UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ROGÉRIO DE OLIVEIRA LIMA

A IMPORTÂNCIA DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA COMO FATOR DE INFLUÊNCIA NA TOMADA DE DECISÕES

TRÊS LAGOAS - MS
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

A IMPORTÂNCIA DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA COMO FATOR DE INFLUÊNCIA NA TOMADA DE DECISÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato César da Silva

TRÊS LAGOAS – MS
2020

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

A Importância da Educação Financeira como Fator de Influência na Tomada de Decisões

por

ROGÉRIO DE OLIVEIRA LIMA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Renato César da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva (Orientador)
UFMS/CPTL

Edivaldo Romanini

Prof. Dr. Edivaldo Romanini
UFMS/CPTL

Menoni

Prof. Dr. José Antônio Menoni
UFMS/CPTL

Novembro de 2020

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que acreditam que a educação é capaz de transformar vidas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me iluminar com força e sabedoria e me amparar em todos os momentos de dificuldades.

Aos amigos e familiares, que sempre torceram por mim e deram o suporte para que o caminho fosse mais tranquilo.

Aos meus queridos alunos, que ao longo desta jornada sempre estiveram presentes e dispostos a participarem. Sem eles, este trabalho não faria sentido.

A Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, que me permitiu a graduação e agora, o título de mestre.

Aos professores da UFMS de Três Lagoas, e de modo especial, aos que lecionaram no PROFMAT, por transmitirem tantos conhecimentos com amor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Renato César da Silva, pela amizade adquirida, pela disponibilidade, pelo incentivo sempre dizendo que tudo daria certo, pela valiosa troca de experiências e grande contribuição para a realização deste trabalho.

E aos colegas de curso, por dividirem as angústias e as risadas, tornando tudo mais leve.

RESUMO

Desenvolver a educação financeira dentro das escolas tem sido debatido profusamente pela relevância do tema na formação do cidadão. O presente trabalho busca fomentar os jovens a criarem hábitos saudáveis de consumo, a planejarem a vida financeira, a estenderem os conhecimentos adquiridos a seus familiares, e o principal, a tomarem decisões prudentes no uso dinheiro, procurando escolher opções mais vantajosas. Para isso, inicialmente, foram abordados conceitos teóricos necessários para a tomada dessas decisões. Os objetos de conhecimento apresentados abrangem de progressões aritméticas e geométricas até séries de pagamentos e sistemas de amortização. Em seguida, foi feita uma pesquisa de campo, envolvendo a participação de estudantes do Ensino Médio e seus pais ou responsáveis, com o propósito de entender a realidade econômica que vivem, como lidam com o dinheiro e o nível de importância que dão ao tema. Por fim, a última etapa deste estudo, de caráter prático, envolve investigação, desenvolvimento e tomada de decisão diante de cada situação-problema proposta.

Palavras-chave: Educação Financeira; Matemática Financeira; Tomada de decisão.

ABSTRACT

Developing financial education within schools has been profusely debated due to the relevance of the topic in the citizens' education. This work aims to encourage young people to create healthy consumption habits, to plan their financial lives, to extend the knowledge acquired to their family members, and most important to make prudent decisions in the use of money, seeking to choose more advantageous options. To do so, initially, theoretical concepts necessary for making these decisions were approached. The presented subjects range from arithmetic and geometric progressions to payment series and amortization systems. Then, a field research involving the participation of high school students and their parents or guardians was done, with the purpose of understanding the economic reality they live in, how they deal with money and the level of importance they give to the topic. Finally, the last stage of the study has a practical nature and involves research, development and decision making in face of each question proposed.

Keywords: Financial Education; Financial Mathematics; Decision Making.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Historicamente, as primeiras ideias sobre matemática financeira foram suscitadas pelo nascimento do comércio, através do sistema de trocas de mercadorias até a criação de moedas. Com o desenvolver da sociedade, o dinheiro passou a manifestar forte impacto na vida das pessoas, caracterizando poder, status e qualidade de vida a quem o possui e sabe administrá-lo.

No momento atual, defrontamos com informações sobre economia, inflação, taxas de juros, cotação da moeda, investimentos, dentre outros termos, com enorme intensidade. Concomitantemente, esbarramos em uma colossal parcela da sociedade pouco capaz de lidar com esses assuntos.

A escolha do tema desta dissertação se deu, a princípio, por acreditar que a educação financeira desde a fase escolar pode alterar este panorama. Hoje, o ensino da matemática financeira nas escolas é deficitário e muitas vezes, deixado em segundo plano. Todavia, com a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [9], as instituições de educação básica devem incorporar o estudo de conceitos fundamentais de economia e finanças, visando a educação financeira dos estudantes. Este é um dos eixos transversais a serem implantados dentro das escolas.

Uma segunda justificativa, são os altos índices de inadimplência da população brasileira [6]. Uma sociedade endividada é reflexo da inabilidade ao tomar decisões de consumo que sejam vantajosas, da ausência de um planejamento financeiro eficaz e pela falta de hábito em realizar aplicações. Para o mestre em administração e especialista em finanças Gustavo Cerbasi

> Por falta de estímulo suficiente – falta de educação financeira – para seguir um projeto financeiro minimamente ativo para sua vida, a maioria das pessoas não dedica tempo suficiente a refletir sobre a escolha de seus investimentos, nem volta a examinar suas decisões ao longo do tempo. (CERBASI, 2013, p. 45)

Por último, a necessidade de resgatar as famílias dos estudantes para uma reflexão sobre o assunto, fomentando maior envolvimento entre as partes (jovens e pais) no que tange o orçamento familiar e desintensificando o tabu do diálogo sobre dinheiro.

No capítulo um, serão abordados os aspectos teóricos, principiando pelas sequências matemáticas denominadas progressões aritméticas e geométricas e o estudo sobre juros simples e compostos, conceitos esses, comumente tratados no ensino médio. Logo após, um aprofundando de temas financeiros como, equivalência de capitais, taxas equivalentes e proporcionais, série de pagamentos e os principais sistemas de amortização.

O segundo capítulo será direcionado a pesquisa de campo por meio de questionários aos estudantes e seus familiares, objetivando conhecer a realidade econômica que se encontram, a percepção sobre a importância da elaboração de um orçamento financeiro e identificar as principais categorias de consumo dessas famílias.

Já no último capítulo, estabelecido como objeto central do trabalho por apresentar as atividades práticas para tomada de decisões, teremos a proposta de três situações-problema envolvendo contextos do dia a dia, nos quais os estudantes, utilizando dos conceitos matemáticos adquiridos, efetuarão análises das questões justificando as conclusões alcançadas.

As percepções sobre o interesse dos jovens ao mercado financeiro, na diligência para tomar decisões mais assertivas e na formação do cidadão ligada a realidade do dinheiro serão retratados nas considerações finais.

1. PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo, transitaremos por ideias de sequências que apresentam regularidades e seguem alguns padrões. Em específico, abordaremos um breve estudo sobre Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG). Posteriormente, tomaremos conceitos de Matemática Financeira com a percepção das progressões aplicadas a ela.

A sequência teórica foi inspirada no livro citado na referência [1] desta dissertação.

1.1. Progressões Aritméticas

Para realizar um "mochilão" pela América do Sul, Lucas resolveu fazer economias durante os doze meses do ano. No primeiro mês, Lucas guardou 200,00 reais, e a partir do segundo, resolveu guardar sempre 25,00 reais a mais que no mês anterior.

Veja a tabela a seguir, que indica o valor guardado em cada um dos doze meses do ano:

Tabela 1: Economia mensal

Mês	Cálculo da economia mensal	Economia do mês
1	200,00	200,00
2	200,00 + 25,00	225,00
3	225,00 + 25,00	250,00
4	250,00 + 25,00	275,00
5	275,00 + 25,00	300,00
6	300,00 + 25,00	325,00
7	325,00 + 25,00	350,00
8	350,00 + 25,00	375,00
9	375,00 + 25,00	400,00
10	400,00 + 25,00	425,00
11	425,00 + 25,00	450,00
12	450,00 + 25,00	475,00

Fonte: Próprio autor

Ao analisarmos a tabela, percebemos que, a cada mês, a variação do valor guardado permanece constante em 25,00 reais. Esta é uma de milhares de situações que apresentam variações constantes em intervalos de tempos iguais. Notamos também que, na sequência formada $(200, 225, 250, 275, 300, \dots, 475)$, cada valor, a partir do segundo mês, é obtido pela adição do valor do mês anterior por um valor fixo.

Sequências como a do exemplo anterior, em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior por um valor fixo (constante), são chamadas de Progressões Aritméticas.

Definição 1.1. Progressão Aritmética (PA) é toda sequência na qual a diferença entre um termo (a partir do segundo) e seu anterior, é igual a uma mesma constante denominada razão, e denotada pela letra r.

De modo a padronizar sequências quaisquer, as representaremos por $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ onde, a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, e assim por diante, até um enésimo termo a_n. Uma sequência pode ser finita ou infinita.

Pela definição anterior, a razão de uma PA é dada por $r = a_{n+1} - a_n$, para todo n natural.

Exemplo 1.1. A sequência $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2})$ é uma progressão aritmética finita, em que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 3\sqrt{2}$, $a_3 = 5\sqrt{2}$ e $a_4 = 7\sqrt{2}$.

Para calcular a razão, elegemos qualquer termo, a partir do segundo, e subtraímos o seu termo anterior. Em particular, tomemos:

$$r = a_4 - a_3 = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Exemplo 1.2. As sequências $(-5, -2, 1, 4, 7, \dots)$ e $(3, 3, 3, 3)$ são progressões aritméticas de razões, respectivamente, 3 e 0.

Exemplo 1.3. Sabendo que o quarto termo de uma progressão aritmética vale 6, e que o décimo quinto termo vale $\frac{23}{2}$. Quanto vale o nono termo dessa progressão?

Solução: Para responder a questões como esta, é preciso entender que, em uma PA, para avançar um termo, basta somar a razão uma vez; para avançar dois termos, basta somar a razão duas vezes, e assim por diante.

Logo, $a_{15} = a_4 + 11r$ (do quarto termo ao décimo quinto, avançamos 11 termos).

Como $a_4 = 6$ e $a_{15} = \frac{23}{2}$, então:

$$\frac{23}{2} = 6 + 11r \ \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Analogamente,

$$a_9 = a_4 + 5r = 6 + 5.\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

1.1.1. Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Consideremos uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de primeiro termo a_1, razão r e um termo qualquer a_n, em que n representa a posição deste termo na sequência.

Teorema 1.1. O termo geral a_n de uma progressão aritmética é dado pela fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$, para todo n inteiro e positivo.

Demonstração: Dado o primeiro termo a_1 e através da relação de recorrência de uma PA, $a_{n+1} = a_n + r \ (n \geq 1)$, podemos encontrar a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética. Vejamos:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$a_5 = a_4 + r$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Daí, por recorrência, obtemos o seguinte resultado:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Se tivéssemos considerado o primeiro termo a_0, obteríamos:

$$a_n = a_0 + (n-0)r = a_0 + n.r$$

Corolário 1.1. Considerando dois termos quaisquer a_n e a_k de uma PA, da fórmula do termo geral, temos: $a_n = a_k + (n-k)r$.

O exemplo 1.3 se aplica a este corolário.

Exemplo 1.4. Na progressão aritmética $(16, 13, 10, 7, \dots)$, temos

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 16 + (n-1).(-3) = -3n + 19$$

Em particular, $a_{24} = -3 \,.\, 24 + 19 = -53$

Exemplo 1.5. O não pagamento da conta mensal de serviços de água e esgoto até o dia do seu vencimento, ocasiona uma cobrança por impontualidade com taxa de 1% ao dia, a regime de juros simples, sobre o valor da conta mensal. Supondo que o valor a ser pago em determinado mês era de R$ 80,00, e que o pagamento só foi efetuado 20 dias após a data de seu vencimento, determine o valor total pago.

Solução: Consideremos o valor a ser pago com n dias de atraso de a_n. Temos $a_0 = 80{,}00$ (valor inicial) e queremos calcular a_{20} (pagamento após 20 dias).

Como o juro diário cobrado é constante (razão r), é correto afirmar que (a_n) é uma progressão aritmética.

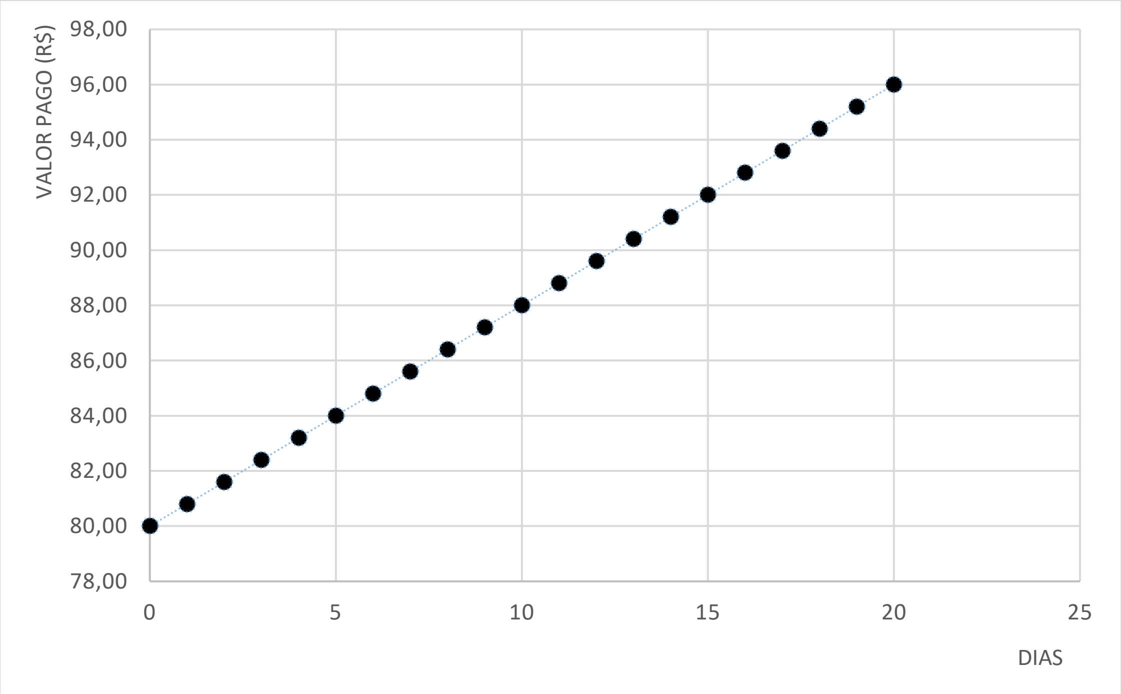
Temos que $r = 1\%\ de\ 80{,}00 = 0{,}80$

Logo, $a_{20} = a_0 + 20.r = 80{,}00 + 20\,.\,0{,}80 = 96{,}00$

Portanto, o valor pago após os 20 dias de atraso foi de 96,00 reais.

Vejamos o esboço do gráfico deste problema:

Gráfico 1: Representação de uma progressão aritmética



Fonte: Próprio autor

Observamos que o gráfico é formado por uma sequência de pontos colineares e seu domínio contempla apenas o conjunto dos números naturais.

Pela representação geométrica acima, é possível caracterizar uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de razão r e termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$ como uma função de primeiro grau $a_x = f(x) = a_1 + (x-1)r$, com a_1 e r constantes, pois a cada

x natural, temos associado um a_x. Esta função possui todas as propriedades da função afim, variando apenas em seu domínio.

1.1.2. Soma dos termos de uma PA finita

Dentre várias versões existentes, conta a história, que o professor do matemático Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), a fim de mantê-lo ocupado, pediu para que calculasse a soma dos números inteiros de 1 até 100. Com apenas sete anos de idade, em poucos minutos, o jovem Gauss já havia informado a resposta, dizendo 5050. Ele elucidou que percebeu que a soma dos valores extremos para os meios da sequência sempre resultava em 101, ou seja, 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, e assim por diante. Assim, obteve 50 somas iguais a 101.

Pautado nesta mesma ideia, podemos deduzir a fórmula para a soma de finitos termos de uma progressão aritmética.

Teorema 1.2. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

para todo n inteiro e positivo.

Demonstração: Escrevendo a soma dos n primeiros termos da sequência, do primeiro ao último termo (1), e do último ao primeiro (2), obtemos:

$$(1)\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$(2)\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \dots + a_2 + a_1$$

Somando (1) e (2), temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observemos nos dois primeiros parênteses que, $(a_1 + a_n)$ e $(a_2 + a_{n-1})$ possuem o mesmo valor, pois, como $a_2 = a_1 + r$ e $a_{n-1} = a_n - r$, então:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n$$

Analogamente, o mesmo ocorrerá aos demais parênteses.

Portanto, todos eles serão iguais a $(a_1 + a_n)$, e como são n parênteses, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n).n$$

Daí,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exemplo 1.6. Voltando ao problema inicial desse capítulo, quanto Lucas terá guardado para realizar o seu “mochilão”?

Solução: Precisamos calcular a soma de todos os 12 meses de economia, ou seja:

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}).12}{2}$$

Lucas guardou R$ 200,00 no primeiro mês, e a partir do segundo, sempre R$ 25,00 a mais que no mês anterior.

Daí, $a_1 = 200{,}00$, $r = 25{,}00$ e $a_{12} = a_1 + 11r = 200 + 11\,.\,25 = 475{,}00$. Portanto:

$$S_{12} = \frac{(200 + 475).12}{2} = 4050{,}00\, reais$$

1.2. Progressões Geométricas

Dentro da microbiologia, é natural o estudo das colônias de bactérias para, por exemplo, compreender sua proliferação e comportamento e para o desenvolvimento de remédios. Suponha que um biólogo iniciou um estudo sobre o crescimento de uma determinada colônia de bactérias. Tomou como ponto de partida uma única bactéria, e durante oito horas, analisou o crescimento desta colônia. Vejamos a tabela com os resultados de sua pesquisa:

Tabela 2: Crescimento da colônia de bactérias

Tempo (horas)	Número de bactérias
0	1
1	4
2	16
3	64
4	256
5	1024
6	4096
7	16384
8	65536

Fonte: Próprio autor

Pela análise da tabela, o biólogo percebeu que a cada hora o número de bactérias quadruplicava, formando a sequência:

$$(1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384, 65536, \ldots)$$

A seguir, temos a tabela com os valores detalhados do número de bactérias por hora:

Tabela 3: Crescimento detalhado da colônia de bactérias

Tempo (horas)	Número de bactérias
0	1
1	1 x **4** = 4
2	4 x **4** = 16
3	16 x **4** = 64
4	64 x **4** = 256
5	256 x **4** = 1024
6	1024 x **4** = 4096
7	4096 x **4** = 16384
8	16384 x **4** =65536

Fonte: Próprio autor

Observamos que a variação do número de bactérias a cada hora, é sempre 4 vezes maior que na hora anterior, gerando um crescimento acelerado.

Sequências como esta, que a cada termo, a partir do segundo, é obtido pelo produto do termo anterior por uma constante, são chamadas de Progressões Geométricas.

Definição 1.2. Progressão Geométrica (PG) é toda sequência na qual o quociente entre um termo (a partir do segundo) e seu anterior, é igual a uma mesma constante denominada razão, e denotada pela letra q.

Dada a PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$ onde, a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo, até um enésimo termo a_n, e assim por diante, calculamos a razão q do seguinte modo:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}, para\ todo\ n\ natural$$

Exemplo 1.7. A sequência $(-3, 6, -12, 24, -48, 96, -192, \dots)$ é uma progressão geométrica infinita. Para calcular a razão q, elegemos qualquer termo, a partir do segundo, e dividimos pelo termo anterior ao escolhido. Vejamos:

$$q = \frac{6}{-3} = \frac{-12}{6} = \cdots = \frac{-192}{96} = -2$$

Exemplo 1.8. Em uma progressão geométrica, sabendo que o quinto e nono termos valem, respectivamente, 18 e 162, quanto vale o primeiro termo dessa sequência?

Solução: Em uma PG, para avançar um termo, basta multiplicar a razão uma vez, para avançar dois termos, basta multiplicar a razão duas vezes, e assim por diante.

Partindo de a_5, devemos avançar quatro termos até a_9, ou seja, $a_9 = a_5 . q^4$.

Como $a_5 = 18$ e $a_9 = 162$, então:

$$162 = 18. q^4$$

$$9 = q^4$$

$$q = \sqrt{3}$$

De modo análogo, para descobrir o valor do primeiro termo, podemos utilizar a expressão $a_5 = a_1 . q^4$, em que $a_5 = 18$ e $q = \sqrt{3}$.

$$a_5 = a_1 . q^4 \leftrightarrow a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{18}{(\sqrt{3})^4} = \frac{18}{9} = 2$$

Portanto, $a_1 = 2$.

1.2.1. Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Consideremos uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de primeiro termo a_1, razão q e um termo qualquer a_n, em que n representa a posição deste termo na sequência.

Teorema 1.3. O termo geral a_n de uma progressão geométrica é dado pela fórmula $a_n = a_1 . q^{n-1}$, para todo n inteiro e positivo.

Demonstração: Dado o primeiro termo a_1 e através da relação de recorrência de uma PG, $a_{n+1} = a_n . q$ $(n \geq 1)$, podemos encontrar a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica. Vejamos:

$$a_2 = a_1 . q$$

$$a_3 = a_2 . q$$

$$a_4 = a_3 . q$$

$$a_5 = a_4 . q$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} . q$$

$$a_n = a_{n-1} . q$$

Multiplicando ambos os lados, temos:

$$a_2 . a_3 . a_4 . a_5 . \dots . a_{n-1} . a_n = (a_1 . q) . (a_2 . q) . (a_3 . q) . (a_4 . q) . \dots . (a_{n-2} . q) . (a_{n-1} . q)$$

$$a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \,.\, a_5 \,. \dots .\, a_{n-1} \,.\, a_n = a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \,. \dots .\, a_{n-2} \,.\, a_{n-1} \,.\, \underbrace{(q.\,q.\,q. \dots .\,q)}_{n-1\ vezes}$$

Simplificando a igualdade, obtemos:

$$a_n = a_1.\,q^{n-1}, para\ todo\ n\ inteiro\ e\ positivo$$

Observemos que, se considerássemos o primeiro termo a_0, teríamos obtido:

$$a_n = a_0.\,q^n$$

Corolário 1.2. Tomando dois termos quaisquer a_n e a_k de uma PG, da fórmula do termo geral, temos: $a_n = a_k.\,q^{n-k}$.

O exemplo 1.9 se aplica a este corolário.

Exemplo 1.9. Considere a progressão geométrica $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \dots\right)$. Determine o oitavo termo dessa sequência:

Solução: A razão q desta PG é dada por:

$$q = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Aplicando a fórmula do termo geral, em que $a_1 = 2\ e\ q = \frac{3}{4}$, temos:

$$a_n = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

Logo, o oitavo terma dessa sequência é:

$$a_8 = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 2.\frac{2187}{16384} = \frac{2187}{8192}$$

Exemplo 1.10. Hoje, a população na cidade de Aparecida do Taboado-MS é de 25 mil habitantes. Após alguns estudos, percebeu-se que a cidade tem potencial de crescimento populacional de 5% ao ano. Considerando esta estimativa, daqui a 10 anos, qual será o número aproximado de habitantes que Aparecida do Taboado terá?

Solução: O número de habitantes cresce 5% ao ano, logo, a cada ano que passa, a população representa 105% da população anterior. Portanto, a cada ano, o número de habitantes sofre uma multiplicação por 1,05.

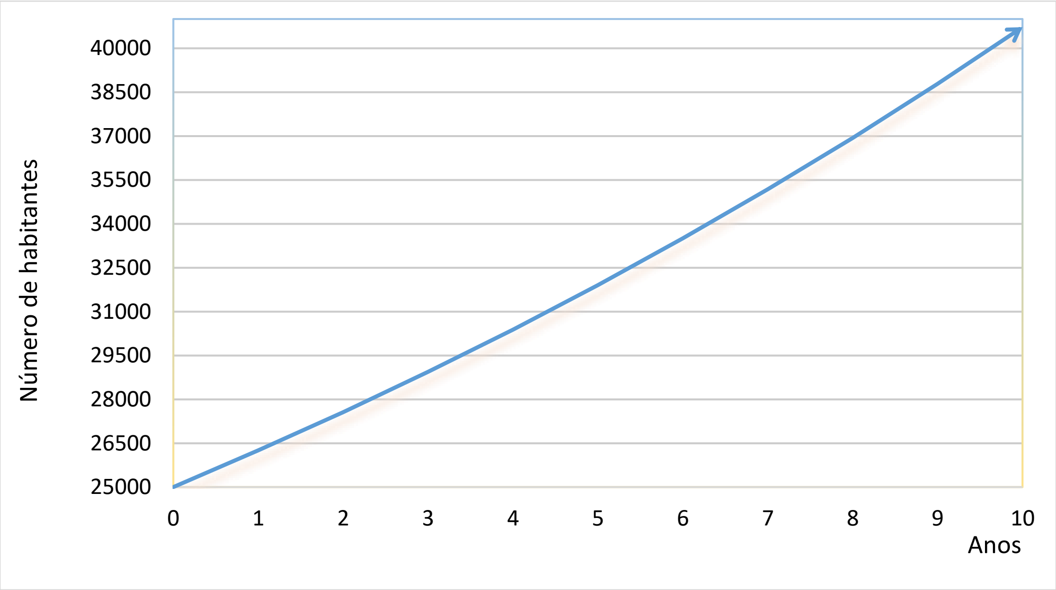
Consideremos também, a população inicial $P_0 = 25000$ habitantes. Podemos utilizar a fórmula do termo geral de uma PG, em que a razão q é 1,05 e P_{10} representa a população daqui a 10 anos. Daí:

$$P_n = P_0 . q^n$$

$$P_{10} = 25000.(1{,}05)^{10} \cong 40722 \text{ habitantes}$$

Vamos esboçar o gráfico do exemplo 1.10:

Gráfico 2: Representação de uma progressão geométrica



Fonte: Próprio autor

Notemos que o gráfico é formado por uma sequência de pontos pertencentes a uma curva exponencial, ou seja, é possível caracterizar uma progressão geométrica $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de razão q e termo geral $a_n = a_0 . q^n$ como uma função exponencial $a_x = f(x) = a_0 . q^x$, com a_0 e q constantes, pois a cada x natural, temos associado um a_x.

Esta função possui as propriedades da função exponencial, variando apenas em seu domínio, pertencente ao conjunto dos números naturais.

1.2.2. Soma dos termos de uma PG finita

Teorema 1.4. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, de razão $q \neq 1$, é dada pela fórmula:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

para todo n inteiro e positivo.

Demonstração: Considere uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de razão $q \neq 1$, primeiro termo a_1 e último termo a_n. Vamos encontrar a soma S_n dos n termos dessa sequência:

Temos que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1} \quad \text{(I)}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade (I) por q, obtemos:

$$qS_n = q(a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1})$$

Reescrevendo:

$$qS_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + a_1.q^4 + \cdots + a_1.q^n \quad \text{(II)}$$

Subtraindo a equação (II) da equação (I), temos:

$$qS_n - S_n = (a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^n) - (a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \cdots + a_1.q^{n-1})$$

Assim:

$$qS_n - S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^n - a_1 - a_1.q - a_1.q^2 - \cdots - a_1.q^{n-1}$$

Logo:

$$qS_n - S_n = a_{1.}q^n - a_1$$

Colocando os termos comuns em evidência:

$$S_n(q-1) = a_{1.}(q^n - 1)$$

Portanto:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Exemplo 1.11. O livro “O Homem que Calculava” de Malba Tahan, conta a famosa lenda sobre a origem do jogo de xadrez, onde um jovem e sábio brâmane, chamado Lahur Sessa, querendo tirar a tristeza e amargura do rei hindu, após a morte de seu filho, oferece um jogo ao qual pudesse distraí-lo. Após algumas partidas jogadas, a satisfação do rei era tão grande, que resolveu recompensar o brâmane pedindo-o que escolhesse sua premiação.

> “Vou, pois, aceitar, pelo jogo que inventei, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo.” [2]

O rei espantado, perguntou como poderia pagá-lo com algo tão insignificante. E ele responde:

> “Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro.” [2]

O rei pediu aos algebristas mais hábeis da corte que calculassem a porção de trigo pretendida por Sessa.

Qual foi a possível resposta que os algebristas deram ao rei?

Solução: O tabuleiro do jogo de xadrez possui 64 casas. Logo, o total de grãos pretendido por Lahur Sessa é a soma da sequência dos 64 primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2.

Ou seja:

$$S_{64} = 1.\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Portanto, percebemos que a quantidade de grãos de trigo se dá numa quantidade imensurável.

1.2.3. Soma dos termos de uma PG infinita

Neste tópico, os estudantes do ensino médio começam a ter uma primeira noção sobre limites de uma sequência. O exemplo a seguir foi retirado do livro citado na referência [3] desta dissertação.

Exemplo 1.12. Uma empresa reservou 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. No primeiro ano será aplicado a metade dessa verba, e em cada ano seguinte será aplicada metade do que sobrou da verba no ano anterior.

Podemos representar, em forma de PG, os valores, em milhões de reais, aplicados ano a ano:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$$

com $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Vamos fazer uma análise, ano a ano, do montante dos valores aplicados:

$$1^{\text{º}} \text{ ano: } S_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ mi}$$

$$2^{\text{º}} \text{ ano: } S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ mi}$$

$$3^{\text{º}} \text{ ano: } S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875 \text{ mi}$$

$$4^{\text{º}} \text{ ano: } S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375 \text{ mi}$$

$$5^{\text{º}} \text{ ano: } S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875 \text{ mi}$$

$$6^{\underline{o}}\ \text{ano}: S_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64} = 0{,}984375\ \text{mi}$$

$$\vdots$$

O montante aplicado está, a cada ano, mais próximo de 1 milhão. Nunca chegaremos à soma de 1 milhão, porém, podemos tornar a soma o mais próximo disso quanto se deseja. Dizemos que o limite da soma desta sequência é 1.

Em outras palavras, seja n suficientemente grande, então:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1$$

S_n é chamada soma parcial da PG infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$

Nem toda PG infinita admite uma soma. Podemos observar na sequência infinita $(1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$, cujos termos crescem cada vez mais, não sendo possível calcular sua soma.

Uma das condições para a existência da soma dos infinitos termos de uma PG é a razão q estar no intervalo $-1 < q < 1$.

Teorema 1.5. Seja (a_n) uma PG infinita de razão q. Se $-1 < q < 1$, então o limite da soma S_n é dada por $\frac{a_1}{1-q}$, ou seja:

$$S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{a_1}{1-q}$$

Demonstração: A sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma PG infinita. Logo, pelo Teorema 1.4, a soma parcial de seus termos é dada por:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

No entanto, quando n tende ao infinito, de modo intuitivo, percebemos que se $-1 < q < 1$, então q^n tende a zero.

Escrevendo em notação matemática:

$$\text{Se} -1 < q < 1, \text{então } \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Daí,

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = a_1 \frac{0 - 1}{q - 1} = a_1 \frac{-1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo 1.13. Determinar a fração geratriz da dízima periódica 2,133333...

Solução: Temos que:

$$2{,}13333\ldots = 2 + 0{,}1 + \underbrace{0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \cdots}_{\text{Soma de uma PG infinita}}$$

A sequência $(0{,}03; 0{,}003; 0{,}0003; \ldots)$ é uma PG infinita de razão $q = 0{,}1$, logo, sua soma é dada por:

$$S_\infty = \frac{0{,}03}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}03}{0{,}9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

Daí,

$$2{,}13333\ldots = 2 + 0{,}1 + \frac{1}{30} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{32}{15}$$

1.3. Matemática Financeira

Problemas de ordem financeira como: entrar em um consórcio ou financiamento para a aquisição de um bem, calcular o valor do juros de uma prestação, estudar qual forma de pagamento será mais vantajosa, quanto um valor aplicado na poupança renderá em um ano, dentre tantas outras situações que acontecem no mundo consumidor, sempre será motivo, ou ao menos deveria ser, para se fazerem análises com a finalidade de tomar decisões corretas. Veremos agora, conceitos técnicos dentro da matemática financeira, que busquem reflexões sobre o valor do dinheiro e as melhores escolhas a serem tomadas.

1.3.1. O Tempo e o Dinheiro

O valor do dinheiro, talvez seja o aspecto que mais leva as pessoas a tomarem decisões erradas. Acreditar que R$ 105,00 valem mais que R$ 100,00 pode não ser verdade. O valor do dinheiro depende do tempo em que estamos trabalhando.

No mercado financeiro, a operação de empréstimo ocorre com grande frequência. Tomar um valor emprestado ou emprestar dinheiro por um certo período de tempo, é algo habitual em nosso cotidiano. Um exemplo prático disso é a poupança, que normalmente é o primeiro contato das pessoas com aplicações do mercado financeiro. Poucos sabem, mas quando depositamos dinheiro na poupança, estamos emprestando dinheiro ao banco, que faz seus investimentos e credita parte dos lucros de volta à caderneta.

Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 1.14. Um empréstimo de R$ 1000,00 deve ser pago após três meses com o valor de R$ 1100,00. Observe que o capital de R$ 1000,00 após o período de 3 meses, teve um rendimento de R$ 100,00, denominado juros. A taxa de juros desse trimestre foi de 100/1000 = 0,1 = 10%. O valor da dívida de R$ 1100,00 no dia do pagamento é o que chamamos de montante.

Muitos erros são cometidos em análises financeiras por falta de se estabelecer uma dependência entre o dinheiro e o tempo. Do exemplo anterior, como o dinheiro vale 10% ao trimestre, é importante entender que o valor de R$ 1000,00 no momento do empréstimo equivale a R$ 1100,00 após os três meses.

Quantias diferentes em períodos diferentes podem ter o mesmo valor. Sabemos que R$ 1000,00 hoje valem mais que R$ 1000,00 daqui a doze meses [1]. Mesmo que o dinheiro fique guardado em uma caderneta de poupança com rendimento de 0,4% ao mês, R$ 1000,00 hoje equivaleriam a $1000{,}00.(1{,}004)^{12} = 1049{,}07$ reais daqui a um ano.

Outro erro clássico, é acreditar que o pagamento de 2 prestações de R$ 50,00 tenha um custo menor que o pagamento em 5 prestações de R$ 21,00, pois $2 \,.\, 50{,}00 = 100{,}00 < 5 \,.\, 21{,}00 = 105{,}00$. Tudo depende de quanto o dinheiro vale no período considerado.

1.3.2. Juros Simples e Juros Compostos

No mercado financeiro, o capital investido ou emprestado com taxa de juros definida dentro de um período, pode sofrer dois tipos de crescimento, de acordo com o regime de juros adotado. São eles: capitalização de juros simples e capitalização de juros compostos.

A partir das próximas definições e exercícios, utilizaremos as seguintes notações:

- C_0 é o capital inicial (ou principal);
- J é o juros;
- C_n é o montante, ou seja, a soma do capital com o juro ($C_n = C_0 + \mathrm{J}$);
- n é o período (tempo) de aplicação;
- i é a taxa de juros, em porcentagem.

Definição 1.3. No regime de ***juros simples***, os juros incidem sempre sobre o capital inicial. Portanto, uma expressão que representa os juros acumulado de uma aplicação (ou empréstimo) após um certo período, é dado por:

$$J = C_0 . i . n \quad (*)$$

Como o valor acumulado (montante) é obtido pela adição do capital inicial e o juro do período considerado, ou seja, $C_n = C_0 + \mathrm{J}$, e utilizando $(*)$, o montante C_n pode ser reescrito do seguinte modo:

$$C_n = C_0 + C_0 . i . n$$

$$C_n = C_0 . (1 + i . n) \quad (**)$$

Observemos que, o valor acumulado após o primeiro período $(n = 1)$ se dá pela soma do capital inicial C_0 e o juro aplicado sobre esse capital $J = C_0 . i$, ou seja:

$$C_1 = C_0 + C_0 . i = C_0(1 + i)$$

O valor acumulado ao final do segundo período $(n = 2)$ é dado pela soma entre o montante ao final do primeiro período e o juro aplicado ao capital inicial:

$$C_2 = C_0(1 + i) + C_0 . i = C_0(1 + 2i)$$

O mesmo ocorre ao final do terceiro período $(n = 3)$, em que o valor acumulado é dado pela soma entre o montante do período anterior e o juro aplicado sobre o capital inicial:

$$C_3 = C_0(1 + 2i) + C_0 . i = C_0(1 + 3i)$$

Analogamente, após n períodos, teremos a relação $(**)$.

Percebemos que a sequência formada $(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$ representa uma progressão aritmética, pois o valor acumulado, a partir do segundo período, é expresso pela soma do montante anterior e o juro. Como o juro é simples, ele sempre incide sobre o capital inicial (definição 1.3), ou seja, o juro $J = C_0 . i$ é constante.

Vimos que a expressão $a_n = a_0 + n . r$ representa o termo geral de uma PA. A título de comparação, temos:

- $O\ termo\ geral\ a_n\ equivale\ ao\ valor\ acumulado\ C_n;$

- $O\ primeiro\ termo\ da\ sequência\ a_0\ representa\ o\ capital\ inicial\ C_0$;
- $A\ razão\ r, que$ é $constante,$ é $dada\ pelo\ juro\ J = C_0 . i$;
- $n\ representa\ o\ número\ de\ termos\ na\ PA\ e\ o\ período\ em\ juros\ simples$.

Reescrevendo, $C_n = C_0 + n. C_0 . i = C_0 . (1 + n. i)$, como vimos anteriormente.

Exemplo 1.15. Determinar o valor acumulado de uma aplicação de R$ 2500,00 em regime de juros simples à taxa de 1,5% ao mês, por 10 meses.

Solução 1: Aplicando a fórmula para o cálculo de juros simples. Após, calculamos o montante.

Seja $C_0 = 2500{,}00$, $i = 1{,}5\% = 0{,}015\ a.m.$ e $n = 10\ meses$, temos:

$$J = C_0 . i. n = 2500 . 0{,}015 . 10 = 375{,}00\ reais$$

Daí, o valor acumulado $C_{10} = 2500{,}00 + 375{,}00 = 2875{,}00\ reais$.

Solução 2: Utilizando a fórmula $C_n = C_0 . (1 + i. n)$ para o cálculo do valor acumulado:

$$C_{10} = 2500{,}00 . (1 + 0{,}015 . 10) = 2500{,}00 . 1{,}15 = 2875{,}00\ reais.$$

Definição 1.4. No regime de ***juros compostos***, os juros de um período incidem sobre o valor acumulado do período anterior, assim, o valor cresce muito mais acelerado do que com juros simples. Observe que neste regime ocorre o cálculo do que definimos como “juros sobre juros”.

Exemplo 1.16. Luísa fez um empréstimo no valor de R$ 3200,00 e se comprometeu a pagar após 4 meses. A taxa de juros combinada foi de 5% ao mês. Ao final do prazo, qual valor Luísa deverá pagar de modo a quitar sua dívida?

Solução: Utilizando a definição anterior, vamos calcular o valor acumulado (dívida de Luísa) após cada período. Considere $C_0 = 3200{,}00\ reais$, $n = 4\ meses$ e $i = 5\% = 0{,}05\ a.m.$

Ao final do primeiro mês, temos:

$$C_1 = C_0 + C_0 . i = 3200{,}00 + 3200{,}00 \,.\, 0{,}05 = 3360{,}00 \, reais$$

Ao final do segundo mês, temos:

$$C_2 = C_1 + C_1 . i = 3360{,}00 + 3360{,}00 \,.\, 0{,}05 = 3528{,}00 \, reais$$

Ao final do terceiro mês, temos:

$$C_3 = C_2 + C_2 . i = 3528{,}00 + 3528{,}00 \,.\, 0{,}05 = 3704{,}40 \, reais$$

Portanto, o valor da dívida de Luísa após os 4 meses será de:

$$C_4 = C_3 + C_3 . i = 3704{,}40 + 3704{,}40 \,.\, 0{,}05 = 3889{,}62 \, reais$$

Percebemos que, o valor da dívida mês a mês, é calculado aplicando a taxa de juros ao valor acumulado do período anterior acrescido deste mesmo valor, ou seja, aplica-se o “juros sobre juros”.

Se o tempo de empréstimo fosse muito maior, seria exaustivo fazer este cálculo até o último período, por isso, foi necessário encontrar uma maneira mais inteligível, de modo que o valor acumulado em qualquer período, seja calculado sobre a dívida inicial.

Teorema 1.6. No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a $C_n = C_0(1+i)^n$. [1]

Demonstração: Aplicando o juro a cada período, como realizado no exemplo 1.16, temos:

No 1º período, de capital inicial C_0 e juros no período $i . C_0$:

$$C_1 = C_0 + i . C_0 = C_0(1+i)$$

No 2º período, de capital inicial C_1 e juros no período $i . C_1$:

$$C_2 = C_1 + i . C_1 = C_1(1+i) = C_0(1+i).(1+i) = C_0(1+i)^2$$

No 3º período, de capital inicial C_2 e juros no período $i . C_2$:

$$C_3 = C_2 + i . C_2 = C_2(1+i) = C_0(1+i)^2.(1+i) = C_0(1+i)^3$$

No 4º período, de capital inicial C_3 e juros no período $i.C_3$:

$$C_4 = C_3 + i.C_3 = C_3(1+i) = C_0(1+i)^3.(1+i) = C_0(1+i)^4$$

Analogamente, o montante após n períodos é dado por:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Percebemos que a sequência $(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$ do valor acumulado mês a mês forma uma progressão geométrica de razão $(1+i)$.

Voltando ao exemplo 1.16 de Luísa, contudo, utilizando o Teorema 1.6 para o seu desenvolvimento, temos: $C_0 = 3200{,}00$, $n = 4\, meses$ e $i = 5\%\ ao\ mês$. Daí:

$$C_4 = C_0(1+i)^4 = 3200{,}00(1+0{,}05)^4 = 3200{,}00\,.\,1{,}05^4 = 3889{,}62\, reais$$

Exemplo 1.17. Investindo um capital de R$ 1000,00 a juro mensal de 9% por um período de 24 meses, qual o valor acumulado ao final desta aplicação:

(a) a regime de juros simples?

(b) a regime de juros compostos?

Solução: Consideremos $C_0 = 1000{,}00$, $i = 9\%\ a.m. = 0{,}1$ e $n = 24\, meses$.

(a) O valor acumulado a regime de juros simples, é dado por:

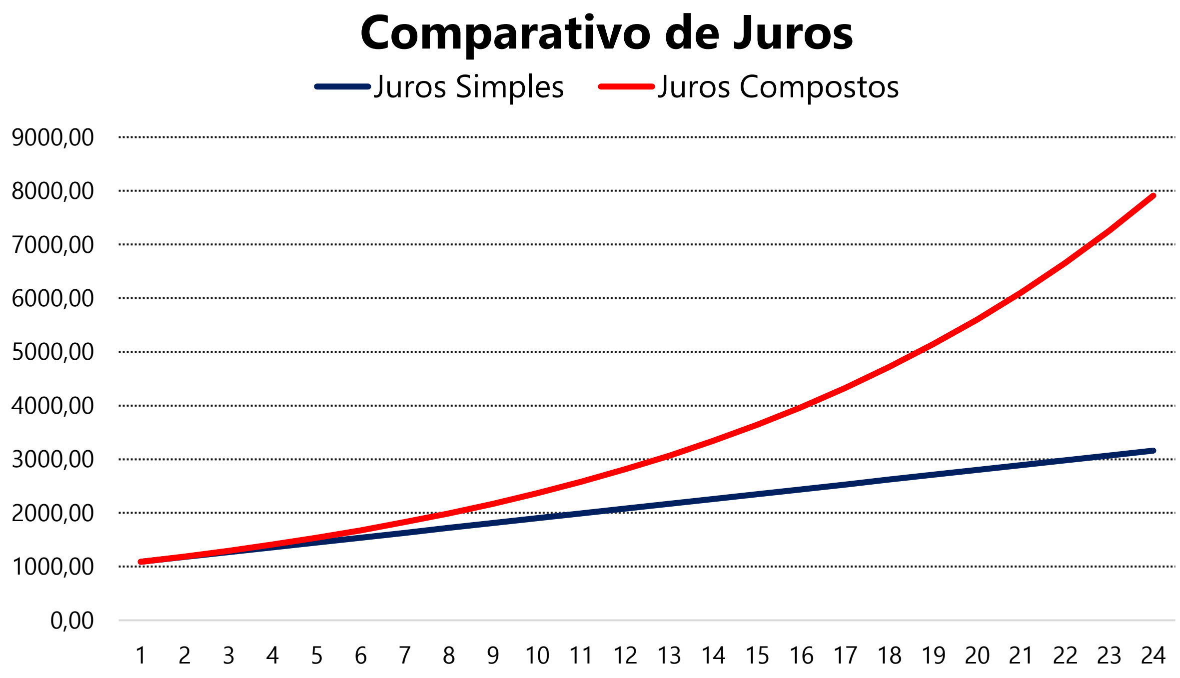
$$C_{24} = C_0.(1 + i.8) = 1000{,}00\,.\,(1 + 0{,}09\,.\,24) = 1000{,}00\,.\,3{,}16 = 3160{,}00\, reais$$

(b) Já o montante numa aplicação com juros compostos, se dá por:

$$C_{24} = C_0(1+i)^{24} = 1000{,}00.(1+0{,}09)^{24} = 1000{,}00\,.\,1{,}09^{24} \cong 7911{,}08\, reais$$

Como neste exemplo, é surpreendente a diferença entre os valores acumulados em cada uma das aplicações, ampliando-se a cada período. Os montantes a juros compostos serão sempre maiores após a primeira unidade de tempo. A exceção acontece se o prazo for menor que esta unidade [1]. Na representação gráfica a seguir, para que haja melhor visualização, consideramos os valores a partir de $n = 1$ (valor acumulado no primeiro mês).

Gráfico 3: Comparativo de juros



Fonte: Próprio autor

Observamos que a variação do valor acumulado em função do tempo se dá por uma função afim na aplicação a juros simples, e uma função exponencial na aplicação a juros compostos. Isso ajuda esclarecer a diferença entre os montantes a cada período.

1.3.3. Equivalência de Capitais

Aludido anteriormente, o valor do dinheiro depende da época à qual ele se refere. Segundo (LIMA et al., 2006), no fundo, só há um único problema de Matemática Financeira, deslocar quantias no tempo.

O Teorema 1.6 pode ser entendido da seguinte maneira: O valor do momento C_0, após n períodos, valerá $C_0(1+i)^n$. Para melhor compreensão, denotaremos por F o valor futuro (montante), e por A o valor atual, ou seja, o capital inicial. Assim, $F = A(1+i)^n$.

Esta fórmula define bem a equivalência de capitais:

- Para obter o valor futuro F, multiplicamos o atual A por $(1+i)^n$;

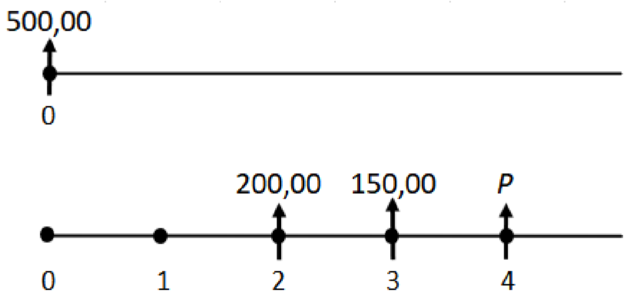
- Para obter o valor atual A, dividimos o valor futuro F por $(1 + i)^n$.

Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1.18. Luísa fez um empréstimo de R$ 500,00, a juros de 6% ao mês. Dois meses após, ela pagou R$ 200,00, e no mês seguinte, amortizou mais R$ 150,00. No quarto mês Luísa quitou sua dívida. Qual foi o valor dessa última parcela?

Solução: Considerando que o dinheiro vale 6% ao mês, na data 0, a quantia de 500,00 reais tem o mesmo valor de 200,00 reais após dois meses, somados 150,00 do terceiro mês e o último pagamento. Veja os esquemas a seguir:

Figura 1: Esquemas de pagamento do exemplo 1.18



Fonte: Próprio autor

Igualando os valores dos pagamentos em uma mesma época. Em particular, à época 0, obtemos:

$$500 = \frac{200}{(1 + 0{,}06)^2} + \frac{150}{(1 + 0{,}06)^3} + \frac{P}{(1 + 0{,}06)^4}$$

$$500 = \frac{200}{1{,}06^2} + \frac{150}{1{,}06^3} + \frac{P}{1{,}06^4}$$

Daí, $P \cong 247{,}52$ reais.

Exemplo 1.19. Lucas precisa comprar uma determinada geladeira e, após pesquisar diversos orçamentos de lojas diferentes, resolveu comprá-la na loja A, que oferece as seguintes condições de pagamento:

I) 7% de desconto na compra à vista;

II) sem desconto, em três prestações mensais iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra.

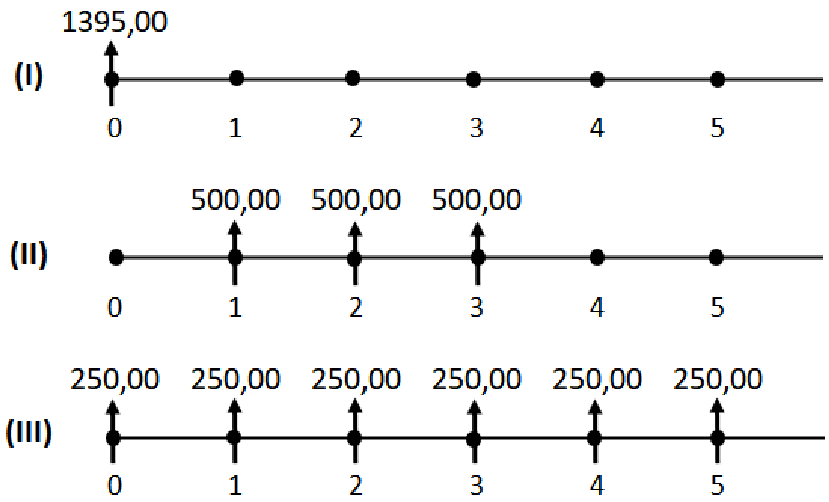
III) sem desconto, em seis prestações mensais iguais, sendo a primeira paga no ato da compra.

Sabendo que a geladeira custa R$ 1500,00, e que o dinheiro vale para ele, 3,5% ao mês, qual a melhor opção para Lucas?

Solução: É necessário comparar as três condições dadas pela loja. Para isso, igualamos os pagamentos a uma mesma época. Em particular, na época 0, que representa o momento da compra.

Sejam os esquemas a seguir referentes às situações (I), (II) e (III) apresentadas pela loja:

Figura 2: Esquemas de pagamento do exemplo 1.19



Fonte: Próprio autor

Daí:

$$(\mathrm{I}) \rightarrow \quad (100\% - 7\%) \text{ de } 1500{,}00 = 93\% \text{ de } 1500{,}00 = 1395{,}00 \text{ reais}$$

$$(\mathrm{II}) \rightarrow \quad \frac{500{,}00}{(1+0{,}035)^1} + \frac{500{,}00}{(1+0{,}035)^2} + \frac{500{,}00}{(1+0{,}035)^3} \cong 1400{,}82 \text{ reais}$$

$$(\mathrm{III}) \rightarrow \quad 250{,}00 + \frac{250{,}00}{1{,}035^1} + \frac{250{,}00}{1{,}035^2} + \frac{250{,}00}{1{,}035^3} + \frac{250{,}00}{1{,}035^4} + \frac{250{,}00}{1{,}035^5} \cong 1378{,}76 \text{ reais}$$

A opção de pagamento (III) é a melhor alternativa para Lucas, e a opção (II) é a pior.

É necessário entender que a melhor opção para Lucas, pode não ser para outra pessoa. Lucas consegue fazer seu dinheiro render a uma taxa de 3,5% ao mês em algum tipo de aplicação, logo, R$ 1395,00 na data da compra valem mais que 1500,00 divididos em 5 parcelas de R$ 250,00 e uma entrada no mesmo valor.

Este é um erro clássico que advém da falta de conhecimento financeiro. A taxa de juros à qual uma pessoa consegue fazer o seu dinheiro render é o que define seu valor. Denominada taxa mínima de atratividade, ela representa o mínimo que um investidor está disposto a ganhar em um investimento, ou, o máximo que ele está disposto a pagar por um empréstimo.

Exemplo 1.20. Uma loja oferece a João duas opções de pagamento:

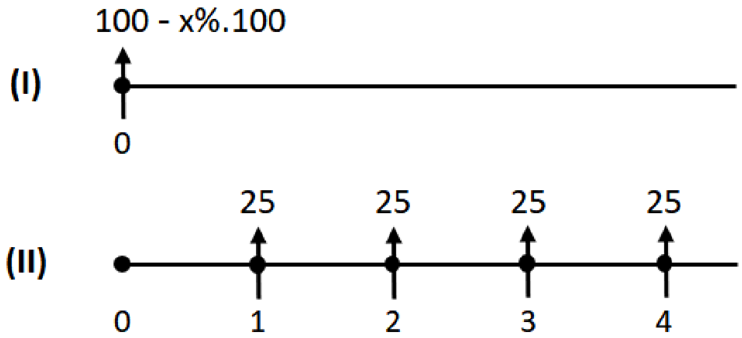
I) à vista, com x% de desconto;

II) em quatro prestações mensais iguais, sem juros, vencendo a primeira um mês após a compra.

Sabendo que a taxa mínima de atratividade para João é de 3% ao mês, analise os valores de x para que seja realizada a compra à vista.

Solução: Fixando o valor do produto em 100, temos os seguintes esquemas de pagamento:

Figura 3: Esquemas de pagamento do exemplo 1.20



Fonte: Próprio autor

O valor do desconto no momento da compra precisa superar o valor que João faz seu dinheiro render durante quatro meses. Usando o momento da compra como data focal, temos:

$$100 - x < \frac{25}{1{,}03} + \frac{25}{1{,}03^2} + \frac{25}{1{,}03^3} + \frac{25}{1{,}03^4}$$

Desenvolvendo a inequação, obtemos:

$$x > 7{,}07\%$$

Portanto, é necessário um desconto superior a $7{,}07\%$ para que a compra à vista seja efetuada.

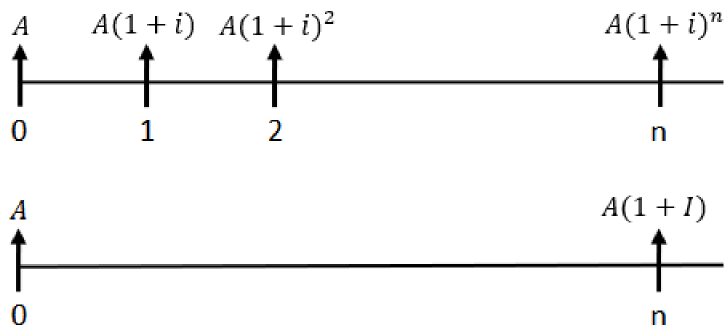
1.3.4. Taxas Equivalentes x Taxas Proporcionais

É fundamental ter atenção às taxas de juros anunciadas em operações financeiras. Frases do tipo “juros de 60% ao ano, com capitalização mensal” representa que a taxa proporcional mensal é de 5%, mas ao final da operação, não será de 60%. É importante perceber que taxas proporcionais não são equivalentes. Ao final do próximo exemplo, tornar-se-á mais fácil entender essa diferença.

Teorema 1.7. Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que $1 + I = (1 + i)^n$. [1]

Demonstração: Observemos o esquema a seguir:

Figura 4: Taxas equivalentes



Fonte: Próprio autor

Para encontrar o valor futuro de um principal A, podemos fazer a análise por óticas diferentes. Avançar n períodos a taxa i ou avançar um período a taxa I. Daí,

$$A(1+I)^1 = A(1+i)^n$$

E, portanto,

$$1+I=(1+i)^n$$

Exemplo 1.21. Determinar a taxa anual I de juros equivalente a taxa de 5% ao mês.

Solução: Sendo $i = 5\% = 0{,}05$, e utilizando o teorema 1.7, temos:

$$1+I=(1+0{,}05)^{12}$$

$$1+I=1{,}05^{12}$$

$$I=1{,}05^{12}-1$$

$$I\cong 0{,}796=79{,}6\%$$

Portanto, a frase “juros de 60% ao ano, com capitalização mensal” representa a taxa mensal de 5%, porém, os juros são de 79,6% ao ano. Essa última taxa é denominada **taxa efetiva**, já a primeira, **taxa nominal**.

Em resumo, as taxas proporcionais se aplicam no regime de capitalização simples. Já as taxas equivalentes, que é mais habitual nas relações financeiras, é praticada no regime de capitalização composta.

Exemplo 1.22. Encontrar a taxa efetiva semestral de um investimento de 9% ao semestre com capitalização mensal.

Solução: “9% ao semestre com capitalização mensal” significa 1,5% ao mês.

Daí, a taxa efetiva I é tal que:

$$1+I=(1+0{,}015)^6 \Rightarrow I\cong 0{,}0934=9{,}34\% \text{ ao semestre}.$$

1.3.5. Série de Pagamentos (Anuidades)

Uma série de pagamentos, também denominada anuidade ou renda certa são operações financeiras envolvendo pagamentos, sendo a quantidade de parcelas finitas ou infinitas, com o objetivo de amortizar uma dívida ou capitalizar um montante.

Existem comportamentos variados para as séries, que podem ter ou não parcelas fixas, serem ou não periódicas e o pagamento ser antecipado ou postecipado.

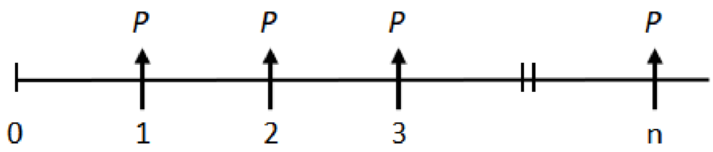
Neste tópico, serão explorados exemplos de séries de pagamentos uniformes, ou seja, que possuam parcelas fixas e periódicas.

Teorema 1.8. O valor A de uma série uniforme, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, com n pagamentos iguais a P, e taxa de juros i, é igual a:

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Demonstração: Vejamos o esquema a seguir, que representa as parcelas e suas épocas de pagamento:

Figura 5: Séries de pagamentos



Fonte: Próprio autor

Para calcular o valor atual (um tempo antes do primeiro pagamento), devemos retroceder cada uma das parcelas a época 0. Logo,

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

que representa a soma dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = \frac{P}{1+i}$ e razão $q = \frac{1}{1+i}$.

Daí, aplicando o Teorema 1.4 deste capítulo, temos:

$$A = \frac{P}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = P\frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemplo 1.23. Uma loja oferece ao cliente o financiamento de uma moto cujo valor à vista é de R$ 9000,00, em 24 prestações mensais iguais e postecipadas, ou seja, a primeira parcela é paga um mês após a compra. A taxa de juros utilizada é de 3% ao mês. Caso o cliente decida comprá-la nessas condições, qual será o valor pago em cada prestação?

Solução: Seja $A = 9000{,}00$ o valor da série uniforme um mês antes do primeiro pagamento, o número de prestações $n = 24$ meses e a taxa de juros referida $i = 3\%\ a.m.$, obtemos através do Teorema 1.8:

$$9000 = P\frac{1-(1+0{,}03)^{-24}}{0{,}03}$$

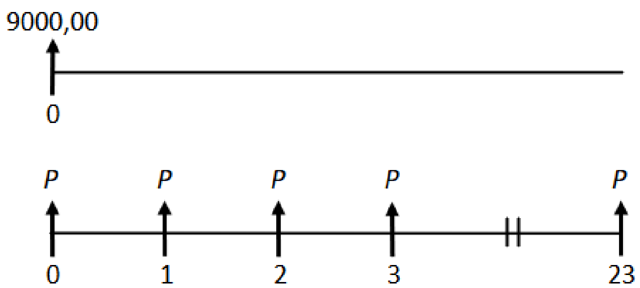
$$P = 9000\frac{0{,}03}{1-(1{,}03)^{-24}}$$

$$P \cong 531{,}43 \text{ reais}$$

Portanto, as prestações são de R$ 531,43.

Exemplo 1.24. Utilizando o exemplo anterior, caso o cliente resolva antecipar as parcelas, isto é, pagar a primeira no ato da compra, e mantenha o mesmo número de prestações, a periodicidade e a taxa de juros. Qual será o novo valor de cada prestação cobrada pela loja?

Solução: Figura 6: Esquema do exemplo 1.24



Fonte: Próprio autor

Neste caso, o pagamento da primeira parcela é realizado no ato da compra, logo, o valor A da série uniforme de prestações antes do primeiro pagamento deve ser considerado um mês antes da compra, ou seja, igualando os valores na época -1, obtemos:

$$\frac{9000}{1,03} = P\frac{1 - 1,03^{-24}}{0,03}$$

$$P = \frac{9000}{1,03} . \frac{0,03}{(1 - 1,03^{-24})}$$

$$P \cong 515,95 \text{ reais}$$

Portanto, as prestações serão de R$ 515,95.

O valor futuro de uma série uniforme de pagamentos representa o montante final, após uma sucessão de depósitos ou retiradas. Diversas situações do dia a dia exigem o conhecimento de como determinar esse montante, seja para antever a quantia paga ao final de um empréstimo, ou planejar o quanto poupar mensalmente para que, ao final de n períodos, tenha o rendimento esperado. Para estes e outros exemplos, o corolário a seguir pode auxiliar em seus cálculos.

Corolário 1.3. O valor de uma série uniforme na época do último pagamento é

$$F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad [\,1\,]$$

Demonstração: Para determinar o valor futuro F, basta avançar n períodos o valor de A, assim,

$$F = A(1+i)^n = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} . (1+i)^n = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemplo 1.25. Para realizar a festa de debutante de sua filha, Paulo pretende investir R$ 700,00 todos os meses, até a data do aniversário, em uma aplicação com rentabilidade de 0,8% ao mês. Calcule o montante ao final desta aplicação, sabendo que faltam exatamente dois anos para o aniversário.

Solução: Seja $P = 700{,}00$ o valor da parcela mensal, $n = 24$ o número de meses a serem investidos e $i = 0{,}8\%$ a taxa de juros da aplicação. Podemos calcular o montante F utilizando o corolário 1.3, assim,

$$F = 700\frac{(1+0{,}008)^{24}-1}{0{,}008} = 700\frac{1{,}008^{24}-1}{0{,}008} \cong 18440{,}21 \text{ reais}$$

Notemos a importância em determinar o valor final deste investimento. Como consequência, Paulo poderá escolher orçamentos que se limitem ao dinheiro que possuirá na data do aniversário, evitando dívidas.

Corolário 1.4 – O valor A de uma perpetuidade de termos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros,

$$A = \frac{P}{i}$$

Demonstração: Basta utilizarmos o Teorema 1.8 e fazer n tender ao infinito, ou seja:

$$A = \lim_{n\to\infty} P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P.\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{n}}{i} = P.\frac{1-0}{i} = \frac{P}{i}$$

Este corolário trata de renda perpétua, que representa rendas cujo número de pagamentos “dure para sempre”, ou, de forma mais usual, permaneça por um grande período. Ela é utilizada principalmente na locação de bens, como o aluguel de uma casa. Mas existem outras possibilidades de aplicação, como apurar o valor de um imóvel, planejar um aporte fixo mensal da poupança para utilizar, dentre outras possibilidades de uso. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 1.26. Planejando viver com renda de aluguel, Márcio decidiu comprar um salão comercial na avenida mais movimentada de sua cidade. Estima-se que o valor de seu aluguel seja de R$ 2500,00. Considerando que a taxa de juros é de 0,5% ao mês, o preço justo que Márcio deve pagar pelo imóvel é de?

Solução: A renda de locação configura uma perpetuidade. Logo, o valor do imóvel deve ser igual ao valor de uma série incontável de aluguéis.

Temos que a parcela (valor do aluguel) $P = 2500{,}00$, e a taxa de juros $i = 0{,}5\%$ ao mês. Daí,

$$A = \frac{P}{i} = \frac{2500}{0{,}005} = 500\ 000 \text{ reais}$$

Portanto, é justo que Márcio pague R$ 500 000,00 pelo imóvel.

1.3.6. Sistemas de Amortização

Em janeiro de 2020, estimou-se que 65,3% das famílias brasileiras possuíam algum tipo de dívida. Foi o que constatou a última pesquisa de endividamento e inadimplência do consumidor (Peic), realizada pela Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC) [5].

Na busca por capital para a aquisição de algum bem, é comum a contração de empréstimo ou financiamento junto a bancos e outras instituições financeiras. É importante destacar a diferença entre elas. Na operação de empréstimo, o recurso financeiro adquirido não precisa ser justificado, já no financiamento, existe sim essa necessidade, e na maioria das vezes, o bem fica alienado até a quitação da dívida.

Mas, independentemente do tipo de operação realizada, a contração da dívida exige sua amortização cedo ou tarde, feita de forma parcelada por um período de tempo, de acordo o sistema definido no momento do contrato.

A palavra amortizar significa pagar gradualmente uma dívida até a sua quitação. O valor de cada parcela paga é composta por duas partes, uma que amortiza a dívida, e a outra, que representa o juro cobrado na operação.

Para as próximas definições, utilizaremos as seguintes notações:

- A_k representa a parcela de amortização na época k.
- J_k representa a parcela de juros na época k.
- P_k representa o valor da prestação na época k.

- D_k representa o saldo devedor na época k.

Veremos agora os sistemas de amortização mais usuais no mercado financeiro.

1.3.6.1. Sistemas de Amortização Constante (SAC)

O SAC é muito utilizado no financiamento imobiliário e demais financiamentos a longo prazo. Como o próprio nome diz, nesse sistema, o valor de amortização da dívida é constante em cada parcela. Para calculá-lo, basta dividir o valor inicial da dívida pelo número total de prestações.

Como consequência, os juros decrescem a cada parcela, pois eles incidem sobre o saldo devedor, que diminui com as amortizações. Logo, as prestações também caem, visto que elas são dadas pela soma entre os valores da amortização e dos juros. Podemos observar estas consequências no teorema a seguir.

Teorema 1.9. No Sistema de Amortização Constante (SAC), sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

$$A_k = \frac{D_0}{n}; \quad D_k = \frac{n-k}{n} D_0; \quad J_k = i.D_{k-1}; \quad P_k = A_k + J_k$$

Demonstração: Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota vale $A_k = D_0/n$ e o estado da dívida, após k amortizações é

$$D_k = D_0 - k\ .\ A_k = D_0 \frac{n-k}{n}$$

As duas últimas fórmulas são óbvias. [1]

Exemplo 1.27. Foi feito um empréstimo no valor de R$ 15 000,00, a uma taxa de juros de 3% ao mês, para ser quitado em 10 parcelas utilizando o SAC. Calcule o valor de cada prestação e o saldo devedor após cada pagamento.

Solução: O valor A_k de cada parcela de amortização é constante, e dado por:

$$A_k = \frac{D_0}{n} = \frac{15000}{10} = 1500{,}00$$

Vejamos a planilha abaixo com os cálculos de cada parcela e o saldo devedor após cada pagamento.

Tabela 4: Sistema de Amortização Constante (SAC)

Sistema de Amortização Constante (SAC)				
Época	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)	Saldo devedor (R$)
K	$A_k = \frac{D_0}{n}$	$J_k = i.D_{k-1}$	$P_k = A_k + J_k$	$D_k = \frac{n-k}{n} D_0$
0	-	-	-	15000,00
1	1500,00	450,00	1950,00	13500,00
2	1500,00	405,00	1905,00	12000,00
3	1500,00	360,00	1860,00	10500,00
4	1500,00	315,00	1815,00	9000,00
5	1500,00	270,00	1770,00	7500,00
6	1500,00	225,00	1725,00	6000,00
7	1500,00	180,00	1680,00	4500,00
8	1500,00	135,00	1635,00	3000,00
9	1500,00	90,00	1590,00	1500,00
10	1500,00	45,00	1545,00	0,00
Total	15000,00	2475,00	17475,00	-

Fonte: Próprio autor

1.3.6.2. Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)

Desenvolvida pelo economista inglês Richard Price, a Tabela Price é amplamente utilizada no mercado financeiro, principalmente na compra a prazo de bens de consumo, como eletrônicos, eletrodomésticos e automóveis.

Tem como principal característica o valor fixo de cada uma das prestações, que assim como o SAC, é composta por duas partes, amortização e juros. Para determinar o valor da prestação, utilizamos a seguinte fórmula:

$$P = D_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

em que P corresponde ao valor da prestação, D_0 o saldo devedor inicial, i a taxa de juro e n o número de prestações.

Como o juro incide sobre o saldo devedor, as parcelas iniciais possuem juros mais elevados, decrescendo com o tempo. Com a amortização acontece o oposto, pois sendo obtida pela diferença entre o valor da prestação e dos juros, as maiores quotas para quitar a dívida se encontram nos últimos períodos.

Resumindo, no Sistema Francês de Amortização, durante o pagamento de um financiamento ou empréstimo, as parcelas de juros diminuem e as de amortização aumentam, mantendo o valor de cada prestação inalterado.

Teorema 1.10. No Sistema Francês de Amortização (Tabela Price), sendo i a taxa de juros e n o número de pagamentos, temos:

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \ ,$$

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}} \ ,$$

$$J_k = i.D_{k-1} \ ,$$

$$A_k = P_K - J_k \, .$$

Demonstração: A fórmula para o cálculo de P_k é proveniente do Teorema 1.8. Já as fórmulas para o cálculo do Juros J_k e amortização A_k são triviais.

Já a dívida D_k será liquidada, por $n-k$ pagamentos, sucessivos e postecipados, iguais a P_k. Logo, novamente pelo Teorema 1.8, temos:

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

Substituindo o valor P_k, obteremos a segunda fórmula. [1]

Exemplo 1.28. Uma dívida de R$ 6000,00 é amortizada pelo sistema francês em 8 pagamentos mensais. Sabendo que a taxa mensal de juros é de 5%, determine o valor de cada prestação e o saldo devedor a cada período.

Solução: Como no Sistema Francês as prestações são constantes, podemos determinar P_k pela primeira fórmula do Teorema 1.10 (ou pelo Teorema 1.8), logo, cada pagamento vale

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 6000 \frac{0,05}{1-1,05^{-8}} \cong 928,33$$

Para determinar o saldo devedor a cada período, utilizamos a tabela de amortização abaixo.

Tabela 5: Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)

Sistema Francês de Amortização (Tabela Price)				
Época	Prestação (R$)	Juros (R$	Amortização (R$)	Saldo devedor (R$)
K	$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	$J_k = i.D_{k-1}$	$A_k = P_K - J_k$	$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$
0	-	-	-	6000,00
1	928,33	300,00	628,33	5371,67
2	928,33	268,58	659,75	4711,92
3	928,33	235,60	692,73	4019,19
4	928,33	200,96	727,37	3291,82
5	928,33	164,59	763,74	2528,08
6	928,33	126,40	801,93	1726,15
7	928,33	86,31	842,02	884,13
8	928,33	44,21	884,13	0,00
Total	7426,64	1426,65	6000,00	-

Fonte: Próprio autor

Observações:

Por conta da aproximação inicial no valor de cada prestação, constantemente é necessário fazer ajustes no último pagamento, de modo a zerar o saldo devedor.

Podemos utilizar a fórmula do Teorema 1.10 para o cálculo do saldo devedor a cada período, porém, com a utilização da tabela de amortização, basta fazermos $D_k = D_{k-1} - A_k$.

Utilizando a Tabela Price, verificamos que neste modelo de amortização não convém quitar a dívida antes do prazo.

1.3.6.3. Sistema Americano de Amortização (SAA)

O Sistema Americano de Amortização privilegia aqueles que desejam pagar o empréstimo em uma única parcela. Nesse sistema, apenas os juros são pagos durante o financiamento, e no final do prazo, a dívida é amortizada de uma só vez.

Como consequência, o valor mensal de juros é constante, visto que ele incide sobre o saldo devedor, que não se modifica até o último período, quando acontece a amortização.

Observemos quão simples é o seu entendimento através do próximo exemplo.

Exemplo 1.29. Elabore uma planilha de amortização, no sistema americano, de uma dívida de R$ 4000,00, em 5 pagamentos, com taxa de juros de 7% ao mês.

Solução:

Tabela 6: Sistema Americano de Amortização (SAA)

Sistema Americano de Amortização (SAA)				
Época	Juros (R$	Amortização (R$)	Prestação (R$)	Saldo devedor (R$)
0	-	-	-	4000,00
1	280,00	-	280,00	4000,00
2	280,00	-	280,00	4000,00
3	280,00	-	280,00	4000,00
4	280,00	-	280,00	4000,00
5	280,00	4000,00	4280,00	0,00
Total	1400,00	4000,00	5400,00	

Fonte: Próprio autor

Existem outros sistemas de amortização no mercado, como o Sistema de Amortização Misto (SAM), o Sistema Alemão, dentre outros que não serão abordados neste capítulo.

2. PESQUISA SOBRE EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Uma vida financeira saudável, com orçamento equilibrado e sem preocupações com dívidas todos os meses, é o sonho de qualquer família. E esse equilíbrio deve ser ensinado e praticado, tanto em casa, quanto na escola. O presente capítulo objetiva analisar aspectos básicos sobre a importância da educação financeira e o conhecimento que se têm sobre ela.

Foi realizada uma pesquisa de campo, por meio de questionário, onde a população estudada foram os estudantes do ensino médio de uma escola pública na cidade de Aparecida do Taboado – MS, e seus familiares. As perguntas abordaram temas financeiros fundamentais como: a importância da educação financeira dentro das escolas, orçamento familiar, o uso do dinheiro no dia a dia, investimentos, dentre outros aspectos que serão analisados no decorrer do capítulo.

A coleta de dados efetuou-se por meio do aplicativo “FORMS” da Microsoft, em que foram gerados e enviados os links dos formulários aos pais e alunos através do aplicativo WhatsApp.

Buscando a melhor compreensão nas análises dos resultados, serão utilizados métodos gráficos, e sua leitura será transmitida por frequências relativas, ou seja, o número de eventos observados na forma de porcentagem.

2.1. Questionário aos estudantes

A pesquisa foi realizada com alunos do ensino médio da rede pública de ensino, totalizando 52 estudantes, conforme a “Figura 7”, sendo metade de cada sexo (masculino e feminino). Aproximadamente 27% cursam o primeiro ano do ensino médio, 38,5% o segundo ano e 34,5% o último ano do ensino regular.

As perguntas abordadas buscaram compreender a importância que os estudantes dão ao tema proposto nesta dissertação, o conhecimento que dispõem, a sua participação nos problemas financeiros familiares e de que forma lidam com o dinheiro que possuem.

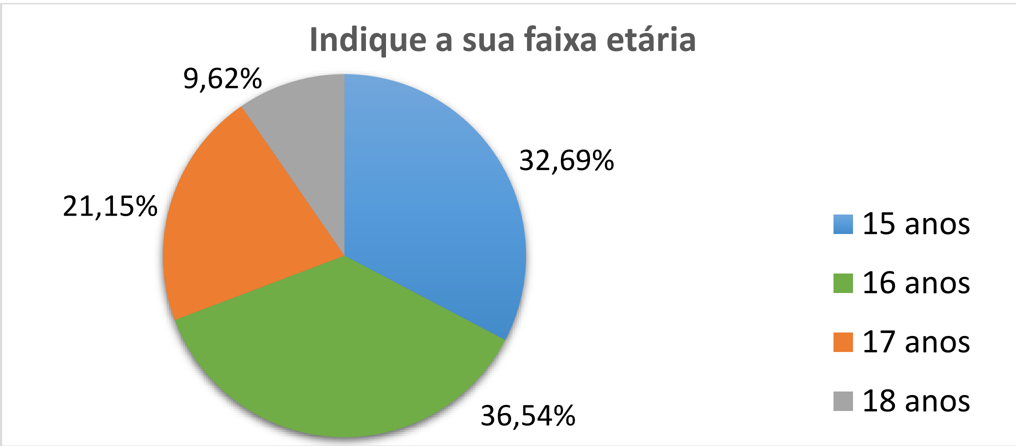
Figura 7: Questionário inicial sobre educação financeira

Fonte: Página inicial dos resultados da pesquisa no Forms

Agora, as análises e considerações às perguntas realizadas na coleta de dados.

A média de idade dos estudantes é de aproximadamente 16,08 anos. Todos possuem entre 15 e 18 anos.

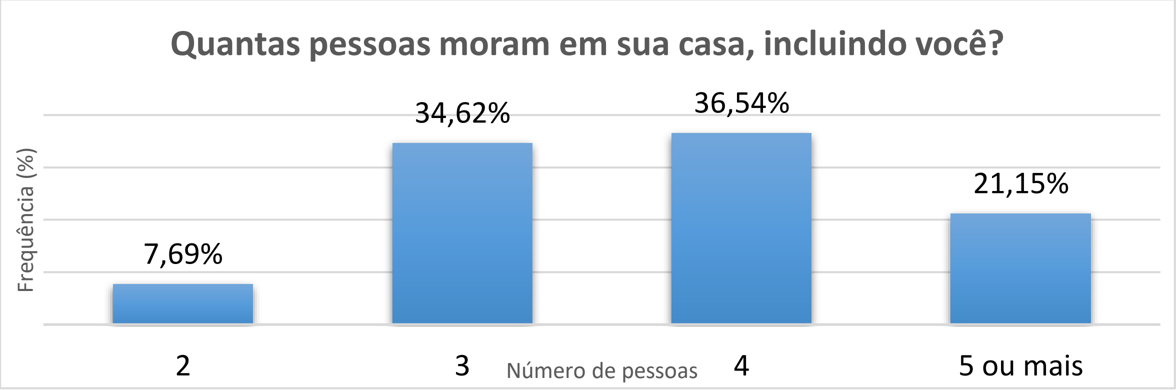
Gráfico 4: Faixa etária dos estudantes



Fonte: Próprio autor

No levantamento sobre o total de pessoas que residem com o estudante, pouco mais de 70% moram com outros dois ou três familiares, 7,69% deles vivem com apenas um familiar e, 21,15% convivem com muitas pessoas dentro de suas casas.

Gráfico 5: Total de pessoas na residência

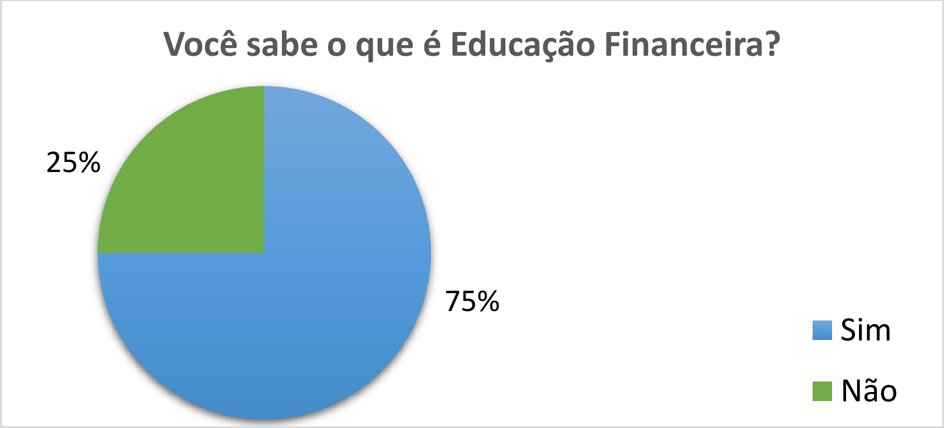


Fonte: Próprio autor

Após a sondagem quantitativa inicial, a sequência da pesquisa tem caráter qualitativo, para melhor compreensão sobre o comportamento dos estudantes nos temas financeiros abordados.

As quatro próximas questões buscam analisar conhecimento, definição, importância dentro das escolas e objetivos da educação financeira.

Gráfico 6: O que é educação financeira para os estudantes



Fonte: Próprio autor

Ao serem questionados se compreendiam o que é educação financeira, três em cada quatro estudantes disseram que sim.

Após, todos os entrevistados, inclusive aqueles que manifestaram não saberem o que é educação financeira, a definiram com uma frase. Seguem as 52 respostas coletadas:

Definição 1. *"Ter noção sobre juros e gastos";*

Definição 2. *"É uma orientação para as pessoas aprenderem a melhorar suas relações com o dinheiro";*

Definição 3. *"Educação financeira é basicamente um estudo sobre problemas com finanças, ajuda a resolver a parte de dinheiro, porcentagem entre outros";*

Definição 4. *"Estudo de como utilizar seu dinheiro corretamente e de variadas maneiras";*

Definição 5. *"Saber administrar seu dinheiro da melhor forma possível";*

Definição 6. *"Saber seu limite de gastos";*

Definição 7. *"Saber controlar os gastos de dinheiro em relação a qualidade da compra";*

Definição 8. *"É aprender mais sobre como lidar com os investimentos";*

Definição 9. *"Saber administrar seu salário ou qualquer dinheiro que obtém";*

Definição 10. *"Acho que é ensinar tudo o que está relacionado a finanças, enfatizando a questão do dinheiro, de como lidar, mas creio que seja algo um pouco mais amplo também";*

Definição 11. *"Educação muito importante para lidar com o financeiro dentro e fora de casa, seja para lucro ou poupar";*

Definição 12. *"Você saber gerir o seu dinheiro visando o lucro e evitando prejuízo";*

Definição 13. *"Saber lidar com seu dinheiro";*

Definição 14. *"Explicar um pouco do sistema financeiro e depois ensinar a administrar o seu dinheiro";*

Definição 15. *"É a habilidade para investir e gerenciar seus bens";*

Definição 16. *"É quando você faz escolhas conscientes quando se trata de dinheiro e economia";*

Definição 17. *“Seria você saber quando você deve gastar seu dinheiro corretamente”;*

Definição 18. *“É uma forma de educar as pessoas a cuidar dos seu dinheiro”;*

Definição 19. *“É você saber aonde deve gastar seu dinheiro, no lugar certo”;*

Definição 20. *“O passe para o ensino de um uso moderado e responsável de renda”;*

Definição 21. *“É uma educação para melhor se organizar financeiramente e se planejar para eventuais problemas ou até mesmo lazer”;*

Definição 22. *“A prática com o intuito de ensinar e explorar o uso do dinheiro de modo consciente, também a realização de qualquer operação que envolva dinheiro com quaisquer intuições”;*

Definição 23. *“Que tem a ver com algum setor que mexa com dinheiro”;*

Definição 24. *“Gerir o seu dinheiro, evitar dívidas, saber investir, criar um perfil financeiro, saber pensar no que precisa no longo prazo e o que precisa no momento”;*

Definição 25. *“Tem o objetivo de fazermos dar valor ao nosso dinheiro”;*

Definição 26. *“Aprender como lidar com bens, ou dinheiro”;*

Definição 27. *“Educação financeira ajuda você a entender melhor suas necessidades de compra, ajuda a administrar seu dinheiro, de forma que gaste apenas o necessário e saiba como usar”;*

Definição 28. *“É tentar se educar quanto ao dinheiro, tal como com o que gastar, como economizar, como lidar com o impulso por comprar, como poupar, etc”;*

Definição 29. *“Saber gastar o dinheiro”;*

Definição 30. *“Educação Financeira auxilia no modo em que você utiliza seu capital, como fazer investimento, saber quanto gastar, entre outros”;*

Definição 31. *“Se a pessoa consegue administrar seu dinheiro”;*

Definição 32*. “Ter controle sobre os próprios gastos e 'conhecimento'”;*

Definição 33*. “Ajudar a pessoa a controlar seu dinheiro”;*

Definição 34*. “Educação financeira é um aprendizado para você saber ligar com o seu dinheiro”;*

Definição 35*. “É o auxílio dos consumidores na administração dos seus rendimentos”;*

Definição 36*. “A educação financeira é meio que um modo de ensinar financeiramente como mexer com o seu dinheiro, como por exemplo, uma parcela, cozinhar em casa ou ir em um restaurante. É praticamente como uma aula de administração sobre dinheiro”;*

Definição 37*. “Educação financeira é um modo de você saber lidar com o seu dinheiro”;*

Definição 38*. “Não sei ao certo, mas creio que seja a capacidade de tomar decisões e saber administrar seu próprio dinheiro”;*

Definição 39*. “Acredito eu, que se trate de uma área na qual os conhecimentos matemáticos, adquiridos ao longo dos tempos, são aplicados em função de situações mais cotidianas e relacionadas com a realidade na qual as pessoas estão inseridas. Basicamente, matemática financeira seria a aplicação da matemática na vida real, quando se faz a contabilidade do salário para com a conta que se deve pagar, e etc”;*

Definição 40*. “Educação financeira, é o processo que o indivíduo faz suas escolhas, consciente, dos valores gastos, e continua ciente das economias”;*

Definição 41*. “Seria uma forma didática de administração de recursos financeiros”;*

Definição 42*. “Na minha opinião, educação financeira é algo que ajuda e auxilia cada pessoa em relação a administrar e tomar decisões com o dinheiro”;*

Definição 43*. “Ajudar as pessoas a terem controle do dinheiro que ganha”;*

Definição 44*. “Uma forma de você saber controlar o uso do dinheiro ganho”;*

Definição 45*. “Você ter um controle de suas dívidas”;*

Definição 46*. “Sei vagamente sobre o assunto, mas creio que seja um estudo sobre como usar seu dinheiro corretamente, enfim, saber mais sobre finanças em geral”;*

Definição 47*. “É um conhecimento básico sobre finanças, empréstimos, enfim, dinheiro”;*

Definição 48*. “Auxiliar o consumo de gastos, ganhos, formas de investimentos e controle do caixa pessoal”;*

Definição 49*. “Educação Financeira é o saber administrar seu próprio dinheiro, incluindo ganhos e despesas, resumidamente seria o controle consciente do dinheiro”;*

Definição 50*. “Saber o que fazer com seu dinheiro”;*

Definição 51*. “Um meio de ensinar a pessoa a saber controlar o dinheiro com o que é certo e errado”;*

Definição 52*. “Uma área de ensino onde a pessoa aprende a administrar dinheiro”.*

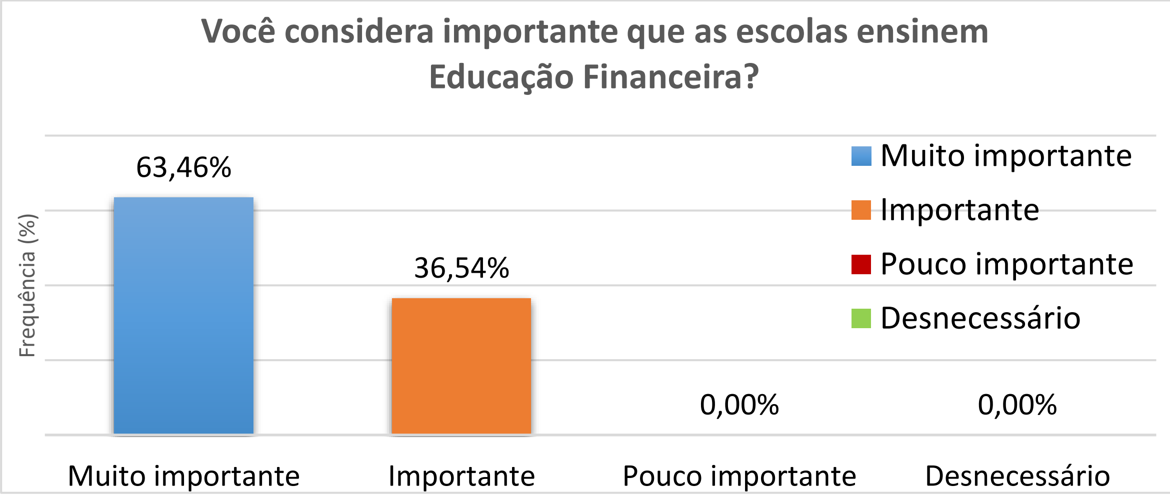
Percebemos uma constância da palavra “dinheiro” em grande parte das definições. Os estudantes sabem da importância de uma boa administração financeira, entendem que a relação com o dinheiro precisa ser saudável, e o seu uso, consciente.

Notamos também, a preocupação com os gastos excessivos. A necessidade de elaborar um orçamento para o uso correto e melhor controle do dinheiro, e consequentemente, gerar economia, no sentido fiel da palavra.

Alguns citam que a educação financeira promove o aprendizado na esfera dos investimentos. Que esta área possibilita aprender a trabalhar com o dinheiro, gerar riquezas (lucro) e gerir bens.

Ainda que o termo “tomada de decisão” tenha sido pouco empregado nas definições, administrar o dinheiro, ter controle dos gastos, saber investir, dentre outros fatores aludidos, representam decisões vantajosas a serem tomadas no dia a dia.

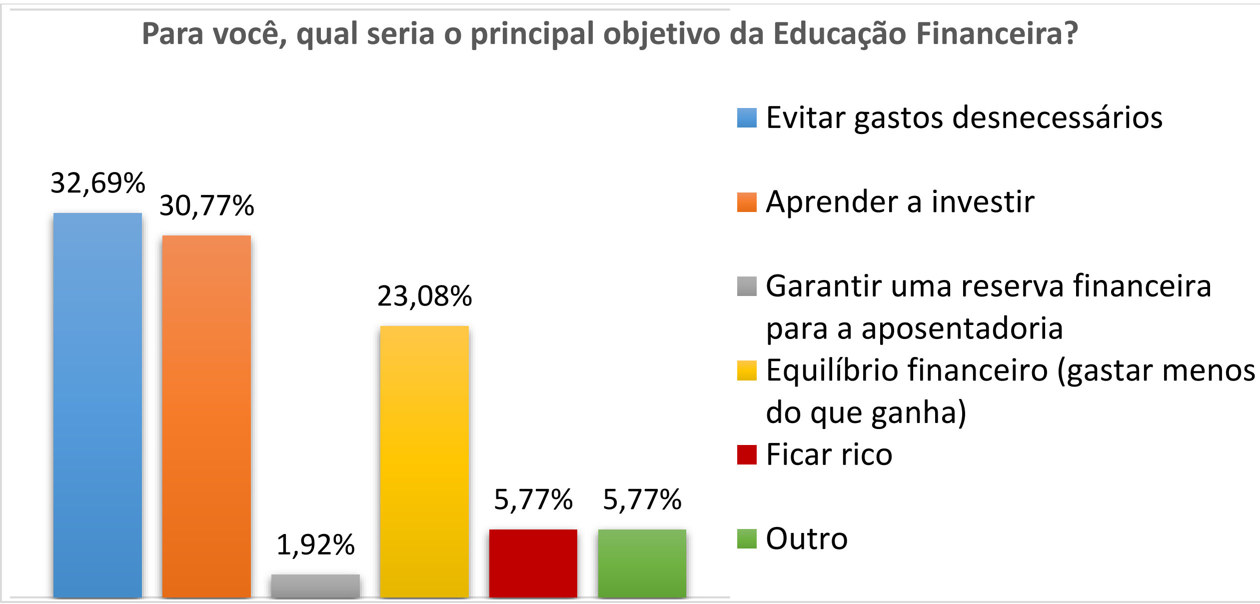
Gráfico 7: Importância da educação financeira nas escolas



Fonte: Próprio autor

Observemos que todos os estudantes julgam importante ou muito importante a presença do tema educação financeira incluso na matriz curricular das escolas. Para a pergunta, as opções “pouco importante” e “desnecessário” integravam as possibilidades de escolha.

Gráfico 8: Objetivos da educação financeira

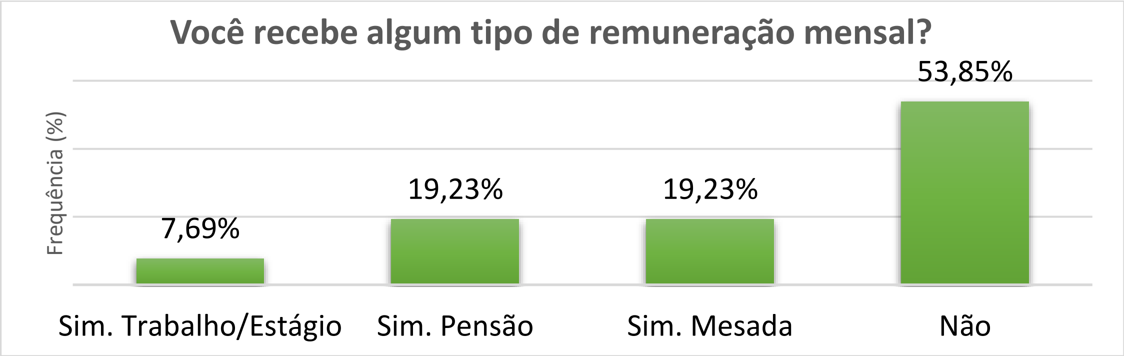


Fonte: Próprio autor

Quando questionados a respeito do objetivo primacial da educação financeira, quase um terço dos alunos acreditam que seja para evitar gastos desnecessários, seguido de perto por desenvolver a capacidade de investir. A terceira opção, bastante apontada também, foi o equilíbrio financeiro, ou seja, controlar os gastos em consonância com a renda, evitando o déficit orçamentário. As demais opções representam aproximadamente 13,5% das respostas.

Há um desconforto na sociedade quando o assunto é dinheiro, seja em rodas de conversa entre amigos, ou ainda mais agravante, no meio familiar. A etapa de perguntas seguinte é dedicada a reflexão sobre essa temática. Gastos, economia, planejamento, e o principal, o diálogo entre jovens e seus pais sobre o assunto serão explorados agora.

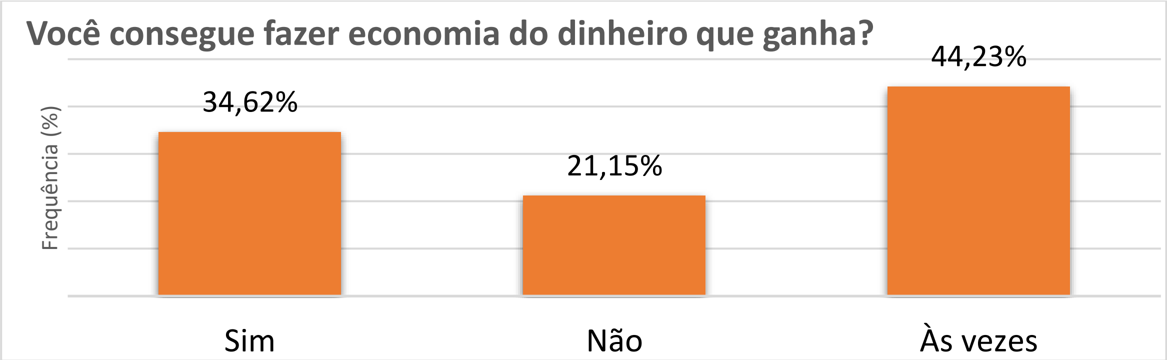
Gráfico 9: Remuneração mensal



Fonte: Próprio autor

Mais de metade dos estudantes não recebem qualquer tipo de remuneração. Dos que ganham, 19,23% afirmam receberem mesadas, e em quantidade similar, pensões. 7,69% conseguem obter dinheiro através de trabalho ou estágio.

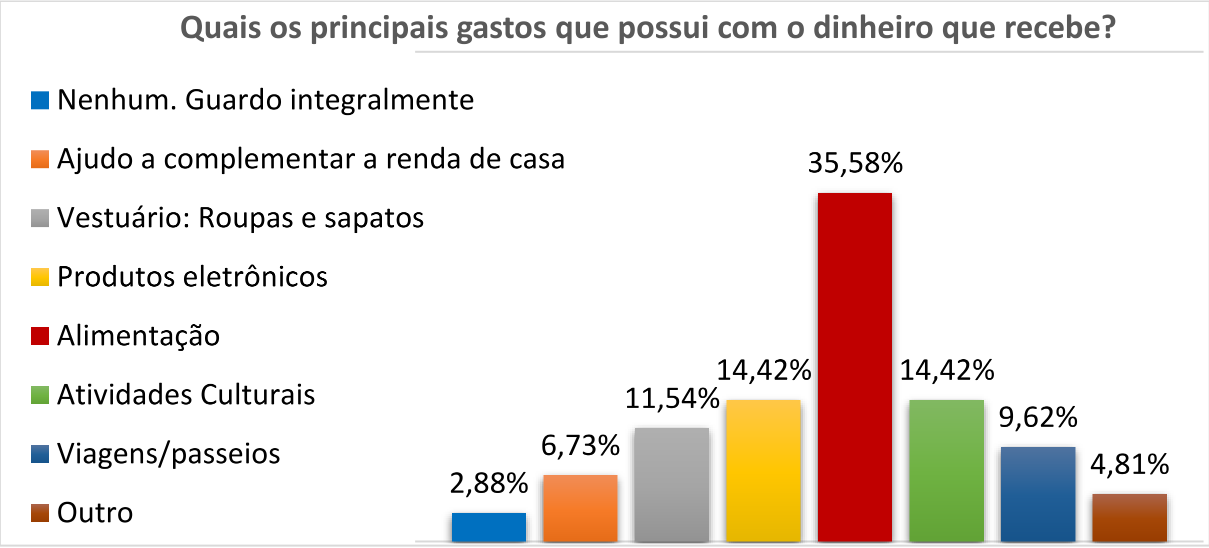
Gráfico 10: Economia do dinheiro que recebe



Fonte: Próprio autor

Dentre os que alegam possuir algum tipo de provento, quase 80% fazem economia, sejam com muita frequência, ou às vezes. Os demais não podem ou conseguem guardar dinheiro. Talvez a próxima questão fundamente este resultado.

Gráfico 11: Principais gastos



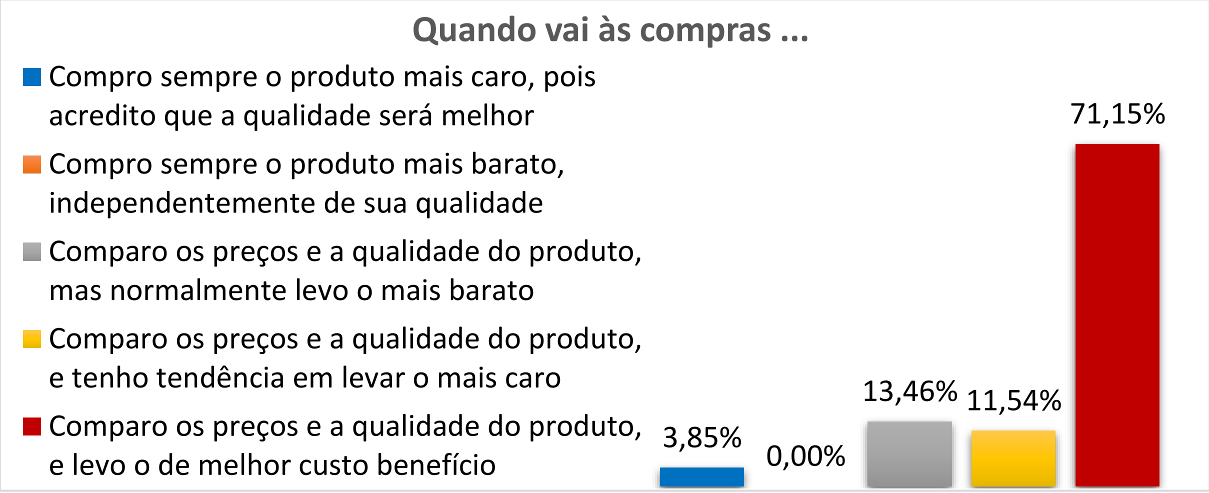
Fonte: Próprio autor

O item com maior gasto apontado na pesquisa foi o de alimentação, representando mais de um terço dos resultados, chegando aos 35,58%. Idas a lanchonetes, bares, restaurantes e sorveterias parecem estar entre as opções preferidas dos jovens.

A segunda maior despesa representa menos da metade dos gastos com alimentação. São elas, produtos eletrônicos e atividades culturais, tendo cada item 14,42% das respostas. Pressupomos então que, além das atividades de lazer apontadas acima, os jovens consomem também entradas a shows, parques, teatros e cinemas, e como esperado, fazem despesas na compra de celulares, notebooks, fones de ouvido, jogos, dentre outros artigos eletrônicos.

Compõe a lista de gastos, em ordem decrescente de contagem, os seguintes tópicos: Vestuário com 11,54% da apuração, viagens e passeios com 9,62% e complemento da renda de casa com 6,73%. A opção “outros” totalizou 4,81%, enquanto os que afirmam guardar integralmente o dinheiro que possui, apenas 2,88% do levantamento.

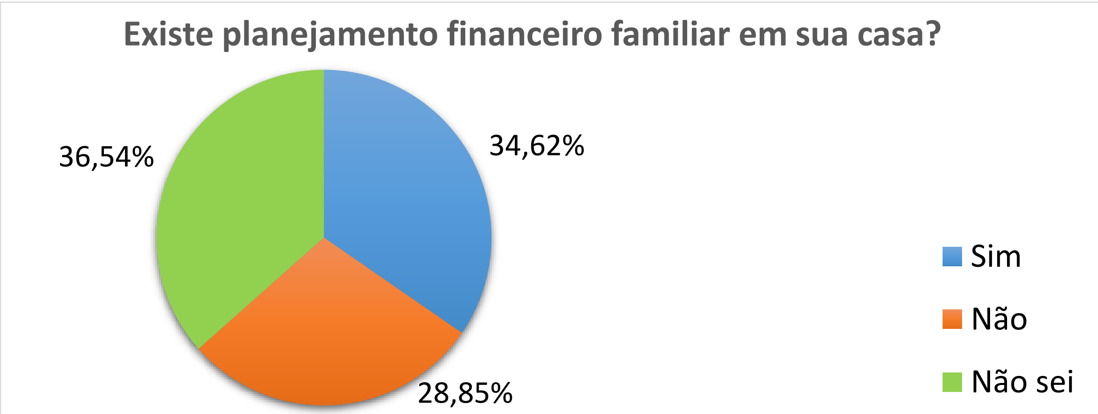
Gráfico 12: Análise no momento da compra



Fonte: Próprio autor

O comportamento dos estudantes quando vão às compras são bem similares. 96,15% alegam que comparam os preços e a qualidade do produto, mas diferem na hora da escolha. Desses, prevalecem os que optam pelo melhor custo benefício, ou seja, o produto deve trazer mais vantagens quando comparado ao seu valor. Porém, há uma menor parcela que normalmente escolhe o item mais barato, e na proporção minimamente inferior, o mais caro, conforme o gráfico acima. Os outros 3,85% declaram que habitualmente levam o produto mais caro, acreditando que o seu valor está diretamente relacionado a sua qualidade.

Gráfico 13: Há planejamento financeiro em sua casa?



Fonte: Próprio autor

O planejamento financeiro familiar é importante por diversos fatores. Ter controle dos gastos, criar uma reserva de emergência e a construção de patrimônio são alguns deles. Quando questionados se existe este planejamento dentro de seus lares, apenas 34,62% afirmaram que sim, contra 28,85%. Os demais não souberam avaliar.

Gráfico 14: Seus pais conversam com você sobre dinheiro?

Fonte: Próprio autor

É alarmante que somente 34,62% das famílias dialogam regularmente sobre dinheiro com os filhos. Ainda que pouco mais da metade dos estudantes tenham assegurado que exista esta conversa ocasionalmente, é essencial falar sobre dinheiro com frequência e sem o desconforto gerado por não ser algo habitual. É ainda mais preocupante os 13,46% que não possuem acesso a este diálogo dentro de suas casas. Falar sobre dinheiro precisa tornar-se agradável e participativo.

Gráfico 15: Seus pais poupam dinheiro?

Fonte: Próprio autor

Já no quesito poupar dinheiro, 44,23% acreditam que seus pais consigam reservar alguma grana, contra 23,08%. Os demais não souberam opinar.

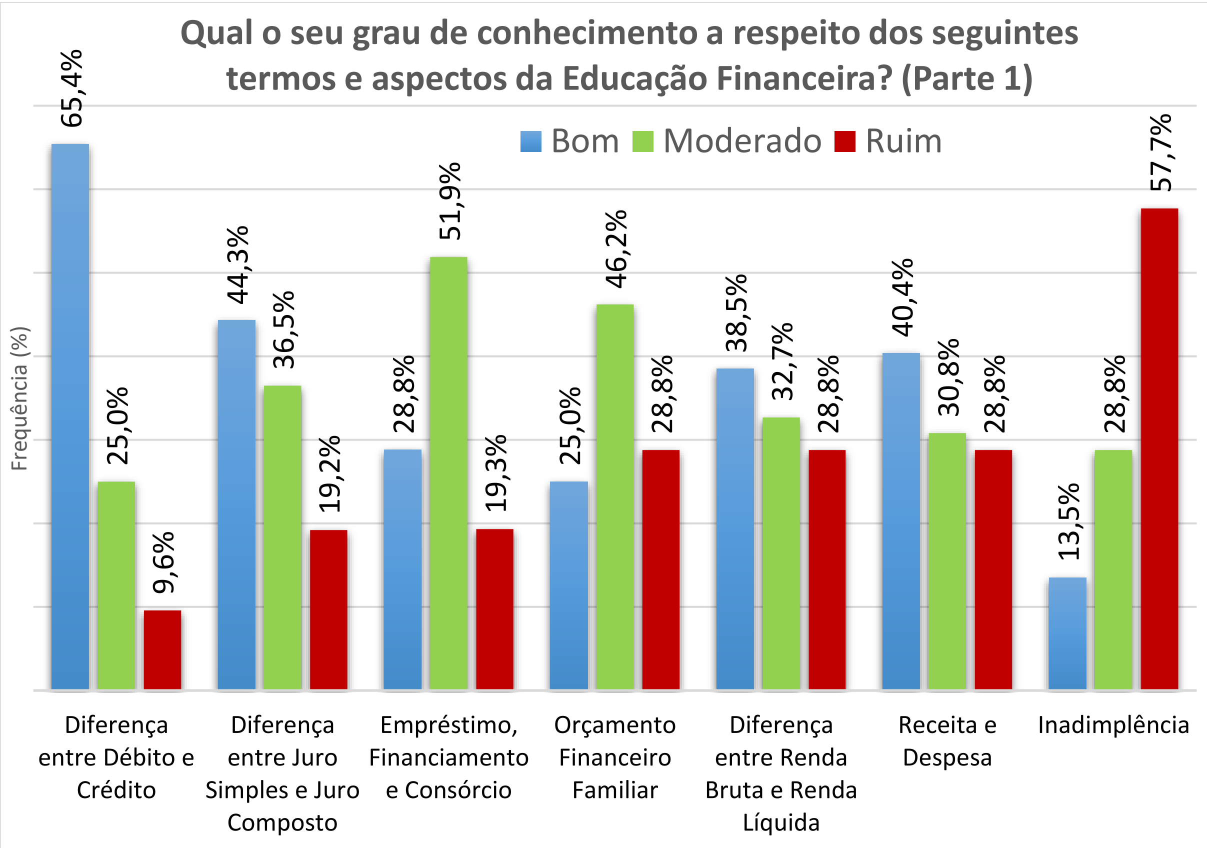
A última etapa da pesquisa buscou mensurar o grau de conhecimento acerca de termos financeiros que os estudantes apresentam.

Os destaques positivos são: Grande parte desses jovens são capazes de diferenciar débito de crédito, e juro simples do composto. Os termos receita e despesa, investimento, poupança e impostos também aparecem com um bom nível de compreensão.

Dentre os aspectos negativos, os destaques são as expressões: Inadimplência, correção monetária e sistemas de amortização. Este último atingiu 88,5% de respostas "ruim", ou seja, onde o conhecimento sobre o assunto é mínimo ou inexistente.

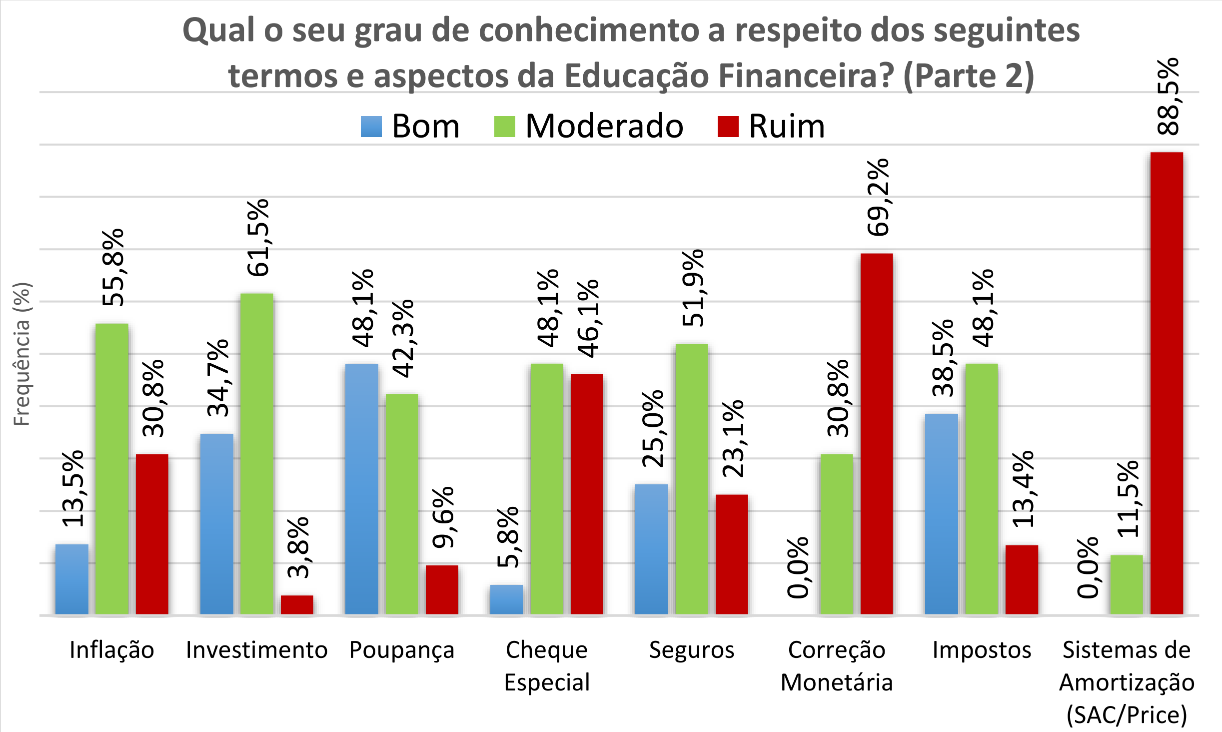
Nos dois gráficos a seguir, é possível ter uma melhor noção do nível de entendimento sobre diversos termos financeiros, incluindo, com maiores detalhes, os mencionados anteriormente.

Gráfico 16: Grau de conhecimento sobre termos financeiros (parte 1)



Fonte: Próprio autor

Gráfico 17: Grau de conhecimento sobre termos financeiros (parte 2)

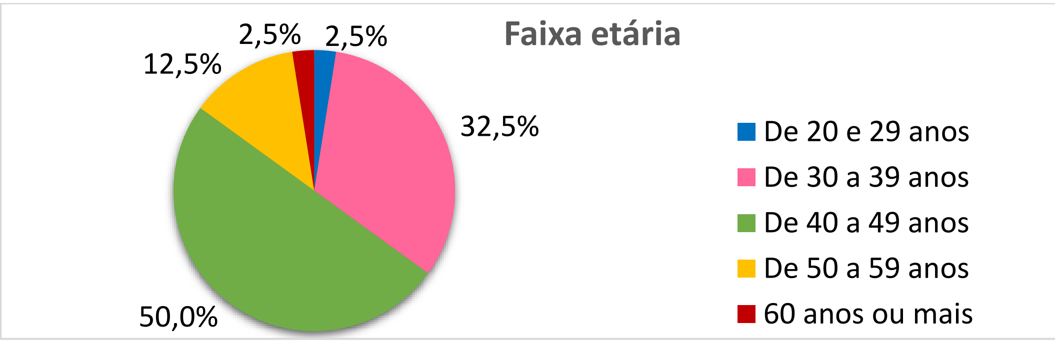


Fonte: Próprio autor

2.2. Questionário aos pais e/ou responsáveis

Na pesquisa realizada com os familiares dos estudantes, foram coletadas 40 respostas. Compôs-se ao questionário dezoito questões, entre quantitativas e qualitativas. Dentre os assuntos abordados, aspectos da educação financeira, presença de dívidas, análise de gastos, orçamento e investimentos permeiam entre os conteúdos que serão analisados.

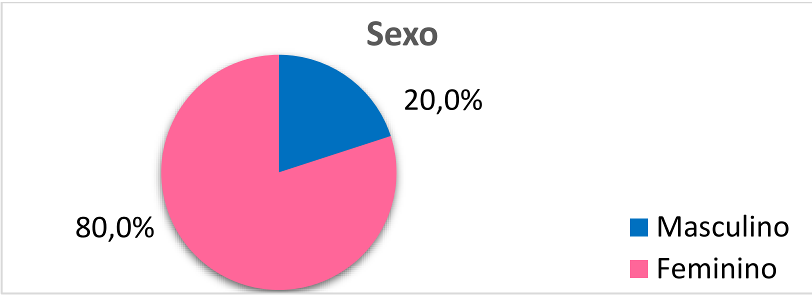
Gráfico 18: Faixa etária



Fonte: Próprio autor

A faixa etária dos participantes concentrou-se dos 30 aos 59 anos de idade, intensificando entre os 40 e 49 anos, atingindo metade dos resultados.

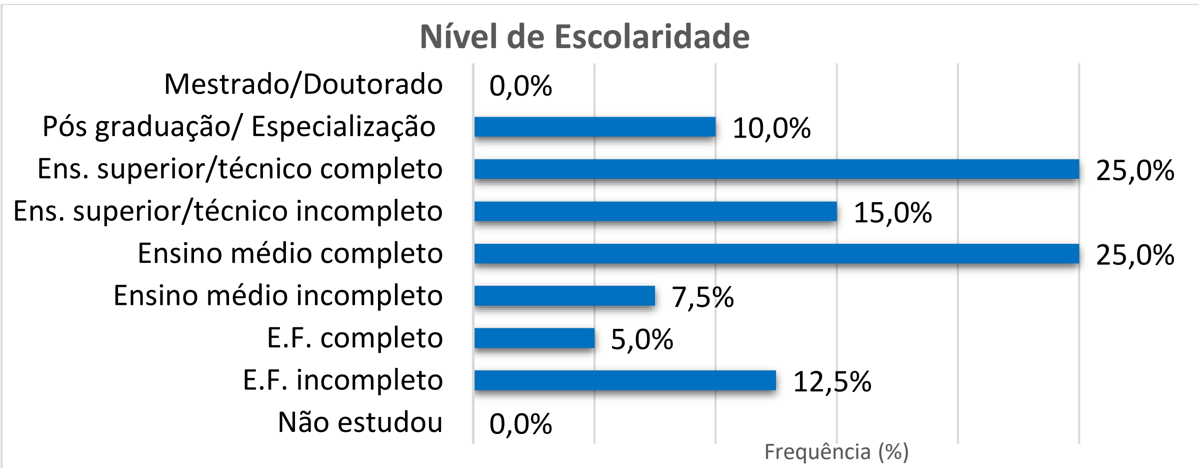
Gráfico 19: Sexo



Fonte: Próprio autor

Oitenta por cento deles se declaram do sexo feminino, ou seja, do total de pessoas que responderam ao questionário, o número de mulheres representam quatro vezes o número de homens.

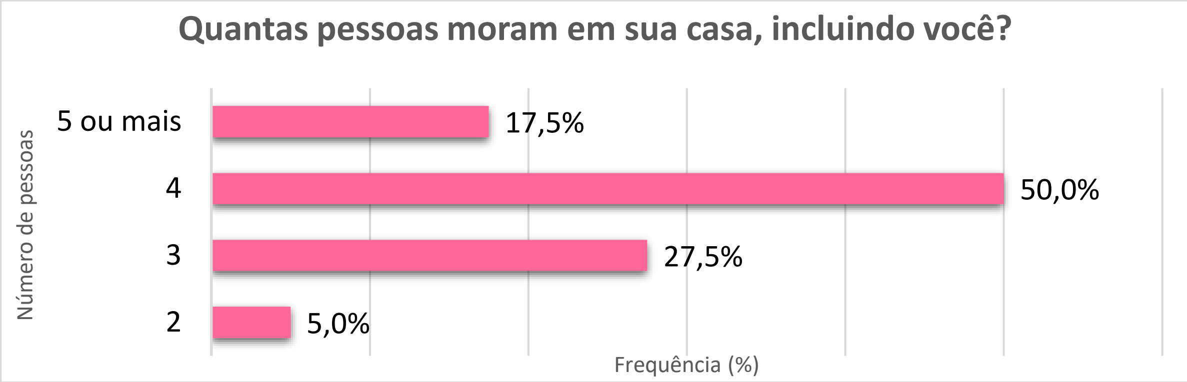
Gráfico 20: Nível de escolaridade



Fonte: Próprio autor

De toda a população pesquisada, a taxa de escolarização mostrou-se otimista. Apenas um quarto dos pais não concluíram o ensino médio. Desses, metade não possuem sequer o fundamental. O contingente com ensino médio completo, ou superior incompleto chega aos 40%. Já os que possuem formação profissional, seja técnica, superior ou pós graduação, totalizam 35%.

Gráfico 21: Total de pessoas na residência

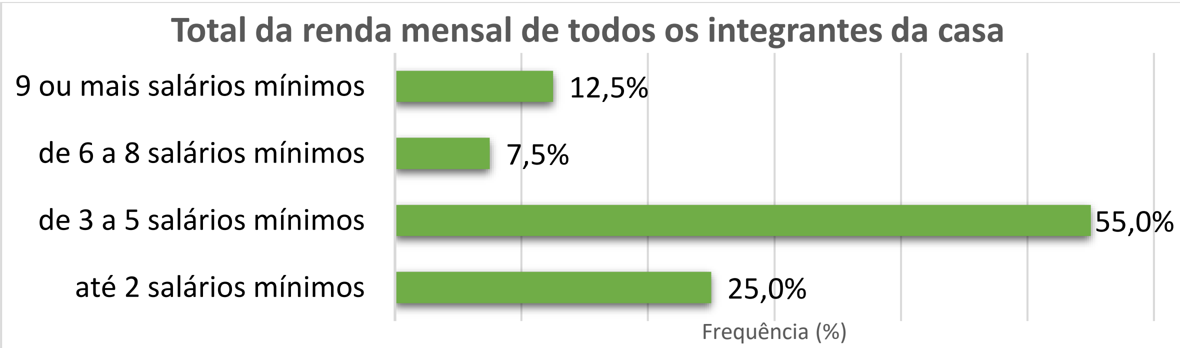


Fonte: Próprio autor

No levantamento realizado, em 77,5% das casas moram de 3 a 4 pessoas, esse número aumenta em 17,5% dos domicílios. Os que vivem somente na companhia do filho, representam 5% do total.

A média prevista foi de 3,8 pessoas por residência. Para efeito de cálculo, consideramos a frequência 5 na opção “5 ou mais pessoas”.

Gráfico 22: Renda mensal familiar



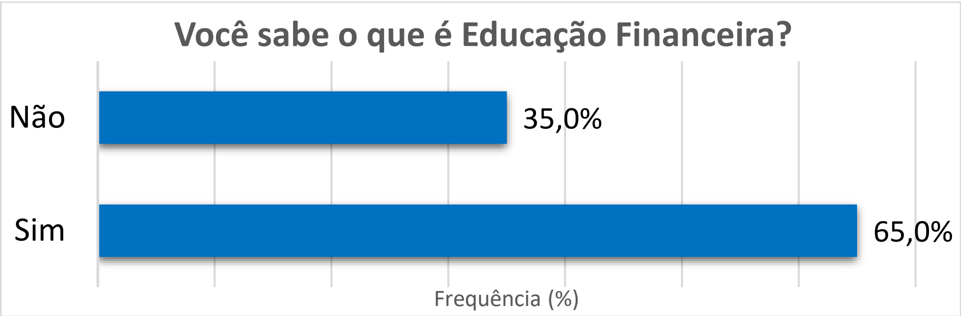
Fonte: Próprio autor

Com relação ao montante remuneratório de todos os integrantes de cada família, a pesquisa aponta que 80% delas possuem renda mensal inferior a 6 salários mínimos, e que somente 12,5% ganham 9 ou mais salários todos os meses.

A renda média foi de 4,35 salários mínimos por família. Para estimar este valor, as frequências ponderadas para o cálculo foram, o ponto médio de cada intervalo de classe, e nas opções “até 2 salários” e “9 ou mais salários”, a maior e menor frequência possível, respectivamente.

As perguntas seguintes propõe o autoconhecimento sobre o que é e quais os objetivos da educação financeira, além da busca pela reflexão sobre a importância deste tema dentro das escolas.

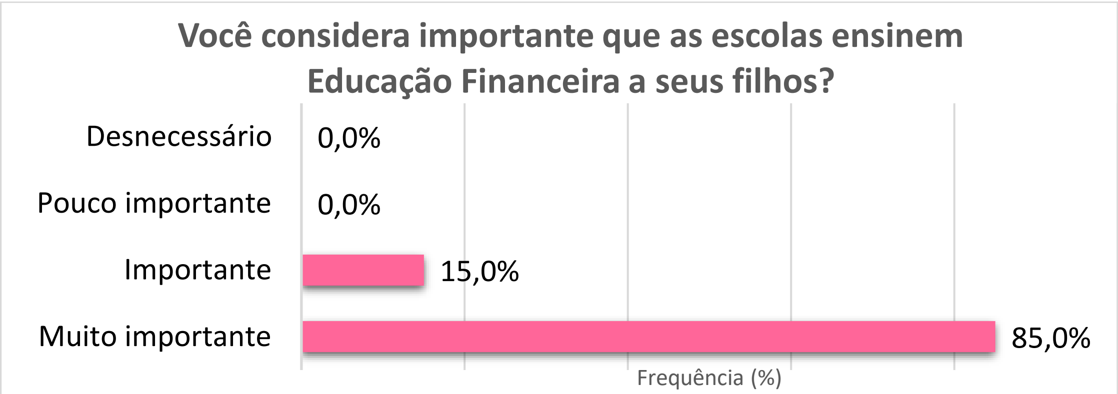
Gráfico 23: O que é educação financeira para os familiares



Fonte: Próprio autor

Quando questionados se compreendem o que é educação financeira, aproximadamente dois terços dos pais alegam que sim. Confrontando aos resultados da mesma pergunta feita aos filhos, os jovens mostraram mais confiança ao julgarem que entendem do assunto, com 75% opinando positivamente (gráfico 6).

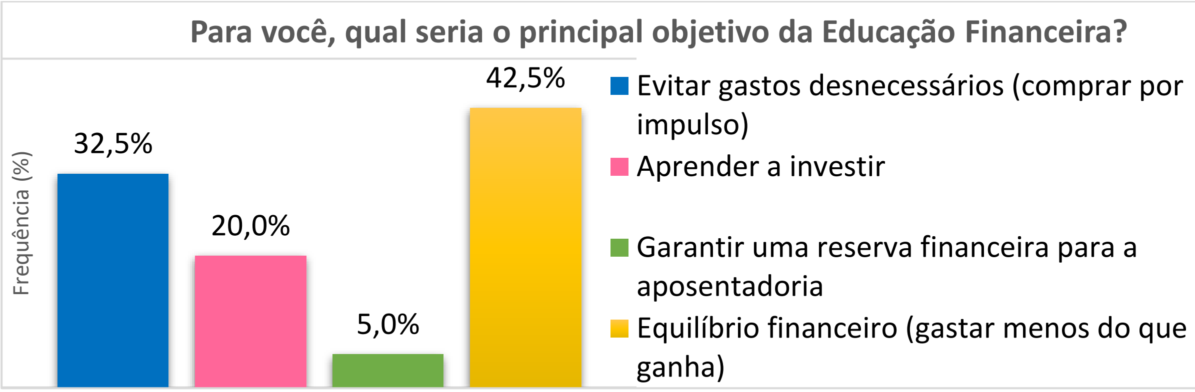
Gráfico 24: Importância da educação financeira nas escolas



Fonte: Próprio autor

Todos os familiares consentem que a educação financeira necessita ser inserida no contexto escolar. Talvez, por não terem desfrutado dessa experiência e viverem em uma sociedade endividada, é que os pais veem a necessidade de os jovens aprenderem desde cedo sobre finanças.

Gráfico 25: Objetivos da educação financeira

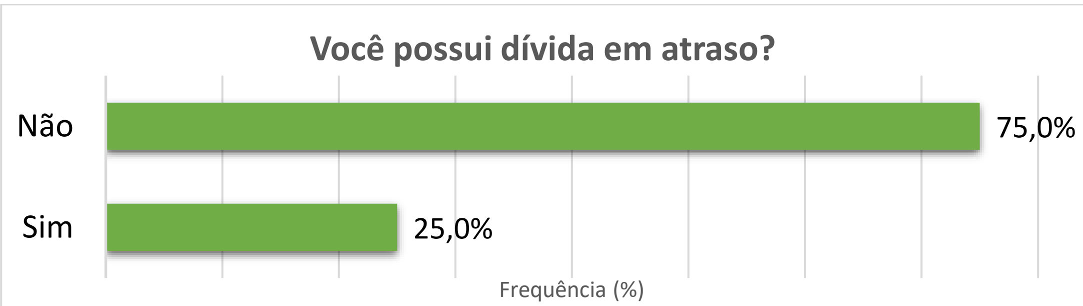


Fonte: Próprio autor

A percepção sobre os principais objetivos da educação financeira sofreram variações notórias na comparação entre os estudantes (ver gráfico 8) e seus pais. Enquanto maior parte dos filhos creem que o grande objetivo seja evitar gastos, 42,5% dos pais entendem que o equilíbrio financeiro é fundamental. Prosseguindo com os resultados, 32,5% elegem a prevenção quanto aos gastos desnecessários, 20% em aprender a investir e apenas 5% em garantir uma reserva financeira. Haviam outras opções, omitidas no gráfico por não computarem votos.

Em janeiro de 2020, o número de brasileiros inadimplentes chegou a 63,8 milhões e o volume de pessoas com contas em atraso representou 40,8% da população adulta do país. É o que consta os dados da Serasa Experian [6]. As questões abordadas na sequência analisam o índice de endividamento da população estudada, o comportamento nas decisões de compra e uma investigação detalhada das maiores despesas dessas famílias.

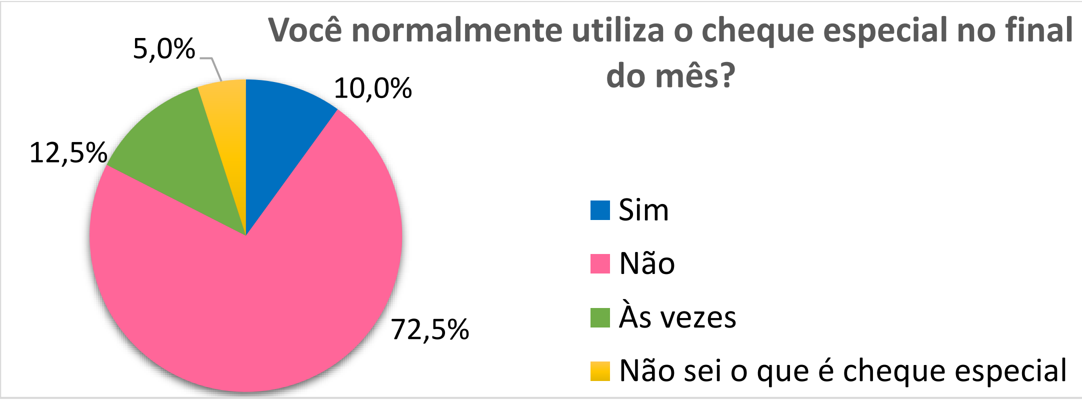
Gráfico 26: Dívidas em atraso



Fonte: Próprio autor

Somente 25% dos pais alegam ter contas em atraso. Considerando os dados apontados anteriormente sobre o número de inadimplentes no Brasil, o resultado é positivo.

Gráfico 27: Utiliza cheque especial?

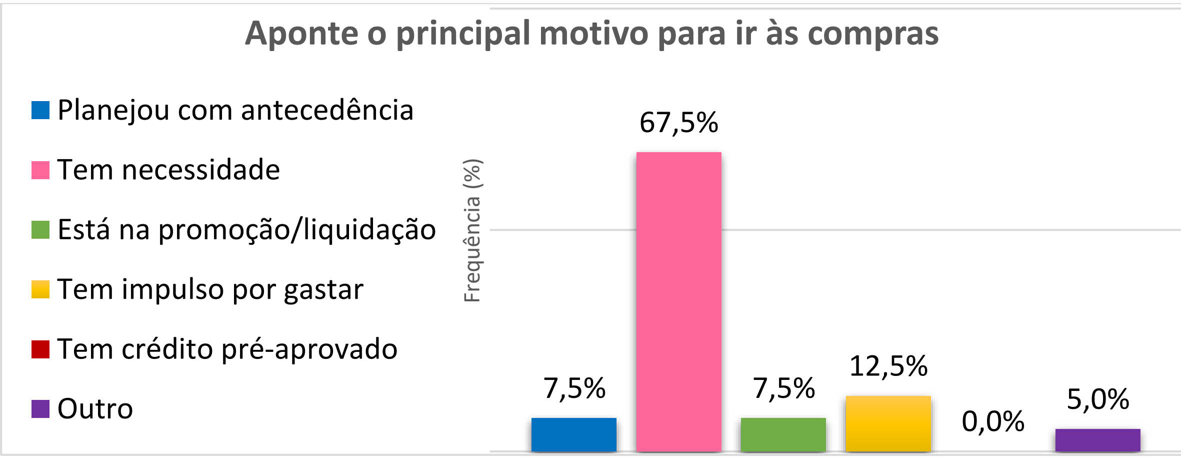


Fonte: Próprio autor

O cheque especial é uma linha de crédito que bancos dão aos clientes e que podem ser usados a qualquer momento. Possui uma das maiores taxas de juros do mercado. Segundo dados da CNDL e SPC Brasil, do total de inadimplentes em 2019, 52% entraram nessa lista através desta modalidade de crédito [7].

Outra vez, os resultados foram satisfatórios quando perguntados se utilizam com frequência o cheque especial, pois 72,5% afirmam não utilizarem, apesar disso, 10% usam com frequência e 12,5% esporadicamente.

Gráfico 28: Motivos para fazer compras

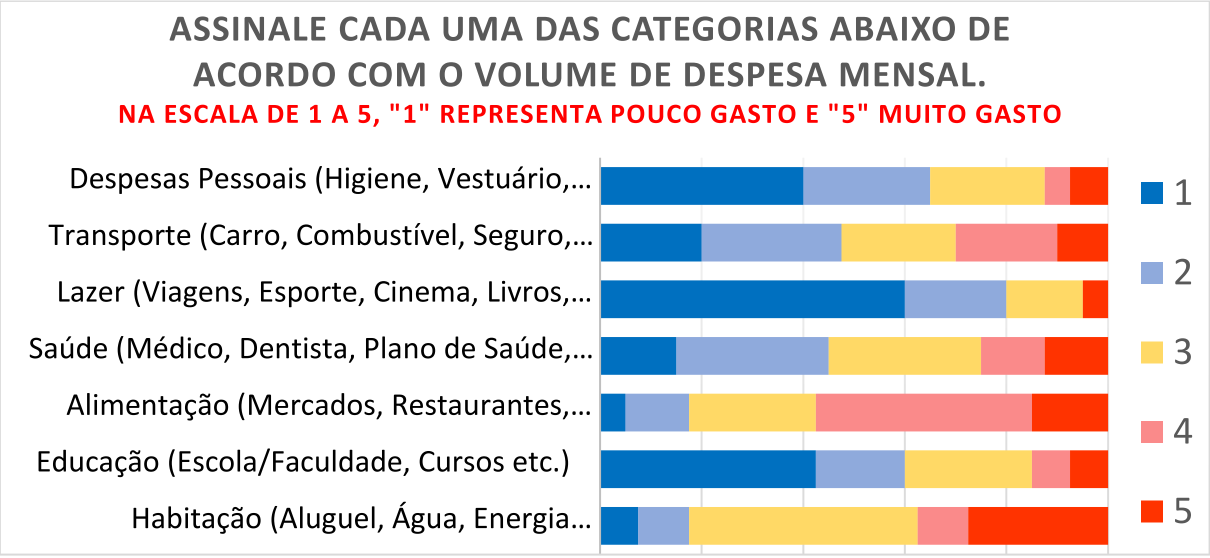


Fonte: Próprio autor

Ao final do mês, costuma sobrar dinheiro, ou trabalha apenas para pagar as contas? Ou ainda pior, fica no vermelho? As pessoas consomem muito, isto é fato, mas será que todos os gastos do dia a dia são indispensáveis? Ou se faz compras sem necessidade?

Na pesquisa realizada, mais de dois terços dos pais asseguram que gastam dinheiro por necessidade. Uma segunda fração, com 12,5%, assumem que fazem compras por impulso. 7,5% deles planejam antes de consumirem, e na mesma quantidade, procuram oportunidades nas promoções.

Gráfico 29: Categorias de gastos



Fonte: Próprio autor

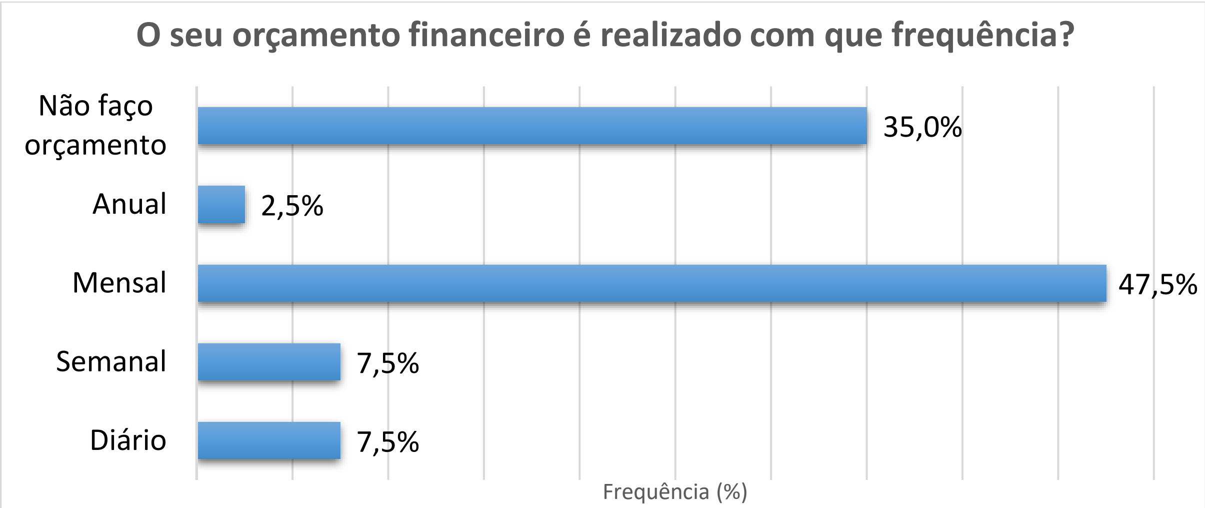
Para entender em quais itens se gasta mais e onde o consumo é menor, os pais dos estudantes classificaram, em uma escala de 1 a 5, as categorias habitação, alimentação, saúde, educação, lazer, transporte e despesas pessoais. Na escala, 1 representa pouca despesa e 5 indica altos gastos.

Considerando a somatória dos índices 4 e 5 na avaliação dos maiores consumos, alimentação, habitação e transporte, nesta ordem, tiveram maiores pesos no orçamento dessas famílias. Os dados são bem parecidos com pesquisa realizada pelo IBGE, divulgada no Jornal Nacional em 2019 [8]. Despesas com aluguel, contas de energia e água, comida, combustível, dentre outros, estão consumindo uma grande fatia do dinheiro. Em quarto lugar, próximo a categoria transporte, ficaram os gastos com saúde.

Em contrapartida, as despesas com lazer são mínimas. Somando os índices 1 e 2, essa categoria chega a atingir 80%. Concluímos que viagens e atividades pagas de entretenimento, por exemplo, não sejam tão frequentes a essas famílias. Itens pessoais e educação também foram avaliados como categorias mais econômicas.

Chegamos a última etapa do questionário. Nela, o foco será a organização financeira e a importância do domínio do dinheiro para ter habilidade de poupar e investir.

Gráfico 30: Orçamento financeiro

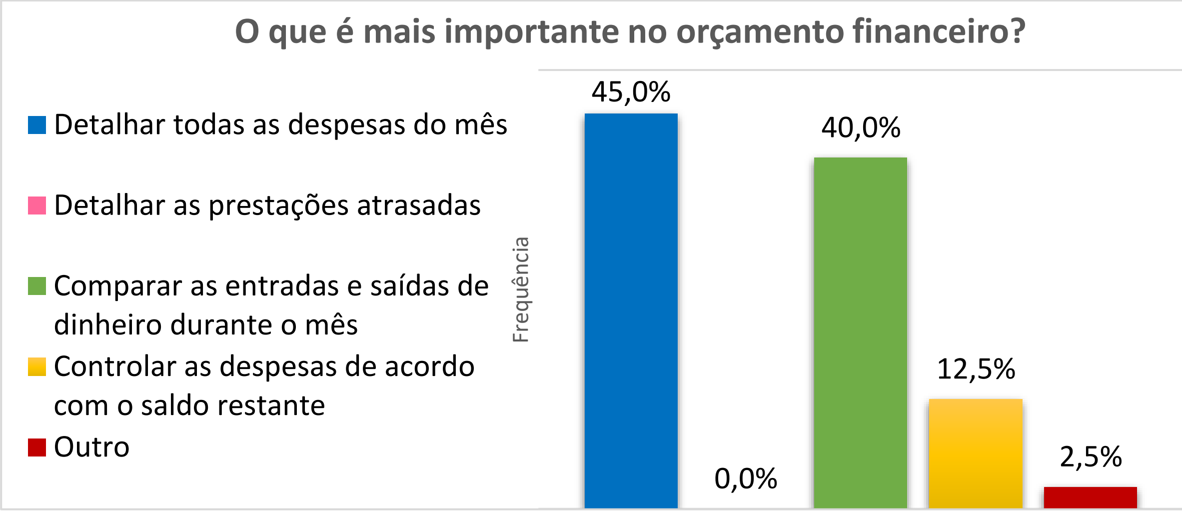


Fonte: Próprio autor

Quando vai ao dentista pela primeira vez, antes de uma reforma, ou no planejamento de uma viagem organizada por uma agência, é comum receber um orçamento com os gastos antes de tomar qualquer decisão. Na vida financeira não é diferente, ao menos não deveria ser. Previsões de despesas e receitas futuras e controle dos gastos geram estabilidade. O orçamento financeiro possibilita ter uma vida mais confortável, realizar sonhos, solucionar problemas e ter mais saúde, ou seja, proporciona qualidade de vida.

Quase metade dos pais afirmam que o orçamento financeiro é feito todos os meses. Somando aos que fazem semanalmente ou diariamente, são 62,5% do total. O que impressiona, são os outros 35% que declaram não planejar as despesas e 2,5% que o fazem anualmente, ou seja, um terço das famílias vivem sem esse controle.

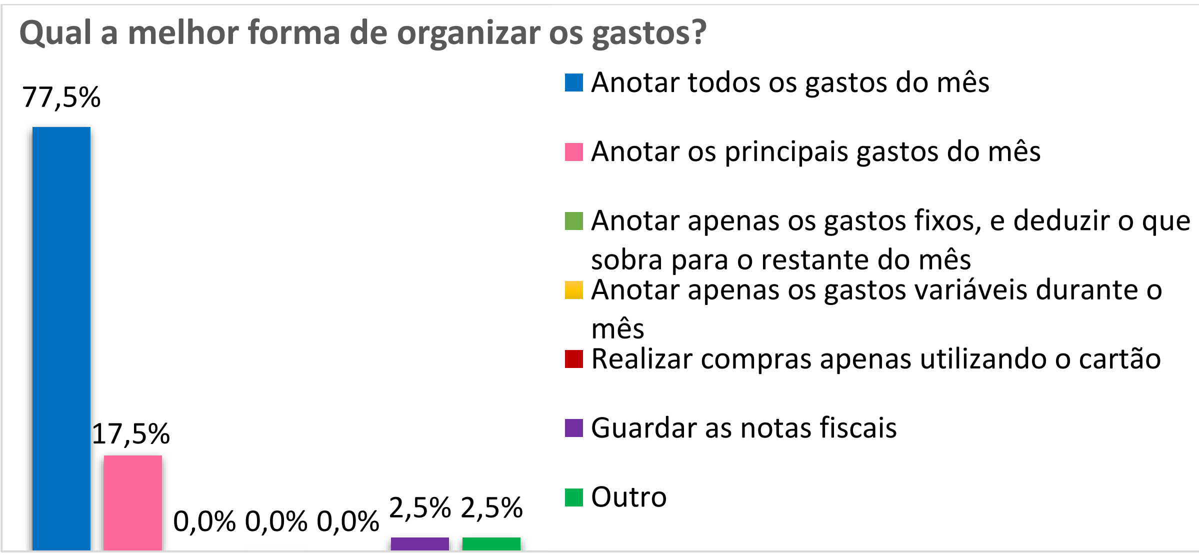
Gráfico 31: Importância do orçamento financeiro



Fonte: Próprio autor

Quando perguntados sobre o que é mais relevante na elaboração do orçamento financeiro, duas respostas se sobressaíram. 45% entendem que detalhar todas as despesas do mês, seja o melhor método de se planejar. Já 40% dos pais, acreditam que o controle das contas precisa estar integrado a receita do mês. Ainda, 12,5% pensam que abater os gastos sobre os ganhos para controlar as despesas seja a melhor alternativa.

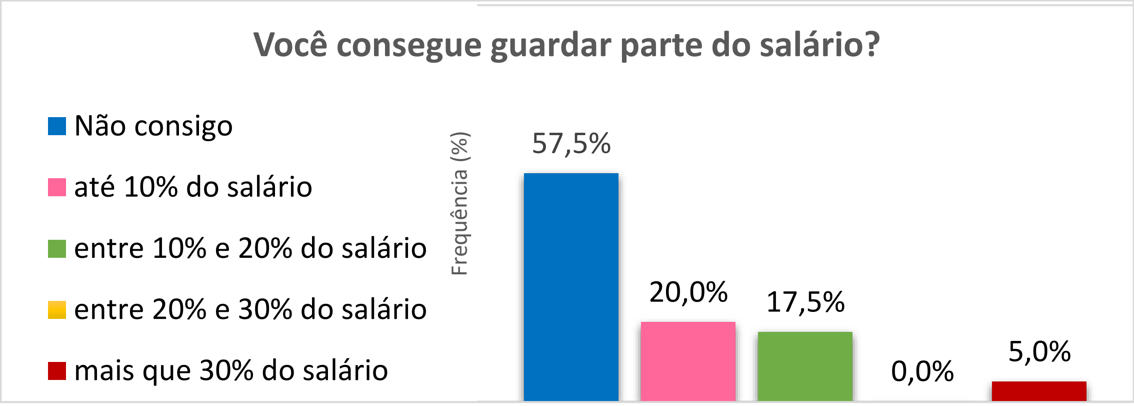
Gráfico 32: Organização dos gastos



Fonte: Próprio autor

Para 77,5% dos pais, a melhor maneira de organizar os gastos, é minuciando todos eles. Outros 17,5% acreditam que basta ter o controle das principais despesas.

Gráfico 33: Economia de dinheiro

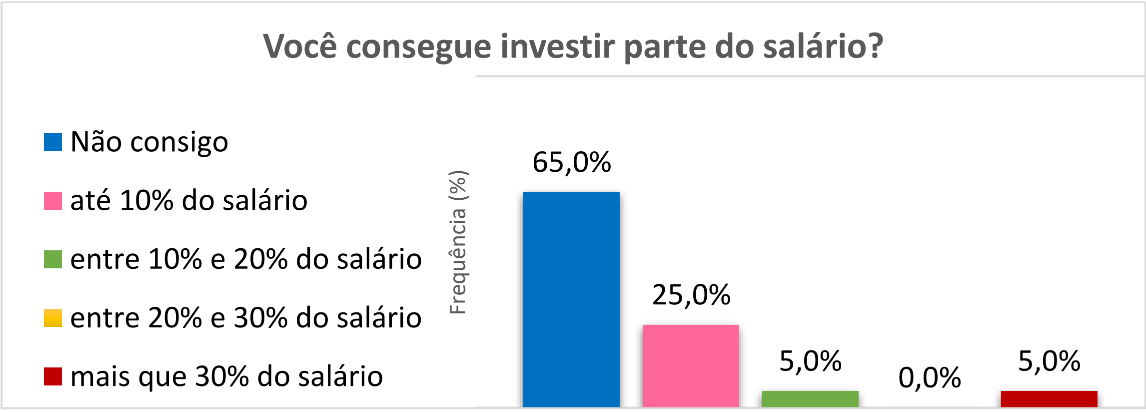


Fonte: Próprio autor

Mais da metade dos entrevistados não conseguem guardar parte da renda sequer para uma eventual emergência. Já 42,5% asseguram fazer economia. Desses, quase metade não chegam a reservar mais que 10% do salário, 17,5% ficam na faixa entre 10% e 20% e apenas 5% poupam 30% ou mais de todo o dinheiro do mês.

Apesar de não ser algo fácil de princípio, guardar dinheiro é necessário e exige disciplina. A receita é simples, tendo domínio sobre os gastos unido a um bom orçamento financeiro, seguramente, o resultado será a economia!

Gráfico 34: Investimentos

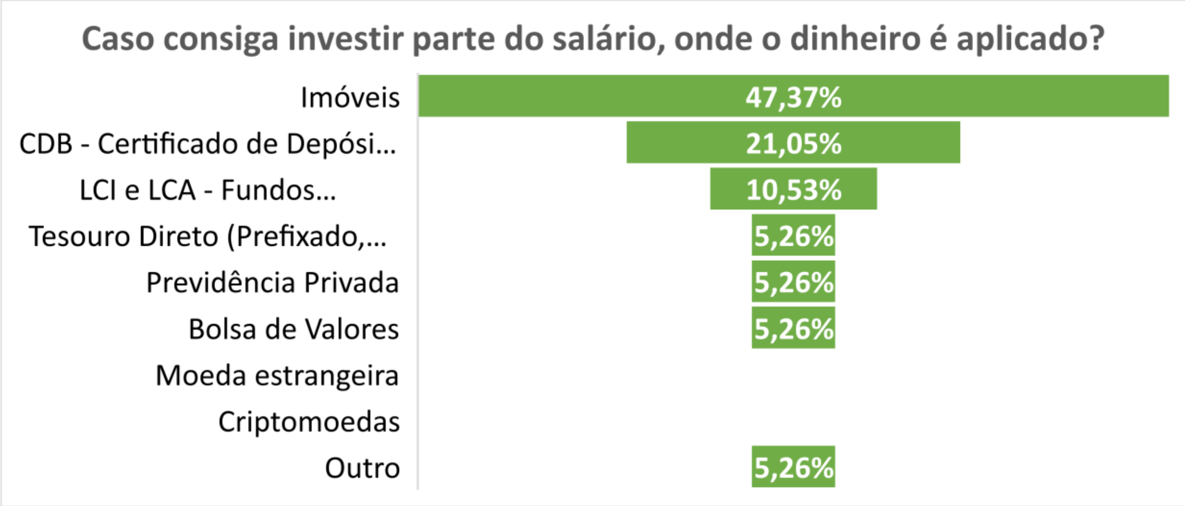


Fonte: Próprio autor

Dentre os pais que afirmam sobrar dinheiro ao final do mês, 65% não conseguem investir. Do restante, 25% investem 10% ou menos do salário e os demais se dividem entre as faixas de 10% a 20%, e mais que 30% do ganho mensal.

Vejamos no gráfico a seguir os tipos de investimentos realizados.

Gráfico 35: Tipos de investimentos



Fonte: Próprio autor

Quase metade dos investimentos se concentram na aquisição e locação de imóveis. Em segundo lugar, com aproximadamente 21%, se encontram as aplicações em CDB (Certificado de Depósito Bancário). Com pouco mais de 10%, estão as Letras de Crédito Imobiliário e do Agronegócio (LCI e LCA). Investimentos em Tesouro Direto, Previdência Privada e Bolsa de Valores pouco aparecem, com 5,26% cada.

3. SITUAÇÕES-PROBLEMA PARA TOMADA DE DECISÕES

Decidir qual prova estudar primeiro, o próximo destino de férias, a melhor proposta de emprego, ou mesmo, escolher o próximo carro para comprar, são exemplos de tomada de decisões. Elas são frequentes em nosso dia a dia, e podem variar desde as mais elementares, resolvidas de forma quase automática, até as de grandes riscos e incertezas. No mundo financeiro, o problema pode ser ainda maior, visto que decisões erradas podem comprometer todo o planejamento futuro.

Este capítulo pretende estimular o interesse dos estudantes com problematizações de cunho financeiro que envolvam tomada de decisões, na perspectiva que os mesmos observem e analisem o mercado financeiro com maior criticidade.

As atividades foram desenvolvidas com estudantes dos dois últimos anos do Ensino Médio. Feito um levantamento acerca do conhecimento que detinham sobre o assunto, ficou evidente o domínio sobre cálculo de porcentagem, noções de acréscimo e decréscimo, e uma base a respeito de juro simples e composto.

A aplicação de cada uma das três propostas desenvolveu-se de modo virtual. Todas elas conseguem abranger diversos contextos do dia a dia. As duas primeiras envolvem o uso de cálculos como auxílio à tomada de decisões. Já a última, concentra-se no poder dos juros compostos para o planejamento financeiro a longo prazo.

3.1. Situação-problema 1

Mariana pretende comprar um aparelho de ar condicionado para o seu quarto. Após analisar diversos anúncios pela internet, decidiu adquirir seu aparelho na loja “Pense Bem”, no valor de R$ 2000,00. Foram oferecidas as seguintes formas de pagamento:

(a) À vista com 5% de desconto;

(b) Sem desconto, em quatro prestações mensais iguais, postecipadas (isto é, a primeira prestação deve ser paga um mês após a compra);

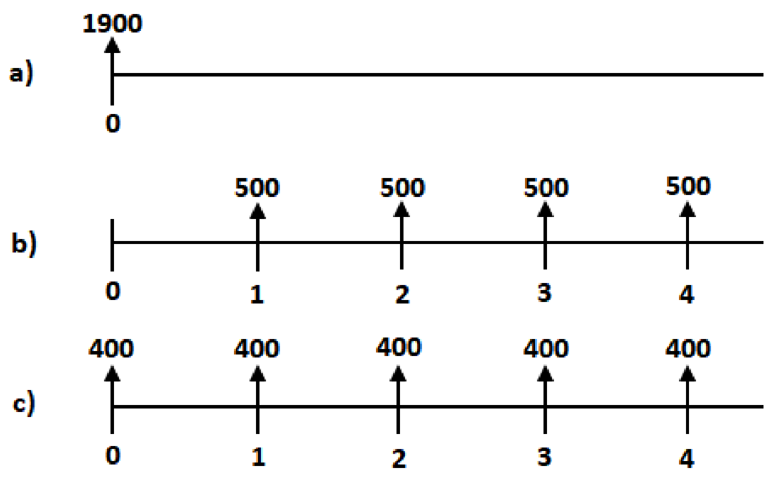
(c) Sem desconto, em cinco prestações mensais iguais, sendo a primeira paga no ato da compra;

Sabendo que Mariana consegue aplicar o seu dinheiro com taxa de juros de 3% ao mês, qual das possibilidades é preferível escolher?

Solução 1: Para comparar as três opções, determinaremos o valor dos conjuntos de pagamentos numa mesma época. Em particular, na época 0, que representa o momento da compra.

Vejamos os esquemas a seguir referentes às situações *a*, *b* e *c* apresentadas pela loja:

Figura 8: Esquemas de pagamento



Fonte: Próprio autor

Temos

a = $(100\% - 5\%)$ de $2000{,}00 = 1900{,}00$ reais

b = $\frac{500}{(1+0{,}03)} + \frac{500}{(1+0{,}03)^2} + \frac{500}{(1+0{,}03)^3} + \frac{500}{(1+0{,}03)^4} \cong 1858{,}55$ reais

c = $400 + \frac{400}{(1+0{,}03)} + \frac{400}{(1+0{,}03)^2} + \frac{400}{(1+0{,}03)^3} + \frac{400}{(1+0{,}03)^4} \cong 1886{,}84$ reais

Portanto, é mais sensato que Mariana escolha a opção (b), que representa o pagamento em quatro parcelas iguais de R$ 500,00 com início após trinta dias, e jamais escolha o pagamento à vista.

Solução 2: (Pouco usual). Vamos analisar o pagamento de cada opção apresentada pela loja no seu devido tempo e comparar os valores finais e os rendimentos mês a mês. Lembremos que o dinheiro de Mariana valoriza 3% ao mês e vamos considerar que ela possua R$ 2000,00 no ato da compra.

Opção (a): O valor pago com desconto é de R$ 1900,00, tendo assim, uma economia de R$ 100,00;

Aplicando R$ 100,00 no período de 4 meses (a efeito de comparação com as opções de parcelamento), temos:

$$100(1 + 0{,}03)^4 = 112{,}55$$

Opção (b): Pagamento em quatro parcelas fixas de 500,00 reais, postecipadas:

No ato da compra, o dinheiro não será utilizado, assim, o montante anterior a 1ª parcela será de: $2000{,}00 + 3\%\ de\ 2000{,}00 = 2060{,}00$

Pagamento da 1ª parcela: $2060{,}00 - 500{,}00 = 1560{,}00$

Montante anterior a 2ª parcela: $1560{,}00 + 3\%\ de\ 1560{,}00 = 1606{,}80$

Pagamento da 2ª parcela: $1606{,}80 - 500{,}00 = 1106{,}80$

Montante anterior a 3ª parcela: $1106{,}80 + 3\%\ de\ 1106{,}80 = 1140{,}004$

Pagamento da 3ª parcela: $1140{,}004 - 500 = 640{,}004$

Montante anterior a 4ª parcela: $640{,}004 + 3\%\ de\ 640{,}004 \cong 659{,}20$

Pagamento da 4ª parcela: $659{,}20 - 500{,}00 = 159{,}20$

Logo, na opção (b), após efetuar todos os pagamentos, sobrarão R$ 159,20 de rendimentos;

Opção (c): Cinco parcelas fixas de R$ 400,00, sendo a primeira paga no ato da compra:

Pagamento da 1ª parcela (ato da compra): $2000{,}00 - 400{,}00 = 1600{,}00$

Montante anterior a 2ª parcela: $1600{,}00 + 3\%\ de\ 1600{,}00 = 1648{,}00$

Pagamento da 2ª parcela: $1648{,}00 - 400{,}00 = 1248{,}00$

Montante anterior a 3ª parcela: $1248{,}00 + 3\%\ de\ 1248{,}00 = 1285{,}44$

Pagamento da 3ª parcela: $1285{,}44 - 400{,}00 = 885{,}44$

Montante anterior a 4ª parcela: $885{,}44 + 3\%\ de\ 885{,}44 \cong 912{,}00$

Pagamento da 4ª parcela: $912{,}00 - 400 = 512{,}00$

Montante anterior a 5ª parcela: $512{,}00 + 3\%\ de\ 512{,}00 = 527{,}36$

Pagamento da 5ª parcela: $527{,}36 - 400{,}00 = 127{,}36$

Na opção (c), sobrarão R$ 127,36 de rendimentos.

Comparando os rendimentos, chegaremos a mesma conclusão da solução anterior.

3.2. Análise da situação-problema 1

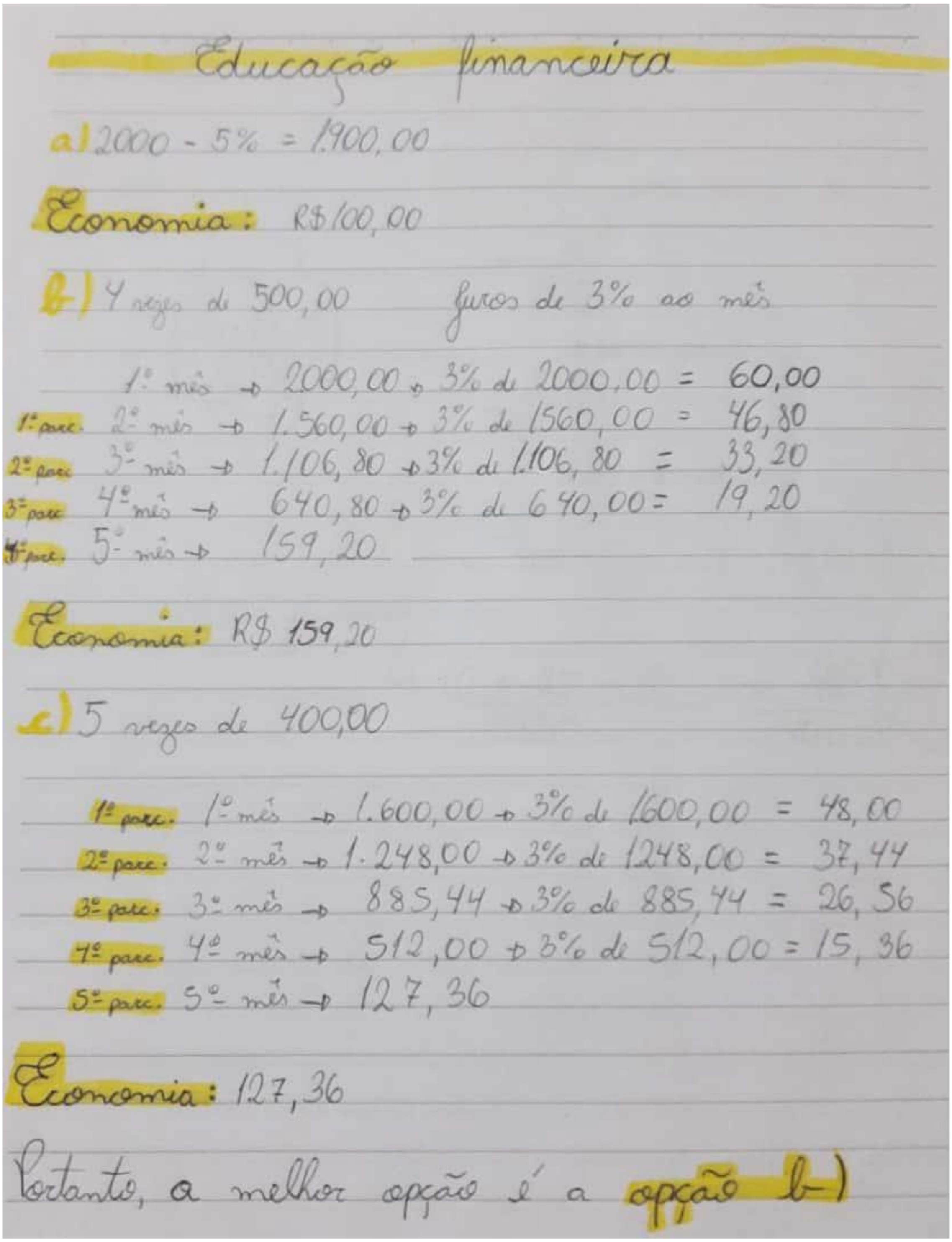
Foram recebidas 27 soluções para o problema proposto. As formas de pagamento “a” e “c” obtiveram, respectivamente, seis e sete escolhas. Já no item “b”, que se refere a quatro prestações mensais e sem entrada, 14 estudantes justificaram ser a opção mais vantajosa. Nesta atividade os pais foram incentivados a participarem, juntamente com os filhos, do desenvolvimento da questão até a tomada de decisão, todavia, apenas quatro deles contribuíram expressando opiniões de acordo com suas experiências de vida, mas sem cooperação nos cálculos.

Ainda que maior parte dos jovens tenham tomado a decisão mais adequada financeiramente, investigando as soluções apresentadas, percebemos que nem todos foram assertivos nos cálculos. Além disso, é importante enfatizar que nenhum aluno utilizou como justificativa o método da comparação de valores em uma mesma época, apresentado na “solução 1” acima.

Dos que tomaram a decisão mais vantajosa, as justificativas mais coerentes consideraram que Mariana possuía os 2 mil reais no ato da escolha, e compararam os rendimentos mensais até o último pagamento. Notamos que, todos que utilizaram esse procedimento, deixaram de aplicar os 100,00 reais de desconto inicial durante os quatro meses, a título de comparação.

A seguir, temos imagens de algumas resoluções que foram apresentadas.

Figura 9: Solução do problema 1 realizada pelo estudante A



Educação financeira

a) 2000 - 5% = 1.900,00

Economia: R$ 100,00

b) 4 vezes de 500,00 juros de 3% ao mês

1º mês → 2000,00 → 3% de 2000,00 = 60,00
1º parc. 2º mês → 1.560,00 → 3% de 1560,00 = 46,80
2º parc. 3º mês → 1.106,80 → 3% de 1.106,80 = 33,20
3º parc. 4º mês → 640,80 → 3% de 640,00 = 19,20
4º parc. 5º mês → 159,20

Economia: R$ 159,20

c) 5 vezes de 400,00

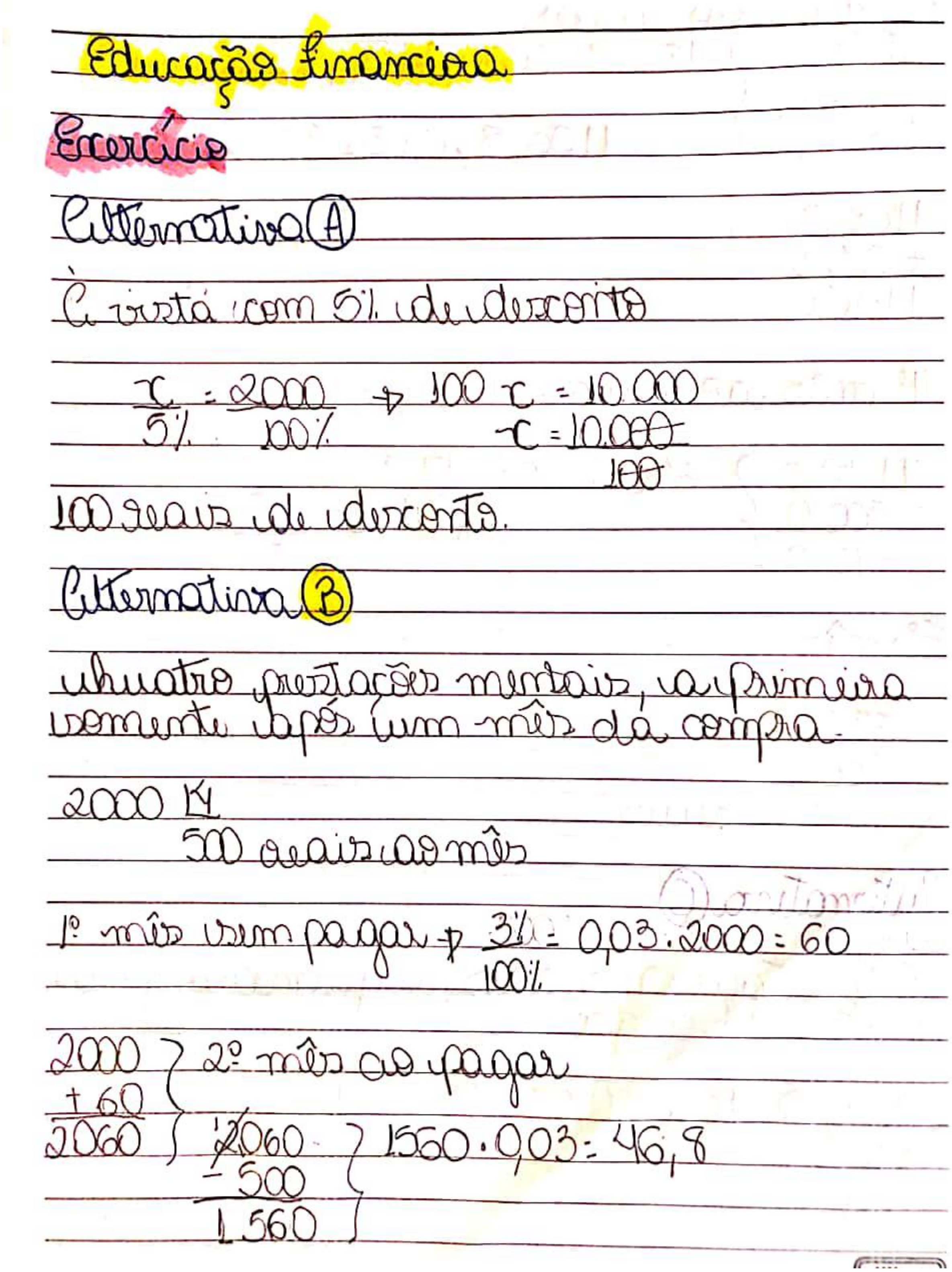
1º parc. 1º mês → 1.600,00 → 3% de 1600,00 = 48,00
2º parc. 2º mês → 1.248,00 → 3% de 1248,00 = 37,44
3º parc. 3º mês → 885,44 → 3% de 885,44 = 26,56
4º parc. 4º mês → 512,00 → 3% de 512,00 = 15,36
5º parc. 5º mês → 127,36

Economia: 127,36

Portanto, a melhor opção é a opção b)

Fonte: Próprio autor

Figura 10: Solução do problema 1 realizada pelo estudante B



Educação financeira

Exercício

Alternativa (A)

À vista com 5% de desconto

$\frac{x}{5\%} = \frac{2000}{100\%} \rightarrow 100x = 10.000$

$x = \frac{10.000}{100}$

100 reais de desconto.

Alternativa (B)

quatro prestações mensais, a primeira somente após um mês da compra.

$2000 \div 4$

500 reais ao mês

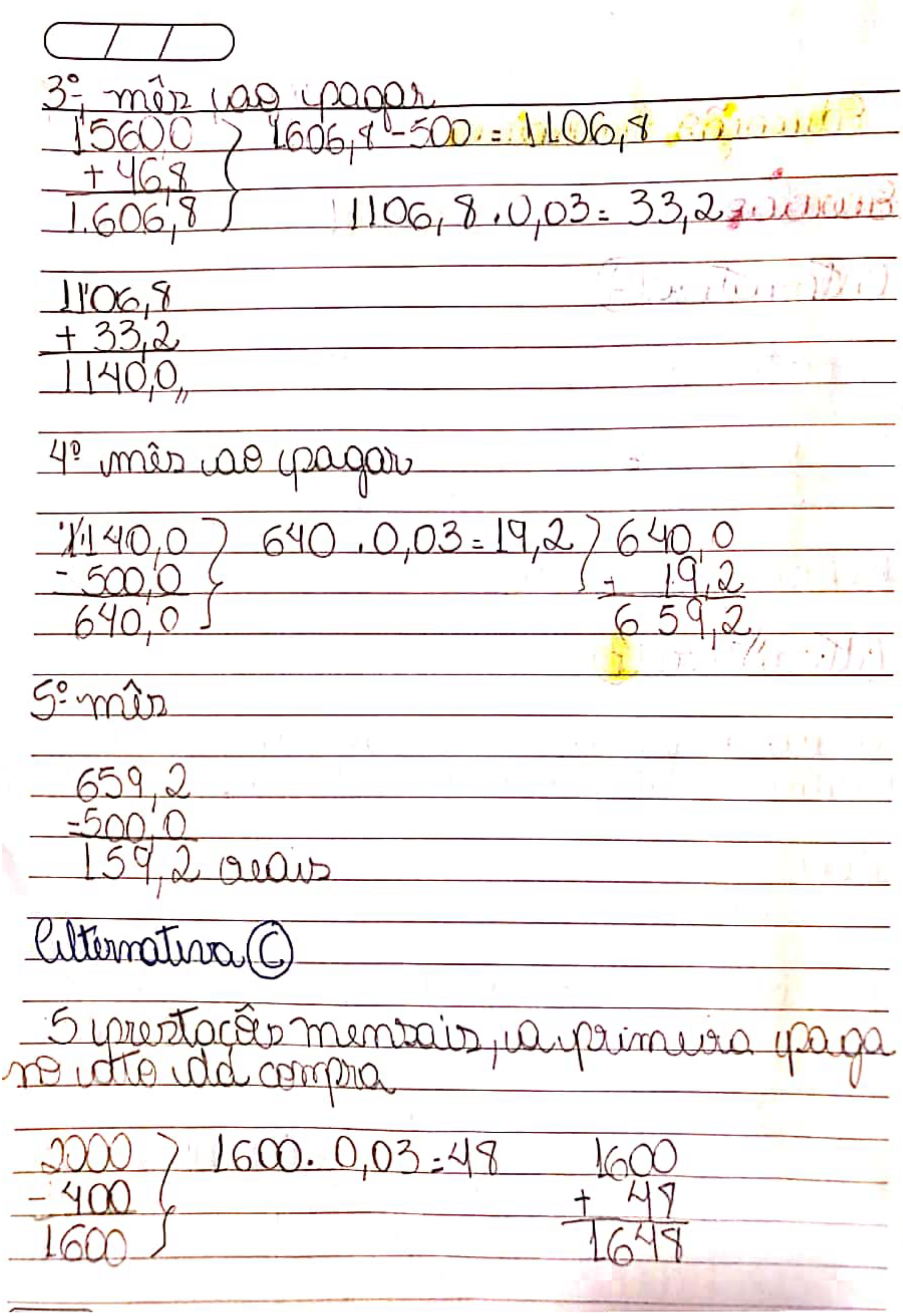
1º mês sem pagar $\rightarrow \frac{3\%}{100\%} = 0,03 . 2000 = 60$

$2000 + 60 = 2060$ } 2º mês ao pagar

$2060 - 500 = 1560$ } $1560 \cdot 0,03 = 46,8$

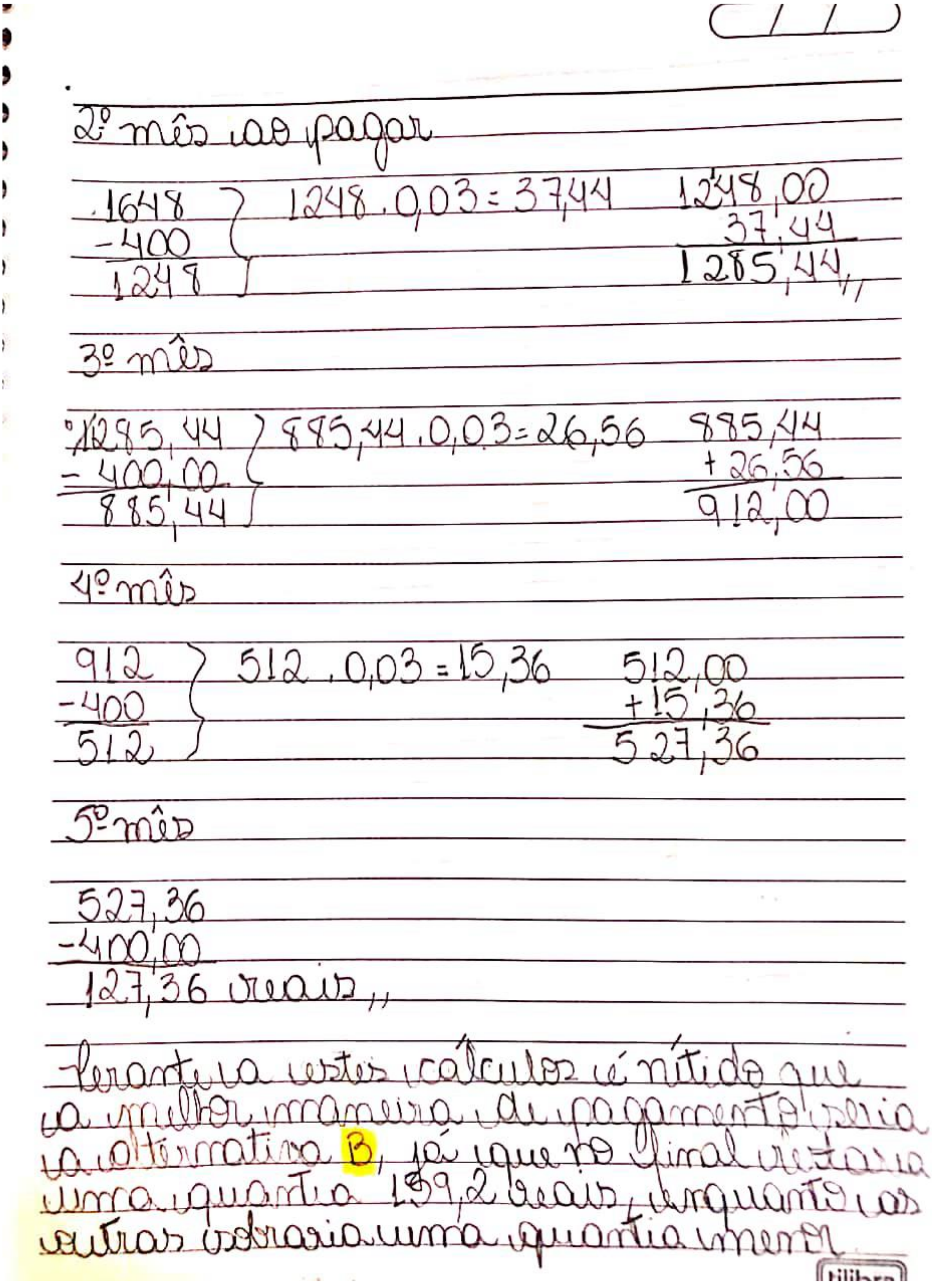
Fonte: Próprio autor

Figura 11: Continuação "I" da solução do problema 1 pelo estudante B



Fonte: Próprio autor

Figura 12: Continuação “II” da solução do problema 1 pelo estudante B



2º mês ao pagar

1648
−400
1248

1248 . 0,03 = 37,44

1248,00
+37,44
1285,44

3º mês

1285,44
− 400,00
885,44

885,44 . 0,03 = 26,56

885,44
+ 26,56
912,00

4º mês

912
−400
512

512 . 0,03 = 15,36

512,00
+15,36
527,36

5º mês

527,36
−400,00
127,36 reais

Perante a estes cálculos é nítido que a melhor maneira de pagamento seria a alternativa B, já que no final restaria uma quantia 139,2 reais, enquanto as outras sobraria uma quantia menor

Fonte: Próprio autor

As duas soluções apresentadas retratam uma mesma ideia de desenvolvimento, contudo, o estudante B descreveu todo o passo a passo até a conclusão do problema. Os erros de notação na escrita e interpretações que não alteraram o resultado, foram apontados em momento propício.

Dentre os que optaram pelo pagamento a vista ou em cinco prestações iguais, sendo uma de entrada, os erros se diversificaram bastante. Apesar da clareza do enunciado e da elucidação pelo professor com relação ao juro de 3% representar rendimento do capital que possui, vários estudantes interpretaram e aplicaram esses juros nas parcelas. Outros, simplesmente ignoraram essa taxa de rendimento, e fundamentaram a opção “a” pelo simples fato de haver desconto.

Sintetizando a atividade, muitos erros estruturais, de interpretação e nos cálculos foram identificados. Nenhuma resposta apresentada foi, de fato, totalmente assertiva. O aspecto edificador tangeu o acesso dos alunos ao estudo sobre equivalências de capital, conteúdo no qual, não é abordado dentro da matemática financeira do ensino médio. Os mesmos perceberam que este método, de deslocar quantias no tempo, é mais eficaz na tomada de decisão de problemas, como no apresentado anteriormente.

3.3. Situação-problema 2

Pedro está no 3º ano do Ensino Médio, e foi contratado pelo Programa Jovem Aprendiz para trabalhar em uma indústria de colchões. Seu gerente, a fim de testá-lo quanto a conhecimentos financeiros, pediu para que tomasse a decisão do seguinte problema:

A Indústria precisa escolher entre comprar ou alugar uma empilhadeira, para ser utilizada durante os três próximos anos. Depois de realizada todas as cotações, as condições apresentadas foram as seguintes:

(I) Aluguel no valor de R$ 2000,00 por mês, sendo que todas as despesas de manutenção já estão inclusas no valor da locação;

(II) Comprá-la pelo valor de R$ 50000,00. A vida econômica da empilhadeira é de 3 anos e seu valor residual após esse período é de R$ 10000,00. As despesas de manutenção são de responsabilidade da indústria, com um custo mensal de R$ 600,00 nos dois primeiros anos e de R$ 650,00 no terceiro ano;

Se o dinheiro vale 1% ao mês, qual das opções Pedro deve escolher?

Solução: Da condição (I), para calcular o valor dos gastos na época da compra, devemos encontrar o valor atual S_o de uma série uniforme de 36 pagamentos de R$ 2000,00, ou seja:

$$S_o = 2000\frac{1-(1+0{,}01)^{-36}}{0{,}01} = 60215{,}01$$

Logo, caso Pedro opte pelo aluguel, ao final dos três anos, seu custo será de R$ 60215,01

Da condição (II), temos os seguintes custos:

$i)$ No ato da compra, o valor da empilhadeira é de R$ 50000,00;

$ii)$ O valor atual de uma série uniforme de 24 pagamentos de R$ 600,00, correspondentes aos dois primeiros anos de manutenção, é de:

$$600\frac{1-(1{,}01)^{-24}}{0{,}01} = 12746{,}03$$

$iii)$ O valor atual dos gastos no terceiro ano, ou seja, uma série uniforme de 12 pagamentos de R$ 650,00, são:

$$650\frac{1-(1{,}01)^{-12}}{0{,}01} = 7315{,}80$$

Deste valor, dividimos por $1{,}01^{24}$ para trazê-lo dois anos atrás:

$$\frac{7315{,}80}{1{,}01^{24}} = 5761{,}68$$

Somando os itens i, ii e iii, os gastos são de $50000 + 12746{,}03 + 5761{,}68 = 68507{,}71$ reais.

Após os 3 anos, o valor residual da empilhadeira é de R$ 10000,00. Logo, o valor na época da compra (trazidos 3 anos) é de:

$$\frac{10000}{1{,}01^{36}} = 6989{,}25$$

Portanto, ao final dos 3 anos, caso Pedro decida comprar a empilhadeira, seu custo será de $68507{,}71 - 6989{,}25 = 61518{,}46$ reais.

Logo, a melhor alternativa é o aluguel, tendo uma economia de R$ 1303,45 com relação a compra.

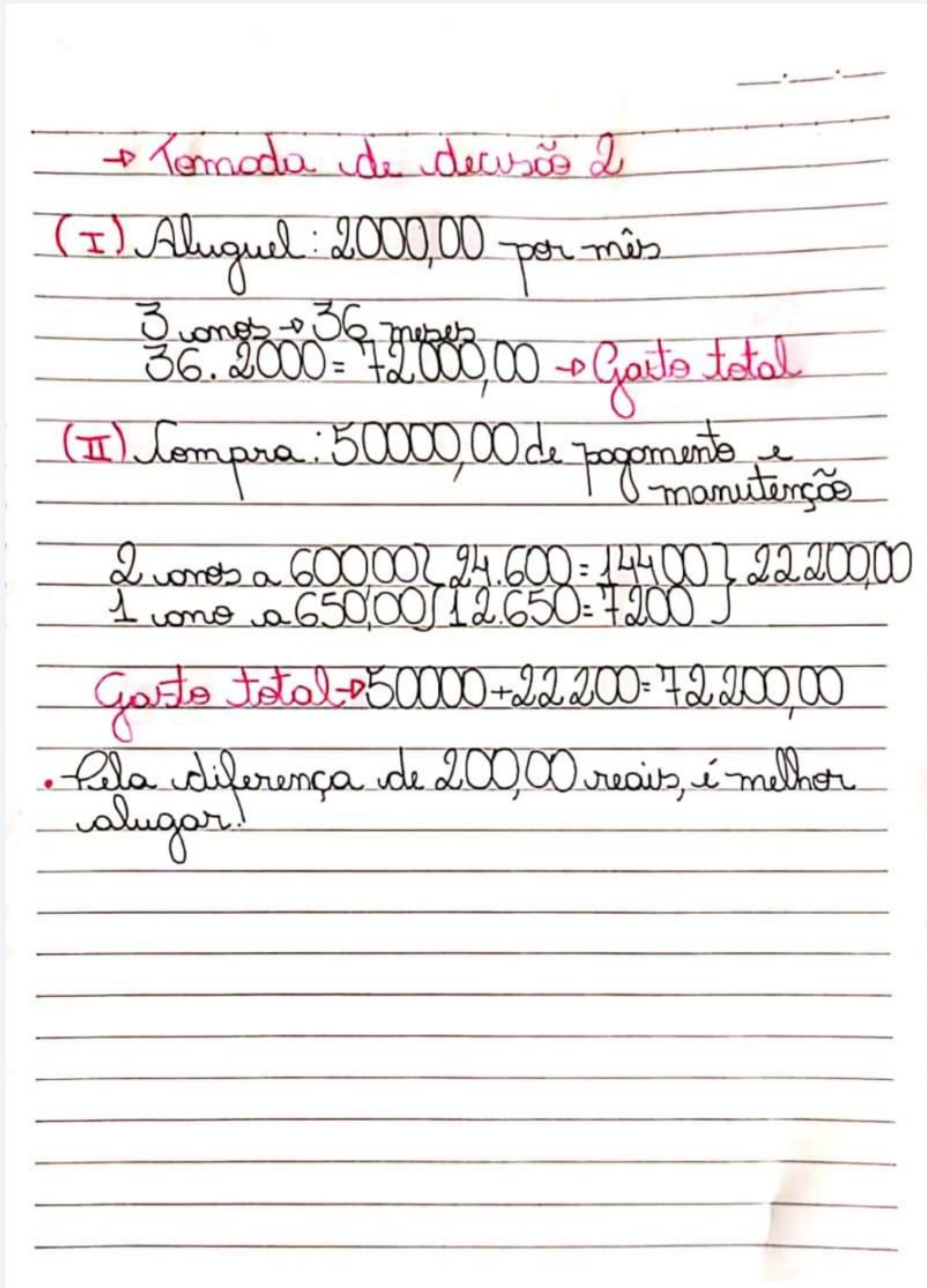
3.4. Análise da situação-problema 2

Nesta situação-problema, foram coletadas 15 tomada de decisões. Na proposta do exercício, o jovem aprendiz precisa decidir a melhor alternativa para a indústria, entre alugar ou comprar uma empilhadeira. A solução apresentada acima corrobora que o aluguel é a opção mais vantajosa, contudo, 60% dos estudantes, ou seja, nove deles, optaram pela segunda alternativa ofertada.

O problema abrange séries de pagamentos uniformes, ou seja, com parcelas fixas e periódicas. Analisando as soluções apresentadas, fica nítida a falta de conhecimento sobre o assunto. Outra vez, os estudantes sequer ponderaram deslocar quantias no tempo, visto na situação-problema 1. Também, poucos levaram em conta a taxa de rendimento mensal de 1% ao mês como fator de influência para a decisão final.

As duas imagens abaixo (Figura 47 e Figura 48), representam tomada de decisões contrárias, mas com mesma estrutura de desenvolvimento. Essas duas construções são análogas a quase dois terços das respostas. Na primeira, apesar de acertada a escolha, os cálculos não consideram a taxa de rendimento mensal do dinheiro e o valor residual do produto após os três anos, o que poderia alterar a opção mais vantajosa. Já na segunda, o que torna a opção de compra mais viável, é justamente o desconto do valor residual na conclusão do exercício.

Figura 13: Solução do problema 2 realizada pelo estudante C



→ Tomada de decisão 2

(I) Aluguel: 2000,00 por mês

3 anos → 36 meses

36 . 2000 = 72.000,00 → Gasto total

(II) Compra: 50000,00 de pagamento e manutenção

2 anos a 600,00 } 24.600 = 14400 } 22.200,00

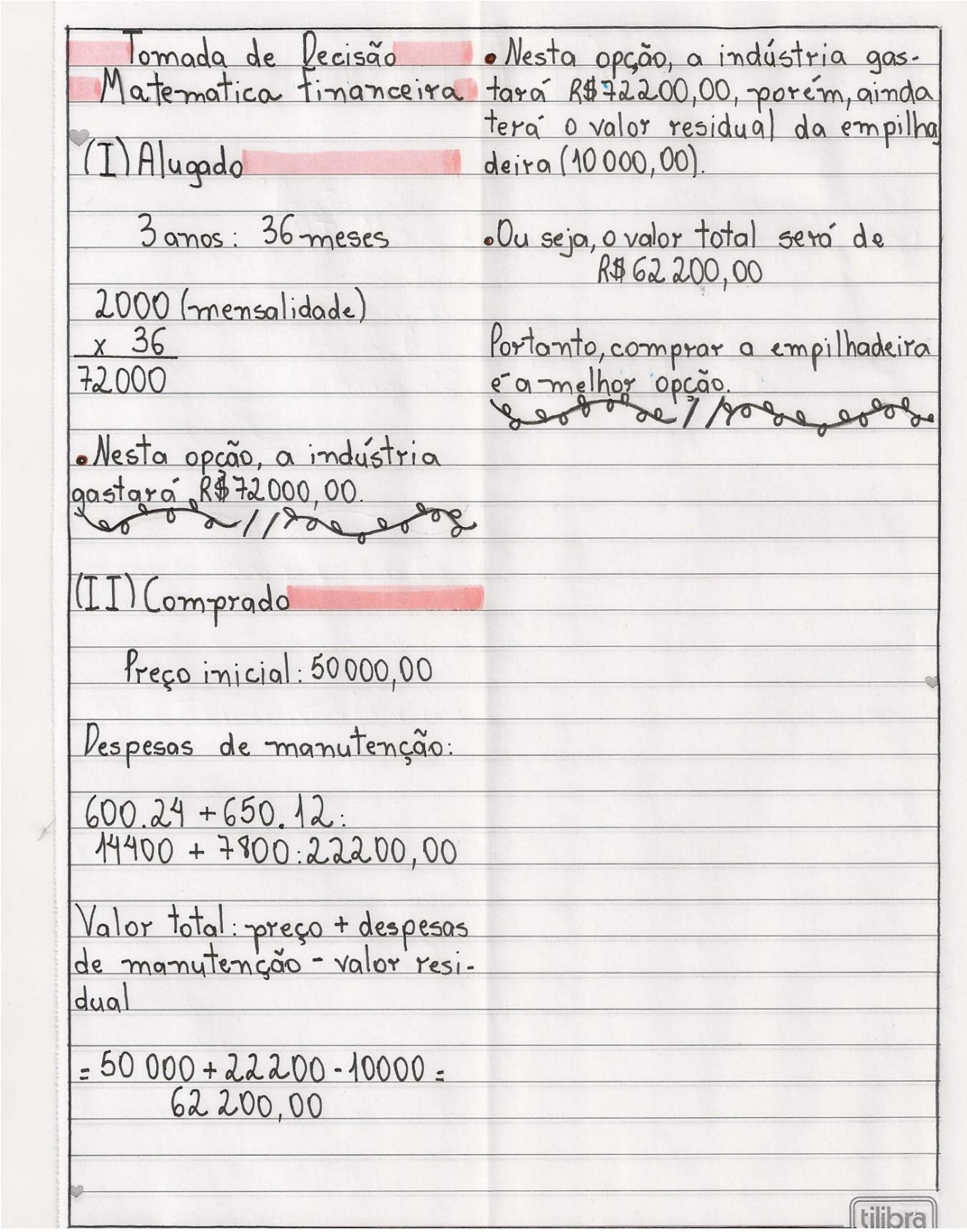
1 ano a 650,00 } 12.650 = 7200

Gasto total → 50000 + 22200 = 72.200,00

• Pela diferença de 200,00 reais, é melhor alugar!

Fonte: Próprio autor

Figura 14: Solução do problema 2 realizada pelo estudante D



Tomada de Decisão
Matematica financeira

(I) Alugado

3 anos: 36 meses

2000 (mensalidade)
x 36
72000

• Nesta opção, a indústria gastará R$72000,00.

//

(II) Comprado

Preço inicial: 50000,00

Despesas de manutenção:

600.24 + 650.12:
14400 + 7800: 22200,00

Valor total: preço + despesas de manutenção - valor residual

= 50 000 + 22200 - 10000 =
62 200,00

• Nesta opção, a indústria gastará R$72200,00, porém, ainda terá o valor residual da empilhadeira (10 000,00).

• Ou seja, o valor total será de R$ 62 200,00

Portanto, comprar a empilhadeira é a melhor opção.

//

Fonte: Próprio autor

A solução seguinte é curiosa. Nela, o estudante tenciona cada uma das situações apresentadas a uma aplicação financeira, idealizando uma rentabilidade no período de três anos.

Na opção1, foi totalizado e aplicado o montante dos aluguéis a serem pagos no período. O cálculo para cada saldo mensal leva em consideração o vencimento do aluguel e o lucro da aplicação naquela época. Já na opção de compra da empilhadeira, aplicamos no momento da aquisição do produto o montante das despesas com manutenção.

Para a tomada de decisão, efetuamos a diferença entre os gastos em cada situação e o lucro gerado pelas aplicações. Mais detalhes dos cálculos nas figuras 49 e 50.

Figura 15: Solução do problema 2 realizada pelo estudante E

Tomada de decisão 2

- Situação 1:

Alugar por 2 mil p/mês.   36 * 2 000 = 72 mil em 3 anos
Não há perda de valor. Não há gasto com manutenção
Total da situação 1: 72 mil

Tendo 72 mil na hora da escolha, e aplicando esse dinheiro, o rendimento ao final dos 3 anos será:16.861,60

- Situação 2:

Comprar por 50 mil
Valor residual (após os 3 anos): 10 mil
Perda de 80% do valor

Manutenção
2 primeiros anos: 600 * 24 = 14.400
3° ano: 650 * 12 = 7.800
Gasto total da manutenção: 14.400 + 7.800 = 22.200,00

Aplicando 22.200,00, o rendimento ao final dos 3 anos será: 5.282,81

Solução:
Situação 1: 72.000,00 – 16.861,60 = 55.138,40
Situação 2: 40.000,00 + 22.200,00 – 5.282,81 = 56.917,19
É mais vantajosa a situação 1

Fonte: Próprio autor

Figura 16: Continuação da solução do problema 2 pelo estudante E

Situação 1 - Alugar					*Situação 2 - Comprar*				
	Saldo	*Rendim.*	*Novo Saldo*			*Manut.*	*Saldo*	*Rend.*	*Novo Saldo*
0	72000,00	720,00	72720,00		0	0,00	22200,00	222,00	22422,00
1	70720,00	707,20	71427,20		1	600,00	21822,00	218,22	22040,22
2	69427,20	694,27	70121,47		2	600,00	21440,22	214,40	21654,62
3	68121,47	681,21	68802,69		3	600,00	21054,62	210,55	21265,17
4	66802,69	668,03	67470,71		4	600,00	20665,17	206,65	20871,82
5	65470,71	654,71	66125,42		5	600,00	20271,82	202,72	20474,54
6	64125,42	641,25	64766,67		6	600,00	19874,54	198,75	20073,28
7	62766,67	627,67	63394,34		7	600,00	19473,28	194,73	19668,02
8	61394,34	613,94	62008,29		8	600,00	19068,02	190,68	19258,70
9	60008,29	600,08	60608,37		9	600,00	18658,70	186,59	18845,28
10	58608,37	586,08	59194,45		10	600,00	18245,28	182,45	18427,74
11	57194,45	571,94	57766,40		11	600,00	17827,74	178,28	18006,01
12	55766,40	557,66	56324,06		12	600,00	17406,01	174,06	17580,07
13	54324,06	543,24	54867,30		13	600,00	16980,07	169,80	17149,87
14	52867,30	528,67	53395,97		14	600,00	16549,87	165,50	16715,37
15	51395,97	513,96	51909,93		15	600,00	16115,37	161,15	16276,53
16	49909,93	499,10	50409,03		16	600,00	15676,53	156,77	15833,29
17	48409,03	484,09	48893,12		17	600,00	15233,29	152,33	15385,63
18	46893,12	468,93	47362,05		18	600,00	14785,63	147,86	14933,48
19	45362,05	453,62	45815,67		19	600,00	14333,48	143,33	14476,82
20	43815,67	438,16	44253,83		20	600,00	13876,82	138,77	14015,58
21	42253,83	422,54	42676,37		21	600,00	13415,58	134,16	13549,74
22	40676,37	406,76	41083,13		22	600,00	12949,74	129,50	13079,24
23	39083,13	390,83	39473,96		23	600,00	12479,24	124,79	12604,03
24	37473,96	374,74	37848,70		24	600,00	12004,03	120,04	12124,07
25	35848,70	358,49	36207,19		25	650,00	11474,07	114,74	11588,81
26	34207,19	342,07	34549,26		26	650,00	10938,81	109,39	11048,20
27	32549,26	325,49	32874,76		27	650,00	10398,20	103,98	10502,18
28	30874,76	308,75	31183,50		28	650,00	9852,18	98,52	9950,70
29	29183,50	291,84	29475,34		29	650,00	9300,70	93,01	9393,71
30	27475,34	274,75	27750,09		30	650,00	8743,71	87,44	8831,15
31	25750,09	257,50	26007,59		31	650,00	8181,15	81,81	8262,96
32	24007,59	240,08	24247,67		32	650,00	7612,96	76,13	7689,09
33	22247,67	222,48	22470,15		33	650,00	7039,09	70,39	7109,48
34	20470,15	204,70	20674,85		34	650,00	6459,48	64,59	6524,07
35	18674,85	186,75	18861,60		35	650,00	5874,07	58,74	5932,81
36	**16861,60**				36	650,00	**5282,81**		

Fonte: Próprio autor

Evidentemente, existem equívocos em todas as resoluções. Em virtude do mercado financeiro ser inconstante e as taxas de juros ao longo do tempo poderem sofrer grandes variações, retroceder valores futuros ao momento atual é a alternativa mais precisa numa tomada de decisão.

3.5. Situação-problema 3

Com a intenção de comprar um carro à vista, Antônio decidiu que irá guardar parte do salário nos próximos três anos. Desejando que seu dinheiro valorize neste período, resolveu aplicá-lo em um fundo de investimento com taxa de rendimento mensal de 1%. Além de já possuir uma reserva de R$ 10000,00 para a aplicação, fará um aporte mensal de R$ 600,00 até completar os 3 anos. Qual será o montante para a compra do carro ao final deste período?

Considere que a inflação média nesta época é de 0,30% ao mês, e que neste fundo há uma dedução com alíquota de 15% em imposto de renda sobre a rentabilidade acumulada.

Solução: Para o desenvolvimento do problema, o uso da ferramenta Excel contribuiu significantemente para a obtenção dos valores de juros e montante mês a mês. A construção da planilha e inserção das fórmulas foram realizadas durante a aula, e apesar do pouco domínio sobre a ferramenta, houve bastante compreensão nas tabulações efetuadas.

Com aportes inicial e mensal, respectivamente, de R$ 10000,00 e R$ 600,00, o próximo passo era considerar que a rentabilidade mensal real deve ser descontada da inflação, em razão disso, a tabela apresenta a taxa de 0,70%. Em seguida, foram elaboradas 36 linhas, representando os meses a serem analisados, em que cada uma delas inclui o ganho mensal e o valor acumulado da aplicação. Ao final de cada ano, era estimado o valor líquido adquirido, e para isso, foi descontado a alíquota do imposto de renda sobre o lucro.

O desfecho dos cálculos encontra-se na tabela a seguir.

Figura 17: Solução do problema 3

APLICAÇÃO FINANCEIRA						
TABELA DE INVESTIMENTOS COM APORTE MENSAL						
	APORTE INICIAL		10000,00			
	APORTE MENSAL		600,00			
	RENTABILIDADE REAL MENSAL		0,70%			
	Mês	Juros	Acumulado			
	1	0,00	10600,00			
	2	74,20	11274,20			
	3	78,92	11953,12			
	4	83,67	12636,79			
	5	88,46	13325,25			
	6	93,28	14018,53			
	7	98,13	14716,66			
	8	103,02	15419,67			
	9	107,94	16127,61			
	10	112,89	16840,50	Rendimento dos juros		1081,29
	11	117,88	17558,39	IR	15%	162,19
1 ano	12	122,91	18281,29	Valor líquido		18119,10
	13	127,97	19009,26			
	14	133,06	19742,33			
	15	138,20	20480,53			
	16	143,36	21223,89			
	17	148,57	21972,46			
	18	153,81	22726,26			
	19	159,08	23485,35			
	20	164,40	24249,74			
	21	169,75	25019,49			
	22	175,14	25794,63	Rendimento dos juros		2961,22
	23	180,56	26575,19	IR	15%	444,18
2 anos	24	186,03	27361,22	Valor líquido		26917,04
	25	191,53	28152,75			
	26	197,07	28949,82			
	27	202,65	29752,46			
	28	208,27	30560,73			
	29	213,93	31374,66			
	30	219,62	32194,28			
	31	225,36	33019,64			
	32	231,14	33850,78			
	33	236,96	34687,73			
	34	242,81	35530,55	Rendimento dos juros		5633,92
	35	248,71	36379,26	IR	15%	845,09
3 anos	36	254,65	37233,92	Valor líquido		36388,83

Fonte: Próprio autor

3.6. Análise da situação-problema 3

Observando o valor líquido obtido após os três anos e contrapondo o mesmo problema sem a aplicação do dinheiro, os estudantes perceberam o poder dos juros compostos para o crescimento patrimonial em aplicações de médio prazo, e deduziram que ampliando o período de investimentos, os resultados seriam ainda mais satisfatórios.

Após as considerações dos alunos perante ao resultado apresentado, os mesmos tiveram acesso a planilha de investimentos com aporte mensal, e foram provocados a refletirem sobre as consequências de um planejamento para o futuro (a longo prazo), objetivando garantir uma renda extra para a aposentadoria ou a realização de um sonho.

Depois de diversas simulações, descreveram as conclusões que vislumbram para o futuro. Alguns dos depoimentos seguem a seguir:

Depoimento 1. *“Parece ser de extrema importância e tem um papel fundamental para me estruturar financeiramente e ter uma vida agradável.”*

Depoimento 2. *“Planejamento a longo prazo é extremamente importante. Me ajudaria muito em situações de emergência e me deixaria financeiramente estabilizado.”*

Depoimento 3. *“Penso que manter o planejamento de acordo com o que foi estabelecido, possivelmente alcançará bons resultados. Um planejamento financeiro a longo prazo é uma ótima maneira de se organizar financeiramente e arquitetar objetivos. Com isso, tenho uma visão talvez um pouco otimista para o futuro.”*

Depoimento 4. *“O planejamento financeiro a longo prazo é de necessidade de todos, pois ajuda a controlar as finanças.”*

Depoimento 5. *“Quero tentar planejar minha estabilidade financeira.”*

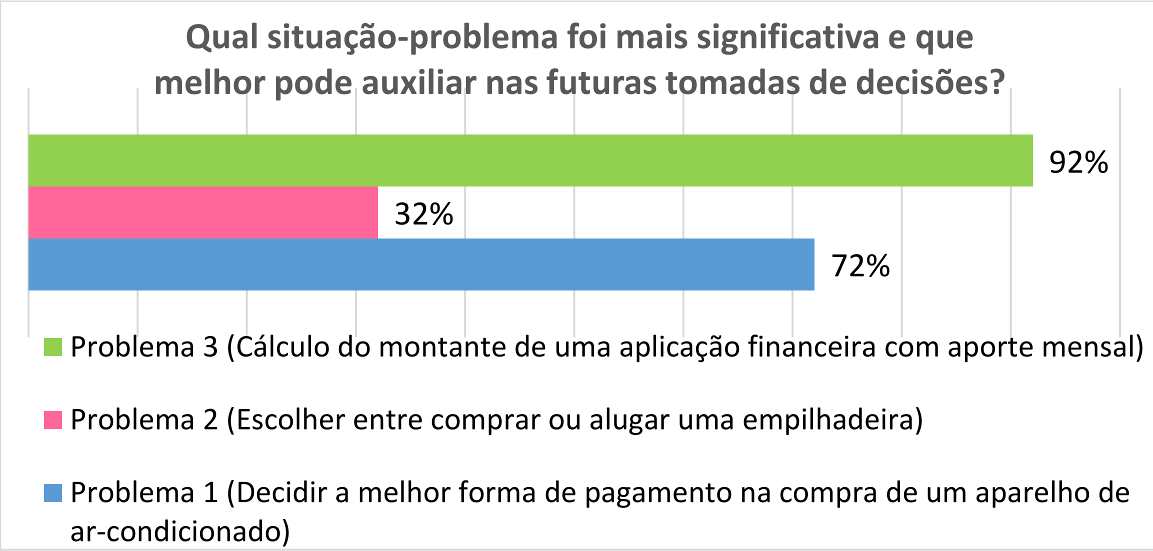
Essas e outras respostas que foram coletadas indicam que a percepção da importância do investimento a longo prazo é positiva. A necessidade de não apenas investir, mas ter educação financeira para persistir no projeto de vida, resultarão em crescimento do patrimônio e renda extra de acordo com o padrão engendrado.

3.7. Considerações

Após a realização dos problemas ao longo do presente capítulo, era fundamental receber feedbacks dos estudantes quanto as impressões que obtiveram depois dos estudos sobre educação financeira e as tomadas de decisões praticadas. Para tal, responderam a um breve questionário final, constituído por quatro perguntas.

Nas duas primeiras, elegeram e justificaram a situação-problema mais significativa, ou seja, com maior relevância no auxílio para tomada de decisões futuras. É oportuno destacar que caso julgassem existir mais de uma escolha, era permitido selecionar todas elas.

Gráfico 36: Situação-problema mais significativa



Fonte: Próprio autor

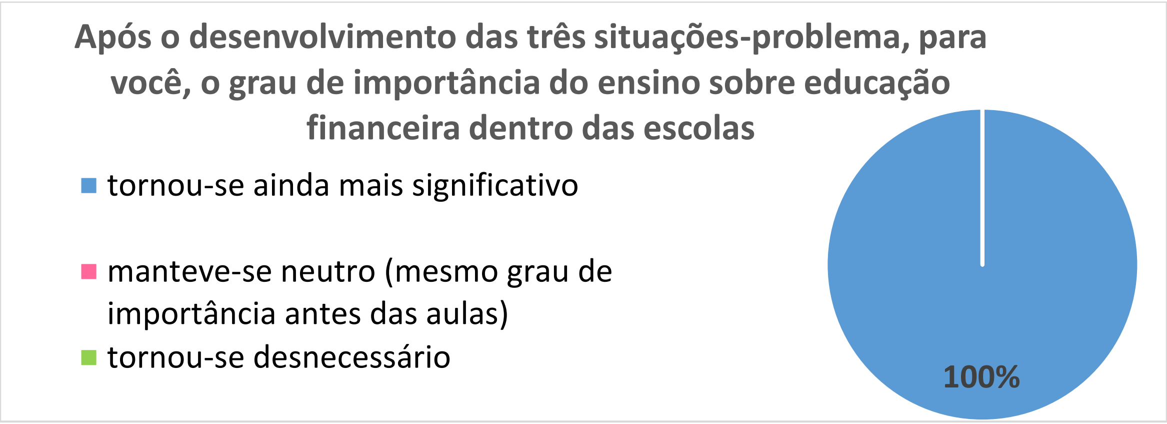
Pela análise gráfica, verificamos que os problemas 1 e 3, referentes a equivalências de capital a fim de comparar situações de pagamentos e investimentos com aporte mensal, respectivamente, foram considerados significantes para a vida deles. Já o problema 2, sobre série de pagamentos e a escolha entre comprar ou alugar algo, foi selecionado por apenas 32% dos jovens.

Variadas justificativas foram apresentadas. O poder do investimento a longo prazo, a importância de consolidar um fundo emergencial para o futuro e uma velhice mais tranquila, maior qualidade de vida e aposentadoria tangeram o problema 3, evidenciando os 92% dos alunos que o consideram de extrema importância.

Também houve diversas justificativas referentes ao primeiro problema, especialmente por se tratar de uma situação corriqueira. Em uma delas, *"percebi que para escolher a melhor forma de pagamento, é preciso pensar em quanto rende o dinheiro caso não seja utilizado naquele momento da compra"* mostra que é indispensável considerar o rendimento mensal do dinheiro para a tomada de decisão.

A terceira pergunta reporta a um comparativo acerca do grau de relevância do ensino sobre educação financeira antes e após as aulas. Todos os estudantes consideraram que o tema se tornou ainda mais significativo para suas vidas.

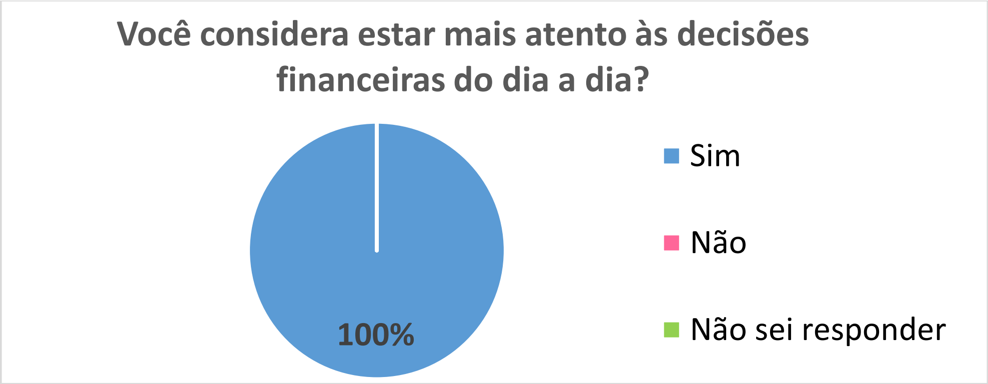
Gráfico 37: Importância do ensino sobre educação financeira



Fonte: Próprio autor

Assim como anteriormente, 100% deles asseguraram estarem mais atentos às escolhas financeiras do dia a dia, e terem adquiridos um melhor poder de decisão.

Gráfico 38: Considera estar mais atento às decisões financeiras?



Fonte: Próprio autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma primeira justificativa para a definição do tema, foi perceber a necessidade de oportunizar aos estudantes conhecimentos matemáticos para efetivarem escolhas financeiras conscientes. Apesar da matriz curricular do ensino médio abranger o estudo de matemática financeira, constantemente, ela fica em segundo plano. Em uma sociedade onde grande parte das pessoas consomem mais do que ganham, e que o diálogo sobre dinheiro dentro das casas ainda é um tabu, a educação financeira se mostra fundamental.

A teoria presente no primeiro capítulo objetivou enriquecer o trabalho. Inicialmente, com os estudos das progressões aritméticas e geométricas necessários às sequentes aplicações nas fórmulas de juros simples e compostos, e depois, com o aprofundamento de conteúdos normalmente não desenvolvidos no ensino médio, mas que foram necessários na abordagem e justificativa das situações-problema apresentadas no último capítulo.

Para conhecer a realidade financeira que vivem os estudantes e seus familiares, os mesmos responderam a questionários sobre o tema. Nos resultados obtidos, podemos perceber grande interesse no assunto. Vale destacar que quase todos os interrogados acreditam que a escola pode atuar como influência positiva no processo de aprendizagem do gerenciamento do dinheiro. Em contrapartida, a pesquisa mostra que há pouco planejamento orçamentário nas famílias, e como consequência, gera-se pouca economia e quase nenhum investimento. Outra constatação pesarosa foi a privação dos gastos com lazer. Os hábitos de consumo se concentraram em alimentação e moradia, não por opção, mas pela baixa renda e falta de planejamento financeiro, já citado anteriormente.

Para as tomada de decisões, os dois primeiros problemas exprimiram propostas semelhantes, de oferecer acontecimentos reais do cotidiano dos estudantes, como estímulo para a resolução dos exercícios na busca da opção mais vantajosa. O interesse dos jovens sobre educação financeira foi fundamental para a coleta dos resultados, que mesmo com aulas remotas, contou com grande envolvimento dos mesmos.

Analisando as decisões tomadas, fez-se perceptível a deficiência dos conceitos matemáticos, mas também, a fragilidade na leitura e cognição de texto, na medida que as respostas apresentaram muitos erros estruturais, de cálculos elementares e ausência de informações contidas no enunciado. Logo, é importante um bom trabalho pedagógico, multidisciplinar, para edificar a compreensão dos problemas e enriquecer o seu desenvolvimento.

A terceira proposta atingiu uma ampla aceitação. Os alunos se deslumbraram com o poder dos juros compostos a longo prazo, e com a disponibilização da planilha de investimentos com aporte mensal (em Excel), puderam manipulá-la e entender que um planejamento financeiro eficiente transforma vidas e realiza sonhos.

Conclusivamente, os resultados mostraram-se satisfatórios, visto que foi proporcionada uma matemática mais aprofundada, porém essencial, para entender as oportunidades do mercado, também pelo envolvimento das famílias no contexto econômico, e em razão dos alunos afirmarem sentir-se mais atentos às futuras decisões financeiras que a serem tomadas.

REFERÊNCIAS

[1] MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira**. Coleção do Professor de Matemática – 6 ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[2] TAHAN, MALBA. **O Homem que Calculava** – 84 ed. – Rio de Janeiro: Record, p. 114 – 124, 2013.

[3] PAIVA, M. **Matemática Paiva** – 3 ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

[4] LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**, Volume 2. Coleção do Professor de Matemática – 6 ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] CNC: Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo. **Cai o número de brasileiros endividados no primeiro mês de 2020**. 02/05/2020. Disponível em: <http://cnc.org.br/editorias/economia/noticias/cai-o-numero-de-brasileiros-endividados-no-primeiro-mes-de-2020>. Acesso em: 19 jun. 2020

[6] SERASA EXPERIAN. **Inadimplência aumenta 2,6% em janeiro, segundo Serasa Experian**. 12/03/2020. Disponível em: <https://www.serasaexperian.com.br/sala-de-imprensa/inadimplencia-aumenta-26-em-janeiro-segundo-serasa-experian>. Acesso em: 28 ago. 2020

[7] EXPONENCIAL. **Cheque especial: o que é, como funciona e como calcular os juros**. 25/09/2019. Disponível em: <https://www.creditas.com/exponencial/como-funciona-cheque-especial>. Acesso em: 29 ago. 2020

[8] G1: Jornal Nacional. **Brasileiro gasta mais de 70% da renda com habitação, transporte e comida**. 04/10/2019. Disponível em: <https://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2019/10/04/brasileiro-gasta-mais-de-70percent-da-renda-com-habitacao-transporte-e-comida.ghtml>. Acesso em: 29 ago. 2020

[9] BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 14 out. 2020

[10] CERBASI, Gustavo. **Investimentos Inteligentes** [recurso eletrônico] – Rio de Janeiro: Sextante, 2013.