



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO EM MATEMÁTICA

LEVI RODRIGO PINTO DE SOUSA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA E OBMEP: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREAS E
PERÍMETROS DE POLÍGONOS POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MOSSORÓ/RN

2020

LEVI RODRIGO PINTO DE SOUSA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA E OBMEP: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREAS E
PERÍMETROS DE POLÍGONOS POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, através do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Orientador: Professor Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira

MOSSORÓ/RN

2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S725s Sousa, Levi Rodrigo Pinto de.
Sequência didática e OBMEP: uma proposta para o ensino de Áreas e perímetros de polígonos por meio da Resolução de Problemas / Levi Rodrigo Pinto de Sousa. - 2020.
132 f. : il.

Orientador: Fabrício de Figueredo Oliveira Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Programa de Pós-graduação em , 2020.

1. Resolução de Problemas. 2. Sequência Didática. 3. OBMEP. 4. Áreas. 5. Perímetros. I. Oliveira, Fabrício de Figueredo Oliveira, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

LEVI RODRIGO PINTO DE SOUSA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA E OBMEP: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREAS E
PERÍMETROS DE POLÍGONOS POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, Departamento de Ciências Exatas e Naturais, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática através do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Defendida em: 29/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof.º Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira – UFERSA
Presidente

Prof.ª Dr.ª Luiza Helena Félix de Andrade – UFERSA
Membro Examinador

Prof.ª Dr.ª Giselle Costa de Sousa – UFRN
Membro Examinador

Dedico ao meu pai, Vilmar de Medeiros Sousa, e à minha mãe,
Rosimar Pinto de Mesquita Sousa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me sustentou durante esses dois anos e meio.

Agradeço aos meus pais por todo amor, paciência e suporte sem os quais jamais poderia chegar até aqui.

Agradeço aos meus irmãos pela força e inspiração produzida em mim.

Agradeço aos demais parentes que sempre torceram por mim.

Agradeço a todos os meus amigos que demonstraram seu apoio para que eu nunca desistisse de alcançar esse sonho, em especial agradeço a Anderson Jetfy Rodrigues Silva, Jeovano Pereira da Costa, Lucas Rafael Medeiros da Silva e Paulo Henrique das Chagas Silva.

Agradeço aos meus colegas de trabalho que sempre torceram por mim para que eu pudesse vencer essa batalha e alcançar uma nova qualificação, em especial agradeço a Alexandra Boaventura de Oliveira, Damião Pereira de Lucena Junior e Raiani Cíntia Rodrigues de Oliveira.

Agradeço à dona Amélia por ter me recebido quando cheguei para o meu primeiro dia de aula na UFERSA e pela companhia em diversas vezes, seu carinho sempre será lembrado por mim.

Agradeço aos meus colegas de mestrado pela convivência, em especial agradeço a Willa da Silva Medeiros e Willelberg Ferreira da Silva.

Agradeço ao meu orientador, Fabricio de Figueredo Oliveira, pela paciência que teve em me orientar da melhor forma possível.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro parcial concedido a mim durante o mestrado.

“Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro de gigantes.”

Isaac Newton.

“Part of the journey is the end.”

Tony Stark

RESUMO

O ensino de Matemática na Educação Básica tem passado por diversas transformações, sobretudo o ensino de geometria, surgindo novas metodologias e abordagens que visam auxiliar o professor em sala de aula fornecendo experiências que possibilitam ao aluno construir o seu próprio conhecimento. A Resolução de Problemas, uma dessas abordagens, vem sendo recomendada por órgãos nacionais e internacionais desde o final do século XX como uma metodologia que busca melhorar o ensino de Matemática. Tais recomendações são sentidas, por exemplo, ao nos depararmos com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP), importante política pública para a difusão do conhecimento matemático na Educação Básica, e que tem a Resolução de Problemas como seu foco. Apresentamos, portanto, a seguinte problemática da nossa pesquisa: É possível organizar uma sequência didática composta a partir de problemas oriundos da OBMEP voltada para o ensino de áreas e perímetros de polígonos no 6º ano do ensino fundamental e utilizando como abordagem o ensino por meio da Resolução de Problemas? A metodologia utilizada na pesquisa tem como base a abordagem qualitativa, uma vez que não é necessária a adoção de representação numérica, natureza básica, pois procura gerar novos conhecimentos sem uma aplicação prevista, os objetivos são exploratórios tendo em mente o aprofundamento a respeito do tema proposto e o procedimento é bibliográfico por fazer uso de textos acadêmicos como artigos, dissertações e livros para o embasamento teórico. Desse modo, o presente trabalho busca apresentar uma proposta para o ensino de áreas e perímetros de polígonos, voltada para o 6º ano do ensino fundamental, tendo como base a Resolução de Problemas e utilizando como instrumento uma sequência didática produzida a partir de problemas oriundos da OBMEP. Para atingir esse anseio, inicialmente é feita uma abordagem histórica sobre o ensino brasileiro de Matemática com o intuito de compreender como aconteceram as reformas e os movimentos educacionais e suas implicações sobretudo para o ensino de geometria. Posteriormente, trazemos a Resolução de Problemas como uma metodologia para o ensino de Matemática no tocante à geometria onde é discutida sua compreensão na visão de vários autores, dando destaque às perspectivas trazidas por Polya (2006) e Allevato e Onuchic (2019). Por fim, discute-se a respeito da sequência didática, produto a que se propõe este trabalho, comentando acerca de cada elemento que compõe a sequência, inclusive descrevendo possíveis roteiros para a aplicação das fases da Resolução de Problemas, segundo Polya (2006), com o objetivo de proporcionar ao professor subsídios necessários para a aplicação da sequência proposta nesse trabalho em sala de aula. Tendo alcançado o objetivo principal aqui proposto, que é a sequência

didática, trazemos as considerações finais deste trabalho fazendo um retrospecto acerca do que foi discutido em cada capítulo e realizando os últimos apontamentos desta pesquisa sobre a nossa sequência didática. Os autores principais que nortearam esta pesquisa foram Allevato e Onuchic (2019), Caldatto e Pavanello (2015), Dante (2007), Miorim (1998), Oliveira (2013), Pavanello (1988), Polya (2006) e Zabala (2014).

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Sequência Didática; OBMEP; Áreas; Perímetros.

ABSTRACT

Teaching Mathematics in Basic Education has gone through several transformations, especially the teaching of geometry, emerging new methodologies and approaches that aim to assist the teacher in the classroom by providing experiences that enable the student to build his own knowledge. Problem solving, one of these approaches, has been recommended by national and international bodies since the end of the 20th century as a methodology that seeks to improve the teaching of mathematics. Such recommendations are felt, for example, in the face of the Brazilian Mathematical Olympiad of Public and Private Schools (OBMEP), an important public policy of mathematical knowledge diffusion in Basic Education, which focuses on Problem Solving. Therefore, we present the following problem in our research: Is it possible to organize a didactic sequence composed of problems originating from OBMEP aimed at teaching areas and polygon perimeters in the 6th grade of elementary school and using teaching through Problem Solving as an approach? The methodology used in the research is based on qualitative approach, since the adoption of numerical representation is not necessary, basic nature, because it seeks to generate new knowledge without a planned application, the objectives are exploratory, keeping in mind the deepening regarding the proposed theme and the procedure is bibliographic for making use of academic texts such as articles, dissertations and books for the theoretical basis. Thus, this study aims to present a proposal for teaching areas and perimeters of polygons, focused on the 6th grade of elementary school, based on Problem Solving and using as an instrument a didactic sequence produced from OBMEP problems. To achieve this desire, initially a historical approach is made about the Brazilian teaching of Mathematics in order to understand how educational reforms and movements took place and their implications, especially for the teaching of geometry. Subsequently, we bring Problem Solving as a methodology for teaching Mathematics with regard to geometry where its understanding is discussed in the view of several authors, highlighting the perspectives brought by Polya (2006) and Allevato and Onuchic (2019). Finally, we discuss the didactic sequence, the product that this work proposes, commenting on each element that makes up the sequence, including describing possible scripts for the application of the Problem Resolution phases, according to Polya (2006), in order to provide the teacher with the necessary subsidies for the application of the proposed sequence in this work in the classroom class. Having achieved the main objective proposed here, which is the didactic sequence, we bring the final considerations of this work, making a retrospective about what was discussed in each chapter and making the last notes of this research on our didactic sequence. The main authors who guided this research were

Allevato and Onuchic (2019), Caldato e Pavanello (2015), Dante (2007), Miorim (1998), Oliveira (2013), Pavanello (1988), Polya (2006) and Zabala (2014).

Keywords: Problem Solving; Didactic Sequence; OBMEP; Areas; Perimeters.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Figura referente ao problema gerador para o conteúdo de perímetro.....	51
Figura 02: Primeiro passo para a solução do problema gerador para o conteúdo de perímetro.....	52
Figura 03: Segundo passo para a solução do problema gerador para o conteúdo de perímetro.....	52
Figura 04: Solução alternativa do problema gerador para o conteúdo de perímetro.....	54
Figura 05: Figura referente ao problema gerador para o conteúdo de área.....	55
Figura 06: Formalização do conceito de perímetro.....	57
Figura 07: Formalização do conceito de área.....	58
Figura 08: Figura referente ao problema 01.....	59
Figura 09: Contextualização do problema 01.....	62
Figura 10: Figura referente ao problema 02.....	62
Figura 11: Figura referente ao problema 03.....	65
Figura 12: Figura referente ao problema 04.....	67
Figura 13: Figura referente ao problema 05.....	70
Figura 14: Figura referente ao problema 06.....	72
Figura 15: Primeiro passo para a solução do problema 06.....	73
Figura 16: Segundo passo para a solução do problema 06.....	73
Figura 17: Terceiro passo para a solução do problema 06.....	73
Figura 18: Quarto passo para a solução do problema 06.....	74

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas.

PIC – Programa de Iniciação Científica Jr.

PICME – Programa de Iniciação Científica e Mestrado.

POTI – Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo Programa.

SD – Sequência Didática.

SUMÁRIO

1 INTROUÇÃO.....	14
2 O DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL.....	17
2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO PERÍODOS COLONIAL E IMPERIAL E OS ASPECTOS GEOMÉTRICOS ENVOLVIDOS.....	17
2.2 SÉCULO XX: REFORMAS NACIONAIS E MOVIMENTOS INTERNACIONAIS PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUA INFLUÊNCIA PARA O ENSINO BRASILEIRO, PARTICULARMENTE, PARA O ENSINO DE GEOMETRIA.....	21
2.2.1 O primeiro movimento internacional pela Educação Matemática e suas consequências para o ensino de geometria.....	23
2.2.2 As reformas educacionais nacionais e as mudanças curriculares para o ensino de geometria.....	25
2.2.3 O Movimento da Matemática Moderna e as implicações no ensino de geometria.....	29
3 O ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS...32	
3.1 SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	33
3.2 A HEURÍSTICA NO CONTEXTO DA SALA DE AULA.....	35
3.3 A RELAÇÃO ENTRE PROFESSOR E ALUNO DURANTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	37
3.4. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS PERSPECTIVAS DE POLYA E ALLEVATO E ONUCHIC.....	40
4 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREAS E PERÍMETROS DE POLÍGONOS.....	47
4.1 O QUE É UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA?.....	47
4.2 SOBRE A OBMEP.....	48
4.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	50
4.3.1 Problema gerador.....	51
4.3.1.1 Problema gerador: perímetro.....	51
4.3.1.2 Problema gerador: área.....	54
4.3.1.3 Aperfeiçoamento dos conceitos de perímetro e área.....	57
4.3.1.4 Discutindo os problemas da OBMEP.....	59
4.3.1.5 As habilidades segundo a BNCC.....	75
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	78

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	82
APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DIDÁTICA VERSÃO PARA O PROFESSOR.....	85
APÊNDICE B – SEQUÊNCIA DIDÁTICA VERSÃO PARA O ALUNO.....	123

1 INTRODUÇÃO

A Matemática se apresenta como uma peça central no currículo escolar, uma vez que os conhecimentos aprendidos nesta disciplina muitas vezes são observados como parte do saber de outros componentes curriculares, como por exemplo a Física, a Química e a Biologia. Não apenas isto, a Matemática também é fundamental para que o aluno possa interagir com o mundo ao seu redor por meio de uma perspectiva crítica. Habilidades como saber interpretar gráficos e tabelas, realizar comparações entre modelos matemáticos (como funções) e situações reais, ou ainda explorar propriedades geométricas em contexto real, dentre outras, são essenciais para a formação do aluno.

Um exemplo do impacto que a Matemática exerce sobre a formação da população pôde ser observado em 2020 durante a pandemia causada pelo Sars-CoV-2 onde ouviu-se repetidas vezes a expressão *achatar a curva* em referência à curva que expressa graficamente o número de infectados pelo vírus.

Entretanto, apesar da necessidade do cidadão em ter conhecimentos matemáticos mínimos, o Brasil ainda enfrenta diversas dificuldades quanto ao ensino desta disciplina na Educação Básica, sobretudo no que se refere ao ensino da geometria. Em sua dissertação de mestrado intitulada *A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino*, Pereira (2001) analisa ao todo oito trabalhos, sendo seis dissertações de mestrado e duas teses de doutorado, onde observa que o abandono da geometria em sala de aula está relacionado a problemas com a formação de professores, omissão da geometria em livros didáticos e lacunas deixadas pelo Movimento da Matemática Moderna.

Daí a importância de políticas públicas e de trabalhos acadêmicos que visem melhorias para a Educação Básica. Entre as políticas públicas desta natureza a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP) certamente é um destaque. Tendo sua primeira edição ocorrida em 2005, a OBMEP busca despertar no aluno o interesse pela Matemática utilizando como meio a Resolução de Problemas, ou seja, a partir da Olimpíada o aluno se depara com problemas que o fazem desenvolver o raciocínio lógico além de estimular a criatividade, incentivar o pensamento investigador, dentre outras habilidades.

A partir de experiências vivenciadas em sala de aula como professor de Matemática do ensino médio observei que os alunos tinham grande dificuldade em resolver problemas e demonstravam não ter conhecimentos básicos de geometria.

Com o intuito de trazer melhorias ao ensino de geometria a presente pesquisa se une a tantas outras que tem surgido atualmente tendo como meta auxiliar o professor de Matemática

durante a sua prática em sala de modo que ao final deste trabalho o professor possa não apenas ter um material de qualidade pronto para sua aplicação como também a segurança para o aplicar.

Neste sentido, o presente trabalho tinha inicialmente como objetivo principal apresentar uma proposta voltada para o ensino de geometria, utilizando como meio uma abordagem a partir da Resolução de Problemas com o intuito de amenizar a defasagem na aprendizagem sentida nesse determinado grupo de alunos do ensino médio.

Entretanto devido à pandemia causada pelo novo coronavírus (Sars-CoV-2) começamos a questionar como se daria a aplicação do produto e os respectivos desafios envolvidos no processo, de maneira que optamos pelo adiamento da aplicação deixando para depois da pandemia.

Outra adaptação que fizemos foi a mudança do público-alvo passando do ensino médio para o ensino fundamental, isto se deu devido os problemas escolhidos para fazerem parte do produto serem, na realidade, de ensino fundamental e que foram escolhidos desta forma para que houvesse uma abordagem mais amigável sem causar choque nos alunos ao se depararem com problemas muito complexos e pouco motivadores.

Portanto, diante do que foi apresentado, esta dissertação dispõe da seguinte problemática: É possível organizar uma sequência didática composta a partir de problemas oriundos da OBMEP voltada para o ensino de áreas e perímetros de polígonos no 6º ano do ensino fundamental e utilizando como abordagem o ensino por meio da Resolução de Problemas?

O presente trabalho se divide em três capítulos e sua metodologia inclui uma abordagem qualitativa, uma vez que não se vale de métodos quantitativos além de buscar a compreensão acerca do tema. A natureza da pesquisa é básica haja vista que se busca gerar um conhecimento novo, a sequência didática, servindo de material para professores fazerem uso em sala de aula. Quanto aos objetivos a pesquisa se caracteriza como exploratória buscando a compreensão acerca de fatos históricos e conceitos importantes para o desenvolvimento do produto e adotando para este fim um procedimento bibliográfico baseando-se em autores de livros, dissertações de mestrado e teses de doutorado.

O segundo capítulo traz uma visão histórica acerca do ensino brasileiro de Matemática buscando apresentar acontecimentos tanto nacionais quanto internacionais que vieram a contribuir para a evolução do ensino de Matemática no Brasil até o estado em que se encontra atualmente, dando uma maior ênfase em particular ao ensino de geometria. O objetivo do capítulo é compreender os processos que influenciaram o ensino brasileiro de Matemática no passado e que possam gerar consequências ainda hoje, sobretudo, no âmbito do ensino de

geometria. Para a revisão bibliográfica do primeiro capítulo nos baseamos principalmente em Caldato e Pavanello (2015), Fiorentini e Lorenzato (2012), Miorim (1998) e Pavanello (1988).

O terceiro capítulo aborda a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino essencial para a formação do aluno que o coloca como protagonista de sua própria aprendizagem e o professor como mediador desse processo. A Resolução de Problemas é vista como uma metodologia que se desvincula do *ensino tradicional*, em que geralmente o aluno estaria na sala de aula apenas para receber o conhecimento previamente estabelecido pelo seu professor. As visões de Polya (2006) e Allevato e Onuchic (2019) acerca do tema são utilizadas sendo apresentadas e discutidas as fases da Resolução de Problemas segundo as perspectivas dos autores citados. Para a revisão bibliográfica do segundo capítulo nos baseamos principalmente em Dante (2007), Allevato e Onuchic (2019) e Polya (2006).

O quarto capítulo descreve inicialmente o que se entende por sequência didática, porém sem tanto aprofundamento na metodologia que a sustenta, tendo em vista que se baseia no socioconstrutivismo que também norteia a Resolução de Problemas e que já foi discutido no terceiro capítulo. É apresentada também a OBMEP, seus objetivos, premiações e os benefícios surgidos através desta política pública. Por fim, o capítulo dá um maior destaque à sequência didática que é o produto desta dissertação sendo discutido cada elemento da sequência com sugestões ao professor, possíveis roteiros para a aplicação das fases da Resolução de Problemas segundo Polya (2006) e as habilidades trabalhadas em cada problema de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Para a definição de sequência didática nos baseamos em Oliveira (2013) e Zabala (2014).

Nas considerações finais é feito um retrospecto acerca do que foi apresentado no texto trazendo de maneira resumida elementos relevantes que foram discutidos no decorrer de cada capítulo para que se possa ter uma visão geral sobre o trabalho. Por fim, são realizados os últimos apontamentos do autor quanto ao principal resultado desta pesquisa, a sequência didática, e possíveis rumos que esta pesquisa deve seguir.

Portanto, no capítulo seguinte daremos continuidade ao trabalho apresentando o desenvolvimento do ensino de Matemática no Brasil com foco no ensino de geometria.

2 O DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL

O presente capítulo tratará dos aspectos históricos ligados à evolução do sistema educacional brasileiro com vistas para a Matemática, e especificamente à geometria, elucidando alguns acontecimentos referentes à Educação Matemática desde o século XVI até o século XX.

Cada período trouxe sua contribuição e avanço para a disseminação do conhecimento matemático aqui no Brasil nos possibilitando compreender como fatores externos influenciam governos na tomada de decisões a fim de alcançar melhorias para a educação.

Citaremos como movimentos internacionais, que buscaram o aprimoramento do ensino da Matemática, tiveram sua participação aqui no Brasil e influenciaram reformas educacionais trazendo mudanças significativas voltadas para a Matemática do ensino secundário, especialmente para o ensino de geometria.

Como veremos, os movimentos educacionais desempenharam um relevante papel na história da Educação Matemática, deixando marcas principalmente no ensino da geometria. Apesar de ser uma parte essencial da Matemática, sendo útil tanto para a abstração quanto para a aplicação no mundo concreto, houve um período em que o ensino da geometria não era tão presente em sala de aula, tal fato foi intitulado como *O abandono do ensino da geometria* por Pavanello (1989) e levanta diversos questionamentos a respeito.

2.1 O ENSINO DE MATEMÁTICA NO PERÍODOS COLONIAL E IMPERIAL E OS ASPECTOS GEOMÉTRICOS ENVOLVIDOS

Aproximadamente por volta do ano 1548, século XVI, até meados do século XVIII o único tipo de ensino na colônia ofertado à população era aquele promovido pela Campanha de Jesus, cujo objetivo, segundo D'Ambrósio (1999) *apud* Caldato e Pavanello (2015), era o ensino do catecismo, da língua portuguesa e da aritmética, na época chamada de arismética.

Ainda no século XVIII, a fim de tentar reanimar a economia portuguesa, que na época vinha sofrendo uma terrível decadência, o governo português após extrair tudo o que podia do pau-brasil, encontrou na colônia brasileira outra fonte de riqueza: a extração do ouro.

O secretário de estado, Sebastião José de Carvalho e Melo, conhecido como o marquês de Pombal, precisava garantir todo processo de extração e exportação do minério brasileiro e para isso buscou capacitar os habitantes da colônia para o exercício do serviço militar. Desse modo, em 1648, chegam ao Brasil os primeiros especialistas em assuntos militares e mais tarde um pouco, em 1699, é criada a Aula de Fortificações no Rio de Janeiro. Apesar disso, como

aponta Valente (1999), a falta de material didático atrasou o início das aulas e mesmo em 1710 estas ainda não haviam começado.

Por fim, em 1738, uma Carta Régia passou a tornar obrigatório a todo oficial o ensino militar. “A base matemática do curso de formação de engenheiros militares, cartógrafos, matemáticos, artilheiros, lançadores de bombas e arquitetos, que iriam atuar em atividades como a construção de fortificações, instrumentos militares e de balística, era a geometria”. (CALDATTO e PAVANELLO, 2015, p. 106)

O ensino militar iniciado no Brasil colonial é o primeiro passo para um ensino de Matemática mais sofisticado, a geometria agora tinha um lugar onde poderia ser ensinada, entretanto, ainda era algo restrito a uma pequena parte da população, haja vista que poucos seguiam carreiras militares. Pior ainda é o fato de que a pouca instrução que alcançava a população através da Campanha de Jesus estava prestes a acabar.

O ensino jesuíta trazia algumas desvantagens para Portugal e uma delas é o fato de seus princípios tornarem o seu objetivo acima de tudo religioso. Como menciona Ribeiro (2010), o

[...] princípio universalista visava formar o cristão (católico) sem vinculações especificamente declaradas com nenhum governo civil. Isto, acrescido do fato de que os melhores alunos eram escolhidos para cursarem Teologia tornarem-se futuros membros da Campanha de Jesus, fazia com que a maior beneficiada fosse, em realidade, a própria ordem religiosa. (RIBEIRO, 2010, p. 28)

Logo, em 1759, o marquês de Pombal, expulsou a comunidade jesuíta temendo a influência destes sobre a população.

Com o ensino jesuíta extinto, foram criadas, em 1772, as Aulas Régias, que nada mais eram do que aulas avulsas de disciplinas isoladas.

Um sistema que representava um retrocesso em vários aspectos, principalmente em termos institucionais: não havia [sic] na colônia professores com formação adequada para ministrarem essas disciplinas isoladas; as aulas eram avulsas e sem articulação entre si; não existia um planejamento escolar ou garantia da efetividade das referidas aulas. No entanto, foi por meio delas que os conteúdos escolares começaram a ser modificados, especialmente no caso da matemática, pois foram introduzidas as aulas régias de aritmética, álgebra e geometria. (CALDATTO e PAVANELLO, 2015, p. 105)

Por muitos anos o ensino brasileiro permaneceu assim, fragilizado. Aqueles que pretendiam seguir a carreira militar, frequentavam a Aula de Fortificação e que mais tarde se tornaria a Aula de Regimento de Artilharia do Rio de Janeiro. Enquanto para os demais, as

aulas régias eram o único tipo de ensino básico ofertado, sendo que para o ensino superior era necessário frequentar a Universidade de Coimbra, em Portugal.

Conforme Valente (1999), o fato de ainda não haver aqui no Brasil livros dedicados ao ensino de Matemática levou o engenheiro militar português José Fernandes Pinto Alpoim a escrever dois livros, *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*, impressos respectivamente em 1744 em Lisboa e 1748 em Madrid.

Ambos os livros foram escritos por meio de uma estrutura de perguntas e respostas, além de apresentar um ponto de vista bastante prático focado no exercício do ofício militar.

O livro *Exame de Artilheiros* tratava-se de uma obra mais elementar, sem muito rigor, com vistas para o ensino elementar da Matemática e dividido em três partes: aritmética, geometria e artilharia. Cada uma dessas partes era chamada de *tratado* e se equivaliam aos capítulos. A justificativa para o primeiro tratado ser focado em aritmética se dá pelo fato de que o nível de conhecimento matemático daqueles que iniciavam os estudos na carreira militar ainda era muito baixo, o que tornava praticamente impossível o ensino da geometria.

Já o livro *Exame de Bombeiros* se apresentava como uma obra um pouco mais complexa, sendo dividido em dez tratados com o objetivo de ensinar geometria, trigonometria, e o ofício de deitar bombas. De acordo com Valente (1999) o segundo livro de Alpoim era mais rigoroso do que o primeiro, contudo ainda assim não chegou a apresentar nenhuma demonstração. “As duas obras de Alpoim descritas não apresentam os conteúdos como uma teoria escolar, mas como uma sequência de princípios. Os textos abordam apenas conhecimentos sobre como desenvolver atividades de artilheiros e bombeiros”. (PAVANELLO 2015, p. 107)

Porém é a partir do segundo livro de Alpoim que podemos ter uma breve noção do caráter utilitário que a geometria traz para os militares, onde se apresentam “as noções fundamentais da geometria plana, posições relativas de duas retas, círculo, circunferência, triângulos semelhantes, proporcionalidade, parábola e volumes” (VALENTE, 1999, p. 58).

Vale notar a importância deixada por tais obras para a História da Educação Matemática visto que são os primeiros registros de livros dedicados ao ensino de Matemática. Apesar de não ter o cunho pedagógico observado nos livros atuais, tanto *Exame de Artilheiros* quanto *Exame de Bombeiros* denotam a preocupação do autor em tentar apresentar aos alunos os conhecimentos necessários para as respectivas profissões de uma maneira clara.

Mais tarde, precisamente em 1792, foi criada no Rio de Janeiro a Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho, que segundo Valente (1999), tratava-se de uma espécie de reunião das experiências de cursos anteriores, possuindo um Curso de Matemática com duração

de seis anos. Aqueles que pretendiam ser oficiais de infantaria e cavalaria deveriam cursar três anos desse curso, enquanto os que pretendiam ser oficiais de artilharia cursavam cinco anos e, por fim, os que pretendiam ser engenheiros cursavam todos os seis anos.

Em consequência da chegada da Corte Lusitana no Brasil em 1808 foram criadas diversas instituições com o objetivo de permitir sua operacionalização na até então colônia. Algumas dessas instituições como a Imprensa Régia, a Biblioteca Real e o Banco do Brasil trouxeram um forte impacto para a o Brasil uma vez que se tornava possível realizar tarefas antes impensáveis em uma colônia, porém indispensáveis para uma nação.

Como um importante feito foram criadas também a Academia Real Militar e a Academia Real de Marinha que substituíram a Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho.

Por fim, o Brasil caminhava para a sua independência até que em 07 de setembro de 1822 às margens do rio Ipiranga ouve-se o grito *Independência ou Morte!* e que mudaria a história do Brasil partindo de uma colônia de Portugal para enfim uma nação independente.

Começava agora um novo período na história brasileira, o Brasil Imperial necessitava de mudanças estruturais urgentes principalmente na educação. Finalmente, em 1837, foi criado o Imperial Colégio D. Pedro II, a primeira escola pública voltada para o ensino secundário tinha como inspiração o sistema educacional francês passando a ser referência para a educação brasileira.

A criação da primeira escola secundária pública certamente representa um dos principais marcos de toda a história da educação brasileira, isto porque finalmente poderia ser oferecido um ensino de qualidade, sobretudo de Matemática, voltado para a população. Entretanto segundo D'Ambrosio (1999) *apud* Caldato e Pavanello (2015) não houve muitos avanços do ponto de vista matemático e científico durante o Brasil Imperial, se resumindo basicamente à criação do Colégio Pedro II.

Mais tarde um pouco, mais precisamente em 15 de novembro de 1889 outro marco histórico se faz presente em nosso país e por meio de um golpe de Estado político-militar acontece a famosa Proclamação da República e o militar Deodoro da Fonseca assume a presidência do Brasil.

Por fim, citados os principais acontecimentos históricos do Brasil no século XIX chegamos ao século XX, em que começam as buscas por inovações para o ensino de Matemática e a tentativa de expansão da oferta do ensino secundário. Como veremos, algumas das propostas de inovações vieram por meio de um professor de Matemática do Colégio Pedro II chamado Euclides Roxo cuja contribuição perdura até os dias atuais.

2.2 SÉCULO XX: REFORMAS NACIONAIS E MOVIMENTOS INTERNACIONAIS PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUA INFLUÊNCIA PARA O ENSINO BRASILEIRO, PARTICULARMENTE, PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Se os séculos anteriores trouxeram pouca ou quase nenhuma contribuição para a história da Educação Matemática, o século XX por sua vez se apresenta como uma fonte rica de informações acerca de ações tanto nacionais quanto internacionais que tinham um objetivo em comum, a disseminação do conhecimento matemático entre todas as escalas sociais. O motivo por trás de tais ações se dá na verdade por algo bem simples: a necessidade da época.

Ora, uma vez que mais e mais países cruzavam a fronteira da industrialização tornava-se necessária a qualificação da mão de obra e um dos pontos observados que contribuía para uma mão de obra especializada era o conhecimento matemático mínimo, incluindo o conhecimento geométrico, que era pouco difundido entre a sociedade, principalmente no que se refere à parcela mais pobre da população.

Havia também um grande descompasso entre a Matemática presente no ensino secundário e a Matemática presente nas universidades e que se deu principalmente devido ao forte avanço experimentado pela Matemática no século XIX a nível de pesquisa. De fato, segundo BOYER (2012, 343), “o século dezenove merece ser considerado a Idade de Ouro da matemática. Seu crescimento durante estes cem anos é de longe maior que a soma total da produtividade em todas as épocas precedentes”.

Consequentemente o impulso recebido pela Matemática favoreceu também as demais ciências que dela se utilizam tais como a Física e a Engenharia, e esse avanço geral nas ciências refletiu no desenvolvimento dos meios de produção contribuindo, portanto, para a Revolução Industrial e gerando transformações na sociedade.

Todavia a mudança causada no sistema sócio-político-econômico começou a gerar certos questionamentos a respeito do ensino da época. A população havia mudado totalmente a sua maneira de produzir e comercializar e por isso necessitava de uma nova educação para acompanhar tais avanços.

Dessa forma o ensino de Matemática começou a ser repensado na tentativa de buscar diminuir a discrepância entre o que era estudado no ensino básico e o que era estudado no ensino superior, além de buscar atender às novas demandas impostas pelo mercado. Nesse contexto parte da Europa deu início a movimentos com vistas para o aprimoramento do ensino da Matemática na educação básica. “Enquanto a Universidade ensinava os últimos progressos

da Matemática, ou seja, a Matemática superior, as escolas secundárias continuavam a ensinar a geometria grega, a álgebra elementar e o cálculo aritmético.” (MIORIM, 1998, p. 60)

Entre os países que procuraram dar início às reformas estruturais em seus respectivos sistemas de ensino há três que se destacam pelas iniciativas de políticas educacionais e que irão ser apresentados aqui, são eles a França, a Inglaterra e a Alemanha.

Na França foi designada uma comissão ministerial para estar à frente da situação e posteriormente foi instituído um decreto que traria as mudanças consideradas necessárias para o ensino secundário. O objetivo era simples e, de acordo com Miorim (1998) visava tornar o ensino secundário algo mais simples e intuitivo, trazendo uma fusão (ou articulação) entre a geometria e a aritmética além de introduzir assuntos antes estudados apenas no ensino superior, como por exemplo noções de cálculo diferencial e integral para séries mais avançadas.

Todavia a inserção de novos conteúdos sem haver nenhum tipo de preparo profissional para os professores tornou as novas medidas difíceis de serem cumpridas e conforme Schumbring (1999) não se sabe exatamente até que ponto foram atendidas.

Na Inglaterra o movimento de reforma da Educação Matemática partiu das iniciativas do engenheiro e professor de Física John Perry (1850-1920) que tinha uma visão mais prática para o ensino de Matemática e por isso recomendava a adoção de práticas laboratoriais em sala de aula por meio das quais seria possível estabelecer uma relação interdisciplinar entre a Matemática e as ciências da natureza (Física, Química e Biologia).

Perry acreditava que o caráter prático e utilitário contribuiria para o ensino de Matemática e que a experimentação teria um importante papel na aprendizagem do aluno uma vez que ao enfatizar sua relevância por meio do significado atribuído a ela os alunos teriam uma melhor noção do porquê necessitam estudar tais conteúdos.

Como matemático puro, sustento que uma das sugestões mais importantes de Perry é que, dando um maior desenvolvimento ao aspecto prático da matemática, isto é, aos conceitos aritméticos, ao desenho linear e aos métodos gráficos em geral, em contínua relação com os problemas da Física, da Química e da engenharia, será possível dar aos estudantes uma grande parte das noções essenciais da Trigonometria, da Geometria Analítica e do Cálculo. (TORANZOS, 1963, p. 30-31 *apud* MIORIM, 1998, p. 63)

Além das práticas laboratoriais Perry também defendeu a utilização da intuição como ferramenta para o ensino e a introdução de conceitos mais modernos.

A Alemanha teve sua reforma liderada pelo matemático Felix Klein (1849-1925) que apesar de já ter uma carreira consolidada como matemático puro – tendo feito importantes

descobertas para a geometria moderna – também atuou fortemente em temas relacionados ao ensino de Matemática.

Insatisfeito com o sistema educacional da época, Klein propôs mudanças que trariam impactos diretamente à formação dos professores de Matemática. As universidades desempenhavam um papel estratégico uma vez que um professor bem formado influencia positivamente nas atividades desempenhadas em sala de aula.

Por um lado, defendia a atualização da Matemática na escola secundária, de maneira a ficar mais próxima do desenvolvimento moderno dessa área e, também, dos últimos avanços científicos e tecnológicos. De outro, acreditava que a Universidade deveria modificar a sua proposta de ensino, levando em consideração as necessidades do futuro professor. (MIORIM, 1998, p. 69)

Felix Klein orientava que os cursos de Matemática abordassem as relações interdisciplinares com as ciências aplicadas, trazendo também elementos pedagógicos que influenciassem diretamente na prática do professor em sala de aula, como a compreensão dos motivos psicológicos que levariam o aluno a aprender de acordo com o interesse e a utilidade que aquilo poderia gerar para a sua vida. Além disso, propunha ainda a introdução do conceito de função no ensino secundário justificada pelo fato de esta ser o centro das descobertas matemáticas dos últimos dois séculos.

2.2.1 O primeiro movimento internacional pela Educação Matemática e suas consequências para o ensino de geometria

O constante contato entre os matemáticos proporcionado através dos Congressos Internacionais de Matemática (ICM, na sigla em inglês) contribuiu para tornar público entre a comunidade acadêmica os recorrentes problemas enfrentados pelos professores nas aulas de Matemática do ensino secundário, bem como as ações que já vinham sendo implementadas em alguns países (França, Inglaterra e Alemanha). Consequentemente começaram a ser debatidas as razões que poderiam ter levado o ensino de Matemática nas escolas secundárias a apresentar tais fragilidades e de que maneiras poderiam ser evitadas.

Para que houvesse uma ação coordenada entre os diferentes países visando melhorias na Educação Matemática num contexto internacional, e tendo em vista que cada região vivenciava seus próprios desafios quanto à aprendizagem de Matemática na educação básica, foi estabelecida uma comissão internacional.

A ideia de eleger a comissão surgiu no IV Congresso Internacional de Matemática, que foi realizado no ano 1908 em Roma. Conhecida primeiramente como *Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique* (CIEM), passou a ser chamada, em 1954, de *Internacional Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). Seu primeiro presidente foi o matemático Felix Klein, que permaneceu no cargo até o seu falecimento em 1925.

Ainda durante aquela edição do Congresso Internacional foi sugerida à Comissão que organizasse juntamente com os países participantes do congresso, por meio de subcomissões nacionais, a coleta de informações relacionadas ao estado em que se encontrava o ensino de Matemática nas escolas secundárias.

Após serem apresentados os relatórios pelas subcomissões nacionais foram definidas as primeiras orientações por parte da Comissão Internacional.

1) tornar predominante o ponto de vista psicológico, de forma que ensino não dependa unicamente da matéria a ser ensinada, mas que atenda antes de tudo o indivíduo a quem deseja ensinar; 2) na escolha da matéria a ensinar ter em vista as aplicações da matemática nas demais disciplinas; 3) subordinar o ensino da matemática às finalidades da escola moderna. (CARVALHO *apud* CALDATTO e PAVANELLO, 2015, p. 112-113).

Entre outras recomendações estão algumas ideias que já haviam sido adotadas em alguns países como as práticas laboratoriais – defendidas por John Perry; a introdução de elementos modernos da Matemática como as noções de função, acompanhadas da visualização gráfica, e também do cálculo diferencial e integral ambos associados à geometria.

Além dessas recomendações também foram sugeridas, com respeito à geometria, a união da geometria, álgebra, aritmética e trigonometria numa única disciplina e a introdução de sistemas de coordenadas e de elementos da geometria analítica.

Vale a pena ressaltar que o objetivo inicial que levou à criação de uma Comissão Internacional para cuidar de questões relativas à Educação Matemática não era necessariamente de orientar os processos de mudança vivenciados em cada país, mas sim gerar uma ação coordenada e organizada para que os países pudessem estar cientes das novas tendências para o ensino de Matemática que vinham se formando em todo mundo.

Entre as recomendações surgiu também uma espécie de protesto da parte dos professores de Matemática quanto à abordagem dada à geometria no ensino secundário. Acontece que o ensino de geometria era baseado na coleção *Os Elementos* e a didática, considerada enrijecida, apresentada por Euclides dificultava o aprendizado dos conceitos geométricos o que culminou em um movimento intitulado *Abaixo a Euclides*.

Enquanto a didática de Euclides proporcionava um ensino de geometria mais voltado para o pensamento lógico-dedutivo, cheio de demonstrações e postulados, aqueles que se opunham a esta abordagem defendiam um ensino mais intuitivo e voltado para a utilidade que os conhecimentos geométricos proporcionam.

O Brasil chegou a participar da Comissão Internacional como um país convidado, seu representante foi o professor Raja Gabaglia do Colégio Pedro II. Infelizmente Gabaglia não trouxe para o Brasil as ideias modernas que foram apresentadas pela Comissão e apesar da promessa de entregar um relatório sobre o ensino de Matemática no Brasil também não chegou a fazê-lo.

2.2.2 As reformas educacionais nacionais e as mudanças curriculares para o ensino de geometria

O século XX foi marcado por diversos acontecimentos para o ensino brasileiro de Matemática. A situação para o Brasil também não era das mais favoráveis, além de ter que lidar com questões como a necessidade de uma educação que atendesse as demandas do mercado em função do desenvolvimento industrial, tal qual como aconteceu em outros países, o Brasil sofria também com a falta de professores licenciados para ministrar aulas de Matemática.

Segundo D’Ambrósio (1999) *apud* Caldato e Pavanello (2015) os primeiros matemáticos na verdade eram estudantes de Engenharia, para eles a Matemática servia como um reforço para sua profissão além de lhes garantir a oportunidade de serem professores uma vez que “quem quisesse lecionar Matemática podia fazê-lo sendo Engenheiro”. D’Ambrósio (1999, p. 19) *apud* Caldato e Pavanello (2015, p. 115) ainda afirma que “a exclusividade do Licenciado para ser professor de ginásio e colegial só se efetivou em 1950, após uma prolongada greve envolvendo todas as faculdades de Filosofia, Ciências e Letras do país”.

Finalmente com a criação da Universidade de São Paulo e da Universidade do Distrito Federal – esta última no Rio de Janeiro – em 1934 e 1935 respectivamente, foram criados os primeiros cursos de licenciatura em Matemática. Todavia como afirmam Caldato e Pavanello (2015), o número de novos professores ainda não era suficiente para atender a alta demanda da sociedade e, portanto, a falta de profissionais capacitados a lecionar Matemática seguia como sendo um grave problema na educação brasileira.

Assim como em outros países o Brasil também necessitava de mudanças no ensino de Matemática e em particular no ensino de geometria. As primeiras mudanças vieram através de

reformas estruturais que foram implantadas pelo Governo e envolviam todo sistema educacional.

A Reforma Constant, ainda no final do século XIX, foi promulgada por Benjamin Constant através do Decreto nº 981 no ano de 1890. Apesar de seguir orientando o sistema educacional durante o início do século XX, a Reforma Constant foi criticada por trazer um caráter enciclopedista, uma vez que

[...] o ideal de formação enciclopédica, na forma em que o concebia Benjamim Constant, nem sequer poderia ser seriamente ensaiado. Seu intelectualismo e sua grandiosidade excediam inteiramente a capacidade de aprendizagem de adolescentes. Assim, o plano de estudos proposto por Benjamim Constant, além de contrariar a concepção preparatória do ensino secundário, ainda dominante na opinião pública, era intrinsecamente inexecutável. (SILVA, 1969, p. 222 *apud* MORALES et al, 2003, p. 80)

A Reforma Constant transformava o ensino secundário integral no *Ginásio Nacional* para o qual instituía sete anos de duração e tinha as seguintes disciplinas em sua grade curricular: Português, Latim, Grego, Francês, Inglês, Alemão, Matemática, Astronomia, Física, Química, História natural, Biologia, Sociologia e moral, Geografia, História universal, História do Brasil, Literatura nacional, Desenho, Ginástica, Evoluções militares e esgrima e Música.

Segundo o Decreto nº 981/80 que instituía a Reforma, a geometria fazia parte da grade curricular *principal* no segundo ano (geometria preliminar e geometria espacial) e terceiro ano (geometria geral e seu complemento algébrico), estando presente apenas como conteúdo de revisão do quarto ao sétimo ano. No primeiro ano a geometria não era ensinada.

Após ser efetivado como professor de Matemática do Colégio Pedro II, Euclides Roxo inspirado no Movimento Internacional pela Educação Matemática apresentou, em 1927, mudanças curriculares importantes, em sua unidade educacional, como a unificação das disciplinas de álgebra, aritmética e geometria numa única chamada Matemática. A proposta de Roxo foi aprovada e em 1929 o novo programa da disciplina de Matemática se tornava oficial.

Em 1931 o ministro da Educação, o primeiro a assumir a pasta, Francisco Campos instituiu por meio do Decreto nº 19 890 uma nova reforma para o sistema educacional, consolidada apenas em 1932 por meio do Decreto nº 21 241, que ficou conhecida como a Reforma Campos que adotou para o ensino de Matemática o programa do Colégio Pedro II.

A reforma realizada por Francisco Campos “fixou a duração de sete anos para o ensino secundário, cinco dos quais constituíam o ciclo fundamental e os dois últimos o complementar; estes destinados a preparação para cursos superiores, tendo três subdivisões, de acordo com a

futura área profissional do aluno” (CARVALHO, 2004, p. 119-120). Ainda segundo Carvalho (2004), a Reforma Campos mantém o caráter enciclopedista observado na Reforma Constant.

Ao falar sobre as sugestões presentes na Reforma relacionadas ao ensino de geometria, Miorim (1998) destaca que: na primeira série são estudadas áreas e volumes das principais formas geométrica; na segunda tem-se o estudo de ângulos, paralelas e perpendiculares, triângulos, quadriláteros, figuras semelhantes, medida de distância e primeiras noções de trigonometria do triângulo retângulo; na terceira série estuda-se o conjunto de proposições fundamentais, noções sobre deslocamentos elementares no plano, translação e rotação de figuras, estudos específicos sobre figuras, relações métricas e homotetia. Para Miorim (1998) era claro o rompimento com a geometria dedutiva euclidiana vigente, representando mudanças radicais no tratamento dado à geometria.

Segundo Miorim (1998) a partir da Reforma Campos o objetivo do ensino de Matemática deixou de ser simplesmente o *desenvolvimento do raciocínio*, que tinha como base a lógica dedutiva, mas se preocupava também com o desenvolvimento de outras faculdades ligadas à utilidade e às aplicações da Matemática, fazendo uso primeiro da intuição para só então ir introduzindo o raciocínio lógico e priorizando a descoberta ao invés da memorização.

Na parte relativa à Geometria, percebe-se uma clara preocupação em introduzir os raciocínios lógicos apenas após um trabalho inicial que familiarize o aluno com as noções básicas presentes nas figuras geométricas, quer em sua posição fixa, quer através de seus movimentos. Com respeito a este último aspecto, enfatizava-se a importância de serem examinadas as noções de simetria axial e central, de rotação e de translação. (MIORIM, 1998, p. 97)

Apesar de tentar trazer elementos inovadores em sua proposta, Roxo foi duramente criticado. As críticas vieram principalmente de uma parcela tida como mais tradicional e que teria dificuldade em adotar as modificações no currículo do ensino de Matemática. Como afirmam Caldatto e Pavanello (2015):

Os professores, acostumados ao modelo tradicional do ensino da matemática, não conseguiam trabalhar a partir desta nova abordagem. E com a ausência de cursos de formação que oferecessem subsídios para essa alteração curricular, o livro didático passou a ser encarado como a principal fonte de disseminação da reforma. Mas nem mesmo essa ação fez com que a proposta se efetivasse. (CALDATTO e PAVANELLO, 2015, p. 116)

Diante das dificuldades enfrentadas na tentativa de atender as propostas modernizadoras e devido ainda não haver livros didáticos que estivessem de acordo com o novo modelo de

ensino para a Matemática, os professores passaram a coletar fragmentos dos livros anteriores à Reforma para utilizar em suas aulas, porém este ato representou na visão de Miorim (1998) uma descaracterização da proposta, uma vez que trazia novamente para a sala de aula elementos de uma metodologia que tentava-se extinguir.

Podemos perceber a insatisfação por parte desses professores nas palavras do padre Arlindo Vieira ao criticar o professor Euclides Roxo, de acordo com Carvalho (2004), em uma carta direcionada ao ministro Gustavo Capanema, sucessor de Francisco Campos, em que diz:

O melhor e mais decisivo argumento contra os pontos de vista do ilustre professor é o efeito desastroso dos programas de matemática de 1931, que ele elaborou e procura defender. Um inquérito entre os professores mostraria que mais de 90% condenam esse amálgama inassimilável. (CARVALHO, 2004, p. 121)

Como podemos notar acontecia no Brasil algo semelhante ao que ocorreu na França quando o Governo tentou introduzir reformas curriculares sem um planejamento adequado. Apesar dos esforços de Euclides Roxo em tentar trazer mudanças positivas para o ensino de Matemática, estas mudanças se tornavam difíceis de serem alcançadas sem o devido diálogo com os próprios professores e cursos de capacitação que os habilitassem a tal.

A nova reforma veio em 1942 e foi realizada por Gustavo Capanema e também contou com a ajuda de Euclides Roxo que, apesar de forte rejeição por parte de alguns professores, tentou preservar muitas das mudanças que haviam sido implementadas na reforma anterior. Na Reforma Capanema, segundo Carvalho (2004), foi mantido o caráter enciclopedista do ensino secundário, que passou a ser dividido em quatro anos para o curso ginásial e três anos para o colegial, este com duas modalidades: o clássico e o científico.

Com relação ao currículo de Matemática e a geometria Pavanello (1989) nos diz que:

Os programas de matemática de 1942 apresentam algumas diferenças em relação aos de 1931. Em primeiro lugar, não mais se insiste em que os três assuntos — aritmética, álgebra e geometria — sejam abordados em cada uma das séries do curso ginásial. A geometria é ainda abordada nas quatro séries iniciais, intuitivamente nas duas primeiras e dedutivamente nas duas últimas. A aritmética (prática) é, no entanto, ministrada só nas séries iniciais, enquanto a álgebra é programada para as duas últimas. Progressões, logaritmos e exponenciais e funções circulares, que constavam do programa da 4ª série (programa de 1931) passam a figurar nos cursos clássico e científico. No 3º ano são estudados limites e derivadas. A geometria é bastante priorizada no segundo ciclo, sendo programada para todos os anos, incluindo-se ainda trigonometria no 2º ano e geometria analítica no 3º. (PAVANELLO, 1989, p. 136–137)

Em suma as reformas educacionais buscaram não apenas trazer alterações para o currículo de Matemática no ensino secundário, mas também dar um novo direcionamento pedagógico. Infelizmente devido à forte presença de professores acostumados ao ensino tradicional nem todas as mudanças puderam ser implementadas com total sucesso, cabendo ao tempo e a outras iniciativas darem continuidade ao processo.

2.2.3 O Movimento da Matemática Moderna e as implicações no ensino de geometria

Outro importante acontecimento que influenciou consideravelmente o ensino de Matemática aconteceu por volta das décadas de 50 e 60, que ficou conhecido como o Movimento da Matemática Moderna (MMM).

Tratava-se novamente de um movimento internacional que visava aproximar a Matemática do ensino secundário daquela presente nas universidades. Porém, diferente do Movimento Internacional pela Educação Matemática, a influência do MMM no ensino brasileiro não aconteceu por meio de intervenções governamentais, mas sim de modo mais natural por parte de grupos de pesquisa ligados à Universidade.

Esse movimento surgiu, de um lado, motivado pela Guerra Fria entre Rússia e Estados Unidos e, de outro, como resposta à constatação, após a 2ª Guerra Mundial, de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico e o currículo escolar vigente. A Sociedade Norte Americana de Matemática, por exemplo, optou, em 1958, por direcionar suas pesquisas ao desenvolvimento de um novo currículo escolar de matemática. Surgem então vários grupos de pesquisa envolvendo matemáticos, educadores e psicólogos. (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 6)

No entanto, segundo Pavanello (1989), os principais responsáveis pela disseminação dos ideais do Movimento da Matemática Moderna aqui no Brasil foram os franceses, integrantes do grupo Bourbaki, em consequência de cursos realizados por estes na Universidade de São Paulo nas décadas de 40 e 50. Nicolas Bourbaki foi um pseudônimo utilizado por um grupo de pesquisa formado por professores franceses que tinham por objetivo unificar a Matemática através da *álgebra, ordem e estruturas topológicas* conhecidas como *estruturas-mãe*.

[...] o MMM preconizava uma abordagem dos temas matemáticos a partir do formalismo, da teoria de conjuntos, da axiomatização, das estruturas algébricas e da lógica. Para sua sustentação do ponto de vista educacional, esse movimento buscou suporte na teoria psicológica do desenvolvimento da

aprendizagem da criança de Jean Piaget, pois este afirmava haver uma forte relação entre o desenvolvimento das estruturas psicológicas do indivíduo e a forma de se ensinar matemática proposta pelo MMM. Isto porque, em seus estudos sobre a gênese das estruturas lógicas elementares da criança, Piaget encontrou correspondências com as três grandes estruturas: as algébricas (sistemas de classes), as estruturas de ordem (seriações) e as topológicas (separações) (PIAGET *apud* PAVANELLO, 2015, p. 119).

Sem uma formação adequada que contemplasse as propostas do MMM restava aos professores se basearem exclusivamente pelos livros didáticos, por sua vez escritos por autores adeptos ao Movimento – como é o caso do renomado autor Osvaldo Sangiorgi – e, portanto, atualizados segundo a nova abordagem.

A nova abordagem da geometria sob a ótica das estruturas algébricas e da teoria dos conjuntos tornava mais difícil o seu ensino, uma vez que os professores não haviam sido capacitados para isto, fazendo com que “muitos deixassem de ensinar Geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente a álgebra” (Pavanello, 1988, p. 165).

Quanto à geometria, opta-se, num primeiro momento, por acentuar nesses livros as noções de figura geométrica e de interseção de figuras como conjunto de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem “intuitiva” que se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas. Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas. (PAVANELLO, 1993, p. 13)

Se o ensino da geometria antes já representava um desafio para os professores quanto à sua utilidade e aplicações esta nova abordagem se tornava ainda mais preocupante.

Para finalizar, outro fator que contribuiu para esse abandono da geometria na sala de aula, conforme Pavanello (1988), foi a promulgação da lei nº 5692/71 que dava total liberdade ao professor para elaborar seu próprio programa de ensino.

Com os livros didáticos voltados para o Movimento da Matemática Moderna e sem a formação adequada era natural que muitos professores não se sentissem confortáveis em ensinar a geometria para seus alunos, o que tornava ainda mais frágil o seu ensino.

Com o tempo outras pesquisas visando novas práticas pedagógicas para o ensino de Matemática foram surgindo e conseqüentemente novas metodologias e abordagens para a sala de aula foram ganhando destaque, sendo conhecidas hoje como as tendências para a Educação Matemática.

No próximo capítulo falaremos a respeito da Resolução de Problemas, uma dessas tendências, que tem sido cada vez mais reconhecida tanto pelo meio acadêmico quanto por aqueles que atuam diretamente na sala de aula.

3 O ENSINO DE MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O principal objetivo deste capítulo é apresentar a Resolução de Problemas como uma metodologia para o ensino da Matemática na Educação Básica, não esquecendo vez ou outra de citar o ensino de geometria, que é a peça central deste trabalho. Para isso precisamos conhecer os princípios fundamentais da Resolução de Problemas e que benefícios ela pode trazer para o aluno na construção do seu aprendizado.

Pretendemos que, ao final deste capítulo, o leitor esteja convencido de que trabalhar com Resolução de Problemas em sala de aula é essencial para a formação do aluno e que deve ser incentivada desde cedo para o desenvolvimento de habilidades que serão úteis não apenas para o aprendizado da Matemática, mas também para lidar com situações diversas, seja no aprendizado de outras disciplinas ou até mesmo para a vida.

3.1 SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas surgiu como uma metodologia para o ensino da Matemática em meados do século XX e tem como um dos seus principais expoentes o matemático George Polya, que publicou em 1944 um livro intitulado *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, que na versão traduzida ganhou o nome *A arte de resolver problemas*.

Em seu livro Polya procura apresentar como o professor deve agir para com os seus alunos de modo a atingir o objetivo, que é o aprendizado da Matemática por meio da Resolução de Problemas. O livro então se apresenta como uma espécie de manual para o professor, trazendo alguns conceitos fundamentais ligados ao tema além de conter etapas, chamadas de *as quatro fases*, que devem ser seguidas com toda atenção e cuidado para que o aluno possa gradativamente compreender os passos que deve realizar e então ser capaz de resolver qualquer problema que venha a encontrar.

Novas pesquisas têm contribuído para o aprofundamento dos conceitos que envolvem a Resolução de Problemas na tentativa de aprimorar ainda mais as experiências decorrentes de sua aplicação em sala de aula. Aqui no Brasil duas autoras que se destacam por trazer uma visão mais atualizada desta metodologia são a Lourdes Onuchic e a Norma Allevato que atualmente defendem a aplicação de *dez etapas* para a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática.

Porém, antes de prosseguirmos devemos compreender o que de fato é a Resolução de Problemas e como esta pode ser utilizada para o ensino de Matemática, e para isso devemos entender o que de fato é um problema.

Para DANTE (2007, p. 9) um problema “é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la”, já um problema matemático “é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la” (DANTE, 2007, p. 10).

Quanto aos tipos de problemas matemáticos Dante (2007) os classifica como: a) Exercícios de reconhecimento, que buscam fazer o aluno reconhecer conceitos já trabalhados; b) Exercícios de algoritmos, conhecidos pela aplicação direta de algoritmos (como *calcule* ou *efetue*); c) Problemas-padrão (simples e compostos), que consistem na aplicação direta de algoritmos com algum enunciado simples ou um pouco mais elaborado apenas para tornar o problema mais volumoso sem torná-lo proporcionalmente mais complexo; d) Problemas processo ou heurísticos, estes exigem um pouco de atenção e estratégia uma vez que a solução não é obtida a partir de uma aplicação direta de algoritmos além de geralmente despertarem a curiosidade; e) Problemas de aplicação, também conhecidos como situações-problema e buscam explorar situações do dia a dia; f) Problemas de quebra-cabeça, estes buscam trabalhar a Matemática de uma maneira recreativa e geralmente necessitam de um algum truque para serem solucionados.

Segundo Polya (2006) há também os problemas de determinação, que se caracterizam pelo propósito de encontrar um certo objeto – no caso a incógnita do problema – e também os problemas de demonstração, cujo objetivo é mostrar precisamente e de maneira conclusiva que determinada afirmação matemática é verdadeira ou falsa.

A Resolução de Problemas busca fazer o aluno atingir o pensamento matemático, ou seja, utiliza problemas matemáticos como estímulo para o desenvolvimento gradual de habilidades investigativas, úteis ao aprendizado da Matemática, e que visem a independência do raciocínio lógico-matemático por parte do aluno.

Habilidades investigativas são uteis principalmente quando se está diante de problemas de natureza geométrica, em que é necessário observar bem alguma figura e ser capaz de extrair informações importantes para solucionar o problema. Trabalhar, portanto, este tipo de habilidade poderá ajudar a resolver problemas semelhantes no futuro.

O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução. O problema precisa exigir, da parte do aluno, a realização de um trabalho não-repetitivo, não rotineiro, precisa estabelecer conexão entre o que o aluno já sabe e aquilo que ele ainda não sabe, precisa ser um nó entre o que o aluno sabe e aquilo que ele não sabe. (ANDRADE, 2017, p. 364)

Ao tentar resolver um problema o aluno aprende os conteúdos matemáticos e, simultaneamente, desenvolve o raciocínio lógico oportunizando a construção do seu próprio conhecimento. O aluno deixa de ser um sujeito passivo, preocupado apenas em receber o conteúdo trazido pelo professor e passa a ser um sujeito ativo, interagindo diretamente com o problema.

Este tipo de pensamento, que coloca o aluno como protagonista no processo de ensino-aprendizagem e que faz do professor o guia nessa busca pelo conhecimento, é conhecido como socioconstrutivismo, sobre ele Brasil (2006) nos diz que:

As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático. (BRASIL, 2006, p. 81)

Entre os objetivos da Resolução de Problemas Dante (2007) destaca: a) Fazer o aluno pensar produtivamente; b) Desenvolver o raciocínio do aluno; c) Ensinar o aluno a enfrentar situações novas; d) Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática; e) Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras; f) Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas; g) Dar uma boa base matemática às pessoas.

Nas últimas décadas a Resolução de Problemas vem ganhando cada vez mais espaço nas aulas de Matemática, sendo recomendada em 1980 pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM na sigla em inglês) dos EUA em sua publicação intitulada *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s* onde disse que o currículo de Matemática deveria ser organizado em torno da resolução de problemas seguido por diversas orientações quanto ao tema.

Aqui no Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1997 – referentes ao Ensino Fundamental – também traziam recomendações nesse sentido separando um trecho intitulado *O Recurso à Resolução de Problemas* onde tenta explicar, de maneira breve, o que é a Resolução de Problemas e como esta pode ser trabalhada nas aulas de Matemática.

Numa perspectiva de trabalho em que se considere a criança como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da

aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher o(s) problema(s) que possibilita(m) a construção de conceitos/procedimentos e alimentar o processo de resolução, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. (BRASIL, 1997, p. 30-31)

Atualmente a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também orienta que o ensino de Matemática aconteça tendo a Resolução de Problemas como suporte já no Ensino Fundamental.

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. (BRASIL, 2017, p. 266)

Referindo-se aos objetivos que se esperam alcançar quanto à aprendizagem da Matemática no Ensino Médio a BNCC nos diz que:

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2017, p. 529)

Agora que compreendemos melhor do que trata a Resolução de Problemas procuraremos apresentar como esta pode ser trabalhada pelo professor de Matemática em sala de aula.

3.2 A HEURÍSTICA MODERNA NO CONTEXTO DA SALA DE AULA

O método de Resolução de Problemas tem como base a heurística¹ moderna que, nas palavras de POLYA (2006, p. 99), “procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham

¹ Segundo Polya (2006), a heurística era um ramo de estudo relacionado à Lógica, Filosofia ou a Psicologia e que tinha por objetivo a compreensão dos métodos e regras da descoberta e da invenção. O estudo da heurística esteve presente em alguns trabalhos de Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano.

utilidade”. É então através do estímulo promovido por essas operações mentais que o aluno é direcionado a como resolver um problema.

No processo heurístico o professor desempenha um papel importantíssimo, pois fica a seu cargo apresentar à classe a situação-problema que será trabalhada, tomando o cuidado para ele mesmo não resolvê-la. Ele deve tomar a postura de mediador e incentivador, desenvolvendo nos alunos a vontade de encontrar uma solução, a capacidade de refletir, inventar, verificar e fazer conjecturas, modificando-as, quando necessário. (SILVA, 2017, p. 37)

As operações mentais acontecem por meio das indagações e sugestões que são levantadas pelo professor e as respostas oferecidas pelo próprio aluno servem então como luz que vai iluminando o caminho que se deve percorrer até que se chegue à solução correta. Ainda segundo Polya (2006) tais indagações devem prezar pelo bom senso e generalidade, ou seja, devem ser questionamentos possíveis de serem feitos por qualquer um sem necessitar, portanto, de um conhecimento profundo do conteúdo relacionado ao problema.

Os questionamentos realizados durante o processo de resolver problemas formam uma parte crucial desta metodologia, eles cumprem o papel de servirem como um auxílio ao aluno, contudo, não fornecem respostas completas para resolver o problema, não são atalhos que visam chegar mais rápido ao objetivo, mas sim apontamentos que fazem toda diferença no desenvolvimento do raciocínio do aluno.

Ao ser feita uma pergunta como *Qual é a incógnita?* ela fornece ao aluno o ponto de partida para a análise do problema o levando a refletir sobre o enunciado na busca de uma resposta – inclusive fazendo uma releitura, caso ache necessário. Essa leitura do enunciado com objetivos específicos facilita a interpretação do problema, garantindo uma melhor apropriação da informação e, sutilmente, induz a este o direcionamento correto para a solução.

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (POLYA, 2006, p. 1)

É natural que, se tratando de problemas geométricos por exemplo, o aluno encontre dificuldade em observar alguma propriedade presente na figura que possa ser a chave para resolver determinado problema, sendo necessário que faça várias análises até que se perceba algum detalhe importante. Pode ser a medida de um ângulo que não tenha sido informada, mas

que pode ser facilmente encontrada apenas observando as somas dos ângulos internos de uma figura ou ainda a medida de um segmento que pode ser encontrada fazendo uma simples comparação com outro segmento conhecido. Mesmo quando a solução é relativamente fácil para o professor, ela pode não ser para o aluno, que por sua vez deve ser incentivado a descobrir a solução por conta própria.

O trabalho independente fornece a autoconfiança, tão necessária ao ser humano. Essa autoconfiança ajuda o aluno a enfrentar o medo de errar e, à medida que se arrisca na Resolução de Problemas, maiores são as chances de obter sucesso, dificilmente alguém aprenderá a resolver problemas se este não se colocar à disposição para enfrentá-los por si só.

Até mesmo os erros se tornam possibilidades de aprendizagem, uma vez que o aluno ao tomar conhecimento do porquê errou durante o desenvolvimento de sua solução, tem a chance, por intermédio do professor, de realizar as devidas correções ele mesmo. Todavia todo cuidado deve ser tomado pelo professor para que não haja desestímulo por parte aluno e a aprendizagem seja comprometida, o erro deve ser entendido como um processo natural a todo aquele que se arrisca a tentar.

Os erros construtivos têm por característica a perspectiva lógico-matemática. Ou seja, existe uma lógica nas hipóteses dos alunos frente à resolução de um problema novo qualquer (não necessariamente de matemática) que difere da lógica dos adultos. Mesmo que esta ideia, sob o ponto de vista do adulto, seja errada, este é um erro construtivo. (ABRAHÃO, 2007, p. 192)

A respeito das indagações ou sugestões que devem surgir durante o processo de resolução, seguem alguns exemplos observados em Polya (2006): *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Adote uma notação adequada. Conhece um problema correlato?*

As respostas para as perguntas acima certamente irão auxiliar o aluno a compreender melhor o problema sem que o professor necessite dar a resposta.

3.3 A RELAÇÃO ENTRE PROFESSOR E ALUNO DURANTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ao refletirmos sobre a relação entre aluno e professor na sala de aula é comum pensarmos numa relação de transmissão e recepção, ou seja, o professor assume o papel de transmissor do conteúdo em questão enquanto o aluno assume apenas o papel de receptor às vezes questionando quando há alguma dúvida. Na Resolução de Problemas essa relação se

altera um pouco, cabendo ao aluno o papel de agente de sua própria aprendizagem e o professor como um facilitador desse processo, ou seja, “de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático” (ALLEVATO e ONUCHIC, 2019, n.p).

O primeiro passo para o professor que adota a Resolução de Problemas em sala de aula começa, na verdade, com a escolha do problema. O professor deve estar ciente que um bom problema deve atender certas características que, na visão de Dante (2007), são: a) ser desafiador para o aluno; b) ser real para o aluno; c) ser interessante para o aluno; d) ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido; e) não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas; f) ter um nível adequado de dificuldade.

Um problema difícil demais poderá fazer com que o aluno desista de tentar resolvê-lo, por outro lado um problema fácil demais se torna desinteressante e pode contribuir pouco para o aprendizado do aluno. O desafio proporciona ao sujeito a sensação de possibilidade de alcance do objetivo, nesse caso, de resolver o problema, ao mesmo tempo que são esperadas dificuldades no processo. Ao vencer um desafio o sentimento de vitória é recompensador e serve de estímulo para enfrentar outros desafios.

Outro ponto que torna um problema bom para ser apresentado em sala de aula é o quanto ele é capaz provocar o sentimento de curiosidade no aluno. A curiosidade desperta o interesse, que por sua vez contribui para que uma maior atenção seja dada ao problema, ou seja, apresentar um problema que instigue a curiosidade do aluno certamente o fará se dedicar ainda mais na tentativa de obter uma solução.

Problemas geométricos que adaptam situações da vida real, como aplicar a semelhança de triângulos ou as relações métricas do triângulo retângulo para calcular a altura de um prédio, visando destacar a utilidade de determinado conhecimento matemático podem ser bons exemplos de problemas que despertam a curiosidade e interesse do aluno.

O processo de ensino de matemática, através da resolução de problemas, tem o objetivo de tirar o aluno da sua zona de conforto – em aulas que predominam a resolução de exercícios rotineiros, onde o mesmo está acostumado a seguir uma regra preestabelecida, sem que culmine na habilidade de pensar de forma crítica e reflexiva – e situá-lo em um ambiente que promova o desenvolvimento do raciocínio e o pensar criticamente. (SILVA, 2017, p. 22)

Mas a escolha do problema não é o único fator importante nessa metodologia, a maneira como o professor age em sala de aula é fundamental para que haja um bom aprendizado. Cai e Lester (2012) dizem que:

Escolher o problema ou tarefa é apenas uma parte do ensino com resolução de problemas. Há evidências consideráveis de que, mesmo quando os professores têm bons problemas, esses podem não ser implementados como pretendido. As reais oportunidades dos alunos de aprenderem dependem não só dos tipos de tarefas matemáticas que os professores colocam, mas também dos tipos de discurso em sala de aula que ocorrem durante a resolução de problemas, tanto entre professor e alunos como entre alunos. (CAI e LESTER, 2012, p. 153)

A Resolução de Problemas se torna também para o aluno uma oportunidade para que seja desenvolvida sua criatividade. O aprendizado da Matemática apenas por meios mecânicos, ou seja, a aplicação direta de conceitos já apresentados pode impossibilitar ao aluno o desenvolvimento pleno de suas habilidades criativas para a resolução, visto que a solução já é algo previsível e nada de novo há para ser mostrado. Lidar com situações-problema que demandam mais do que processos mecânicos, é essencial para uma formação que preze pelo autodidatismo e autonomia do sujeito.

O desenvolvimento da criatividade, da autonomia e de habilidades de pensamento crítico e de trabalho em grupo deve ser promovido. O professor, agora como mediador dos processos de ensino, deve disponibilizar uma diversidade de recursos (materiais e processuais) que respeitem as diferentes condições e estilos de aprendizagem de seus alunos. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2019, n.p)

Contudo, caso o aluno apresente dificuldades no processo e descrença em sua própria capacidade – não havendo muito sucesso em sua tentativa de chegar a uma solução – o professor deve auxiliar discretamente para que possa haver uma sensação de trabalho independente por parte do discente, o ajudando a recuperar sua autoconfiança.

É importante que seja criada na sala de aula uma cultura de resolução de problemas para que os alunos venham a reconhecer de maneira natural que resolver problemas é uma parte essencial da Matemática e possam inibir o pensamento de que esta deveria ser ensinada apenas através de questões do tipo *calcule*, *efetue* ou *resolva*. A interpretação de um problema faz parte da solução, porém diante das possíveis dificuldades e frustrações encontradas pelo professor em sala de aula ao adotar essa metodologia, Cai e Lester (2012) afirmam que:

Para ajudarem os alunos a se tornarem eficientes solucionadores de problemas, os professores devem aceitar que as habilidades dos alunos em resolver problemas frequentemente se desenvolvem lentamente, exigindo assim, uma atenção assistida, em longo prazo, para tornar a resolução de problemas uma parte integrante do programa de matemática. Além disso, os professores devem desenvolver uma cultura de resolução de problemas em

sala de aula para fazer da resolução de problemas uma parte regular e consistente de sua prática de sala de aula. (CAI e LESTER, 2012, p.156)

Tendo em vista que aprender a resolver problemas se trata de um processo lento e contínuo e, diante dos desafios que venham a aparecer durante a prática docente, torna-se válido também para o professor ensinar a resolver problemas por meio da imitação de sua atuação em sala de aula que, aliada à prática constante por parte do aluno imerso em um ambiente de resolução de problemas, certamente contribuirá para o processo de ensino-aprendizagem.

O professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e praticar. Quando o professor tenciona desenvolver nos seus alunos as operações mentais correspondentes às indagações e sugestões da nossa lista, ele as apresenta tantas vezes quanto o puder fazer com naturalidade. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a esta orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer. (POLYA, 2006, p. 4)

A imitação pode vir a ser bastante útil principalmente ao trabalhar com problemas que demandam um pensamento lógico-dedutivo. Por exemplo, problemas geométricos que trabalham com congruência ou semelhança de triângulos podem necessitar de uma argumentação consistente para determinar se algum comprimento de fato é congruente ou proporcional a outro.

Espera-se, portanto, que a relação entre aluno e professor durante o processo de resolver um problema possa ser explorada da melhor maneira possível para que se tenha uma boa experiência em sala de aula.

3.4. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS PERSPECTIVAS DE POLYA E ALLEVATO E ONUCHIC

Iremos tratar agora do conhecido roteiro que traduz o entendimento de Polya (2006) acerca da aplicação da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. As quatro fases da Resolução de Problemas na visão de Polya (2006) se resumem em: a) Compreensão do problema; b) Elaboração de um plano; c) Execução do plano; d) Retrospecto.

Todavia para tornar o trabalho mais atual traremos algumas contribuições da Allevato e Onuchic (2019) fazendo um paralelo com as dez etapas da Resolução de Problemas que representam a perspectiva das autoras sobre esta abordagem e que por sua vez são: a) Proposição do problema; b) Leitura individual; c) Leitura em conjunto; d) Resolução do problema; e) Observar e incentivar; f) Registro das resoluções na lousa; g) Plenária; h) Busca do consenso; i) Formalização do conteúdo; j) Proposição e resolução de novos problemas.

Portanto, trabalharemos tendo como o foco as fases do Polya (2006) enquanto fazemos de maneira breve algumas ligações com as etapas da Allevato e Onuchic (2019).

Para começar é interessante observar que Polya (2006) e Allevato e Onuchic (2019) divergem quanto ao início do processo de resolver um problema. Enquanto Polya (2006) vai direto para o problema, Allevato e Onuchic (2019) comentam primeiro a respeito da escolha do problema.

Neste ponto reforçamos o que já foi discutido anteriormente a respeito do que um bom problema deve ter e nos atentamos ao fato de que este problema possa ser não só uma escolha do professor, mas também dos próprios alunos. Aceitar um problema trazido pelo aluno pode se configurar como uma ótima oportunidade para trabalhar em cima de um interesse que foi despertado.

Agora que se tem um problema é necessário compreendê-lo.

Acontecerá o pior se o estudante atirar-se a fazer cálculos e a traçar figuras sem ter compreendido o problema. É geralmente inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano. Muitos enganos podem ser evitados se, na execução do seu plano, o estudo verificar cada passo. Muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa. (POLYA, 2006, p. 5)

Compreender bem qualquer situação antes de agir é crucial para a tomada de decisões, isso não garante que a melhor estratégia será formulada, contudo busca minimizar ao máximo os esforços em vão.

Tentar resolver um problema sem que antes o tenha compreendido adequadamente poderá resultar em ações desnecessárias, ou até mesmo equivocadas, fazendo com que não se chegue à solução correta e podendo levar o aluno à frustração. Caso isso aconteça, deve-se retornar à leitura cuidadosa do problema para que seja feita uma análise mais precisa.

Aqui além de termos a leitura individual que também compreende uma das etapas da Allevato e Onuchic (2019) também podemos considerar a leitura em conjunto. Ao dividir os alunos em equipes e propor uma leitura em conjunto o professor dá a eles a oportunidade de

trabalharem juntos esperando que se tornem um pouco mais independentes. “Nessa fase, exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender” (ALLEVATO e ONUCHIC, 2019, n.p).

Segundo Polya (2006) a fase da compreensão se divide ainda em duas subfases: familiarização e aperfeiçoamento da compreensão. A familiarização está relacionada à leitura do enunciado buscando visualizar o problema como um todo para que possa haver tanta clareza e nitidez quanto possível.

O aperfeiçoamento da compreensão se dá pela releitura do enunciado na qual se procura aprimorar ainda mais a clareza e nitidez acerca do problema, fazendo inclusive observações acerca dos elementos principais que compõem o problema (incógnita, os dados e a condicionante) examinando-os e relacionando-os através de combinações.

O estudante deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá traçar uma figura e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, deverá adotar uma notação adequada, pois, dedicando alguma atenção à escolha dos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos. (POLYA, 2006, p. 5)

Exemplos de questionamentos que podem ser feitos nessa fase visando estimular as operações mentais nos alunos: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* No tocante ao nosso objeto, podemos perguntar: *Qual é a área? Qual é o perímetro?*

A segunda fase da Resolução de Problemas, conforme Polya (2006), é a elaboração de um plano que é seguida pela sua execução (terceira fase). Estas duas fases descritas por Polya (2006) se traduzem numa única etapa de acordo com Allevato e Onuchic (2019) e é descrita apenas como resolução do problema. Novamente Allevato e Onuchic (2019) ressaltam o trabalho em equipe dos próprios alunos a fim de alcançar a solução do problema.

A elaboração de um plano consiste no planejamento de uma estratégia que seja eficiente para resolver um determinado problema. A necessidade de elaborar um bom plano se traduz de maneira semelhante à necessidade de se compreender bem um problema. Agir sem um planejamento adequado pode novamente resultar em um esforço desnecessário levando a lugar nenhum. Por outro lado, agir com base numa ideia demonstra uma melhor apropriação dos

elementos que fazem parte do problema, só devemos formular uma estratégia quando compreendemos como tais elementos se relacionam entre si.

O desafio nessa fase se concentra em como chegar a esse determinado plano. Ele pode surgir de uma análise cuidadosa do problema, entretanto, ele também pode aparecer após várias tentativas de resolução do problema sem um planejamento – o que pode acontecer se o aluno realmente não tiver nenhuma noção de como proceder. Outra maneira de chegar numa estratégia é por meio de alguma sugestão cuidadosa do professor ou ainda através da resposta à seguinte indagação: *Conhece um problema correlato?*

Problemas correlatos tendem a ser ótimas sugestões para resolver um problema, isto é, eles apresentam situações bem semelhantes cujas estratégias podem até mesmo ser análogas ou ainda passíveis de pequenas adaptações. Conhecer um problema correlato é quase como já ter o problema resolvido além de que utilizar um plano adaptado de um problema semelhante já conhecido valoriza o conhecimento prévio do aluno, reforçando aquilo que ele já sabe. Outra sugestão seria criar um problema semelhante, porém mais simples para que possa ser resolvido e adaptar a estratégia para o problema pretendido.

Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma “ideia brilhante”. A melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa. As indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia. (POLYA, 2006, p. 7)

Polya (2006) diz ainda que o professor deve se colocar no lugar do aluno, refletindo acerca das possíveis dificuldades que venham a surgir na tentativa de se elaborar um plano e ainda utilizar a sua própria experiência em resolver problemas para auxiliá-lo. Definir uma estratégia compreende uma das mais importantes e difíceis fases desta metodologia e necessita de uma real intenção por parte do aluno em tentar resolver o problema proposto.

A atitude do professor em auxiliar o aluno caracteriza uma das etapas da Resolução de Problemas descritas por Allevato e Onuchic (2019) e que a chamaram de: observar e incentivar.

O professor age, enquanto isso, observando o trabalho dos alunos, incentivando-os a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, e incentivando a troca de ideias. Auxilia nas dificuldades sem,

contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2019, n.p)

Com um bom entendimento do problema e definido um plano de ação o próximo passo é sua execução. Se a estratégia estiver correta não há muito o que se preocupar, pode até haver alguns pequenos equívocos durante o percurso, como erros de cálculo, mas que podem ser facilmente corrigidos e não implicarão em algo grave.

O professor deve prezar principalmente pelo processo que levou o aluno até a execução. Isto não quer dizer que erros de cálculo não indicam uma necessidade de cuidado, eles podem surgir pela falta de atenção do aluno durante o procedimento, como também podem surgir de alguma deficiência nos processos operacionais, o professor deve estar atento observando se esses erros são comuns para só então definir um diagnóstico e buscar corrigir a falha na aprendizagem.

Se o aluno houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o aluno verifique cada passo. (POLYA, 2006, p. 11)

Ao verificar os passos que o levam à solução, o aluno terá a certeza de que seguiu o seu plano corretamente e terá a confiança de que conseguiu resolver o problema. Conforme Polya (2006) há duas maneiras de se convencer acerca de uma solução, *intuitivamente* ou *formalmente*. Por mais que o aluno tenha certeza de que sua solução está correta, é apenas através de uma análise baseada na Matemática formal que podemos garantir que todo processo está de fato correto.

Um exemplo simples pode ser observado quando erroneamente se diz que: $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$. Sabemos que dependendo do problema devemos considerar que há dois valores possíveis para a incógnita, ou seja, $x = \pm 2$. Porém é comum que esse detalhe passe totalmente despercebido para algum aluno. Se, todavia, o problema discutido for geométrico e o resultado encontrado se referir a uma medida, por exemplo, é necessário explicar que para esta situação considera-se o resultado em módulo, portanto, apesar da resposta final estar correta, o aluno deverá estar ciente do porquê e em quais outras situações isto poderia não ocorrer.

Aqui temos mais algumas etapas apresentadas por Allevato e Onuchic (2019). Após obter uma solução as autoras orientam que sejam feitos os registros da solução de cada grupo

na lousa, independente das soluções estarem certas ou erradas, para que sejam discutidas. Esse momento é interessante para que sejam trabalhadas sempre que possível mais de uma solução ou ainda fazer apontamentos em cima dos erros apresentados, sempre com todo cuidado em não gerar desestímulo, para que se possam aprender com eles.

Diante desse “painel de soluções”, o professor estimula os alunos a compartilhar e justificar suas ideias, defender pontos de vista, comparar e discutir as diferentes soluções, isto é, avaliar suas próprias resoluções de modo a aprimorar a apresentação (escrita) da resolução. Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2019, n.p)

Para complementar a discussão, Allevato e Onuchic (2019) sugerem que o professor formalize os conceitos trabalhados de maneira organizada e estruturada em linguagem matemática apresentando na lousa uma solução formal dando destaque a diferentes técnicas operatórias e até realizando demonstrações caso seja necessário.

De acordo com Polya (2006) mesmo depois dessas três fases e em posse de uma solução ainda há algo a ser feito, o retrospecto. Reavaliar o problema como um todo, começando pela leitura do enunciado até a obtenção de uma solução se configura também como uma oportunidade de aprendizado.

Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. (POLYA, 2006, p. 12)

Outro ponto que deve ser explorado pelo professor sempre que possível é se há maneiras diferentes de se obter a mesma solução. É possível que dois alunos tenham respondido o mesmo problema de maneira diferente, porém estarem igualmente corretos. Aproveitar estas oportunidades agrega mais riqueza ao problema, um problema visto sob diferentes óticas se torna mais interessante, além de gerar ainda mais convicção de que a solução está correta.

Para nos convencermos da presença ou da qualidade de um objeto, desejamos vê-lo e tocá-lo. Assim como preferimos perceber por meio de dois sentidos, preferimos nos convencer por duas demonstrações diferentes: É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É preferível, naturalmente, um

argumento curto e intuitivo do que um outro longo e trabalhoso: É possível percebê-lo num relance? (POLYA, 2006, p. 12)

É comum que assim que se resolve um problema o aluno considere tudo encerrado feche o caderno, ou até mesmo passe para um novo problema, porém refletir acerca dos desafios superados, mesmo diante de tantas dificuldades, pode ser o momento ideal para gerar ânimo e confiança no aluno que muitas vezes demonstra medo ao resolver um problema.

Os estudantes acharão realmente interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, ficarão ansiosos para ver o que mais poderão conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez, fazer tão bem quanto desta. (POLYA, 2006, p. 13)

Refletir acerca do antes e o depois de ter resolvido o problema e as novas habilidades e estratégias aprendidas durante o processo, até mesmo para resolver problemas futuros, fazem do retrospecto um momento importante para que o aluno reconheça o seu próprio crescimento como um solucionador de problemas.

Por fim, após ter sido resolvido e explorado as soluções de determinado problema Allevato e Onuchic (2019) sugerem na última etapa que o professor incentive os próprios alunos a proporem novos problemas baseados no problema anterior.

Eles possibilitam analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2019, n.p)

Finalmente, diante do que foi explorado neste capítulo espera-se que, ao compreender os processos que envolvem a Resolução de Problemas, o professor possa aproveitar ao máximo as dicas e sugestões que acompanham a sequência didática e que serão apresentadas no capítulo seguinte.

4 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÁREAS E PERÍMETROS DE POLÍGONOS

O presente capítulo tem como objetivo discutir brevemente os conceitos que norteiam o entendimento acerca do que é uma sequência didática, comumente chamada de SD, bem como apresentar uma proposta de ensino em forma de sequência didática que visa trabalhar os conteúdos de áreas e perímetros de polígonos, no 6º ano do ensino fundamental, utilizando para isso problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP).

Conforme veremos nossa sequência didática é composta por problemas oriundos da primeira fase do nível 1 da OBMEP, uma vez que contempla a série para a qual nossa proposta foi desenvolvida. Nos propusemos a discutir cada problema na perspectiva das quatro fases de Polya (2006), apresentando ao professor um possível roteiro de aplicação com questionamentos a serem feitos ao aluno que poderão auxiliá-lo na construção de sua solução.

Por fim serão apresentadas ainda as habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular contempladas na sequência didática para que se possa ter conhecimento dos benefícios que deverão ser alcançados durante a aplicação.

4.1 O QUE É UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA?

Segundo Oliveira (2013) a sequência didática surgiu na França no início da década de 80 como uma ferramenta de auxílio para o ensino do idioma francês que era ensinado de modo fragmentado, não havia conexão entre a ortografia, a sintaxe e a gramática.

É um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino-aprendizagem. (OLIVEIRA, 2013, n.p)

Zabala (2014, n.p) complementa ao dizer que uma sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”.

Uma sequência de atividades com um objetivo pré-estabelecido, o de servir como meio didático para a obtenção de determinado conhecimento, pode tanto ser usada para introduzir algum conteúdo como também reforçar algo já trabalhado.

Uma SD é, portanto, um instrumento de auxílio ao professor em suas aulas que busca tornar o processo de ensino-aprendizagem algo mais planejado e organizado. Baseada nas ideias socioconstrutivistas uma SD busca fornecer ao aluno meios que garantam a construção de seu próprio conhecimento enquanto o professor se torna um cooperador nesse processo.

Justamente por estar fundamentada no socioconstrutivismo a aplicação de uma sequência didática foge da abordagem clássica, tida como *tradicional*, se assemelhando à Resolução de Problemas, em que busca dar mais autonomia ao aluno para que este possa, com auxílio de seu professor, dispor das ferramentas que o possibilitam construir sua própria aprendizagem.

O professor fornece, por meio da sequência didática, um ambiente de Resolução de Problemas para que o aluno possa desenvolver habilidades ligadas à investigação e ao pensamento matemático.

Portanto, não iremos nos estender aqui a discutir a relação entre aluno e professor diante desta abordagem, visto que isto já foi feito no capítulo anterior.

4.2 SOBRE A OBMEP

A Olimpíada Brasileiras das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP) é um dos exemplos mais importantes de política pública voltada para Educação Básica em nosso país. Surgiu a partir dos esforços do Instituto de Matemática Pura e Aplicada em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática, sua primeira edição aconteceu em 2005 e seu público-alvo eram os alunos do ensino fundamental anos finais e ensino médio.

A princípio a Olimpíada era dividida em três níveis: nível 1 para alunos do 6º e 7º anos; nível 2 para alunos do 8º e 9º anos; nível 3 para alunos do ensino médio. Porém em 2018 a OBMEP passou a se estender aos alunos do 4º e 5º anos do ensino fundamental por meio do nível A.

A Olimpíada é marcada pela Resolução de Problemas e acontece em duas fases, na fase 1 os alunos respondem uma prova com 20 problemas em caráter objetivo, não é necessário explicar como chegou na solução, uma vez que apenas o gabarito é corrigido. Já na fase 2 os alunos – apenas aqueles que aprovados na fase 1 – respondem 6 problemas em caráter discursivo, ou seja, não há alternativas e deve-se descrever a solução.

Para os alunos que conseguem se destacar na segunda fase há uma premiação com medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas. De acordo com dados disponibilizados pela OBMEP, na edição de 2019 foram 579 medalhas de ouro, 1746 medalhas de prata, 5183

medalhas de bronze e 48163 menções honrosas, totalizando 55671 premiações – o que representou 0,31% do total de inscritos na primeira fase daquele ano.

A OBMEP conta ainda com diversos projetos que visam o incentivo à preparação para a prova como o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI), Programa OBMEP na Escola, Bolsa Instituto Tim – OBMEP. Por fim há também o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) que é ofertado para alunos universitários que se destacaram em edições da OBMEP e que desejem cursar disciplinas de mestrado e doutorado simultaneamente com a graduação.

Como material de apoio a OBMEP disponibiliza em seu site todas as provas de edições anteriores com soluções escritas e em vídeo, além de fornecer também para cada edição um banco de questões com problemas à nível da Olimpíada e suas respectivas soluções comentadas. Há também o Portal da OBMEP² e o Portal Clubes de Matemática³ com uma extensa quantidade de material disponibilizado gratuitamente.

De acordo com o regulamento de 2020 são os objetivos da Olimpíada:

- Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
- Promover a difusão da cultura matemática.
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo com a sua valorização profissional.
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Uma das maiores qualidades da OBMEP é a sua abrangência, estando presente em quase todo território nacional. Segundo dados disponibilizados no site da Olimpíada 99,84% dos municípios tiveram escolas inscritas para participar da primeira fase da décima sexta edição, que aconteceria em 2020, porém foi adiada devido à pandemia do Sars-CoV-2.

² Disponível em: <https://portaldaoemep.impa.br/index.php>

³ Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/>

Tal abrangência faz com que a OBMEP não passe despercebida nem mesmo por aqueles que não tem afinidade, inicialmente ou necessariamente, com a Matemática. A grande quantidade de material disponibilizado gratuitamente se torna um instrumento de grande potencial nas mãos dos professores que optarem por utilizá-las em suas aulas e este trabalho se coloca, portanto, como um incentivador desta prática, visto que se caracteriza como fazer uso da Resolução de Problemas. É por este motivo que os problemas escolhidos para compor nossa sequência didática são oriundos da OBMEP.

4.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção iremos discutir acerca de cada elemento da sequência didática, as habilidades trabalhadas de acordo com a BNCC, bem como o roteiro para a aplicação das fases da Resolução de Problemas em cada problema, segundo Polya (2006). Para compor o nosso roteiro foram escolhidas as quatro fases do Polya (2006) tendo em vista sua visão mais geral acerca do tema e que se torna mais fácil de ser aplicado, contudo isto não impede que o professor também faça sua própria adaptação para contemplar as dez etapas da Allevato e Onuchic (2019).

A estrutura da sequência, que irá definir a ordem em que iremos apresentar os elementos, será: problema gerador (perímetro); formalização do conceito de perímetro; novos problemas de perímetro; problema gerador (área); formalização do conceito de área; novos problemas de área. Estima-se que a aplicação da SD tenha uma duração de 02 (duas) horas-aula, podendo ultrapassar devido às discussões decorrentes de cada problema.

Sobre o critério utilizado para a escolha dos problemas, procuramos utilizar problemas de áreas e perímetros de polígonos de edições mais recentes da OBMEP. Entretanto para os problemas geradores escolhemos aqueles que permitissem uma abordagem tranquila para que o professor pudesse introduzir os conceitos geométricos além de possibilitar associar tais conceitos a situações cotidianas.

Vale ressaltar que optamos por não apresentar uma avaliação diagnóstica para identificar os conhecimentos prévios tendo em vista que a nossa SD é direcionada aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e que por isso, naturalmente, ainda não tiveram contato os conceitos geométricos que a nossa sequência se propõe justamente a introduzir.

Com respeito a uma avaliação posterior que objetiva diagnosticar os conhecimentos aprendidos pelos alunos nos valem das autoras Allevato e Onuchic (2019) ao defenderem uma avaliação contínua durante a Resolução de Problemas:

A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema. Nesse sentido é que a avaliação se realiza integrada ao ensino e à aprendizagem, pois nessa metodologia o professor tem oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo, bem como os próprios alunos se percebem e se ajudam, sendo eliminado o caráter sancionador das avaliações somativas (ditas tradicionais). (ALLEVATO e ONUCHIC, 2019, n.p)

Portanto, em cada problema o professor deve estar atento aos progressos vivenciados por seus alunos.

Lembrando que a SD não se caracteriza como a única metodologia que trabalhará os conteúdos matemáticos propostos, sendo apenas uma abordagem diferenciada e cabendo ao professor realizar seus próprios complementos em suas aulas.

4.3.1 Problema gerador

ALLEVATO e ONUCHIC (2019, n.p) apresentam o conceito de problema gerador como um problema inicial que “visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula”.

Nesta sequência buscamos, antes de apresentar formalmente qualquer conceito, apresentar esses problemas motivadores para atrair o interesse e a curiosidade a respeito do estudo de perímetro e área de polígonos. A seguir discutiremos os dois problemas geradores, começando por aquele que procura introduzir o entendimento de perímetro.

4.3.1.1 Problema gerador: perímetro

(OBMEP – 2005) Daniela quer cercar o terreno representado pela figura. Nessa figura dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?

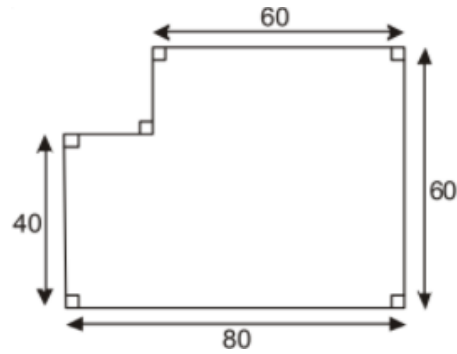


Figura 1: Figura referente ao problema gerador para o conteúdo de perímetro. Fonte: IMPA, 2005.

- (A) 140
- (B) 280
- (C) 320
- (D) 1 800
- (E) 4 800

Solução:

Destacamos os comprimentos desconhecidos e traçamos segmentos perpendiculares conforme indicado na figura abaixo.

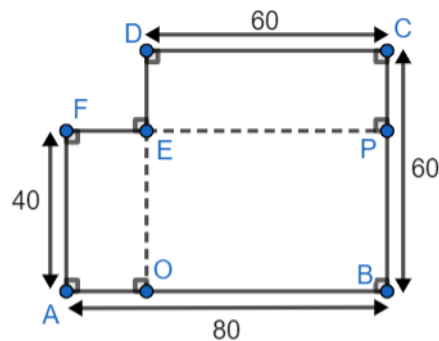


Figura 2: Primeiro passo para a solução do problema gerador para o conteúdo de perímetro. Fonte: Autoria própria.

Note que pelo retângulo OBCD o segmento OB mede 60 metros logo, o segmento AO mede o que falta de 60 para 80, ou seja, AO mede 20 metros. Como AO é congruente a FE pelo retângulo ADEF, então FE também mede 20 metros. Analogamente descobrimos que DE mede 20 metros.

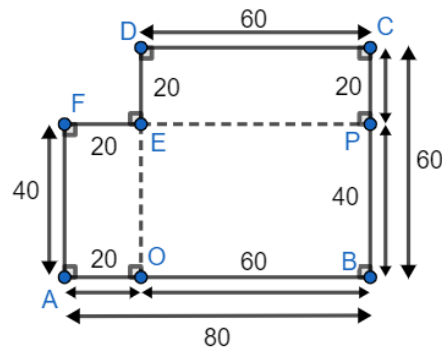


Figura 3: Segundo passo para a solução do problema gerador para o conteúdo de perímetro. Fonte: Autoria própria.

Logo, para sabermos quantos metros de cerca Daniela terá que comprar, basta somar $40 + 80 + 60 + 60 + 20 + 20 = 280$ metros.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o total de metros de cerca que Daniela terá que comprar.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são as medidas em metros que aparecem na figura (40 m, 80 m, 60 m, 60 m).

- *É possível resolver o problema apenas com esses dados?*

Resposta esperada: Não, pois faltam alguns dados para resolver o problema.

Elaboração de um plano:

- *Na figura tem todos os comprimentos que precisamos?*

Resposta esperada: Não tem todos os dados, há dois comprimentos faltando na figura.

- *Destaque onde faltam os comprimentos na figura.*
- *Pense em alguma estratégia para calcular os comprimentos que faltam.*
- *É possível fazer comparações entre os comprimentos?*

Resposta esperada: Sim, é possível fazer comparações entre os comprimentos que estão em lados opostos.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: O plano é calcular as medidas que faltam através das comparações entre os lados opostos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar fazendo comparações entre os lados opostos novamente.

- *É possível comparar os lados opostos da figura? Como isso poderia ser feito?*

Resposta esperada: Sim, podemos comparar traçando segmentos de reta que ligam os lados opostos.

Retrospecto:

- *O que aprendemos nesse problema?*

Resposta esperada: Aprendemos a calcular o comprimento do contorno de uma figura e a fazer comparações entre comprimentos de segmentos e segmentos poligonais.

- *Há outra maneira de resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, poderíamos “completar” prolongando segmentos para formar um retângulo maior (ver figura abaixo) e fazer comparações entre os comprimentos.

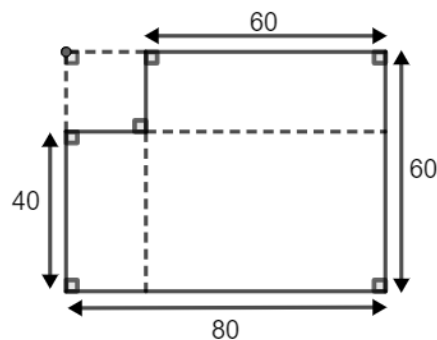


Figura 4: Solução alternativa do problema gerador para o conteúdo de perímetro. Fonte: Autoria própria.

- *É possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos utilizar a mesma estratégia, ou parecida, se o novo problema apresentar uma figura com propriedades semelhantes.

Ainda como parte do retrospecto, para tornar o problema ainda mais próximo da realidade, o professor pode sugerir que o aluno pense na construção de uma cerca e reflita sobre o total de material e o número de voltas necessários.

Após resolver o problema, o professor poderá explicar para os alunos que eles acabaram de calcular o perímetro de uma figura e em seguida partir para o aperfeiçoamento do conceito.

Por fim, ao trabalhar com este problema espera-se que o aluno identifique o que é o perímetro e como ele pode estar presente em seu dia a dia.

4.3.1.2 Problema gerador: área

(OBMEP – 2005) O piso de uma cozinha foi revestido de ladrilhos brancos e pretos, conforme a figura. Cada ladrilho branco custou R\$ 2,00 e cada ladrilho preto custou R\$ 3,00. Quanto foi gasto na compra dos ladrilhos?

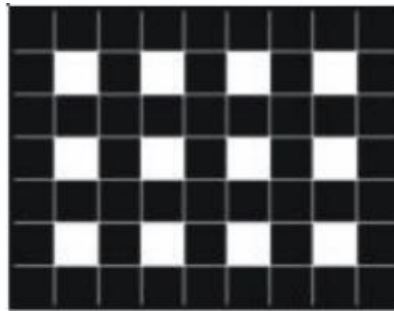


Figura 5: Figura referente ao problema gerador para o conteúdo de área. Fonte: IMPA, 2005.

- (A) R\$ 126,00
- (B) R\$ 144,00
- (C) R\$ 174,00
- (D) R\$ 177,00
- (E) R\$ 189,00

Solução:

Basta calcular o total de ladrilhos brancos e pretos e em seguida multiplicar respectivamente pelo valor unitário de cada um. Há 12 ladrilhos brancos e 37 ladrilhos pretos. Uma observação é que tanto podemos contar os ladrilhos um a um, o que é mais fácil no caso dos brancos, como podemos calcular todos os ladrilhos (brancos e pretos) - multiplicando o total de uma linha pelo total de uma coluna e encontrando assim 49 ladrilhos ao todo – para depois diminuir os 12 ladrilhos brancos do total de ladrilhos, restando apenas os ladrilhos pretos, que são 37. Finalmente, como cada ladrilho branco custa R\$ 2,00, temos que o total gasto com os ladrilhos brancos será R\$ 24,00 e como cada ladrilho preto custa R\$ 3,00, temos que o total gasto com os ladrilhos pretos será R\$ 111,00. Portanto, para sabermos o total gasto resta apenas efetuar a soma $24 + 111 = 135$ reais.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o total que foi gasto na compra dos ladrilhos.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são os preços dos ladrilhos brancos, que custam R\$ 2,00, e dos ladrilhos pretos, que custam R\$ 3,00.

- *É possível resolver o problema apenas com esses dados?*

Resposta esperada: Sim, pois temos todos os dados necessário.

Elaboração de um plano:

- *O enunciado tem todos os dados que precisamos?*

Resposta esperada: Sim, o enunciado e a figura trazem todos os dados que precisamos.

- *Pense em alguma estratégia para calcular o total que será gasto na compra dos ladrilhos.*
- *Como a figura pode nos auxiliar?*

Resposta esperada: A figura nos diz quantos ladrilhos brancos e pretos precisamos comprar.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: Para saber quanto iremos gastar para comprar os ladrilhos brancos basta multiplicar o total de ladrilhos brancos pelo preço de cada ladrilho branco, o mesmo raciocínio vale para os ladrilhos pretos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar observando o total de ladrilhos representados na figura e realizando os mesmos cálculos que anteriormente.

Retrospecto:

- *Existe uma maneira rápida de resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos calcular o total de ladrilhos da parede fazendo uma multiplicação do número de linhas pelo número de colunas e depois diminuir o número de ladrilhos brancos, que são mais fáceis de contar, para encontrar o número de ladrilhos pretos e depois é só fazer o mesmo cálculo para saber o total gasto.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar uma estratégia parecida em problemas que envolvam preenchimento de uma superfície.

Após resolver o problema, é sugerido ao professor pensar na situação em que cada ladrilho custe R\$ 1,00 independentemente da cor, dessa forma o professor poderá aproveitar o momento para introduzir o conceito de área.

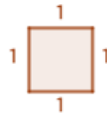
Portanto, com este problema espera-se que o aluno compreenda o que é a área e um pouco da sua utilidade para determinada situação.

4.3.1.3 Aperfeiçoamento dos conceitos de perímetro e área

Neste ponto da sequência busca-se o aperfeiçoamento de conceitos previamente trabalhados nos problemas geradores. O objetivo é expor o conceito da maneira mais clara possível para o aluno, e para isto são apresentados uma definição em linguagem acessível, um exemplo e exercícios de aplicação direta.

PERÍMETRO

Podemos definir o perímetro como sendo o comprimento do contorno de determinada figura. Vejamos o seguinte exemplo:



Para calcular o perímetro desse quadrilátero basta somar as medidas dos seus lados, ou seja, seu **perímetro é 4**.

Calcule o perímetro das figuras a seguir:

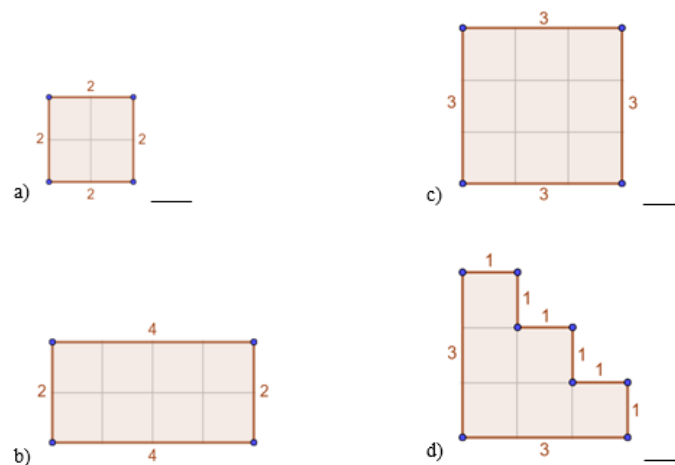


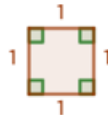
Figura 6: Formalização do conceito de perímetro. Fonte: Autoria própria.

ÁREA

Definimos a área como um número real que determina sendo a porção do plano ocupada por uma figura geométrica plana.

ÁREA UNITÁRIA

Podemos considerar que uma unidade de área é representada pela área que um quadrado de lado 1 ocupa.



Calcule a área das seguintes figuras geométricas:

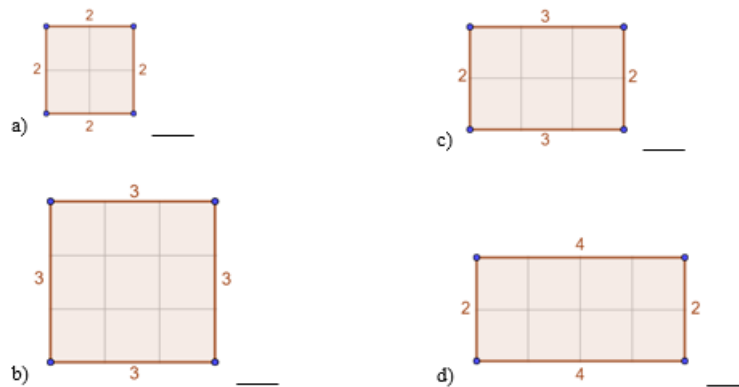


Figura 7: Formalização do conceito de área. Fonte: Autoria própria.

É sugerido ao professor que utilize de situações práticas para tornar a aprendizagem mais significativa. Como vimos no primeiro capítulo, uma abordagem mais prática para o ensino de Matemática, sobretudo para o ensino de geometria, vem sendo recomendado desde os Movimentos Internacionais pela Educação Matemática e tem o objetivo de trazer mais dinamismo para a aula fugindo um pouco da abordagem tradicional.

A sugestão é a utilização do próprio ambiente escolar onde o professor poderá fazer marcações no chão da sala de aula para que os alunos realizem medições e cálculos e descubram o perímetro e a área de cada região formada, por exemplo destacando no chão uma área de 1 m² observando quantos alunos cabem dentro desse espaço para saber quantas pessoas por metro quadrado cabem na sala de aula. Neste momento deixamos a critério do professor que utilize da sua própria criatividade, o importante é que os alunos venham a se sentir inseridos em um contexto de aprendizagem por meio de situações-problema.

Também é interessante que o aluno calcule os perímetros de cada figura para fazer comparações observando que figuras de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes. Vale

destacar que mesmo trabalhando com exercícios e processos mecânicos esperamos que o aluno aprenda a questionar, fazer comparações e observações.

Questionamentos que podem surgir dos alunos ou que devem ser induzidos pelo professor:

- *Figuras poligonais com medidas dos lados diferentes podem ter o mesmo perímetro?*
- *Girar (rotacionar) uma figura muda o comprimento do perímetro?*
- *Vamos comparar a figura c) e a figura d). São iguais ou diferentes? O que podemos dizer sobre os seus perímetros?*
- *Onde podemos encontrar o conceito de perímetro no dia a dia?*

4.3.1.4 Discutindo os problemas da OBMEP

A seguir resolveremos os seis problemas que fazem parte da sequência didática, sendo apresentados para os professores possíveis roteiros para aplicação das quatro fases da Resolução de Problemas, segundo Polya (2006), além de algumas dicas e sugestões.

Problema 01:

(OBMEP – 2017) Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?

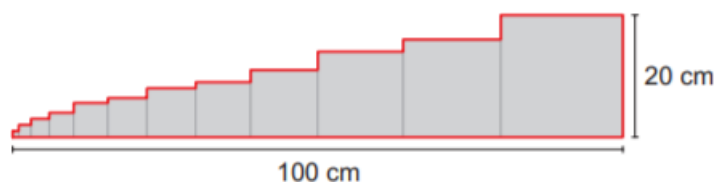


Figura 8: Figura referente ao problema 01. Fonte: IMPA, 2017.

- (A) 220 cm
- (B) 240 cm
- (C) 260 cm
- (D) 300 cm
- (E) 400 cm

Solução:

Para resolver este problema basta analisar que a soma das medidas dos lados de cima de cada quadrado equivale à soma das medidas dos lados de baixo da cada quadrado e que sabemos que é 100 cm. De maneira semelhante se juntarmos a diferença do lado de um quadrado maior pelo lado do quadrado menor que o sucede teremos que esse comprimento será equivalente à medida do lado do quadrado maior que é 20 cm. Portanto a resposta será $100 + 100 + 20 + 20 = 240$ cm, ou seja, alternativa b.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o perímetro da figura, ou seja, o comprimento do contorno em vermelho.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são o comprimento da base da figura, que mede 100 cm, e o comprimento do lado do quadrado maior, que mede 20 cm.

- *É possível resolver o problema apenas com esses dados?*

Resposta esperada: Não, pois não temos o comprimento de todo o contorno identificado na figura.

Elaboração de um plano:

- *Na figura tem todos os comprimentos que precisamos?*

Resposta esperada: Não, precisamos encontrar a medida não informada do comprimento do contorno vermelho.

- *Pense em alguma estratégia para calcular o comprimento que falta.*
- *Conhece algum problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, o problema inicial apresenta uma situação semelhante.

- *Podemos adaptar a solução do problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, podemos traçar várias perpendiculares e resolver o problema de maneira semelhante a como resolvemos o problema gerador.

- *Como a figura pode nos auxiliar?*

Resposta esperada: Podemos usar a figura para traçar as perpendiculares e fazer as observações.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: Traçamos as perpendiculares e depois fazemos as comparações entre os segmentos paralelos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar por meio da comparação entre os segmentos paralelos após serem traçadas as perpendiculares.

Retrospecto:

- *Há outra estratégia para resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos notar que pelo fato da figura ser formada por vários quadrados ligados um ao outro em sequência então a soma dos comprimentos dos lados de cima de cada quadrado será igual à soma dos comprimentos dos lados de baixo de cada quadrado, ou seja, também mede 100 cm. O restante do cálculo pode ser feito de modo análogo à estratégia anterior.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas que envolvem segmentos poligonais.

O problema apresentado oferece ainda uma oportunidade de serem trabalhadas situações reais vivenciadas pelo próprio aluno, podemos compreender o contorno da figura como sendo dois caminhos diferentes que se cruzam no vértice inferior esquerdo e no vértice superior direito. Portanto, ainda como parte do retrospecto sugerimos ao professor que levante questionamentos que levem os alunos a pensar qual seria o caminho que os fariam percorrer a menor distância (sabendo que na verdade ambos os caminhos percorrem a mesma distância).

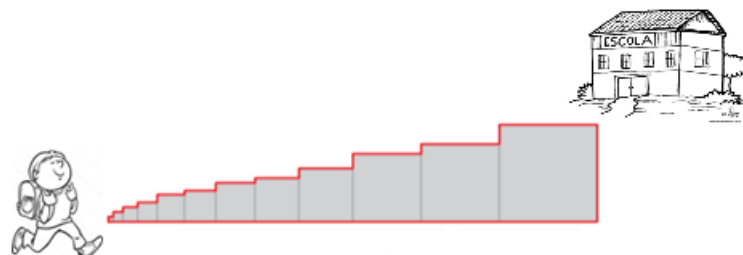


Figura 9: Contextualização do problema 01. Fonte: Autoria própria.

Por fim, a partir do problema 01 espera-se que o aluno se familiarize com o conceito de segmentos poligonais que poderá vir a ser útil em problemas semelhantes.

Problema 02:

(OBMEP – 2016) A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?



Figura 10: Figura referente ao problema 02. Fonte: IMPA, 2016.

- (A) 60 cm
- (B) 66 cm
- (C) 72 cm
- (D) 90 cm
- (E) 108 cm

Primeira Solução:

Vamos escolher o triângulo verde⁴ para tomar como base e calcular o comprimento do contorno em sua volta. Note que o lado de 3 cm do triângulo vermelho está sobreposto ao lado de 8 cm do triângulo verde e por isso o contorno não percorre essa região, logo o comprimento do contorno sobre o maior lado do triângulo verde será $8 - 3 = 5$ cm. Agora como o contorno percorre todo lado do triângulo verde que mede 7 cm, então o comprimento total do contorno sobre o triângulo verde será de 12 cm. De maneira análoga temos que o comprimento do contorno dos demais triângulos também mede 12 cm, portanto para calcular o perímetro total da figura 10 basta somar os comprimentos do contorno de cada triângulo ou efetuar a multiplicação $6 \cdot 12 = 72$ cm. A resposta correta é a alternativa c.

⁴ Em caso de ser feita uma impressão em preto e branco o professor pode enumerar os triângulos (I, II, III, IV, V e VI).

Segunda solução:

Vamos escolher dois triângulos seguidos, por exemplo o verde e o vermelho, e calcular o perímetro apenas da figura formada. Observe que podemos somando os perímetros dos dois triângulos teremos $3 + 7 + 8 + 3 + 7 + 8 = 36$ cm, todavia note que o comprimento do segmento pontilhado e que mede 3 cm não pertence ao perímetro da figura formada quando unimos os dois triângulos e que ele foi contado na soma dos perímetros dos dois triângulos, logo para calcular o perímetro da figura formada por dois triângulos seguidos basta somar os dois perímetros e subtrair o comprimento do segmento pontilhado duas vezes. Portanto, considerando a figura formada pelos seis triângulos teremos a soma dos seis perímetros menos duas vezes o comprimento de cada segmento pontilhado, ou seja, teremos $108 - 36 = 72$ cm. A resposta correta é a alternativa c.

Vejam os a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o perímetro da figura, ou seja, o comprimento do contorno em preto.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são os lados dos triângulos, todos congruentes, e que medem 3 cm, 7 cm e 8 cm.

Elaboração de um plano:

- *Podemos calcular o perímetro diretamente?*

Resposta esperada: Não, faltam algumas medidas.

- *Considere a figura. Escolha um triângulo e identifique as medidas de cada lado.*
- *Todos os lados do triângulo fazem parte completamente do contorno?*

Resposta esperada: Não, apenas o lado que mede 7 cm e uma parte do lado que mede 8 cm.

- *Pense em alguma estratégia para calcular o contorno referente apenas ao triângulo escolhido.*
- *É possível calcular o contorno apenas para o triângulo escolhido? (Lembrando que se trata do contorno da figura, não do triângulo todo).*

Resposta esperada: Sim, podemos calcular o contorno referente apenas a um triângulo.

- *Podemos expandir para os demais triângulos da figura?*

Resposta esperada: Sim, podemos repetir o processo para todos os triângulos.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: Primeiro calculamos o perímetro referente a um triângulo e depois expandimos para os demais triângulos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos identificar a medida de cada segmento que compõe o contorno e calcularmos o perímetro diretamente, o que equivale a resolver o problema para um triângulo e expandir.

Retrospecto:

- *Há outra estratégia para resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos calcular o perímetro dos seis triângulos de uma vez e depois subtrair o comprimento da região que não faz parte do contorno da figura.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas com subtração de segmentos.

Ao trabalhar com o problema 02 espera-se que o aluno compreenda o conceito de subtração de segmentos para que possa utilizá-lo em outras situações.

Problema 03:

(OBMEP – 2015) Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

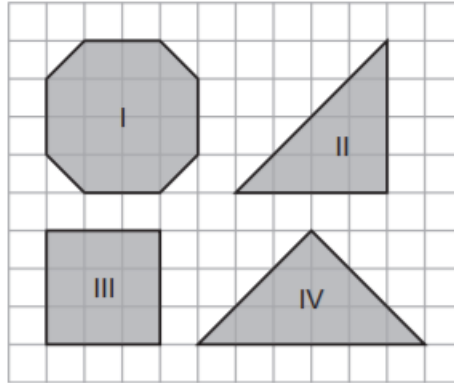


Figura 11: Figura referente ao problema 03. Fonte: IMPA, 2015.

- (A) IV e III
- (B) IV e II
- (C) IV e I
- (D) III e II
- (E) II e I

Solução:

Vamos nomear o comprimento do lado de um quadradinho de a e o comprimento da diagonal de um quadradinho de b . Calculando os perímetros de cada um dos polígonos teremos:

- Polígono I: $8a + 4b$;
- Polígono II: $8a + 4b$;
- Polígono III: $12a$;
- Polígono IV: $6a + 6b$;

Portanto, fazendo uma comparação simples encontramos que os polígonos I e II tem o mesmo perímetro.

Vale salientar que o comprimento do lado de um quadrado é menor do que o comprimento de sua diagonal, portanto é interessante observar com o aluno quais figuras tem maior perímetro, por exemplo a partir da desigualdade $a < b$ podemos encontrar:

$$a < b \Rightarrow 4a < 4b \Rightarrow 8a + 4a < 8a + 4b \Rightarrow 12a < 8a + 4b$$

Portanto observamos que o polígono III tem um perímetro menor do que os polígonos I e II.

Vejam os a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: Se quer saber quais são os polígonos com o mesmo perímetro.

- *Quais são os dados?*

Resposta esperada: Não há dados porque não tem as medidas.

- *Podemos adotar alguma medida como base?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a malha quadriculada como base para o comprimento.

Elaboração de um plano:

- *Considere a figura. É possível fazer comparações?*

Resposta esperada: Sim, podemos fazer comparações usando a malha quadriculada.

- *Considere a diagonal do quadradinho e o seu próprio lado. Tem a mesma medida?*

Resposta esperada: Não, aparentemente a diagonal é maior que o lado do quadradinho.

- *Qual estratégia poderíamos usar para comparar os perímetros?*

Resposta esperada: Poderíamos procurar os perímetros que tem a mesma quantidade de lados e diagonais dos quadradinhos da malha.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, ao utilizarmos a própria malha quadriculada como base para o comprimento somos capazes de fazer comparações entre os perímetros.

Retrospecto:

- *É possível dizer quais figuras tem o perímetro maior?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar que a medida da diagonal do quadradinho é maior do que a medida do seu próprio lado usando um compasso e depois utilizar essa relação para fazer as comparações entre os perímetros de cada figura.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas de comparação de perímetros em malha quadriculada.

Portanto, espera-se que ao resolver o problema 03 o aluno aprenda a comparar perímetros em malha quadriculada.

Problema 04:

(OBMEP – 2018) Na Figura 1 a área pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?

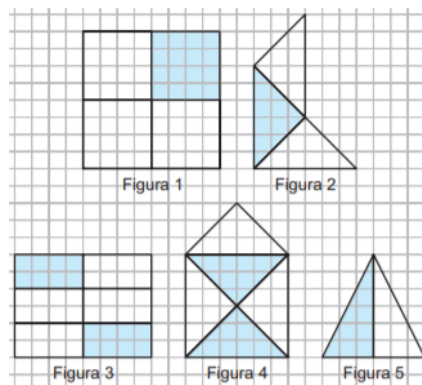


Figura 12: Figura referente ao problema 04. Fonte: IMPA, 2018.

- (A) Figura 1
- (B) Figura 2
- (C) Figura 3
- (D) Figura 4
- (E) Figura 5

Primeira Solução:

Escrevendo a fração correspondente para cada figura que relaciona a área pintada com a área total, temos:

- Figura 1: $\frac{1}{4}$
- Figura 2: $\frac{1}{3}$
- Figura 3: $\frac{2}{6}$

- Figura 4: $\frac{2}{5}$
- Figura 5: $\frac{1}{2}$

Podemos tanto transformar as frações em números decimais como reescrevê-las sob o mesmo denominador e analisar o numerador. Logo, temos:

- Figura 1: $\frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 0,25 \dots$
- Figura 2: $\frac{1}{3} = \frac{20}{60} = 0,33 \dots$
- Figura 3: $\frac{2}{6} = \frac{20}{60} = 0,33 \dots$
- Figura 4: $\frac{2}{5} = \frac{24}{60} = 0,40$
- Figura 5: $\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0,50$

Portanto, a figura 5 possui a maior área pintada. Alternativa (E).

Segunda solução:

Podemos também avaliar quanto falta para cada figura ser preenchida usando como base a própria área pintada. Observando então o que falta para cada figura, obtemos:

- Figura 1: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Figura 2: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- Figura 3: $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$
- Figura 4: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
- Figura 5: $\frac{1}{2}$

Como a figura 5 é a mais próxima de completar a área total, então é a figura com maior área. Alternativa (E).

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: Encontrar qual das figuras tem a maior região pintada.

- *Quais são os dados? O que eles representam?*

Resposta esperada: O único dado representa a região preenchida com relação ao total de área da figura 1, que no caso é $1/4$.

Elaboração de um plano:

- *Considere as figuras.*
- *Conhece um problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, já resolvemos um problema com malha quadriculada.

- *O outro problema também era sobre área?*

Resposta esperada: Não, o outro problema era sobre perímetro.

- *O enunciado traz a fração da área preenchida para a figura 1.*
- *Qual estratégia poderíamos usar para comparar as áreas preenchidas?*

Resposta esperada: Podemos encontrar as frações correspondentes para cada figura e compará-las.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, pois foram calculadas as frações correspondentes de acordo com o exemplo do próprio enunciado.

Retrospecto:

- *É possível dizer quais figuras tem o perímetro maior?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar que a medida da diagonal do quadradinho é maior do que a medida do seu próprio lado usando um compasso e depois utilizar essa relação para fazer as comparações entre os perímetros de cada figura.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas de comparação de áreas em malha quadriculada.

Logo, espera-se que ao resolver o problema 04 o aluno aprenda a comparar áreas em malha quadriculada.

Problema 05:

(OBMEP – 2019) O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm^2 . Quanto mede a área pintada de azul?

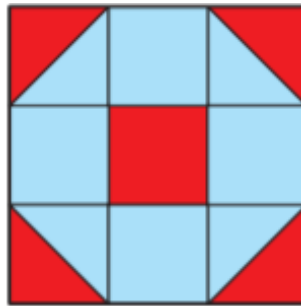


Figura 13: Figura referente ao problema 05. Fonte: IMPA, 2019.

- (A) 10 cm^2
- (B) 12 cm^2
- (C) 14 cm^2
- (D) 16 cm^2
- (E) 18 cm^2

Solução:

Primeiro note que para calcularmos a área pintada em azul é necessário descobrir quanto mede a área de cada quadradinho e triângulo. Perceba que se unirmos dois triângulos obtemos um quadradinho, logo quatro quadradinhos e quatro triângulos equivalem a seis quadradinhos. Agora observe que a área pintada de vermelho equivale à área de três quadrados, dois dos quais são formados se juntarmos os quatro triângulos vermelhos. Como a área em vermelho mede 6 cm^2 , então cada quadradinho mede 2 cm^2 . Por fim, como a área pintada em azul equivale a seis quadradinhos então teremos $6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2$.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A área pintada em azul.

- *Quais são os dados? O que eles representam?*

Resposta esperada: O único dado é a medida da área pintada em vermelho, que no caso é 6 cm².

- *O enunciado informa quanto vale a área de cada quadradinho?*

Resposta esperada: Não informa.

Elaboração de um plano:

- *Conhece um problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, já resolvemos um problema com malha quadriculada.

- *Esse outro problema também era sobre área?*

Resposta esperada: Sim, o outro problema também era sobre área.

- *A estratégia desse outro problema envolvia calcular alguma área?*

Resposta esperada: Não, a estratégia era sobre a fração correspondente a área preenchida.

- *Então esse outro problema não se aplica nesse caso.*
- *Pense numa estratégia para obter o valor da área da região azul.*
- *Considere a figura.*
- *As regiões azuis e vermelhas são formadas por quais formas geométricas?*

Resposta esperada: São formadas por quadrados e triângulos.

- *É possível encontrar a área desses quadrados e triângulos?*

Resposta esperada: Sim, como podemos decompor cada quadrado em dois triângulos retângulos congruentes, então é possível relacionar a área total com as áreas de cada quadrado e triângulo por meio da região vermelha.

- *Qual é a estratégia para encontrar a área da região azul?*

Resposta esperada: Podemos encontrar as áreas de cada quadrado e triângulo por meio da região vermelha e depois calcular a área da região azul pelo processo inverso.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar que um quadrado vermelho tem a mesma área de um azul e que um triângulo vermelho tem a mesma área de um azul. Portanto, podemos achar a área em azul se calcularmos a área de cada quadrado e triângulo.

Retrospecto:

- *Podemos calcular a área do quadrado maior?*

Resposta esperada: Sim, basta somar a área em vermelho com a área em azul.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em alguns problemas com malha quadriculada e que envolvam o cálculo de área.

Por fim, ao resolver o problema 05 espera-se que o aluno tenha mais afinidade com o cálculo de área compreendendo que um quadrado pode ser dividido em dois triângulos retângulos de mesma área.

Problema 06:

(OBMEP – 2017) A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?

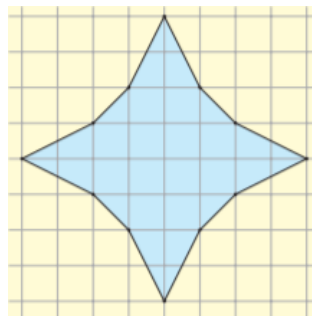


Figura 14: Figura referente ao problema 06. Fonte: IMPA, 2017.

- (A) 12
- (B) 22
- (C) 32
- (D) 64
- (E) 100

Solução:

Primeiramente destacamos e contamos quantos quadradinhos inteiros fazem parte da figura azul, conforme podemos ver a seguir:

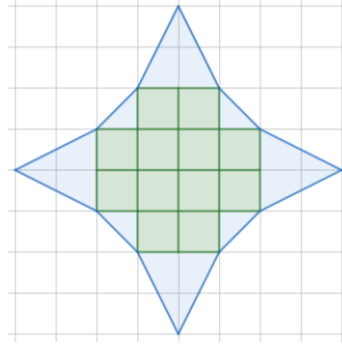


Figura 15: Primeiro passo para a solução do problema 06. Fonte: Autoria própria.

Em seguida destacamos em *laranja* os triângulos retângulos que irão formar novos quadrados e retângulos juntamente com os triângulos retângulos em *azul*.

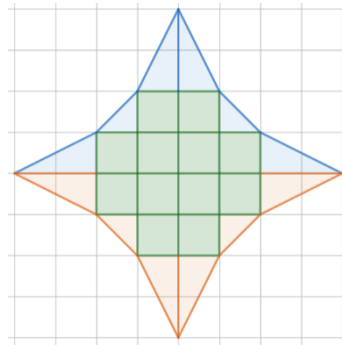


Figura 16: Segundo passo para a solução do problema 06. Fonte: Autoria própria.

Agora unindo os triângulos retângulos azuis e laranjas, temos:

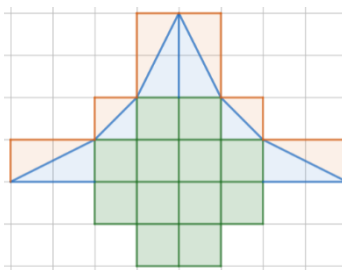


Figura 17: Terceiro passo para a solução do problema 06. Fonte: Autoria própria.

Finalmente, como a nova figura formada possui área equivalente à primeira – tendo em vista que foi realizado apenas o deslocamento de alguns triângulos sem comprometer as áreas – podemos contar o número de quadradinhos equivalente à área azul inicial.

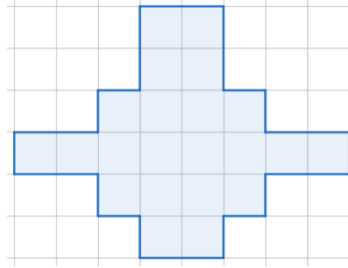


Figura 18: Quarto passo para a solução do problema 06. Fonte: Autoria própria.

Temos então 22 quadradinhos, e, portanto, a alternativa correta é a (B).

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya.

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A soma das áreas dos quadradinhos que equivalem à área da região azul.

- *Quais são os dados?*

Resposta esperada: Não há dados.

Elaboração de um plano:

- *Considere a figura.*
- *Conhece um problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, já resolvemos alguns problemas com malha quadriculada.

- *Algum desses problema era sobre área?*

Resposta esperada: Sim, dois problemas eram sobre área.

- *A estratégia de algum desses problemas envolvia calcular alguma área?*

Resposta esperada: Um dos problemas envolvia o cálculo de área.

- *Qual estratégia foi usada nesse outro problema e que pode ser aproveitada no atual problema?*

Resposta esperada: Foi usada a decomposição de um quadrado em dois triângulos.

- *Podemos usar a mesma estratégia ou adaptada para resolver o problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos fazer o processo inverso da decomposição de uma figura em duas, ou seja, podemos usar os triângulos retângulos para formar quadrados e retângulos.

- *E os demais quadradinhos da figura?*

Resposta esperada: Os demais quadradinhos são contados normalmente.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar a união de dois triângulos retângulos formam quadrados e retângulos.

Retrospecto:

- *Qual a relação que aprendemos sobre a área de quadrados, retângulos e triângulos retângulos?*

Resposta esperada: Podemos decompor quadrados em dois triângulos retângulos, sendo assim a área de um quadrado é o dobro da área de um retângulo. O mesmo vale para os retângulos e os triângulos retângulos.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em alguns problemas com malha quadriculada e que envolvam o cálculo de área.

A partir do problema 06 espera-se que o aluno se familiarize ainda mais com o cálculo de área por meio da malha quadriculada compreendendo que triângulos retângulos de mesma base e altura podem se unir para formar um só retângulo ou que um retângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos de mesma área.

4.3.1.5 As habilidades segundo a BNCC

A seguir serão apresentadas em formato de tabela as habilidades que estão presentes na sequência didática. A série tomada como base para a aplicação é o 6º ano, todavia vale ressaltar que pelo fato de terem sido trabalhados problemas do nível 1 da OBMEP, que por sua vez abrange o 6º e 7º anos, então a sequência proposta pode ser aplicada no 7º ano, seja como uma forma do professor reforçar o aprendizado do conteúdo do ano anterior ou ainda com o objetivo de tentar corrigir uma deficiência na aprendizagem observada. Por este motivo irão constar tanto as habilidades do 6º quanto do 7º ano.

Para completar também serão apresentadas as habilidades referentes ao 4º e 5º anos para que o professor tome conhecimento das habilidades prévias que se espera que os alunos tenham e que deverão ser reforçadas durante a aplicação.

Tabela 1: Habilidades da BNCC de acordo com os problemas da OBMEP. Fonte: Autoria própria.

4º ano		
Objeto	Habilidade	Problemas
Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	(EF04MA20) Medir e estimar <i>comprimentos</i> (incluindo <i>perímetros</i>), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.	Problema gerador (perímetro); Problema 01; Problema 02; Problema 03.
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar <i>área</i> de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.	Problema gerador (área); Problema 04; Problema 05; Problema 06.
5º ano		
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento</i> , <i>área</i> , massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.	Todos os problemas.
6º ano		
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas	Todos os problemas.

comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	<i>comprimento</i> , massa, tempo, temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.	
7º ano		
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	(EF07MA31) Estabelecer expressões de <i>cálculo de área</i> de triângulos e de quadriláteros.	Problema 05; Problema 06.
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de <i>cálculo de medida de área</i> de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.	Problema 06.

Portanto, objetivamos que, ao utilizar a SD proposta, o professor esteja ciente das habilidades da BNCC previstas em cada problema, bem como possa estar atento ao desenvolvimento das habilidades em seus alunos.

Tendo discutido acerca dos elementos que compõem a nossa sequência didática partimos para as considerações finais do nosso trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino brasileiro de Matemática, sobretudo o ensino de geometria, sofreu diversas transformações ao longo da história. A princípio com a Campanha de Jesus apenas a aritmética era ensinada. Porém com a expulsão dos jesuítas o ensino passou a acontecer por meio de aulas avulsas. O que representou um avanço no sentido de que mais conteúdos matemáticos poderiam ser ensinados também significou um retrocesso uma vez que as aulas avulsas configuravam um tipo de ensino, como o próprio nome já sugere, sem nenhum tipo de organização ou planejamento escolar.

O ensino militar também foi uma opção durante o período colonial, porém era restrito a um público menor. As academias militares tinham a incumbência de preparar aquele que optava por seguir uma carreira militar para o pleno exercício de seu ofício. Nesta modalidade o ensino de Matemática era mais técnico e a geometria recebia mais atenção.

O ensino de Matemática recebia um tratamento um pouco mais apropriado tendo em vista que visava preparar engenheiros militares, arquitetos, cartógrafos, matemáticos, entre outros. A geometria era ensinada a partir de um caráter utilitário, para servir às profissões.

Finalmente em 1837 é criado o Colégio Imperial Pedro II, que é o primeiro colégio voltado para o ensino secundário e se baseava nos colégios franceses.

Avançando um pouco na história nos deparamos com o Movimento Internacional pela Educação Matemática representando o esforço em conjunto de vários países na tentativa de melhorar a aprendizagem de Matemática no ensino secundário. Acontece que devido os avanços experimentados pela Matemática nas últimas décadas e também em consequência da Revolução Industrial uma nova realidade social, política e econômica havia surgido, logo mudanças no ensino secundário se tornaram necessárias.

Havia um descompasso entre a Matemática ensinada nas escolas e a Matemática ensinada nas universidades, para tentar diminuir esse descompasso foi sugerido a introdução de elementos modernos no ensino secundário, sendo uma das principais mudanças a inserção do estudo de funções.

Outro ponto importante era a necessidade de preparar o futuro trabalhador para o mercado de trabalho, que agora exigia um conhecimento mais especializado em muitas situações.

Um acontecimento que marcou o Movimento Internacional foi a campanha realizada contra o ensino da geometria de Euclides utilizando como base sua coleção de livros *Os*

Elementos. O problema estava na didática de Euclides ser considerada enrijecida, cheia de teoremas e demonstrações, e distante de aplicações práticas.

Raja Gabaglia, professor do Colégio Pedro II, foi o representante do Brasil no Movimento Internacional, contudo não trouxe nenhuma ideia modernizadora para o ensino de Matemática e apesar de ter prometido divulgar relatórios sobre o ensino brasileiro de Matemática também não o fez. Tal acontecimento deixa o Brasil com anos de atraso quanto a modernização do ensino quando comparado aos demais países participantes do Movimento.

A primeira reforma brasileira do ensino secundário foi a Reforma Constant em 1930, que era influenciada pelo positivismo e foi duramente criticada pelo intelectualismo além da capacidade de aprendizagem do aluno, também por apresentar um caráter enciclopedista. Apesar de ser considerada impossível de ser executada, a Reforma Constant durou até 1930 quando veio outra reforma.

A Reforma Campos de 1932 trazia toda a parte Matemática baseada nas ideias do professor Euclides Roxo, do Colégio Pedro II, que por sua vez se inspirava nas ideias modernizadoras do Movimento Internacional pela Educação Matemática. Um dos pontos de destaque desta reforma foi a unificação das disciplinas de geometria, Álgebra e Aritmética em uma só disciplina chamada Matemática. É interessante observar que a grade curricular de Matemática na Reforma Campos começa a se parecer com a grade atual, ou seja, os conteúdos estudados naquele tempo trazem um caráter mais moderno.

Contudo, um dos maiores problemas em propor mudanças no ensino naquela época é que não havia professores qualificados que pudessem acompanhar a nova proposta, o que fez com que a Reforma Campos também fosse duramente criticada. Os primeiros passos para a formação de professores realmente qualificados foram dados com a criação da Universidade de São Paulo e da Universidade do Distrito Federal que passaram a ofertar cursos superiores para formação de professores de Matemática.

A Reforma Capanema de 1942 trouxe algumas alterações no currículo de Matemática com relação à Reforma Campos, porém é mantida a influência de Euclides Roxo que também esteve presente na formulação da proposta.

Quanto à geometria ambas as reformas Campos e Capanema buscavam romper com o ensino de Matemática na perspectiva tradicional aderindo a visão contrária à geometria euclidiana, considerada enrijecida, que teve início no Movimento Internacional.

Mais um acontecimento que trouxe mudanças significativas para o ensino de Matemática no Brasil ficou conhecido como o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Depois de perceber que estava atrás na corrida espacial após a Rússia lançar a Sputnik, os EUA

resolveram realizar mudanças em seu ensino básico, o que inspirou outros países a seguirem o mesmo caminho.

O MMM aqui no Brasil teve influência das pesquisas realizadas por um grupo de matemáticos que utilizava o pseudônimo Nicolas Bourbaki e que tinham como objetivo a unificação da Matemática através da álgebra, ordem e estruturas topológicas. O grupo Bourbaki defendia o ensino da Matemática alinhado às ideias do psicólogo Jean Piaget, que desenvolvia pesquisas sobre a psicológica do desenvolvimento da aprendizagem da criança.

Há alguns pontos realmente interessantes a considerar a respeito do MMM. Primeiramente as ideias norteadoras do movimento não foram impostas aos professores por meio do Governo como aconteceu com as reformas já citadas, a adesão veio por meio de grupos de pesquisa que em seguida inspiraram autores de livros didáticos que passaram a escrever seus livros de acordo com a proposta. Todavia, a nova abordagem dada à geometria, o ensino através das estruturas, não condizia com a formação dos professores que por sua vez sentiam dificuldades em atender a proposta. Para piorar a aprovação da lei nº 5692/71 permitia aos professores elaborarem o currículo da maneira como preferissem, o que contribuiu para o abandono da geometria nas aulas de Matemática por aqueles que não se sentiam seguros em ensiná-la.

A constante necessidade de melhorar o processo de ensino-aprendizagem fez com que pesquisadores desenvolvessem novas metodologias voltadas para o ensino de Matemática, destacando-se a Resolução de Problemas. Consideradas por muitos como o coração da Matemática a Resolução de Problemas se opõe ao aprendizado da Matemática via repetição de exercícios rotineiros, tendo como mais eficiente a aprendizagem que resulta do confronto do aluno com situações que exijam um raciocínio.

A abordagem recomendada para a utilização da Resolução de Problemas em sala de aula é baseada no socioconstrutivismo para o desenvolvimento da aprendizagem. Neste sentido a relação entre aluno e professor recebe um novo olhar, para o professor não existe mais a figura de portador do saber e transmissor do conhecimento, na verdade o professor se coloca como um mediador entre o aluno e o saber. Por sua vez o aluno sai de sua zona de conforto, de uma atitude passiva onde era acostumado a receber de maneira pronta o conteúdo imposto pelo professor e passa a interagir diretamente com o conhecimento enquanto resolve um problema.

O papel do professor se torna então o de garantir que o aluno seja capaz de resolver determinado problema, mas não o de resolver o problema para o aluno. O professor irá ensinar os meios que auxiliarão o aluno a resolver o problema proposto e através desse processo poder observar o conteúdo matemático presente ali. A independência, a curiosidade, a criatividade, e

o autodidatismo são habilidades trabalhadas na Resolução de Problemas e que devem sempre ser estimuladas pelo professor.

Também como fruto de pesquisas sobre o socioconstrutivismo temos as sequências didáticas, séries de atividades com objetivos didáticos pré-estabelecidos pelo professor, onde novamente o aluno é levado a construir seu próprio conhecimento à medida que interage com a sequência. Assim como na Resolução de Problemas o professor age como mediador do processo de ensino-aprendizagem, não podendo dar as respostas para o aluno de maneira direta, mas incentivando que este chegue à solução por conta própria.

A sequência didática apresentada como produto desta dissertação se mostra como uma proposta de ensino voltada para a introdução e familiarização dos conceitos de áreas e perímetros de figuras planas (sendo discutidos apenas alguns polígonos como quadrados, retângulos e triângulos). O público-alvo é formado por alunos do 6º ano do ensino fundamental, porém também pode ser aplicada para alunos do 7º ano com o objetivo de servir como reforço do conteúdo proposto.

Isto posto, o presente estudo buscou responder a seguinte pergunta: É possível organizar uma sequência didática composta a partir de problemas oriundos da OBMEP voltada para o ensino de áreas e perímetros de polígonos no 6º ano do ensino fundamental e utilizando como abordagem o ensino por meio da Resolução de Problemas? Se concretizando, portanto, o anseio em desenvolver um produto que viabilizasse o ensino de geometria por meio da Resolução de Problemas na Educação Básica e que foi alcançado à medida que foi possível organizar uma sequência didática composta a partir de problemas oriundos da primeira fase do nível 1 da OBMEP.

Diante do que foi apresentado e tomando como base a fundamentação teórica presente neste trabalho, acreditamos que a nossa sequência didática se coloca como uma proposta viável para o professor de Matemática uma vez que são fornecidos os subsídios necessários à sua aplicação, sendo inclusive discutidas sugestões de roteiro de aplicação das quatro fases de Polya (2006) e apresentadas as habilidades presentes em cada problema de acordo com a BNCC. O professor tem então a oportunidade de fazer uso da Resolução de Problemas em sala de aula ao mesmo tempo que valoriza uma importante política pública, incentivando desde cedo a familiarização do aluno com a OBMEP.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAHÃO, Maria Helena Menna Barreto. (Org.). **Avaliação e erro construtivo libertador: uma teoria – Prática incluída em Educação**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

ANDRADE, Silvanio de. **Um caminhar crítico e reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula**, 2017. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; JUNIOR, Luis Carlos Leal; PIRONEL, Márcio. (Orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**, p. 355-395. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?** 2019. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Andresa Maria. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2019. Não paginado.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Helena de Castro. São Paulo: Blucher, 3ª ed, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 02/12/2019

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Vol. 2, Brasília: MEC, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acessado em: 27/09/2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acessado em: 26/09/2020.

CAI, Jinfa; LESTER, Frank. **Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno?** Boletim GEPEN. Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, 2012. Tradução de BASTOS, A. S. A. M. e ALLEVATO, N. S. G. Disponível em: <<http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.008>>. Acesso em: 05/10/2020.

CALDATTO, Marlova Estela; PAVANELLO, Regina Maria. **Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais**. Revista Quadrante, vol XXIV, nº 1, 2015. Disponível em: <<https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/63/56>>. Acesso em: 27/02/2020.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino de matemática**, 2004. In: VALENTE, Wagner Rodrigues. (Org.). **Euclides Roxo e**

a modernização do ensino de Matemática no Brasil, pp. 11-43. Brasília: Editora da UnB, 2004.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **História da Matemática no Brasil**: uma visão panorâmica até 1950. *Saber y Tiempo: Revista de Historia de la Ciencia*, vol. 2, nº 8, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12ª ed, São Paulo: Ática, 2007.

FIorentini, Dario. LOrenzato, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. São Paulo: Autores associados, 3ª ed, 2012.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **15ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 2019**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2019. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1aOu8pUrLG4Vnf4X_V8SFux4lA3yS-qQp/view>. Acessado em: 06/11/2019.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **14ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 2018**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2018. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1aOu8pUrLG4Vnf4X_V8SFux4lA3yS-qQp/view>. Acessado em: 06/11/2019.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **13ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 2017**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2017. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1aOu8pUrLG4Vnf4X_V8SFux4lA3yS-qQp/view>. Acessado em: 06/11/2019.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **12ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 2016**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2016. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1aOu8pUrLG4Vnf4X_V8SFux4lA3yS-qQp/view>. Acessado em: 06/11/2019.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **11ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 2015**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2015. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1aOu8pUrLG4Vnf4X_V8SFux4lA3yS-qQp/view>. Acessado em: 06/11/2019.

IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. **1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas 2005**. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2005. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1aOu8pUrLG4Vnf4X_V8SFux4lA3yS-qQp/view>. Acessado em: 17/10/2020.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1ª ed, 1998.

MORALES, Cíntia. et al. **Uma história da educação matemática no Brasil através dos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental**. Monografia. Jaboticabal, SP: Faculdade de Educação de São Luis, 2003. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Morales.pdf>. Acesso em: 16/10/2020.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Sequência Didática Interativa no Processo de Formação de Professores**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013. Não paginado.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetike, Campinas: UNICAMP, 2009. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724>>. Acesso em: 15/10/2020.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica**. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação). – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1989. Disponível em: <<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252057>>. Acesso em: 07/11/2019.

PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2001. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11182/1/dissertacao_maria_regina_pereira.pdf>. Acesso em: 19/01/2021.

POLYA, George. **A arte de resolver Problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RIBEIRO, Maria Luisa Santos. **História da educação brasileira: A organização escolar**. São Paulo: Autores Associados, 21ª ed, 2010.

SCHUBRING, Gert. **O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha**, 1999. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**, p. 11-43. Brasília: Editora da UnB, 2004.

SILVA, Paulo Henrique das Chagas. **Análise e avaliação das questões dos níveis 1 e 2 da primeira fase da OBMEP sob uma perspectiva de resolução de problemas**. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150251321>. Acesso em: 17/11/2019.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil: 1730-1930**. São Paulo: Annablume, 1ª ed, 1999.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: Como ensinar**. Porto Alegre: Penso, 2014.

APÊNDICE A
SEQUÊNCIA DIDÁTICA
VERSÃO PARA O PROFESSOR

Caro, professor!

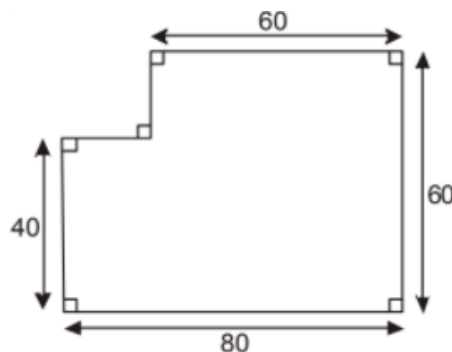
O material a seguir é fruto de uma pesquisa de Mestrado Profissional da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Neste material você encontrará uma sequência didática composta a partir de problemas oriundos de edições da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP) para trabalhar os conceitos de áreas e perímetros de polígonos. Estima-se que a aplicação da SD tenha uma duração de 02 (duas) horas-aula, podendo ultrapassar devido às discussões decorrentes de cada problema. Nesta versão para o professor você encontrará as soluções de cada problema seguidas de comentários e sugestões de roteiro de aplicação baseadas nas fases da Resolução de Problemas na perspectiva de Polya (2006) além de uma lista de habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) trabalhadas em cada problema.

Espera-se que com este produto você possa ter uma rica experiência em sala de aula com os seus alunos.

Faça bom proveito!

Problema gerador para o conceito de perímetro:

(OBMEP – 2005) Daniela quer cercar o terreno representado pela figura. Nessa figura dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?

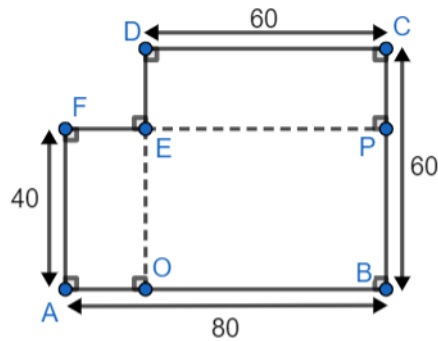


Fonte: IMPA, 2005.

- (A) 140
- (B) 280
- (C) 320
- (D) 1 800
- (E) 4 800

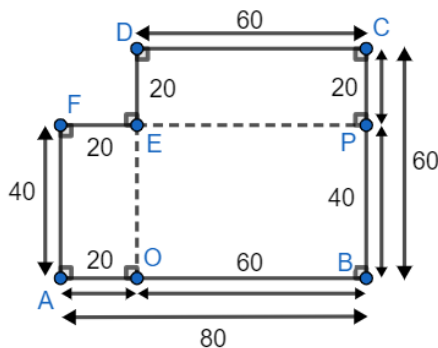
Solução:

Destacamos os comprimentos desconhecidos e traçamos segmentos perpendiculares conforme indicado na figura abaixo.



Fonte: Autoria própria.

Note que pelo retângulo OBCD o segmento OB mede 60 metros logo, o segmento AO mede o que falta de 80 para 80, ou seja, AO mede 20 metros. Como AO é congruente a FE pelo retângulo AOE, então FE também mede 20 metros. Analogamente descobrimos que DE mede 20 metros.



Fonte: Autoria própria.

Logo, para sabermos quantos metros de cerca Daniela terá que comprar, basta somar $40 + 80 + 60 + 60 + 20 + 20 = 280$ metros.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o total de metros de cerca que Daniela terá que comprar.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são as medidas em metros que aparecem na figura (40 m, 80 m, 60 m, 60 m).

- *É possível resolver o problema apenas com esses dados?*

Resposta esperada: Não, pois faltam alguns dados para resolver o problema.

Elaboração de um plano:

- *Na figura tem todos os comprimentos que precisamos?*

Resposta esperada: Não tem todos os dados, há dois comprimentos faltando na figura.

- *Destaque onde faltam os comprimentos na figura.*
- *Pense em alguma estratégia para calcular os comprimentos que faltam.*
- *É possível fazer comparações entre os comprimentos?*

Resposta esperada: Sim, é possível fazer comparações entre os comprimentos que estão em lados opostos.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: O plano é calcular as medidas que faltam através das comparações entre os lados opostos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar fazendo comparações entre os lados opostos novamente.

- *É possível comparar os lados opostos da figura? Como isso poderia ser feito?*

Resposta esperada: Sim, podemos comparar traçando segmentos de reta que ligam os lados opostos.

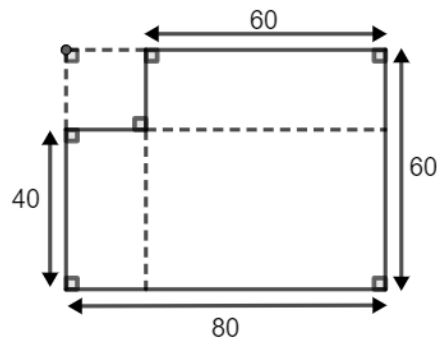
Retrospecto:

- *O que aprendemos nesse problema?*

Resposta esperada: Aprendemos a calcular o comprimento do contorno de uma figura e a fazer comparações entre comprimentos de segmentos e segmentos poligonais.

- *Há outra maneira de resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, poderíamos “completar” prolongando segmentos para formar um retângulo maior (ver figura abaixo) e fazer comparações entre os comprimentos.



Fonte: Autoria própria.

- *É possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos utilizar a mesma estratégia, ou parecida, se o novo problema apresentar uma figura com propriedades semelhantes.

Ainda como parte do retrospecto, para tornar o problema ainda mais próximo da realidade, o professor pode sugerir que o aluno pense na construção de uma cerca e reflita sobre o total de material e o número de voltas necessários.

Após resolver o problema, o professor poderá explicar para os alunos que eles acabaram de calcular o perímetro de uma figura e em seguida partir para o aperfeiçoamento do conceito.

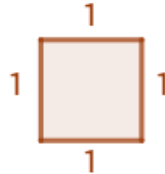
Por fim, ao trabalhar com este problema espera-se que o aluno identifique o que é o perímetro e como ele pode estar presente em seu dia a dia.

Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	(EF04MA20) Medir e estimar <i>comprimentos</i> (incluindo <i>perímetros</i>), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento</i> , <i>área</i> , massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento</i> , massa, tempo, temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

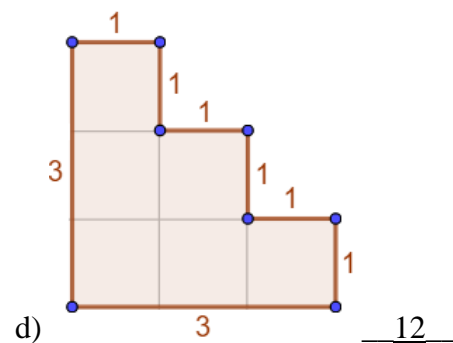
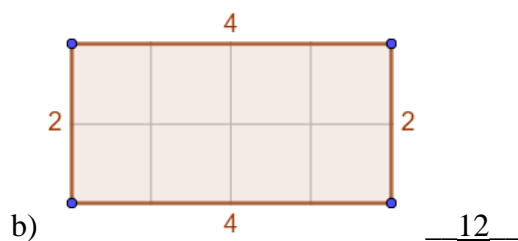
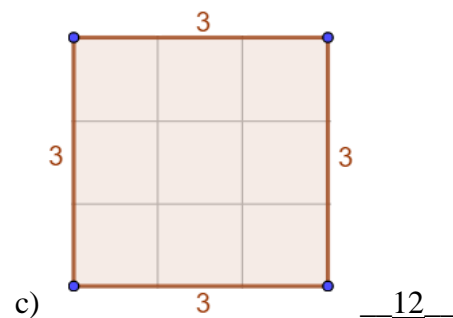
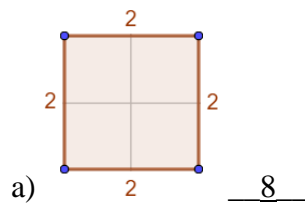
PERÍMETRO

Podemos definir o perímetro como sendo o comprimento do contorno de determinada figura. Vejamos o seguinte exemplo:



Para calcular o perímetro desse quadrilátero basta somar as medidas dos seus lados, ou seja, **seu perímetro é 4**.

Calcule o perímetro das figuras a seguir:

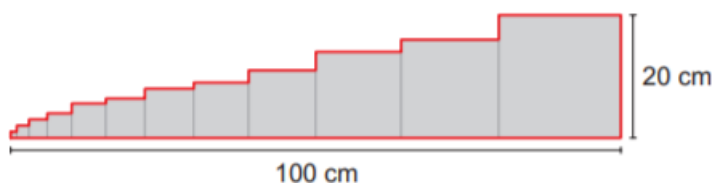


Neste ponto da sequência busca-se o aperfeiçoamento e formalização de conceitos previamente trabalhados no problema gerador de perímetro. O objetivo é expor o conceito da maneira mais clara possível para o aluno, e para isto são apresentados uma definição em linguagem acessível, um exemplo e exercícios de aplicação direta.

É interessante que o professor faça os alunos perceberem que figuras com diferentes formatos podem ter o mesmo perímetro.

Vamos resolver mais alguns problemas.

1. (OBMEP – 2017) Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?



Fonte: IMPA, 2017.

- (A) 220 cm
- (B) 240 cm
- (C) 260 cm
- (D) 300 cm
- (E) 400 cm

Solução:

Para resolver este problema basta analisar que a soma das medidas dos lados de cima de cada quadrado equivale à soma das medidas dos lados de baixo de cada quadrado e que sabemos que é 100 cm. De maneira semelhante se juntarmos a diferença do lado de um quadrado maior pelo lado do quadrado menor que o sucede teremos que esse comprimento será equivalente à medida do lado do quadrado maior que é 20 cm. Portanto a resposta será $100 + 100 + 20 + 20 = 240$ cm, ou seja, alternativa b.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o perímetro da figura, ou seja, o comprimento do contorno em vermelho.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são o comprimento da base da figura, que mede 100 cm, e o comprimento do lado do quadrado maior, que mede 20 cm.

- *É possível resolver o problema apenas com esses dados?*

Resposta esperada: Não, pois não temos o comprimento de todo o contorno identificado na figura.

Elaboração de um plano:

- *Na figura tem todos os comprimentos que precisamos?*

Resposta esperada: Não, precisamos encontrar a medida não informada do comprimento do contorno vermelho.

- *Pense em alguma estratégia para calcular o comprimento que falta.*
- *Conhece algum problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, o problema inicial apresenta uma situação semelhante.

- *Podemos adaptar a solução do problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, podemos traçar várias perpendiculares e resolver o problema de maneira semelhante a como resolvemos o problema gerador.

- *Como a figura pode nos auxiliar?*

Resposta esperada: Podemos usar a figura para traçar as perpendiculares e fazer as observações.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: Traçamos as perpendiculares e depois fazemos as comparações entre os segmentos paralelos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar por meio da comparação entre os segmentos paralelos após serem traçadas as perpendiculares.

Retrospecto:

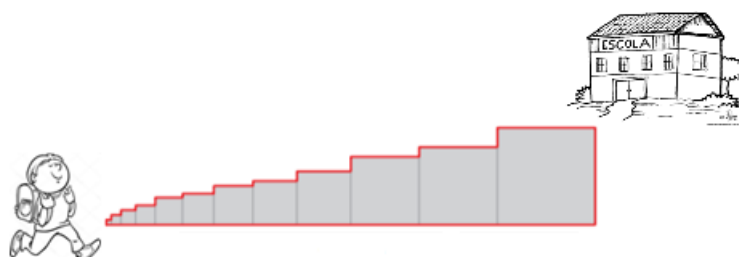
- *Há outra estratégia para resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos notar que pelo fato da figura ser formada por vários quadrados ligados um ao outro em sequência então a soma dos comprimentos dos lados de cima de cada quadrado será igual à soma dos comprimentos dos lados de baixo de cada quadrado, ou seja, também mede 100 cm. O restante do cálculo pode ser feito de modo análogo à estratégia anterior.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas que envolvem segmentos poligonais.

O problema apresentado oferece ainda uma oportunidade de serem trabalhadas situações reais vivenciadas pelo próprio aluno, podemos compreender o contorno da figura como sendo dois caminhos diferentes que se cruzam no vértice inferior esquerdo e no vértice superior direito. Portanto, ainda como parte do retrospecto sugerimos ao professor que levante questionamentos que levem os alunos a pensar qual seria o caminho que os fariam percorrer a menor distância (sabendo que na verdade ambos os caminhos percorrem a mesma distância).



Fonte: Autoria própria.

Por fim, a partir do problema 01 espera-se que o aluno se familiarize com o conceito de segmentos poligonais que poderá vir a ser útil em problemas semelhantes.

Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	(EF04MA20) Medir e estimar <i>comprimentos</i> (incluindo <i>perímetros</i>), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento, área, massa, tempo, temperatura</i> e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento, massa, tempo, temperatura, área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

2. (OBMEP – 2016) A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?



Fonte: IMPA, 2016.

- (A) 60 cm
- (B) 66 cm
- (C) 72 cm
- (D) 90 cm
- (E) 108 cm

Primeira Solução:

Vamos escolher o triângulo verde⁵ para tomar como base e calcular o comprimento do contorno em sua volta. Note que o lado de 3 cm do triângulo vermelho está sobreposto ao lado de 8 cm do triângulo verde e por isso o contorno não percorre essa região, logo o comprimento do contorno sobre o maior lado do triângulo verde será $8 - 3 = 5$ cm. Agora como o contorno percorre todo lado do triângulo verde que mede 7 cm, então o comprimento total do contorno sobre o triângulo verde será de 12 cm. De maneira análoga temos que o comprimento do contorno dos demais triângulos também mede 12 cm, portanto para calcular o perímetro total da figura basta somar os comprimentos do contorno de cada triângulo ou efetuar a multiplicação $6 \cdot 12 = 72$ cm. A resposta correta é a alternativa c.

⁵ Em caso de ser feita uma impressão em preto e branco o professor pode enumerar os triângulos (I, II, III, IV, V e VI).

Segunda solução:

Vamos escolher dois triângulos seguidos, por exemplo o verde e o vermelho, e calcular o perímetro apenas da figura formada. Observe que podemos somando os perímetros dos dois triângulos teremos $3 + 7 + 8 + 3 + 7 + 8 = 36$ cm, todavia note que o comprimento do segmento pontilhado e que mede 3 cm não pertence ao perímetro da figura formada quando unimos os dois triângulos e que ele foi contado na soma dos perímetros dos dois triângulos, logo para calcular o perímetro da figura formada por dois triângulos seguidos basta somar os dois perímetros e subtrair o comprimento do segmento pontilhado duas vezes. Portanto, considerando a figura formada pelos seis triângulos teremos a soma dos seis perímetros menos duas vezes o comprimento de cada segmento pontilhado, ou seja, teremos $108 - 36 = 72$ cm. A resposta correta é a alternativa c.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o perímetro da figura, ou seja, o comprimento do contorno em preto.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são os lados dos triângulos, todos congruentes, e que medem 3 cm, 7 cm e 8 cm.

Elaboração de um plano:

- *Podemos calcular o perímetro diretamente?*

Resposta esperada: Não, faltam algumas medidas.

- *Considere a figura. Escolha um triângulo e identifique as medidas de cada lado.*
- *Todos os lados do triângulo fazem parte completamente do contorno?*

Resposta esperada: Não, apenas o lado que mede 7 cm e uma parte do lado que mede 8 cm.

- *Pense em alguma estratégia para calcular o contorno referente apenas ao triângulo escolhido.*
- *É possível calcular o contorno apenas para o triângulo escolhido? (Lembrando que se trata do contorno da figura, não do triângulo todo).*

Resposta esperada: Sim, podemos calcular o contorno referente apenas a um triângulo.

- *Podemos expandir para os demais triângulos da figura?*

Resposta esperada: Sim, podemos repetir o processo para todos os triângulos.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: Primeiro calculamos o perímetro referente a um triângulo e depois expandimos para os demais triângulos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos identificar a medida de cada segmento que compõe o contorno e calcularmos o perímetro diretamente, o que equivale a resolver o problema para um triângulo e expandir.

Retrospecto:

- *Há outra estratégia para resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos calcular o perímetro dos seis triângulos de uma vez e depois subtrair o comprimento da região que não faz parte do contorno da figura.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

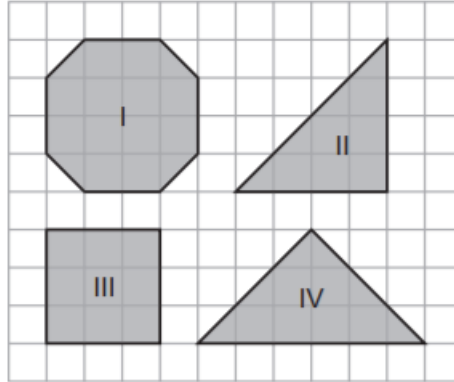
Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas com subtração de segmentos.

Ao trabalhar com o problema 02 espera-se que o aluno compreenda o conceito de subtração de segmentos para que possa utilizá-lo em outras situações.

Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	(EF04MA20) Medir e estimar <i>comprimentos</i> (incluindo <i>perímetros</i>), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento</i> , <i>área</i> , massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento</i> , massa, tempo, temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

3. (OBMEP 2015) Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?



Fonte: IMPA, 2015.

- (A) IV e III
- (B) IV e II
- (C) IV e I
- (D) III e II
- (E) II e I

Solução:

Vamos nomear o comprimento do lado de um quadradinho de a e o comprimento da diagonal de um quadradinho de b . Calculando os perímetros de cada um dos polígonos teremos:

- Polígono I: $8a + 4b$;
- Polígono II: $8a + 4b$;
- Polígono III: $12a$;
- Polígono IV: $6a + 6b$;

Portanto, fazendo uma comparação simples encontramos que os polígonos I e II tem o mesmo perímetro.

Vale salientar que o comprimento do lado de um quadrado é menor do que o comprimento de sua diagonal, portanto é interessante observar com o aluno quais figuras tem maior perímetro, por exemplo a partir da desigualdade $a < b$ podemos encontrar:

$$a < b \Rightarrow 4a < 4b \Rightarrow 8a + 4a < 8a + 4b \Rightarrow 12a < 8a + 4b$$

Portanto observamos que o polígono III tem um perímetro menor do que os polígonos I e II.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: Se quer saber quais são os polígonos com o mesmo perímetro.

- *Quais são os dados?*

Resposta esperada: Não há dados porque não tem as medidas.

- *Podemos adotar alguma medida como base?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a malha quadriculada como base para o comprimento.

Elaboração de um plano:

- *Considere a figura. É possível fazer comparações?*

Resposta esperada: Sim, podemos fazer comparações usando a malha quadriculada.

- *Considere a diagonal do quadrado e o seu próprio lado. Tem a mesma medida?*

Resposta esperada: Não, aparentemente a diagonal é maior que o lado do quadrado.

- *Qual estratégia poderíamos usar para comparar os perímetros?*

Resposta esperada: Poderíamos procurar os perímetros que tem a mesma quantidade de lados e diagonais dos quadrados da malha.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, ao utilizarmos a própria malha quadriculada como base para o comprimento somos capazes de fazer comparações entre os perímetros.

Retrospecto:

- *É possível dizer quais figuras tem o perímetro maior?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar que a medida da diagonal do quadrado é maior do que a medida do seu próprio lado usando um compasso e depois utilizar essa relação para fazer as comparações entre os perímetros de cada figura.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas de comparação de perímetros em malha quadriculada.

Portanto, espera-se que ao resolver o problema 03 o aluno aprenda a comparar perímetros em malha quadriculada.

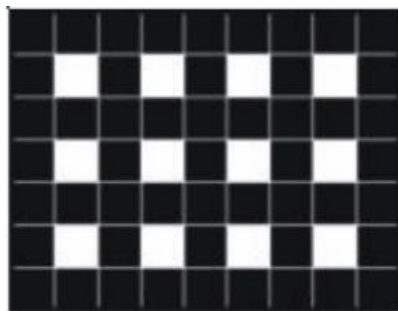
Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	(EF04MA20) Medir e estimar <i>comprimentos</i> (incluindo <i>perímetros</i>), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento</i> , <i>área</i> , massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações

convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento</i> , massa, tempo, temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

Problema gerador para o conceito de área:

(OBMEP – 2005) O piso de uma cozinha foi revestido de ladrilhos brancos e pretos, conforme a figura. Cada ladrilho branco custou R\$ 2,00 e cada ladrilho preto custou R\$ 3,00. Quanto foi gasto na compra dos ladrilhos?



Fonte: IMPA, 2005.

- (A) R\$ 126,00
- (B) R\$ 144,00
- (C) R\$ 174,00
- (D) R\$ 177,00
- (E) R\$ 189,00

Solução:

Basta calcular o total de ladrilhos brancos e pretos e em seguida multiplicar respectivamente pelo valor unitário de cada um. Há 12 ladrilhos brancos e 51 ladrilhos pretos. Uma observação é que tanto podemos contar os ladrilhos um a um, o que é mais fácil no caso dos brancos, como podemos calcular todos os ladrilhos (brancos e pretos) - multiplicando o total de uma linha pelo total de uma coluna e encontrando assim 63 ladrilhos ao todo – para depois diminuir os 12 ladrilhos brancos do total de ladrilhos, restando apenas os ladrilhos pretos, que são 51. Finalmente, como cada ladrilho branco custa R\$ 2,00, temos que o total gasto com os ladrilhos brancos será R\$ 24,00 e como cada ladrilho preto custa R\$ 3,00, temos que o total gasto com os ladrilhos pretos será R\$ 153,00. Portanto, para sabermos o total gasto resta apenas efetuar a soma $24 + 153 = 177$ reais.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A incógnita é o total que foi gasto na compra dos ladrilhos.

- *Quais são os dados? O que esses dados representam?*

Resposta esperada: Os dados são os preços dos ladrilhos brancos, que custam R\$ 2,00, e dos ladrilhos pretos, que custam R\$ 3,00.

- *É possível resolver o problema apenas com esses dados?*

Resposta esperada: Sim, pois temos todos os dados necessário.

Elaboração de um plano:

- *O enunciado tem todos os dados que precisamos?*

Resposta esperada: Sim, o enunciado e a figura trazem todos os dados que precisamos.

- *Pense em alguma estratégia para calcular o total que será gasto na compra dos ladrilhos.*
- *Como a figura pode nos auxiliar?*

Resposta esperada: A figura nos diz quantos ladrilhos brancos e pretos precisamos comprar.

- *Qual o plano que você pensou?*

Resposta esperada: Para saber quanto iremos gastar para comprar os ladrilhos brancos basta multiplicar o total de ladrilhos brancos pelo preço de cada ladrilho branco, o mesmo raciocínio vale para os ladrilhos pretos.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar observando o total de ladrilhos representados na figura e realizando os mesmos cálculos que anteriormente.

Retrospecto:

- *Existe uma maneira rápida de resolver esse problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos calcular o total de ladrilhos da parede fazendo uma multiplicação do número de linhas pelo número de colunas e depois diminuir o número de ladrilhos brancos, que são mais fáceis de contar, para encontrar o número de ladrilhos pretos e depois é só fazer o mesmo cálculo para saber o total gasto.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar uma estratégia parecida em problemas que envolvam preenchimento de uma superfície.

Após resolver o problema, é sugerido ao professor pensar na situação em que cada ladrilho custe R\$ 1,00 independentemente da cor, dessa forma o professor poderá aproveitar o momento para introduzir o conceito de área.

Portanto, com este problema espera-se que o aluno compreenda o que é a área e um pouco da sua utilidade para determinada situação.

Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Medidas de comprimento, massa e capacidade: estimativas, utilização de instrumentos de medida e de unidades de medida convencionais mais usuais.	(EF04MA20) Medir e estimar <i>comprimentos</i> (incluindo <i>perímetros</i>), massas e capacidades, utilizando unidades de medida padronizadas mais usuais, valorizando e respeitando a cultura local.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade:	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento, área, massa, tempo, temperatura</i>

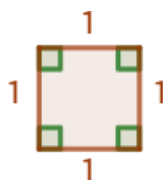
utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento</i> , massa, tempo, temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

ÁREA

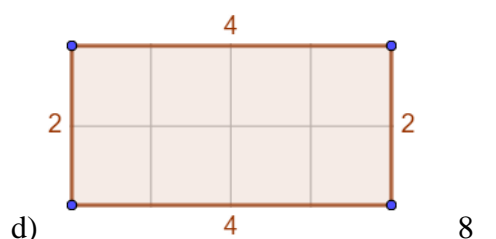
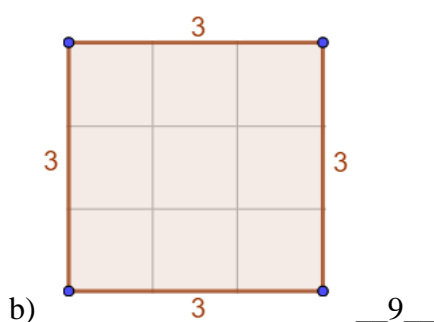
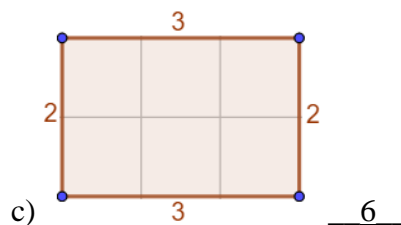
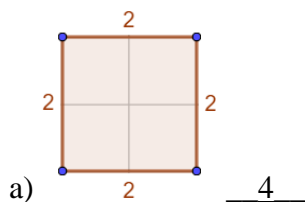
Definimos a área como um número real que determina sendo a porção do plano ocupada por uma figura geométrica plana.

ÁREA UNITÁRIA

Podemos considerar que uma unidade de área é representada pela área que um quadrado de lado 1 ocupa.



Calcule a área das seguintes figuras geométricas:



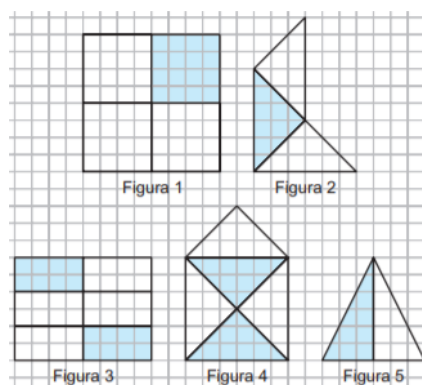
Neste ponto da sequência busca-se o aperfeiçoamento de conceitos previamente trabalhados no problema gerador de área. O objetivo é expor o conceito da maneira mais clara possível para o aluno, e para isto são apresentados uma definição em linguagem acessível, um exemplo e exercícios de aplicação direta.

É sugerido ao professor que utilize de situações práticas para tornar a aprendizagem mais significativa, como por exemplo fazer marcações no chão da sala de aula para que os alunos realizem medições e cálculos e descubram o perímetro e a área de cada região formada, por exemplo destacando no chão uma área de 1 m^2 observando quantos alunos cabem dentro desse espaço para saber quantas pessoas por metro quadrado cabem na sala de aula. Neste momento deixamos a critério do professor que utilize da sua própria criatividade, o importante é que os alunos venham a se sentir inseridos em um contexto de aprendizagem por meio de situações-problema.

Também é interessante que o aluno calcule os perímetros de cada figura para fazer comparações observando que figuras de mesmo perímetro podem ter áreas diferentes. Vale destacar que mesmo trabalhando com exercícios e processos mecânicos esperamos que o aluno aprenda a questionar, fazer comparações e observações.

Vamos continuar resolvendo mais alguns problemas.

4. (OBMEP – 2018) Na Figura 1 a área pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?



Fonte: IMPA, 2018.

- (A) Figura 1
- (B) Figura 2
- (C) Figura 3
- (D) Figura 4
- (E) Figura 5

Primeira solução:

Escrevendo a fração correspondente para cada figura que relaciona a área pintada com a área total, temos:

- Figura 1: $\frac{1}{4}$
- Figura 2: $\frac{1}{3}$
- Figura 3: $\frac{2}{6}$
- Figura 4: $\frac{2}{5}$
- Figura 5: $\frac{1}{2}$

Podemos tanto transformar as frações em números decimais como reescrevê-las sob o mesmo denominador e analisar o numerador. Logo, temos:

- Figura 1: $\frac{1}{4} = \frac{15}{60} = 0,25 \dots$
- Figura 2: $\frac{1}{3} = \frac{20}{60} = 0,33 \dots$
- Figura 3: $\frac{2}{6} = \frac{20}{60} = 0,33 \dots$
- Figura 4: $\frac{2}{5} = \frac{24}{60} = 0,40$
- Figura 5: $\frac{1}{2} = \frac{30}{60} = 0,50$

Portanto, a figura 5 possui a maior área pintada. Alternativa (E).

Segunda solução:

Podemos também avaliar quanto falta para cada figura ser preenchida usando como base a própria área pintada. Observando então o que falta para cada figura, obtemos:

- Figura 1: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Figura 2: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- Figura 3: $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$
- Figura 4: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
- Figura 5: $\frac{1}{2}$

Como a figura 5 é a mais próxima de completar a área total, então é a figura com maior área. Alternativa (E).

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: Encontrar qual das figuras tem a maior região pintada.

- *Quais são os dados? O que eles representam?*

Resposta esperada: O único dado representa a região preenchida com relação ao total de área da figura 1, que no caso é $1/4$.

Elaboração de um plano:

- *Considere as figuras.*
- *Conhece um problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, já resolvemos um problema com malha quadriculada.

- *O outro problema também era sobre área?*

Resposta esperada: Não, o outro problema era sobre perímetro.

- *O enunciado traz a fração da área preenchida para a figura 1.*
- *Qual estratégia poderíamos usar para comparar as áreas preenchidas?*

Resposta esperada: Podemos encontrar as frações correspondentes para cada figura e compará-las.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, pois foram calculadas as frações correspondentes de acordo com o exemplo do próprio enunciado.

Retrospecto:

- *É possível dizer quais figuras tem o perímetro maior?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar que a medida da diagonal do quadradinho é maior do que a medida do seu próprio lado usando um compasso e depois utilizar essa relação para fazer as comparações entre os perímetros de cada figura.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em problemas de comparação de áreas em malha quadriculada.

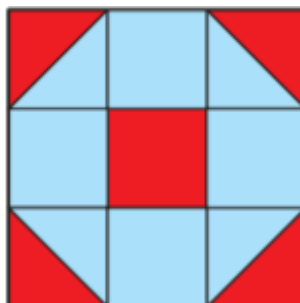
Logo, espera-se que ao resolver o problema 04 o aluno aprenda a comparar áreas em malha quadriculada.

Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar <i>área</i> de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações entre as unidades de medida mais usuais.	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento, área, massa, tempo, temperatura</i> e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo,	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento, massa, tempo, temperatura, área</i> (triângulos e

temperatura, capacidade e volume.	área,	retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
-----------------------------------	-------	---

5. (OBMEP – 2019) O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm^2 . Quanto mede a área pintada de azul?



Fonte: IMPA, 2019.

- (A) 10 cm^2
- (B) 12 cm^2
- (C) 14 cm^2
- (D) 16 cm^2
- (E) 18 cm^2

Solução:

Primeiro note que para calcularmos a área pintada em azul é necessário descobrir quanto mede a área de cada quadradinho e triângulo. Perceba que se unirmos dois triângulos obtemos um quadradinho, logo quatro quadradinhos e quatro triângulos equivalem a seis quadradinhos. Agora observe que a área pintada de vermelho equivale à área de três quadrados, dois dos quais são formados se juntarmos os quatro triângulos vermelhos. Como a área em vermelho mede 6 cm^2 , então cada quadradinho mede 2 cm^2 . Por fim, como a área pintada em azul equivale a seis quadradinhos então teremos $6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2$.

Vejamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya (2006).

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A área pintada em azul.

- *Quais são os dados? O que eles representam?*

Resposta esperada: O único dado é a medida da área pintada em vermelho, que no caso é 6 cm^2 .

- *O enunciado informa quanto vale a área de cada quadradinho?*

Resposta esperada: Não informa.

Elaboração de um plano:

- *Conhece um problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, já resolvemos um problema com malha quadriculada.

- *Esse outro problema também era sobre área?*

Resposta esperada: Sim, o outro problema também era sobre área.

- *A estratégia desse outro problema envolvia calcular alguma área?*

Resposta esperada: Não, a estratégia era sobre a fração correspondente a área preenchida.

- *Então esse outro problema não se aplica nesse caso.*
- *Pense numa estratégia para obter o valor da área da região azul.*
- *Considere a figura.*
- *As regiões azuis e vermelhas são formadas por quais formas geométricas?*

Resposta esperada: São formadas por quadrados e triângulos.

- *É possível encontrar a área desses quadrados e triângulos?*

Resposta esperada: Sim, como podemos decompor cada quadrado em dois triângulos retângulos congruentes, então é possível relacionar a área total com as áreas de cada quadrado e triângulo por meio da região vermelha.

- *Qual é a estratégia para encontrar a área da região azul?*

Resposta esperada: Podemos encontrar as áreas de cada quadrado e triângulo por meio da região vermelha e depois calcular a área da região azul pelo processo inverso.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar que um quadrado vermelho tem a mesma área de um azul e que um triângulo vermelho tem a mesma área de um azul. Portanto, podemos achar a área em azul se calcularmos a área de cada quadrado e triângulo.

Retrospecto:

- *Podemos calcular a área do quadrado maior?*

Resposta esperada: Sim, basta somar a área em vermelho com a área em azul.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em alguns problemas com malha quadriculada e que envolvam o cálculo de área.

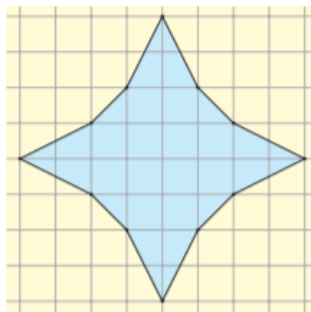
Por fim, ao resolver o problema 05 espera-se que o aluno tenha mais afinidade com o cálculo de área compreendendo que um quadrado pode ser dividido em dois triângulos retângulos de mesma área.

Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar <i>área</i> de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade</i> , recorrendo a transformações

entre as unidades de medida mais usuais.	entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento</i> , massa, tempo, temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
7º ano	
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	(EF07MA31) Estabelecer expressões de <i>cálculo de área</i> de triângulos e de quadriláteros.

6. (OBMEP – 2017) A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?

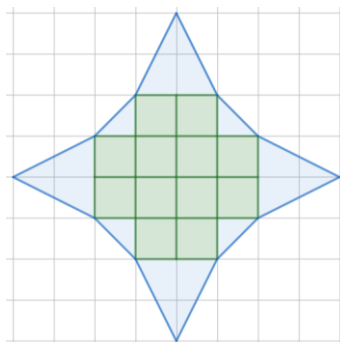


Fonte: IMPA, 2017.

- (A) 12
- (B) 22
- (C) 32
- (D) 64
- (E) 100

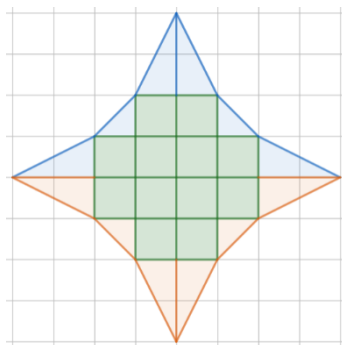
Solução:

Primeiramente destacamos e contamos quantos quadradinhos inteiros fazem parte da figura azul, conforme podemos ver a seguir:



Fonte: Autoria própria.

Em seguida destacamos em *laranja* os triângulos retângulos que irão formar novos quadrados e retângulos juntamente com os triângulos retângulos em *azul*.



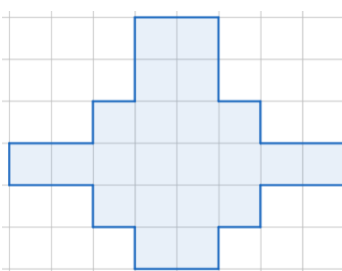
Fonte: Autoria própria.

Agora unindo os triângulos retângulos azuis e laranjas, temos:



Fonte: Autoria própria.

Finalmente, como a nova figura formada possui área equivalente à primeira – tendo em vista que foi realizado apenas o deslocamento de alguns triângulos sem comprometer as áreas – podemos contar o número de quadradinhos equivalente à área figura azul inicial.



Fonte: Autoria própria.

Temos então 22 quadradinhos, e, portanto, a alternativa correta é a (B).

Veamos a seguir um *possível roteiro* para as quatro fases de Polya.

Compreensão do problema:

- *O que se pede no enunciado? Qual é a incógnita?*

Resposta esperada: A soma das áreas dos quadradinhos que equivalem à área da região azul.

- *Quais são os dados?*

Resposta esperada: Não há dados.

Elaboração de um plano:

- *Considere a figura.*
- *Conhece um problema correlato?*

Resposta esperada: Sim, já resolvemos alguns problemas com malha quadriculada.

- *Algum desses problema era sobre área?*

Resposta esperada: Sim, dois problemas eram sobre área.

- *A estratégia de algum desses problemas envolvia calcular alguma área?*

Resposta esperada: Um dos problemas envolvia o cálculo de área.

- *Qual estratégia foi usada nesse outro problema e que pode ser aproveitada no atual problema?*

Resposta esperada: Foi usada a decomposição de um quadrado em dois triângulos.

- *Podemos usar a mesma estratégia ou adaptada para resolver o problema?*

Resposta esperada: Sim, podemos fazer o processo inverso da decomposição de uma figura em duas, ou seja, podemos usar os triângulos retângulos para formar quadrados e retângulos.

- *E os demais quadradinhos da figura?*

Resposta esperada: Os demais quadradinhos são contados normalmente.

Execução do plano:

- *Conseguiu chegar na solução?*

Resposta esperada: Sim, temos uma solução.

- *É possível confirmar os passos que levam à solução?*

Resposta esperada: Sim, podemos confirmar a união de dois triângulos retângulos formam quadrados e retângulos.

Retrospecto:

- *Qual a relação que aprendemos sobre a área de quadrados, retângulos e triângulos retângulos?*

Resposta esperada: Podemos decompor quadrados em dois triângulos retângulos, sendo assim a área de um quadrado é o dobro da área de um retângulo. O mesmo vale para os retângulos e os triângulos retângulos.

- *Será que é possível utilizarmos a mesma estratégia, ou parecida, em outros problemas?*

Resposta esperada: Sim, podemos usar a mesma estratégia, ou semelhante, em alguns problemas com malha quadriculada e que envolvam o cálculo de área.

A partir do problema 06 espera-se que o aluno se familiarize ainda mais com o cálculo de área por meio da malha quadriculada compreendendo que triângulos retângulos de mesma base e altura podem se unir para formar um só retângulo ou que um retângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos de mesma área.

Segue uma tabela com as habilidades trabalhadas segundo a BNCC divididas de acordo com o ano correspondente:

4º ano	
Objeto	Habilidade
Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas.	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar <i>área</i> de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
5º ano	
Medidas de comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade: utilização de unidades convencionais e relações	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas <i>comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade</i> , recorrendo a transformações

entre as unidades de medida mais usuais.	entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
6º ano	
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas <i>comprimento</i> , massa, tempo, temperatura, <i>área</i> (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
7º ano	
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	(EF07MA31) Estabelecer expressões de <i>cálculo de área</i> de triângulos e de quadriláteros.
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros.	(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de <i>cálculo de medida de área</i> de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

APÊNDICE B
SEQUÊNCIA DIDÁTICA
VERSÃO PARA O ALUNO

Caro, aluno!

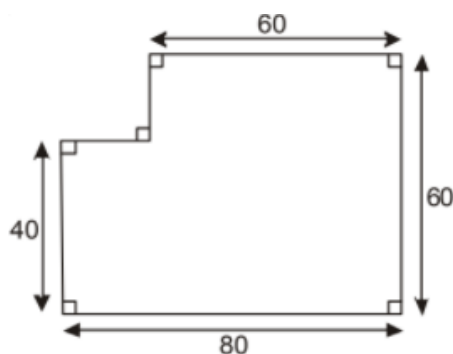
O material a seguir é fruto de uma pesquisa de Mestrado Profissional da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Neste material você encontrará uma sequência didática composta a partir de problemas oriundos de edições da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP) para trabalhar os conceitos de áreas e perímetros de polígonos.

Espera-se que com este produto você possa ter uma rica experiência em sala de aula.

Faça bom proveito!

Problema gerador para o conceito de perímetro:

(OBMEP – 2005) Daniela quer cercar o terreno representado pela figura. Nessa figura dois lados consecutivos são sempre perpendiculares e as medidas de alguns lados estão indicadas em metros. Quantos metros de cerca Daniela terá que comprar?

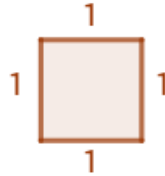


Fonte: IMPA, 2005.

- (A) 140
- (B) 280
- (C) 320
- (D) 1 800
- (E) 4 800

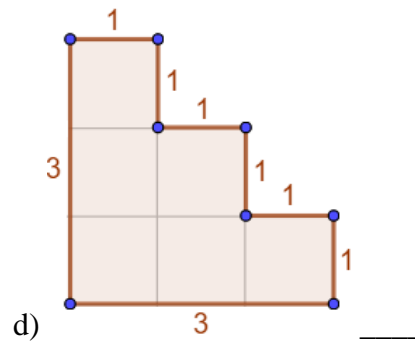
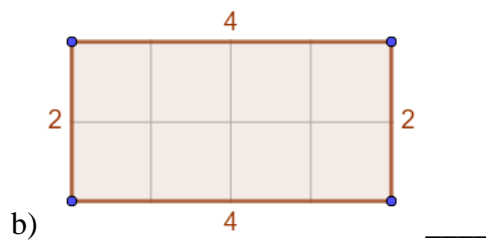
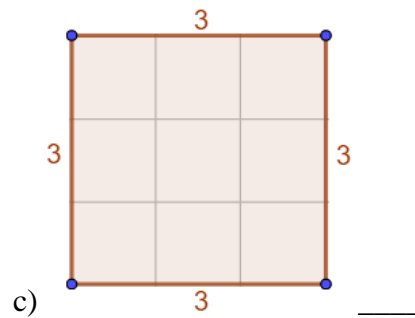
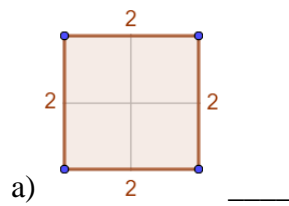
PERÍMETRO

Podemos definir o perímetro como sendo o comprimento do contorno de determinada figura. Vejamos o seguinte exemplo:



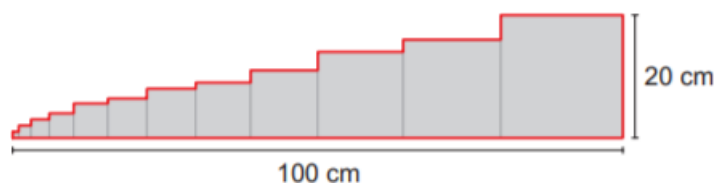
Para calcular o perímetro desse quadrilátero basta somar as medidas dos seus lados, ou seja, **seu perímetro é 4**.

Calcule o perímetro das figuras a seguir:



Vamos resolver mais alguns problemas.

1. (OBMEP – 2017) Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?



Fonte: IMPA, 2017.

- (A) 220 cm
- (B) 240 cm
- (C) 260 cm
- (D) 300 cm
- (E) 400 cm

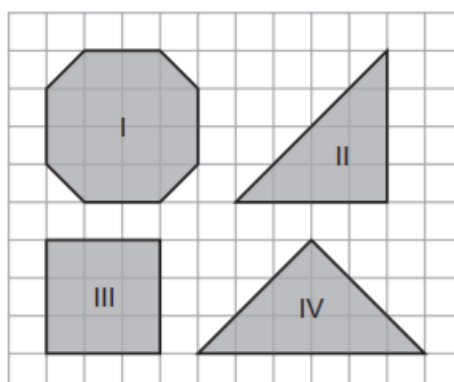
2. (OBMEP – 2016) A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é o perímetro da figura?



Fonte: IMPA, 2016.

- (A) 60 cm
- (B) 66 cm
- (C) 72 cm
- (D) 90 cm
- (E) 108 cm

3. (OBMEP – 2015) Quais dos polígonos desenhados no quadriculado têm o mesmo perímetro?

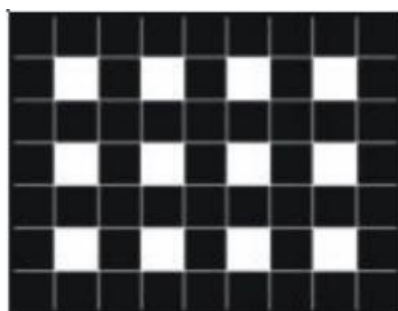


Fonte: IMPA, 2015.

- (A) IV e III
- (B) IV e II
- (C) IV e I
- (D) III e II
- (E) II e I

Problema gerador para o conceito de área:

(OBMEP – 2005) O piso de uma cozinha foi revestido de ladrilhos brancos e pretos, conforme a figura. Cada ladrilho branco custou R\$ 2,00 e cada ladrilho preto custou R\$ 3,00. Quanto foi gasto na compra dos ladrilhos?



Fonte: IMPA, 2005.

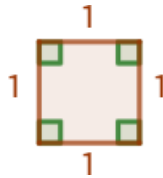
- (A) R\$ 126,00
- (B) R\$ 144,00
- (C) R\$ 174,00
- (D) R\$ 177,00
- (E) R\$ 189,00

ÁREA

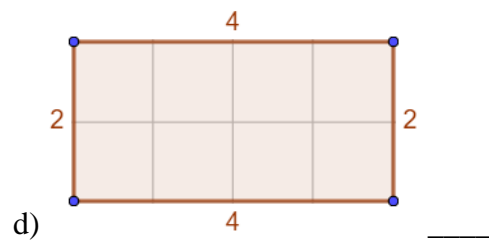
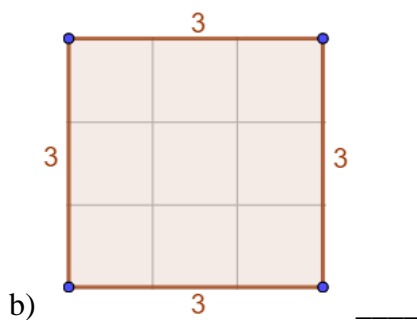
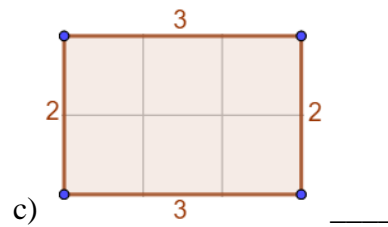
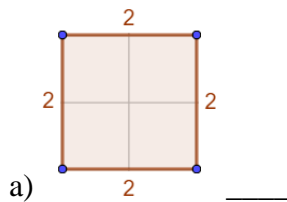
Definimos a área como um número real que determina sendo a porção do plano ocupada por uma figura geométrica plana.

ÁREA UNITÁRIA

Podemos considerar que uma unidade de área é representada pela área que um quadrado de lado 1 ocupa.

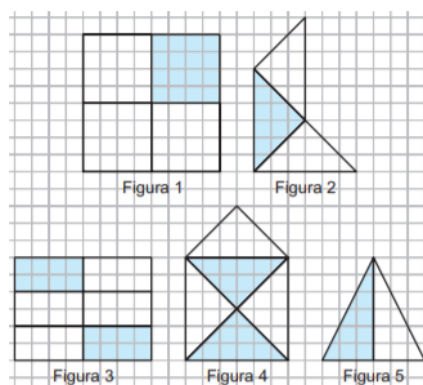


Calcule a área das seguintes figuras geométricas:



Vamos continuar resolvendo mais alguns problemas.

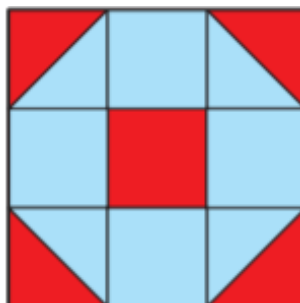
4. (OBMEP – 2018) Na Figura 1 a área pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?



Fonte: IMPA, 2018.

- (A) Figura 1
- (B) Figura 2
- (C) Figura 3
- (D) Figura 4
- (E) Figura 5

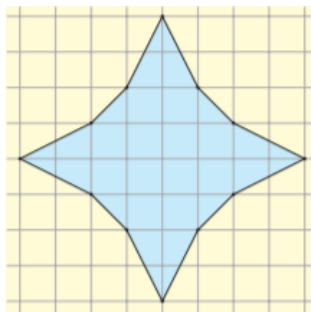
5. (OBMEP – 2019) O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm^2 . Quanto mede a área pintada de azul?



Fonte: IMPA, 2019.

- (A) 10 cm^2
- (B) 12 cm^2
- (C) 14 cm^2
- (D) 16 cm^2
- (E) 18 cm^2

6. (OBMEP – 2017) A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?



Fonte: IMPA, 2017.

- (A) 12
- (B) 22
- (C) 32
- (D) 64
- (E) 100