. Para o aluno, o aprendizado de Cálculo e uma mudança de paradigma no ensino brasileiro pode trazer vários benefícios, como uma melhor preparação para o ensino superior, uma maior noção das relações entre números, funções e grandezas, uma melhor compreensão do movimento e das leis da Física, e uma maior abrangência no conhecimento e na aplicação da Matemática no dia a dia.

6. REFERÊNCIAS

1. ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, nº 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm. Acesso em 10 out 2020.
2. ÁVILA, Geraldo. O ensino de Matemática. **Revista do Professor de Matemática**, nº 23. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1993. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/23/1.htm. Acesso em 10 out 2020.
3. MACHADO, Nílson José. Cálculo no ensino médio: já passou da hora. [Entrevista concedida a] Márcio Simões, **Blog Imaginário Puro**, 15 out 2015. Disponível em: https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/. Acesso em 10 out 2020.
4. Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil. **INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**, 3 nov 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206#:~:text=O%20maior%20estudo%20sobre%20educa%C3%A7%C3%A3o,pa%C3%ADses%20que%20participaram%20da%20avalia%C3%A7%C3%A3o. Acesso em 10 out 2020.
5. SCHULER, Roberta. Por que os alunos não aprendem o esperado em Matemática?. **Diário Gaúcho**, 27 out 2012. Disponível em: http://diariogaucho.clicrbs.com.br/rs/noticia/2012/10/por-que-os-alunos-nao-aprendem-o-esperado-em-matematica-3932188.html. Acesso em 10 out 2020.
6. Limite. **Wikipédia**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Limite#:~:text=Em%20matem%C3%A1tica%2C%20o%20conceito%20de,crescendo%2C%20i.e.%20tende%20para%20infinito. Acesso em 10 out 2020.
7. Derivada. **Wikipédia**. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada. Acesso em 10 out 2020.
8. FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: funções, limite, derivação e integração. 6.ed. ver. ampl. São Paulo: Pearson, 2006. ISBN: 9788576051152.

9. GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo.** Volume 1. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. ISBN: 97885216512575.

10. BONGIOVANNI, Vincenzo. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V2.5, p.94-106, UFSC: 2007. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_bongiovanni.pdf. Acesso em 10 out 2020.
11. LUIZ, Robson. Produtos notáveis. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/produtos-notaveis.htm. Acesso em 10 out 2020.
12. Como resolver equações do primeiro grau?. **matematica.pt**. Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/resolver-equacoes.php. Acesso em 10 out 2020. Acesso em 10 out 2020.
13. O que é o círculo trigonométrico? **matematica.pt**. Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/circulo-trigonometrico.php. Acesso em 10 out 2020.
14. Soma de Riemann. **Wikipédia**. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann. Acesso em 10 out 2020.
15. 1/2+1/4+1/8+1/16+.... **Wikipédia**. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/1/2_%2B_1/4_%2B_1/8_%2B_1/16_%2B_%E2%8B%AF. Acesso em 10 out 2020.
16. Cubo, com três pirâmides removíveis. **3b Scientific**. Disponível em: https://www.3bscientific.com.br/cubo-com-tres-piramides-removiveis-1019342-u12412,p_1376_27009.html. Acesso em 10 out 2020.
17. KILHIAN, Kléber. O Princípio de Cavalieri. **O Baricentro da Mente**, 12 dez 2009. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2009/12/o-principio-de-cavalieri.html. Acesso em 10 out 2020.
18. WEIGEL, Mauro. Volume da esfera. **Portal da Matemática**, 9 ago 2010. Disponível em: http://mauroweigel.blogspot.com/2010/08/atividade-1.html. Acesso em 10 out 2020.
19. FRIEDLI, Sacha. Sólidos de revolução. **e-scola**. Disponível em: https://www.e-scola.edu.gov.cv/index.php?option=com_rea&id_disciplina=1&id_materia=6&id_capitulo=72&Itemid=220. Acesso em 10 out 2020.
20. Example 1: right circular cone. **VIAS (Virtual Institute of Applied Science**. Disponível em:

http://www.vias.org/calculus/06_applications_of_the_integral_02_03.html. Acesso em 10 out 2020.