UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE POS GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

ANDERSON LEANDRO MARQUES

EXPONENCIAL E LOGARÍTMO: Aplicação utilizando notas musicais

Três Lagoas - MS

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE POS GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

ANDERSON LEANDRO MARQUES

EXPONENCIAL E LOGARÍTMO: Aplicação utilizando notas musicais

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes Da Silva.

Três Lagoas - MS

2020

Serviço Público Federal

Ministério da Educação

Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

EXPONENCIAL E LOGARÍTMO: Aplicação utilizando notas musicais.

por

ANDERSON LEANDRO MARQUES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes Da Silva (Orientador)

UFMS/CPTL

Prof. Dr. Renato César da Silva

UFMS/CPTL

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

FCT/UNESP

Dezembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, o Grande Arquiteto do Universo, que em sua infinita bondade deu-me forças, saúde, sabedoria, paciência, coragem, condições físicas, materiais e emocionais para que chegasse até aqui e concluísse mais esta etapa de meus estudos.

Agradeço a minha mãe Maria e meu pai Severino, que desde o início da minha vida escolar fizeram de tudo para que tivesse uma boa educação e ao meu irmão Helton que sempre me apoiou.

Minha esposa Ângela, meus filhos Enzo e Sofia, que me apoiaram, deram forças para vencer as dificuldades e suportaram a minha ausência em diversos momentos durante o Mestrado. Sem a menor dúvida, foi este um ato de amor incondicional.

Quero agradecer os meus amigos de mestrado, Eduardo, Ronaldo Dias, João Santista e Fabio Maia (*in memórian)* que me deram muita força em um momento difícil que por motivos de saúde. Não consegui concluir o curso junto a eles.

No decorrer do curso, ganhei na UFMS novos amigos, companheiros de estudos, de viagens, muito obrigado Cecília, Camila, Tiago e Fernanda.

Também a minha grande amiga e companheira de muitos anos de trabalho, Professora Císntia, em seu precioso auxilio na correção ortográfica.

Não menos importante, estão os grandes educadores da UFMS Três Lagoas, sempre nos olhando como estudantes, professores de nível médio que ali estavam buscando mais conhecimento.

E deixo registrada aqui minha gratidão plena ao meu orientador, Dr. Vitor, (grande Vitão). Valeu todo seu empenho e dedicação ao meu trabalho.

MARQUES, Anderson L. **Exponencial e Logaritmo:** Aplicação utilizando notas musicais. 2020. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, 2020.

RESUMO

O ensino de alguns conteúdos matemáticos tem desafiado os educadores a encontrarem estratégias que atinjam objetivos e despertem a curiosidade dos educandos, mostrando que todos os conteúdos apresentam relações com o cotidiano. Neste trabalho, o objetivo foi procurar condensar exponencial e logaritmo, apresentando propriedades de potências, exponencial e logaritmo com suas respectivas demonstrações, bem como suas equações, inequações, funções, parte histórica e uma aplicação nas notas musicais e na construção de instrumentos musicais com cordas e trastes. A Metodologia pautou-se em demonstrações concretas dos instrumentos musicais, explicações próprias do pesquisador, acessos à internet e à bibliografia contida nos livros didáticos, utilizando-se autores matemáticos conhecidos.

Palavras- chave: Exponencial. Logaritmo. Napier. Música.

ABSTRACT

The teaching of some mathematical content has challenged educators to find the approach which achieves objectives and arouses the students' curiosity, showing that all contents have relations with the everyday living. In this project, the objective was to seek to condense exponential and logarithm, power properties, exponential and logarithm with their accounts, as well as their equations, inequations, functions, historical part and an application in musical notes and in the construction of musical instruments with strings and tastes. The Methodology was based on concrete operations of musical instruments, specific explanations to the researcher, access to the internet and the bibliography contained in textbooks, using well-known mathematical authors.

Keywords: Exponential. Logarithm. Napier. Music.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

A dissertação é bibliográfica realizada de forma qualitativa e em seu bojo encontram-se algumas abordagens quantitativas nos conceitos e objetos de estudo. Configura-se inclusive como uma *pesquisa-ação,* pois inclui a minha participação nas explicações pertinentes aos conteúdos em conjunto com os autores envolvidos na situação-problema pesquisada. Isso possibilita o bom andamento do estudo.

Como preparação para o conteúdo Função Exponenciais, os alunos deverão recordar as propriedades referentes à potenciação, uma vez que é rotineiro um aluno do Ensino Fundamental apresentar dificuldades para lidar com uma grande quantidade de regras que lhe é proposto, devido à falta de maturidade.

Como justificativa para elaboração, vale mencionar que é fundamental no Ensino Médio que se discuta com cuidado as propriedades referentes às potências trabalhadas no Ensino Fundamental, uma vez que será o momento de sanar qualquer lacuna que tenha ficado visto que agora o aluno já terá maturidade suficiente para entendê-las, pois busca-se nesse momento uma preparação do aluno para Teoria dos Exponenciais.

O trabalho tem como Objetivo Geral: propor uma alternativa para a caracterização das funções das funções Exponencial e Logarítmica utilizando o contexto de música.

Já os Objetivos Específicos ficam alicerçados em:

Demonstrar as propriedades das potencias de expoente racional, bem como as propriedades de expoentes inteiros; de expoente racional e irracional;

Caracterizar a função exponencial;

Definir e caracterizar logaritmo e função logarítmica e seus teoremas;

Discorrer sobre a Música abordando Pitágoras e a descoberta das notas nas escalas de Dó;

Demonstrar a Escala temperada e logaritmos;

Promover um entendimento mais profundo ao leitor acerca da relação da viola caipira e os logaritmos;

Esclarecer a utilização dos logaritmos e finalizar expondo os documentos oficiais utilizados na pesquisa.

A pesquisa em forma de dissertação se estrutura em 10 itens a saber:

1 Introdução

2 Propriedades das Potências de Expoente Racional.

3 Função Exponencial

4 Logaritmo

5 Música

6 Utilização dos Logaritmos na Escala Temperada

Anexos

A finalização da dissertação é realizada com a elaboração das Considerações Finais e as Referências bibliográficas utilizadas.

Mesmo com um pouco mais de maturidade, o aluno do primeiro ano do Ensino Médio está na fase de transição, então as demonstrações devem ser apresentadas de maneira clara e significativa aquilo que muitas vezes foi apenas decorado e aplicado de forma mecanicista, em alguns casos até podendo recorrer a exemplos numéricos, pois assim o aluno terá um entendimento das propriedades em questão.

Quando entrar nas propriedades referentes a potências, talvez seja esse o momento fundamental para o completo entendimento dos conceitos de Função Exponencial e principalmente dos Logaritmos, uma vez que esse último é "*taxado",* pela maioria dos alunos, como um conteúdo muito difícil; mas quando se chega próximo ao aluno, é possível entender que os problemas estão na base de seu conhecimento e não nas propriedades apresentadas nas séries iniciais do Ensino Médio.

Tudo depende de como o professor trabalhou as propriedades referentes às potências, se nesse momento o aluno apresentou falha no processo de ensino aprendizagem, deve-se detectar as falhas antes de trabalhar com as funções, pois assim solucionadas, os alunos não apresentarão problemas para aplicá-las em situações que trabalham com expoentes.

Espera-se que o trabalho venha a contribuir no processo de ensino/aprendizagem dos alunos e principalmente, como auxílio no entendimento e desenvolvimento das propriedades para os colegas educadores.

2 PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL.

Ao definir as propriedades de Potência de acordo com LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P ; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A Matemática no Ensino Médio**. Vol 1 e LIMA, E. L. **Logaritmos.** Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

2.1 Tome-se um número real a $(a \in \mathbb{R})$ estritamente positivo e um número natural n $(n \in \mathbb{N})$. Chama-se de potência de base a e expoente n, ou seja, a^n, ao produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fatores};n \geq 2$$

No caso de $n = 1$, como não se tem produto de um só fator, põe-se

$a^1 = a.$

2.2 Propriedades das Potências para expoentes inteiros.

Pode-se destacar que algumas propriedades das potências decorrem quase que simplesmente da definição dada no item 2.1.

P_1: Multiplicação de potências de bases iguais.

Exemplos: $5^4 \cdot 5^6 = \left(\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\ fatores}\right) \cdot \left(\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6\ fatores}\right) = 5^{4+6} = 5^{10}$

$$P_1: a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

P_2: Potência de Potência.

Exemplo: $(5^2)^3 = \underbrace{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2}_{3\ fatores} = 5^{2+2+2} = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$

Considerando válida a propriedade P_1, pode-se aplicá-la para o caso:

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdot a^{n_3} \cdot \ldots \cdot a^{n_m} = a^{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_m}$$

Em caso particular onde $n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = n_m$, tem-se:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m = n \cdot m$$

$$P_2: (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

P_3: Multiplicação de Potências com bases diferentes.

Exemplo: $(2 \cdot 5)^4 = \underbrace{[(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5)]}_{4\ fatores} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\ fatores} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4\ fatores} = 2^4 \cdot 5^4$

Calcule, agora, $(a \cdot b)^n$. Pela definição de potência, tem-se $(a \cdot b)$ está se repetindo n vezes, logo:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n\ fatores}$$

Pela propriedade de comutatividade no corpo dos reais, temos que a ordem dos fatores a e b não altera o produto, verifica-se que o produto acima pode ser escrito da seguinte forma $(a \cdot b)^n = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b) = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b$, com cada fator que se repete n vezes e utilizando novamente as propriedades das potências, tem-se:

$$P_3: (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

P_4: Divisão de Potências com bases diferentes

Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{4\ fatores} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$

Calculem $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, com $b \neq 0$ tendo como base a definição de potenciação. Tem-se que $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ indica que a base $\frac{a}{b}$ esta se repetindo n vezes, logo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\ fatores}$$

Pela propriedade da multiplicação de números racionais na forma fracionária, pode-se escrever o produto acima da seguinte forma $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}$, pela definição das potências é possível simplificar a igualdade e assim obter:

$$P_4: \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

P_5: Divisão de Potências de mesma base

Exemplo: $\frac{3^5}{3^3} = \frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{5\ fatores}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3\ fatores}} = 3 \cdot 3 = 3^2$. Vamos considerar $\frac{a^m}{a^n}$ nas seguintes condições:

1º Caso: Base $a \neq 0$ e expoentes $m > n$, então:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ fatores}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fatores}}$$

O fator a está se repetindo m *vezes* no numerador e n *vezes* no denominador, como $m > n$, tem-se então $m - n$ fatores restantes no numerador, então:

$$P_5: \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

2º Caso: Base $a \neq 0$ e expoentes $m = n$, utilizando P_5 tem-se:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Porém, ao utilizar a definição de potência, tem-se:

$$\frac{a^m}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ fatores}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ fatores}}$$

Como o fator a está se repetindo m *vezes* no numerador e também no denominador, tem-se:

$$\frac{a^m}{a^m} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} = 1$$

Logo:

$$a^0 = 1$$

2.3 Demonstração das propriedades das potências usando Princípio de Indução Finita.

> O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais. (LIMA, 2006)

Sejam $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$, nota-se que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ usando Princípio de Indução Finita.

Para $n = 1$

$$a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$$

Comprova-se, assim, a validade da propriedade. Supondo a validade para um n, deve-se provar para $n + 1$.

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^{m+n+1}$$

Demonstração

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a^1)$$

Pela propriedade associativa do produto, tem-se:

$$= (a^m \cdot a^n) \cdot a^1$$

Usando a definição, tem-se:

$$= a^{m+n} \cdot a^1$$

$$= a^{m+n+1}$$

Pelo Princípio de Indução Finita, prova-se P_1, pois observa-se que

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Sejam $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$, comprova-se que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ usando Princípio de Indução Finita.

Para $n = 1$, tem-se:

$$(a^m)^1 = a^{m \cdot 1} = a^m$$

Mostrando assim a validade da definição.

Supondo válida para um n, deve-se mostrar a validade para $n + 1$, no caso:

$$(a^m)^{n+1} = a^{m \cdot (n+1)}$$

Demonstração:

Para demonstrar a propriedade P_2, recorre-se à propriedade P_1, já demostrada, logo: $(a^m)^{n+1}$, como $(a^m)^n \cdot (a^m)^1$, como $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, por hipótese, e $(a^m)^1 = a^m$, tem-se:

$$(a^m)^{n+1} = a^{m \cdot n + m} = a^{m \cdot (n+1)}$$

Pelo Princípio de Indução Finita tem-se $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Sejam $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$, verifica-se que $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ usando Princípio de Indução Finita.

Para $n = 1$, tem-se: $a^1 \cdot b^1 = (a \cdot b)^1$

Mostrando assim a validade da propriedade para $n = 1$. Supondo válida para um n, deve-se mostrar sua validade para $n + 1$, logo:

$$a^{n+1} \cdot b^{n+1} = (a \cdot b)^{n+1}$$

Demonstração:

Novamente recorre-se a propriedade P_1, pois assim, pode-se escrever $a^{n+1} \cdot b^{n+1}$ na forma $a^n \cdot a^1 \cdot b^n \cdot b^1$, aplicando a propriedade associativa da multiplicação, tem-se $(a^n \cdot b^n) \cdot (a^1 \cdot b^1)$, pela hipótese, tem-se $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, logo:

$$(a^n \cdot b^n) \cdot (a^1 \cdot b^1) = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b)^1 = (a \cdot b)^{n+1}$$

Pelo Princípio de Indução Finita, tem-se $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Sejam $a \in A - \{0\}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, verifica-se que $a^m : a^n = a^{m-n}$ usando Princípio de Indução Finita.

Para $n + 1$, tem-se:

$$\frac{a^m}{a^1} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ vezes}}}{a}$$

Como o numerador da fração possui m fatores a e no denominador, tem-se um fator a, pode-se simplificar ambos por a restando assim, $m + 1$ fatores a no numerador, logo:

$$\frac{a^m}{a^1} = \frac{a^{m-1}}{1} = a^{m-1}$$

Comprova-se assim a validade da propriedade P_2 para $n = 1$. Supondo válida para um n, deve-se mostrar sua validade para $n + 1$, ou seja:

$$\frac{a^m}{a^{n+1}} = a^{m-(n+1)} = a^{m-n-1}$$

Demonstração:

$$\frac{a^m}{a^{n+1}} = \frac{a^m}{a^{n+1}} = \frac{a^m}{a^n \cdot a^1} = \frac{a^{m-1}}{a^n}$$

Novamente simplificando numerador e denominador por n termos a, obtém-se:

$$\frac{a^{m-1}}{a^n} = a^{m-1-(n)} = a^{m-n-1}$$

Pelo Princípio de Indução Finita, tem-se que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Agora, observe um caso em que o expoente apresenta um sinal negativo, ou seja, a^{-n}, para tanto, vale-se de propriedades já demonstradas, no caso, P_1: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e P_5: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Tomando $n = 1$, tem-se:

$a^1 \cdot a^{-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$, sugerindo assim, por P_5, que $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$.

Supondo a validade para um n, comprova-se a validade para um $n + 1$, logo:

$$\begin{aligned} a^{n+1} \cdot a^{-(n+1)} &= a^{n+1} \cdot a^{-n-1} \\ &= a^n \cdot a^1 \cdot a^{-n} \cdot a^{-1} \\ &= a^n \cdot a^{-n} \cdot a^1 \cdot a^{-1} \\ &= a^{n-n} \cdot a^{1-1} \\ &= a^0 \cdot a^0 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sugerindo, assim, que $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$ e que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, pelo Principio de Indução Finita, tem-se que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Tais propriedades devem ser trabalhadas com os alunos de forma mais significativa. O Princípio de Indução Finita é um *belo* mecanismo, mas não deve ser apresentado para alunos do Ensino Fundamental II e, aos alunos do Ensino Médio, caso algum professor acredite que eles sejam capazes de entender, seria muito gratificante ensiná-lo.

Alunos que participam da Olimpíada Brasileira de Matemática Das Escolas Públicas (OBMEP) têm a oportunidade de serem apresentados a essa bela ferramenta que é o Princípio de Indução Finita.

Uma pena que são poucos que têm esse privilégio, pois a maioria trata a OBMEP como mais uma prova, concurso e os gestores acreditam que só o conhecimento prévio do aluno é suficiente para a realização do desafio. No entanto, esquecem que se trata de uma olímpiada e nossos atletas-matemáticos necessitam de treinamento adequado, incentivo por parte da instituição educacional, uma família presente no processo e também de professores capacitados para tal.

A OBMEP – Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas, criada em 2005, é um projeto realizado pelo IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada com apoio da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, e subsidiado com recursos do ministério da Educação e do Ministério de Ciências, tecnologias, Inovações e Comunicação, sendo um projeto de âmbito nacional destinado as escolas públicas e também as escolas particulares. Tendo com um de seus objetivos contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.

Para ajudar a atingir seus objetivos, a OBMEP dá acesso e oportunidades para que seus alunos medalhistas possam participar de alguns programas, como o Programa de Iniciação Científica JR (PIC), onde o aluno terá acesso a aulas de matemática avançada por um ano em Universidades Federais, além de uma bolsa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Sendo o Princípio de Indução Finita um dos assuntos abordados no curso. Entre o material de apoio está a apostila 4, intitulada *Indução Matemática.*

Também é oferecido um programa chamado POTI – Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Um programa destinado a alunos interessados em se preparar para as provas da OBMEP e para a OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática.

O programa é destinado para cursos de Treinamento Intensivo voltados para competições de matemática. A finalidade principal dessa iniciativa é melhorar o desempenho dos alunos nas olimpíadas OBMEP e OBM. O curso poderá ser presencial em polos distribuídos por todo Brasil. No caso dos alunos região de Birigui, os polos mais próximos são Andradina a 126 km de distância ou Presidente Prudente a 165 km. Mas, é oferecido o POTI Virtual, destinado aos alunos interessados no programa e que não possam participar do POTI Presencial. No caso virtual, não há limite para quantidade de alunos e não é emitido certificação pela participação.

2.4 Potência de expoente Racional e Irracional

No *Caderno do Professor,* 1ª Série do Ensino Médio, Vol. 2, criado pelo *Programa São Paulo Faz Escola,* em apresentação didático-pedagógica propõe alguns fatores fundamentais sobre potência. A tabela 1, supõe que em um país X a produção de alimentos foi de uma tonelada no final do ano 2000, mas, com incentivos econômicos essa produção passou a triplicar anualmente a partir daquele momento.

ANO	**PRODUÇÃO P EM TONELADAS**	**POTÊNCIA CORRESPONDENTE**
2000	1	3^0
2001	3	3^1
2002	9	3^2
. . .	. . .	. . .
2015	14 384 907	3^{15}
2000+n		3^n

Tabela 1: Produção de Alimentos

Pela tabela, facilmente observa-se que a regularidade da multiplicação pelo fator 3 a cada ano, faz com que naturalmente apareça uma forma mais simples para representar tais valores, no caso uma potência de base 3. Quando são passados n anos após 2000, tem-se 2000+n, logo o valor da produção P passa a ser representada por 3^n toneladas. Com base na tabela, o Caderno do Professor propõe a seguinte atividade:

Tomando a situação descrita pela tabela apresentada, como você representaria a produção P do país X meio ano após o início da produção? E quatro anos e três meses após o início do processo?

Como resolução, o Caderno do Professor propõe:

Calcular $3^{0,5}$*, por exemplo, significa estimar a produção do alimento na metade do ano de 2001, ou seja, 0,5 ano após o momento em que a produção começou a triplicar ano a ano. Uma interpretação natural para* $3^{0,5}$*, portanto, foi a seguinte:*

- *Como se espera que* $3^{0,5} \cdot 3^{0,5}$ *seja igual* $3^{0,5+0,5}$*, ou seja,* 3^1*, segue daí que* $3^{0,5}$ *é uma nova maneira de escrever* $\sqrt{3}$*, ou seja,* $3^{0,5} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1}$ *ou simplesmente* $\sqrt{3}$.
- *Dessa maneira,* $3^{1,5}$*representa a produção no meio do ano entre 2001 e 2002, e teríamos:* $3^{1,5} = 3^{\frac{3}{2}} = 3^1 \cdot 3^{0,5} = 3 \cdot \sqrt{3}$.

De forma análoga ao procedimento realizado para $a^{\frac{1}{n}}$, sendo **n** natural e a>0, resulta que: $\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n\ fatores\ igauis} = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^1$, ou seja, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. De modo geral, considerando a potência $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, a \in \mathbb{R}|a > 0.$

- Na tabela apresentada anteriormente, por exemplo, para calcular o valor da produção de 4,25 anos, ou seja, quatro anos e três meses após o início do processo, tem-se:

$$P = 3^{4,25} = 3^{\frac{17}{4}} = \sqrt[4]{3^{17}} \cong 106,60$$

Toneladas (usando-se uma calculadora científica).

Para completar esse percurso com as potências, foi mostrado que é possível calcular os valores de 3^x mesmo que x seja um número racional. Considere, por exemplo, o caso em que x = $\sqrt{2}$. Como se pode interpretar a potência $3^{\sqrt{2}}$?

Naturalmente, qualquer número irracional, como $\sqrt{2}$, pode ser aproximado, por falta ou por excesso, a um número racional, e a aproximação sempre pode ser aprimorada, o quanto se desejar. O resultado de $3^{\sqrt{2}}$ será tratado em Função Exponencial.

3 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Ao definir a Função Exponencial de acordo com Lima (2006,v.1).

Seja *a* um número real estritamente positivo e sempre diferente de 1. A função exponencial de base *a* tem como domínio o conjunto dos números reais, já sua imagem será um número estritamente positivo, ou seja, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, onde devem ser válidas as propriedades a seguir para quaisquer $x, f(x) \in \mathbb{R}$:

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii) $a^1 = a$

iii) $a^x > a^y \leftrightarrow \begin{cases} x > y \; quando \; a > 1 \\ x < y \; quando \; 0 < a < 1 \end{cases}$

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades acima, isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Partindo da notação, $f(x) = a^x$, temos:

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Tomando um $y = k$, onde $k \in \mathbb{R}$, admitindo que exista um $f(k) = 0$, tem-se para todos os reais que:

$$f(x) = f[x + (k-k)]$$
$$f(x) = f[k + (x-k)]$$
$$f(x) = f(k) \cdot f(x-k)$$
$$f(x) = 0 \cdot f(x-k)$$
$$f(x) = 0$$

logo, será identicamente nula.

Mas, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade i) e não é identicamente nula então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Assim (diante da propriedade i) pode-se tratar o contradomínio de f como $\mathbb{R}$ ou como $\mathbb{R}^+$. A vantagem de tratar o contradomínio de f como $\mathbb{R}^+$ é que assim, ela será sobrejetiva.

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite as propriedades i) e ii), então tem-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$f(n) = f\left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\,parcelas}\right) = \underbrace{f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)\cdot \ldots \cdot f(1)}_{n\,fatores} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a = a^n}_{n\,fatores}$$

Usando a propriedade i), resulta daí, como mostrado anteriormente, que, para todo número racional $r = m/n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, deve-se ter

$$f(r) = a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

O que resulta que $f(r) = a^r$ é a única função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r)\cdot f(s)$, para quaisques $r,\ s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

Na propriedade iii) tem-se que a função exponencial deve ser crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, o que resultará em uma única maneira de definir o valor de $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Considerando no momento, $a > 1$, então a^x tem as seguintes propriedades:

$r < x < s$, como $r,\ s \in \mathbb{Q}$, implica em que $a^r < a^x < a^s$, ou seja, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são a^r com $r < x,\ r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s com $x < s,\ s \in \mathbb{Q}$, o que diz que não podem existir dois números diferentes por exemplo um $A < B$, com a propriedade acima. Caso existam tais números, tem-se, $r < x < s$, como $r,\ s \in \mathbb{Q}$, o que implica em que $a^r < A < B < a^s$, e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional.

Portanto, quando x é irracional, tem-se a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências de a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências de a^s, com s racional e menor que x.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, pelas verificações as propriedades i), ii) e iii) tem-se:

iv) *A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*

Em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$;

Mais precisamente: se $a > 1$ então a^x cresce sem limite e quando $x > 0$ é muito grande.

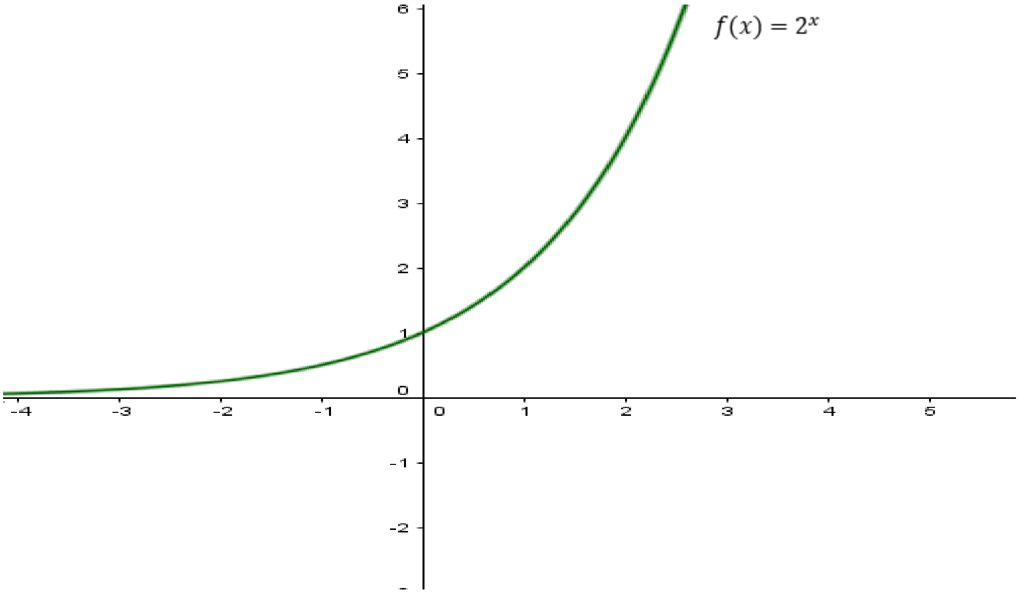


Gráfico 1: Função Exponencial $f(x) = 2^x$

E se $0 < a < 1$, então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$.

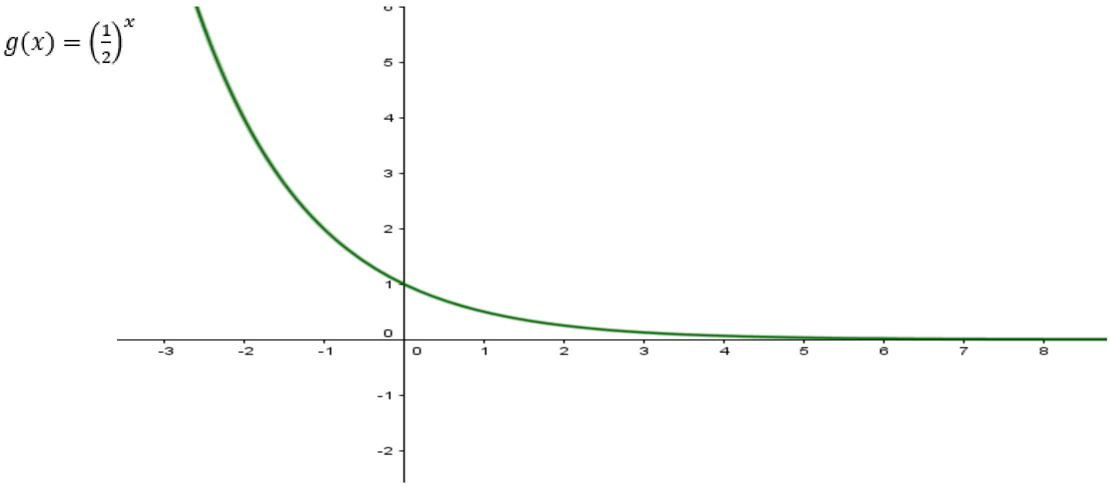


Gráfico 2: Função Exponencial $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.1 A função exponencial é contínua.

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, com x_0 fixo, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto necessário, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Pode-se tratar de tal forma, usando a linguagem de limites, ou seja: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}, em outra simbologia: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, ou seja, escreve-se:

$x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0+h} - a^{x_0}| = |a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}| = a^{x_0} \cdot |a^h - 1|$, podendo assim tornar tão próximo de 1 quando desejar-se, desde que se tome h suficientemente pequeno.

Como a^{x_0} é constante, pode-se fazer o produto $a^{x_0} \cdot |a^h - 1|$ tão pequeno quanto for necessário, logo $\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

v) *A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.*

Com esta informação, temos que todo número real positivo é uma potência de a e para todo número real $b > 0$, existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Para provar, vamos tomar $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$, de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$, portanto $\lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$.

Tomando agora, $a > 1$ e escolhendo as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que $a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b$. Certamente, pode-se dizer que $r_1 < r_2$, $r_2 < r_3, \ldots$, $r_n < \cdots < s$. Assim, os termos r_n formam uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^{r_n} = x$. A função exponencial, sendo contínua, tem-se então $a^x = \lim_{x \to x_0} a^{r_n} = b$, como foi possível demostrar.

Confirma-se que para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}\, e\, \mathbb{R}^+$, crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produto, isto é:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

A injetividade da função $x \to x_o$ decorre da sua monotonicidade.

Exemplo: Para $a > 1$:

$x > y \Rightarrow a^x > a^y$

e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$

portanto, $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.

Pode-se ainda representar tal fato, da seguinte forma:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad se \quad a > 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad se \quad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad se \quad a > 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad se\ 0 < a < 1$$

As figuras abaixo exibem os gráficos das funções $f(x) = a^x$ para $a > 1$ e $g(x) = a^x$ no caso em que $0 < a < 1$.

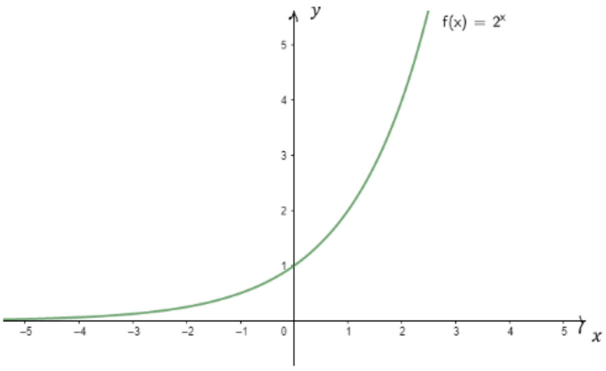


Gráfico 3: $f(x) = 2^x$

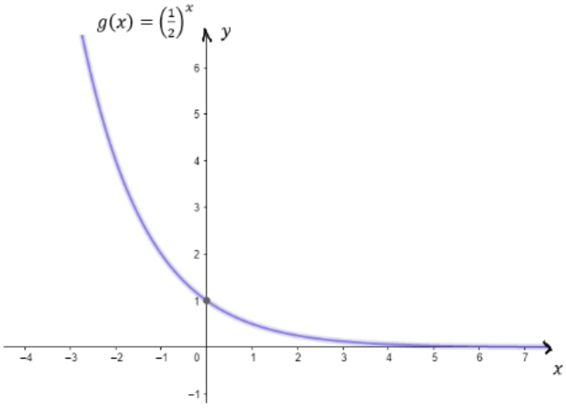
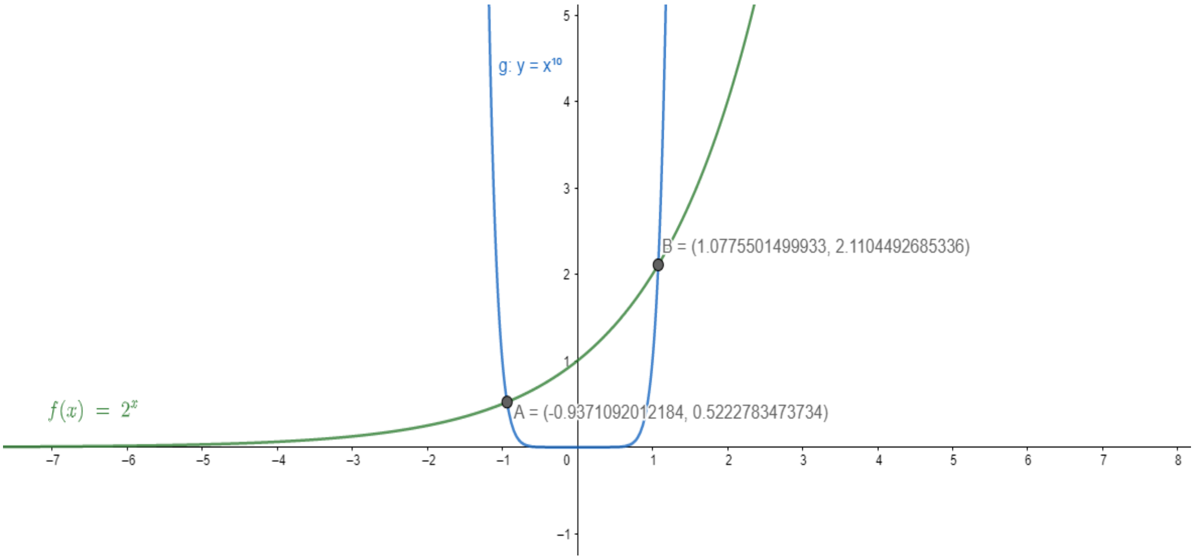


Gráfico 4: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Quando $a > 1$, no caso, a função f, nota-se que quando x varia da esquerda para direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento lento quando x é negativo, mas a medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado, isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase vertical.

O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Se for comparado o gráfico de $f(x) = 2^x$, ao de $g(x) = x^{10}$, vê-se que, para $-0{,}937 < x < 1{,}077$, tem-se $x^{10} < 2^x$, para $1{,}077 < x < 58{,}77$, tem-se $x^{10} > 2^x$ e, para todo $x > 58{,}77$ tem-se que $2^x > x^{10}$.



Gráficos 5: Funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^{10}$

3.2 Caracterização da Função Exponencial

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas aplicados a alunos do Ensino Fundamental, tanto no ciclo I quanto no ciclo II, e em uma quantidade menor, mas não menos significativa, com grande relevância, nos três anos do Ensino Médio.

As funções quadráticas já aparecem em problemas nos últimos anos do Ensino Fundamental – ciclo II – 9º Ano, mas as funções exponenciais aparecem apenas no Ensino Médio.

Quanto aos alunos do Ensino Médio, é válido mencionar que as dificuldades aparecem no momento da tomada de decisão quanto a que função o exercício – situação problema – se refere, ou seja, qual modelo matemático ele terá que usar na resolução dos problemas propostos.

As aulas são sempre separadas por tópicos para que os alunos trabalhem cada situação problema de forma isolada. Os livros didáticos estão sempre separados por tópicos, assim o aluno aprende função afim, quadrática, exponencial e logarítmica de forma isolada; quando submetido a uma prova, como SARESP, ENEM e alguns outros vestibulares, surge o problema de qual modelo matemático seguir.

Para melhorar, e até mesmo solucionar essa problemática, a peça chave é o professor, já que ele, após o trabalho das funções, deverá proporcionar ao seu público alvo a diferenciação entre as funções e trabalhar com exemplos para que seu público possa distinguir qual o modelo indicado para cada problema. Uma outra opção é a caracterização das funções.

Teorema (1): Para caracterizar a função exponencial partam do seguinte fato: *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ *uma função monótona (se refere a funções crescentes e decrescentes). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ $para\ todo\ n \in \mathbb{Z}\ e\ todo\ x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ $para\ todo\ x \in \mathbb{R},\ onde\ a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ $para\ quaisquer\ x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Prova-se as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

- $(1) \Rightarrow (2)$

Observando inicialmente a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$ $(com\ m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{N}^*)$ tem-se $f(nx) = f(x)^n$. Como $nr = m$, pode-se escrever:

$$f(r \cdot x)^n = f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) = f(x)^m$$

Logo,

$$f(r \cdot x) = f(x)^{\frac{m}{n}}$$

Assim, se $f(1) = a$, se tem:

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r \ \ para\ todo\ r \in \mathbb{Q}.$$

Suponha agora que f seja crescente, logo $1 = f(x) < f(1) < a^x$. Por exemplo, (o mesmo aconteceria para $f(x) > a^x$) e sabendo que existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$ e como f é crescente, tem-se $f(x) < f(r)$ concluindo então que $r < x$. Com esta contradição completa-se a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$.

- $(2) \Rightarrow (3)$

Tomemos $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, onde $f(1) = a$. Assim, $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$.

- $(3) \Rightarrow (1)$

Tomando agora $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, temos:
$f(n \cdot x) = f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)$, com o produtos tendo n parcelas, consequentemente $f(n \cdot x) = f(x)^n$. Sabemos que $f(0) = 0$ ou $f(0) \neq 0$. Se $f(0) = 0$, teríamos:
$f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0) = 0$ e a função f não seria monótona. Logo $f(0) \neq 0$. Como esse dado, temos $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$ e daí $f(0) = 1$. Dessa forma, $f(0 \cdot x) = f(0) = 1 = f(x)^0$, o que mostra (1) para $n = 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Devemos notar que $1 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x)^{-1}$. No caso em que $n \in \mathbb{N}$, $n < 0$, podemos escrever $f(n \cdot x) = f(-n \cdot x)^{-1} = [f(x)^{-n}]^{-1} = f(x)^n$. Com isso concluímos a demonstração.

Pode-se enunciar o Teorema da Caracterização da Função Exponencial substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que f seja contínua. A demonstração do passo $(1) \Rightarrow (2)$ muda apenas no caso x irracional, ou seja, $x = \lim_{n\to\infty} r_n = r_n,\ r_n \in \mathbb{Q}$, logo, pela continuidade de f, deve ser:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x.$$

Afirma-se que uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente. Se a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é do tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{b \cdot a^{(x+h)} - g(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{b \cdot a^x \cdot a^h - g(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{g(x) \cdot a^h - g(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{g(x) \cdot (a^h - 1)}{g(x)} = a^h - 1$$

e

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{b \cdot a^{(x+h)}}{g(x)} = \frac{b \cdot a^x \cdot a^h}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot a^h}{g(x)} = a^h$$

Dependendo apenas do h, mas não de x. Mostra-se agora que vale a recíproca.

3.2 Caracterização da função tipo exponencial

Teorema (2): Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função monótona injetiva, tal que, para* $x, h \in \mathbb{R}$ *quaisquer, o acréscimo relativo* $[g(x+h) - g(x)]/g(x)$ *dependa apenas de* h*, mas não de* x*. Então, se* $b = g(0)$ *e* $a = g(1)/g(0)$*, tem-se* $g(x) = b \cdot a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Caso o leitor tenha mais curiosidade, as demonstrações dos teoremas da caracterização da Função do Tipo Exponencial encontram-se em Lima (2006, v.1).

Apresentadas as propriedades das potências, a definição, as propriedades e caracterização dos exponenciais já se encontram aptos para os estudos dos logaritmos. Tais revisões foram feitas, pois a maioria dos livros didáticos definem logaritmo como um expoente, porém, há que se tomar alguns cuidados.

Como relata Lima (1996, p.12) sobre a necessidade de tal revisão, isso se justifica porque não se utilizam apenas os números naturais como expoentes e sim os reais, pois com a criação dos logaritmos pode-se conseguir a aproximação de qualquer número real positivo através de uma potência, lembrando que o expoente da mesma é um número racional.

Foi utilizado em seu estudo, bases reais positivas pois, para bases reais negativas e expoente racional, tem-se os casos de raízes de números negativos e índice par, o que traria confusão e muitas exceções.

4 LOGARITMO

Após revisadas todas as propriedades acima, pode-se definir logaritmos tendo como base LIMA (2006, V.1) da seguinte forma:

4.1 Definição: Dados os números reais $0 < a \neq 1$ e $0 < x$, os logaritmos de x na base a denotam-se por $\log_a x$ será um valor y, tal que:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Da definição de logaritmo pode-se determinar suas propriedades. Considere os seguintes logaritmos:

i) $\log_a m = x \Leftrightarrow a^x = m$

ii) $\log_a n = y \Leftrightarrow a^y = n$

iii) $\log_a(m \cdot n) = z \Leftrightarrow a^z = m \cdot n$

Substituindo i) e ii) em iii), tem-se:

$$a^z = a^x \cdot a^y$$

$$a^z = a^{x+y}$$

$$z = x + z$$

Ou seja,

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Provavelmente esta propriedade que transforma produtos em soma foi a motivação original para Napier caracterizar as funções logarítmicas. Mas ao calcular $\log_{10} 3$ não se encontraria um número racional como resposta, pois denotando o resultado $\log_{10} 3 = y$, tem-se $10^y = 3$. Então, se y for um número racional, pode-se escrever $y = \frac{p}{q}$ e obter $10^{\frac{p}{q}} = 3 \Rightarrow 10^p = 3^q$, o que seria um ABSURDO, pois $10^p = 1\underbrace{0000 \dots 0}_{p\ zeros}$ e $3^q = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{q\ fatores\ 3}$, não tendo assim os dois números a mesma forma, então y é um número irracional.

A grande maioria dos professores, não trabalha potências com expoentes irracionais, um dos fatores pode estar ligado com o público alvo de cada colega professor. Quando se trata de potências de expoentes irracionais, deve-se ter cuidado na abordagem, pois como ficaria $2^{\sqrt{2}}$ por exemplo? Tal valor pode ser calculado, com auxílio de uma calculadora por aproximações, vejam os resultados:

$$2^{1,4} \cong 2{,}63901582$$
$$2^{1,41} \cong 2{,}65737162$$
$$2^{1,414} \cong 2{,}66474945$$
$$2^{1,4142} \cong 2{,}66511908$$
$$2^{1,41421} \cong 2{,}66513756$$
$$2^{1,414213} \cong 2{,}66514310$$
$$2^{1,4142135} \cong 2{,}66514402$$
$$2^{1,41421356} \cong 2{,}66514413$$

Tem-se $2^{\sqrt{2}} \cong 2{,}665144$ e quanto mais próximo de $\sqrt{2}$ o expoente chegar, mais próximo 2^n estará de $2^{\sqrt{2}}$.

4.2 Função Logarítmica

A definição de Função Exponencial terá como base Lima (2006, v.1).

Definição: A função $f^{-1}: Y \to X$ é chamada função inversa da função $f: X \to Y$ quando se tem $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ e $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$ e f^{-1} se, somente se, f é inversa de f^{-1}.

Como foi visto anteriormente, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$, portanto possui uma função inversa, que é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, com a seguinte propriedade, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Portanto, tomando como inversa da função exponencial f a função: $\log_a x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado de *logaritmos* de x na base a, ou seja, $\log_a(x) = \log_a x$. Por definição de função inversa, deve-se ter:

$$\log_a(a)^x = x \ e \ a^{\log_a x} = x$$

Assim, $\log_a y$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para se obter o número y, ou seja:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Como visto, $\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$, além disso, tem-se:

- A Função logarítmica $\log_a x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.
- Tem-se que $a^0 = 1$, o que indica que $\log_a 1 = 0$.
- Somente números positivos possuem logaritmo real, pois $x \mapsto a^x$ assume valores somente positivos.
- Fórmula para mudança de base para logaritmos:

i) $\mathrm{Log}_b\, a = u \leftrightarrow b^u = a$

ii) $\log_x a = v \leftrightarrow x^v = a$

iii) $\log_x b = z \leftrightarrow x^z = b$

De i) e ii), tem-se que $b^u = x^v$, e substituindo iii), tem-se $(x^z)^u = x^v$, então:

$$v = z \cdot u$$

$$\log_x a = \log_x b \cdot \log_b a$$

$$\log_b a = \frac{\log_x a}{\log_x b} = \frac{\log_b x}{\log_a x}$$

- $y = \log_a x$ é uma função ilimitada. Isso acontece porque $\log_a x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, portanto sobrejetiva, ou mais precisamente:

Para $a > 1$,

$$\lim_{x \to \infty} (\log_a x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} (\log_a x) = -\infty$$

4.3 Caracterização de uma Função Logarítmica

As funções logarítmicas são muito importantes na Matemática e em suas aplicações. Sendo considerada a inversa da função exponencial, a função logarítmica está ligada a um grande número fenômenos e situações naturais. Dentre as funções monótonas e injetivas, somente as funções logarítmicas podem transformar produtos em somas, conforme sugere LIMA (2006, p. 12).

Teorema (3): *Seja* $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *uma função monótona tal que* $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}_+$. *Então existe* $a > 0$ *tal que* $f(x) = log_a x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração: Admite-se f crescente, no caso decrescente, será tratado analogamente. Tem-se que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Inicialmente, suponha que exista $a \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(a) = 1$. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0$, tem-se que $a > 1$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que:

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = 1 + 1 + \cdots + 1 = m$$

Então:

$$0 = f(1) = f(a^0) = f(a^{m-m}) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m +$$

$f(a^{-m)}$, logo,

$$f(a^{-m}) = -m$$

Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{Z}^*$, então $r \cdot n = m$, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{r \cdot n}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r).$$ Ou seja,

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r$$

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional, então, para $r, s \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s$$

Todo número racional r, menor do que x, é também menor que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo racional s, maior que x, é também maior que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto se $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $f(y) = \log_a y$, para todo $y > 0$ pois $f(x) = a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, com $0 < a \neq 1$. Partindo agora para um caso geral, em que se tem uma função crescente $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$, o que nos dá $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. Definindo uma nova função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$ é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$ vale a condição

$$x = 2^{f(x)}$$

$$x = 2^{\frac{g(x)}{b}}$$

$$x = \left(2^{\frac{1}{b}}\right)^{g(x)}$$

Tomando, o que nos dá $0 < a \neq 1$, teremos $x = a^{g(x)}$ e $\log_a x = \log_a a^{g(x)}$ e finalmente:

$$g(x) = \log_a x$$

Como consequência do Teorema (3), temos uma série de propriedades das funções logarítmicas.

Propriedade 1: *Uma função logarítmica* $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *é sempre injetiva, isto é, números diferentes têm logaritmos diferentes.*

De fato, se $x, y \in \mathbb{R}_+$ e $x \neq y$, então $x < y$ ou $x > y$. No primeiro caso, pelo Teorema (3), como f é monótono, podemos fixa-la crescente, resulta que $f(x) < f(y)$ e no segundo caso $f(x) > f(y)$. Qualquer hipótese, de $x \neq y$ temos que $f(x) \neq f(y)$, portanto a função é injetiva.

Propriedade 2: *O logaritmo de 1 é zero.*

De fato, temos $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, o que nos da $f(1) = 0$.

$$\log_a 1 = 0$$

Propriedade 3: *Os números maiores que 1 possuem logaritmo estritamente positivo e os números entre 0 e 1 possuem logaritmos estritamente negativo.*

De fato, sendo f crescente, $0 < x < 1 < y$, resulta $f(x) < f(1) < f(y)$, como $f(1) = 0$, temos $f(x) < 0 < f(y)$.

Propriedade 4**:** *Para todo* $x > 0$*, tem-se* $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

Como $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, temos $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$, então $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(x^{-1}) = -\log_a x$$

Propriedade 5: *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}_+$*, vale que* $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$*.*

Como $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Propriedade 6: *Para todo* $x \in \mathbb{R}_+$ *e todo número racional* $r = \frac{p}{q}$*, tem-se* $f(x^r) = r \cdot f(x)$.

4.4 Demonstração considerando um r racional.

Quando tal propriedade é apresentada aos alunos do 1º ano do ensino médio, só é trabalhado uma demonstração para um r natural, vamos aqui propor uma demonstração para um r racional.

Primeiro verificamos que a propriedade é válida para $r = n \in \mathbb{N}$.

i) Para $n = 1$, temos $f(x^1) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.

ii) Para $n \in \mathbb{N}$, temos $f(x^n) = n \cdot f(x)$.

iii) Para $(n+1) \in \mathbb{N}$, temos:

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \cdot x^1) = f(x^n) + f(x^1) = n \cdot f(x) + 1 \cdot f(x) = (n+1) \cdot f(x).$$

Pelo princípio da indução finita, vamos provas para $n \in \mathbb{N}$.

Quando $r = 0$, a propriedade é válida, pois $x^0 = 1$ para todo número real positivo, temos que $f(x^0) = f(1) = 0 = 0 \cdot f(x)$.

Considerando um $r = -n,\ n \in \mathbb{N}$, então, para todo $x > 0$ temos

$$x^n \cdot x^{-n} = x^0 = 1$$

Logo, $f(x^n \cdot x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n}) = f(1) = 0 \rightarrow f(x^{-n}) = -f(x^n) = -1 \cdot f(x^n)$

Então,

$$f(x^{-n}) = -f(x^n) = -n \cdot f(x)$$

Finalmente, o caso geral, em que $r = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Para todo $x \in \mathbb{R}_+$, temos: $(x^r)^q = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$

Logo, $q \cdot f(x^r) = f((x^r)^q) = f(x^p) = p \cdot f(x)$ em decorrência do que já foi demonstrado anteriormente.

Vem da igualdade que $q \cdot f(x^r) = p \cdot f(x)$, o que nos da $f(x^r) = \frac{p}{q} \cdot f(x)$, ou seja,

$$f(x^r) = r \cdot f(x)$$

$$\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$$

Propriedade 7. *Uma função logarítmica* $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ *é ilimitada superior e inferiormente.*

Tal afirmação, significa que, dados arbitrariamente números reais j e k, é sempre possível achar números positivos x e y tais que $f(y) < j$ e $f(x) > k$. Para provar que f é ilimitada superiormente, vamos supor um n e devemos achar um $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) > k$. Tomando um natural n tão grande que $n > \frac{k}{f(2)}$. Como $f(2) > 0$, usando a Propriedade 3, temos que $n \cdot f(2) > k$.

Usando agora a Propriedade 6, vemos que $n \cdot f(2) = f(2^n)$. Portanto $f(2^n) > k$. Tomando agora $x = 2^n$, temos que $f(x) > k$, mostrando que f é ilimitada superiormente.

Agora para provar que f é ilimitada inferiormente, podemos usar Propriedade 4, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ e tomar qualquer número real $j \in \mathbb{R}_+$, tal que $f(x) > -j$, como mostrado anteriormente. Para um $y = \frac{1}{x}$, teremos $f(y) = -f(x) < j$. A correspondência biunívoca da função logarítmica também é importante.

Teorema (4): *Toda função logarítmica é sobrejetiva isto é, dado qualquer número real p, existe sempre um único número real positivo* x *tal que* $f(x) = p$.

Não será feita aqui a demonstração, mas a mesma poderá ser encontrada em Lima (2006, v.1).

Teorema (5): Toda função logarítmica f *é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre* $\mathbb{R}_+$ *e* $\mathbb{R}$*, isto é, dado qualquer número real p, existe sempre um único número real positivo* x *tal que* $f(x) = p$.

Uma vez que $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva, temos que f é bijetiva.

As Funções Exponenciais e Logarítmicas são sem dúvida as que apresentam a maior quantidade de aplicações. A função exponencial, assim como sua inversa, a função logarítmica, constituem instrumentos para relatar matematicamente a evolução de grandezas, nas quais o crescimento ou decrescimento são proporcionais à quantidade dessa grandeza em um determinado tempo.

Em alguns momentos, a falta de interesse por parte dos alunos nos conteúdos relacionados às funções, podem estar relacionados a aulas planejadas de forma inadequada. Os professores devem colocar em prática a interdisciplinaridade no ensino das funções matemáticas. As funções exponenciais e logarítmicas possuem uma diversidade de aplicações no cotidiano e podemos nota-las em diversas ciências como, Matemática financeira e sua aplicação em juro composto, na Geografia, modelando as expressões responsáveis por explicar os crescimentos populacionais, na Química, explicando decaimento radioativo, pH de substâncias, na Biologia, ligando o desenvolvimento de bactérias em determinadas culturas, na Psicologia expressa as curvas de aprendizagem. Aqui no trabalho, a proposta é de uma aplicação utilizando música, notas musicais, com suas relações de proporcionalidade na escala pitagórica e a fabricação de uma Flauta tipo Pan e suas relações exponenciais e coordenadas Polares na construção da Escala Temperada (Espiral Logarítmica) utilizando instrumentos musicais com trastes, como a viola caipira.

5 A MÚSICA

Definir música não é algo tão óbvio quanto parece. Pode-se dizer que é uma combinação de ritmo, harmonia e melodia que produz sensações agradáveis ao ouvido. Em um sentido amplo, é a organização temporal de sons e silêncios (pausas); de modo restrito, é a arte de coordenar e transmitir efeitos sonoros, harmoniosos e esteticamente válidos, podendo ser transmitida através da voz ou de instrumentos musicais.

Para conduzir uma conversa sobre música, é necessário citar Pitágoras. Segundo ABDOUNUR (2002, pág. 97], os primeiros passos da matemática grega é o chamado *Sumário Eudemiano* de Prolo. Esse sumário consiste nas páginas de abertura do *Comentário sobre Euclides, Livro I,* de Prolo.

É um breve resumo da geometria grega desde seus primeiros tempos até Euclides, apesar de Prolo ter vivido mais de um milênio depois do início da matemática grega. No *Sumário Eudemiano,* Pitágoras é mencionado envolto numa névoa tal de misticismo por seus seguidores que pouco se sabe sobre ele com algum grau de certeza, estima-se que tenha nascido por volta de 572 a.C. na ilha Egéia de Samos.

Existem poucas informações concretas, a maioria são imprecisas e algumas consideradas lendas. Há quem duvide de sua existência, como historiadores, ilustres filósofos, profetas e religiosos. Isso se deve, principalmente, ao fato que, tal como Jesus Cristo e Maomé, Pitágoras optou por nunca escrever, tendo preferido deixar seus ensinamentos por meio de mathématas (*em grego: sentenças*) e exemplos de vida.

O próprio Sócrates, considerado o pai da filosofia ocidental, também optou por transmitir seus ensinamentos por meio de palestras e pela força de exemplos concretos. O que se sabe sobre ele vem de Platão − seu melhor discípulo − que supostamente teria escrito seus diálogos com base nos ensinamentos do mestre e colocando-o como protagonista de suas obras.

Nicola,(2005) descreve que o filósofo teria nascido numa família de ricos comerciantes e, por essa razão, viajara bastante; fora aluno de Tales, pois existia uma diferença de 50 anos entre eles, na própria cidade de Mileto; que conhecera Zoroastro na Babilónia (Pérsia). Estudou os mistérios do Antigo Egito com os sacerdotes locais. Pode-se então supor que o contato com diversas culturas o influencia bastante e, provavelmente, o seu lado místico seja oriundo da convivência com povos tão distintos.

5.1 Pitágoras e a Música

A Música exerce grande fascínio sobre os seres humanos, e em muitos casos, curiosidade sobre outros animais. Contudo tal fascínio não é privilégio dos tempos modernos, que conta com variados instrumentos e programas de computadores fantásticos capazes de mixar qualquer música, mesmo que o resultado não agrade a todos. Segundo Pitágoras, tal fascínio pode ser exemplificado no mito grego de Orfeu, que era poeta e músico e segundo sua lenda, quando tocava sua lira, acalmava os animais e até os rios, todos se rendiam aos encantos de sua música. (PEREIRA, 2013)

Pitágoras compunha e tocava desde jovem. Para ele, a música tinha muitas finalidades tais como: auxílio pedagógico, purificação da mente, cura de doenças, domínio da raiva e agressividade do homem, pois com o apoio dessa arte, criava ambientes de harmonia e tranquilidade para passar seus ensinamentos a seus discípulos. (PEREIRA, 2013)

Música, do grego *musiké téchne* - a arte das musas, é constituída basicamente por uma sequência de sons e silêncios organizados ao longo de um intervalo de tempo, tendo três principais elementos: melodia (estudo dos sons tocados separadamente, em sequência), harmonia (estudo das combinações de sons tocados simultaneamente) e ritmo (parte da música que determina o tempo de duração de cada nota). PEREIRA, 2013)

O interesse de Pitágoras pela música, estava mais ligado com o que se chama hoje de harmonia, pode-se dizer que em seus estudos ele se dedicava a descobrir quais combinações de sons eram mais agradáveis aos ouvidos, mesmo que para os gregos, a palavra harmonia fosse utilizada com o sentido de ordem, ordenação, equilíbrio, tudo aquilo que era simétrico era harmonioso. (PEREIRA, 2013)

Para Filolau de Crotona, a harmonia é a unificação de muitos sons misturados e a concordância dos discordantes. Já Kepler (1571-1630), o movimento dos céus, não é mais do que uma eterna polifonia (multiplicidade de sons; conjunto harmonioso de sons; combinação simultânea de várias melodias). (PEREIRA, 2013)

Desde o mundo antigo até o Renascimento ou Renascença ou Renascentismo[1] (período da história da Europa aproximadamente entre meados do século XIV e o final do século XVI), eram considerados como planetas, Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Daí a escolha da escala musical de Pitágoras ter sete sons em harmonia coincidindo com o conceito de harmonia das sete esferas celestes. PEREIRA, 2013)

Como a teoria geocêntrica tinha a Terra como referencial, sendo ela o centro do Universo e o Sol e Lua planetas que orbitavam em torno dela, a concepção de esferas celestes aparecem dispostas no céu em ordem, em equilíbrio, em harmonia, tal como uma escala musical. (PEREIRA, 2013)

Segundo Nicola (2005, p. 20), “Pitágoras descobriu uma certa ordem numérica inerente ao som. É a analogia entre duas séries: o som e o número, um princípio universal extensivo a outras ordens, como a dos astros celestes”.

Para Wisnik (1999, p. 05),

> Pitágoras deu continuidade a seus experimentos investigando as relações entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela, assim caracterizou a primeira lei descoberta empiricamente. O experimento de Pitágoras é ainda a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial. Pitágoras provavelmente foi o inventor do monocórdio, um instrumento musical composto de uma corda presa entre dois cavaletes fixados a uma tábua.

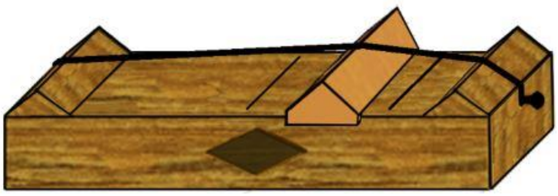


Figura 1: Monocordio

O monocórdio foi dividido em 12 espaços iguais. Partindo de uma intuição, provavelmente induzido por suas convicções místicas a respeito da *tetraktys,* descobriu uma estreita relação entre os números, os sons e as notas musicais. A essa relação deu o nome harmonia musical, que é justamente um som agradável aos ouvidos. Tal combinação se dá exatamente na união das notas quando tocadas simultaneamente.

Quando tocado na modalidade corda solta, ou seja, presa apenas pelas extremidades, o monocórdio produzia um som, uma nota musical, denominada tônica ou fundamental e era usada como referência, partindo dela eram determinadas as outras notas. Pitágoras observou que entre a tônica e as demais notas havia uma proporção numérica. (ABDOUNUR, 2002)

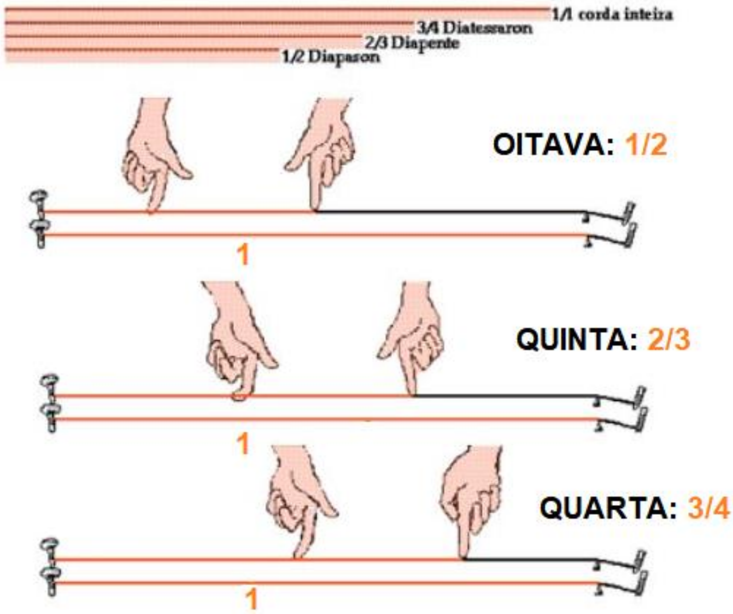


Figura 2: Notas Consonantes

Ilustrações obtidas em:
http://www.aboutscotland.co.uk/harmony/prop.html

Tônica: de razão 1:1 → comprimento c

Oitava: de razão 1:2 → comprimento c/2

Quinta: de razão 2:3 → comprimento 2c/3

Quarta: de razão 3:4 → comprimento 3c/4

Quando algumas notas são tocadas juntas e produzem uma sensação prazerosa aos ouvidos elas são denominadas notas consonantes. Esse foi provavelmente, o momento do surgimento do primeiro acorde, que por definição é a reprodução de um grupo de notas ao mesmo tempo. Por outro lado, quando um acorde produz um som não agradável ao ouvido, recebe o nome de acorde dissonante. (ABDOUNUR, 2002)

Segundo a lenda contada por Guido D'Arezzo, no tratado sobre música intitulado *Micrologus*, Pitágoras ao ouvir os diferentes sons produzidos pelas batidas dos martelos numa oficina de ferreiro, percebeu que estes propiciavam uma sensação agradável e tinham uma harmonia entre si. Ele também teria notado que os valores dos sons poderiam ser expressos por relações numéricas (proporções) e que, para sua surpresa, os martelos que produziam os sons mais agradáveis (consonantes) pesavam 12, 9, 8 e 6 unidades de massa. (PEREIRA 2013, p. 20).

Quando se estica uma corda e a faz vibrar, será produzido um som dependendo do tamanho da corda, alguns serão agradáveis outros não. Os sons agradáveis, harmoniosos, são aqueles emitidos quando a corda vibrante está dividida segundo proporções simples, isto é, existe uma relação entre os sons harmoniosos e números inteiros. Segundo os pitagóricos, a consonância seria mais bela quanto mais simples fosse a relação proporcional entre os sons.

O misticismo dos números fica evidente quando observado os denominadores das seguintes frações: 1/1; 1/2; 2/3 e 3/4. Porém, transformando-as em frações equivalentes com o mesmo denominador, teríamos: 12/12; 6/12; 8/12 e 9/12. Sendo assim os numeradores são iguais as massas dos martelos que produzem os sons harmônicos. Observando as massas 6, 8, 9 e 12 temos:

1 – Uma proporção entre 6, 8, 9 e 12, pois $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

2- Uma média aritmética entre 6, 9 e 12, pois $9 = \frac{6+12}{2}$

3- Uma média harmônica entre 6, 8 e 12, pois $8 = \frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$

Não se tem certeza em qual tom o monocórdio de Pitágoras estava afinado, porém não é necessária tal informação, pois o que interessa é a relação entre o vibrar da corda solta e o vibrar quando pressionada em algumas posições específicas produzindo notas consonantes. A descoberta de Pitágoras construiu a primeira e mais elementar escala musical formada por quatro sons que serviu de base para a música grega e também o tetracórdio. Hoje, sabe-se que representam a 1ª, 4ª, 5ª e 8ª notas na escala atual. (ABDOUNUR, 2002)

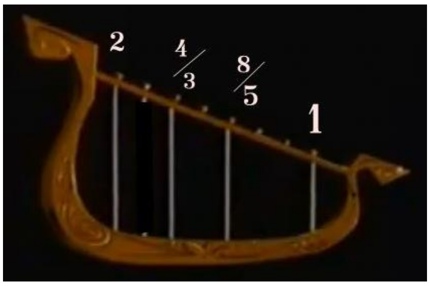


Figura 3: Tetracórdio

tudoquevocenaogosta.blogspot.com/2009/04/musica-e-matematicamatematica-e-musica.html

As notas consonantes são, na escala ocidental atual, a oitava, a quinta e a quarta, sempre relativas à tônica. Lembrando que a oitava é a nota obtida ao tocar a corda na metade do seu comprimento quando solta e que o ouvido interpreta como sendo uma nota naturalmente equivalente.

Ao sair da primeira oitava, encontra-se sons equivalentes em oitavas superiores, isto é, fracionando a corda em pedaços cada vez menores. Considerando uma corda de comprimento c, temos:

1ª Sequência

$$\begin{array}{cccccccc} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \\ \hline C & & & & & & & \frac{C}{2} \end{array}$$

com a quarta sendo $N_4 = \frac{3C}{4}$ e a quinta $N_5 = \frac{2C}{3}$.

2ª Sequência

$$\begin{array}{cccccccc} N_8 & N_9 & N_{10} & N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} & N_{15} \\ \hline \frac{C}{2} & & & & & & & \frac{C}{4} \end{array}$$

com a quarta sendo $N_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3C}{4} = \frac{3C}{8}$ e a quinta $N_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2C}{3} = \frac{C}{3}$.

3ª Sequência

$$\begin{array}{cccccccc} N_{15} & N_{16} & N_{17} & N_{18} & N_{19} & N_{20} & N_{21} & N_{22} \\ \hline \frac{C}{4} & & & & & & & \frac{C}{8} \end{array}$$

Com a quarta sendo $N_{18} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3C}{4}$ e a quinta $N_{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2C}{3}$. Notamos que na 2ª sequência temos a primeira oitava, o que nos dá Progressões Geométricas com as oitavas, quintas e quartas:

- Oitavas: $PG\left(\frac{1}{2} \cdot C;\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C;\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot C; \dots ; \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot C\right)$
- Quintas: $PG\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2C}{3};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2C}{3};\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{2C}{3}; \dots ; \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{2C}{3}\right)$
- Quartas: $PG\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3C}{4};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3C}{4};\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{3C}{4}; \dots ; \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{3C}{4}\right)$

A observação de sequências de 7 notas, proporciona uma melhor visão e compreensão de que a 1ª oitava seria a primeira nota da segunda sequência mais aguda que a sequência anterior, considerando uma escala ascendente. Pelo padrão, nota-se que $\frac{3C}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{3C}{4}$, por exemplo, seria uma quarta mais aguda duas oitavas acima da quarta $\frac{3C}{4}$.

Qualquer outro som produzido pelo monocórdio quando pressionado em outra posição diferente das relacionadas acima, é um som dissonante. Tal fato pode ser facilmente notado, mesmo por uma pessoa leiga em música. Basta tomar como base uma das cordas de uma viola, violão ou um outro instrumento de corda. Tal fato teria sido observado por Pitágoras.

A escala musical de Pitágoras tinha 4 notas, porém há outras notas entre elas, que foram descobertas seguindo a mesma proporção definida por ele, até se chegar a uma sucessão de sons que hoje se denomina Escala Diatônica de DÓ (incluindo a primeira oitava, a escala Diatônica de DÓ possui 8 notas.)

Observando a escala Diatônica abaixo,

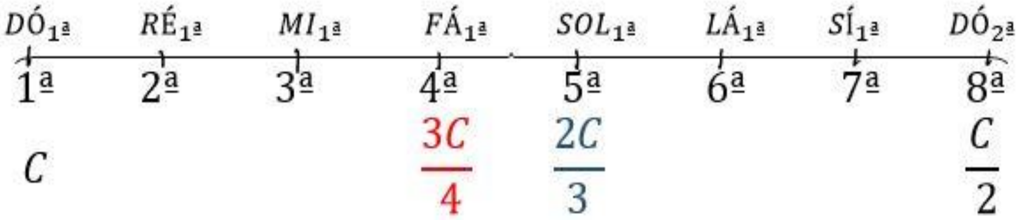


Figura 4: Escala diatônica

1ª Oitava: De $DÓ_{1ª}$ até $DÓ_{2ª}$, onde teremos entre elas $RÉ_{1ª}$ até $SÍ_{1ª}$;

2ª Oitava: De $DÓ_{2ª}$ até $DÓ_{3ª}$, onde teremos entre elas $RÉ_{2ª}$ até $SÍ_{2ª}$;

Seguindo, teremos:

nª Oitava: De $DÓ_{nª}$ até $DÓ_{(n+1)ª}$, onde teremos entre elas $RÉ_{nª}$ até $SÍ_{nª}$ onde $RÉ_{nª}$ é o som da nota $RÉ$ na n-ézima oitava.

Percebe-se que $FÁ = \frac{3C}{4}$, ou seja, a nota $FÁ_1 = \frac{3}{4} \cdot DÓ_1$, o que dá a fração comprimento da corda em $DÓ_1$ para se produzir a nota $FÁ_1$. Sem perda de generalidade, pode-se dizer que $FÁ_{nª} = \frac{3}{4} \cdot DÓ_{nª}$.

No caso do monocórdio de Pitágoras afinado em $DÓ$, pode-se afirmar que ele já tinha conhecimento das notas $FÁ$ (Quarta), SOL (Quinta) e o $DÓ_2$.

5.2 Descobertas das notas na escala de DÓ

Um dos recursos utilizados por muitos músicos, por se tratar de uma escala agradável aos ouvidos, é o *Ciclo das Quintas,* contudo *n*ão há pretensão nesse trabalho de aprofundar o estudo em Escalas Musicais.

Partindo de uma nota K_n qualquer, sabe-se que sua quinta ou quinta justa, é determinada por $QJ = \frac{2}{3} \cdot K_n$, então, partindo da razão que define a quinta, pode-se determinar o ciclo das quintas da seguinte forma:

- Tome como referência uma nota qualquer K_n;
- Encontre a quinta de K_n;
- Depois encontre a quinta das quintas de K_n;
- E assim por diante.

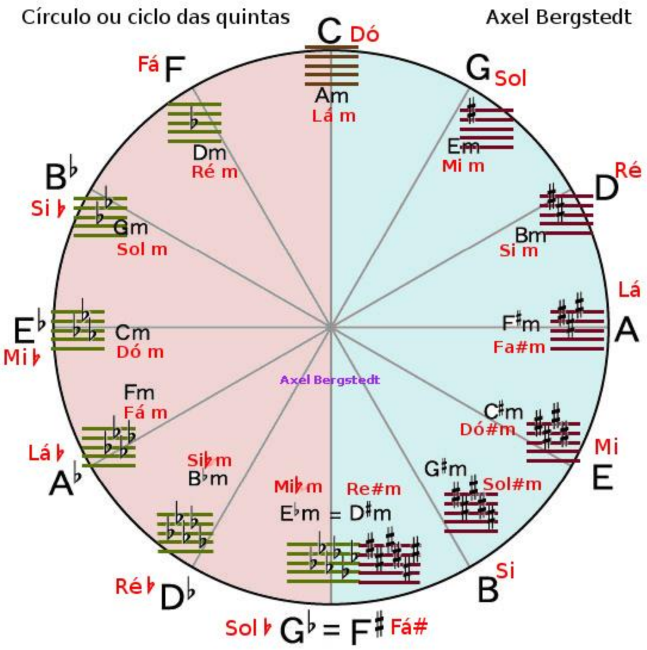


Figura 5: Círculo ou ciclo das quintas

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%ADrculodequintas#/media/Ficheiro:Ciclodequintas.jpg

Caso a escolha tenha sido um DÓ, tem-se como Ciclo das quintas: $DÓ_n \to SOL_n \to RÉ_{n+1} \to LÁ_{n+1} \to MI_{n+2} \to \cdots$, verifica-se que:

1ª Quinta Justa: $\frac{2}{3} \cdot DÓ_{1ª} = SOL_{1ª}$

2ª Quinta Justa: $\frac{2}{3} \cdot SOL_{1ª} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot DÓ_{1ª} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot DÓ_{1ª} = RÉ_{2ª}$

3ª Quinta Justa: $\frac{2}{3} \cdot RÉ_{2ª} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot DÓ_{1ª} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot DÓ_{1ª} = LÁ_{2ª}$

4ª Quinta Justa: $\frac{2}{3} \cdot LÁ_{2ª} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot DÓ_{1ª} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot DÓ_{1ª} = MI_{3ª}$

Pela sequência, determina-se que $QJ_n = \left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot DÓ_{1ª}$.

Definindo uma primeira nota, como $DÓ_{1ª}$, em uma corda de comprimento $c = 1\,unidade$, e lembrando que $DÓ_{2ª} = \frac{DÓ_{1ª}}{2} \leftrightarrow DÓ_{1ª} = 2 \cdot DÓ_{2ª}$, é possível calcular o comprimento de cada corda que produz as outras quintas, logo:

- Quinta de $DÓ_{1ª} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$, equivalente a $SOL_{1ª}$.
- Quinta de $FÁ_{1ª} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, equivalente a $DÓ_{2ª}$.
- Quinta de $SOL_{1ª} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{9}$, equivalente a $RÉ_{2ª}$, mas $RÉ_{1ª} = 2 \cdot RÉ_{2ª}$, logo $RÉ_{1ª} = 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot 1 = \frac{8}{9}$.
- Quinta de $RÉ_{1ª} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot 1 = \frac{16}{27}$, equivalente a $LÁ_{1ª}$.
- Quinta de $LÁ_{1ª} = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} \cdot 1 = \frac{32}{81}$, equivalente a $MI_{2ª}$, mas $MI_{1ª} = 2 \cdot MI_{2ª}$, logo, $MI_{1ª} = 2 \cdot \frac{32}{81} \cdot 1 = \frac{64}{81}$.

Depois de todos os cálculos realizados e definidas as relações de proporcionalidade existentes entre a corda solta, de comprimento c, observe a representação dos cálculos na seguinte tabela:

NOTAS	$DÓ_{1ª}$	$RÉ_{1ª}$	$MÍ_{1ª}$	$FÁ_{1ª}$	$SOL_{1ª}$	$LÁ_{1ª}$	$SI_{1ª}$	$DÓ_{2ª}$
POSIÇÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
COMPRIMENTO DA CORDA	C	$\frac{8C}{9}$	$\frac{64C}{81}$	$\frac{3C}{4}$	$\frac{2C}{3}$	$\frac{16C}{27}$	$\frac{128C}{243}$	$\frac{C}{2}$

Tabela 2: Relação entre as notas e comprimento da corda

Observe as notas representadas no Violão Pitagórico.

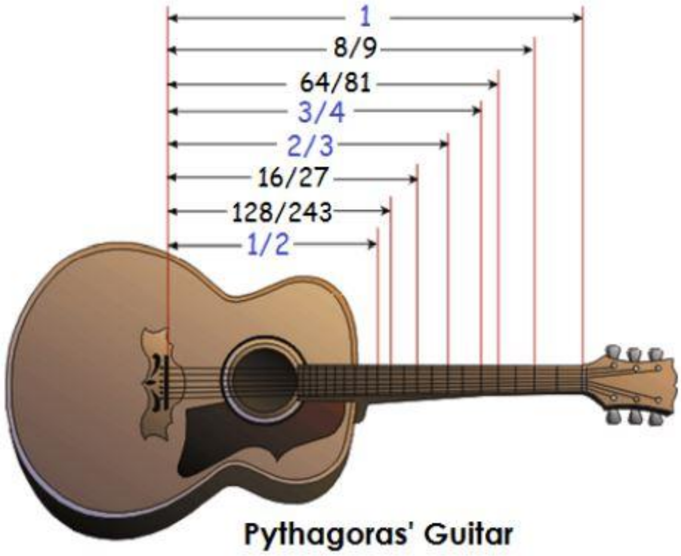


Figura 6: Violão Pitagórico

Fonte: www.upscale.utoronto.ca

Uma vez definida as oito notas da primeira oitava, percebe-se ao generalizar os resultados, as relações entre as notas e o comprimento das cordas:

- Oitavas: considerando como primeira oitava $DÓ_{1ª}$ e sabendo que cada uma das oitavas superiores representam a metade da anterior, tem-se como resultado uma Progressão Geométrica da seguinte forma: $PG\left(DÓ_{1ª},\ \frac{1}{2}.DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot DÓ_{1ª}, \ldots\right)$, pelo termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos $DÓ_{(n+1)ª} = DÓ_{1.} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot DÓ_{1ª}$, então:

$$DÓ_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot DÓ_{1ª}$$

- Quartas: considerando como primeira quarta $FÁ_{1ª}$ e sabendo que $Fá_{1ª} = \frac{3}{4} \cdot DÓ_{1ª}$ e que cada $Fá_{(n+1)ª} = \frac{1}{2} \cdot FÁ_{nª}$, nota-se que a sequência de Quartas também formará uma Progressão Geométrica da seguinte forma:

$$PG\left(\frac{3}{4} \cdot DÓ_{1ª},\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{3}{4} DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} DÓ_{1ª}, \ldots\right),$$

novamente pelo termo geral da PG,:

$$FÁ_{nª} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot DÓ_{1ª}$$

- Quintas: Considerando como primeira quinta $SOL_{1ª}$ e sabendo que $SOL_{1ª} = \frac{2}{3} \cdot DÓ_{1ª}$ e que $SOL_{(n+1)ª} = \frac{1}{2} \cdot SOL_{nª}$, nota-se também que a sequência de Quintas formará uma Progressão Geométrica da seguinte forma:

$$PG\left(\frac{2}{3} \cdot DÓ_{1ª},\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3} DÓ_{1ª},\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} DÓ_{1ª}, \ldots\right),$$

novamente pelo termo geral da PG:

$$SOL_{nª} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot DÓ_{1ª}$$

A razão da escolha da oitava, quarta e quinta está ligada à condição de serem as primeiras relações descobertas por Pitágoras, entretanto de maneira similar, os cálculos podem ser feitos para todas as outras notas. Quando é feita a análise dos intervalos entre duas das notas da escala musical (TABELA 1) ou seja, analisa-se a razão entre o comprimento relativo de cada uma das notas, encontram-se razões diferentes.

NOTAS: k_n	$DÓ_{1ª}$	$RÉ_{1ª}$	$MÍ_{1ª}$	$FÁ_{1ª}$	$SOL_{1ª}$	$LÁ_{1ª}$	$SI_{1ª}$	$DÓ_{2ª}$
POSIÇÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
COMPRIMENTO DA CORDA	C	$\frac{8C}{9}$	$\frac{64C}{81}$	$\frac{3C}{4}$	$\frac{2C}{3}$	$\frac{16C}{27}$	$\frac{128C}{243}$	$\frac{C}{2}$

RAZÃO $\frac{k_n}{k_{n+1}}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

Tabela 3: Razões entre Posição de uma nota e Comprimento da Corda

Pitágoras e seus discípulos acreditavam que tudo no universo era racional e assim poderia ser expresso por um número. Com o monocórdio, Pitágoras construiu a primeira escala musical, apesar de representar um grande avanço, apresentava dois problemas: um deles ligado à distância entre as frequências das notas que não eram padronizadas e não respeitavam uma mesma razão entre notas consecutivas.

Talvez o próprio Pitágoras tenha percebido que o intervalo entre duas notas da escala, quer dizer, entre a frequência sonora das notas, não era sempre o mesmo, porém não se deteve em resolvê-lo). O outro problema está ligado ao fato da escala não ser cíclica.

Os pitagóricos observaram que notas diferenciadas de uma oitava apresentavam certa semelhança, podendo ser definida como uma classe de equivalência (duas notas tornam-se equivalentes se o intervalo existente entre elas for um número inteiro de oitavas podendo reduzir diferentes oitavas a apenas uma) possuindo assim notas equivalentes em todas as outras oitavas e na oitava de origem. (ABDOUNUR, 2003, p.09).

5.3 Escala Temperada

Vale ressaltar que: altura (determinada pela frequência das vibrações); duração (determinada pelo tempo de emissão do som); intensidade (grau do volume sonoro) e timbre (considerado a ”cor” do som de cada instrumento ou voz, é derivado da intensidade dos sons harmônicos que acompanham os sons principais) (LIMA, 1996, p. 12).

Segundo Moar (2009,p. 35)

> Espectro de frequências audíveis é claramente um domínio contínuo, um intervalo. Uma escala, contudo, é apenas uma amostra discreta desse espectro, isto é, um conjunto de pontos escolhidos dentro do intervalo de frequências. Muitos povos ao longo da história da humanidade construíram suas escalas musicais baseadas em certos parâmetros pré-estabelecidos. Não era uma escolha aleatória.

O modelo matemático de escala criado por Pitágoras era, até a Idade Média, o mais aceito pela comunidade musical no Ocidente, mesmo havendo outros, prontos e em desenvolvimento, para tentar corrigir os acidentes do modelo grego. O Período Renascentista, século XIV, foi marcado pela valorização da ciência e a busca pelo entendimento com a natureza, das produções culturais, da arte.

A partir de então a música começou a ser estudada com um caráter mais técnico, instigando matemáticos de todo o mundo a buscar soluções para os problemas de produções musicais da época, provenientes da escala pitagórica.

Eis que surge Johann Sebastian Bach (1685-1750) que propõe uma organização musical baseada em padrões matemáticos. Em sua obra, *O Cravo Bem Temperado*, escrito originalmente em 1722, uma obra de caráter didático, composta por dois volumes, na qual o músico faz um passeio por todos os doze tons da nova escala, mudando o paradigma vigente e propondo a escala temperada, que consiste na organização de 12 notas musicais.

Com a criação da escala temperada, foi possível sanar o problema da diferença entre os intervalos das notas, sendo introduzidas mais 5 notas entre as 7 já existentes na escala diatônica. As notas inseridas foram denominadas acidentes musicais, e são chamados de sustenidos no sentido ascendente e bemóis no sentido descendentes.

A distribuição das 12 notas, 12 semitons, foi resolvido no século XVII. Como a escala apresentava a mesma razão entre notas consecutivas, foram simplesmente inseridos 12 semitons em cada oitava, um caso de interpolação geométrica. As notas agora estão distribuídas da 1ª $DÓ_{1ª}$ até a 13ª, $DÓ_{2ª}$. Considerando agora uma Progressão Geométrica, temos:

$$\text{PG}\left(1, a_1, a_2, a_3, a_4,\ a_{5,} a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11,} a_{12}, 2\right)$$

sendo $a_1 = 1$ e $a_{13} = 2$. Lembrando que o termo geral de uma PG é dado por:

$DÓ_{1ª}$	$DÓ\#_{1ª}$	$RÉ_{1ª}$	$RÉ\#_{1ª}$	$MI_{1ª}$	$FÁ_{1ª}$	$FÁ\#_{1ª}$	$SOL_{1ª}$	$SOL\#_{1ª}$	$LÁ_{1ª}$	$LÁ\#_{1ª}$	$SI_{1ª}$	$DÓ_{2ª}$
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª
1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	2

Tabela 4: Distribuição das notas musicais

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_{13} = a_1 \cdot q^{13-1}$$
$$2 = 1 \cdot q^{12}$$
$$q = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$$

Como a PG possui primeiro termo 1 e razão $2^{\frac{1}{12}}$, tem-se a seguinte sequência:

$$\text{PG}\left(1, 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}}, 2^{\frac{4}{12}}, 2^{\frac{5}{12}}, 2^{\frac{6}{12}}, 2^{\frac{7}{12}}, 2^{\frac{8}{12}}, 2^{\frac{9}{12}}, 2^{\frac{10}{12}}, 2^{\frac{11}{12}}, 2\right)$$

Analisando a razão, $q = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$, obtém-se uma aproximação $q \cong 1{,}05946$, que escrita na forma percentual, seria 105,946%, o que diz que a frequência de cada nota é 5,946% maior que a frequência da nota anterior.

Frequências das notas no gráfico.

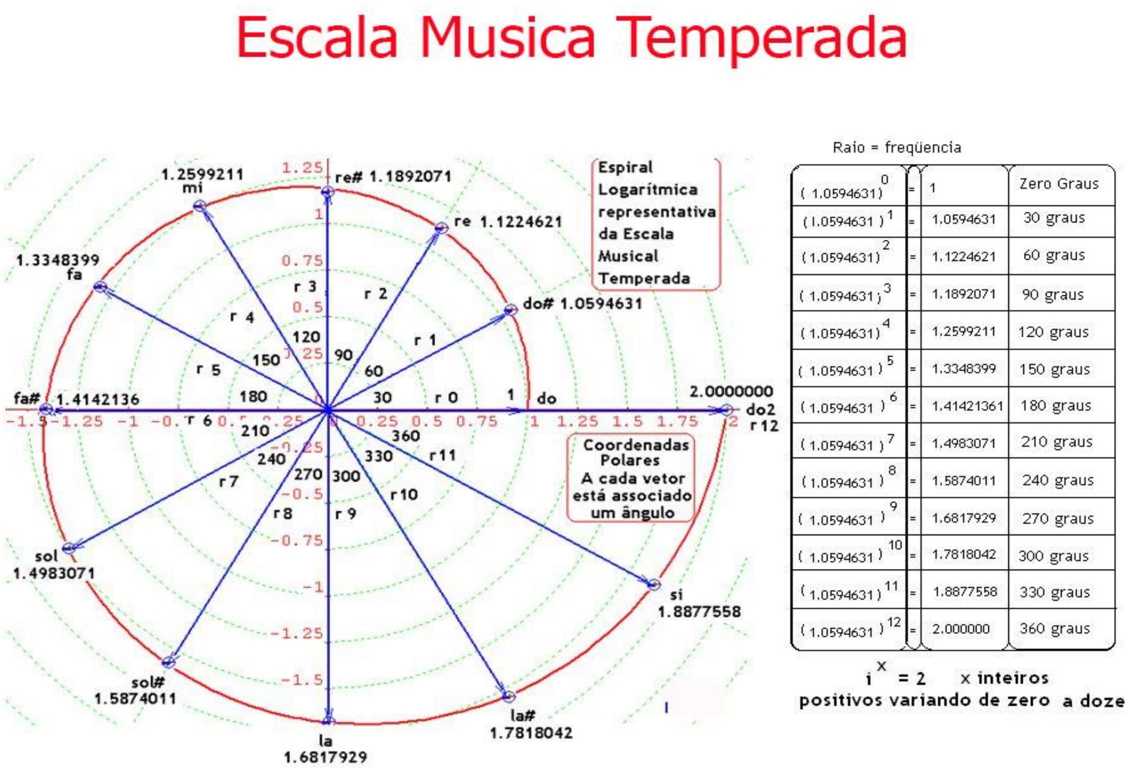


Gráfico 6: Escala Musical Temperada

Fonte: https://blog.santoangelo.com.br/ilusao-de-otica-os-trastes-estao-tortos/

5.4 Surgimento dos Logaritmos

Segundo Moar (2009) e Boyer (1974) a invenção dos logaritmos foi recebida na comunidade científica com grande entusiasmo. Na história da ciência, raramente uma ideia tão abstrata causou esse efeito, ainda mais sendo ela apresentada por uma pessoa que, em atividades anteriores, não sugerira um futuro criativo para a matemática. Seu nome era Jhon Napier – o nome tem aparecido em formas tão diversas Nepair, Neper e Naipper, a grafia correta parece desconhecida.

Jhon Napier nasceu em 1550 - data desconhecida - na propriedade da família, o castelo Merchiston, perto de Edimburgo, na Escócia. Era filho de Sir Archibald Napier e Janet Brothwell, sua primeira esposa. Com treze anos de idade foi estudar na Universidade de St. Andrews, onde estudou religião e ficou uma curta temporada, retornando a sua terra natal, casou-se com Elizabeth Stirling, com quem teve dois filhos.

Após a morte de sua esposa em 1579, se casou com Agnes Chisholm, e tiveram dez filhos. Robert, segundo filho deste casamento, mais tarde cuidaria da obra literária do pai. Após a morte de Sir Archibald, em 1608, Jhon retornou a Merchiston, onde passou o resto de sua vida.

Seu interesse pela religião, ou melhor, pelo ativismo religioso, não sugeriam um futuro criativo na matemática. Ardoroso protestante, firme oponente ao papado, publicou seu ponto de vista em *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint Jhon* (1593), um livro que atacava duramente a Igreja Católica, afirmando que o papa era o Anticristo – Apocalipse de São João – e conclamava ao rei escocês Jaime VI expulsar de sua corte todos os “papistas, ateus e hereges”. Nepier, também previa que o dia do Juízo Final aconteceria entre 1688 e 1700. O livro foi traduzido para diversos idiomas e teve 21 edições.

Como Nepier era dono de terras, tinha interesse na melhoria das colheitas e do gado. Em 1579 inventou um parafuso hidráulico para controlar o nível de água nas minas de carvão; tinha também grande interesse pelas questões militares, arquitetando planos de construir enormes espelhos que seriam capazes de incendiar os navios inimigos – plano esse já arquitetado por Arquimedes para a defesa de Siracusa, dezoito séculos antes de sua época.

Ele também imaginou um artifício como uma carruagem com uma “boca móvel de fogo ardente” capaz de “limpar um campo numa circunferência de 6,4 km (quatro milhas), exterminando todas as criaturas com mais de 30 cm (um pé) e até mesmo uma engenho capaz de “navegar debaixo d’água, com mergulhadores e outros artifícios capazes de destruir o inimigo”. Não se tem informação da construção dessas máquinas.

Com interesses tão diversificados, Napier tornou-se personagem de várias histórias. Certa vez, suspeitou de que um de seus servos estava lhe roubando. Reuniu-os e anunciou que seu galo iria identificar o suposto meliante. Levou todos a uma sala escura e disse que deveriam passar a mão no dorso do galo. Napier, sem que soubessem, tinha espalhado nas penas do galo uma espécie de fuligem, assim quando os funcionários saíssem da sala, aquele que tivesse com as mãos limpas seria o culpado. Além disso, parece ter sido um tipo brigão.

Seu nome pertence à história não por causa de seu livro campeão de vendas ou da sua engenhosidade mecânica, mas devido à ideia matemática abstrata que levou 20 anos para desenvolver: Os *logaritmos* (*do grego logos=razão e arithmos=número)***.**

Napier publicou sua invenção em 1614 num tratado em latim cujo título traduzido é "*Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos*". Um trabalho posterior, "Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos", publicado por seu filho Robert em 1619, fez a maravilhosa invenção ser rapidamente aceita por cientistas de toda a Europa e até mesmo na China. Um dos primeiros a utilizar os logaritmos foi o astrônomo Johannes Kepler (27 de dezembro de 1571 — 15 de novembro de 1630), contemporâneo de Galileu Galilei. Kepler foi responsável por descobrir que a volta que os planetas dão em torno do Sol é elíptica e não circular como acreditavam Copérnico e Galilei.

Sua dedicação à matemática euclidiana era tal que acreditava que a geometria em si era a manifestação de Deus no mundo. O talento matemático do alemão Kepler o levou a trabalhar ao lado do nobre dinamarquês e matemático imperial Tycho Brahe. O dinamarquês possuía observações astronômicas muito mais precisas do que qualquer um naquela época e elas foram fundamentais para as conclusões de Kepler.

O movimento orbital de Marte, observado por Brahe, levou Kepler a descobrir que as órbitas dos planetas em torno do Sol eram elípticas. E ele foi além. O alemão fundou a astronomia moderna ao desenvolver as três leis fundamentais dos movimentos planetários, utilizadas nos cálculos das órbitas dos planetas.

Henry Briggs (Fevereiro de 1561- 26 de janeiro de 1630), professor de Geometria do Gresham College de Londres e depois professor em Oxford. Briggs era um matemático impressionado com o poder dos logarítmos a ponto de visitar seu inventor, John Napier, em Edimburgo, Escócia. No encontro, Briggs propôs a Nepier fazer o logaritmo de 1 igual a zero e logaritmos de 10 na base 10 igual a 1.

Após considerar várias possibilidades, Napier concordou com tais sugestões, uma vez que tornaria suas tabelas mais convenientes, mas, como já estava com idade avançada, não tinha mais ânimo para construir as novas tabelas e deixou para Briggs o trabalho que publicou em 1624 com o título *Arithmetica Logarithimica. O mesmo* contava com tábuas de logaritmo de base 10; mais tarde, ficou mais completo em sua segunda edição.

Em edições posteriores, tudo que ocorreu foram pequenas revisões que mantiveram a base para todas as tabelas de logaritmos até os dias atuais. Só em 1924, teve início um novo conjunto de tabelas com 20 casas decimais, trabalho feito na Inglaterra em comemoração aos 300 anos da invenção dos logaritmos, concluído em 1949. Nesse evento um lord discursou em homenagem a Napier:

> A invenção dos logaritmos chegou ao mundo como um relâmpago num dia num dia claro. Nenhum trabalho anterior conduziu a ela, ou previu, ou sugeriu seu aparecimento. Ela permaneceu isolada, surgindo abruptamente no pensamento humano, sem derivar do trabalho de outro intelectual ou seguir linhas conhecidas do pensamento matemático. (MOAR, 2009)

Napier morreu em sua propriedade, o castelo Merchiston, em 3 de abril de 1617, com 67 anos e foi enterrado na igreja de St. Cuthbert, em Edimburgo.Segundo (Boyer) , Napier foi o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmo, mas há ideias muito semelhantes desenvolvidas independentemente na Suíça por um fabricante de relógios, Jobst Burgi (1552 – 1632), mais ou menos ao menos na mesma época. Existem evidências de que em 1588, Burgi criou uma tabela de logaritmos de forma muito semelhante à de Napier.

Não se sabe o motivo pelo qual ele só a publicou em 1620, tendo como diferença entre elas apenas a terminologia e os valores numéricos usados, porém com o mesmo princípio em seus fundamentos. O logaritmo surgiu como uma ferramenta para facilitar alguns cálculos, reduzindo os problemas de sequências geométricas em problemas de sequências aritméticas, visto que ele transforma uma multiplicação em uma adição e uma divisão em uma subtração.

Para se entender o conceito, propriedades e aplicações dos logaritmos, é necessária a compreensão dos conceitos de potência e exponencial. As propriedades de potenciação são apresentadas aos alunos ainda no Ensino Fundamental e revisadas no início do 1º Ano do Ensino Médio, dando assim, a fundamentação para os estudos dos Exponenciais.

5.5 Dimensões dos trastes da Viola Caipira e os Logaritmos

Segundo Oliveira (OLIVEIRA; SABBA, 2013), nos dias atuais, qualquer pessoa que estudar a teoria musical notará, de modo simples, a forte relação que existe entre a música e a matemática, pois é necessário ter o conhecimento de frações até mesmo para solfejar (cantar um trecho de música pronunciando as notas de acordo com seus valores determinados pelos compassos). Considerando que matemáticos ilustres contribuíram de modo significativo para o desenvolvimento da teoria musical e a fim de organizar os momentos importantes que revelam as relações entre as duas ciências, na próxima seção são apresentados alguns grandes matemáticos e suas contribuições. Na seção seguinte, músicos brilhantes e suas realizações.

Vamos considerar uma viola caipira como exemplo. Segundo Brito (2015)

> O objeto viola é um jogo de tensão entre suas junções. E uma de suas junções fundamentais é a do cavalete – e consequentemente de seu rastilho. O cavalete precisa ser assentado sem qualquer sobra de contato: a superfície do tampo e a base de colagem do cavalete devem estar completamente aderidas. Mas não se cola o cavalete em qualquer lugar; deve ele ser colado à mesma distância do 12° traste projetado sobre o tampo. Embora uma medição fosse suficiente para marcar a área de colagem do cavalete, ainda é utilizado um outro instrumento: uma ripa de madeira com uma demarcação no traste zero – traste logo após a pestana – e no 12° traste para então tocar na área do tampo onde deverá ser colado o cavalete. (p. 127)

Nota-se que na construção de uma viola caipira são usados gabaritos para determinação de suas medidas, como distanciamento de trastes, tamanho de braço, e consequentemente local onde deverá ser colado o cavalete, para assim ter o ajuste do rastilho. É necessário conhecer como as notas estão dispostas sobre o braço da viola caipira seguindo uma de suas afinações. Para isso, deve-se ter sempre em mente que ela é formada por 5 pares de cordas e quando afinada, por exemplo em Rio Abaixo, as cordas soltas produzem as notas $RÉ, SÍ, SOL, SÍ\ e\ SOL$, respectivamente. Partindo destas cordas pode-se tocar as demais notas apenas aumentando e/ou diminuindo o tamanho delas pressionando sobre os trastes.

Figura 7: Viola Caipira

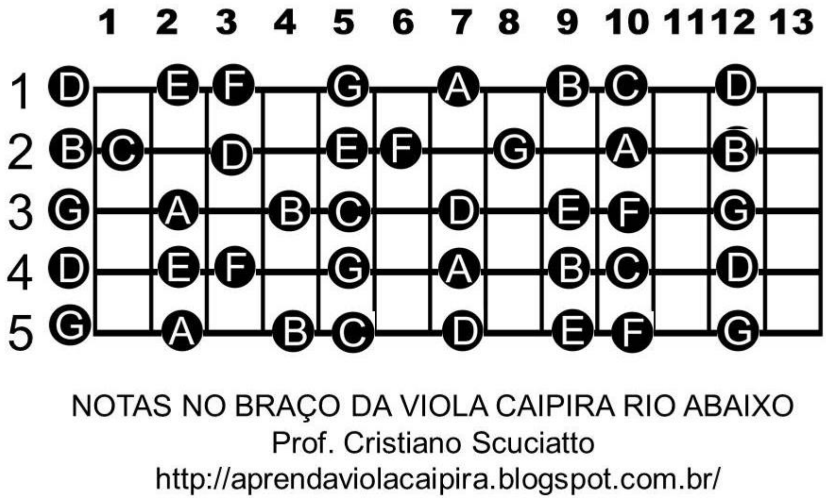


Figura 8: Escala Rio Abaixo

Na determinação de qual a melhor posição para um determinado traste, vale lembrar que a frequência entre as notas consecutivas sempre obedece a uma razão $q = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$ e que são inversamente proporcionais ao comprimento de sua corda, então $\left(\sqrt[12]{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^x} = 1$, mostrando assim que as relações entre a frequência emitida e o comprimento da corda devem ser sempre constantes.

Para descobrir em qual lugar será posicionado um determinando traste de ordem x entre a pestana e o cavalete, deve-se utilizar $\left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^x$. Observando que para $x = 12$ tem-se $\left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^{12} = \frac{1}{2}$, ou seja, o 12ª traste do braço da viola estará na metade do comprimento da corda livre, posicionando, assim, a nota da corda solta uma oitava acima. Nota-se, portanto, que as frequências crescem exponencialmente enquanto o comprimento das cordas que produzem tais frequências decresce exponencialmente, ou seja, quanto mais alta for a frequência, menor será o comprimento da corda que a produz. Dessa forma, pode-se considerar um modelo matemático que permita determinar as distâncias dos trastes que irão produzir as frequências que se deseja gerar. Tal modelo será

$$t_x = c_e \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^x \leftrightarrow t_x = c_e \cdot (2)^{-\frac{1}{12} \cdot x}$$

onde x representa a ordem do traste, t_x a distância do traste de ordem x e c_e o comprimento da escala, ou corda solta.

Tomando como exemplo uma Viola Caipira de escala 582 mm, teríamos seus trastes

Gráfico 7

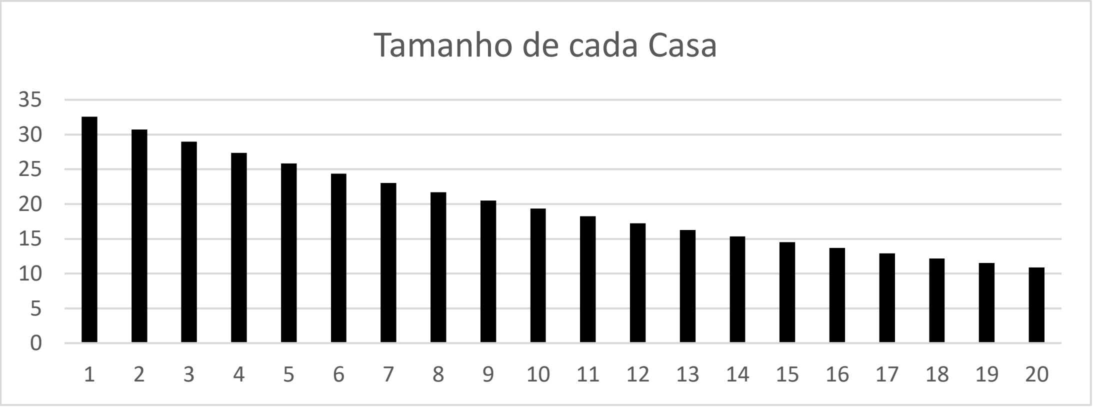


Gráfico 8

Abaixo segue o gráfico de demonstração da escala

ESCALA COM 582 mm DE COMPRIMENTO		
Ondem do Traste	Distância do Rastilho	Tamanho da Casa
1	549,3348	32,66515
2	518,5031	30,831796
3	489,4017	29,10134
4	461,9337	27,468008
5	436,0074	25,926347
6	411,5361	24,471213
7	388,4384	23,097749
8	366,637	21,801372
9	346,0593	20,577755
10	326,6365	19,422814
11	308,3038	18,332696
12	291	17,30376
13	274,6674	16,332575
14	259,2515	15,415898
15	244,7009	14,55067
16	230,9669	13,734004
17	218,0037	12,963173
18	205,7681	12,235606
19	194,2192	11,548875
20	183,3185	10,900686

Tabela 5

Tal conceito pode ser explorado em outros instrumentos de traste, como violão, guitarra, bandolim, entre outros, conhecendo apenas o comprimento da corda do instrumento.

É importante que se explore alguns dos conceitos mencionados acima para fazer uso do experimento dos pitagóricos, o monocórdio, e trabalhar com atividades que relacionam, por exemplo, um determinado comprimento L aos intervalos produzidos por 4L/9; ou então, sabendo que L corresponde a uma determinada nota então qual deverá ser o comprimento que produzirão duas quartas acima, ou uma quinta acima. Como estas, várias outras questões podem ser trabalhadas de modo a explorar os conceitos de razão com o uso do monocórdio, o qual pode ser facilmente construído com dois cavaletes fixos à um pedaço de madeira, um fio ligando estes e um outro cavalete móvel para deslizar sobre a madeira e determinar os intervalos correspondentes.

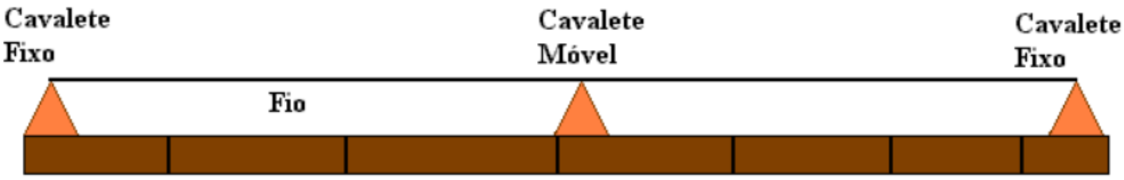


Figura 9: Monocórdio de cavalete

5.6 Proposta de Construção de uma Flauta para alunos do Ensino Fundamental

Para alunos do Ensino Fundamental, a aplicação prática das frações é de fundamental importância. Existem inúmeros exemplos que podem ser utilizados, a construção de uma flauta Pan é uma opção muito interessante, uma vez que a mesma poderá ser construída utilizando canudos, ou qualquer tipo de tubo, e suas proporções são somente números racionais. No exemplo, serão utilizados canudos plásticos com 10 mm de diâmetro por 210 mm de comprimento, que podem facilmente ser encontrados em lojas de produtos descartáveis, a um custo de R$ 8,50 um pacote com 100 unidades. Para a vedação, borrachas escolares de 8 mm de espessura, mas outro tipo de material como EVA ou cortiça podem ser usados e o canudos serão unidos uns aos outros utilizando-se cola quente.

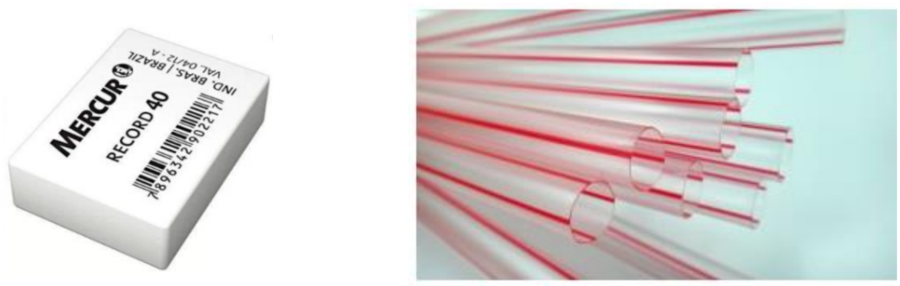


Figura 10: Objetos para construção da Flauta Tipo Pan

A flauta seguirá o exemplo da figura 11.

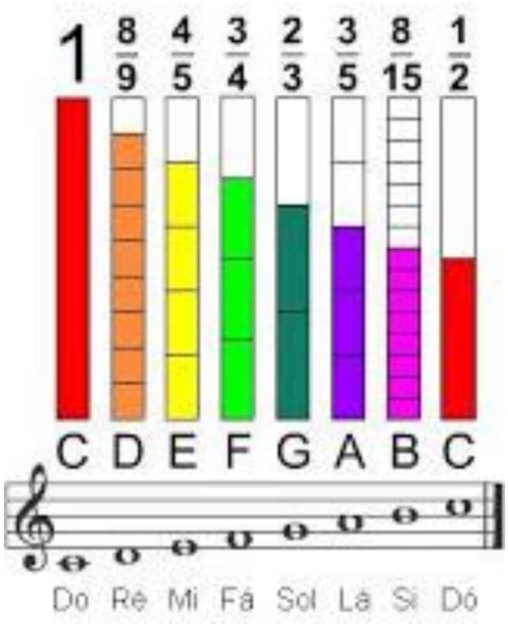


Figura 11: Intervalo de oitava

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Construcao_Flauta_Pan.jpg

Afinado o tubo maior em $DÓ$, mostra-se aos alunos as frações que representam cada uma das outras notas em reação a ele. Notem que se trabalha aqui com frações mais simples que as apresentadas por Pitágoras. Para relembrar, observe parte de um teclado de piano desconsiderando as teclas com acidentes (teclas pretas). Intervalo das oitavas completo

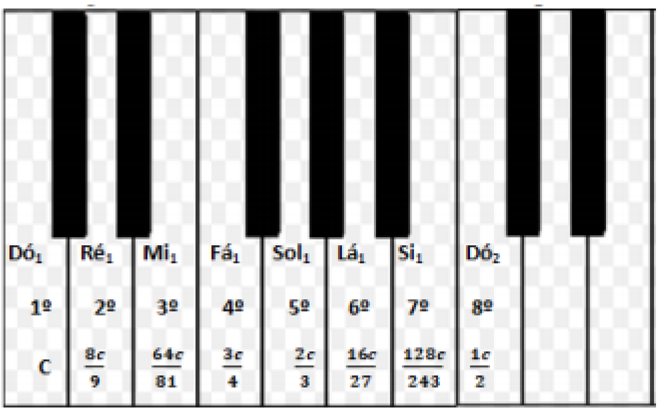


Figura 12: Intervalo da oitava de Pitagóras

Fonte: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15170/DIS_PPGMRN_2018_CHAVES_MARIEL.pdf?sequence=2&isAllowed=y

A simplificação das razões entre os intervalos e comprimentos das cordas, foi proposto pelo teórico italiano Chioggia Gioseffo Zarlindo e ficou conhecida como Simplificações de Zarlindo. Tais mudanças foram facilmente acolhidas pela simplicidade das novas razões. Intervalo de oitava de Zarlindo

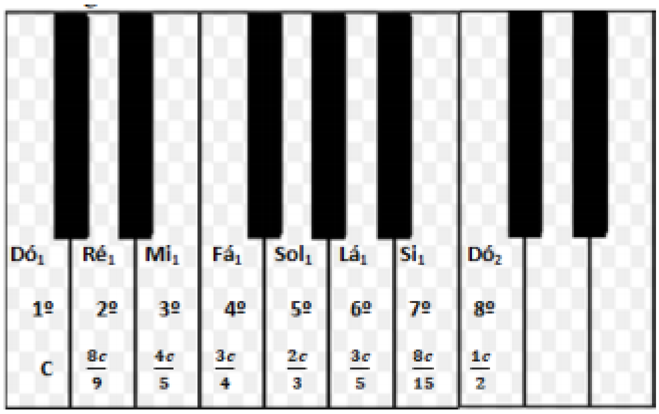


Figura 13: Intervalo da oitava de Zarlindo

Fonte: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15170/DIS_PPGMRN_2018_CHAVES_MARIEL.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Para que se possa afinar o primeiro nota em $D\acute{O}$, utiliza-se um afinador Phoenix PT 850, caso o leitor tenha habilidades musicais poderá afinar apenas ouvindo o som produzido ao soprar o canudo.

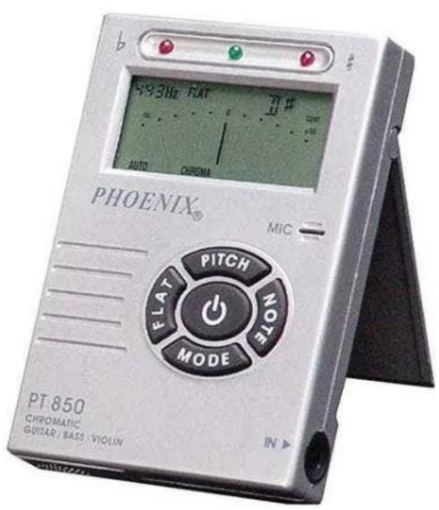


Figura 14: Afinador Phoenix

Inicialmente trabalha-se com sete canudos de 210 mm com uma das extremidades vedadas com uma borracha de 8 mm, dando assim um comprimento interno de 202 mm. Todas as medidas devem partir das medidas internas e a borracha poderá ser levemente deslocada para ajuste das notas procuradas. Com o canudo de 202 mm tem-se $RÉ\#$. Para chegar em $DÓ$, se deve cortar pedaços da extremidade livre do canudo, até alcançar a nota desejada, quando o canudo ficará com 159 mm. Partindo do tamanho do primeiro canudo, se constrói os demais usando as proporções propostas por Zarlindo.

TABELA REFERENTE AO TAMANHO DE CADA CANUDO

NOTA	PROPORÇÃO DO CANUDO	TAMANHO DO CANUDO EM mm
C	1	159
D	8/9	141,3
E	4/5	127,2
F	3/4	119,3
G	2/3	106,0
A	3/5	95,4
B	8/15	84,8
C	1/2	79,5

Tabela 6: Tamanho de cada Canudo

Com auxílio dos valores encontrados na tabela, parte-se para a confecção dos demais canudos.

Determinado os canudos referentes a cada nota, eles passarão por uma conferência no afinador digital, há também aplicativos para smartphones disponíveis na internet que fazem o mesmo trabalho, porém são necessários ajustes no tamanho de alguns canudos. Os ajustes são feitos cortando pequenas porções de cada canudo até que se chegue à nota desejada. As medidas dos canudos sofrem algumas alterações referentes às apresentadas na tabela. Alguns ajustes também podem ser feitos deslocando-se de forma suave a borracha que veda uma das partes do canudo.

Foram confeccionadas flautas de duas formas: primeira a que os canudos foram dispostos com um certo distanciamento entre eles, usando-se pedaços de canudos cortados e colados com cola quente junto aos canudos que já estavam afinados nas respectivas notas da primeira oitava e presos por uma pequena placa de acrílico para que tivessem mais firmeza para segurá-la.

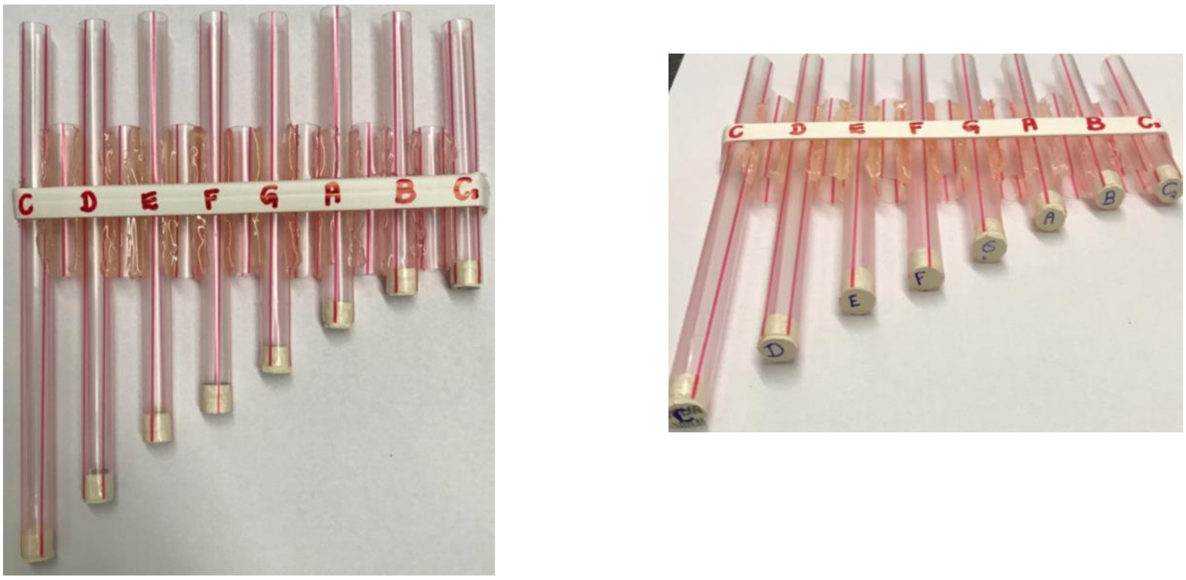


Figura 15: Flautas de Canudos

No outro modelo, os canudos foram colados de forma que não tivessem nenhum intervalo entre as notas musicais.

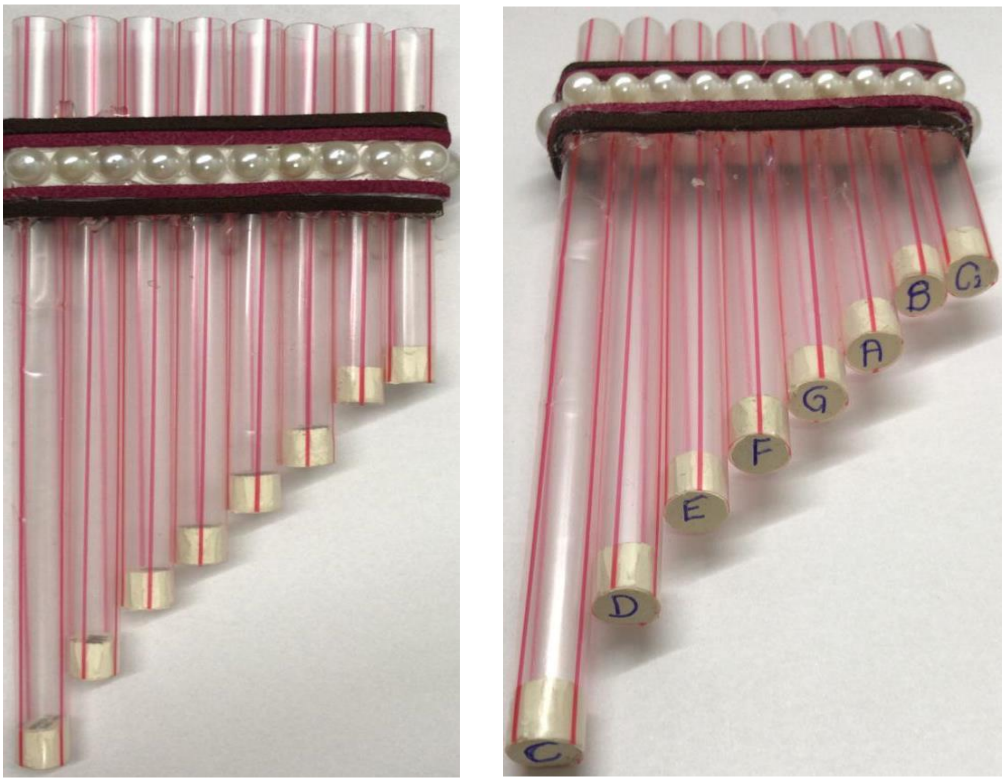


Figura 16: Flautas de Canudos

Com o auxílio de um palito de madeira, podemos controlar a altura de cada borracha de vedação, a fim de auxiliar a afinação de cada canudo.

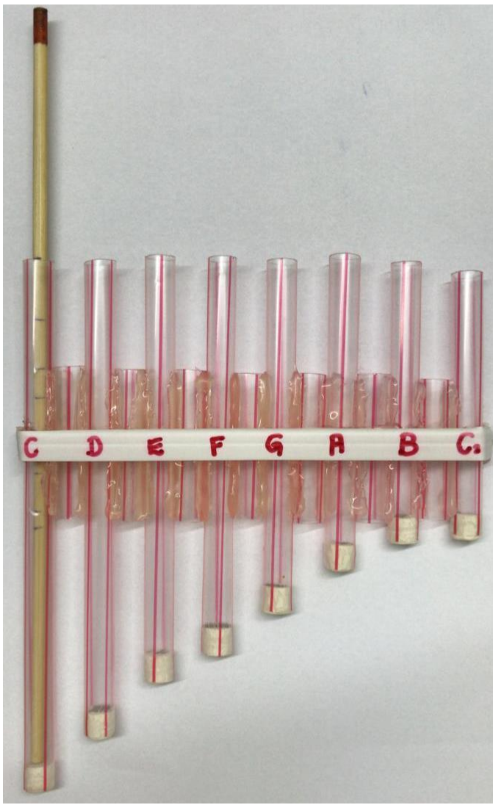


Figura 17: Flauta de Canudo

Quando alguma melodia é tocada, nota-se que o primeiro modelo se torna mais eficaz, pois com o distanciamento dificilmente serão tocadas duas notas ao mesmo tempo; já no segundo caso, a pessoa deverá ter mais habilidade para que a reverberação do som não se dê por duas notas ao mesmo tempo. Para turmas iniciantes, o primeiro modelo se mostra mais eficaz e mais fácil para tocar melodias que exijam apenas uma oitava.

5.7 Proposta de Construção de uma Flauta para Alunos do Ensino Médio

Alguns instrumentos musicais de sopro utilizam o princípio das ondas estacionárias para produzir som. Neste trabalho, esse assunto não será tratado apesar da flauta pan consistir em uma sequência de tubos fechados em uma de suas extremidades. Para alunos do ensino médio, pode-se apresentar o comportamento logarítmico mais aparente das notas em outros instrumentos que não possuem trastes, como xilofone, lira, piano de cauda, violino e outros. Instrumentos como os mencionados deixam mais interessante os estudos, pois pode-se utilizar estratégias mais palpáveis abordando através da música, conteúdos não só da matemática, mas também da física, proporcionando assim uma interdisciplinaridade.

Segue-se uma estratégia que será a construção de uma flauta semelhante da figura 18 com tubos de PVC de medidas iguais a 1/4 de polegadas.

Figura 18: Flauta Pan de Bambu

Constrói-se um conjunto de treze tubos que reproduzem uma oitava da escala logarítmica. Parte-se do menor tubo, o qual reproduzirá a nota mais aguda da escala e determinará o comprimento dos outros 12 tubos, em uma progressão geométrica de razão $q = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$.

Ao escolher um comprimento de tudo que produza o $DÓ_{2ª}$ de 256 Hz e sabendo que 344 m/s é a velocidade de propagação do som no ar a uma pressão de 1 atm e uma temperatura de 20°. Como $V = \lambda \cdot f$, onde V é a velocidade de propagação do som, λ é o comprimento de onda e f é a frequência, tem-se:

$$344 = 256 \cdot \lambda \rightarrow \lambda = \frac{344}{256} \rightarrow \lambda = 1{,}34375$$

Considerando um tubo fechado de comprimento k, tem-se que $\lambda = 4k$. Assim o comprimento do tudo será:

$$\lambda = 4 \cdot k \rightarrow 1{,}34375 = 4 \cdot k \rightarrow k = \frac{1{,}34375}{4} \rightarrow k = 0{,}3359$$

Partindo do primeiro tubo e conhecendo a razão $q = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$ entre eles, determina-se o tamanho dos outros tubos.

Ordem das Notas	NOTAS	Comprimento do tubo (m) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
1	DÓ	0,3359
2	DÓ#	0,355873653
3	RÉ	0,377035002
4	RÉ#	0,39945467
5	MI	0,423207481
6	FÁ	0,448372707
7	FÁ#	0,475034336
8	SOL	0,503281347
9	SOL#	0,533208013
10	LÁ	0,564914212
11	LÁ#	0,598505759
12	SÍ	0,634094763
13	DÓ	0,6718

Tabela 7

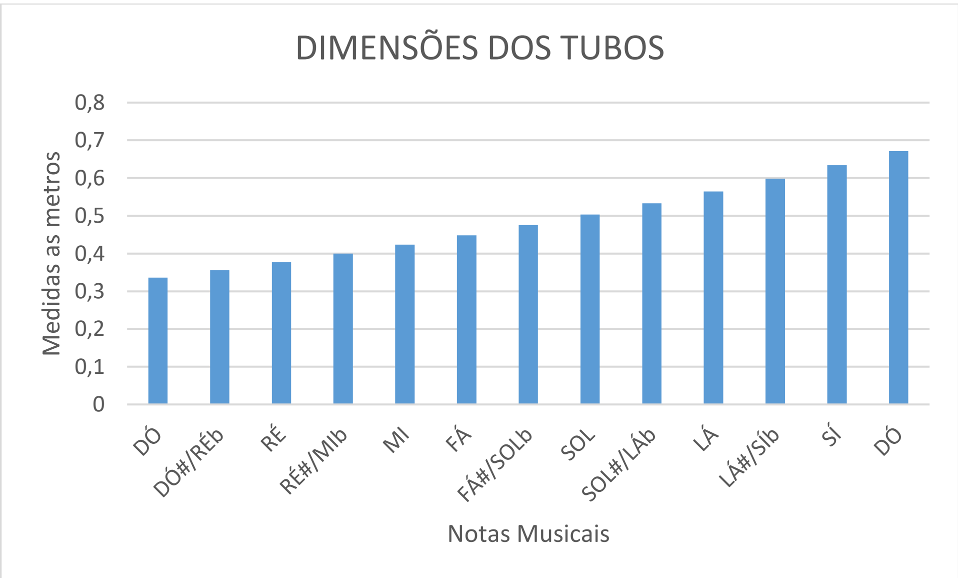


Gráfico 9: Dimensões dos Tubos

6 UTILIZAÇÃO DE LOGARITMOS NA ESCALA TEMPERADA

Ao analisar os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, percebe-se que o Ensino dos Exponenciais e Logaritmos ocorre antes do Ensino das Progressões Aritméticas e Geométricas. A maioria dos professores prefere seguir a cronologia do livro didático, não sendo possível caracterizar as funções exponenciais e logarítmicas de forma adequada. Alguns materiais didáticos de franquias, também obedecem a mesma ordem, e em alguns casos, tais conteúdos são trabalhados por professores diferentes, mas tal fato não prejudica a caracterização. Outros materiais trazem as Progressões primeiro e as Funções Exponenciais e Logarítmicas depois, mas devido a cronogramas apertados e prazos justos, os conteúdos também são trabalhados sem a caracterização correta. Portanto, são necessárias algumas mudanças, ajustes para estudar as Progressões Aritmética e Geométrica antes dos Logaritmos e ajustes de tempo para que se possa trabalhar suas caracterizações.

Na questão dos livros didáticos, tais ajustes não seriam difíceis, uma vez que os conteúdos são flexíveis, podendo o professor em seu planejamento, ajustar a ordem dos conteúdos de forma a melhor atender o processo de ensino aprendizagem de seus alunos, sem deixar de lado o rigor matemático, porém apresentando tais conteúdos de forma significativa para seus alunos.

Na questão dos materiais apostilados, não seria tão fácil assim, pois alguns materiais trabalham Exponenciais e Logaritmos no 3º Bimestre e Progressão Aritmética e Geométrica no 4º Bimestre com professores distintos. Mas outros materiais apostilados, trabalham primeiro as progressões para depois introduzir o conceito de exponencial e logaritmo, versão mais produtiva e coerente para a apresentação dos logaritmos. Porém, os professores irão esbarrar na questão do tempo, pois as aulas são programadas e no cronograma, no desenvolvimento didático não existe tal apresentação. A sugestão seria para que o professor utilizasse aulas extras para apresentar aos alunos a beleza e magia dos logaritmos. Poderiam desenvolver projetos interdisciplinares envolvendo professores de Arte, professores de Música para tornar mais belo ainda tal conteúdo.

A escala temperada representada linearmente foi apresentada no Capítulo 5, agora se observará os intervalos representados em uma curva, chamado por *Bernoulli* de *spira mirabili.* A curva, para ser definida, deve ter $r > 0$ e $\theta > 0$, onde $P(r, \theta)$ é o ponto no plano que dista r da origem $O(0,0)$ e cuja reta determinada pela origem e P tenham um ângulo θ com a reta da abscissas, assim, o par ordenado (r, θ) é conhecido como coordenada polar do ponto P.

Tomem agora $r \coloneqq r(\theta)$, onde os pontos $(r(\theta), \theta)$ desenham uma curva no plano, quando se varia θ. A espiral logarítmica é a curva descrita pela equação $\ln(r) = a \cdot \theta$, onde a é uma constante conhecida por taxa de crescimento da espiral. Pode-se escrever a equação como:

$$\ln(r) = a \cdot \theta \leftrightarrow e^{a \cdot \theta} = r$$

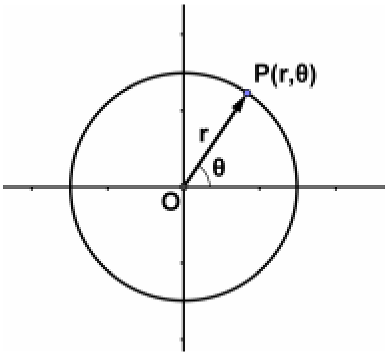


Gráfico 10: Coordenada Polar

Importante ressaltar que um aumento linear para θ, temos um aumento geométrico para r, pois:

$$r(\theta + \beta) = e^{a \cdot (\theta + \beta)} = e^{a \cdot \theta + a \cdot \beta} = a^{a \cdot \theta} \cdot a^{a \cdot \beta} = r(\theta) \cdot r(\beta)$$

A representação das notas da escala na espiral logarítmica, deve ser tal que giros de 2π radianos representem uma oitava da escala temperada e que alterando o raio tem-se também uma alteração na frequência, ou seja, $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$.

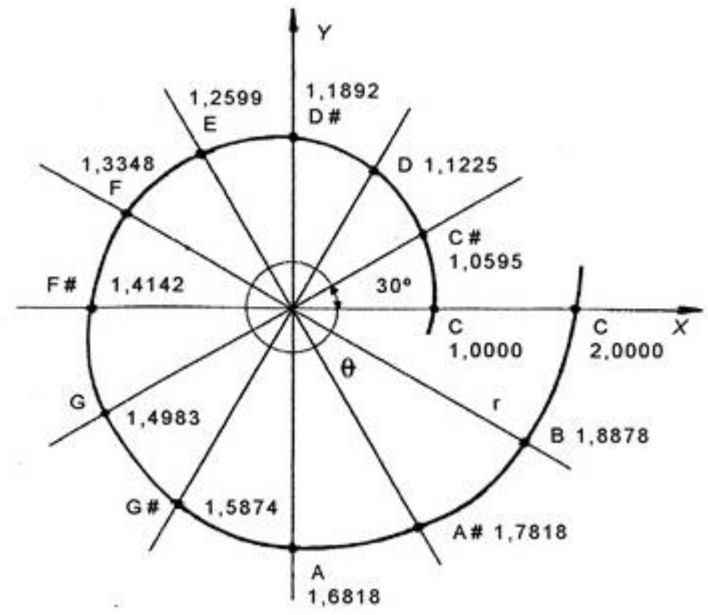


Gráfico 11: Espiral Logarítmica

Fonte: https://fmeol.wordpress.com/teoria-musical/

O intervalo de oitavas, na escala temperada, é dividido em doze parte iguais, então cada giro de 2π radianos representa uma oitava, logo o giro entre notas consecutivas será:

$$\beta = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 30°$$

Colocando a nota C_i no eixo das abscissas, tem-se $C_i\#$ na semirreta que faz com o eixo das abscissas um ângulo de 30°, e assim sucessivamente até completar um ciclo de uma oitava. Como também se busca a alteração do raio, para que assim se tenha a alteração da frequência, lembrando que a razão entre as frequências de notas consecutivas é de $2^{1/12}$, tem-se:

$$r\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = r(\theta) \cdot r\left(\frac{\pi}{6}\right) = r(\theta) \cdot 2^{1/12}$$

O que nos daria

$$e^{a \cdot \theta} \cdot e^{a \cdot \frac{\pi}{6}} = e^{a \cdot \theta} . 2^{1/12}$$

Dai,

$$e^{a \cdot \frac{\pi}{6}} = 2^{1/12}$$

elevando membro a membro a 12ª potência, temos:

$$e^{a \cdot 2\pi} = 2$$

lembrando que $ln(x_1) = ln(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2 > 0$, temos:

$$ln(e^{a \cdot 2\pi}) = ln(2)$$

como $\ln e^k = k$, temos

$$a \cdot 2\pi = \ln(2)$$

$$a = \frac{\ln(2)}{2\pi}$$

temos $r = e^{a \cdot \theta}$, logo

$$r = e^{\theta \cdot \frac{\ln(2)}{2\pi}} .$$

Vejamos a tabela construída a partir da igualdade $r = e^{\theta \cdot \frac{\ln(2)}{2\pi}}$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	1	$e^{\frac{\ln 2}{12}}$	$e^{\frac{\ln 2}{6}}$	$e^{\frac{\ln 2}{4}}$	$e^{\frac{\ln 2}{3}}$	$e^{\frac{\ln 32}{12}}$	$e^{\frac{\ln 2}{2}}$	$e^{\frac{\ln 128}{12}}$	$e^{\frac{\ln 16}{6}}$	$e^{\frac{\ln 8}{4}}$	$e^{\frac{\ln 32}{6}}$	$e^{\frac{\ln 2048}{12}}$	$e^{\ln 2}$

Tabela 8: Relação entre ângulo e raio

Observando a variação de θ tem-se uma progressão aritmética, uma variação linear, enquanto r dá uma variação geométrica, ou seja, uma progressão geométrica. Descreve-se assim uma das principais características da espiral logarítmica.

Já foi constatado que as frequências das notas musicais da primeira oitava para a segunda, e assim por diante, dobram sua quantidade de vibrações por segundo, ou seja, quando se multiplica a frequência de uma nota por k doze vezes volta-se a mesma nota, mas uma oitava acima. O ouvido humano consegue identificar o som nas frequências de no mínimo 20 Hz e no máximo 20 000 Hz. A espiral construída possui uma quantidade de voltas inferior a dez, pois o ouvido humano não seria capaz de captar nove oitavas completas.

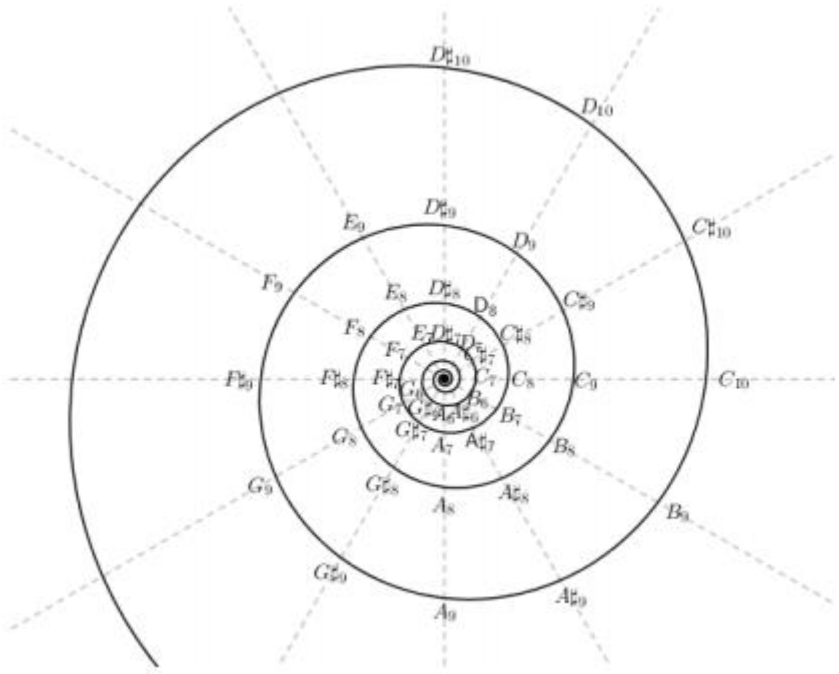


Gráfico 12: Espiral e as notas

Fonte: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94370

Em cada oitava a frequência de uma nota dobra e considerando a faixa de audição uma limitada no intervalo [20, 20 000], podemos representar por:

$$2^x = \frac{20\,000}{20}$$

sendo x o número de oitavas existentes dentro do intervalo e aplicando logaritmo em ambos os membros, temos

$$log(2^x) = log\left(\frac{20\,000}{20}\right)$$

$$x \cdot \log(2) = \log(1000)$$

$$x = \frac{3}{\log(2)}$$

considerando $\log(2) \cong 0{,}301$

$$x \cong \frac{3}{0{,}301}$$

$$x \cong 9{,}967$$

Tal fato permite definir que o ser humano só ouve até nove oitavas completas. Quando em Física se estuda a intensidade relativa de uma onda sonora medida em decibel, tem-se:

$$I_R = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Onde:

I_R: Intensidade relativa em (dB)

I: Intensidade sonora em $watt/m^2$.

I_0: A menor intensidade sonora de referência, correspondente ao limiar da audição humana em $watt/m^2$

Na relação em questão, I é a qualidade do som, onde o ouvido humano é capaz de diferenciar um som fraco de um som forte.

Se considerarmos um $I_R = 0$ dB, limiar da audição humana e substituindo na equação

$I_R = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, temos:

$$0 = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$0 = log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$10^0 = \left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$I = I_0$$

Quando $I = I_0$, temos a intensidade audível mínima. Quando realizamos o mesmo procedimento, considerando a intensidade sonora em $watt/m^2$ de uma conversa normal onde $I_R = 65\ dB$ teríamos:

$$65 = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$6{,}5 = log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$\frac{I}{I_0} = 10^{6{,}5}$$
$$I = 10^{6{,}5} \cdot I_0$$

Nota-se que a intensidade sonora de uma conversa normal ficará representa na escala no intervalo [6, 7].

Vamos agora considerar o limiar de dor, onde $I_R = 120$, segue que:

$$120 = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$12 = log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$
$$\frac{I}{I_0} = 10^{12}$$
$$I = 10^{12} \cdot I_0$$

Logo, pode-se escrever a escala logarítmica I no intervalo [0, 12]. Com o intervalo, tem-se respectivamente o limiar da audição e o da dor, assim a escala aumenta segundo uma Progressão Aritmética e I aumenta segundo uma Progressão Geométrica. Pode-se, assim, calcular qual a intensidade sonora do limiar da dor I_d em relação à intensidade sonora de uma conversa normal I_n, pela seguinte relação:

Conversa normal: $I_n = 10^{6,5} \cdot I_0$

Limiar da dor: $I_d = 10^{12} \cdot I_0$, logo:

$$I_d = 10^{5,5+6,5} \cdot I_0 = 10^{5,5} \cdot 10^{6,5} \cdot I_0 = 10^{5,5} \cdot I_n$$

Segue que, a intensidade sonora do limiar de dor é $10^{5,5}$ vezes a intensidade sonora de uma conversa normal. O que permite dizer que seria possível escrever a escala de intensidade sonora a cada ponto com sua correspondência em W/m^2. É sabido, por dados experimentais que a menor intensidade física audível, é $I_0 = 10^{-12} W/m^2$, aplicando na relação, tem-se:

$$120 = 10 \cdot log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$12 = log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$10^{12} = \frac{I}{10^{-12}}$$
$$I = 10^{12} \cdot 10^{-12}$$
$$I = 1$$

Logo, o limiar da dor tem intensidade igual a $1 W/m^2$. Como o limiar da audição ocorre quando $I = I_0$, conclui-se que o ponte de referência para 0 dB é $10^{-12} W/m^2$.

Observe a tabela:

bel	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
w/m²	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}

Tabela 9: Limiar da audição

Todos os cálculos de intensidade sonora foram feitos de dB, porém a escala adotada está em *bel*, um múltiplo do dB, ou seja, um dB é um décimo do *bel.* Vale ressaltar que a audição humana, se for exposta por um período prolongado a níveis sonoros superiores a 85 dB, poderá sofrer danos irreversíveis e quando se tem uma intensidade superior a 120 dB, ocorrerá uma sensação de muita dor. Observe que na construção da escala, foi levado em consideração um ponto máximo para limiar da dor e um ponto mínimo para limiar de audição, porém podem ocorrer intensidades sonoras superiores ao limiar da dor, no caso o som de um avião a jato supera a sensação de 10w/m².

Quando se trabalha logaritmo apenas como um amontoado de fórmulas, regras e propriedades, limita-se a uma quantidade pequena o número de alunos que possam demonstrar interesse pelo conceito, porém quando se mostra uma aplicação, uma contextualização, há uma chance muito maior de despertar o interesse dos alunos para um conteúdo tão fascinante.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após este longo trabalho de pesquisa, uma análise mais profunda permite discutir a importância dada ao aprendizado matemático e muito mais que ler e refletir o professor deve pensar como trabalhar os conteúdos de forma prazerosa e que produza os efeitos positivos e possa alcançar objetivos e metas.

Foram expostos conteúdos bastante relevantes e a pesquisa foi voltada à busca por aprofundamento, pois aprender mais a cada dia é dever do professor e sobretudo uma necessidade humana de solução para suas inquietudes. As perguntas dos educandos e dúvidas sobre determinados conteúdos levou à realização desta investigação e assim aconteceu a obtenção de novos conhecimentos.

Foram encontrados na literatura, vários autores que apontam diferentes posturas, cada qual com sua definição e características próprias e assim foi sendo adquirida a instrumentação teórico-metodológica para se construir esse conhecimento. Pode-se adquirir um conhecimento que ultrapassou o entendimento imediato sobre como concretizar a aprendizagem dos educandos a partir de novas estratégias de ensino de conceitos matemáticos.

Importante comentar que as aulas tradicionais não permitem participação da turma e assim é relevante que o professor não se prenda apenas em aulas expositivas e mude suas concepções sobre como o aluno aprende matemática.

Necessário que enquanto professores se quebrem esses paradigmas equivocados e repense cotidianamente em formas diferenciadas de ensino como estas que foram expostas na tese. Se o professor não é capaz de responder essas próprias reflexões e questionamentos, vale dizer que ainda tem muito a aprender em sua trajetória docente.

Este trabalho com certeza vai abrir horizontes ao leitor, contudo de nada valerá ler e reler estes registros se não tiver vontade para mudar seus conceitos e começar a rever sua atuação pedagógica. Já ficou provado que a musicalização dá para se trabalhar os conceitos matemáticos e uma interdisciplinaridade com os outros conteúdos poderá acontecer e assim a aprendizagem vir de encontro ao aluno.

O docente de matemática como outro, deverá levar tudo com muita seriedade, afinal esta disciplina faz parte do cotidiano de todas as pessoas e se faz então importante desde a pré-escola até o Ensino Superior.

Se o papel da escola é educar na formalidade, então seu papel na disciplina de Matemática é de promover descobertas, incentivar a socialização voltada aos trabalhos em grupo, em duplas e individual, oferecer inúmeras possibilidades de acerto nos conteúdos matemáticos.

Realizou-se o presente trabalho de pesquisa com muita dedicação, esperando que o leitor a faça valer a pena. A expectativa acadêmica é que se tenha proporcionado alguma reflexão ao leitor desta, e talvez até que se consiga uma posterior mudança de estratégias pedagógicas na sala de aula no trato com a Matemática para seus educandos.

Foi esta uma tese que deixa aberta a possibilidade de o professor vir a refletir sobre sua prática de ensino, se deve mudar, se deve melhorar e por si mesmo transformar a cultura de seus alunos fazendo com que eles se apaixonem pela Matemática sem precisar ser forçado.

Foi uma tese sistemática, explicativa e também metodológica e que representa bem a minha identidade como acadêmico e docente, contudo foi delineada pelo rigor da metodologia científica. Os objetivos foram todos atingidos em sua plenitude e por sua vez geraram novas indagações a serem futuramente pesquisadas e assim sucessivamente, dando continuidade ao processo investigativo pelo leitor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUNUR, O. J**. Matemática e Música:** O pensamento analógico na construção de significados. 4. ed. São Paulo: Escrituras, 2002.

ÁVILA, G. **Como se constrói uma tábua de Logaritmos.** Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 26, n. 26, p. 01-07, 2o sem. 1994.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

BORGES, U. dos S. **Curso de Logaritmo para o Ensino Médio com proposta de atividades alternativas**. 2014. 121 f.

BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.** Ciências Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.
Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf - PCN.
Acesso em 21/04/2020.

BRASIL/MEC. **PCN Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: DF: MEC/SEMTEC. 2002.

BRITO, R. M. **O regime fabril-artesanal de violas paulistas** -- São Carlos: UFSCar, 2015. 199 p. Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

CICLO DAS QUINTAS. Disponível em:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/52/Ciclo_de_quintas.jpg
Acesso em: 10/06/2020.

DU SAUTOY, M. **A música dos primos:** a história de um problema não resolvido na matemática. Trad. Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, Sp: Editora Unicamp, 2004.

HALLIDAY, D., R. RESNICK; WALKER, J. **Física 2**. LTC-Livros Técnicos e Científicos, 1984, ISBN 8521607067.

LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P ; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A Matemática no Ensino Médio**. Vol 1. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, E. L. **Logaritmos.** Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

MATRIZ DE REFERÊNCIA.
Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf
Acesso em 21/04/2020.

MED, B. - **Teoria da Música,** Brasília: Musimed, 1996.

MOAR, E. **A história de um número**. Trad. Jorge Calife. 4 ed.Rio de Janeiro: Record, 2009.

NICOLA, A. **Antologia Ilustrada da Filosofia: das origens à Idade Moderna**. São Paulo: Globo, 2005.

OLIVEIRA, A. P. de S. e SABBA, C. G. **Utilizando Frações da Música à Matemática.** VII CIBEM. Montevideo, 2013.

PEREIRA, M. do C. **Matemática e Música de Pitágoras aos dias de hoje**. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro-RJ 2013.PROFMAT. **Números, conjuntos e funções elementares.** Apostila disciplina MA11: Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.** Secretaria da Educação. 1. ed. atual. São Paulo: SE, 2011.72 p.

WISNIK, J.M.**O Som e o Sentido:** Uma outra história das músicas. Sp: Companhia das Letras, 1999.

ANEXOS

ANEXO 1: DOCUMENTOS OFICIAIS

Neste anexo, serão analisados alguns documentos oficiais de ensino, especificamente os do Estado de São Paulo, que abordam o ensino de Exponencial e Logaritmo, e a sua contribuição para o desenvolvimento de habilidades e competências específicas nos estudantes do ensino básico brasileiro.

É necessária uma reestruturação de todas as disciplinas que atualmente compõem o currículo escolar, pois não basta mais apresentar aos alunos fórmulas matemáticas, regras da física, regras gramaticais, tabelas de verbos, classificação de seres vivos, o essencial é pensar diferentes maneiras de proporcionar ao aluno um ambiente que possibilite a ele desenvolver autonomia e criatividade para que o processo de ensino e aprendizagem se torne significativo.

O professor é o profissional que tem a maior facilidade de se adaptar ao meio, basta analisar o período de aulas remotas devido à pandemia do COVID-19 ministradas por docentes das mais diversas maneiras e lugares, adaptando espaços de suas casas para salas de aulas sem alunos presenciais, mas ali presentes de forma virtual.

Professores que estão aprendendo a lidar com tecnologias para transmitir suas aulas por meio da rede de computadores, enfrentando problemas com internet precárias e sobrecarregadas, tiveram que buscar maneiras de atrair e prender a atenção do aluno por uma ou duas aulas por dia. Não esquecendo que a maioria dos professores em sala atualmente vêm de uma formação conhecida como tradicional.

Na forma de aula expositiva e tradicional, os docentes muitas vezes acabam reproduzindo a postura adquirida em suas aulas, contudo muitos possuem práticas docentes inovadoras, buscando cursos de capacitação, estudando em suas poucas horas livres para propor a seus educandos a melhor metodologia que possui.

Os professores têm grande preocupação em encontrar formas alternativas para ensinar matemática sem perder de vista a essência e buscando vivências que os educandos tiveram no Ensino Fundamental para que assim façam uma ligação com os conteúdos que serão trabalhados no Ensino Médio. Tais preocupações, que dizem respeito a busca de alternativas para abordagem de conceitos matemáticos, podem ser encontradas descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Conhecimentos de Matemática PCN (1999)

À medida que as pessoas se integram ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades.

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno.

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

• analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

• utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

• expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

• estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

• reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (PCN DE MATEMÁTICA, 1999, p. 40)

9.3 Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática

9.3.1 Representação e comunicação

• Ler e interpretar textos de Matemática.

• Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).

• Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.

• Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

• Produzir textos matemáticos adequados.

• Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

• Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

9.3.2 Investigação e Compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões,etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

9.3.3 Contextualização Sociocultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

• Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

• Utilizar adequadamente calculadoras e computadores, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

ANEXO 2: PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Parâmetros Curriculares Nacionais ou (PCNs) foram criados em 1996 com a finalidade de direcionar o trabalho das equipes escolares no Brasil, em particular dos professores, no que tange aos aspectos da sua prática pedagógica. Seu objetivo é uniformizar o ensino no país, garantindo que crianças e jovens brasileiros tenham as mesmas condições de acesso a uma educação de qualidade a fim de adquirirem conhecimentos para o exercício da cidadania.

Devido à enorme extensão territorial e cultural do Brasil, os PCNs podem ser adequados segundo às especificidades de cada região, não se configurando assim, como um modelo curricular impositivo, dando autonomia às escolas e aos professores. Em linhas gerais, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), se caracterizam por:

• Apontar a necessidade de unir esforços entre as diferentes instâncias governamentais e da sociedade, para apoiar a escola na complexa tarefa educativa;

• Mostrar a importância da participação da comunidade na escola, de forma que o conhecimento aprendido gere maior compreensão, integração e inserção no mundo; a prática escolar comprometida com a interdependência escola-sociedade tem como objetivo situar as pessoas como participantes da sociedade — cidadãos — desde o primeiro dia de sua escolaridade;

• Contrapor-se à ideia de que é preciso estudar determinados assuntos porque um dia eles serão úteis; o sentido e o significado da aprendizagem precisam estar evidenciados durante toda a escolaridade, de forma a estimular nos alunos o compromisso e a responsabilidade com a própria aprendizagem;

• Explicitar a necessidade de que as crianças e os jovens deste país desenvolvam suas diferentes capacidades, enfatizando que a apropriação dos conhecimentos socialmente elaborados é base para a construção da cidadania e da sua identidade, e que todos são capazes de aprender e mostrar que a escola deve proporcionar ambientes de construção dos seus conhecimentos e de desenvolvimento de suas inteligências, com suas múltiplas competências;

• Apontar a fundamental importância de que cada escola tenha clareza quanto ao seu projeto educativo, para que, de fato, possa se constituir em uma unidade com maior grau de autonomia e que todos que dela fazem parte possam estar comprometidos em atingir as metas a que se propuseram;

• Ampliar a visão de conteúdo para além dos conceitos, inserindo procedimentos, atitudes e valores como conhecimentos tão relevantes quanto os conceitos tradicionalmente abordados;

•. Evidenciar a necessidade de tratar de temas sociais urgentes chamados Temas Transversais, no âmbito das diferentes áreas curriculares e no convívio escolar;

• Apontar a necessidade do desenvolvimento de trabalhos que contemplem o uso das tecnologias da comunicação e da informação, para que todos, alunos e professores, possam delas se apropriar e participar, bem como criticá-las e/ou delas usufruir;

• Valorizar os trabalhos dos docentes como produtores, articuladores, planejadores das práticas educativas e como mediadores do conhecimento socialmente produzido; destacar a importância de que os docentes possam atuar com a diversidade existente entre os alunos e com seus conhecimentos prévios, como fonte de aprendizagem de convívio social e como meio para a aprendizagem de conteúdos específicos. (BRASIL,1998a, p. 10).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como Objetivos do Ensino Fundamental que os alunos sejam capazes de:

• Compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;

• Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;

• Conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;

• Conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;

• Perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;

• Desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;

•. Conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;

• Utilizar as diferentes linguagens — verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;

• Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;

• Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (BRASIL, 1998a, p. 55)

Visando sempre a atingir os objetivos de cada conteúdo, os Parâmetros Curriculares Nacionais foram organizados em áreas de conhecimentos e vários temas transversais, podendo sofrer adequações respeitando sempre as particularidades socioeconômicas de cada região. As áreas de conhecimento visam a inserir o cidadão na sociedade de uma forma autônoma, construindo conhecimentos significativos para o desenvolvimento de suas capacidades.

10.1 Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 : Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7: Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Os PCNEM (2002) (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) estabelecem que o trabalho docente deve ser baseado na resolução de problemas, permitindo assim aos alunos desenvolverem a capacidade de compreender teorias e técnicas matemáticas por meio dos problemas, que permitirão a investigação que resultará na construção de novos conceitos, novas estratégias e conteúdo.

Nos PCN's do Ensino Médio no item Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002), espera-se que o aluno seja competente em resolução de problemas e que através dos mesmos consiga, por si mesmo, formular estratégias e argumentos necessários para relacionar os conhecimentos já adquiridos com outros diferentes a fim de obter uma solução para os problemas propostos.

Os PCN's citam os conteúdos, exponenciais e logaritmos, com um exemplo de como a linguagem matemática ligada a uma das disciplinas correlatas (Ciências, Química ou Física) permite ao aluno visualizar a praticidade, a aplicação e a especificidade dos conteúdos que o professor está trabalhando. Assim, os PCN's referem-se aos exponenciais e logaritmos como operação que dá origem a funções matemáticas.

Possui uma linguagem matemática envolvente que pode ser utilizada em conexão com outras disciplinas de modo a tornar o conteúdo mais claro, levando-os a compreendê-lo e aplicá-lo adequadamente, conscientes da Álgebra utilizada.

O entendimento adequado dos exponenciais e logaritmos são essenciais na valorização da Matemática e a resolução de problemas como recurso, facilita e promove a construção do conhecimento.