UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Bauru

Paula Giovana Borgo Massoco

Cônicas: abordagem no Ensino Médio

Bauru
2021

Paula Giovana Borgo Massoco

Cônicas: abordagem no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Orientadora: Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro

Bauru
2021

M419c

Massoco, Paula Giovana Borgo
Cônicas: abordagem no Ensino Médio / Paula Giovana Borgo Massoco. -- Bauru, 2021
114 f. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientadora: Cristiane Alexandra Lázaro

1. Geometria Analítica. 2. Cônicas. 3. Ensino Médio. 4. Atividades práticas. 5. Metodologia. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Paula Giovana Borgo Massoco

Cônicas: abordagem no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cristiane Alexandra Lázaro
UNESP - Faculdade de Ciências - Bauru
Orientadora

Profa. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
UNESP - Faculdade de Ciências - Bauru

Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto
Universidade Federal da Fronteira Sul - Chapecó

Bauru
16 de dezembro de 2020

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu esposo e às minhas filhas.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela coragem de ter voltado para a universidade depois de vinte anos da graduação e pela disposição em conciliar trabalho e estudo para alcançar este degrau na minha formação acadêmica.

Agradeço de modo especial à minha orientadora Professora Doutora Cristiane Alexandra Lázaro, pelo apoio e por sempre me tranquilizar com muita paciência, sou grata também pela sua disponibilidade em me atender sempre que solicitei.

Agradeço à coordenadora do programa PROFMAT Bauru, Professora Doutora Tatiana Miguel Rodrigues pela atenção dada às dificuldades de cada aluno e pelo incentivo para continuarmos no programa. Agradeço também aos demais professores que ministraram as disciplinas ao longo dos dois anos de estudos intensos: Professora Doutora Sônia Cristina Poltroniere da Silva, Professor Doutor Marcelo Reicher Soares, Professor Doutor Agnaldo José Ferrari, professor Doutor Valter Locci, professor Doutor Fabiano Borges da Silva e Professor Doutor Luis Antônio da Silva Vasconcellos.

Agradeço a minha companheira de turma Isabela Brosco pela parceria que estabelecemos nos estudos e pela amizade que cultivamos. Jamais esquecerei o socorro que essa pessoa maravilhosa me prestou no segundo semestre de 2019: tive problemas mecânicos com meu carro e enquanto o guincho levou meu carro de volta para Jaú, a Isabela buscou-me em Pederneiras para que eu não perdesse as aulas do dia. A nossa identificação é tão grande, que mesmo terminando as disciplinas do PROFMAT e nossos encontros semanais, continuamos tendo contato e compartilhamos nossas alegrias, dificuldades, ideias e experiências em sala de aula.

Agradeço o incentivo de todos os meus familiares, especialmente meu pai Sérgio e meu esposo Wagner por terem me ajudado com a confecção de alguns materiais que foram utilizados ao aplicar atividades práticas com os alunos.

Sou grata também pela motivação e envolvimento dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio que participaram das diversas atividades propostas.

RESUMO

A aprendizagem significativa é um desafio para os educadores. Este trabalho apresenta uma proposta para abordar um dos tópicos da Geometria Analítica: Cônicas. Alguns materiais do Ensino Médio não apresentam este tema por ser considerado difícil. A experiência em sala de aula mostra que algumas estratégias para despertar o interesse e motivar o aluno são as atividades práticas, a resolução de problemas e o trabalho em grupo. Quando os discentes são convidados a serem protagonistas da própria aprendizagem e percebem que existem aplicações práticas para determinado conteúdo matemático, este tem mais sentido e o processo de aprendizagem ocorre de modo mais harmonioso, mesmo para os estudantes que não têm tanta facilidade ou identificação com as ciências exatas. Além da proposta de uma série de atividades que fogem das quatro paredes da sala de aula e do livro didático, este trabalho apresenta uma metodologia que pode ser utilizada nas aulas de Matemática, valorizando o que o aluno produz na sala de aula. Esta metodologia propõe que as aulas sejam menos expositivas e que a avaliação ocorra continuamente. Assim, levamos em conta todo o processo de aprendizagem e não apenas o produto final (tradicional prova). O aluno tem papel decisivo na sua formação e além disso, não apenas os conteúdos conceituais e procedimentais são levados em consideração, mas também os atitudinais.

Palavras-chave: Geometria Analítica, Cônicas, Ensino Médio, Atividades práticas, Metodologia.

ABSTRACT

The substancial learning is a challenge to educators. The present paper presents a proposition for the approach of one of the topics of Analytic Geometry: Conics. Some materials in High School do not feature this subject because it is reputed to be difficult. The experience in the classroom shows that some tactics to blossom interest and motivate the student are practical activities, the resolution of problems and group work. Once the students are invited to star in their own learning and realize there are practical applications to a given mathematical content, it makes more sense and the process of learning happens in a more harmonious way, even for the students that are not so skillful or that do not relate to exact sciences. Besides the proposition of a series of activities that flee the four walls of the classroom and the textbook, this paper features a methodology that can be used in Math classes, valuating what the student produces in classroom. This methodology suggests that the classes be less expositive and that the evaluation occurs steadily. Thus, it is taken into account all the process of learning and not only the final product (traditional test). The student has a decisive role in his formation and, moreover, it is not just the conceptual and procedural contents that are taken in consideration, but also the attitudinal.

Keywords: Analytic Geometry, Conics, High School, Practical Activities, Methodology.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O objetivo geral deste trabalho é fazer uma abordagem diferenciada sobre o tema cônicas no Ensino Médio. Para isso, foram elaboradas várias sequências didáticas envolvendo a elipse, a hipérbole e a parábola. Algumas atividades apresentam interdisciplinaridade com Artes e Física. As onze primeiras atividades propostas foram aplicadas no segundo semestre de 2019 para uma turma da terceira série do Ensino Médio com vinte e quatro alunos da escola particular NIE, em Jaú-SP. Apenas a última atividade proposta não foi aplicada por ter sido idealizada após o encerramento do ano letivo.

Os objetivos específicos do trabalho são apresentar:

- informações sobre a história do surgimento da Geometria Analítica.
- os conceitos básicos da Geometria Analítica que são abordados no Ensino Médio.
- uma metodologia que tem sido usada nas aulas de Matemática.
- uma série de sequências didáticas envolvendo elipse, hipérbole e parábola.

A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, da área de Matemática e suas Tecnologias, propõe para a etapa do Ensino Médio a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para isso, o documento propõe uma abordagem dos conhecimentos já explorados no Ensino Fundamental de modo inter-relacionado. Desta forma, os estudantes podem construir uma visão integrada da Matemática, na perspectiva de suas aplicações no cotidiano. Na etapa final da educação básica, é preciso considerar a realidade como referência: a vivência cotidiana dos discentes é impactada pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mundo de trabalho, pelos projetos pessoais e pelas mídias sociais. O uso das tecnologias digitais para a investigação matemática é extremamente útil atualmente. Outro aspecto fundamental para o desenvolvimento das habilidades de investigação e construção de modelos está baseada na resolução de problemas.

O presente trabalho está organizado em seis capítulos.

No Capítulo 2 são abordados aspectos históricos. Embora existam divergências sobre quem inventou a Geometria Analítica, a maioria dos historiadores considera que os matemáticos René Descartes e Pierre de Fermat contribuíram no século XVII de maneira decisiva para a origem do assunto.

Os conceitos de plano cartesiano, distância entre dois pontos, condição de alinhamento e a equação da reta obtida a partir desta condição são requisitos que antecedem a obtenção da equação da circunferência, da elipse, da hipérbole e da parábola, realizadas no Capítulo 3.

No Capítulo 4, é apresentado um relato de experiência didática interessante que cria uma rotina e deixa as aulas mais dinâmicas e menos expositivas. Esta metodologia pode ser utilizada nas aulas de Matemática de qualquer nível de ensino. Atualmente as metodologias ativas, que colocam o estudante como protagonista do seu processo de aprendizagem, tem tido destaque. Segundo Moran (2018), metodologias ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, de forma flexível e interligada. Baseado no princípio de que se aprende fazendo, desde 1994 uma metodologia baseada no registro sistemático da participação de cada aluno tem sido aplicada com considerável eficácia.

O Capítulo 5 é subdividido em 12 partes em que foram propostas diversas atividades aplicadas com os alunos da terceira série do Ensino Médio. As atividades elaboradas têm características das metodologias ativas, uma vez que o papel do professor é de mediador do conhecimento e o aluno participa ativamente do processo de aprendizagem. Segue uma breve descrição das atividades:

- Cortes no cone: utilizando material concreto os alunos puderam visualizar a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola obtidas a partir de diferentes planos interceptando o cone.

- Procurando elipses: os alunos foram desafiados a procurar elipses pelas dependências da escola e fotografá-las com o próprio celular.

- Construção de circunferências e elipses no chão: esta atividade teve caráter interdisciplinar com Artes pois os alunos exercitaram sua criatividade usando barbante e giz colorido.

- Utilizando o GeoGebra: com um roteiro bem direcionado, o GeoGebra foi utilizado para que os discentes compreendessem a propriedade que define a elipse, a hipérbole e a parábola.

- Dobraduras: construindo a elipse, a hipérbole e a parábola no papel manteiga com dobras de segmentos de reta, que são as tangentes destas curvas. Após a realização da atividade foi ratificado que os alunos sentem-se participantes do processo de aprendizagem quando são convidados a pôr a "mão na massa".

- Aplicações da elipse: a órbita da Terra, a reflexão do som num teatro e a iluminação na cadeira do dentista são alguns exemplos que ilustram a presença da elipse no nosso cotidiano.

- Exercícios envolvendo elipses: resolução de questões do ENEM [1] e de provas de vestibulares.

- Aplicações da hipérbole: os telescópios de reflexão e curvas hiperbólicas na arquitetura.

- Exercícios envolvendo hipérboles.

- Aplicações da parábola: a trajetória de projéteis lançados obliquamente e a propriedade refletora do parábola nos faróis dos carros.

- Exercícios envolvendo parábolas: questões do ENEM e provas de vestibular.

- A construção de uma mesa de bilhar em formato elíptico.

Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões obtidas e a percepção da realização das atividades.

Em 2019 não foi possível aplicar as atividades com os alunos da escola pública estadual Dr Lopes Rodrigues, pois as aulas ministradas para o Ensino Médio eram do componente curricular de Física. Inicialmente, a intenção era aplicar, no primeiro semestre de 2020, as mesmas atividades aplicadas na escola particular, com as três turmas da terceira série do Ensino Médio da escola pública (especialmente escolhidas na atribuição de aulas com este objetivo). Infelizmente, com a pandemia do Coronavírus, as aulas presenciais foram suspensas em março deste ano, bem no início do estudo da Geometria Analítica. Então, não foi possível concretizar o que foi planejado para este ano letivo, uma vez que as atividades perderiam o encanto se aplicadas remotamente. Porém, nos próximos anos existe a possibilidade de aplicação e aperfeiçoamento das atividades deste trabalho.

[1] Exame Nacional do Ensino Médio

Mesmo sem ter aplicado as atividades na escola pública, é possível prever algumas dificuldades que provavelmente seriam enfrentadas: as classes na escola pública são mais numerosas (com cerca de trinta e cinco alunos) e, apesar da escola ter uma sala de informática, alguns computadores não podem ser utilizados por falta de manutenção. Estes problemas seriam superados com a formação de grupos que se revezariam na realização das atividades; por exemplo, enquanto alguns grupos fizessem as atividades no GeoGebra, outros ficariam na sala de aula fazendo a atividade com dobraduras e posteriormente, haveria um rodízio dos espaços.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS HISTÓRICOS

2.1 História da Geometria Analítica

Neste capítulo, a referência utilizada para descrever a vida e a obra dos matemáticos Descartes e Fermat, bem como os outros aspectos que envolvem a história da Geometria Analítica foi Eves (2004).

Há divergências de opinião sobre quem inventou a Geometria Analítica e mesmo sobre a época dessa invenção. Os gregos antigos dedicaram-se à álgebra geométrica e a ideia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas. O grego Apolônio deduziu o cerne de sua geometria das secções cônicas de equivalentes geométricos de certas equações cartesianas dessas curvas, uma ideia que parece ter-se originado com Menaecmo. No século XIV Nicole Oresme antecipou outros aspectos da Geometria Analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente (*latitudo*) com a independente (*longitudo*), à medida que se permitia que esta última sofresse pequenos acréscimos. Os que defendem Oresme como o inventor da Geometria Analítica argumentam com esse aspecto de seu trabalho, que seria a primeira manifestação explícita da equação da reta, e com algumas outras noções a que ele chegou envolvendo espaços de dimensões superior. Um século depois de ter sido escrito, o texto de

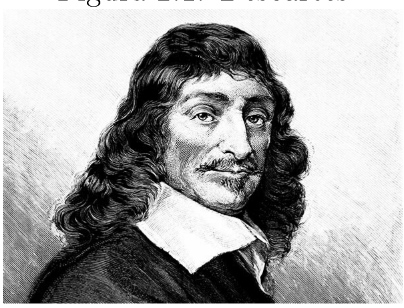
Oresme foi reproduzido e amplamente divulgado, o que pode ter influenciado matemáticos posteriores para o estudo da Geometria Analítica.

A essência da Geometria Analítica está na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes da Geometria Analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois das contribuições dadas por esses dois matemáticos à Geometria Analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados.

René Descartes nasceu perto de Tours, na França, em 1596. Aos oito anos de idade foi enviado para a escola jesuíta em La Flèche. Foi então que desenvolveu (de início devido à sua saúde frágil) o hábito que o acampanhou por toda a vida de ficar até tarde na cama de manhã. Posteriormente, Descartes consideraria essas duas horas matinais de descanso como seus períodos de tempo mais produtivos. Em 1612 deixou a escola e foi para Paris onde, logo depois, em companhia de Mersenne e Mydorge passou a dedicar parte de seu tempo ao estudo da Matemática. Em 1617, juntando-se ao exército do príncipe de Maurício de Orange, iniciou uma carreira militar de vários anos. Depois de abandonar a vida militar passou quatro ou cinco anos viajando pela Alemanha, Dinamarca, Holanda, Suíça e Itália. Retornando a Paris, onde ficaria uns dois anos, continuou seus estudos matemáticos e suas contemplações filosóficas e, por algum tempo, dedicou-se a construir instrumentos ópticos. Depois disso resolveu mudar para a Holanda, então no auge de seu poder, onde viveu cerca de vinte anos, consagrando-se à filosofia, à matemática e à ciência. Em 1649, relutantemente, foi para a Suécia a convite da rainha Cristina. Poucos meses mais tarde ele contraiu uma infecção pulmonar, vindo a morrer em Estocolmo no início de 1650. Grande matemático e filósofo foi sepultado na Suécia e os esforços visando levar seus restos mortais para a França não tiveram êxito. Só depois de dezessete anos de sua morte é que seus ossos foram levados para a França e reenterrados em Paris, exceto os da mão direita que foram guardados como "souvenir" pelo alto funcionário francês incumbido do transporte da ossada.

Foi durante a sua estada de vinte anos na Holanda que Descartes produziu seus escritos. Os primeiros quatro anos foram gastos para escrever *Le monde*, uma descrição física do Universo que acabou sendo abandonada incompleta quando Descartes soube da condenação de Galileu pela Igreja. Pôs-se então a escrever um tratado filosófico sobre a ciência universal sob o título de *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências); acompanhavam esse tratado três apêndices: *La dioptrique, Les météores e La géométrie.* O *Discours*, com os apêndices, foi publicado em 1637; a contribuição de Descartes à Geometria Analítica aparece no último desses três apêndices. Em 1641 Descartes publicou um trabalho intitulado *Meditationes* devotado grandemente à explanação de suas ideias filosóficas esboçadas no *Discours.* Em 1644 lançou *Principia philosophiae*, um trabalho que apresenta algumas leis da natureza imprecisas e uma teoria cosmológica inconsistente envolvendo vórtices.

Figura 2.1: Descartes



Fonte: EVES, 2004, p. 384.

La géométrie, o famoso terceiro apêndice de *Discours*, ocupa cerca de cem páginas do trabalho completo e se divide em três partes. Trata-se da única publicação matemática de Descartes. A primeira parte contém uma explanação de alguns dos princípios da geometria algébrica e revela um avanço real em relação aos gregos no que se refere à aritmetização da Geometria.

Existem duas lendas que descrevem o estalo através do qual Descartes teria tido sua visão inicial da Geometria Analítica. De acordo com uma delas isso ocorreu num sonho. Na véspera do dia de São Martinho, 10 de novembro de 1616, no acampamento de inverno de sua tropa às margens do Danúbio, Descartes passou pela experiência de três sonhos singularmente nítidos e coerentes que, segundo ele, mudaram o curso de sua vida. Os sonhos, conforme suas palavras, iluminaram os propósitos de sua vida e determinaram seus futuros esforços revelando-lhe uma "ciência maravilhosa" e uma "descoberta assombrosa". Descartes nunca revelou explícita e exatamente do que se tratava, mas há suposições de que essa ciência seria a Geometria Analítica, ou a aplicação da álgebra à geometria. Só dezoito anos mais tarde ele iria expor algumas de suas ideias em seu *Discours*. Outra lenda, parecida com a história da queda da maçã de Isaac Newton, conta que o estalo inicial da Geometria Analítica teria ocorrido a Descartes ao observar uma mosca que caminhava pelo forro de seu quarto junto a um dos cantos. Teria chamado a sua atenção que o caminho da mosca sobre o forro poderia ser descrito se, e somente se, a relação ligando as distâncias dela às paredes adjacentes fosse conhecida. Embora não se saiba se esses fatos realmente ocorreram, é inquestionável seu valor pedagógico.

Ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da Geometria Analítica moderna, o assunto também ocupava a atenção de outro gênio matemático francês, Pierre de Fermat. A atribuição da prioridade a Fermat se apoia numa carta escrita a Roberval em setembro de 1636, na qual afirma que suas ideias já tinham então sete anos. Os detalhes a respeito apareceram no artigo *Isogoge ad locus planos et solidos*, publicado postumamente. Nele encontramos a equação geral da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérboles, elipses e parábolas. Num trabalho sobre tangentes e quadraturas, concluído antes de 1637, Fermat definiu analiticamente muitas curvas novas. Por outro lado, Descartes apresentou poucas curvas novas, geradas por movimentos mecânicos, Fermat propôs muitas curvas novas, definidas por equações algébricas.

As curvas $x^m y^n = a$, $y^n = ax^m$ e $r^n = a.\theta$ são ainda conhecidas, respectivamente, como hipérboles, parábolas e espirais de Fermat. Também se deve a Fermat, a curva que posteriormente seria chamada *feiticeira de Agnesi*, em alusão à matemática, linguista e filósofa do século XVIII, Maria Gaetana Agnesi.

Assim, em grande escala, onde Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da Geometria Analítica. Fermat usou a notação de Viète para escrever seu trabalho que, assim, tinha uma aparência arcaica em termos de simbolismo quando comparado ao de Descartes.

Segundo um registro aparentemente confiável, Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne, perto de Toulouse, França, em 17 de agosto de 1601. Sabe-se que morreu em Castres ou Toulouse em 12 de janeiro de 1665. Em sua laje tumular, originalmente na igreja dos agostinianos em Toulouse e depois transferida para o museu local, consta a data precedente como a da morte de Fermat, com cinquenta e sete anos de idade. Devido a esse conflito de datas costuma-se escrever (1601?-1665) para nascimento e morte de Fermat. De fato, por várias razões, seu ano de nascimento, a julgar pelas informações de vários escritores, varia de 1590 a 1608.

Fermat era filho de um comerciante de couro e recebeu sua educação inicial em casa. Com a idade de trinta anos alcançou o posto de conselheiro do parlamento de Toulouse onde sua atuação se pautou pelo cumprimento do dever, modesta e escrupulosamente. Como advogado humilde e discreto, reservou o melhor de seu tempo de lazer à Matemática. Embora tenha publicado pouco durante sua vida, manteve correspondência científica com muitos dos principais matemáticos de seu tempo e, dessa maneira, exerceu considerável influência sobre seus contemporâneos. Fermat enriqueceu tantos ramos da Matemática com tantas contribuições importantes que é considerado o maior matemático francês do século XVII.

Figura 2.2: Fermat

Fonte: EVES, 2004, p. 390.

CAPÍTULO 3

CONCEITOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste capítulo são abordados os conceitos básicos de Geometria Analítica, pré-requisitos para o estudo da equação da circunferência e das cônicas. Deduzimos a fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, a equação geral da reta bem como a equação reduzida da circunferência, da elipse, da hipérbole e da parábola. Para a elaboração deste capítulo consultamos o volume 7 da coleção **Fundamentos de Matemática elementar**, 1993 do Gelson Iezzi, o volume 3 de IEZZI et al., **Matemática:** ciência e aplicações, 2016 e o livro da Coleção PROFMAT: **Geometria Analítica**, 2017 cujos autores são Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhaylla Crissaff.

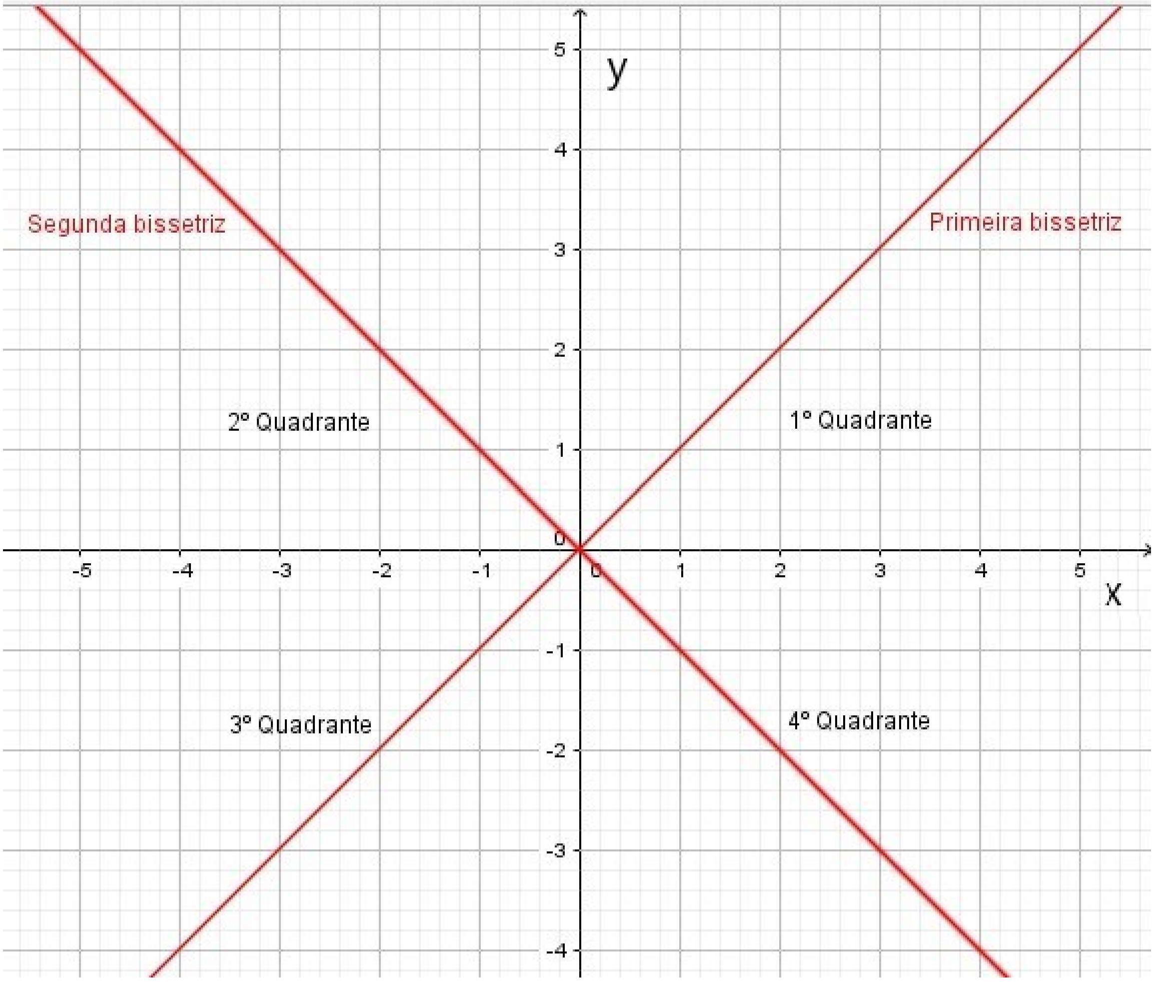
3.1 O plano cartesiano

A cada ponto P do plano cartesiano corresponde um par ordenado (x, y) de números reais e, inversamente, cada par (x, y) tem como seu correspondente um ponto P do plano. Escrevemos $P(x, y)$ para indicar o ponto P e suas coordenadas.

Dois eixos orientados x e y são dispostos ortogonalmente, dando origem à divisão do plano em quatro partes, cada uma das quais denominada quadrante. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como mostra a figura 3.1. Os eixos e a interseção entre eles são denominados, respectivamente, eixo das abscissas (eixo x), eixo das ordenadas (eixo y) e origem (O) do sistema de coordenadas.

A reta que divide ao meio os quadrantes ímpares é chamada primeira bissetriz e a que divide os quadrantes pares é a segunda bissetriz (figura 3.1).

Figura 3.1: Plano cartesiano



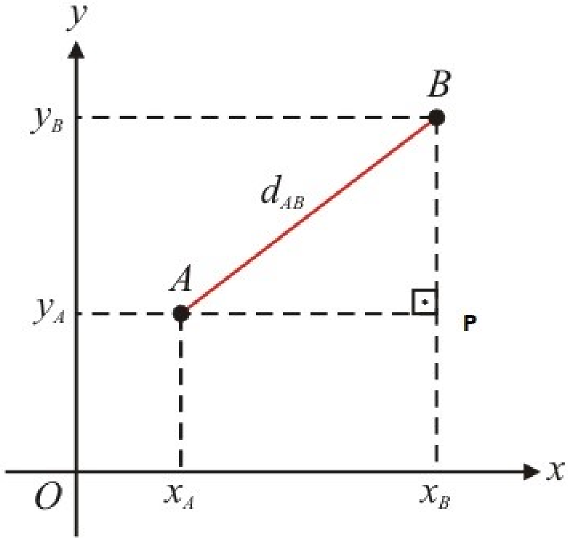
Fonte: Elaborada pela autora.

3.2 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos do plano cartesiano, chama-se **distância** entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

Determinamos a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, indicada por d_{AB} (figura 3.2).

Figura 3.2: Distância entre dois pontos



Fonte - https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html.

Na própria construção da figura auxiliar 3.2, aparece naturalmente o triângulo ABP, que, evidentemente, é retângulo em P, pois PA é horizontal e PB é vertical.

Podemos, pois, aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo: $d_{AB}^2 = (PA)^2 + (PB)^2$.
Observação: Na figura 3.2, B está à direita de A. Se B estivesse em qualquer posição, temos $PA = |x_B - x_A|$ e $PB = |y_B - y_A|$.

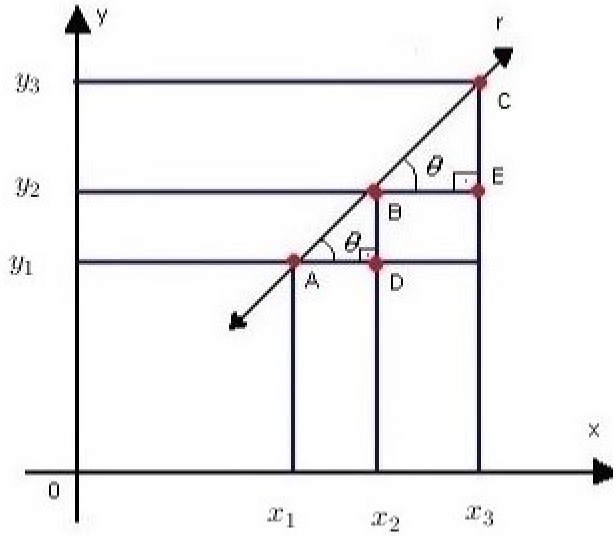
Assim, $d_{AB}^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$ e

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{|x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2}}.$$

3.3 Condição de alinhamento de três pontos

Para que três pontos distintos estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a uma condição que será deduzida com a utilização da figura 3.3, na qual $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ estão na mesma reta.

Figura 3.3: Condição de alinhamento de três pontos



Fonte - https://www.somatematica.com.br/emedio/retas/retas4.php.

Como os triângulos retângulos BCE e ABD são semelhantes, pelo caso AA (Ângulo-Ângulo), decorre a proporção $\dfrac{BE}{AD} = \dfrac{CE}{BD}$, que pode ser escrita como

$$\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}.$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$(x_3 - x_2).(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1).(y_3 - y_2) = 0.$$

Então,

$$x_3y_2 - x_3y_1 - x_2y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_2y_2 + x_1y_3 - x_1y_2 = 0.$$

Cancelando os termos simétricos e reorganizando-os obtemos:

$$x_3y_2 - x_3y_1 + x_2y_1 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_1y_2 = 0 \Rightarrow x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0.$$

Esta última igualdade pode ser escrita sob a forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Concluímos, então que: Se três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ são colineares, então:

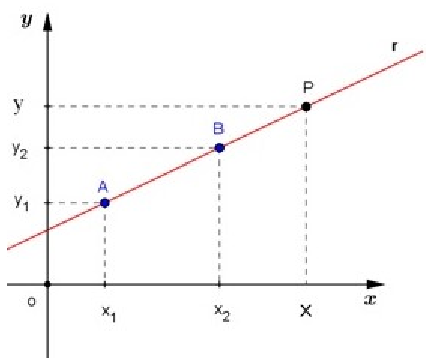
$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim, **para constatar a colinearidade de três pontos, basta calcular um determinante de terceira ordem que contenha em cada linha a abscissa de um dos pontos dados, a respectiva ordenada e o número 1, mantida essa ordem. Se tal determinante for nulo, e só nesse caso, os pontos estarão alinhados.**

3.4 Equação geral da reta

Consideramos a reta r, caracterizada por dois de seus pontos, $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (figura 3.4).

Figura 3.4: Reta passando pelos pontos A e B



Fonte - https://www.centralexatas.com.br/matematica/geometria-analitica-estudo-da-reta/611017.

Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico de r, os pontos A, B e P respeitam a condição de alinhamento:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando esse determinante obtemos:

$$x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_2y_1 - x_1y = 0 \Rightarrow x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Lembrando que x_1, x_2, y_1 e y_2 são valores reais fixos, podemos fazer:

$$y_1 - y_2 = a,\ x_2 - x_1 = b \text{ e } x_1y_2 - x_2y_1 = c.$$

Assim, obtemos:

$$ax + by + c = 0,$$

chamada **forma geral da equação da reta**.

Por extensão, dizemos que qualquer equação do 1° grau com duas variáveis, do tipo $ax + by + c = 0$, com a, b, $c \in \mathbb{R}$, representa a equação de uma reta, sendo x e y as coordenadas de um ponto genérico da reta.

3.5 Equação da circunferência

Definição 3.1. Dados um ponto O, pertencente a um plano α, e uma distância r não nula, chama-se **circunferência** $\mathcal{C}$ o conjunto dos pontos de α que estão à distância r do ponto O.

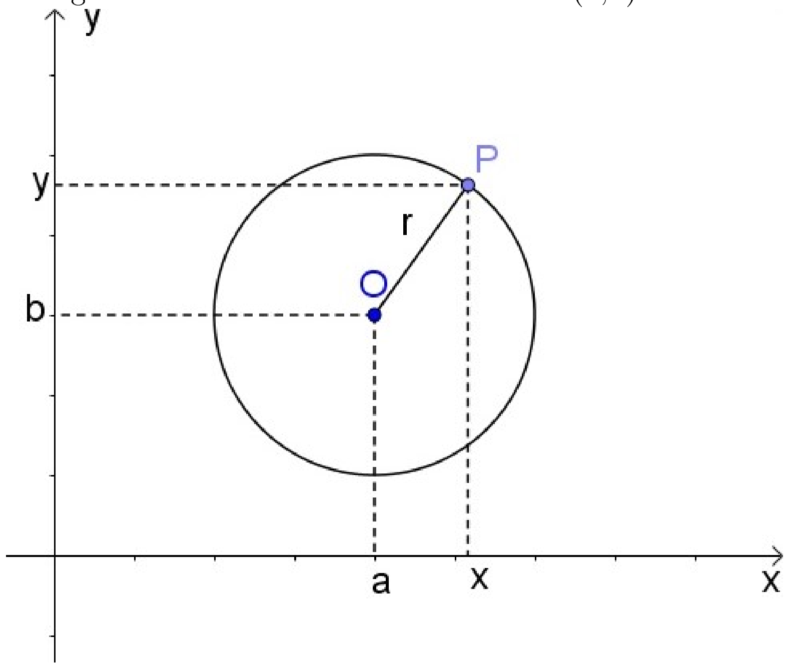
$$\mathcal{C} = \{P \in \alpha / |PO| = r\}$$

Consideramos a circunferência $\mathcal{C}$ de centro $O(a, b)$ e raio r (figura 3.5).

Um ponto $P(x, y)$ pertence a $\mathcal{C}$ se, e somente se, a distância $|PO|$ é igual ao raio r.

$$P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |PO| = r$$

Figura 3.5: Circunferência de centro O(a,b) e raio r



Fonte: Elaborada pela autora.

Chama-se equação da circunferência aquela que é satisfeita exclusivamente pelos pontos $P(x, y)$ pertencentes à curva. Pela definição, temos que um ponto genérico $P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ verifica a condição $|PO| = r$. Portanto, temos:

$$P \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |PO| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

e, daí, vem a equação reduzida da circunferência:

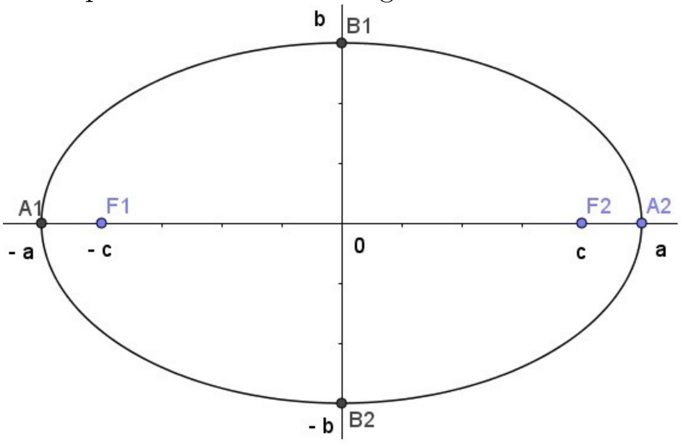
$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}.$$

3.6 Equação da elipse

Definição 3.2. Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{E} = \{P / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Figura 3.6: Elipse com centro na origem e focos no eixo das abscissas



Fone: Elaborada pela autora.

Elementos principais:

F_1 e F_2: focos;

O: centro;

$A_1A_2 = 2a$: eixo maior;

$B_1B_2 = 2b$: eixo menor;

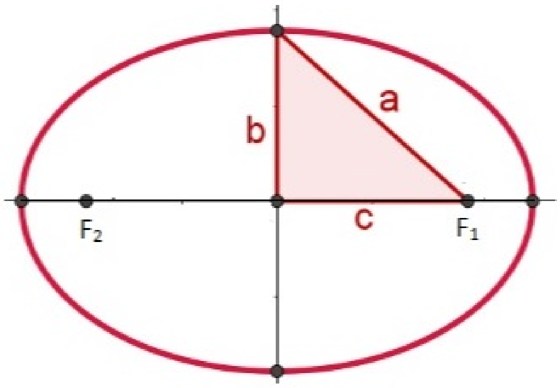
$F_1F_2 = 2c$: distância focal;

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$.

A excentricidade de uma elipse indica se ela é mais ou menos achatada e $0 \leq e \leq 1$.

Relação notável para elipse com focos sobre o eixo x: $a^2 = b^2 + c^2$ (figura 3.7).

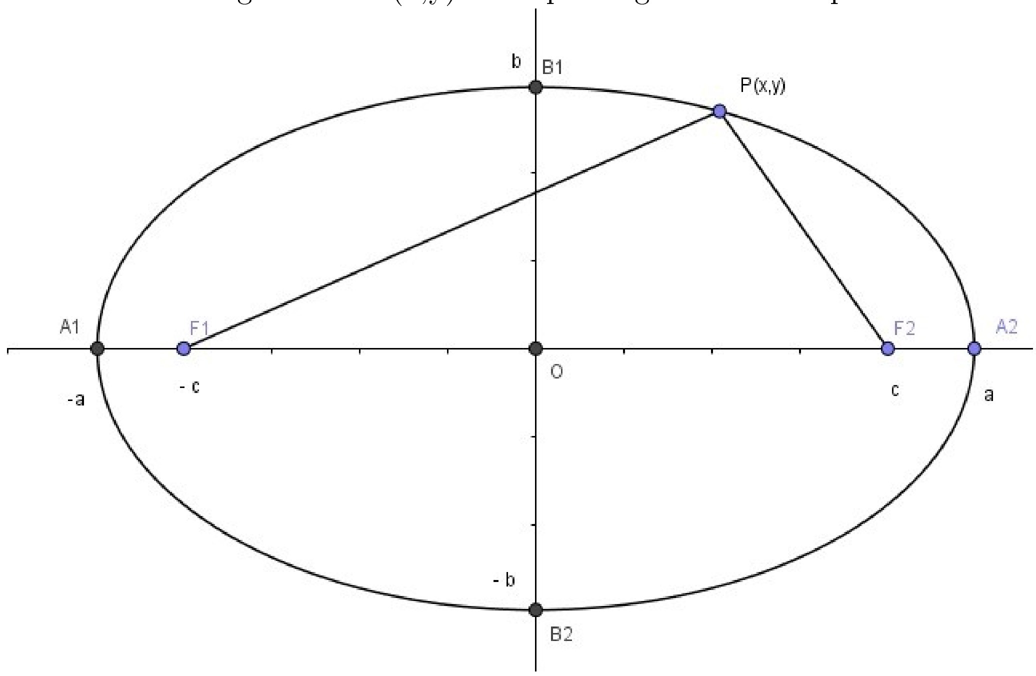
Figura 3.7: Relação na elipse



Fonte - https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-elipse.htm.

3.6.1 Equação da elipse com centro na origem

Figura 3.8: P(x,y) é um ponto genérico da elipse



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja a elipse $\mathcal{E}$

$P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow |PF_2 + PF_1| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos:

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4xc.$

Dividindo os dois membros por 4 obtemos:

$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc.$

Elevando os dois membros ao quadrado obtemos:

$a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + xc)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2(x+c)^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2(x^2 + 2xc + c^2) + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + x^2c^2 \Leftrightarrow$

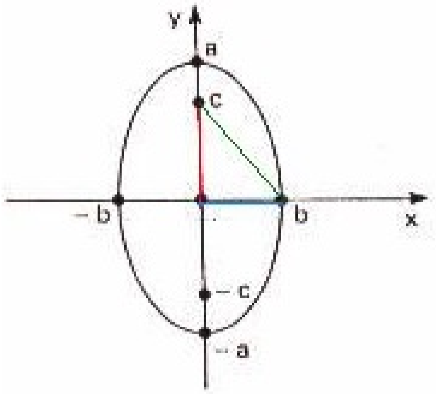
$\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.
Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $a^2 - c^2 = b^2$. Assim:
$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
Dividindo por a^2b^2, temos **a equação reduzida de uma elipse de semieixos** a **(maior) e** b **(menor), com centro na origem e eixo maior contido no eixo x** (figura 3.8):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Caso o eixo maior da elipse e os focos estejam sobre o eixo das ordenadas (figura 3.9), por raciocínio análogo, chegamos à equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}.$$

Figura 3.9: Elipse com centro na origem e focos no eixo das ordenadas



Fonte - https://brasilescola.uol.com.br/matematica/elipse.htm.

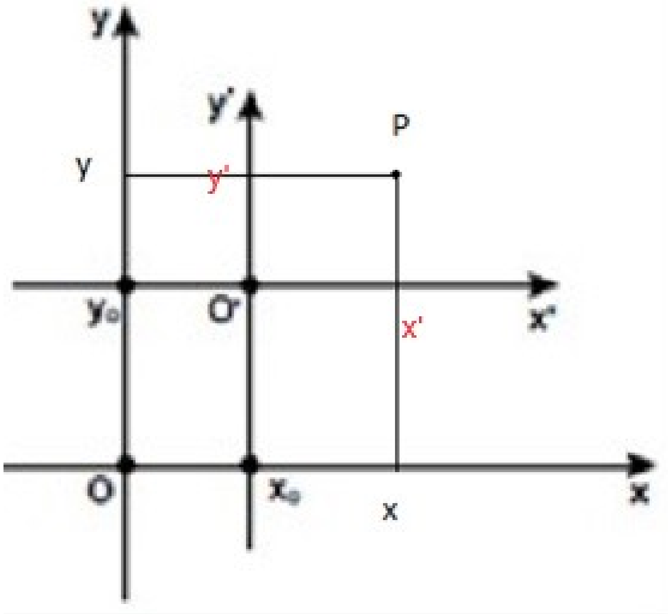
3.6.2 Translação de sistema de coordenadas e equação da elipse com centro fora da origem

Sejam $P(x, y)$ e $O'(x_0, y_0)$ dois pontos referidos a um sistema cartesiano $x0y$. Se $x'0'y'$ é outro sistema de coordenadas tal que $x' \parallel x$, $y' \parallel y$ e x', y' têm respectivamente o mesmo sentido positivo de x, y, dizemos que $x'0'y'$ foi obtido por uma translação de $x0y$ (figura

3.10).

Existe uma relação entre as coordenadas de P no "novo" sistema $x'0'y'$ e no "antigo" $x0y$. Essas coordenadas são dadas por: $P(x,y) = P(x',y') = P(x-x_0, y-y_0)$.

Figura 3.10: Translação de sistema de coordenadas



Fonte - https://pt.slideshare.net/ellensouza74/aula-transformaes-de-coordenadas.

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \Rightarrow x' = x - x_0 \\ y = y_0 + y' \Rightarrow y' = y - y_0 \end{cases}$$

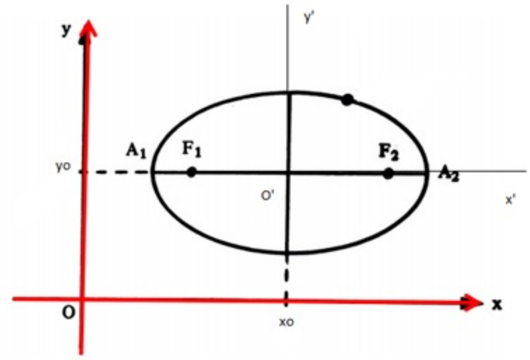
Se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 \parallel x$, sua equação em relação ao sistema $x'0'y'$ é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, de acordo com a translação de eixos acima, a equação da elipse relativa ao sistema $x0y$ (figura 3.11) é:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}.$$

Figura 3.11: Elipse com centro fora da origem e focos paralelos ao eixo x

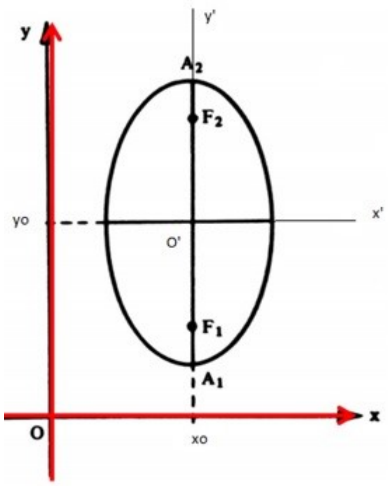


Fonte: Elaborada pela autora.

Analogamente, se uma elipse tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 \parallel y$ (figura 3.12), sua equação relativa ao sistema $x0y$ é:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1}.$$

Figura 3.12: Elipse com centro fora da origem e focos paralelos ao eixo y



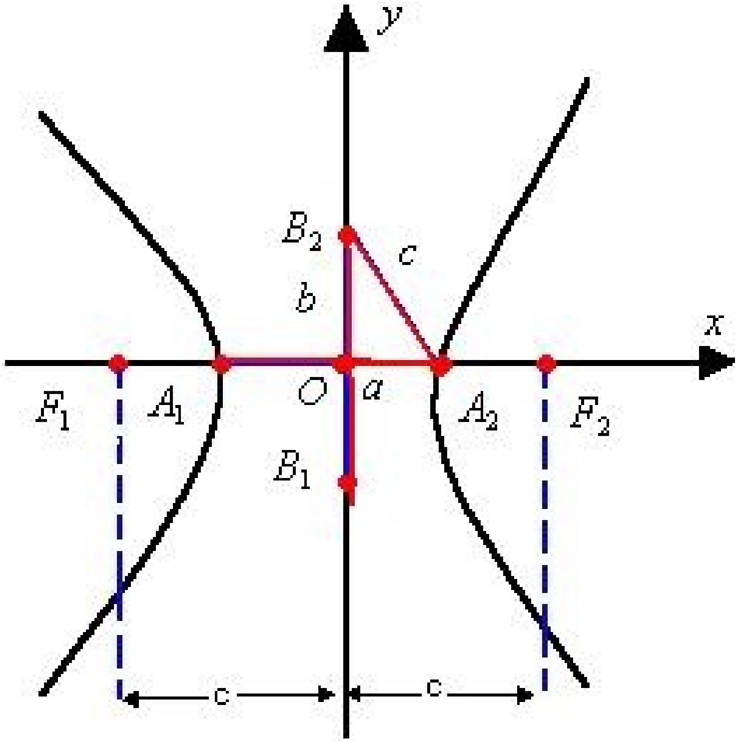
Fonte: Elaborada pela autora.

3.7 Equação da hipérbole

Definição 3.3. Uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$:

$$\mathcal{H} = \{P/|d(P,F_1) - d(P,F_1)| = 2a\}, 0 < a < c, d(F_1,F_2) = 2c.$$

Figura 3.13: Hipérbole com centro na origem



Fonte - https://brasilescola.uol.com.br/matematica/hiperbole.htm.

Elementos principais:

F_1 e F_2: focos;

O: centro;

A_1A_2: eixo real;

B_1B_2: eixo imaginário;

$2c$: distância focal;

$2a$: medida do eixo real;

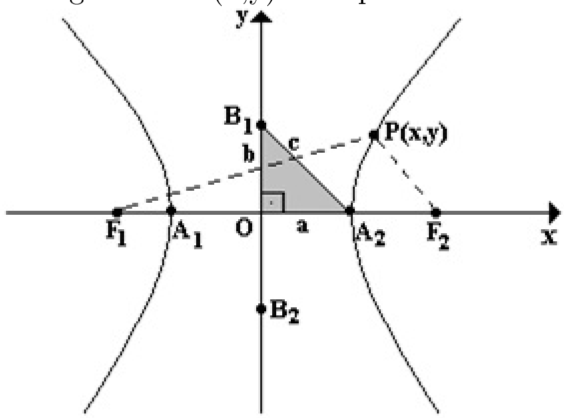
$2b$: medida do eixo imaginário;

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$;

Relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$.

3.7.1 Equação da hipérbole com centro na origem

Figura 3.14: Ponto genérico P(x,y) na hipérbole com centro na origem



Fonte - https://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-analitica-hiperbole.html.

Seus focos são os pontos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, $P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$. Assim,

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+2cx+c^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Dividindo os dois membros da equação por 4 obtemos:

$$cx - a^2 = (\pm)a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ao quadrado os dois membros da equação obtemos:

$$(cx-a^2)^2 = a^2[(x-c)^2+y^2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2) + a^2y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 - a^2 = b^2$. Assim, $x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

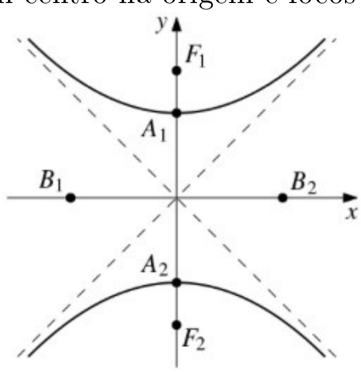
Dividindo por a^2b^2, temos a **equação reduzida da hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo das abscissas** (figura 3.14):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Analogamente, se a hipérbole apresenta os focos sobre o eixo das ordenadas (figura 3.15), obtemos a equação:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}.$$

Figura 3.15: Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo das ordenadas



Fonte - https://querobolsa.com.br/enem/matematica/equacao-da-hiperbole.

3.7.2 Equação da hipérbole com centro fora da origem

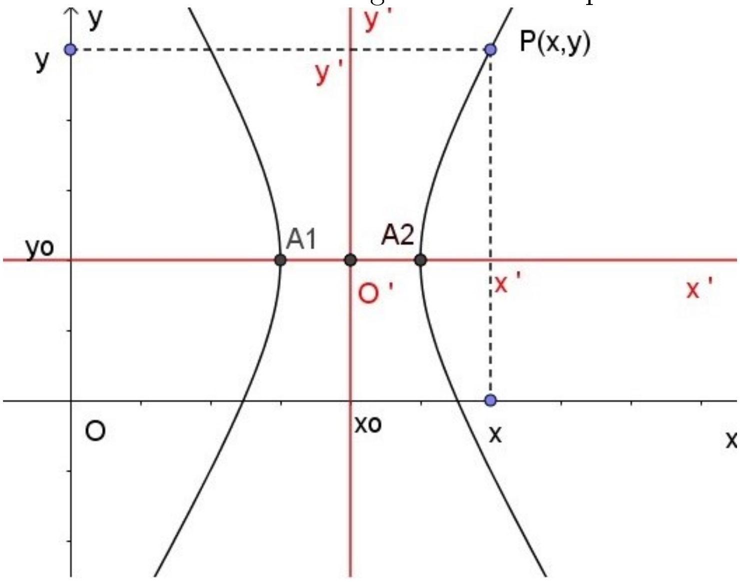
Se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 \parallel x$ (figura 3.16), sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'O'y'$ é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Portanto, sua equação relativa ao sistema xOy é:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}.$$

Figura 3.16: Hipérbole com centro fora da origem e eixo real paralelo ao eixo das abscissas.

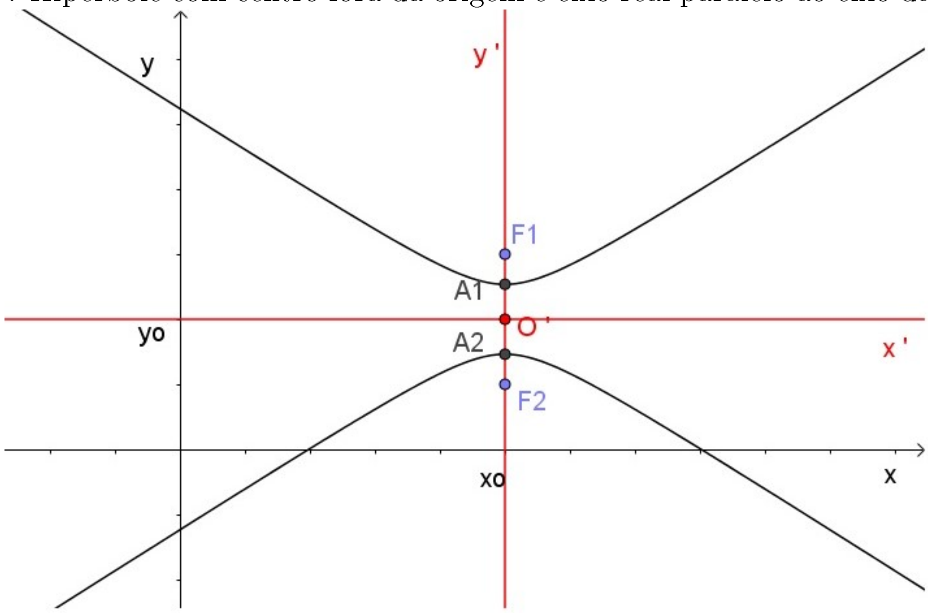


Fonte: Elaborada pela autora.

Analogamente, se uma hipérbole tem centro no ponto $O'(x_0, y_0)$ e $A_1A_2 \parallel y$ (figura 3.17), sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1}.$$

Figura 3.17: Hipérbole com centro fora da origem e eixo real paralelo ao eixo das ordenadas.



Fonte: Elaborada pela autora.

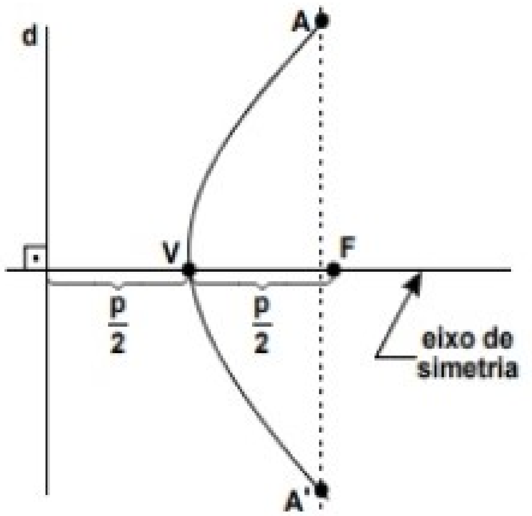
3.8 Equação da parábola

Definição 3.4. Seja d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d. A parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a d:

$$\mathcal{P} = \{P/d(P,F) = d(P,d)\}.$$

$$\mathcal{P} = \{P \in \alpha/|PF| = |Pd|\}.$$

Figura 3.18: Parábola



Fonte - https://slideplayer.com.br/slide/364957/.

Elementos principais:

F : foco;

d : diretriz;

p : parâmetro;

V : vértice;

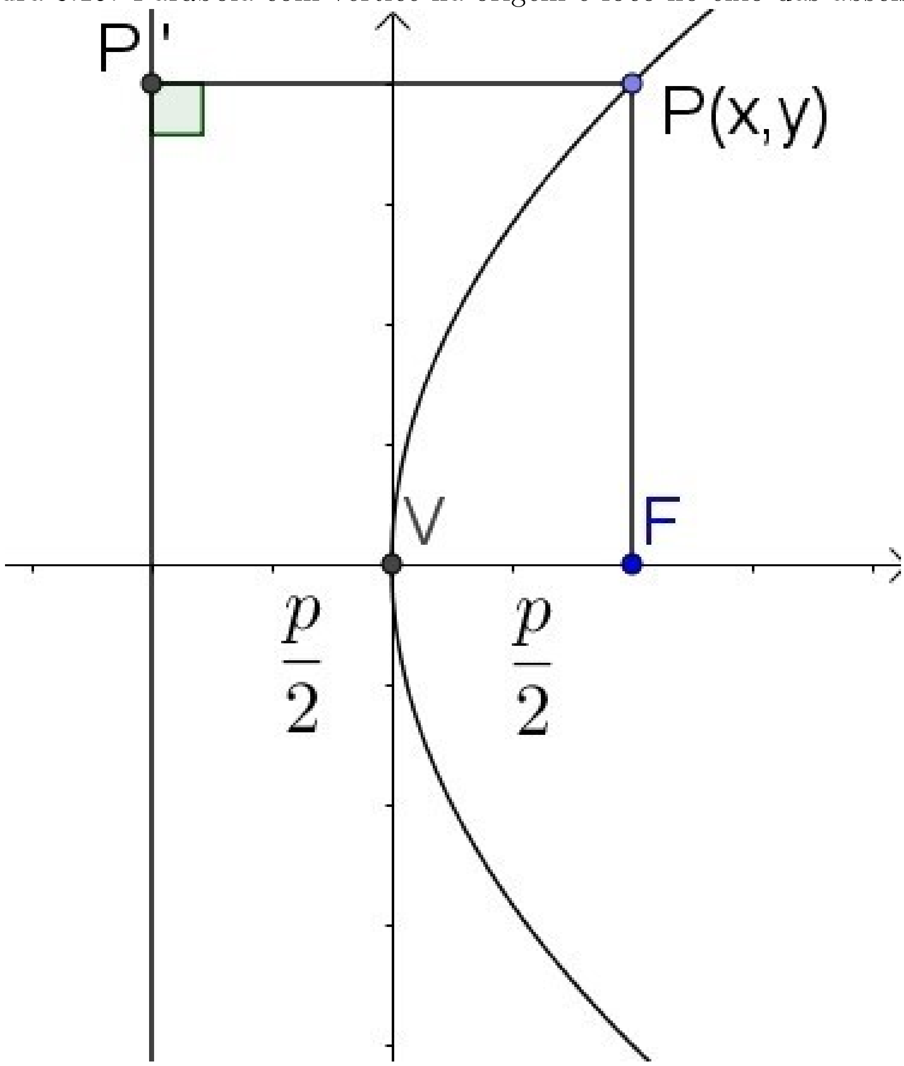
reta VF : eixo de simetria.

Relação notável: $|VF| = \dfrac{p}{2}$.

3.8.1 Equação da parábola com vértice na origem

Tomamos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco (figura 3.19). É evidente que o foco é $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ e a diretriz d tem equação $x = -\frac{p}{2}$. Além disso, $P'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$.

Figura 3.19: Parábola com vértice na origem e foco no eixo das abscissas



Fonte - https://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-analitica-parabola.html.

Nessas condições, chamamos equação reduzida da parábola a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, satisfaz.

A dedução é imediata:

$P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow |PF| = |PP'|$, então:

$$\sqrt{(x - \tfrac{p}{2})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + \tfrac{p}{2})^2 + (y - y)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - \tfrac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \tfrac{p}{2})^2 \Leftrightarrow$$

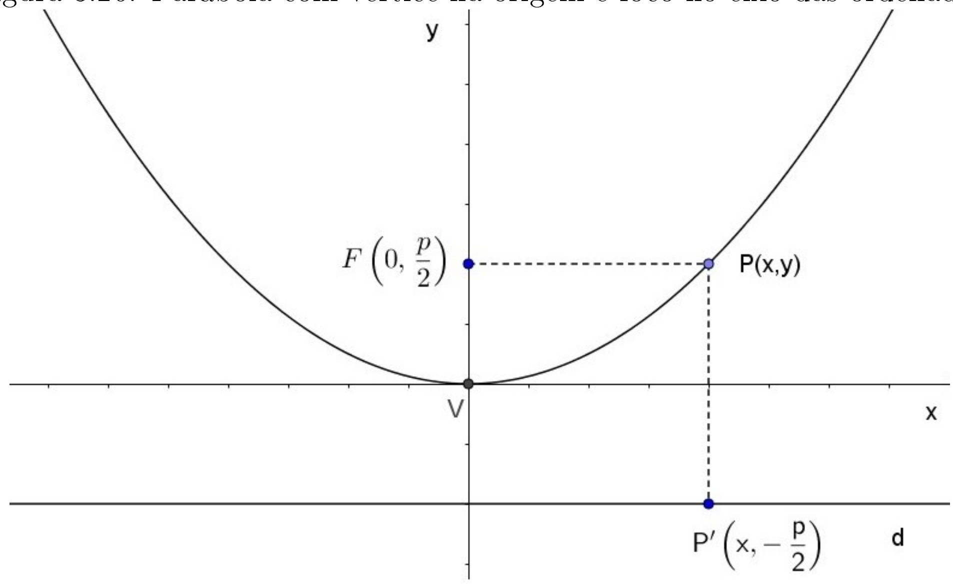
$$\Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Cancelando os termos iguais nos dois membros da equação e isolando o termo y^2:

$$\boxed{y^2 = 2px}.$$

Analogamente, se a parábola apresenta vértice na origem e foco no eixo das ordenadas (figura 3.20), temos:

Figura 3.20: Parábola com vértice na origem e foco no eixo das ordenadas



Fonte: Elaborada pela autora.

$$PF = PP' \Leftrightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y - \tfrac{p}{2})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}.$$

Cancelando os termos iguais nos dois membros da equação e isolando o termo x^2:

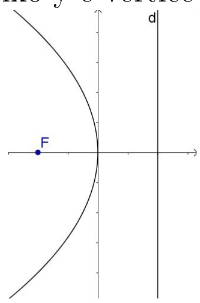
$$\boxed{x^2 = 2py}.$$

Utilizando os procedimentos apresentados anteriormente para uma parábola com vértice na origem, temos que:

- se a parábola tem a diretriz paralela ao eixo Oy e vértice na origem e à esquerda da diretriz (figura 3.21), sua equação é:

$$\boxed{y^2 = -2px}.$$

Figura 3.21: Diretriz paralela ao eixo y e vértice na origem e à esquerda da diretriz

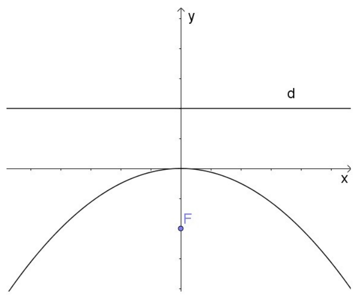


Fonte: Elaborada pela autora.

- se a parábola tem a diretriz paralela ao eixo Ox e o vértice na origem e abaixo da diretriz (figura 3.22), sua equação é:

$$\boxed{x^2 = -2py}.$$

Figura 3.22: Diretriz paralela ao eixo x e vértice na origem e abaixo da diretriz



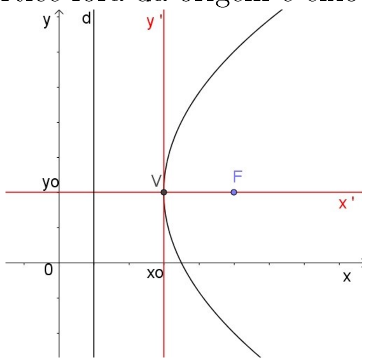
Fonte: Elaborada pela autora.

3.8.2 Equação da parábola com vértice fora da origem

Se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $VF \parallel x$ (figura 3.23), sua equação em relação ao sistema auxiliar $x'Vy'$ é:

$$(y')^2 = 2px'.$$

Figura 3.23: Parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo ao eixo x



Fonte: Elaborada pela autora.

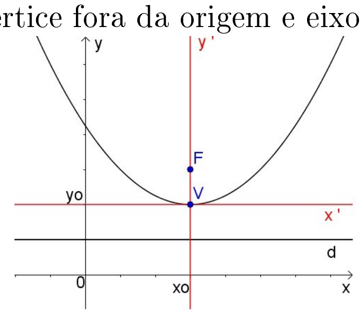
Portanto, sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}.$$

Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V(x_0, y_0)$ e $VF \parallel y$ (figura 3.24), sua equação relativamente ao sistema xOy é:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}.$$

Figura 3.24: Parábola com vértice fora da origem e eixo de simetria paralelo ao eixo y



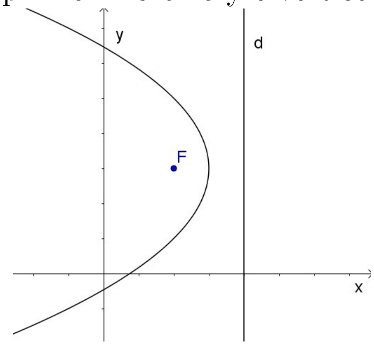
Fonte: Elaborada pela autora.

Reproduzindo os procedimentos apresentados anteriormente para uma parábola qualquer de vértice $V(x_0, y_0)$ e parâmetro p, concluímos que:

- se a parábola tem a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para esquerda (figura 3.25), sua equação é:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)}.$$

Figura 3.25: Diretriz paralela ao eixo y e vértice à esquerda da diretriz

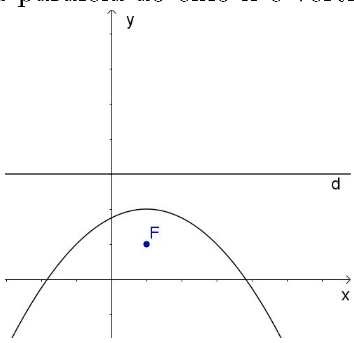


Fonte: Elaborada pela autora.

- se a parábola tem a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para baixo (figura 3.26), sua equação é:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)}.$$

Figura 3.26: Diretriz paralela ao eixo x e vértice abaixo da diretriz



Fonte: Elaborada pela autora.

CAPÍTULO 4

UMA METODOLOGIA PRÓPRIA

4.1 A metodologia

Cada docente carrega em seu modo de trabalhar um pouco da sua trajetória como discente. Juntando as experiências enquanto estudante com as primeiras vivências como professora substituta em escolas, nasceu em 1994 uma metodologia própria que reflete algumas convicções. O método tem sido utilizado com alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, tanto na escola pública quanto na particular e tem-se mostrado eficaz com relação à aprendizagem de Matemática.

O pilar que sustenta o trabalho em sala de aula é o fato que para aprender Matemática, o aluno precisa fazer exercícios. Tudo começa no primeiro dia de aula com cada turma: junto com a apresentação da disciplina, é estabelecido um contrato didático para as aulas de Matemática. Neste, de forma muito clara e objetiva, são explicitados a dinâmica das aulas e os instrumentos de avaliação. Para que haja uma relação de confiança entre alunos e professor, é essencial que o contrato didático seja cumprido com rigor desde as primeiras aulas. Após algumas semanas, os alunos já se habituam com a rotina e começam a perceber que a metodologia favorece a sua aprendizagem.

Basicamente, cada aula tem dois momentos: uma breve parte expositiva, onde o conteúdo é apresentado, priorizando uma determinada habilidade e evitando apresentar muitos assuntos de uma vez só. A segunda parte da aula consiste em uma atividade proposta para os alunos desenvolverem em grupo ou individualmente. Aí vem a parte interessante: o aluno é estimulado a resolver os exercícios propostos porque receberá uma pontuação que vai compor a sua nota final na disciplina de Matemática. Trata-se de uma avaliação contínua, porque o processo de aprendizagem é levado em consideração e não só o produto final. Observamos que o aluno que realiza as atividades durante as aulas tem um rendimento melhor na avaliação tradicional.

Evidentemente, os ritmos de aprendizagem são diferentes, por isso cada atividade é planejada de modo que o tempo da aula seja suficiente para se finalizar o que foi proposto. No entanto, as turmas são heterogêneas e embora alguns alunos consigam terminar no tempo previsto, outros por terem mais dificuldade ou por serem mais dispersos, precisam finalizar o que faltou em casa. No contrato didático fica estabelecido que o aluno que terminar o que faltou como tarefa, receberá a mesma pontuação que aqueles que terminam na sala. Além disso, caso o aluno não tenha concluído tudo, se tiver feito pelo menos a metade dos exercícios, ganha metade da pontuação do dia correspondente. Para diferenciar quem terminou na sala de aula de quem fez uma parte em casa, são utilizadas duas cores: azul para quem terminou no tempo previsto e vermelho para aqueles que levaram parte da atividade como tarefa. Essas informações são extremamente úteis no momento da reunião de pais, porque o docente tem um retrato fiel do desempenho e do envolvimento de cada aluno durante o bimestre em curso.

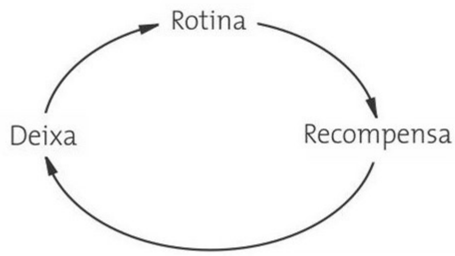
É fundamental que o professor seja extremamente organizado para registrar em cada aula quem realizou a atividade. O registro é feito em uma tabela e a notação utilizada é a letra **P**, porque envolve a **p**resença e a **p**articipação do aluno em cada aula. Os alunos entram muito rápido no esquema: nas primeiras aulas perguntam "Vai ter pesinho hoje?", mas logo percebem que em todas as aulas eles terão uma atividade para realizar e serão avaliados por isso, então, em pouco tempo uma rotina é estabelecida. Uma aluna relatou que o "pesinho" vicia e ao ler o livro O Poder do Hábito, de Charles Duhigg, relacionei a ideia apresentada pelo autor com o comentário desta aluna. Segundo Duhigg, é preciso reconhecer a rotina, que é o hábito em si e identificar qual recompensa seu cérebro procura. Por exemplo, quem deseja praticar exercícios deve estabelecer uma Deixa, isto é, colocar o tênis e a roupa adequada. Assim, você perceberá que o cérebro anseia pelo senso de realização.

Figura 4.1: Loop do hábito proposto no livro O Poder do Hábito

Fonte: DUHIGG, 2012, p. 69.

Comparando o esquema proposto no livro com a metodologia utilizada nas aulas, podemos fazer as seguintes analogias: a deixa é a atividade proposta, a rotina é a realização da mesma e a recompensa é a nota representada pelo pesinho.

Figura 4.2: Ciclo da criação de um hábito, segundo Charles Duhigg



Fonte: DUHIGG, 2012, p 288.

Figura 4.3: Ciclo no qual se baseia a metodologia

Fonte: Elaborada pela autora.

4.2 Avaliação

Em 2019 realizamos uma pesquisa com alunos das doze turmas, de três escolas (uma da rede pública estadual e duas escolas particulares) para avaliar a metodologia utilizada e outros aspectos das aulas de Matemática dessas turmas. O questionário foi respondido pelos alunos com os quais as atividades foram aplicadas e também pelas demais turmas. Cada aluno respondeu as doze perguntas abaixo:

1. A linguagem utilizada pela professora é adequada para a compreensão dos conteúdos?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

2. As explicações são claras e objetivas?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

3. O tempo de aula é bem aproveitado?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

4. A professora esclarece suas dúvidas, quando você pergunta?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

5. As provas são coerentes com o que foi trabalhado nas aulas?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

6. Você tem facilidade para aprender Matemática?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

7. Você gosta de fazer exercícios nas aulas?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

8. Você gosta de resolver problemas em grupo?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

9. Você gosta que o professor resolva os exercícios na lousa para você copiar?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

10. A professora respeita os diferentes ritmos de aprendizagem?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

11. Durante as aulas, foram abordados problemas práticos onde os conteúdos podem ser aplicados?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

12. Os pesinhos ajudam você a aprender Matemática?

( ) sempre

( ) às vezes

( ) nunca

As respostas do questionário foram tabuladas e organizadas na seguinte tabela:

Tabela 4.1: Pesquisa com os alunos das turmas 2019

Pergunta	sempre	às vezes	nunca	total
1	308	30	2	340
2	282	55	3	340
3	275	65	0	340
4	321	19	0	340
5	322	17	1	340
6	103	187	50	340
7	178	150	12	340
8	216	105	19	340
9	110	185	45	340
10	291	45	4	340
11	224	107	9	340
12	279	53	8	340

Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando os dados da pesquisa, concluímos que 82% dos alunos entrevistados admitiram que a metodologia favorece sempre a aprendizagem de Matemática, 16% responderam que a metodologia contribui às vezes e apenas 2% declararam que a metodologia em questão não contribui para a sua aprendizagem. Em geral, a maioria valida o processo utilizado nas aulas.

Fica evidente que um vínculo é criado entre cada aluno e o professor, porque o fato de o professor observar e registrar o que cada um produziu e como foi feito, esclarecendo as dúvidas individualmente, aproxima-o de cada estudante e propicia uma avaliação contínua da aprendizagem. Assim, o professor tem como avaliar a participação individual por meio do registro sistemático do que é produzido em cada aula. Ao encontrar com ex-alunos, é muito comum dizerem ter saudades dos "pesinhos", o que reforça que admitem a sua importância no processo de ensino e aprendizagem.

Depoimentos de ex-alunos

1) Hamilton César Hermenegildo Júnior:

"Fui aluno da professora Paula no 9° ano do Ensino Fundamental na disciplina de Matemática, no 2° ano do Ensino Médio na disciplina de Física e, no 3° ano do Ensino Médio em Matemática. A metodologia de ensino da professora é "Fazer para aprender" usa uma forma de recompensa por atividade feita em aula, sendo seus famosos "Ps", que, nada mais são que seus vistos como formas de avaliação. A metodologia da professora Paula me estimulou a querer sempre fazer e nunca deixar nada faltando, afinal, se faltasse algum "P", faltaria nota no fim do bimestre. Acredito que a forma de ensinar da professora é muito boa, visto que, até nos dias de hoje, uso dos ensinamentos dela na faculdade, e estes me ajudam grandemente nas aulas de Matemática Básica e Financeira.

Por fim, gostaria aqui de agradecer pelos ensinamentos da professora Paula, sendo uma professora que me ajudou muito em minha caminhada no mundo escolar, por isso, levarei seus ensinamentos não apenas para a faculdade, mas, por toda a vida."

2) Aline Campanhã:

"Não tem como pensar em Paula sem pensar no Pesinho. Pois é, a nossa professora de Matemática do colégio - do 6º ano até o 3º do Ensino Médio - fazia todo mundo aprender essa matéria que é tão confusa para muitos com uma facilidade incrível.

Além de todo o seu dom do ensino, Paula teve a ideia de adaptar o conhecido visto em uma coisa "a cara dela", o P.

Algumas matérias, ler é aprender, mas na Matemática isso não basta. Sim, a área dos números tem que ser treinada, praticada, feita e refeita. E era isso que a Paula fazia. A cada aula, uma atividade era passada e essa valia o P. A soma desses Ps acarretava em pontos na média.

Afirmo, com toda certeza, que se não fosse pela Paula e por conta do seu P, eu jamais saberia o que sei hoje. Afinal, sou completamente da área de humanas, qual a chance de entender alguma sobre números? Mas esse combo deu tão certo que no vestibular a minha nota de Matemática foi uma das mais altas, só ficando atrás da redação.

Realmente, tudo que sei hoje, e o meu gosto por números, é graças a essa professora - e pessoa - excelente com a qual convivi por muitos anos."

3) Isabela Parras:

"Meu nome é Isabela Parras, fui aluna da Paula de 2007 a 2010.

No começo lembro de me assustar com a Matemática, pois parecia algo tão abstrato e difícil que achei que não conseguiria entender. Então lembro de um dia em que a Paula me explicou como se fazia multiplicação com números de três algarismos. Ela fez aquilo parecer tão simples que eu fiquei encantada com a matéria.

Quando começamos a dar sequência no conteúdo, a abordagem didática utilizada costumava ser a mesma. Ela explicava a teoria na lousa e em seguida passava exercícios para que *realizássemos em duplas. Essa prática era muito importante para mim, que aprendia muito mais fazendo do que apenas escutando e copiando. Além disso, sempre acabava ajudando a minha dupla, e foram nesses momentos que minha vontade de ensinar começou.*

Lembro também dos desafios. A Paula sempre trazia algum exercício que exigia mais raciocínio, que era mais desafiador. Ela costumava oferecer uma recompensa para quem terminasse primeiro. Isso me motivava ainda mais. Ficava em casa estudando a tarde toda a fim de me preparar para qualquer desafio surpresa que acontecesse, isso me incentivava a buscar mais conhecimento.

Hoje sou professora de Matemática, mestra em Matemática aplicada a engenharia elétrica e leciono para alunos de 5º ano até o pré-vestibular. Procuro trabalhar a prática da mesma maneira que ela fazia, tentando sempre instigar meus alunos e desafiá-los para que eles busquem sempre melhorar, assim como eu fiz quando ela era minha professora."

4) Giovana Pascolat:

"Estou no último semestre da graduação em Matemática, e posso dizer com certeza que foi a professora Paula quem mais me incentivou a seguir na área. Fui aluna do começo do Ensino Fundamental II até o final do Ensino Médio, e sempre admirei o modo que ela conduzia as aulas e fui adquirindo gosto pelo conteúdo apresentado. Me lembro das inúmeras vezes que me peguei pensando na maneira diferente em que a didática era apresentada e em como queria ser como ela. Foi o que me inspirou a cursar Matemática.

A professora iniciava as aulas passando o conteúdo na lousa e auxiliando os alunos em quaisquer dúvidas que tivessem. Após o aprofundamento da matéria, eram passados exercícios, em dupla ou em trio, valendo "pesinhos", uma maneira de camuflar a carga pejorativa que a palavra "nota" tem. Me incentivava muito para terminar todas atividades, e ao mesmo tempo promovia uma interação saudável entre os alunos (não percebia na época tudo isso, mas hoje percebo). Todos questionamentos que surgissem eram solucionados, pois era de costume a professora passar de mesa em mesa tirando todas as dúvidas, o que adicionava *um toque de caráter pessoal na relação, tornando ainda mais produtivo e leve o aprendizado.*

Sou muito grata a ela por ter realmente aprendido os conteúdo-base para minha graduação, e principalmente pelo que conseguiu despertar dentro de mim."

5) Anna Francisca Crepaldi Grossi:

"Meu nome é Anna Francisca Crepaldi Grossi e fui aluna da professora Paula durante 7 anos (desde o Ensino Fundamental II até o final do Ensino Médio) no colégio NIE (Núcleo de Interação Educativa) em Jaú- SP.

Sempre gostei da estratégia de ensino que a professora Paula adotou. As aulas começavam com a teoria e o restante do horário, praticávamos em grupo os exercícios propostos da teoria. Dessa forma, percebíamos se havíamos aprendido o conteúdo, e quando não conseguíamos resolver o exercício, ela sempre esteve à disposição para nos ajudar da melhor maneira possível, com muita paciência e didática.

Além disso, a professora Paula utilizava o método do "pesinho". Esse método consiste em receber um P quando acabávamos uma atividade que era pedida e, no final do bimestre, todos os "pesinhos" eram juntados e contabilizava uma parte da nota final. Desse modo, o "pesinho" estimulava os alunos a fazerem as atividades propostas e, consequentemente, aprender o conteúdo e não simplesmente decorar a matéria para a prova. Para exemplificar, durante as aulas na faculdade usei muito a Geometria Espacial e Analítica e ainda hoje em meu trabalho que atuo como Designer Gráfico faço uso contínuo desse conteúdo. Só tenho que agradecer as estratégias que a Professora Paula adotava, todo carinho e dedicação a qual tinha com seus alunos."

CAPÍTULO 5

ATIVIDADES

A proposta de atividades elaborada está em consonância com a metodologia própria apresentada no Capítulo 4. Assim, todas as atividades aplicadas valiam "pesinho".

Promover uma aprendizagem criativa e significativa é um grande desafio para os professores de Matemática. É fundamental colocar os discentes no centro do processo educacional, fazendo-os participar ativamente da construção dos conceitos matemáticos. Neste capítulo, apresentamos doze atividades cujo objetivo é despertar o interesse do aluno para uma parte da Geometria que está fortemente conectada com a Álgebra. As atividades são práticas e diversificadas, evidenciando que as cônicas podem ser aplicadas em várias situações do cotidiano e que as propriedades das curvas justificam tais aplicações.

As atividades foram desenvolvidas nos meses de setembro e outubro de 2019 com uma turma de 24 alunos da terceira série do Ensino Médio da escola particular NIE, em Jaú. Das quatro aulas semanais com a turma, uma aula da segunda-feira foi destinada à aplicação das atividades deste trabalho, totalizando durante os dois meses, nove aulas de 45 minutos cada.

As atividades foram cuidadosamente planejadas pensando numa forma de otimizar o tempo e a sequência foi programada de modo que a resolução de situações-problema fosse proposta depois das atividades práticas. Assim, primeiramente, os alunos fizeram a parte mais dinâmica: deixaram a tradicional sala de aula para desenhar no chão da quadra, explorar o GeoGebra, fotografar elipses e trabalhar com dobraduras. Motivados e envolvidos com o conteúdo, a sistematização dos conceitos e a resolução das situações-problema das listas de exercícios fluiu com bastante tranquilidade.

5.1 Atividade 1: Cortes no cone

Objetivo: Mostrar que as interseções de planos com uma superfície cônica dupla podem gerar vários tipos de curvas, dependendo da forma como essas seções são feitas.

Tempo de duração: Uma aula de 45 minutos.

Materiais utilizados: Três cones maciços de madeira que foram produzidos por profissional especializado especialmente para a realização da atividade, taça cônica transparente, água e corante.

Observação: A ideia inicial era que os próprios alunos fizessem os cortes nos cones. Foram feitos testes com pirulitos cônicos de chocolate e massinha de modelar, porém o resultado obtido não foi o esperado. A próxima tentativa foi utilizar cones de isopor: esta é uma opção ideal para quem não tem acesso aos cones de madeira. Os cortes foram feitos com estilete e os cones de isopor foram pintados com tinta para artesanato (PVA). Os dois ramos da hipérbole foram obtidos utilizando dois cones, unidos pelos vértices com um palito de dente.

Figura 5.1: Cortes no cone de isopor

Fonte: Autora.

Procedimentos: Foram utilizados cones maciços de madeira para introduzir o estudo das cônicas. A atividade foi realizada no ateliê de Artes, esta sala tem uma grande bancada que facilitou a visualização e manipulação dos objetos por parte de todos. Além disso, os alunos puderam sair do espaço físico da sala de aula, tradicionalmente utilizado para as aulas de Matemática.

Figura 5.2: Cortes em cones de madeira 1

Fonte: Autora.

Figura 5.3: Cortes em cones de madeira 2

Fonte: Autora.

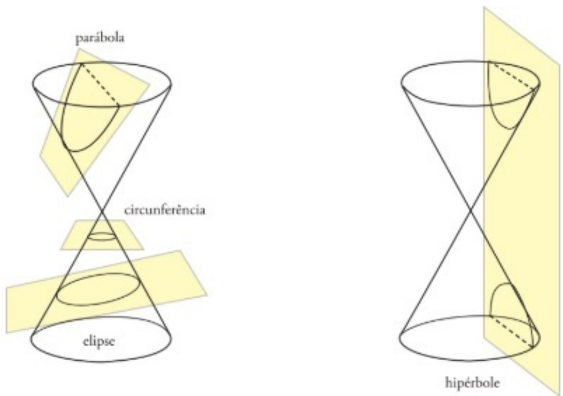
Também foi proposta outra forma de visualizar as curvas: foram utilizadas taças (com formato cônico) de plástico transparente com água e corante. Inclinando-se a taça convenientemente, podemos observar a circunferência, a elipse, a parábola e um dos ramos da hipérbole.

Figura 5.4: Elipse na taça

Fonte: Autora.

Conclusões: Após a manipulação do material concreto, foi feita a sistematização do que foi visualizado. A figura 5.5 ilustra possibilidades de cortes de um plano sobre um cone circular reto:

Figura 5.5: Cortes no cone



Fonte: FINI, et al., 2014, p. 44.

- Circunferência: quando o plano for perpendicular ao eixo do cone e não passar pelo vértice.
- Elipse: quando o plano for oblíquo ao eixo e não paralelo à geratriz.
- Parábola: o plano não passa pelo vértice e é paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica.
- Hipérbole: o plano é paralelo ao eixo do cone, não passa pelo vértice e corta as duas partes da superfície cônica.

Observação: Aos três últimos tipos de curvas damos o nome de cônicas.

5.2 Atividade 2: Procurando elipses

Objetivo: Fazer com que os alunos observem os objetos ao seu redor e identifiquem formas elípticas.

Tempo de duração: 5 minutos.

Material utilizado: Celular.

Procedimentos: Os alunos foram divididos em quatro grupos de 6 alunos e cada grupo deveria fotografar, com celular de algum membro, objetos em formato de elipse. Em seguida, as fotos foram apresentadas para a professora.

Conclusões: Os alunos ficaram muito empolgados com a proposta e saíram correndo pela escola. Encontraram elipses na cuba da pia do banheiro, na logomarca do bebedouro, no piso, no bloco do tijolo, na saboneteira e no espelho do banheiro. Na aula seguinte, uma aluna relatou que ficou procurando elipses em todo lugar.

Foi perceptível a motivação dos alunos para realizar as atividades práticas. Como vestibulandos, passam muitas horas sentados ouvindo os professores falarem, então saírem do espaço sala de aula para explorar outros ambientes da escola foi muito proveitoso.

As atividades 2 e 3 foram aplicadas na mesma aula, uma vez que o tempo necessário para a realização da atividade 2 é reduzido.

5.3 Atividade 3: Desenhando as cônicas

Esta atividade foi baseada nas orientações contidas nos livros didáticos da terceira série do Ensino Médio **Contato Matemática**, 2016, cujos autores são Joamir Souza e Jacqueline Garcia e **Quadrante Matemática**, 2016 dos autores Eduardo Chavante e Diego Prestes.

A atividade foi dividida em duas partes: na primeira parte foram apresentados para os alunos os processos para esboçar uma elipse, uma hipérbole e uma parábola. Na segunda parte da atividade, a proposta era criar figuras contendo circunferências e elipses.

5.3.1 Construção das cônicas

Objetivo: Apresentar o processo utilizado para esboçar uma elipse, uma hipérbole e uma parábola.

Tempo de duração: 10 minutos.

Materiais utilizados: Pranchas de mdf pintadas com tinta lousa, tachinhas, barbante, corrente, giz, réguas de papelão e esquadro.

Procedimentos: Foi apresentado, na sala de aula, o processo para se esboçar as cônicas.

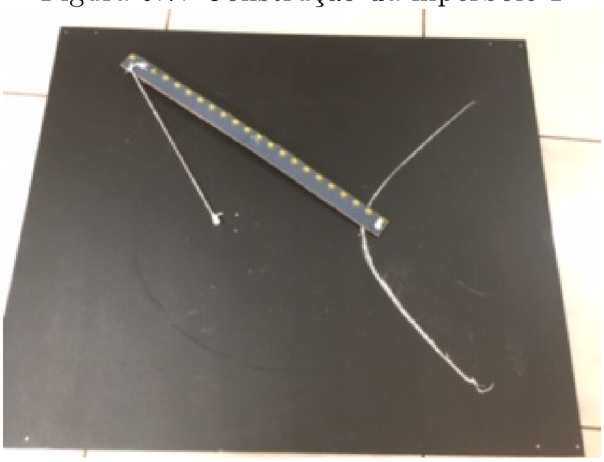
Para esboçar uma elipse, foram marcados com tachinhas dois pontos sobre uma placa de mdf e fixou-se nesses pontos as extremidades de uma corrente. Com um giz, a curva contínua foi traçada, de maneira que a corrente permanecesse esticada, obtendo-se ao final uma elipse. A corrente proporciona firmeza ao traçado, porém a elipse também pode ser desenhada substituindo a corrente por um pedaço de barbante.

Figura 5.6: Construção da elipse

Fonte: Autora.

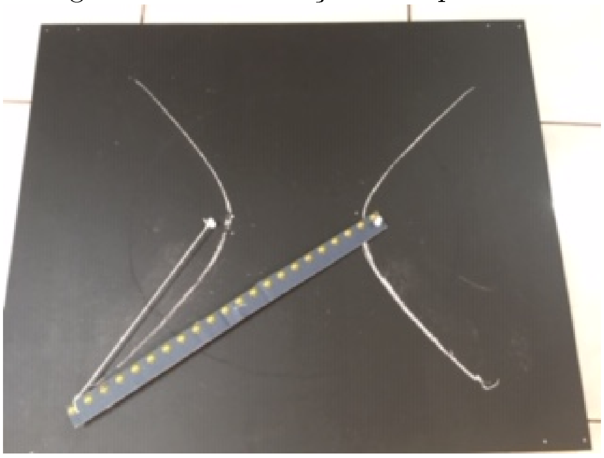
Para esboçar uma hipérbole, foram marcados com tachinhas dois pontos sobre a placa de mdf. Em um desses focos, fixou-se uma régua de papelão por um furo em uma das suas extremidades. Na outra extremidade da régua, foi fixado um barbante, que tem a outra extremidade presa no outro foco. Com um giz na régua, de modo que o barbante ficassse sempre esticado, a régua foi girada desenhando um dos ramos da hipérbole. Procedendo de maneira semelhante, foi obtido o outro ramo da hipérbole.

Figura 5.7: Construção da hipérbole 1



Fonte: Autora.

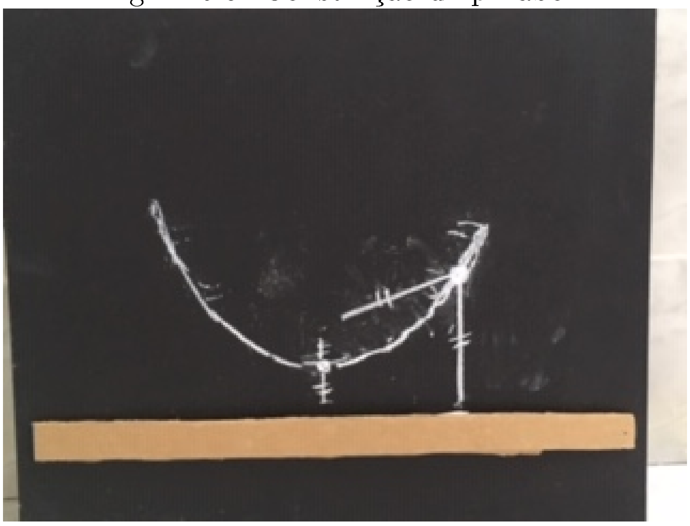
Figura 5.8: Construção da hipérbole 2



Fonte: Autora.

Para esboçar uma parábola, foi marcado um ponto na placa de mdf com uma tachinha, fixando nele uma das extremidades de um barbante, e a outra em um esquadro. Com o auxílio de uma régua de papelão, o esquadro foi deslizado mantendo o barbante esticado e com um giz a parábola foi traçada.

Figura 5.9: Construção da parábola



Fonte: Autora.

Conclusões: A justificativa para o processo da construção da elipse consiste no fato da soma das distâncias de cada um de seus pontos às duas tachinhas ser igual ao comprimento da corrente/barbante. O procedimento utilizado para a construção da hipérbole garante que o módulo da diferença das distâncias de cada ponto da hipérbole às duas tachinhas seja constante e igual à distância entre os vértices. No caso da parábola, ao deslizar o esquadro sobre a régua de papelão, temos que a distância de cada ponto da parábola à tachinha é igual à distância do ponto à régua de papelão.

5.3.2 Construção de elipses e circunferências no chão

Objetivos: Criar figuras com circunferências e elipses. Perceber a relação entre a distância focal e a excentricidade da elipse.

Tempo de duração: 30 minutos.

Materiais utilizados: Giz colorido e barbante.

Procedimentos: A turma foi dividida em quatro grupos (os agrupamentos foram os mesmos formados para a atividade 2) e a atividade foi realizada na quadra da escola. A proposta é interdisciplinar com Artes, pois cada grupo criou no chão uma figura contendo pelo menos uma circunferência e uma elipse. As fotos abaixo mostram o início e o final do trabalho de cada um dos quatro grupos.

Figura 5.10: Grupo 1 - início

Fonte: Autora.

Figura 5.11: Grupo 2 - início

Fonte: Autora.

Figura 5.12: Grupo 3 - início

Fonte: Autora.

Figura 5.13: Grupo 4 - início

Fonte: Autora.

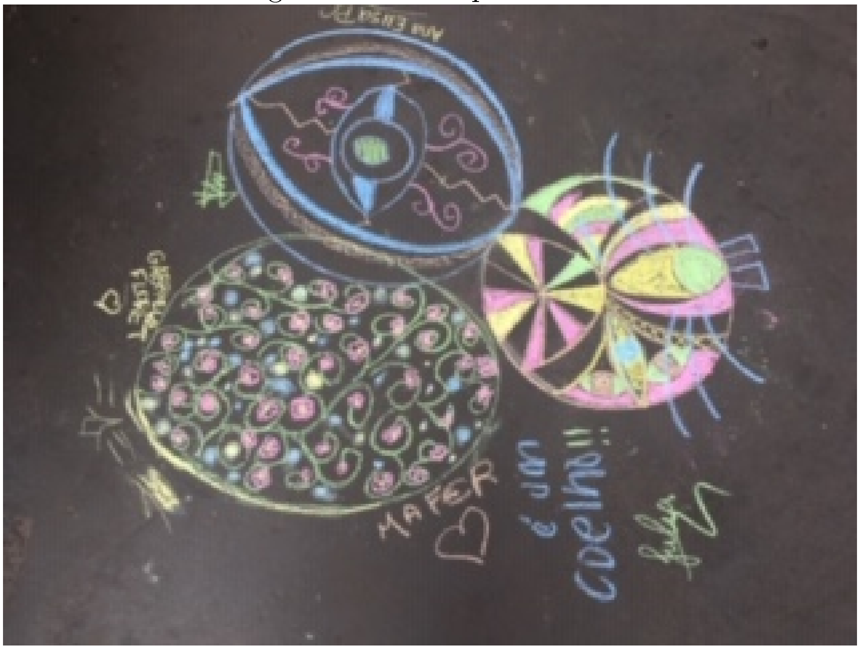
Figura 5.14: Grupo 1 - final

Fonte: Autora.

Figura 5.15: Grupo 2 - final

Fonte: Autora.

Figura 5.16: Grupo 3 - final



Fonte: Autora.

Figura 5.17: Grupo 4 - final

Fonte: Autora.

Conclusões: Durante o processo de construção das elipses, os grupos foram questionados sobre o que acontece com o achatamento das elipses ao aproximarmos ou afastarmos os focos.

A construção da hipérbole e da parábola foi feita nas pranchas de mdf, expondo para os alunos o procedimento para esboçar essas curvas a título de curiosidade. Como para essas duas curvas, o processo de construção é mais elaborado e exige mais recursos, os alunos só observaram a construção e não utilizaram essas curvas em suas composições artísticas.

5.4 Atividade 4: Utilizando o GeoGebra

Objetivo: Compreender a definição de elipse, hipérbole e parábola por meio do traçado dessas curvas utilizando o GeoGebra.

Tempo de duração: 20 minutos.

Materiais utilizados: Roteiro e GeoGebra no computador.

Procedimentos: A atividade foi realizada na biblioteca da escola. Cada trio de alunos recebeu um roteiro para orientá-los no desenvolvimento do trabalho. O roteiro facilita o trabalho do professor porque os alunos já têm a comanda do que deve ser feito, assim, o papel do docente é observar o que está sendo realizado e, se necessário, auxiliar os alunos com alguma dificuldade.

Roteiro - Atividade no GeoGebra

Parte I - Elipse

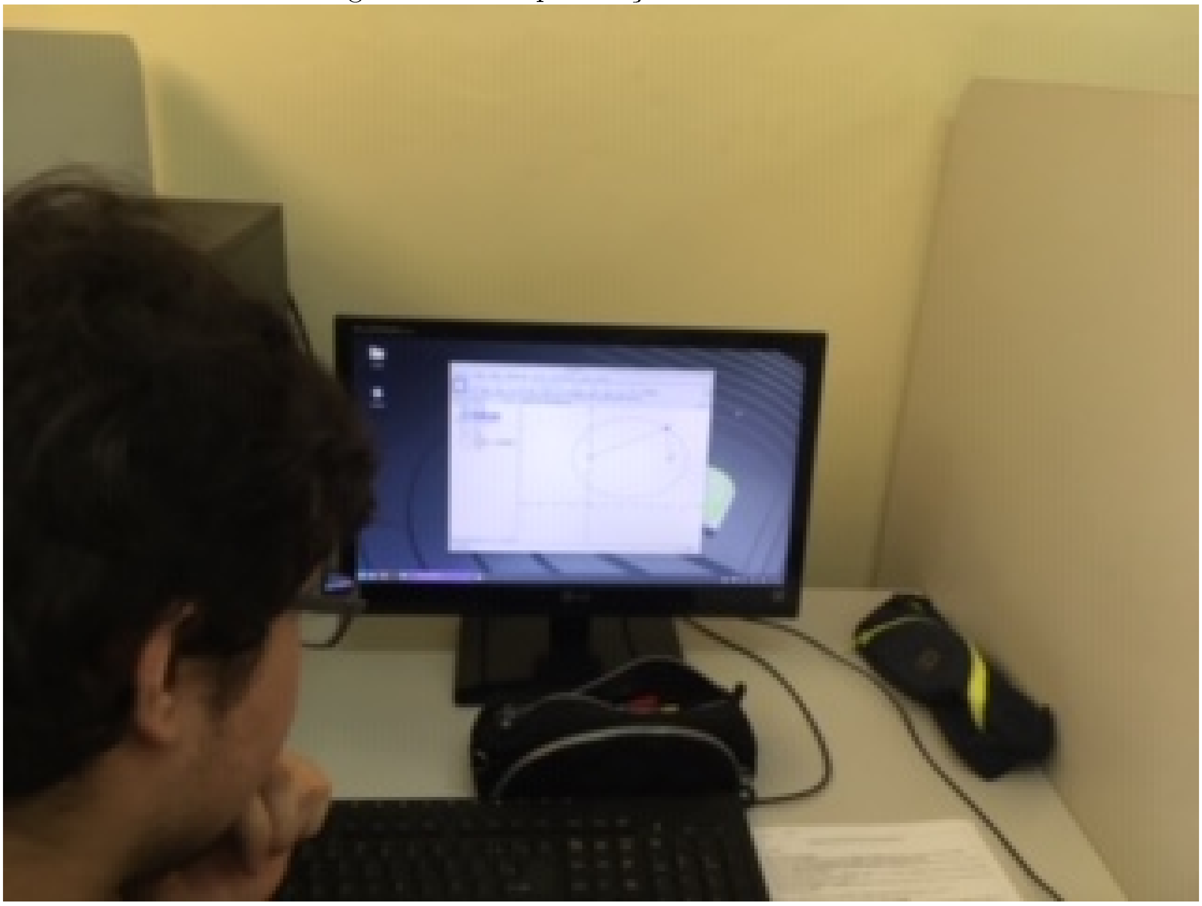
1. Abra o aplicativo **GeoGebra**.
2. Selecione na barra de ferramentas a opção **"Elipse"**, selecione os dois focos e construa a elipse.
3. Selecione a opção **"Ponto em objeto"** e marque um ponto sobre a elipse.
4. Clique em **"Segmento"** e ligue o ponto que você criou no item 3 a cada um dos focos da elipse.

5. No canto inferior direito, no campo **"Entrada"** calcule a soma das medidas dos dois segmentos criados no item anterior: digite s = f + g. Anote o valor obtido.__________

6. Agora clique em **"Mover"** e movimente o ponto que você criou no item 3. O que você observou com relação ao valor de s? ____________________________________

Agora complete a definição de elipse: Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja **soma** das distâncias a dois pontos dados é ____________________________________.

Figura 5.18: Elipse traçada no GeoGebra



Fonte: Autora.

Parte II - Hipérbole

1. Clique em **"Editar"**, selecione a opção **"Selecionar tudo"** e aperte a tecla **"Delete"**.

2. Selecione na barra de ferramentas a opção **"Hipérbole"**, selecione os dois focos e construa a hipérbole.

3. Selecione a opção **"Ponto em objeto"** e marque um ponto sobre a hipérbole.

4. Clique em **"Segmento"** e ligue o ponto que você criou no item 3 a cada um dos focos da hipérbole.

5. No canto inferior direito, no campo **"Entrada"** calcule o módulo da diferença das medidas dos dois segmentos criados no item anterior: digite $d = abs(f - g)$.
   Anote o valor obtido. ____

6. Agora clique em **"Mover"** e movimente o ponto que você criou no item 3. O que você obeservou com relação ao valor da diferença entre as medidas dos segmentos?

Agora leia a definição de hipérbole: Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a **diferença** das distâncias a dois pontos dados, F_1 e F_2 do plano, é, em valor absoluto constante e igual a 2a, menor que a distância focal F_1F_2.

Figura 5.19: Traçado de uma hipérbole no GeoGebra

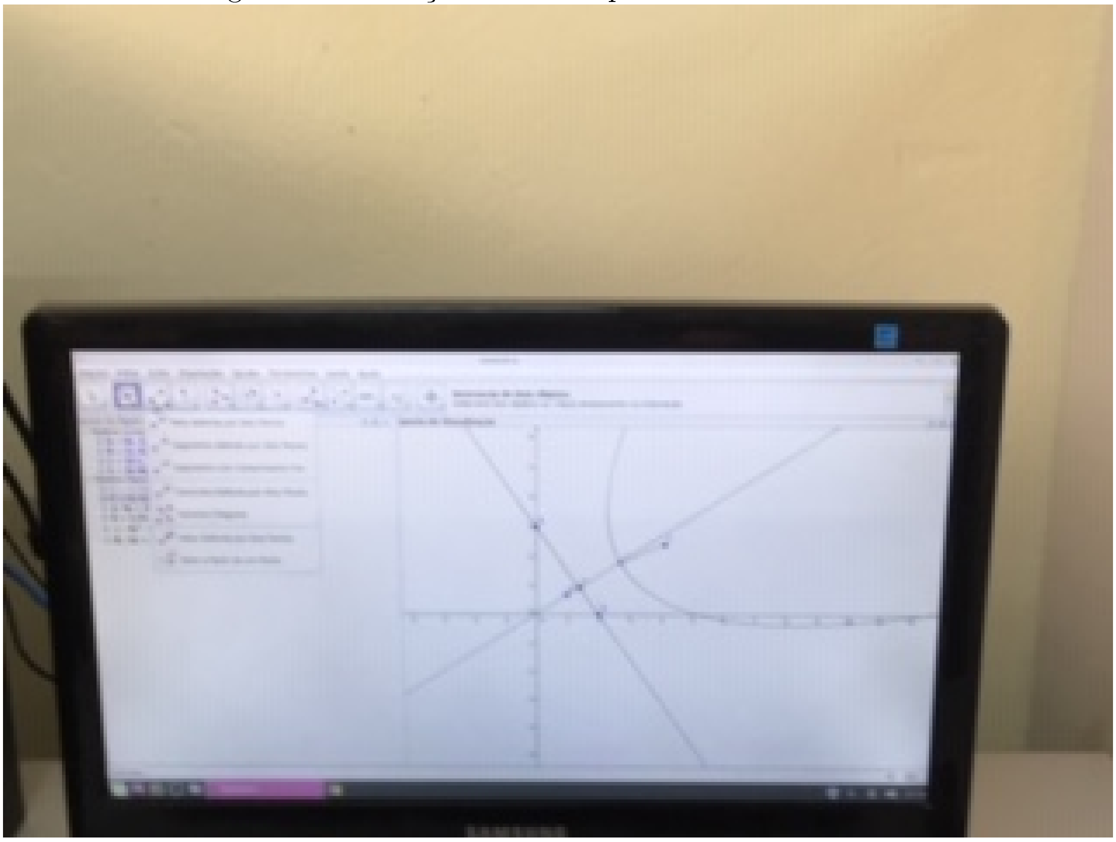
Fonte: Autora.

Parte III - Parábola

1. Clique em **"Editar"**, selecione a opção **"Selecionar tudo"** e aperte a tecla **"Delete"**.
2. Na barra de ferramentas, escolha a opção **"Reta"**, escolha dois pontos e desenhe a reta que passa por esses dois pontos.
3. Selecione a opção **"Parábola"**, escolha o foco da parábola e clique na reta que você desenhou no item 2 para desenhar a parábola a partir do seu foco e da diretriz.
4. Selecione a opção **"Ponto em objeto"** e marque um ponto sobre a parábola.
5. Clique em **"Segmento"** e ligue o ponto que você criou no item 4 com o foco da parábola.
6. Selecione a opção **"Reta Perpendicular"**, clique no ponto que você criou no item 4 e depois sobre a reta que você criou no item 2 (diretriz).
7. Selecione a opção **"Intersecção de dois objetos"** e clique sobre as duas retas perpendiculares.
8. Clique em **"Segmento"** e em seguida selecione o ponto que você criou no item 4 e no ponto de interseção das duas retas perpendiculares.
9. Anote a medida da distância do foco da parábola ao ponto que você criou no item quatro.____
10. Anote também a distância do ponto que você marcou no item 4 até o ponto de interseção das retas perpendiculares. __________________________
11. Finalmente clique em **"Mover"** e movimente o ponto que foi criado no item 4. O que você observa com relação à posição desse ponto e às medidas que você obteve nos itens 9 e 10? ______________________________________

Leia a definição de parábola: Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto F (foco) dado e de uma reta d (diretriz) dada.

Figura 5.20: Traçado de uma parábola no GeoGebra



Fonte: Autora.

Conclusões: O roteiro bem detalhado proporcionou a realização da atividade com bastante autonomia por parte dos alunos.

As atividades 4 e 5 foram realizadas simultaneamente porque o número de computadores não era suficiente para que a turma toda utilizasse o GeoGebra ao mesmo tempo. Assim, foi feito um rodízio: enquanto alguns alunos estavam no computador, outros estavam nas mesas da biblioteca fazendo as dobraduras e em seguida, fizeram as trocas.

A partir da atividade 4, foram obtidas as equações das cônicas. Partindo das definições de elipse, hipérbole e parábola, as equações foram deduzidas como apresentado no Capítulo 3. Em seguida, houve a sistematização do conteúdo e os alunos receberam tabelas com resumo, contendo as equações dos casos possíveis para cada cônica.

ELIPSE

Obervações:

- a = semieixo maior;
- b = semieixo menor;
- Relção notável: $a^2 = b^2 + c^2$;
- Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$.

Tabela 5.1: Elipse

Elipse	Equação
Centro na origem e focos sobre o eixo x	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Centro na origem e focos sobre o eixo y	$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$
Centro em (x_o, y_o) e focos sobre o eixo x	$\dfrac{(x - x_o)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$
Centro em (x_o, y_o) e focos sobre o eixo y	$\dfrac{(x - x_o)^2}{b^2} + \dfrac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1$

Fonte: Elaborada pela autora.

HIPÉRBOLE

Obervações:

- $a =$ semieixo real;
- $b =$ semieixo imaginário;
- Relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$;
- Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a}$.

Tabela 5.2: Hipérbole

Hipérbole	Equação
Centro na origem e focos sobre o eixo x	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Centro na origem e focos sobre o eixo y	$\dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$
Centro em (x_o, y_o) e focos sobre o eixo x	$\dfrac{(x-x_o)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1$
Centro em (x_o, y_o) e focos sobre o eixo y	$\dfrac{(x-x_o)^2}{b^2} - \dfrac{(y-y_o)^2}{a^2} = 1$

Fonte: Elaborada pela autora.

PARÁBOLA

Obervação:

$p =$ distância entre o foco e a diretriz da parábola.

Tabela 5.3: Parábola

Parábola	Equação
Vértice na origem e concavidade para cima	$x^2 = 2py$
Vértice na origem e concavidade para baixo	$x^2 = -2py$
Vértice na origem e concavidade para a direita	$y^2 = 2px$
Vértice na origem e concavidade para a esquerda	$y^2 = -2px$
Vértice em (x_o, y_o) e concavidade para cima	$(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o)$
Vértice em (x_o, y_o) e concavidade para baixo	$(x - x_o)^2 = -2p(y - y_o)$
Vértice em (x_o, y_o) e concavidade para a direita	$(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)$
Vértice em (x_o, y_o) e concavidade para a esquerda	$(y - y_o)^2 = -2p(x - x_o)$

Fonte: Elaborada pela autora.

5.5 Atividade 5: Dobraduras

Os procedimentos utilizados nesta atividade foram extraídos do livro da terceira série do Ensino Médio: **Matemática PAIVA**, 2015, cujo autor é Manoel Paiva.

Objetivo: Realizar construções geométricas da elipse, da hipérbole e da prábola utilizando dobraduras.

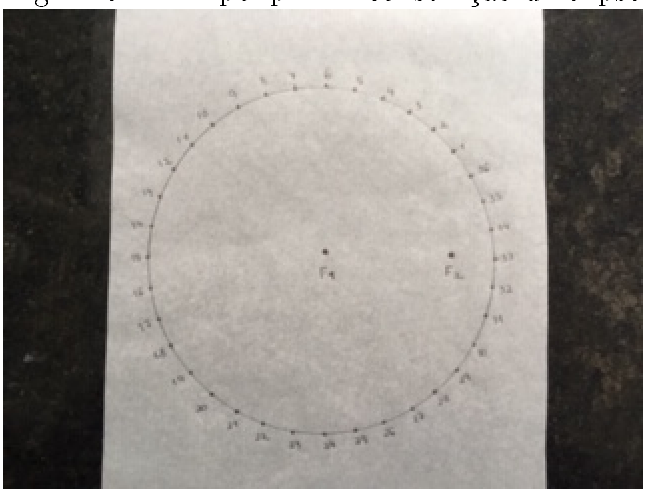
Tempo de duração: 20 minutos.

Material utilizado: Papel manteiga, transferidor de 360° e régua.

Procedimentos: A classe foi dividida em grupos com três alunos. A proposta era que cada grupo construísse uma elipse, uma hipérbole e uma parábola usando dobraduras em papel manteiga. Cada grupo recebeu três pedaços de papel manteiga, com as seguintes estruturas prontas (para ganhar tempo):
* Uma circunferência com dois pontos em destaque: seu centro (F_1) e outro ponto interior à circunferência, diferente do seu centro (F_2), figura 5.21.
* Uma circunferência com dois pontos em destaque: seu centro (F_1) e outro ponto exterior à circunferência(F_2), figura 5.22.
* Uma reta (na qual foram marcados alguns pontos) e um ponto (F) fora dela, figura 5.23.

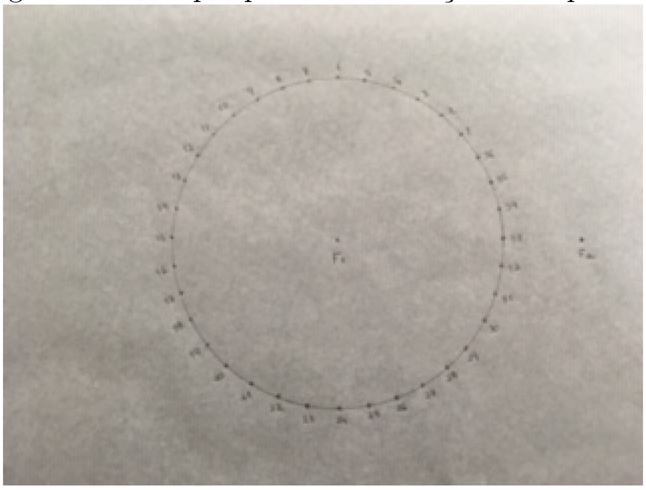
Observação: para construir as circunferências foi utilizado um transferidor de 360°, por ser mais prático que usar o compasso. As duas circunferências foram divididas por pontos em 36 partes iguais e tais pontos foram enumerados para facilitar a construção da elipse e da hipérbole.

Figura 5.21: Papel para a construção da elipse



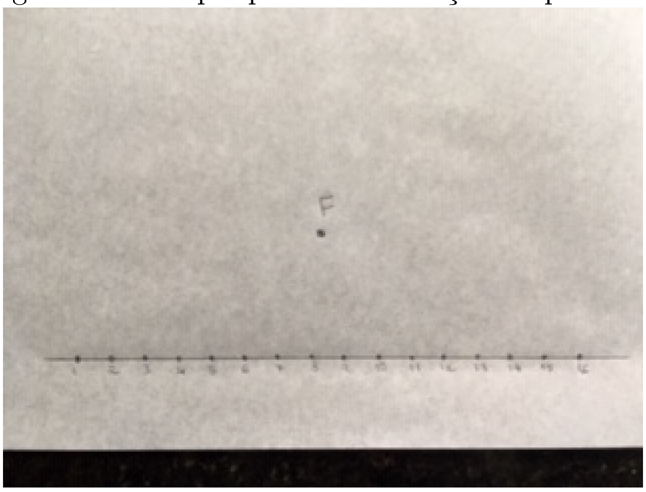
Fonte: Autora.

Figura 5.22: Papel para a construção da hipérbole



Fonte: Autora.

Figura 5.23: Papel para a construção da parábola



Fonte: Autora.

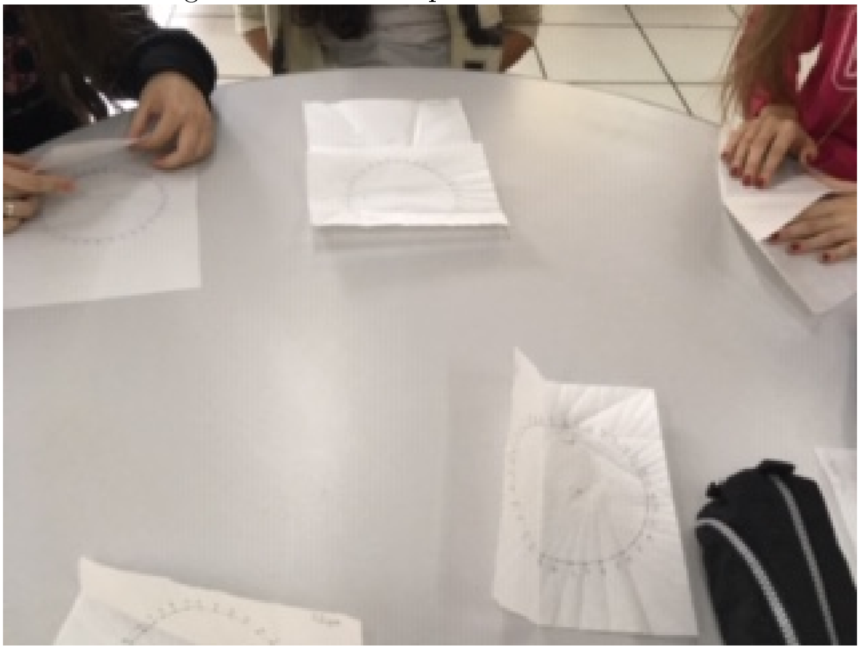
Os alunos foram orientados sobre como deveriam fazer as dobras para a construção das três curvas.

- Elipse: O papel deve ser dobrado de modo que o ponto F_2 coincida com cada um dos 36 pontos que estão sobre a circunferência.

- Hipérbole: O papel deve ser dobrado de modo que o ponto F_2 percorra a circunferência como foi feito no caso da elipse.

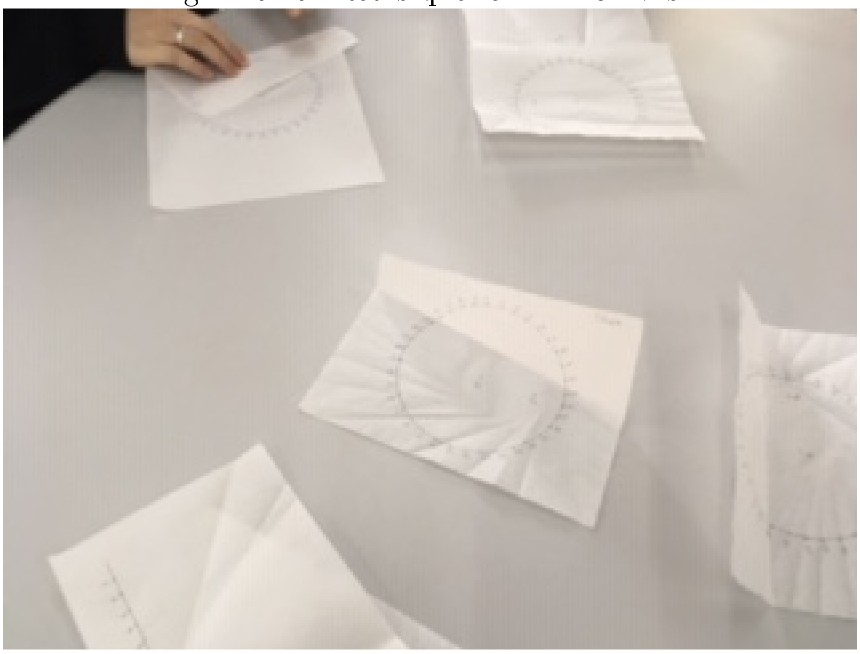
- Parábola: O papel deve ser dobrado fazendo com que o ponto F coincida com cada um dos pontos que estão sobre a reta, que é a diretriz da parábola.

Figura 5.24: Retas que formam curvas 1



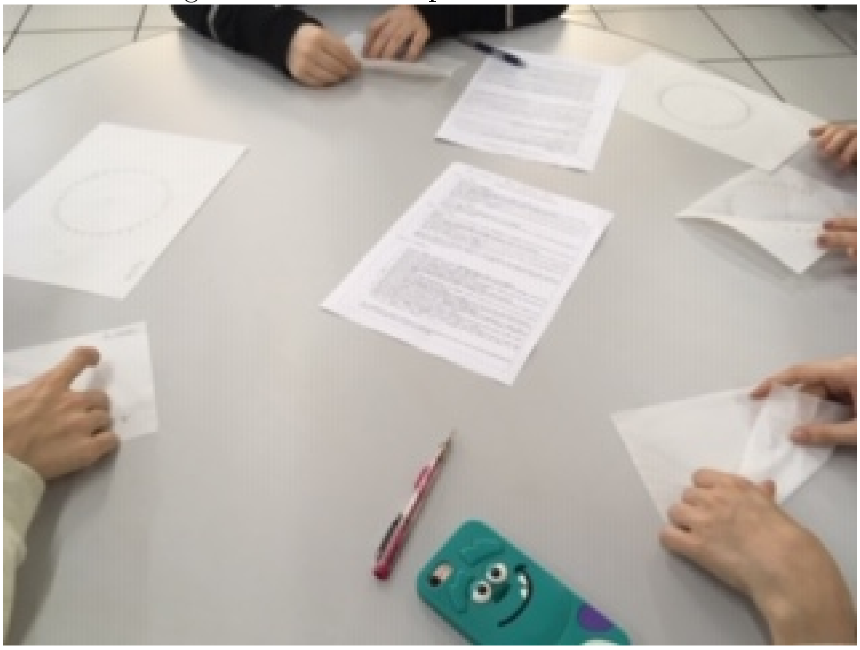
Fonte: Autora.

Figura 5.25: Retas que formam curvas 2



Fonte: Autora.

Figura 5.26: Retas que formam curvas 3



Fonte: Autora.

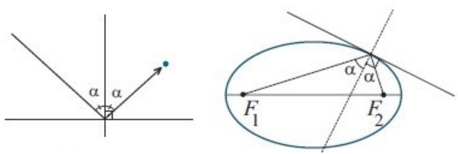
Conclusões: O que está por trás destes processos de construção?

As justificativas aqui apresentadas estão baseadas no artigo da Revista do Professor de Matemática, v. 66 de MELO et al.

ELIPSE

As seções cônicas e suas propriedades refletoras são utilizadas, na prática, para a construção de antenas parabólicas e espelhos refletores. A propriedade refletora da elipse é também explorada na construção de salas com boa acústica para apresentações musicais. Em todas as aplicações a reflexão do raio luminoso ou da onda sonora em cada ponto da curva segue a lei da reflexão em relação ao espelho plano (Figura 5.27) representado, num corte transversal, pela reta tangente à curva no ponto (Figura 5.27).

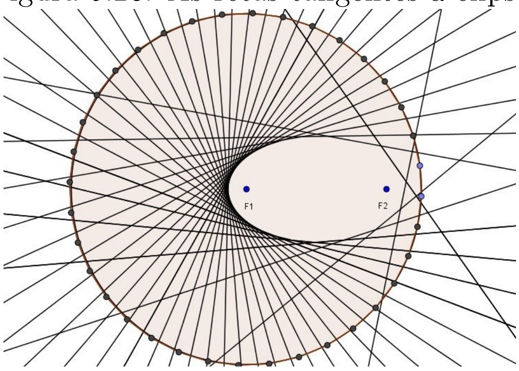
Figura 5.27: Lei da reflexão em relação ao espelho plano e reta tangente à curva no ponto



Fonte - https://rpm.org.br/cdrpm/66/8.html.

As tangentes à elipse foram construídas a partir das dobraduras. Como as dobras foram feitas em papel transparente, aparece a curva cujas tangentes são as retas produzidas pelas dobras (figura 5.28). Os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse.

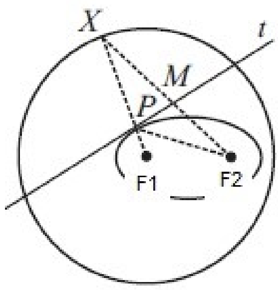
Figura 5.28: As retas tangentes à elipse



Fonte: Elaborada pela autora.

A justificativa é a seguinte: ao se dobrar o papel fazendo um dos pontos da circunferência, X, sobrepor F_2 fica determinada na dobra a reta t que é a mediatriz do segmento XF_2. O ponto P, obtido como ponto de intersecção da reta t com o segmento F_1X , é um ponto da elipse cujos focos são os pontos F_1 e F_2. Esta última afirmação pode ser verificada observando que a congruência LAL dos triângulos F_2PM e XPM garante que a soma das distâncias $PF_1 + PF_2 = PF_1 + PX = R$, sendo $R = 2a$ o raio da circunferência inicial. Temos, então, a propriedade métrica que define a elipse cujos focos são F_1 e F_2 e cujo semi-eixo maior é o raio da circunferência.

Figura 5.29: $d(P, F_1) + d(P, X) = R$

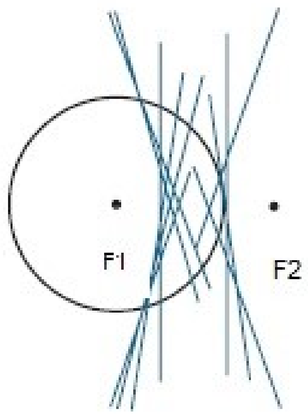


Fonte - https://rpm.org.br/cdrpm/66/8.html.

HIPÉRBOLE

Para a construção da hipérbole, foi desenhada uma circunferência de centro F_1 e raio $2a$ e foi marcado um ponto F_2 fora dela. A folha foi dobrada repetidas vezes, de modo que um ponto X da circunferência se sobrepunha ao ponto F_2. Pouco a pouco surgem no papel dois ramos de uma hipérbole envolta por suas tangentes (figura 5.30).

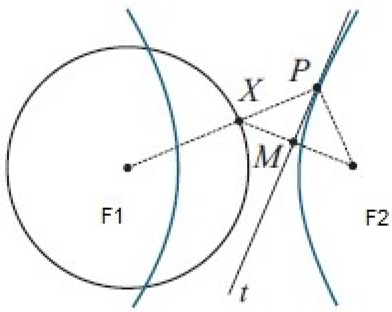
Figura 5.30: As retas tangentes à hipérbole



Fonte - https://rpm.org.br/cdrpm/66/8.html.

Justificamos o processo observando que, ao colocar um ponto X da circunferência sobre F_2, produz-se na dobra uma reta t que é a mediatriz de XF_2 por M. Verifica-se que a reta t tangencia a curva no ponto P, ponto de intersecção da reta t com a reta que passa pelos pontos F_1 e X, como vemos na figura 5.31.

Figura 5.31: t é mediatriz do segmento XF_2



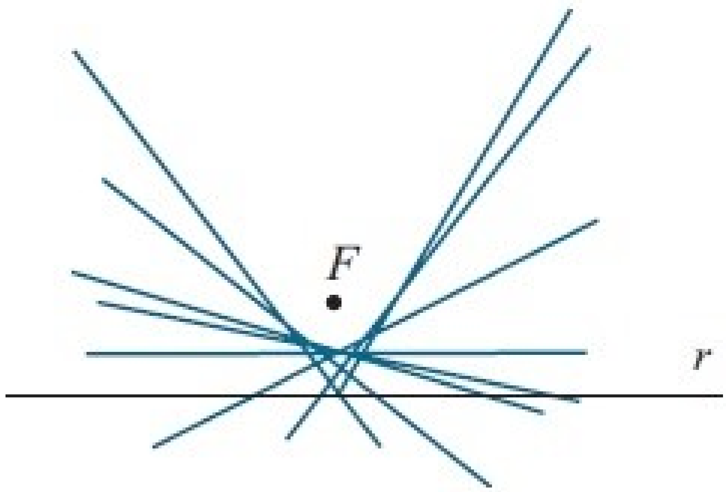
Fonte - https://rpm.org.br/cdrpm/66/8.html.

Temos os triângulos PMX e PMF_2 são congruentes pelo caso LAL, logo os segmentos PX e PF_2 são congruentes. Consequentemente, $PF_1 - PF_2 = PF_1 - PX = F_1X = 2a$, que é constante, pois se trata do raio da circunferência. Portanto, o ponto P pertence à hipérbole, que, por definição, é a curva em que a diferença das distâncias de qualquer um de seus pontos a cada um dos pontos fixos (os seus focos) se mantém constante.

PARÁBOLA

Foi escolhido, no papel, uma reta r e um ponto F com F fora de r. O papel foi dobrado de modo a sobrepor pontos da reta r ao F. Repetindo o processo algumas vezes, temos uma parábola envolta por suas tangentes (figura 5.32).

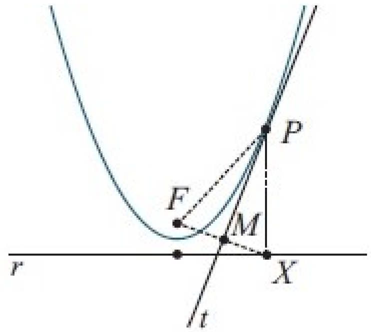
Figura 5.32: As retas tangentes à parábola



Fonte - https://rpm.org.br/cdrpm/66/8.html.

Para justificar esse processo basta observar que, quando se faz um ponto X da reta r sobrepor F, obtém-se na dobra uma reta t que é a mediatriz de XF por M, conforme a figura. O ponto P pertence à parábola e é o ponto de intersecção da reta t com a reta perpendicular à reta r pelo ponto X. A definição da parábola a partir de uma reta e um ponto fixo fora dela diz que a parábola é a curva que contém os pontos equidistantes do ponto (o foco F) e da reta (a reta diretriz r). Essas distâncias são $|PX|$ e $|PF|$ e são iguais, pois o ponto P é um ponto da mediatriz de XF.

Figura 5.33: A reta t é mediatriz de XF



Fonte - https://rpm.org.br/cdrpm/66/8.html.

5.6 Atividade 6: Aplicações da elipse

Objetivo: Apresentar alguns exemplos do cotidiano em que a elipse aparece.

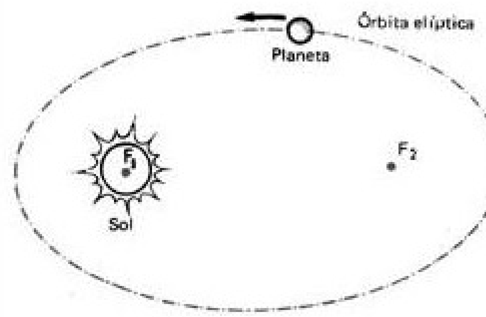
Tempo de duração: 1 aula de 45 minutos.

Material utilizado: Data show e Power Point.

Procedimentos: Levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos dialogando sobre as possíveis situações em que a elipse pode aparecer e em seguida apresentação de imagens contendo as aplicações abaixo citadas. Também foi proposto um vídeo com curiosidades sobre a elipse.

- Em 1609, na sua obra intitulada Astronomia nova, Johannes Kepler anunciou suas duas primeiras leis da Astronomia a respeito do movimento dos planetas. Em uma delas, ele afirma que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol sendo um dos focos da elipse. As leis de Kepler são consideradas como marcos tanto na história da Astronomia como na da Matemática.

Figura 5.34: Órbita do planeta Terra



Fonte - https://pt.slideshare.net/rufi78/trabalho1-beatrizbruno.

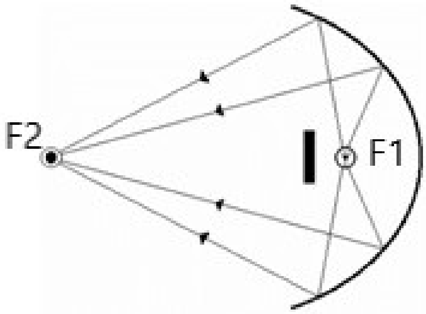
- O estádio Governador Magalhães Pinto, o Mineirão, localizado na Pampulha, em Belo Horizonte tem a forma elíptica.

Figura 5.35: Mineirão

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Est

- A elipse é uma curva fechada para a qual existem dois pontos especiais, os focos. A propriedade de reflexão da elipse é a seguinte: a partir de um dos focos traçamos um segmento de reta qualquer. Este segmento encontra a elipse num ponto, e se a partir deste traçarmos outro segmento que faça com a curva um ângulo igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco. (Nota: Os ângulos com as curvas são os ângulos com as respectivas tangentes nos pontos da curva.) Esta propriedade faz com que a elipse tenha várias aplicações práticas. Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.

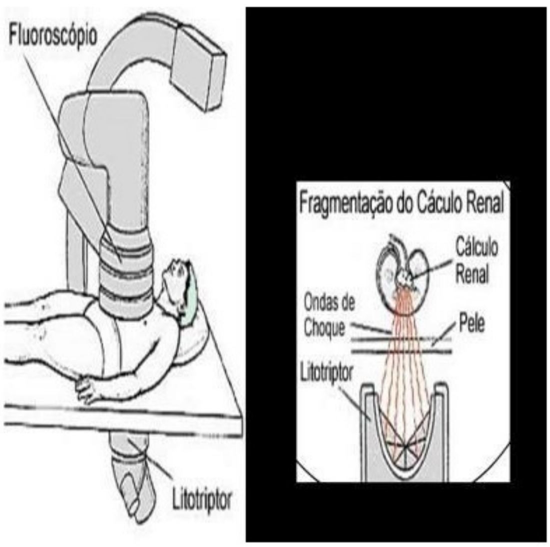
Figura 5.36: Propriedade da elipse



Fonte - http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

- Ainda, no campo da saúde, existe um procedimento muito utilizado no tratamento de cálculo renal, denominado litotripsia extracorpórea. Neste procedimento, conforme esquema abaixo, ondas de choque criadas fora do corpo do paciente viajam através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverizando-os. O litotriptor possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão.

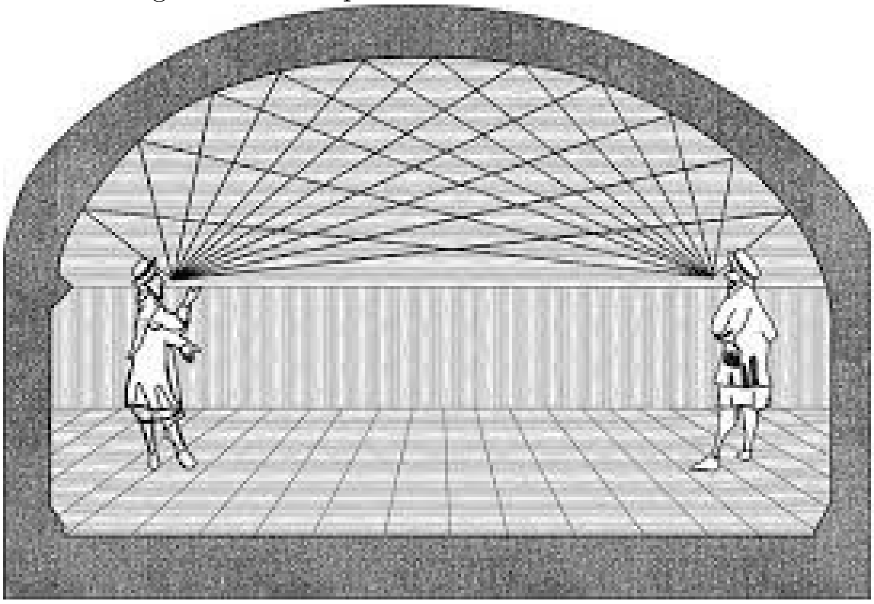
Figura 5.37: Litotriptor com espelho elipsoidal



Fonte - https://slideplayer.com.br/slide/2825453/.

- Uma ilustração acústica da propriedade de reflexão da elipse pode encontrar-se em salas que têm a forma de meio elipsoide (um elipsoide é um sólido que se obtém rodando uma elipse em torno do seu eixo, isto é, da reta definida pelos dois focos). Se duas pessoas se colocarem nos focos e uma delas falar, mesmo que seja baixo, a outra ouvirá perfeitamente, ainda que a sala seja grande e haja outros ruídos. Existem salas deste tipo (às vezes chamadas "galerias de murmúrios") em vários edifícios públicos na Europa e nos Estados Unidos.

Figura 5.38: Esquema de uma sala de sussurro



Fonte - http://www.ime.unicamp.br/ apmat/elipsoide-elipse-e-sua-propriedade-refletora/.

Observação: Para complementar as aplicações da elipse, foi exibido o vídeo: "O bilhar, o dentista e o teatro São Carlos" da série "Isto é Matemática" que mostra como as elipses estão presentes em nosso cotidiano.

Conclusões: Os alunos ficaram bastante atentos durante a apresentação das imagens e puderam perceber que encontramos aplicações da elipse em diversos contextos. Também demonstraram interesse durante a exibição do vídeo e gostaram das curiosidades nele apresentadas. O vídeo prende a atenção por ser muito bem produzido e exibir diversas situações práticas envolvendo elipses.

5.7 Atividade 7: Exercícios envolvendo elipses

Objetivo: Resolver situações-problema em grupo envolvendo elipses.

Tempo de duração: 1 aula de 45 minutos.

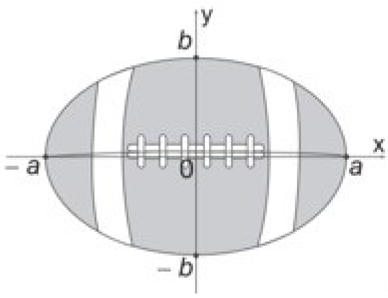
Material utilizado: Lista de exercícios impressa e resumo com as equações da elipse.

Procedimentos: Os alunos receberam uma folha contendo as equações da elipse e uma lista com os exercícios abaixo. Os exercícios foram resolvidos em grupo com o auxílio da professora para o esclarecimento de dúvidas.

EXERCÍCIOS

1. (ENEM, 2015) A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores a e b são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.

Figura 5.39: ENEM 2015



Fonte-https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/elipse/questoes.

Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$. O volume dessa bola, em função apenas de b, é dado por:

(A) $8b^3$

(B) $6b^3$

(C) $5b^3$

(D) $4b^3$

(E) $2b^3$

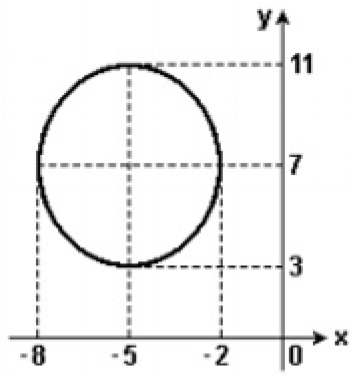
2. (UNESP, 2000) Considere a elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

a) Mostre que o ponto $P = (3, 12/5)$ pertence à elipse e calcule a distância de P ao eixo das abscissas.

b) Determine os vértices Q e R da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, onde $P = (3, 12/5)$.

3. (UNESP, 2003) A figura representa uma elipse. A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é

Figura 5.40: UNESP 2003



Fonte - https://www.stoodi.com.br/exercicios/unesp/2003/questao/a-figura-representa-uma-elipse-a-partir-dos-dados-disponiveis/

(A) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

(B) $\dfrac{(x+5)^2}{9} + \dfrac{(y-7)^2}{16} = 1$

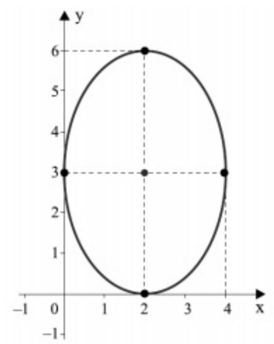
(C) $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 1$

(D) $\dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y+7)^2}{16} = 1$

(E) $\dfrac{(x+3)^2}{5} + \dfrac{(y-4)^2}{7} = 1$

4. (UNESP, 2014) A figura mostra um plano cartesiano no qual foi traçada uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.

Figura 5.41: UNESP 2014



Fonte - https://brainly.com.br/tarefa/31853156.

Valendo-se das informações contidas nesta representação, determine a equação reduzida da elipse.

5. (UNICAMP, 1996) Uma elipse que passa pelo ponto $(0,3)$ tem focos nos pontos $(-4,0)$ e $(4,0)$. O ponto $(0,-3)$ é interior, exterior ou pertence à elipse? Mesma pergunta para o ponto $(5/2, 13/5)$. Justifique sua resposta.

6. (FUVEST, 2001) A elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento AB é:
(A)(-2/3, -1/3)
(B)(2/3, 7/3)
(C)(1/3, -5/3)

(D)(-1/3, 1/3)

(E) (-1/4, 1/2)

GABARITO

1) B

2) a) 12/5 b) Q(-5,0), R(5,0) e área = 12

3) B

4) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

5) (0,-3) pertence e (5/2,13/5) é exterior

6) D

Conclusão: Os alunos resolveram os exercícios com tranquilidade e as dúvidas pontuais foram esclarecidas individualmente.

5.8 Atividade 8: Aplicações da hipérbole

Objetivo: Apresentar alguns exemplos de aplicação da hipérbole no cotidiano.

Tempo de duração: 1 aula de 45 minutos.

Material utilizado: Data show e Power Point.

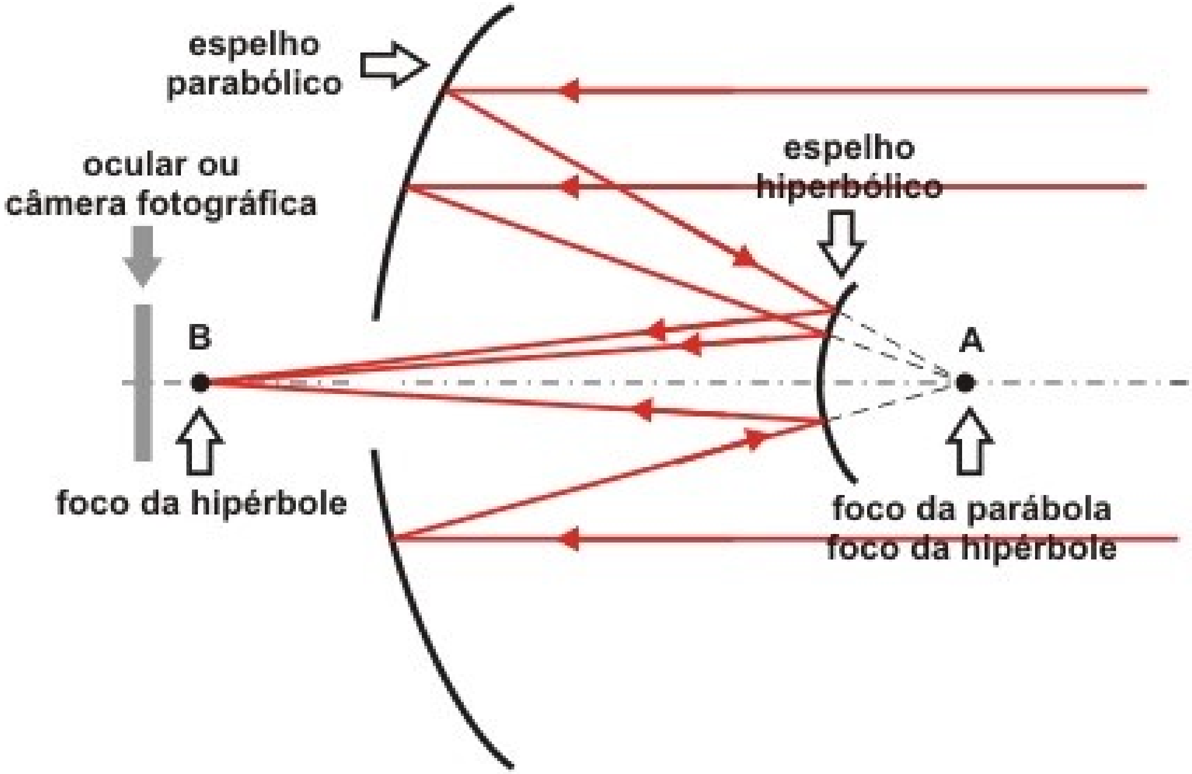
Procedimentos: Apresentação das situações seguintes através de imagens no data show.

- A propriedade de reflexão da hipérbole afirma que qualquer segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole encontra o ramo correspondente e é refletido em direção ao outro foco.

  Essa propriedade é muito aplicada nos telescópios de reflexão, os quais são constituídos de dois espelhos, sendo um maior, que é parabólico e outro menor, que é hiperbólico.

Esses dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da parábola coincida com um dos focos da hipérbole, conforme esquema a seguir:

Figura 5.42: Modelo de telescópio de reflexão



Fonte-https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/luz/espelhos/espelhos-parabolicos-elipticos-e-hiperbolicos/.

Nesse tipo de telescópio, quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente-ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica. A vantagem deste tipo de telescópio reside no fato de ter um comprimento muito menor do que os telescópios de refração (isto é, de lentes) com o mesmo poder de ampliação.

- As curvas hiperbólicas também aparecem na arquitetura como pode ser observado da catedral de Brasília e no planetário do St. Louis Science Center, nos Estados Unidos.

Figura 5.43: Catedral de Brasília

Fonte - https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetura/catedral-de-brasilia/.

Figura 5.44: Planetário do St. Louis Science Center

Fonte - https://pt.foursquare.com/v/james-s-mcdonnell-planetarium/4de687b4d164804164a1ffad?openPhotoId=4f9d86ece4b0f1efa8e32166

- Já na engenharia civil, o hiperboloide (sólido originado da rotação de uma hipérbole sobre o eixo y, por exemplo) pode ser observado na construção de torres de refrigeração de usinas nucleares. Isso se deve ao fato de que o hiperboloide é uma superfície duplamente regrada, ou seja, para cada um dos seus pontos existem duas retas distintas que se interceptam na superfície. Deste modo as torres podem ser construídas com vigas de aço retas, permitindo assim uma minimização dos ventos transversais e mantendo a integridade estrutural com uma utilização mínima de materiais de construção.

Figura 5.45: Torre de refrigeração de usina nuclear

Fonte - http://parquedaciencia.blogspot.com/2013/04/conicas-nocoes-intuitivas-e-aplicacoes.html.

- Finalmente, outra importante utilização das hipérboles é no sistema de localização em navegação, denominado de LORAN (Long Range Navigation - Navegação de Longa Distância). Este sistema permite a um navegante de um navio ou o piloto de um avião achar sua posição sem confiar em marcos visíveis. O LORAN utiliza hipérboles confocais, isto é, hipérboles com um dos focos em comum, onde estão os radares que emitem sinais. Cada par de radares resulta em uma hipérbole que contém a posição do navio ou do avião e, assim, a sua posição exata é o ponto onde três hipérboles interceptam-se. Essa posição pode ser determinada pela plotagem das três hipérboles em um mapa, obtendo a interseção em comum usando coordenadas e computando algebricamente a interseção.

Conclusões: Os alunos ficaram bastante atentos durante a apresentação das imagens e puderam perceber que encontramos aplicações da hipérbole em diversos contextos.

5.9 Atividade 9: Exercícios envolvendo hipérboles

Não foram encontrados exercícios de vestibulares ou do ENEM envolvendo hipérboles. Com exceção do exercício 1, que foi elaborado pela autora do trabalho, os demais foram extraídos do livro Matemática, Ensino Médio - módulo 9 cujos autores são Angel Panadés Rubió e Lêda Maria Côrrea Gonçalves da Editora Educacional de Belo Horizonte (2017).

Objetivo: Resolver exercícios em grupo envolvendo hipérboles.

Tempo de duração: 1 aula de 45 minutos.

Material utilizado: Lista de exercícios impressa e resumo com as equações da hipérbole.

Procedimentos: Os alunos receberam uma lista com os exercícios abaixo e resolveram em grupo com o auxílio da professora para o esclarecimento de dúvidas.

1. Uma hipérbole tem centro na origem, eixo real 2a, eixo imaginário 2b, distância focal 2c e excentricidade e. Escreva para essa hipérbole:
a) a equação reduzida, se os focos estão no eixo x.
b) a equação reduzida, se os focos estão no eixo y.
c) a relação entre a, b e c.
d) o valor da excentricidade e.
e) os possíveis valores de e.

2. A seguir, temos as equações de várias hipérboles, com centro na origem. Para cada uma delas, determine as medidas dos eixos real e imaginário, os focos, a distância focal e a excentricidade. Depois, faça um esboço da curva.

a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{y^2}{8} - x^2 = 1$

c) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$

d) $16x^2 - y^2 + 16 = 0$

3. Obtenha a equação de cada hipérbole caracterizada a seguir, com centro na origem do plano cartesiano.

a) Eixo real = 4; eixo imaginário = 6; focos no eixo y.

b) Eixo real = 10; excentricidade = 1,6; focos no eixo x.

c) Eixo imaginário = 6; um dos focos M(0,5).

d) Eixo real = 8; um dos focos P(-6,0).

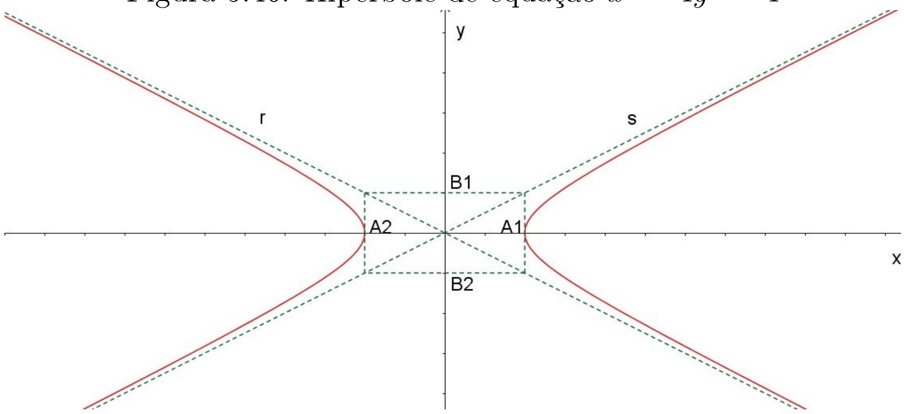
e) Um dos vértices P(0,-1); um dos focos Q(0,2).

f) Distância focal = 12; excentricidade = 1,2; focos no eixo y.

4. Uma hipérbole em que os eixos real e imaginário têm a mesma medida é chamada hipérbole equilátera. Obtenha a equação da hipérbole equilátera com centro na origem e um dos focos no ponto (0,4).

5. Em uma hipérbole, considere o retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados, e que passa pelos extremos de seus eixos real e imaginário, conforme figura.

Figura 5.46: Hipérbole de equação $x^2 - 4y^2 = 4$



Fonte: Elaborada pela autora.

As retas r e s, que contêm as diagonais desse retângulo, são chamadas assíntotas da hipérbole. Os dois ramos da hipérbole se aproximam cada vez mais das assíntotas, mas nunca tocam nelas. Determine as equações das duas assíntotas da hipérbole de equação $x^2 - 4y^2 = 4$.

6. Considere a hipérbole dada pela equação: $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$. Os extremos do eixo maior de uma elipse são os focos dessa hipérbole, e a excentricidade da elipse é o inverso da excentricidade da hipérbole. Obtenha a equação da elipse.

GABARITO

1.

a) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

b) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

c) $c^2 = b^2 + a^2$

d) $e = \dfrac{c}{a}$

e) $e > 1$

2.

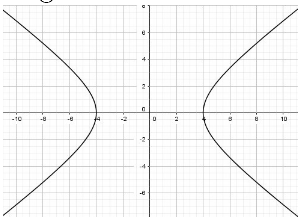
Tabela 5.4: Repostas do exercício 2

item	eixo real	eixo imaginário	focos	distância focal	excentricidade
a	8	6	(- 5, 0) e (5, 0)	10	$\frac{5}{4}$
b	$4\sqrt{2}$	2	(0, - 3) e (0, 3)	6	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$
c	4	6	$(-\sqrt{13}, 0)$ e $(\sqrt{13}, 0)$	$2\sqrt{13}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
d	8	2	$(0, -\sqrt{17})$ e $(0, \sqrt{17})$	$2\sqrt{17}$	$\frac{\sqrt{17}}{4}$

Fonte: Elaborada pela autora.

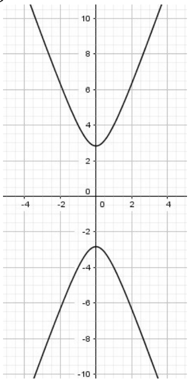
Gráficos do exercício 2

Figura 5.47: Item a



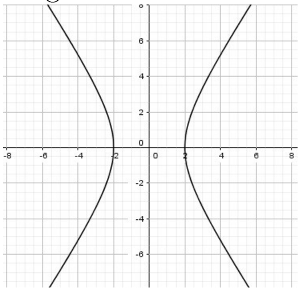
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 5.48: Item b



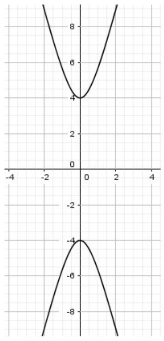
Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 5.49: Item c



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 5.50: Item d



Fonte: Elaborada pela autora.

3.

a) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{39} = 1$

c) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$

e) $y^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1$

f) $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{11} = 1$

4) $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{8} = 1$ ou $y^2 - x^2 = 8$

5) $x + 2y = 0$ e $x - 2y = 0$

6) $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

Conclusão: Os alunos resolveram os exercícios com tranquilidade e as dúvidas pontuais foram esclarecidas individualmente.

5.10 Atividade 10: Aplicações da parábola

Objetivo: Apresentar alguns exemplos de aplicação da parábola no cotidiano.

Tempo de duração: 1 aula de 45 minutos.

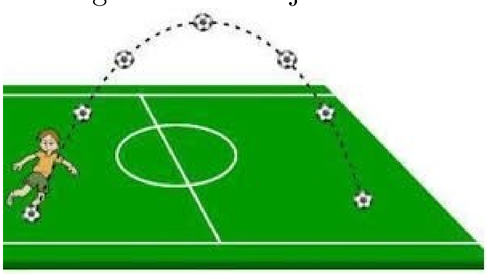
Material utilizado: Data show e Power Point.

Procedimentos: Apresentação das situações seguintes através de imagens no data show.

- Quando uma pedra é abandonada, temos que a distância percorrida verticalmente é diretamente proporcional ao quadrado do tempo de queda livre: $d = k.t^2$, com k constante e $k \neq 0$. A curva correspondente no plano cartesiano é uma parábola.

- A trajetória de todos os projéteis lançados obliquamente em relação à superfície da Terra, desconsiderados os efeitos do ar, é parabólica.

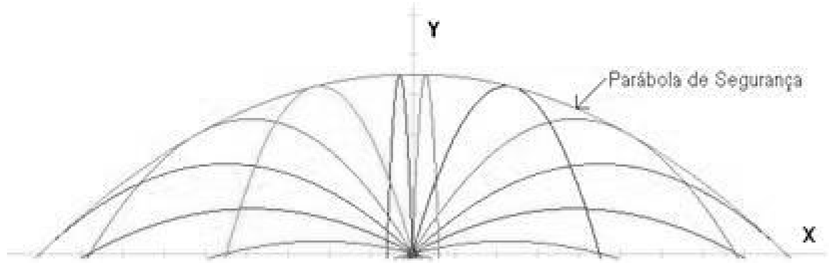
Figura 5.51: Trajetória da bola



Fonte - https://www.estudopratico.com.br/conceito-de-trajetoria-cinematica/.

- Quando, de um ponto fixo no solo, lançamos projéteis sempre com a mesma velocidade inicial v_0, em todas as direções possíveis, em um plano vertical dado, o contorno da região determinada pelos pontos que podem ser atingidos pelos projéteis é também uma parábola, chamada parábola de segurança.

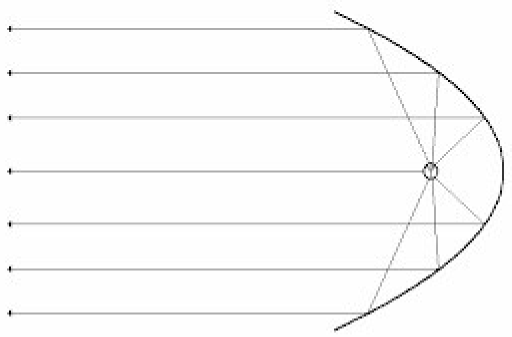
Figura 5.52: Parábola de segurança



Fonte - http://aparaboladeseguranca.blogspot.com/2013/06/parabola-de-seguranca.html.

- Uma propriedade interessante das parábolas é a seguinte: sendo P um ponto qualquer da parábola, a reta que passa pelo foco F e por P forma com a tangente à parábola em P um ângulo igual ao formado pela tangente com a reta paralela ao eixo da parábola passando por P.

Figura 5.53: Propriedade das parábolas

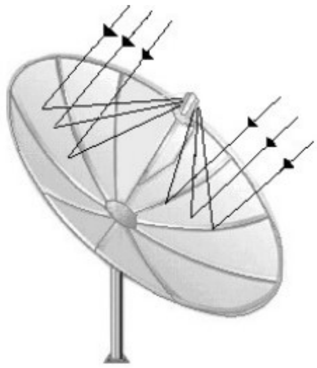


Fonte - http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf.

Essa propriedade explica o fato de os faróis dos automóveis serem envolvidos por uma superfície cuja seção é um paraboloide, ou seja, é a superfície gerada por uma parábola que dá uma volta completa em torno de seu eixo. Se a lâmpada situar-se exatamente no foco, os raios de luz formarão um feixe paralelo ao eixo, como é desejável.

- As antenas que captam sinais do espaço são parabólicas, assim como os espelhos dos telescópios astronômicos são parabólicos. Nos dois exemplos, os sinais recebidos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão (figura 5.54).

Figura 5.54: Esquema de incidência de raios sobre uma antena parabólica

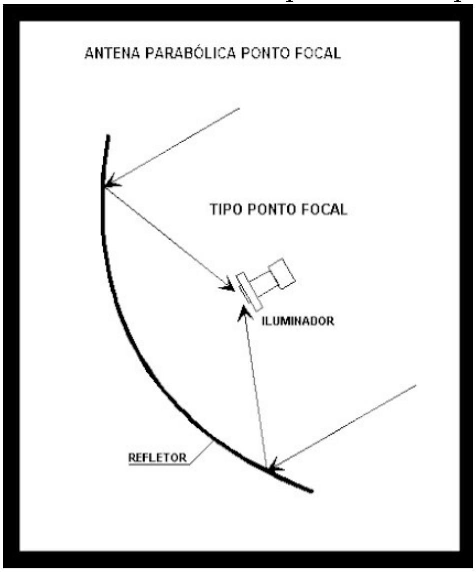


Fonte - http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/673-4.pdf

As antenas parabólicas captam ondas eletromagnéticas que são enviadas por satélites em órbita ao redor da Terra. Essa captação de sinal ocorre devido à propriedade da parábola de refletir o conjunto de raios recebidos para um único ponto, o foco da parábola. E exatamente nesse ponto, é posicionado o receptor de ondas, que enviará o sinal recebido para um conversor que as decodificará e enviará essas informações para o receptor de televisão.

Não podemos fazer com que a antena seja completamente o fundo de um paraboloide de revolução, uma vez que o lugar em que escolheríamos para receptor estaria fazendo uma espécie de sombra em outros lugares do paraboloide, o que faria com que alguns raios não chegassem diretamente à parábola. Para resolver este problema considera-se a antena como sendo apenas um lado do paraboloide, e mantendo o receptor no foco, conseguindo fazer com que toda a superfície da antena receba os sinais.

Figura 5.55: Sinais recebidos pela antena parabólica



Fonte - http://comunidadeazbox.blogspot.com/p/antenas-de-sinais-de-satelites.html

- Os aparelhos de radar operam de forma semelhante às antenas parabólicas, recebendo o eco de pulsos eletromagnéticos.

Figura 5.56: Funcionamento do radar

Fonte - https://escola.britannica.com.br/artigo/radar/482322.

Conclusões: Os alunos ficaram bastante atentos durante a apresentação das imagens e puderam perceber que encontramos aplicações da hipérbole em diversos contextos.

5.11 Atividade 11: Exercícios envolvendo parábolas

Objetivo: Resolver situações-problema em grupo envolvendo parábolas.

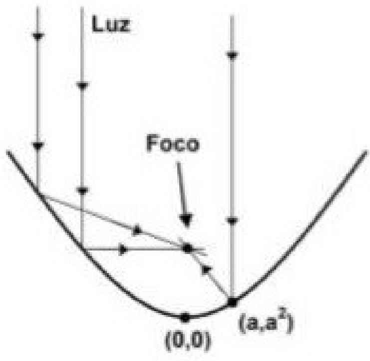
Tempo de duração: 1 aula de 45 minutos.

Material utilizado: Lista de exercícios impressa e resumo com as equações da parábola.

Procedimentos: Os alunos receberam uma lista com os problemas abaixo e resolveram em grupo com o auxílio da professora para o esclarecimento de dúvidas.

1. (UFPR, 2011) Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo y), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a, a^2), serão refletidos na direção da reta $4ay+(1-4a^2)x = a$.

Figura 5.57: $y = x^2$

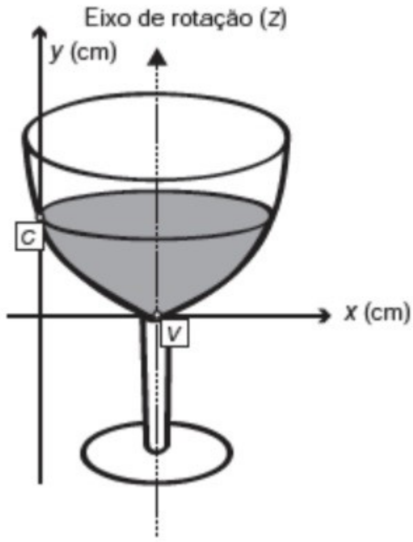


Fonte: SMOLE, 2016, p.153.

Sendo assim, calcule o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1,1) e (2,4) se encontrarão.

2.(ENEM, 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

Figura 5.58: ENEM 2013



Fonte - https://www.blogdovestibular.com/questoes/questao-comentada-sobre-rotacao-de-parabola-do-enem-2013.html

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

(A) 1

(B) 2

(C) 4

(D) 5

(E) 6

3.(PAIVA, p. 297) Ao dirigir o jato de água de uma mangueira obliquamente para cima, Pedro observou que a trajetória percorrida pela água é parabólica. O bico B da mangueira está a 1 m de altura em relação ao solo plano e horizontal, e a água atinge a altura máxima de 2 m, em relação ao solo, em um ponto V sobre uma reta vertical que sita 1,6 m de B.

Figura 5.59: Jato de água da mangueira

Fonte: PAIVA, 2015, p. 227.

a) A que altura, em relação ao solo, passa a diretriz dessa parábola?

b) A que altura, em relação ao solo, está o foco dessa parábola?

4.(Fuvest) Calcule a área de um triângulo equilátero com um vértice no ponto (0,0) e os outros dois sobre a parábola $y = 2x^2$.

5. (UFMG, 2003) Considere a parábola de equação $y = 8x - 2x^2$ e a reta que contém os pontos (4,0) e (0,8). Sejam **A** e **B** os pontos de interseção entre reta e a parábola. Determine a equação da mediatriz do segmento **AB**.

6. (UFMG) A seção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10 m de largura na base e altura máxima de 6 m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, é reservado 1,5 m para passagem de pedestres, e o restante é dividido em duas pistas para veículos. As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos. Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que

sua passagem pelo túnel seja permitida.

GABARITO

1. $(0, 1/4)$

2. E

3.
a) $2,64m$

b) $1,36m$

4. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

5. $2x - 4y + 7 = 0$

6. $2,76m$

Conclusão: Os alunos resolveram os exercícios com tranquilidade e as dúvidas pontuais foram esclarecidas individualmente.

5.12 Atividade 12: Construção da mesa de bilhar elíptica

Objetivo: Construir uma mesa elíptica para verificar a propriedade da elipse.

Esta atividade não foi aplicada em 2019, por ter sido idealizada depois do término deste ano letivo. A intenção era fazer a construção junto com os alunos em 2020, porém as aulas presenciais foram suspensas em março devido à pandemia. Assim, não foi possível ainda a aplicação da atividade com os alunos.

Tempo de duração: 2 aulas de 45 minutos.

Material utilizado: Dois pedaços de madeira, dois pregos para fixação, instrumentos para cortar e furar a madeira. A madeira pode ser substituída por papelão.

Procedimentos: Construção em madeira de uma mesa de bilhar em formato de elipse com furos em seus focos para que se perceba na prática que ao lançar a bola partindo de um dos focos, ela cairá no outro foco, que é a caçapa do bilhar elíptico.
Inicialmente, seria proposta para os alunos a seguinte atividade:
1) Qual deve ser a distância focal em uma elipse com 30 cm no eixo maior e 18 cm no eixo menor?
2) Construam esta elipse no papel, usando tachinhas (para marcar seus focos) e barbante para desenhar a curva.
Com o molde da elipse pronto, é necessário um profissional com equipamento especializado para cortar a elipse desenhada no papel num pedaço de madeira e em seguida, pregar a elipse vazada em outro pedaço de madeira e nesta base do jogo, fazer dois furos: um furo em cada foco da elipse. Com a estrutura montada, chegou a hora mais divertida: enxergar na prática a propriedade da elipse: usando uma bola de borracha, cada aluno lança a bola de um dos focos da elipse. Independentemente de onde a bola tocar a extremidade delimitada pela elipse, ela cairá no outro foco, ou seja, numa mesa de bilhar com formato elíptico, temos 100% de aproveitamento como foi mostrado do vídeo da série "Isto é Matemática".

Figura 5.60: Mesa de bilhar elíptica construída artesanalmente

Fonte: Autora.

Conclusão: Esta atividade poderá ser desenvolvida nos próximos anos.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Alguns materiais didáticos direcionados para o Ensino Médio abordam, no estudo da Geometria Analítica, somente os seguintes temas: pontos, retas e circunferências, de modo a excluir as cônicas. O tema deste trabalho surgiu da necessidade de complementar, de forma interessante e diversificada, o material didático adotado por uma escola da rede particular.

Cada atividade exigiu um planejamento detalhado, o qual envolveu diversos fatores. Entre eles, o levantamento dos materias que seriam utilizados, a elaboração de roteiros, a escolha do espaço da escola onde ocorreria o desenvolvimento de cada atividade e a organização de listas de exercícios com questões de provas anteriores de vestibulares e do ENEM. Além disso, a sequência em que as doze atividades foram propostas foi intencional, começando pela parte prática, com o objetivo de motivar os discentes e despertar a curiosidade, e terminando com a resolução de situações-problema.

As atividades foram desenvolvidas no segundo semestre de 2019 com uma turma da terceira série do ensino médio de uma escola particular de Jaú. A sala era composta por 24 alunos - fato que colaborou muito para o sucesso das atividades, visto que viabilizou um monitoramento adequado daquilo que cada aluno desenvolvia. Outro ponto favorável está relacionado à ótima infraestrutura apresentada pela escola onde o projeto foi realizado: biblioteca com computadores, ginásio esportivo, ateliê de Artes e data show na sala de aula. A maior dificuldade no que tange à aplicação das atividades restringiu-se à gestão do tempo, pois, além de trabalhar todo o conteúdo programático proposto no material didático, foi necessário acrescentar o tópico "cônicas". Dessa forma, para conciliar o planejamento do material com a execução das atividades extras, foram destinadas, no total, nove aulas de 45 minutos para a aplicação das sequências didáticas, sendo semanalmente reservada uma aula para o projeto e três para a conclusão do curso. Os alunos mostraram-se bastante envolvidos com as atividades propostas, principalmente pelo fato de serem diversificadas. Em suma, é notório que os objetivos propostos foram atingidos satisfatoriamente, uma vez que todos os relatos dados pelos alunos para o coordenador da escola acerca das atividades aplicadas foram positivos.

A aplicação das sequências didáticas apresentadas neste trabalho despertou o interesse da turma pelo assunto e tornou as aulas dinâmicas porque os alunos foram protagonistas da própria aprendizagem. As atividades permitiram a manipulação de material concreto, o trabalho colaborativo em grupo, a interdisciplinaridade com Artes e com Física, o uso de tecnologias digitais, a análise de aplicações das cônicas no cotidiano e a resolução de situações-problema. Foi muito gratificamente sentir a motivação e o empenho de todos os alunos em cada sequência didática. O papel do docente como mediador do conhecimento e não mero tansmissor de contéudos muda o enfoque tradicional das aulas de Matemática e torna o processo de aprendizagem mais leve, significativo e eficaz.

Além da abordagem das cônicas de forma não tradicional, também foi apresentada uma metodologia empregada nas aulas com o objetivo de valorizar o trabalho do aluno em sala de aula. A pesquisa realizada com alunos das turmas de 2019 revelou que a maioria dos alunos admite que esta metodologia favorece sempre a sua aprendizagem em Matemática. O depoimento de alguns ex-alunos também confirma o quanto é importante para o aluno fazer exercícios durante as aulas para aprender Matemática.

REFERÊNCIAS

[1] BACICH, L.; MORAN J. **Metodogias ativas para uma educação inovadora:** uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

[2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** ensino Médio. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192`. Acesso em: 28 ago. 2020.

[3] CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante matemática:** ensino médio, 3° ano. São Paulo: Edições EM, 2016.

[4] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica:** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[5] DUHIGG, C. **O Poder do hábito**. São Paulo: Objetiva, 2012.

[6] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

[7] FINI, M. S.; GRANJA, E. S. C.; MELLO, J. L. P.; MACHADO, N. J.; MOISÉS, R. P.; SINELLI, W. **Material de apoio ao currículo de Estado de São Paulo:** caderno do professor; matemática, ensino médio, 3ª série/Secretaria da Educação. São Paulo: SE, 2014.

[8] IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar**. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 1993. v. 7.

[9] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática:** ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

[10] MALANGA, U. C. C. **Matemática, Livro 3**. São José dos Campos: Editora Poliedro, 2011.

[11] MELO, F. S.; GALVÃO, M.E. E. L. Obtendo as cônicas com dobraduras. **Revista do Professor de Matemática**, v. 66. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/66/8.html. Acesso em: 28 ago. 2020.

[12] PAIVA, M. **Matemática:** Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 3.

[13] PANADÉS RUBIÓ, A.; GONÇALVES, L. M. C. **Matemática e suas tecnologias:**, ensino médio, módulo 9. Belo Horizonte: Editora Educacional, 2017.

[14] PARÁBOLA e parabolóide nas antenas. [Campinas]: [Unicamp], 2020. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/ apmat/parabola-e-paraboloide-nas-antenas/. Acesso em: 28 ago. 2020.

[15] ROTINI, E. **Cônicas:** noções intuivas e aplicações! Parque da Ciência. Disponível em: http://parquedaciencia.blogspot.com/2013/04/conicas-nocoes-intuitivas-e-aplicacoes.html. Acesso em: 25 set. 2020.

[16] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo:** ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

[17] SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA. **O bilhar, o dentista e o Teatro São Carlos.** Disponível em: https://youtu.be/YVOWtQpQGOI. Acesso em: 1 ago. 2020.

[18] SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **Contato matemática**. São Paulo: FTD, 2016. v. 3.

[19] QUEIRÓ, J. F. **A elipse, a parábola e a hipérbole:** propriedades e aplicações. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/ jfqueiro/aplicacoes.pdf. Acesso em: 25 set. 2020.