



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL-PROFMAT

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS USANDO O GEOGEBRA

CAMILA COSTA MENEZES MONTEIRO

TRÊS LAGOAS

2020

CAMILA COSTA MENEZES MONTEIRO

**UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS USANDO O GEOGEBRA**

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT- da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS, Câmpus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade

TRÊS LAGOAS

2020

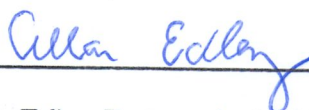
TERMO DE APROVAÇÃO

UM ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS USANDO O GEOGEBRA

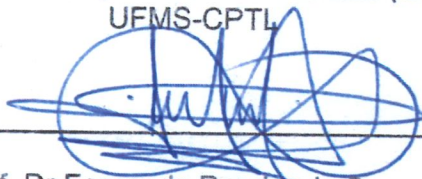
por

CAMILA COSTA MENEZES MONTEIRO

Esta dissertação foi apresentada em 15 de Dezembro ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT- da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS, Câmpus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática. A Banca Examinadora foi composta pelos professores abaixo assinados



Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade (Orientador)
UFMS-CPTL



Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
UFMS/CPTL



Prof. Dr. José Antônio Menoni
UFMS/CPTL

Dedico este trabalho ao meu esposo
Monteiro e a minha mãe Vera, pelo apoio
e paciência sempre presentes nesta
relação de amor, carinho e confiança, que
me estruturaram para chegar até esta
conquista.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me fortificar e proteger durante toda a caminhada deste projeto, permitindo mais esta conquista e realização profissional.

Gostaria de agradecer, a todo o corpo docente deste curso, e principalmente, ao professor que foi fundamental nesta etapa da monografia, que aceitou o desafio de me orientar e possibilitou a conclusão deste trabalho. Ao meu professor, orientador Dr. Allan Edley Ramos de Andrade, muito obrigado pela paciência, parceria e ensinamentos.

O meu reconhecimento a minha família, que será sempre minha base, me apoiando diante dos desafios e compreendendo minha ausência, possibilitando assim a finalização desta jornada de estudos ao qual me dediquei.

Aos meus colegas de sala, uma gratidão eterna pela amizade, união, respeito e compartilhamento dos ensinamentos. Em especial, ao Anderson, ao Diego, a Cecilia e a Thainá, que sempre estivemos unidos pelas viagens, estudos e que em diversos momentos foram fundamentais motivadores, sempre me apoiando para seguir em frente.

Finalizo, deixando o meu muito obrigado, a todos que não citei, e que colaboraram nesta importante fase da minha vida e contribuíram para a realização e conclusão deste projeto.

RESUMO

Este trabalho traz como proposta um material didático pedagógico, focado na abordagem da trigonometria, explorando as construções das razões trigonométricas no triângulo retângulo e relacionando sua representatividade e transição para o ciclo trigonométrico. Nesse contexto, desde as definições e construções dos elementos iniciais da trigonometria e das funções trigonométricas, todas são trabalhadas com o objetivo de permitir uma melhor compreensão das resoluções e das determinações das soluções, quando abordamos as equações e inequações trigonométricas. Como extensão das definições e construções geométricas apresentadas, elaboramos uma proposta com construções sequenciais, utilizando o software GeoGebra, explorando as representações gráficas, simulando o comportamento dos elementos trabalhados. Espera-se que este trabalho possa ser um material norteador para o professor, agregando novas ferramentas, permitindo ao educador promover uma aprendizagem mais significativa para os alunos, trazendo dinamismo e movimento na abordagem da trigonometria.

Palavras-chave: Ensino da Trigonometria, Ciclo Trigonométrico, Equações, Inequações, Geogebra

ABSTRACT

This work proposes a pedagogical material, focused on the approach of trigonometry, exploring the construction of trigonometric ratios in the right triangle and relating its representativeness and transition to the trigonometric cycle. In this context, since the definitions and constructions of the initial elements of trigonometry and trigonometric functions, they are worked with the objective of allowing a better understanding of the resolution and determination of solutions when approaching the trigonometric equation and inequalities. As an extension of definitions and geometric constructions presented, we prepared a proposal with sequential constructions, using the GeoGebra software, exploring the graphical representations, simulating the behavior of the worked elements. It is expected that this can be a guiding material for teacher, adding new tools, thus allowing the educator to promote a more meaningful learning for the students, bringing dynamism and movement in the approach of trigonometry.

Keywords: Teaching of Trigonometry, Trigonometric cycle, Equations, Inequations, GeoGebra

INTRODUÇÃO	1
1 ENSINO DA MATEMÁTICA E O USO DAS TECNOLOGIAS	3
2 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	5
2.1 TRIÂNGULOS RETÂNGULOS	5
2.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	6
2.3 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	7
2.4 ÂNGULOS NOTÁVEIS.....	9
3 ARCOS E CICLO TRIGONOMÉTRICO	12
3.1 CIRCUNFERÊNCIA E ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA.....	12
3.2 MEDIDA DE ARCOS.....	13
3.3 CICLO TRIGONOMÉTRICO	14
4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	17
4.1 FUNÇÃO SENO.....	17
4.2 FUNÇÃO COSSENO	19
4.3 FUNÇÃO TANGENTE.....	22
4.4 RELAÇÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	25
5 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	27
5.1 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS	27
5.1.1 Resolução da equação $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$	27
5.1.2 Resolução da equação $\text{cos}(x) = \text{cos}(\theta)$	28
5.1.3 Resolução da equação $\text{tg}(x) = \text{tg}(\theta)$	29
5.2 OUTRAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	30
6 INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	34
6.1 INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS.....	34
6.2 INEQUAÇÕES DO TIPO $\text{sen}(x) > m$	34
6.3 - INEQUAÇÕES DO TIPO $\text{sen}(x) < m$	36
6.4 - INEQUAÇÕES DO TIPO $\text{cos}(x) > n$	38
6.5 - INEQUAÇÕES DO TIPO $\text{cos}(x) < n$	39
6.6 INEQUAÇÕES DO TIPO $\text{tg}(x) > t$	41

6.7 INEQUAÇÕES DO TIPO $tg(x) < t$	43
7 O GEOGEBRA E AS CONSTRUÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	45
7.1 CICLO TRIGONOMÉTRICO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.....	45
7.2 VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	52
7.3 CONSTRUINDO AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.	66
7.4 CONSTRUINDO AS SOLUÇÕES DAS INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	72

INTRODUÇÃO

Durante minha experiência como professora de Matemática pude observar muitas dificuldades no processo de ensino aprendizagem, principalmente no que se refere aos conceitos de trigonometria, neste sentido este trabalho tem por objetivo fornecer um material de apoio ao docente que for lecionar essa temática e de sugerir algo norteador dentro deste contexto, visando minimizar as dificuldades na prática do professor, no ensino da trigonometria.

Neste trabalho usamos de ferramentas que auxiliam no entendimento do ensino. Iniciamos este projeto com o objetivo de sugerir algo norteador dentro deste contexto, visando minimizar as dificuldades na prática do professor, no ensino da trigonometria.

Este trabalho aborda na sua parte conceitual uma sequência didático-pedagógica, detalhada desde as relações da trigonometria no triângulo retângulo, até o ciclo trigonométrico, e na resolução de equações e inequações trigonométricas. O contexto de trigonometria aqui abordado é o predominante no ensino médio, também traz parte do conteúdo utilizado no ensino fundamental. Elaboramos uma proposta de construções geométricas, a partir do ciclo trigonométrico, com a finalidade de se analisar o comportamento das funções e, de possibilitar a associação das soluções, algébricas e geométricas, de equações e inequações trigonométricas.

No capítulo 1, realizamos algumas considerações sobre a questão do uso de tecnologias em sala de aula fazendo citação a alguns autores e a BNCC.

No capítulo 2, realizamos um estudo sobre relações métricas no triângulo retângulo, trazendo o cálculo para os ângulos notáveis (30° , 45° , 60°) com base em construções e propriedades básicas da geometria plana.

No capítulo 3, para dar um embasamento teórico para os capítulos posteriores, abordamos alguns conceitos básicos da teoria como medidas de arcos e ângulos, construção do ciclo trigonométrico, e arcos côngruos.

No capítulo 4, abordamos um estudo sobre as definições e propriedades gráficas das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, com o intuito de dar um embasamento teórico para o capítulo de Equações e Inequações trigonométricas, além de trazer algumas relações trigonométricas que serão importantes para os capítulos posteriores.

No capítulo 5, trabalhamos a temática equações trigonométricas, trazendo a resolução das equações trigonométricas fundamentais, utilizando-se de uma abordagem geométrica fazendo uso do ciclo trigonométrico.

No capítulo 6, trabalhamos a temática inequações trigonométricas, trazendo a resolução das inequações trigonométricas fundamentais, utilizando-se novamente uma abordagem geométrica fazendo uso do ciclo trigonométrico.

No capítulo 7, apresentamos um tutorial das construções geométricas feitas nos capítulos anteriores, além de apresentar propostas de atividades no GeoGebra.

Todas as figuras que contidas nesse trabalho foram feitas e/ou editadas pelo autor, utilizando o software GeoGebra, ou ainda a ferramenta PowerPoint do pacote office do Windows. o GeoGebra pode ser baixado através do site <<https://www.geogebra.org/download>>, tendo versões para o Windows e ainda para Smartphones, ou acessado em <https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT > na sua versão online, não havendo a necessidade de baixar, é um Software completo e gratuito, que permite sua utilização em diversas etapas de ensino.

1 ENSINO DA MATEMÁTICA E O USO DAS TECNOLOGIAS

Na área da matemática e suas tecnologias, temos definidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pares de ideias fundamentais, de importância para o desenvolvimento do pensamento matemático, que produzem articulação entre os vários campos da matemática promovendo a integração entre eles.

A BNCC traz, como uma de suas competências específicas de matemática e suas tecnologias para o ensino médio:

“Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático” (BRASIL, 2018, pg. 530).

Sobre a utilização dos computadores, dentro do contexto matemático de aprendizagem, para que sua utilização nos auxilie, deverá haver uma reorganização e reestruturação quanto a didática do professor, assim vale notabilizar que:

“tal inserção requer mudanças na forma como o professor organiza e avalia sua aula, no relacionamento com os alunos e, no caso específico da Matemática, na própria forma como concebem muitos dos conceitos Matemáticos” (ZULATTO, 2002)

Esse trabalho tem o intuito de expressar formas de ensinar esse conteúdo através do software GeoGebra, software este gratuito e com diferentes formas de acesso. Acreditamos que a abordagem do GeoGebra para a construção das funções trigonométricas e a dinâmica do seu gráfico associado ao ciclo trigonométrico permite aos educandos compreender melhor o conteúdo e faz com que os alunos consigam aflorar o intuitivo matemático podendo fazer associações geométricas das soluções algébricas.

O uso das TICs - Tecnologias da Informação e Comunicação é uma forma de chamar a atenção e manter o foco dos alunos que cada vez mais perdem o interesse por conteúdos dados de maneira tradicional sem uso de novas tecnologias. Dentro deste contexto podemos destacar

“As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes (MORAN, 2007, p. 164).”

No ensino e aprendizagem de trigonometria, ao utilizarmos os softwares, podemos destacar algumas potencialidades, como por exemplo a possibilidade da construção e visualização de elementos de forma dinâmica, o que nos permite uma investigação e simulação, assim como criar argumentação dentro da proposta apresentada. Para (ZULATTO, 2007), ao oportunizar a interação com os vários recursos tecnológicos da informática, nos apropriamos de várias outras maneiras de aprendizagem. Ainda Segundo (ASSIS, 2011) temos

“A utilização dos softwares em sala de aula deve ser norteadada por interesses pedagógicos, pois o software em si, não implica em nenhuma mudança no processo educacional. Com a introdução do computador como mediador didático, desenvolveram-se softwares específicos para serem utilizados em contextos de ensino aprendizagem.”

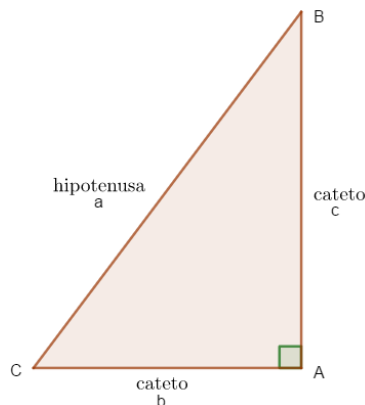
2 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo trabalharemos com relações métricas no triângulo retângulo e introduziremos algumas notações e conceitos básicos que servirão de fundamentação teórica para os demais capítulos. As referências usadas para este capítulo foram (BARBOSA, 2012) e (IEZZI, 2004).

2.1 TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

No triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto (90°), são chamados de cateto, e ao lado que se opõe ao ângulo reto, consecutivamente o maior lado, chamamos de hipotenusa.

Figura 2.1 -Triângulo retângulo



No triângulo $\triangle ABC$ retângulo em $\hat{A}$, temos os catetos medindo b e c e a hipotenusa medindo a , as medidas dos catetos e da hipotenusa estão relacionadas pelo Teorema de Pitágoras:

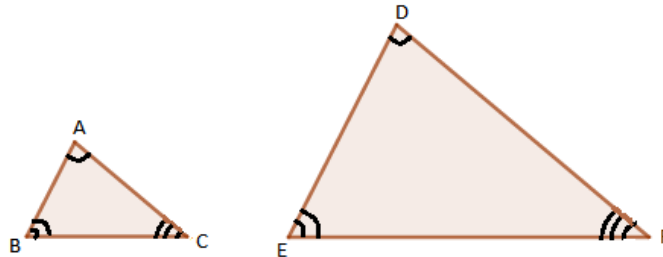
$$(\text{medida da Hipotenusa})^2 = (\text{medida do Cateto})^2 + (\text{medida do outro Cateto})^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

2.2 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Definição 2.1: Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Figura 2.2 -Triângulos semelhantes



Por exemplo, na figura 2.2 os triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes com a correspondência $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$, $C \rightarrow F$. Observe que a semelhança faz com que tenhamos as seguintes igualdades $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ e

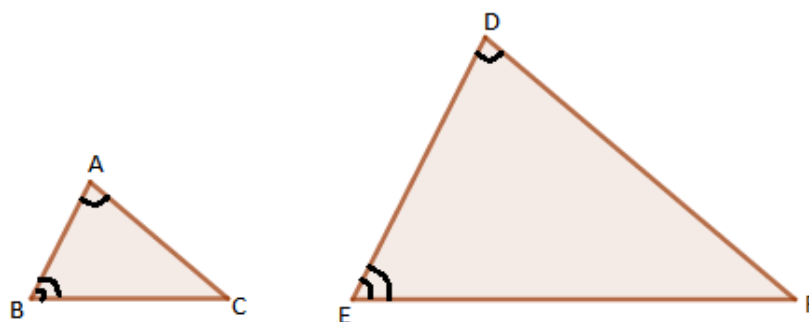
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = cte.$$

O valor *cte* é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos. Usamos a seguinte notação para representar triângulos semelhantes $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Enunciaremos a seguir alguns teoremas que estabelecem critérios para que dois triângulos sejam semelhantes, sendo que as demonstrações podem ser encontradas em (BARBOSA, 2012)

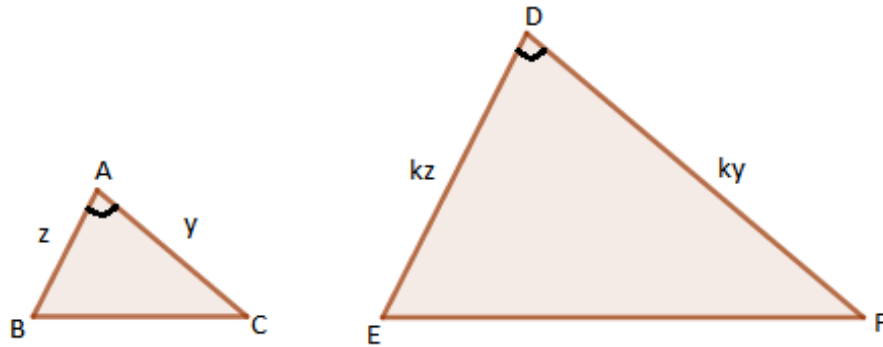
Critério AA (Ângulo, Ângulo): Dado os triângulos ΔABC e ΔDEF , se eles possuem dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.

Figura 2.3 -Triângulos semelhantes (critério AA)



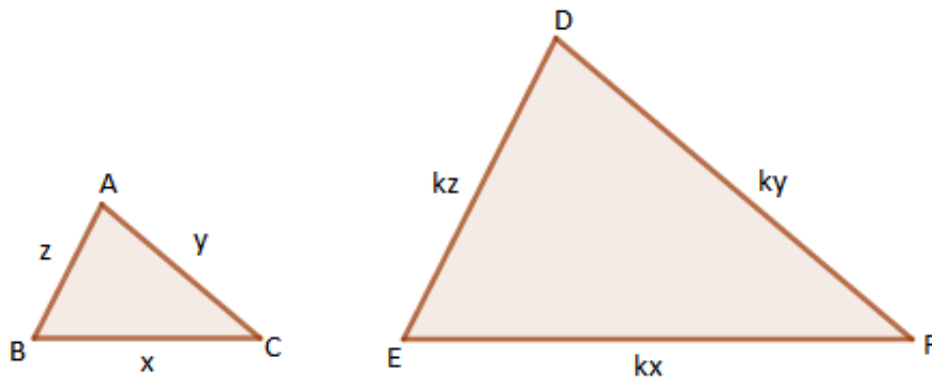
Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado): Dado os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se eles possuem um ângulo congruente e os lados que formam este ângulo são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Figura 2.4 -Triângulos semelhantes (critério LAL)



Critério LLL (Lado, Lado, Lado): Dado os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, então os triângulos são semelhantes.

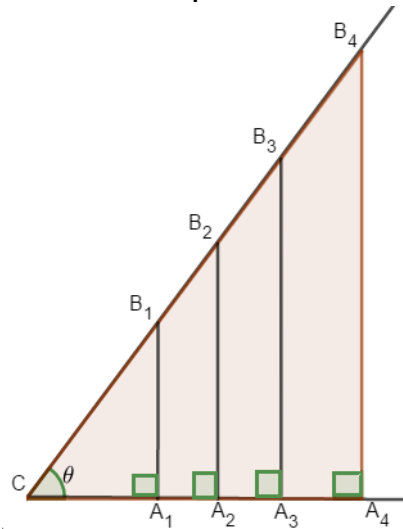
Figura 2.5 -Triângulos semelhantes (critério LLL)



2.3 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere um ângulo com vértice em C , e sob as semirretas que formam o ângulo C considere os pontos $B_1, B_2, \dots$ e $A_1, A_2, \dots$ como indicado na figura 2.6

Figura 2.6 -Triângulos semelhantes a partir de um mesmo vértice C



Observe que os triângulos retângulos ΔCA_1B_1 , ΔCA_2B_2 , ΔCA_3B_3 , ΔCA_4B_4 , ..., são todos semelhantes, pelo critério AA, possuindo um ângulo reto e um ângulo comum θ , assim temos

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{CB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{CB_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{CB_4}} = \dots = \frac{\text{medida do cateto oposto a } (\theta)}{\text{medida da hipotenusa}}$$

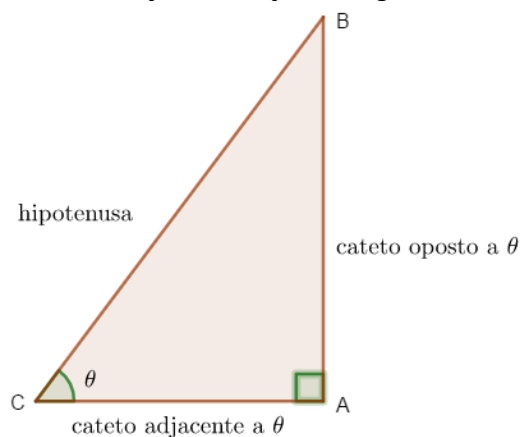
$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{CA_2}}{\overline{CB_2}} = \frac{\overline{CA_3}}{\overline{CB_3}} = \frac{\overline{CA_4}}{\overline{CB_4}} = \dots = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } (\theta)}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{CA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{CA_3}} = \frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{CA_4}} = \dots = \frac{\text{medida do cateto oposto a } (\theta)}{\text{medida do cateto adjacente a } (\theta)}.$$

Isto fundamenta e motiva a seguinte definição associado a um dos ângulos agudo de um triângulo retângulo:

Definição 2.2: Dado um triângulo retângulo ΔABC como indicado na figura a seguir

Figura 2.7 -Notação em função do ângulo θ



Chamaremos de seno do ângulo θ e indicaremos por $\text{sen } \theta$ o valor

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{C.O.}(\theta)}{\text{HIP.}}$$

Chamaremos de cosseno do ângulo θ e indicaremos por $\text{cos } \theta$ o valor

$$\text{cos}(\theta) = \frac{\text{C.A.}(\theta)}{\text{HIP.}}$$

Chamaremos de tangente do ângulo θ e indicaremos por $\text{tg } \theta$ o valor

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{C.O.}(\theta)}{\text{C.A.}(\theta)}$$

A partir destas três razões trigonométricas já construídas (seno, cosseno e tangente), podemos definir outras três, chamadas de razões inversas, denominadas por cossecante ($\text{cossec } (\theta)$), secante ($\text{sec } (\theta)$) e cotangente ($\text{cotg } (\theta)$).

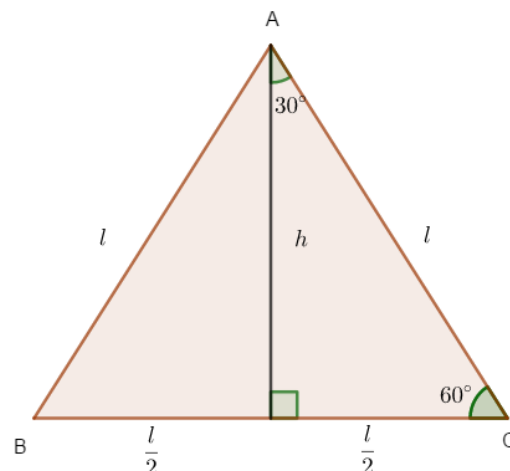
$$\text{cossec}(\theta) = \frac{1}{\text{sen}(\theta)} ; \quad \text{sec}(\theta) = \frac{1}{\text{cos}(\theta)} ; \quad \text{cotg } \theta = \frac{1}{\text{tg}(\theta)} = \frac{\text{cos}(\theta)}{\text{sen}(\theta)} .$$

2.4 ÂNGULOS NOTÁVEIS

Nesta Seção apresentaremos alguns cálculos das razões trigonométricas ($\text{sen}(\theta)$, $\text{cos } (\theta)$, $\text{tg } (\theta)$) para os ângulos de 30° , 45° e 60° (denominados ângulos notáveis). Estes cálculos serão utilizados na resolução de equações e inequações trigonométricas realizadas nos capítulos seguintes.

Utilizaremos o triângulo equilátero ΔABC , para as construções referentes às razões trigonométricas, para os ângulos de 30° e 60° . Na figura 2.8, apresentamos o ΔABC , de lado l , cuja altura h está representada pelo seguimento $(\overline{AD})$.

Figura 2.8 -Relações métricas 30° e 60°



Temos que, para todo triângulo equilátero, a altura, a bissetriz e a mediana referente a um dos lados, são congruentes, então $\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{l}{2}$ e $\widehat{CAD} = 30^\circ$, uma vez que $\widehat{BCA} = 60^\circ$. Observe que aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle ADC$ temos

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, aplicando as definições ao triângulo retângulo $\triangle ADC$ obtemos

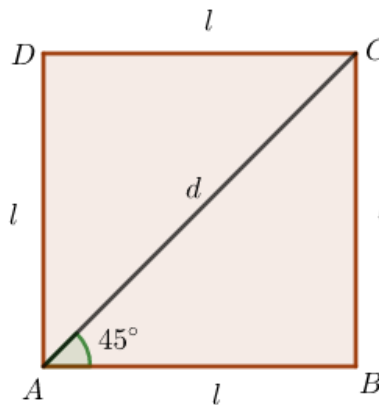
$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}; \quad \text{cos}(30^\circ) = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{tg}(30^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{2l}{l\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Analogamente, para o ângulo de 60° temos:

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{cos}(60^\circ) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}; \quad \text{tg}(60^\circ) = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}.$$

Utilizaremos o quadrado $ABCD$, para as construções referentes às razões trigonométricas, para o ângulo de 45° . Na figura 2.9, apresentaremos o quadrado de lado l , cuja diagonal d está representada pelo seguimento $(\overline{AC})$

Figura 2.9 -Relações métricas 45°



Temos que, para todo quadrado, a diagonal coincide com a bissetriz do vértice a que se refere, no caso $\widehat{CAB} = 45^\circ$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle ABC$ (veja figura 2.9), obtemos:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}.$$

Calculando as razões trigonométricas associadas ao triângulo retângulo $\triangle ABC$, temos:

$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(45^\circ) = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \text{tg}(45^\circ) = \frac{l}{l} = 1.$$

Com os resultados obtidos podemos representar os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis na tabela 2.1

Tabela 2.1: Valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Ângulos (θ)	30°	45°	60°
$\text{sen}(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

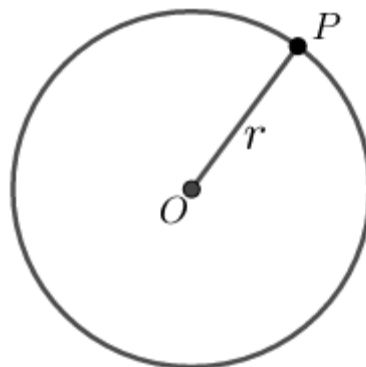
3 ARCOS E CICLO TRIGONOMÉTRICO

Neste capítulo apresentaremos de maneira sucinta a temática Ciclo trigonométrico para dar embasamento teórico para o capítulo Funções Trigonométricas. Para este capítulo usamos como referência (IEZZI, 2004), (NETO, 2013), (NETO, 2009) e (PAIVA, 2015).

3.1 CIRCUNFERÊNCIA E ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

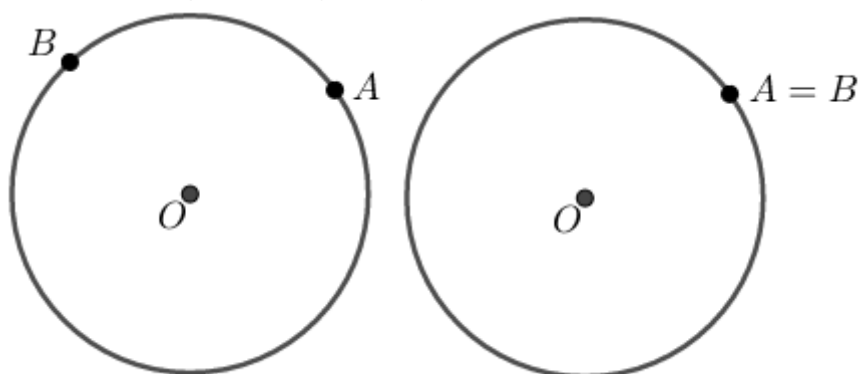
Definição 3.1: Dados um ponto qualquer O no plano e um número real positivo r , ao lugar geométrico formado pelo conjunto de todos os pontos do plano que distam r de O damos o nome de circunferência de centro O e raio r .

Figura 3.1 -Circunferência (lugar geométrico)



Definição 3.2: Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem A e B , é denominada arco de circunferência $\widehat{AB}$.

Figura 3.2 -Representação: arco de circunferência



Em particular, se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado arco nulo) e outro é a circunferência (denominado arco de uma volta).

3.2 MEDIDA DE ARCOS

Dois pontos A e B sobre uma circunferência, determinam dois arcos

Figura 3.3a -Arco de circunferência $\widehat{AB}$

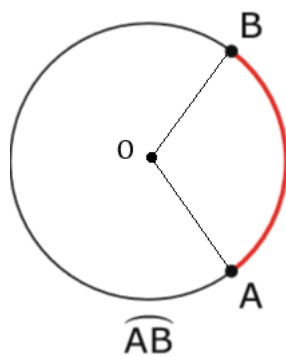
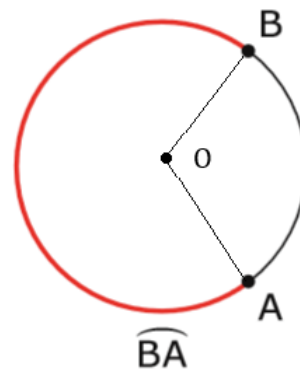


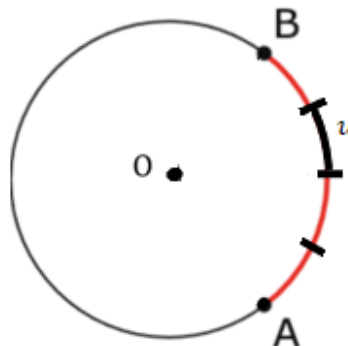
Figura 3.3b -Arco de circunferência $\widehat{BA}$



Ao nos referirmos a medida de um destes arcos temos duas formas:

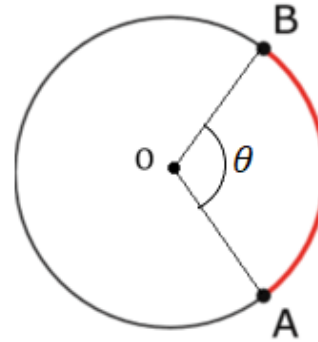
- i. Uma forma é considerar o comprimento linear do arco $\widehat{AB}$ (dimensão do contorno) expresso em medida de comprimento, sendo que a medida linear de um arco $\widehat{AB}$ é dada em função de um arco unitário u (não nulo), representada pelo número real que exprime quantas vezes o arco u “cabe” no arco $\widehat{AB}$.

Figura 3.4 -Medida linear arco de circunferência ($\widehat{AB}$)



- ii. Outra forma é quando nos referimos a sua medida angular, sendo sua medida coincidente com a medida do ângulo central ($A\hat{O}B = \theta$), assim como está representado na figura 3.5.

Figura 3.5 -Medida θ do arco de circunferência $\widehat{AB}$



Estas medidas, linear e angular, do arco de circunferência $\widehat{AB}$, são determinadas em graus ou radianos.

Grau (símbolo $^\circ$): Medida de um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

Radiano (símbolo rad): Medida de um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o raio a ser medido.

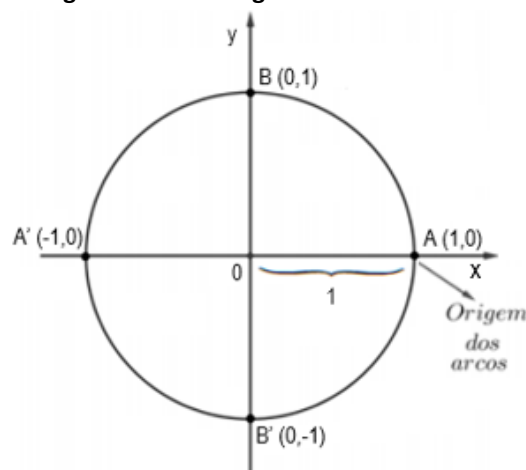
Tendo em vista as considerações acima podemos estabelecer as seguintes correspondências

Medida (rad)		Medida ($^\circ$)
2π	$\longleftrightarrow$	360°
π	$\longleftrightarrow$	180°

3.3 CICLO TRIGONOMÉTRICO

Tomemos no plano um sistema cartesiano ortogonal xOy . Consideremos a circunferência λ de centro O e raio $r = 1$.

Figura 3.6 -Ciclo trigonométrico



Na figura 3.6 são representados os pontos A (denominado origem dos arcos), B , A' , e B' determinados pela intersecção dos eixos x e y , com a circunferência unitária λ . Observe que os eixos coordenados dividem a circunferência em 4 partes iguais, denominados quadrantes da circunferência, que estão delimitados e representados conforme a figura 3.7.

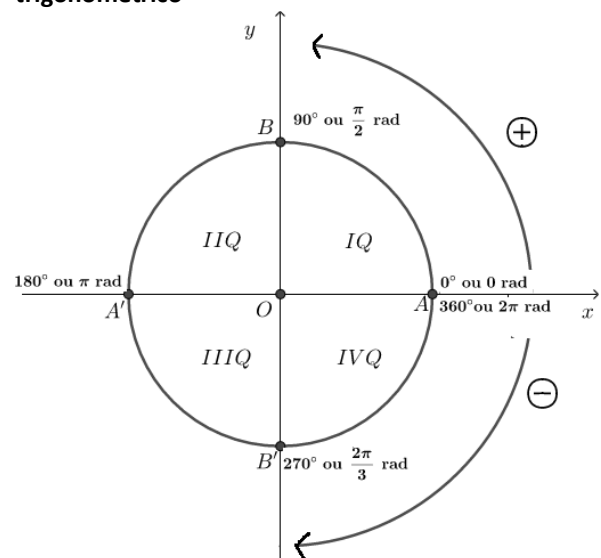
- 1ºquadrante (IQ): nesta região do ciclo estão compreendidos os arcos θ entre 0 e $\frac{\pi}{2}$;

- 2ºquadrante (IIQ): nesta região do ciclo estão compreendidos os arcos θ entre $\frac{\pi}{2}$ e π ;

- 3ºquadrante ($IIIQ$): nesta região do ciclo estão compreendidos os arcos θ entre π e $\frac{3\pi}{2}$;

- 4ºquadrante (IVQ): nesta região do ciclo estão compreendidos os arcos θ entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π .

Figura 3.7 -Quadrantes representados no ciclo trigonométrico

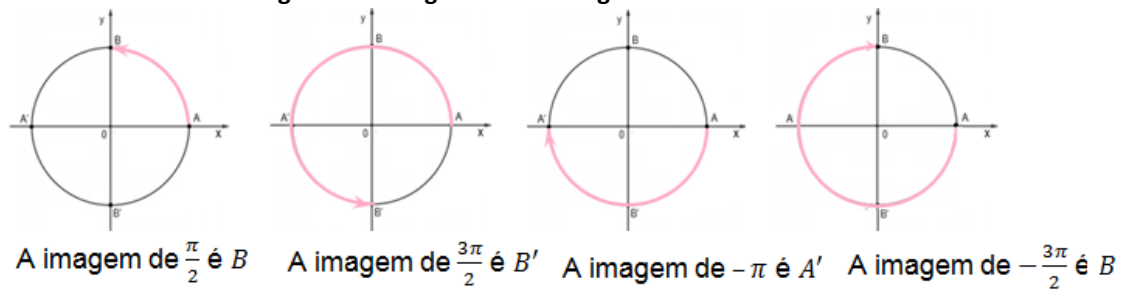


Vamos agora definir uma aplicação de $\mathbb{R}$ sobre λ , isto é, vamos associar a cada número real θ um único ponto P da circunferência λ do seguinte modo:

- i. se $\theta = 0$, então P coincide com A ;
- ii. se $\theta > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento θ , no sentido anti-horário, e marcamos P como o ponto final do percurso;
- iii. se $\theta < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|\theta|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P .

Se o ponto P está associado ao número θ dizemos que P é a imagem de θ no ciclo. Assim, por exemplo, temos:

Figura 3.8 -Imagens no ciclo trigonométrico



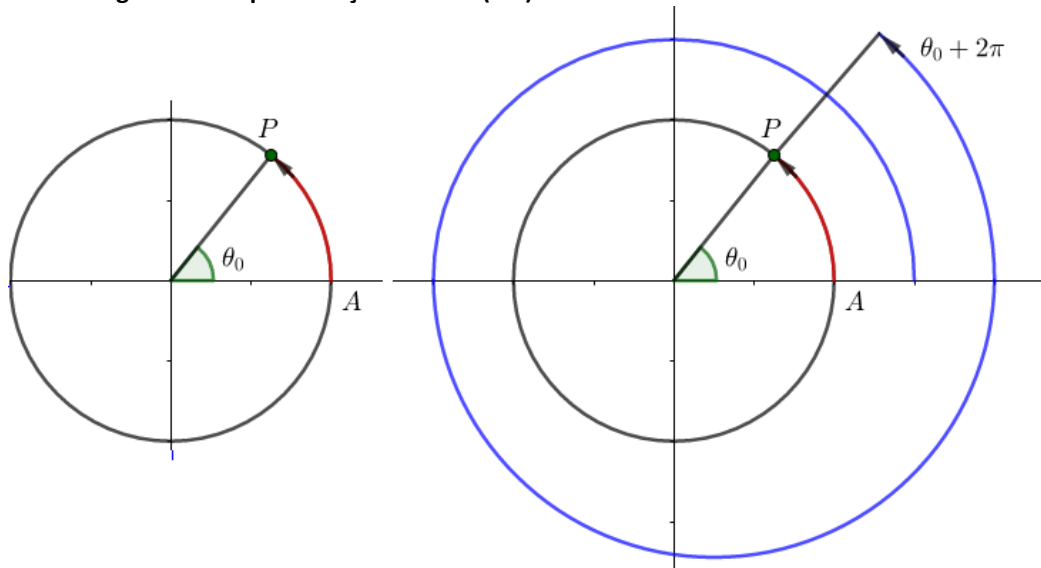
Ao considerarmos P como imagem de θ_0 , então P também é imagem dos números da forma:

$$\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

onde a constante k se refere ao número de voltas.

Definição 3.3: Dois valores θ_1 e θ_2 que possuem a mesma imagem no ciclo trigonométrico são denominados cômgruos.

Vejamos um exemplo na figura 3.9.

Figura 3.9 -Representação do arco $(\widehat{AP})$ na sua 1ª volta e na 2ª voltaTabela 3.1 -Valores da constante k e a posição do ponto P no ciclo.

Valores de k	...	-2	-1	0	1	2	...
Sentido a partir da origem A	sentido horário ←			→ sentido anti-horário			
Volta no ciclo ao qual $\in P$	...	2ª	1ª	1ª	2ª	3ª	...

4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

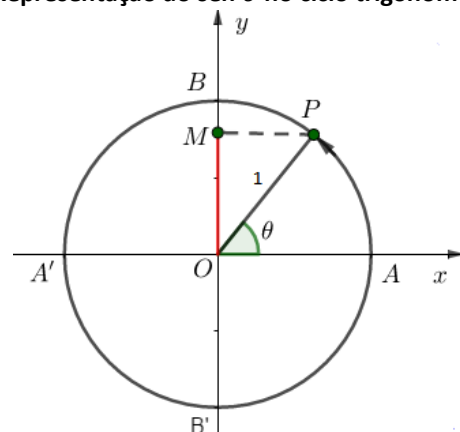
Neste capítulo usaremos os conceitos estudados anteriormente para introduzirmos as definições das funções seno, cosseno e tangente. Embora a temática do trabalho seja equações e inequações trigonométricas, entendemos que não é possível fazer uma análise de qualidade deste estudo sem entender a fundo as definições e comportamento gráfico das funções trigonométricas. Para este capítulo usamos como referências (IEZZI, 2004) e (NETO, 2009).

4.1 FUNÇÃO SENO

Definição 4.1: Dado um número real θ , tal que sua imagem no ciclo esteja representada por P . Denominaremos por seno de θ (e indicaremos por $\text{sen}(\theta)$) a ordenada $\overline{OM}$ do ponto P em relação ao sistema xOy . Chamaremos de função seno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real θ o real $\overline{OM} = \text{sen}(\theta)$, isto é:

$$f(\theta) = \text{sen}(\theta).$$

Figura 4.1 -Representação do $\text{sen } \theta$ no ciclo trigonométrico



Algumas propriedades, características da função seno, são obtidas a partir de uma análise no ciclo trigonométrico, como veremos a seguir:

- I. *Sinais da função seno:* será positiva quando $\theta \in 1^\circ\text{Q}$ ou $\theta \in 2^\circ\text{Q}$ e, será negativa quando $\theta \in 3^\circ\text{Q}$ ou $\theta \in 4^\circ\text{Q}$.

De fato, quando o ponto P , está acima, do eixo x , sua ordenada é positiva, e quando, está abaixo, sua ordenada é negativa.

Figura 4.2 -Sinal função seno 1º Q e 2ºQ

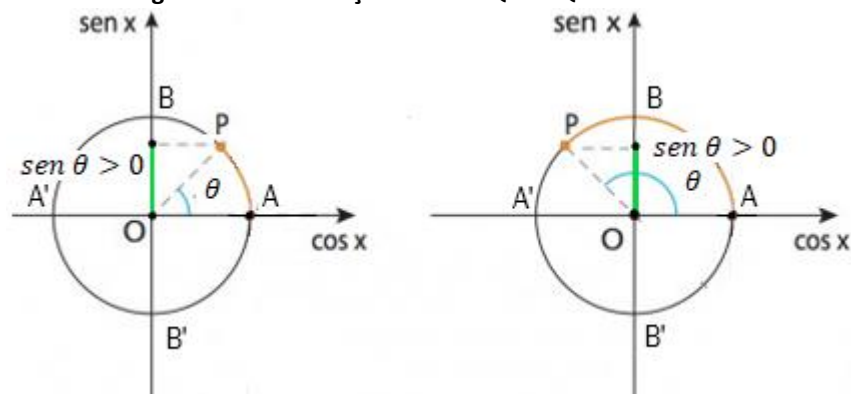
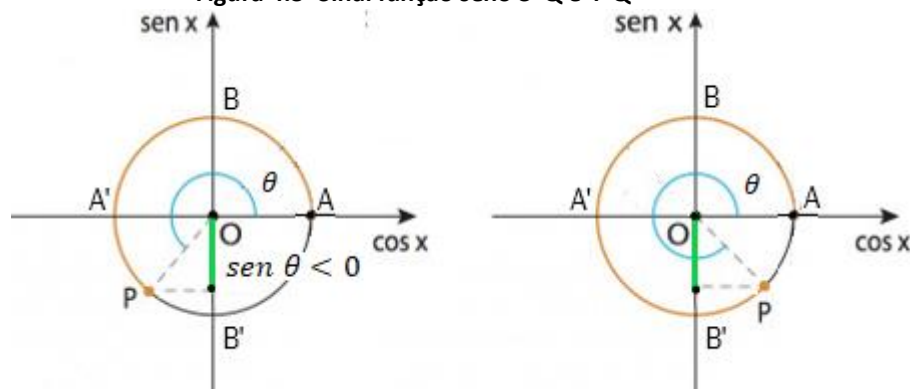


Figura 4.3 -Sinal função seno 3ºQ e 4ºQ



Além disso, observe que os pontos A, B, A' e B' , definem a divisão de quadrantes, assim, quando o ponto P coincide com o A (0 rad) ou A' ($\pi \text{ rad}$), temos $\text{sen}(0) = \text{sen}(\pi) = 0$, quando coincide com o B ($\frac{\pi}{2} \text{ rad}$) temos $\text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ e, quando coincide com o B' ($\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$) temos $\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$.

- II. *Crescimento e decrescimento da função seno*: será crescente quando $\theta \in 1^\circ Q$ ou $\theta \in 4^\circ Q$ e, será decrescente quando $\theta \in 2^\circ Q$ ou $\theta \in 3^\circ Q$. É imediato que, se θ percorre o $1^\circ Q$, então P percorre o arco $\widehat{AB}$ e sua ordenada cresce. Fato análogo acontece no $4^\circ Q$, quando P percorre o arco $\widehat{B'A}$. Ainda, temos que, se θ percorre o $2^\circ Q$, então P percorre o arco $\widehat{BA'}$ e sua ordenada decresce; analogamente acontece no $3^\circ Q$, quando P percorre o arco $\widehat{A'B'}$.

Tabela 4.1 -Crescimento e decrescimento função seno

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\text{sen } \theta$	0	cresce	1	decresce	0	cresce	-1	decresce	0

III. *Domínio e imagem da função seno*: Respectivamente temos,

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) = [-1, 1].$$

É imediata a justificação para $-1 \leq \text{sen } \theta \leq 1$ pois, se P está no ciclo, sua ordenada varia de -1 a $+1$.

IV. *Periodicidade da função seno*: Seu período é 2π .

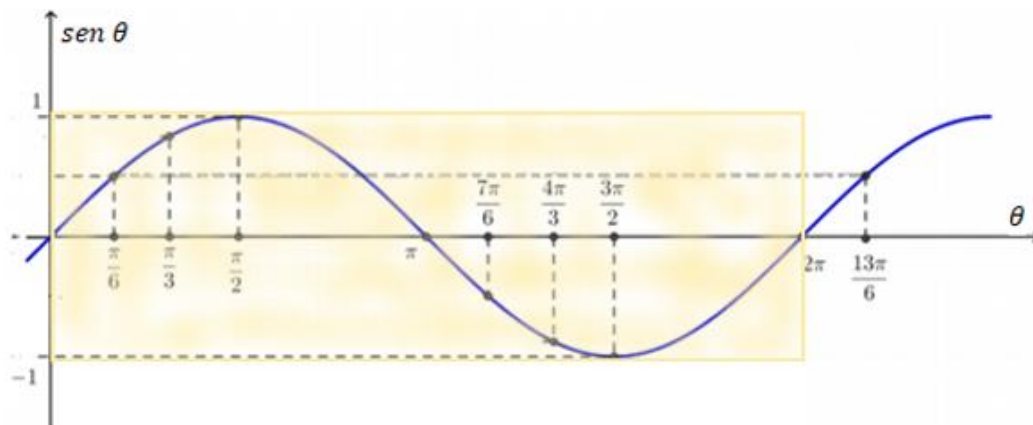
É imediato que

$$\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta + k \cdot 2\pi), \text{ para qualquer } k \in \mathbb{Z},$$

pois θ e $\theta + k \cdot 2\pi$ possuem a mesma imagem no ciclo, portanto a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, isto é, 2π .

A seguir temos o gráfico da função seno. Observe o comportamento da função seno mencionado nas propriedades acima onde a parte destacada corresponde a representação do período da função.

Figura 4.4 -Gráfico função seno

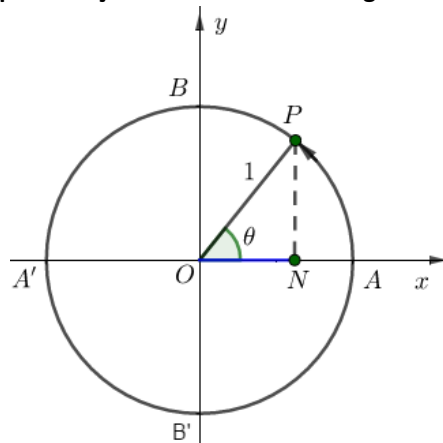


4.2 FUNÇÃO COSSENO

Definição 4.2: Dado um número real θ , tal que sua imagem no ciclo esteja representada por P . Denominamos cosseno de θ (e indicamos por $\cos \theta$) a abscissa ($\overline{ON}$) do ponto P em relação ao sistema x_0y . Denominamos função cosseno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real θ o real $\overline{ON} = \cos(\theta)$, isto é:

$$f(\theta) = \cos(\theta).$$

Figura 4.5 -Representação do $\cos \theta$ no ciclo trigonométrico



Algumas propriedades, características da função cosseno, são obtidas a partir de uma análise no ciclo trigonométrico, como veremos a seguir:

- I. *Sinais da função cosseno*: será positiva quando $\theta \in 1^{\circ}Q$ ou $\theta \in 4^{\circ}Q$ e, será negativa quando $\theta \in 2^{\circ}Q$ ou $\theta \in 3^{\circ}Q$.

De fato, quando o ponto P , está a direita, do eixo y , sua abscissa é positiva, e quando, está a esquerda, sua ordenada é negativa. Observe as figuras 4.6 e 4.7

Figura 4.6 -Sinal função cosseno 1º Q e 2ºQ

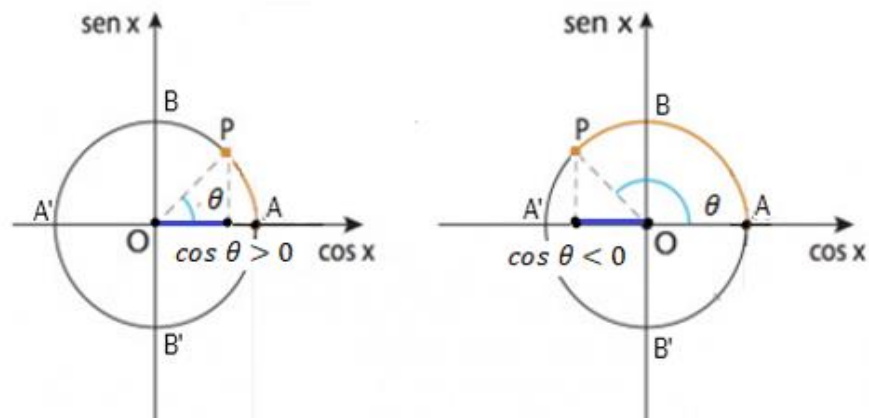
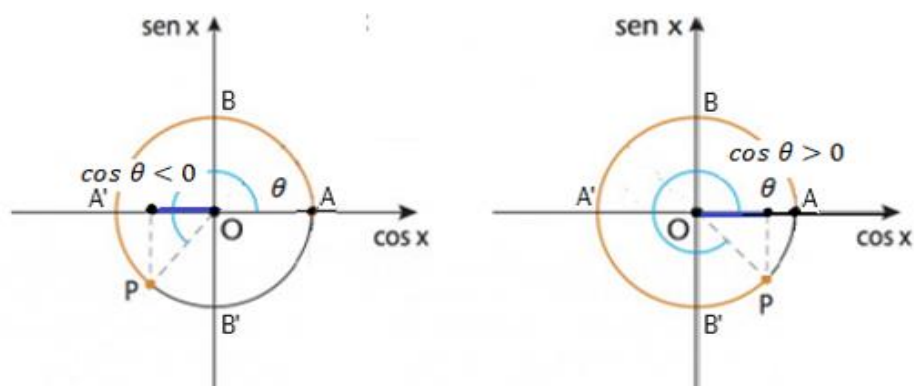


Figura 4.7 -Sinal função cosseno 3º Q e 4ºQ



Além disso, os pontos A, B, A' e B' , definem a divisão de quadrantes, assim, quando o ponto P coincide com o A (0 rad), temos $\cos(0) = 1$, quando coincide com o B ($\frac{\pi}{2} \text{ rad}$) ou B' ($\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$) temos $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ e, quando coincide com A' ($\pi \text{ rad}$) temos $\cos(\pi) = -1$.

- II. *Crescimento e decrescimento da função cosseno*: será crescente quando θ percorre $3^\circ Q$ ou $4^\circ Q$ e, será decrescente quando θ percorre $1^\circ Q$ ou $2^\circ Q$.

É imediato que, se θ percorre o $1^\circ Q$, então P percorre o arco $(\widehat{AB})$ e sua abscissa decresce. Fato análogo acontece no $2^\circ Q$, quando P percorre o arco $\widehat{BA}'$.

Ainda, temos que, se θ percorre o $3^\circ Q$, então P percorre o arco $\widehat{A'B'}$ e sua abscissa cresce; analogamente acontece no $4^\circ Q$, quando P percorre o arco $\widehat{B'A}$.

Tabela 4.2 - Crescimento e decrescimento função cosseno

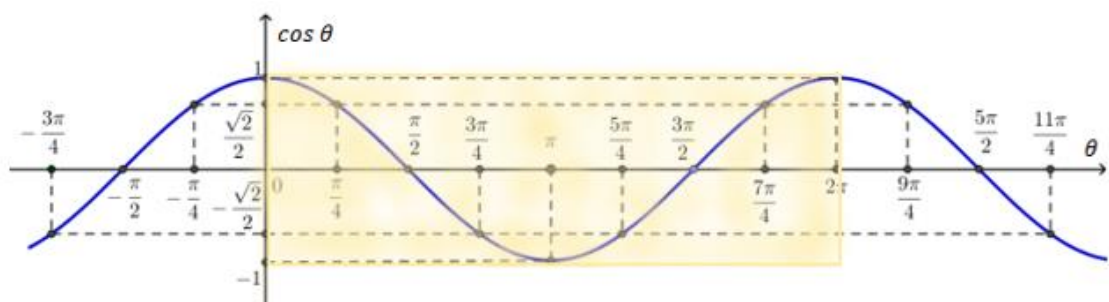
θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos \theta$	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

- III. *Domínio e imagem da função cosseno*: respectivamente temos, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$, isto é $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ para todo θ real.

- IV. *Periodicidade da função cosseno*: seu período será 2π , assim como para a função seno.

Observe na figura 4.8 o comportamento do gráfico da função cosseno mencionado nas propriedades acima, onde a parte destacada corresponde a representação do período da função.

Figura 4.8 - Gráfico função cosseno



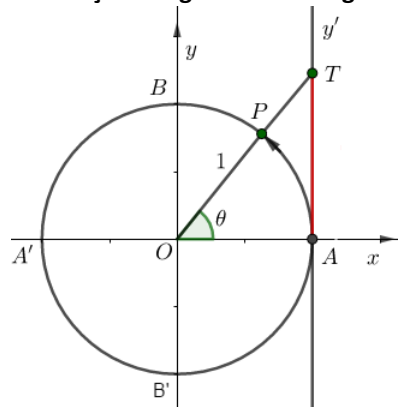
4.3 FUNÇÃO TANGENTE

Definição 4.3: Dado um número real θ , $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tal que sua imagem no ciclo esteja representada por P . Consideremos a reta $(\overleftrightarrow{OP})$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes (y') (veja figura 4.9). Denominamos tangente de θ (e indicamos por $tg(\theta)$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Denominamos função tangente a função $f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ o real $\overline{AT} = tg \theta$, isto é:

$$f(\theta) = tg(\theta).$$

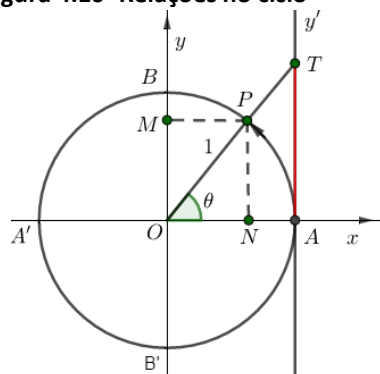
Figura 4.9 -Representação da $tg \theta$ no ciclo trigonométrico



Notemos que para $\theta = \frac{\pi}{2} + k.\pi$, P está em B ou B' e, então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T , a $tg(\theta)$ não é definida.

Considere a figura 4.10 onde é representado um ponto P no primeiro quadrante com $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$.

Figura 4.10 -Relações no ciclo



Observe que por definição temos $tg(\theta) = \overline{AT}$, $\cos(\theta) = \overline{ON}$ e $\sin(\theta) = \overline{OM}$. Notemos que os triângulos retângulos ΔOMP e ΔOAT são semelhantes (critério AA) então

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{ON}} \Rightarrow \frac{\overline{AT}}{\overline{OM}} = \frac{1}{\overline{ON}} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} \Rightarrow \overline{AT} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Portanto,

$$tg(\theta) = \overline{AT} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)},$$

ou seja, a definição de função tangente dada acima coincide com a definição dada na seção de Relações Trigonômicas no triângulo retângulo para ângulos agudos.

Algumas propriedades, características da função tangente, são obtidas a partir de uma análise no ciclo trigonométrico, como veremos a seguir:

- I. *Sinais da função tangente*: será positiva quando $\theta \in 1^\circ Q$ ou $\theta \in 3^\circ Q$ e, será negativa quando $\theta \in 2^\circ Q$ ou $\theta \in 4^\circ Q$.

De fato, quando o ponto T , está acima do ponto A , a medida $\overline{AT}$ é positiva, e quando está abaixo, a medida $\overline{AT}$ é negativa. Observe as figuras 4.11 e 4.12:

Figura 4.11 - Sinal função tangente $1^\circ Q$ e $2^\circ Q$

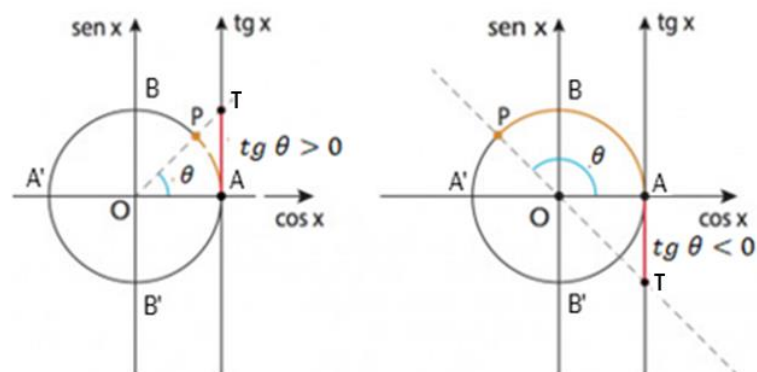
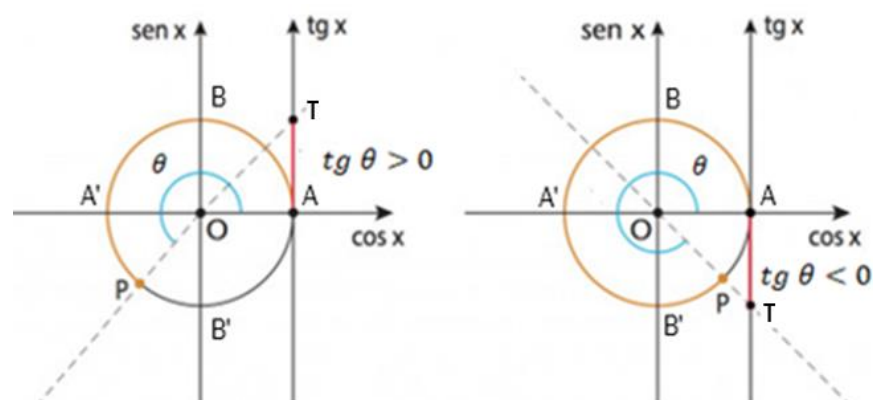


Figura 4.12 - Sinal função tangente $3^\circ Q$ e $4^\circ Q$



- II. *Crescimento e decrescimento da função tangente*: a função é sempre crescente quando θ percorre qualquer um dos quadrantes do ciclo.

III. **Tabela 4.3 -Crescimento função tangente**

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$tg \theta$	0	cresce		cresce	0	cresce		cresce	0

- IV. *Domínio e imagem da função tangente*: respectivamente temos $D(f) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \neq \pi/2 + k.\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, e a $Im(f) = \mathbb{R}$, isto é, para todo y real, existe um θ real tal que $tg(\theta) = y$.

Como vimos a função $tg(\theta)$ não está definida para $\theta = \frac{\pi}{2} + k.\pi$. Observe que ao considerarmos valores para θ bem próximos a estes valores, pela esquerda, o valor $tg(\theta)$ tende a $+\infty$, e para θ bem próximos a estes valores, pela direita, o valor $tg(\theta)$ tende a $-\infty$.

- V. *Periodicidade da função tangente é π* .

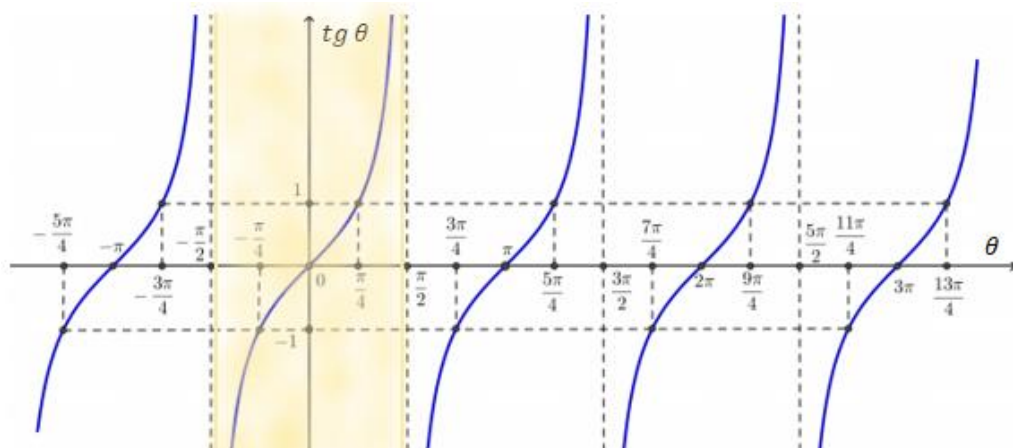
De fato, se $tg(\theta) = \overline{AT}$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $tg(\theta + k.\pi) = \overline{AT}$ pois θ e $\theta + k.\pi$ tem imagens P e P' coincidentes ou diretamente opostas no ciclo e, assim $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$, portanto, $\overrightarrow{OP} \cap y' = \overrightarrow{OP'} \cap y'$. Temos, então, para todo θ real, com $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$

$$tg(\theta) = tg(\theta + k.\pi)$$

e a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k.\pi$, isto é, π .

A seguir temos o gráfico da função tangente. Observe o comportamento da função tangente mencionado nas propriedades acima onde a parte destacada corresponde a representação do período da função.

Figura 4.13 -Gráfico função tangente



Assim como no caso das relações trigonométricas no triângulo retângulo, utilizando as funções trigonométricas $\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ e $\text{tg}(\theta)$ é possível definir outras funções trigonométricas, denominadas cossecante, secante e cotangente

$$\text{cossec}(\theta) = \frac{1}{\text{sen}(\theta)}, \text{sec}(\theta) = \frac{1}{\text{cos}(\theta)}, \text{cotg}(\theta) = \frac{1}{\text{tg}(\theta)}.$$

4.4 RELAÇÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

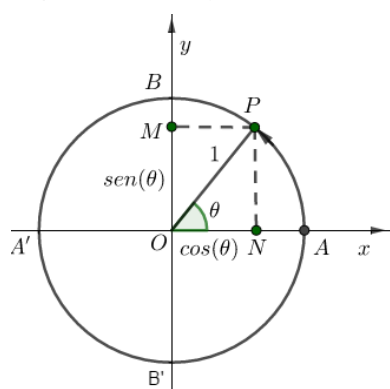
A abordagem das relações fundamentais e das relações decorrentes, assim como das funções trigonométricas, terão importância nas resoluções de equações e inequações trigonométricas. Um estudo mais detalhado sobre as Relações Fundamentais pode ser encontrado em (IEZZI, 2004).

Mostremos agora a seguinte relação fundamental

$$\text{cos}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1, \text{ com } \theta \in \mathbb{R}.$$

Se $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$, a imagem de θ é um ponto P no ciclo trigonométrico distinto de A, B, A', B' , então existe o triângulo ΔONP como indicado na figura 4.14:

Figura 4.14 -Relação fundamental



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ΔONP , temos:

$$(\overline{ON})^2 + (\overline{NP})^2 = (\overline{OP})^2 \Rightarrow \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad (4.4.1)$$

Se $\theta = k\frac{\pi}{2}$, então usando diretamente os próprios valores de $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ e $\tan(\theta)$ para $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ é possível verificar a relação (4.4.1).

Utilizando a relação trigonométrica fundamental dada em (4.4.1), obtemos outras relações.

Dividindo todos os membros de (4.4.1) por $\cos^2(\theta)$:

$$\frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \Rightarrow 1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta),$$

ou seja,

$$\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1.$$

Dividindo todos os membros de (4.4.1) por $\sin^2(\theta)$:

$$\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \frac{\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} \Rightarrow \cot^2(\theta) + 1 = \operatorname{cosec}^2(\theta),$$

ou seja,

$$\cot^2(\theta) = \operatorname{cosec}^2(\theta) - 1.$$

Outras relações que serão usadas e facilmente verificadas são:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta).\cos(\theta); \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta); \tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}.$$

As demonstrações dessas relações podem ser obtidas em (IEZZI, 2004).

5 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo introduziremos o conceito de equação trigonométrica e apresentaremos a resolução de diversos exercícios. Para a resolução de cada caso faremos uma abordagem geométrica com construções no Geogebra sendo que nos capítulos posteriores apresentaremos um tutorial de como construí-las. Para este capítulo usamos como referências (IEZZI, 2004) e (NETO, 2009).

5.1 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS

As seguintes equações são denominadas equações fundamentais

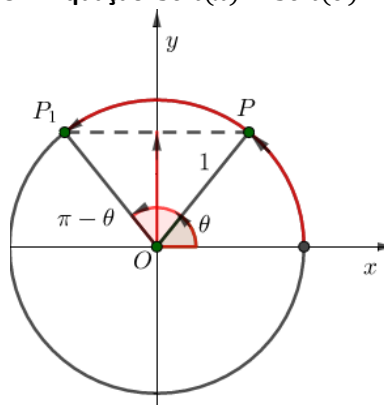
- I. $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$;
- II. $\cos(x) = \cos(\theta)$;
- III. $\text{tg}(x) = \text{tg}(\theta)$.

Sejam f e g duas funções trigonométricas e sejam D_1 e D_2 os seus respectivos domínios. Resolver a equação trigonométrica $f(x) = g(x)$, significa encontrar o conjunto S , denominado conjunto solução, o qual é formado pelos valores x para os a igualdade $f(x) = g(x)$ é satisfeita. Observemos que para um certo número x ser solução é necessário que $x \in D_1$ e $x \in D_2$.

5.1.1 Resolução da equação $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$

Para ocorrer a igualdade $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$ devemos ter que a imagem de x e θ no ciclo trigonométrico tenham as mesmas ordenadas.

Figura 5.1 -Equação $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$



Assim temos duas possibilidades:

- i. x e θ tem mesma imagem, ou seja são congruos,

$$x = \theta + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- ii. x e θ tem mesma simétricas em relação ao eixo y

$$x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$ é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 5.1: Resolver a equação $\text{sen}(x) = 1$

Usando que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, temos

$$\text{sen}(x) = 1 \Rightarrow \text{sen}(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Assim,

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}, \\ x = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

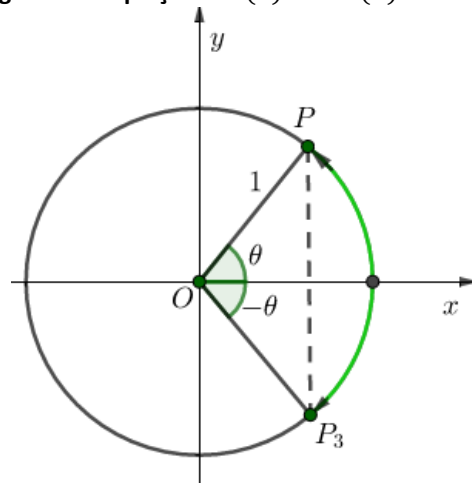
Portanto, o conjunto solução da equação dada é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5.1.2 Resolução da equação $\cos(x) = \cos(\theta)$

Para ocorrer a igualdade $\cos(x) = \cos(\theta)$ devemos ter que a imagem de x e θ no ciclo trigonométrico tenham as mesmas abscissas.

Figura 5.2 -Equação $\cos(x) = \cos(\theta)$



Assim temos duas possibilidades:

- i. x e θ tem mesma imagem, ou seja são cômruos,

$$x = \theta + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- ii. x e θ tem imagens simétricas em relação ao eixo x

$$x = -\theta + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação $\cos(x) = \cos(\theta)$ é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = -\theta + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 5.2: Resolver a equação $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Usando que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, obtemos:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Assim,

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

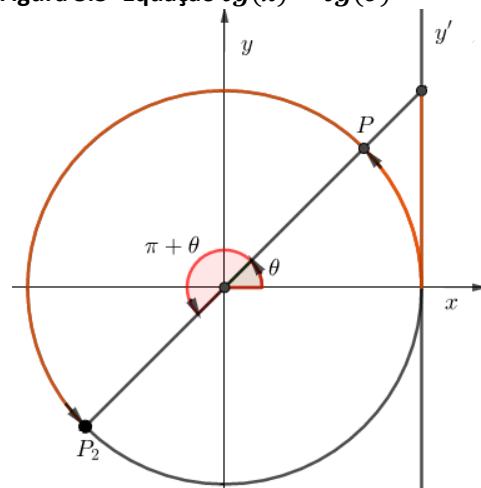
Portanto, o conjunto solução da equação dada é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5.1.3 Resolução da equação $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\theta)$

Para ocorrer a igualdade $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\theta)$ devemos ter que a imagem de x e θ no ciclo trigonométrico tenham a mesma projeção sobre o eixo da tangente.

Figura 5.3 -Equação $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\theta)$



Assim temos duas possibilidades:

- i. x e θ tem mesma imagem, ou seja são cômruos,

$$x = \theta + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- ii. x e θ tem imagens simétricas em relação ao centro O ;

$$x = (\pi + \theta) + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação $tg(x) = tg(\theta)$ é dado por

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = (\pi + \theta) + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \theta + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 5.3: Resolver a equação $3 tg(x) - \sqrt{3} = 0$

Isolando $tg(x)$ obtemos:

$$3 tg(x) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow tg(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg(x) = tg\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Assim,

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}, \\ x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Observe que as soluções na 1ª volta são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ que distam de π , portanto qualquer solução é da forma $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ e o conjunto solução da equação dada é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5.2 OUTRAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em alguns casos após uma manipulação algébrica fazendo uso das relações fundamentais, recaímos em equações equivalentes às equações fundamentais e, portanto, podem ser resolvidas como feito anteriormente.

Exemplo 5.4: $\cos^2(x) + 2 \sin^2(x) = \frac{7}{4}$, com $0 \leq x \leq 2\pi$.

Usando a relação fundamental $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, e isolando $\cos^2(x)$ obtemos:

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + 2 \sin^2(x) &= \frac{7}{4} \Rightarrow (1 - \sin^2(x)) + 2 \sin^2(x) = \frac{7}{4} \\ \Rightarrow \sin^2(x) &= \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin(x) = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sin(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Para $\sin(x) = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ temos $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Pela análise feita na seção 5.1 e observando que as soluções devem ser consideradas para os arcos somente da 1ª volta, pois a solução pedida se restringe a $0 \leq x \leq 2\pi$, temos duas possibilidades para x :

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} & \text{ou} \\ x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} & \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

Para $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ temos $\sin(x) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Analogamente pela análise feita na seção 5.1 e pela restrição imposta a x devemos ter

$$\begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} & \text{ou} \\ x = \left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} & \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} & \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

Exemplo 5.5: $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) = 2$, com $x \in \mathbb{R}$.

Reescrevendo as parcelas do 1º membro em função de $\sin(x)$, $\cos(x)$ e usando a relação trigonométrica $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ e $\operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} &= 2 \Rightarrow \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x) \cdot \sin(x)} = 2 \\ \Rightarrow \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 2 \cos(x) \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

Utilizando agora a relação fundamental $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ e a identidade $\sin(2x) = 2 \cos(x) \cdot \sin(x)$, temos:

$$1 = \sin(2x) \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Fazendo a mudança de variável $2x = y$ temos $\sin(y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Assim, da análise feita na seção 5.1 obtemos:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ y = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Como $y = 2x$, então obtemos:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação dada é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemplo 5.6: $2 \cos^2(x) + 5 \cos(x) = 3$, com $x \in \mathbb{R}$.

Fazendo a mudança de variável $\cos(x) = y$, temos

$$2 \cos^2(x) + 5 \cos(x) = 3 \Rightarrow 2y^2 + 5y - 3 = 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau em y :

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ ou } y = -3.$$

Retornando para a variável x obtemos:

$$y = \frac{1}{2} \text{ ou } y = -3 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = -3.$$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, então não existe solução para $\cos(x) = -3$. Para o outro caso usando a análise feita na seção 5.1 obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução da equação dada é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemplo 5.7: $\cos(x) - \cos^3(x) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

Colocando $\cos(x)$ em evidência obtemos:

$$\cos(x) - \cos^3(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) (1 - \cos^2(x)) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \text{ ou } 1 - \cos^2(x) = 0.$$

Para o caso $\cos(x) = 0$, temos $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e pela análise feita na seção 5.1 obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5.2.1).$$

Para o caso $1 - \cos^2(x) = 0$, utilizando a relação fundamental $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ obtemos:

$$1 - \cos^2(x) = 0 \Rightarrow \sin^2(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = \sin(0).$$

Assim, usando a análise da seção 5.1 concluímos que

$$\begin{cases} x = 0 + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + k \cdot 2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x = k \cdot \pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \quad (5.2.2).$$

Portanto o conjunto solução será obtido pela união das soluções em (5.2.1) e em (5.2.2), e pode ser escrito da forma

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ ou } x = k \cdot \pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exemplo 5.8: $\operatorname{tg}^2(x) = \operatorname{tg}(x)$, com $0 \leq x \leq \pi$.

Colocando $\operatorname{tg}(x)$ em evidência obtemos:

$$\operatorname{tg}^2(x) - \operatorname{tg}(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(x) (\operatorname{tg}(x) - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(x) = 0 \text{ ou } \operatorname{tg}(x) = 1.$$

Para o caso $\operatorname{tg}(x) = 0$, temos $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(0)$. Assim, pela análise feita na seção 5.1 e observando que as soluções devem ser consideradas para os arcos somente da 1ª meia-volta, pois a solução pedida se restringe a $0 \leq x \leq \pi$, obtemos:

$$x = 0 \text{ ou } x = \pi \quad (5.2.3)$$

Para o caso $\operatorname{tg}(x) = 1$, temos $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4})$. Assim, pela análise feita na seção 5.1 teríamos as seguintes soluções na 1ª volta:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Como temos a restrição restringe a $0 \leq x \leq \pi$, a solução para este caso é

$$x = \frac{\pi}{4} \quad (5.2.4)$$

Portanto o conjunto solução será obtido pela união das soluções em (5.2.3) e (5.2.4), ou seja,

$$S = \left\{ 0, \pi, \frac{\pi}{4} \right\}.$$

6 INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo abordaremos o conceito de inequação trigonométrica e realizaremos as resoluções de diversos exercícios, onde em cada caso será feito uma abordagem geométrica com construções no Geogebra feitas pelo próprio autor, sendo que no capítulo posterior faremos um tutorial de como construí-las. Para este capítulo usamos como referências (IEZZI, 2004) e (NETO, 2009).

6.1 INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

As seguintes inequações são denominadas inequações fundamentais

- I. $\operatorname{sen} x > m$;
- II. $\operatorname{sen} x < m$;
- III. $\cos x > n$;
- IV. $\cos x < n$;
- V. $\operatorname{tg} x > t$;
- VI. $\operatorname{tg} x < t$.

Onde m, n e t , são números reais dados.

Sejam f e g duas funções trigonométricas e sejam D_1 e D_2 os seus respectivos domínios. Resolver a inequação trigonométrica $f(x) > g(x)$, significa encontrar o conjunto S denominado conjunto solução, que é formado pelos valores x para os quais a desigualdade $f(x) > g(x)$ é satisfeita. Observemos que para um certo número x ser solução é necessário que $x \in D_1$ e $x \in D_2$.

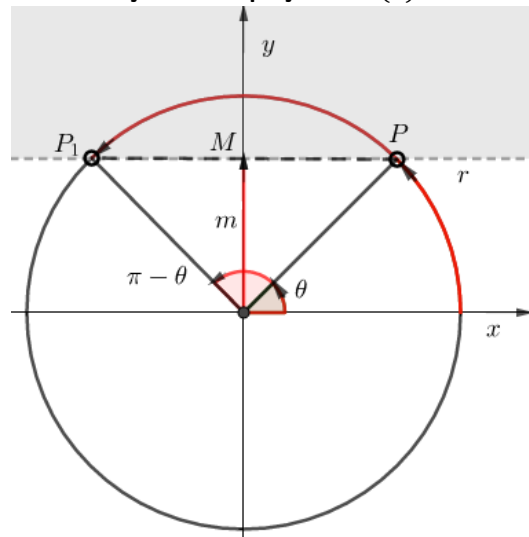
6.2 INEQUAÇÕES DO TIPO $\operatorname{sen}(x) > m$

Observe que sendo $\operatorname{sen}(x)$ uma função limitada com $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$, então para $m > 1$, não existe solução para a equação $\operatorname{sen} x > m$, ou seja o conjunto solução é $S = \emptyset$. Além disso, se $m < -1$, então todo número real x é solução da inequação, ou seja, $S = \mathbb{R}$.

Portanto vamos nos restringir a estudar a solução da inequação $\text{sen } x > m$ para $-1 \leq m \leq 1$.

Marquemos no ciclo trigonométrico um ponto M sobre o eixo dos senos, tal que $\overline{OM} = m$. Traçando por M uma reta r perpendicular ao eixo dos senos obtemos os pontos P e P_1 como indicado na figura abaixo:

Figura 6.1 - Solução da inequação $\text{sen}(x) > m$



Assim a solução da inequação $\text{sen}(x) > m$ é formado pelos valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com o semiplano situado acima de r . Por exemplo na figura 6.1 temos o conjunto solução na 1ª volta dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \theta < x < \pi - \theta\}.$$

E a solução geral considerando os ângulos cômruos é dada por

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \theta + k \cdot 2\pi < x < (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}. \quad (6.1)$$

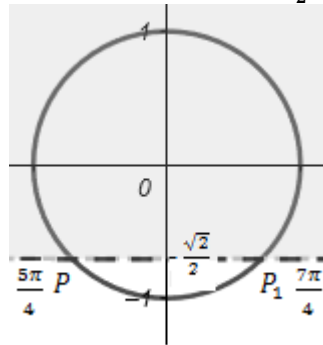
A solução encontrada em (6.1) é a solução geral para ângulos que estejam no 1º quadrante; para ângulos θ que não estejam no 1º quadrante é necessário fazer a construção descrita no início desta seção.

Veremos agora um exemplo para θ no 3º quadrante:

Exemplo 6.1: Resolver a inequação $\text{sen}(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Marcando o ponto correspondente ao valor $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ no eixo y , traçando a reta perpendicular obtemos os pontos P e P_1 imagens dos valores $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ respectivamente (ângulos no 3º e 4º quadrantes com $\text{sen}(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Figura 6.2 -Exemplo $\text{sen}(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Portanto o conjunto solução da inequação $\text{sen}(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ na 1ª volta é dado por $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\}$. E a solução geral considerando os ângulos cômruos é dada por:

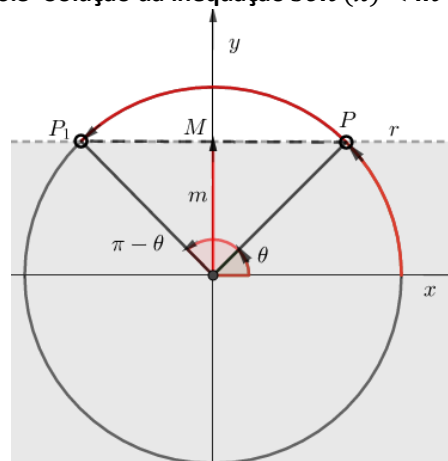
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < 2\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6.3 - INEQUAÇÕES DO TIPO $\text{sen}(x) < m$.

Observe que da limitação $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, para $m > 1$, o conjunto solução da inequação $\text{sen } x < m$ é $S = \mathbb{R}$, e para $m < -1$ o conjunto solução é $S = \emptyset$. Portanto vamos nos restringir a estudar a solução da inequação $\text{sen}(x) < m$ para $-1 \leq m \leq 1$.

Marquemos um ponto M sobre o eixo dos senos, tal que $\overline{OM} = m$. Traçando por M uma reta r perpendicular ao eixo dos senos obtemos os pontos P e P_1 como indicado na figura 6.3:

Figura 6.3 -Solução da inequação $\text{sen}(x) < m$



Assim, a solução da inequação $\text{sen } x < m$ é formado pelos valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com o semiplano situado abaixo de r . Por exemplo na figura 6.3 temos um ângulo θ no 1º quadrante, e neste caso o conjunto solução da inequação na 1ª volta é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi - \theta < x < 2\pi\}.$$

E a solução geral um ângulo θ no 1º quadrante, considerando os ângulos cômugos é dada por:

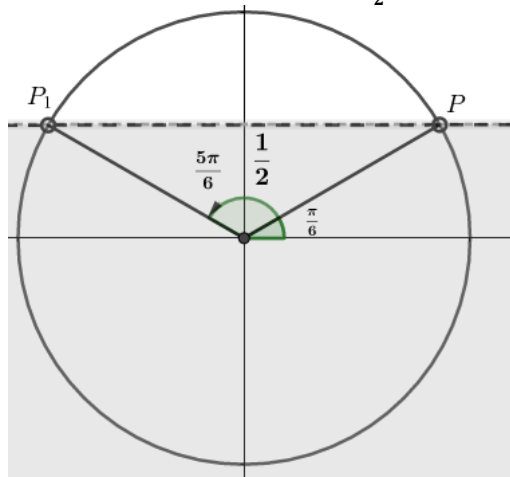
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid (\pi - \theta) + k.2\pi < x < 2\pi + k.2\pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}\} \quad (6.2).$$

A solução encontrada em (6.2) é a solução geral para ângulos que estejam no 1º quadrante; para ângulos θ que não estejam no 1º quadrante é necessário fazer a construção descrita no início desta seção.

Exemplo 6.2: Resolver a inequação $\text{sen}(x) < \frac{1}{2}$.

Marcando o ponto correspondente ao valor $\frac{1}{2}$ no eixo y e traçando a reta perpendicular obtemos os pontos P e P_1 imagens dos valores $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ respectivamente (ângulos no 1º e 2º quadrantes com $\text{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$).

Figura 6.4 -Exemplo $\text{sen}(x) < \frac{1}{2}$



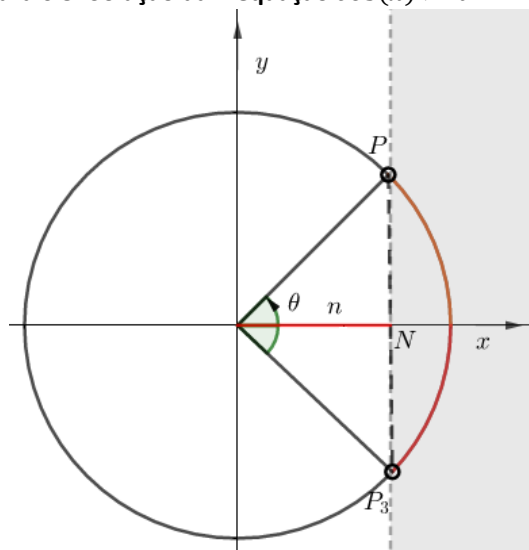
Portanto o conjunto solução da inequação $\text{sen}(x) < \frac{1}{2}$ na 1ª volta é dado por $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi \text{ ou } 0 < x < \frac{\pi}{6}\}$. E a solução geral considerando os ângulos cômugos é dada por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k.2\pi < x < 2\pi + k.2\pi \text{ ou } 0 + k.2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k.2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6.4 - INEQUAÇÕES DO TIPO $\cos(x) > n$.

Analogamente aos casos anteriores vamos considerar a solução da inequação $\cos(x) > n$ para $-1 \leq n \leq 1$. Marquemos um ponto N sobre o eixo dos cossenos, tal que $\overline{ON} = n$. Traçando por N uma reta r perpendicular ao eixo dos cossenos obtemos os pontos P e P_3 como indicado na figura abaixo:

Figura 6.5 - Solução da inequação $\cos(x) > n$



Assim, a solução da inequação $\cos(x) > n$ é formado pelos valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com o semiplano situado a direita de r . Por exemplo, na figura 6.5 temos um ângulo θ do 1º quadrante onde o conjunto solução na 1ª volta é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \theta \text{ ou } 2\pi - \theta < x < 2\pi\}.$$

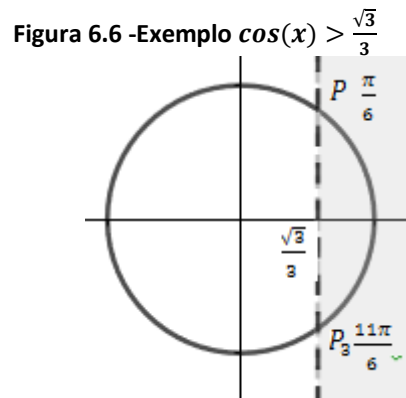
E a solução geral para θ no 1º quadrante considerando os ângulos cômruos é dada por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi \leq x < \theta + k \cdot 2\pi \text{ ou } (2\pi - \theta) + k \cdot 2\pi < x < 2\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (6.3).$$

A solução encontrada em (6.3) é a solução geral para ângulos que estejam no 1º quadrante, para ângulos θ que não estejam no 1º quadrante é necessário fazer a construção descrita no início desta seção.

Exemplo 6.3: Resolver a inequação $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Marcando o ponto correspondente ao valor $\frac{\sqrt{3}}{3}$ no eixo x e traçando a reta perpendicular obtemos os pontos P e P_3 imagens dos valores $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ respectivamente (ângulos no 1º e 4º quadrantes com $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3}$).



Portanto o conjunto solução da inequação $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{3}$ na 1ª volta é dado por $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\}$.

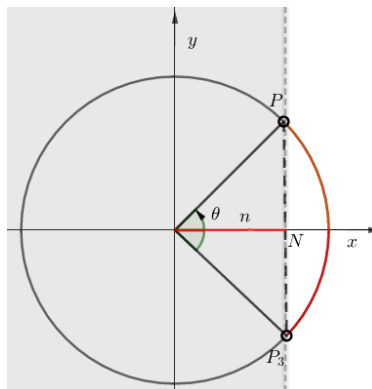
A solução geral considerando os ângulos cômruos é dada por

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < 2\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6.5 - INEQUAÇÕES DO TIPO $\cos(x) < n$.

Marquemos um ponto N sobre o eixo dos cossenos, tal que $\overline{ON} = n$. Traçando por N uma reta r perpendicular ao eixo dos cossenos obtemos os pontos P e P_3 como indicado na figura 6.7:

Figura 6.7 -Solução da inequação $\cos(x) < n$



Assim, a solução da inequação $\cos(x) < n$ é formado pelos valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com o semiplano situado a esquerda de r . Por exemplo, na figura 6.7 temos um ângulo θ no 1º quadrante onde o conjunto solução na 1ª volta é dado por:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \theta < x < 2\pi - \theta\}.$$

E a solução geral considerando os ângulos cômruos é dada por

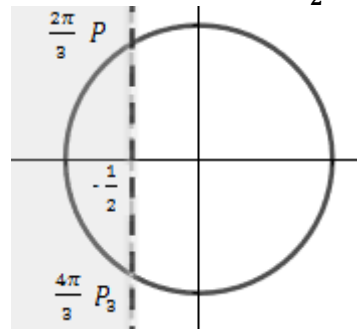
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \theta + k \cdot 2\pi < x < (2\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\} \quad (6.4).$$

A solução encontrada em (6.4) é a solução geral para ângulos que estejam no 1º quadrante, para ângulos θ que não estejam no 1º quadrante é necessário fazer a construção descrita no início desta seção.

Exemplo 6.4: Resolver a inequação $\cos(x) < -\frac{1}{2}$.

Marcando o ponto correspondente ao valor $-\frac{1}{2}$ no eixo x e traçando a reta perpendicular obtemos os pontos P e P_3 imagens dos valores $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ respectivamente (ângulos no 2º e 3º quadrantes com $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$).

Figura 6.8 -Exemplo $\cos(x) < -\frac{1}{2}$



Portanto o conjunto solução da inequação $\cos(x) < -\frac{1}{2}$ na 1ª volta é dado por $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$.

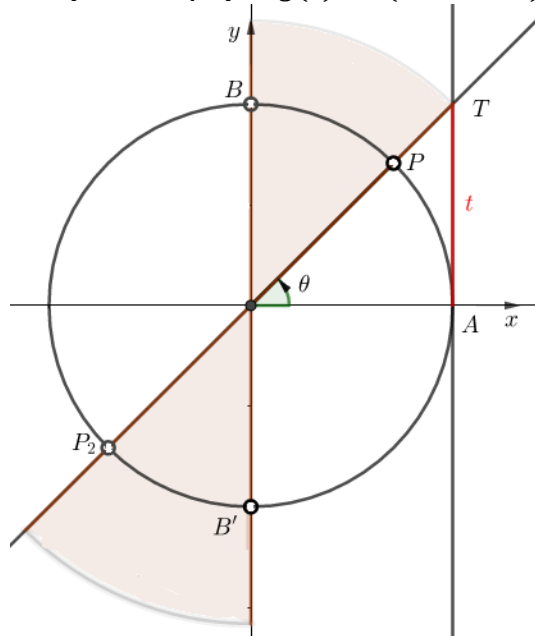
A solução geral considerando os ângulos cômruos é dada por

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6.6 INEQUAÇÕES DO TIPO $\operatorname{tg}(x) > t$

Analisemos inicialmente o caso $t > 0$. Marquemos um ponto T sobre o eixo das tangentes, tal que $\overline{AT} = t$. Traçando a reta $r = \overrightarrow{OT}$ ligando o centro O ao ponto T obtemos os pontos P e P_2 como indicado na figura 6.9:

Figura 6.9 - Solução da inequação $\operatorname{tg}(x) > t$ (caso $t > 0$)



Assim, a solução da inequação $\operatorname{tg} x > t$ é formado pelos valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com os ângulos $P \hat{O} B$ e $P_2 \hat{O} B'$. Por exemplo, na figura 6.9 temos um ângulo θ no 1º quadrante onde o conjunto solução na 1ª volta é dado por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \theta < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi + \theta < x < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

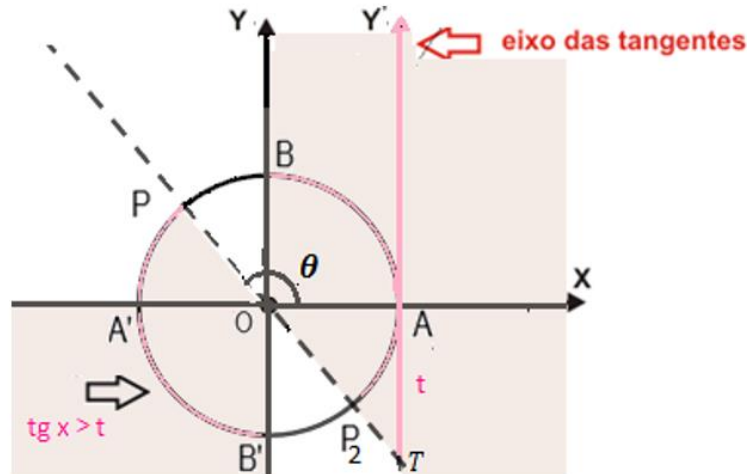
A solução geral considerando os ângulos cômruos é dada por:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \mid \theta + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \\ (\pi + \theta) + k \cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \quad (6.5).$$

A solução encontrada em (6.5) é a solução geral para ângulos que estejam no 1º quadrante, para ângulos θ que não estejam no 1º quadrante é necessário fazer a construção descrita no início desta seção.

Para o caso $t < 0$. Marquemos um ponto T sobre o eixo das tangentes, tal que $\overline{AT} = -t$. Traçando a reta $r = \overline{OT}$ ligando o centro O ao ponto T obtemos os pontos P e P_2 como indicado na figura 6.10:

Figura 6.10 - Solução da inequação $tg(x) > t$ (caso $t < 0$)



Assim, a solução da inequação $tg x > t$ é formado pelos valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com os ângulos $P\hat{O}B'$ e $P_2\hat{O}B$. Por exemplo na figura 6.10 temos um ângulo θ no 2º quadrante onde o conjunto solução na 1ª volta é dado por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \theta < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \pi + \theta < x \leq 2\pi \text{ ou } 0 < x < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

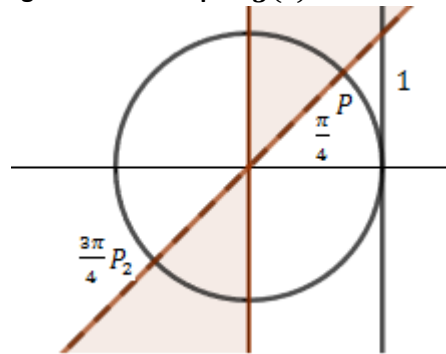
A solução geral para um ângulo θ no 2º quadrante considerando os ângulos cômruos é dada por:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \mid \theta + k \cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ (\pi + \theta) + k \cdot 2\pi < x \leq 2\pi + k \cdot 2\pi \text{ ou } 0 + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}.$$

De maneira geral o conjunto solução vai ser obtido pela interseção do ciclo com os ângulos $(P\hat{O}B' \text{ e } P_2\hat{O}B)$ ou $(P\hat{O}B \text{ e } P_2\hat{O}B')$.

Exemplo 6.5: Resolver a inequação $tg(x) > 1$.

Considerando no eixo das tangentes o ponto correspondente ao valor 1 e procedendo como indicado anteriormente para $tg(x) > t$ com $t < 0$, obtemos os pontos P e P_2 imagens dos valores $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ respectivamente.

Figura 6.11 -Exemplo $tg(x) > 1$ 

Portanto o conjunto solução da inequação $tg(x) > 1$ na 1ª volta é dado por:

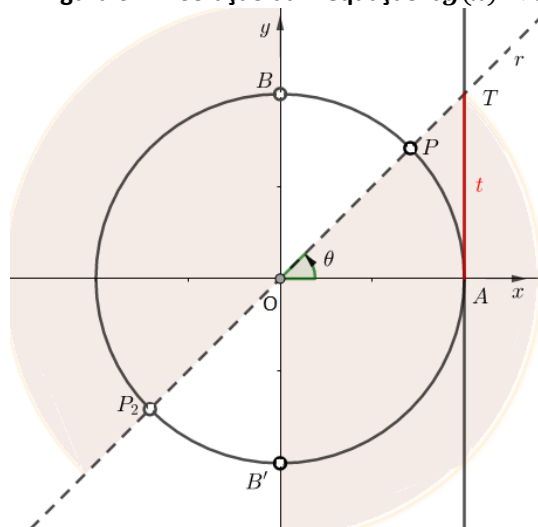
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

A solução geral considerando os ângulos cômruos é dada por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k.2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k.2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + k.2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6.7 INEQUAÇÕES DO TIPO $tg(x) < t$.

Analisemos inicialmente o caso $t > 0$. Marquemos um ponto T sobre o eixo das tangentes, tal que $\overline{AT} = t$. Traçando a reta $r = \overrightarrow{OT}$ ligando o centro O ao ponto T obtemos os pontos P e P_2 como indicado na figura 6.12.

Figura 6.12 -Solução da inequação $tg(x) < t$ 

Assim, a solução da inequação $tg(x) < t$ é formado pelos valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com os ângulos $P\hat{O}A$ e $P_2\hat{O}B'$. Por exemplo, na figura 6.12 temos o conjunto solução na 1ª volta dado por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \theta \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \pi + \theta \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \right\}.$$

A solução geral considerando os ângulos côngruos é dada por:

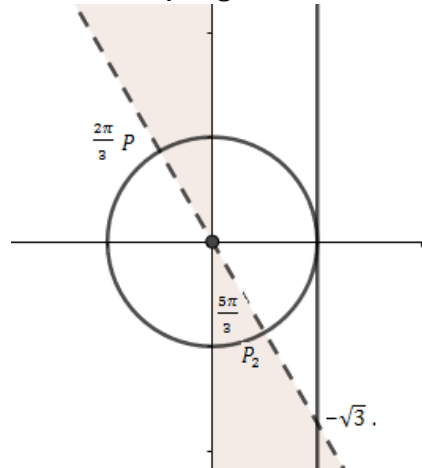
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 + k.2\pi \leq x < \theta + k.2\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k.2\pi < x < (\pi + \theta) + k.2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + k.2\pi < x < 2\pi + k.2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Para o caso $t < 0$. A análise é análoga e a solução da inequação $tg(x) < t$ também é formada por valores de x que possuem imagens na interseção do ciclo com os ângulos formados por r e o eixo y .

Exemplo 6.6: Resolver a inequação $tg(x) < -\sqrt{3}$.

Considerando no eixo das tangentes o ponto correspondente ao valor $-\sqrt{3}$ e procedendo, como indicado anteriormente para $tg(x) < t$ com $t < 0$, obtemos os pontos P e P_2 imagens dos valores $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ respectivamente.

Figura 6.13 -Exemplo $tg(x) < -\sqrt{3}$



Portanto o conjunto solução da inequação $tg(x) < -\sqrt{3}$ na 1ª volta é dado por $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3} \right\}$.

A solução geral considerando os ângulos côngruos é dada por

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k.2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k.2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + k.2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

7 O GEOGEBRA E AS CONSTRUÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

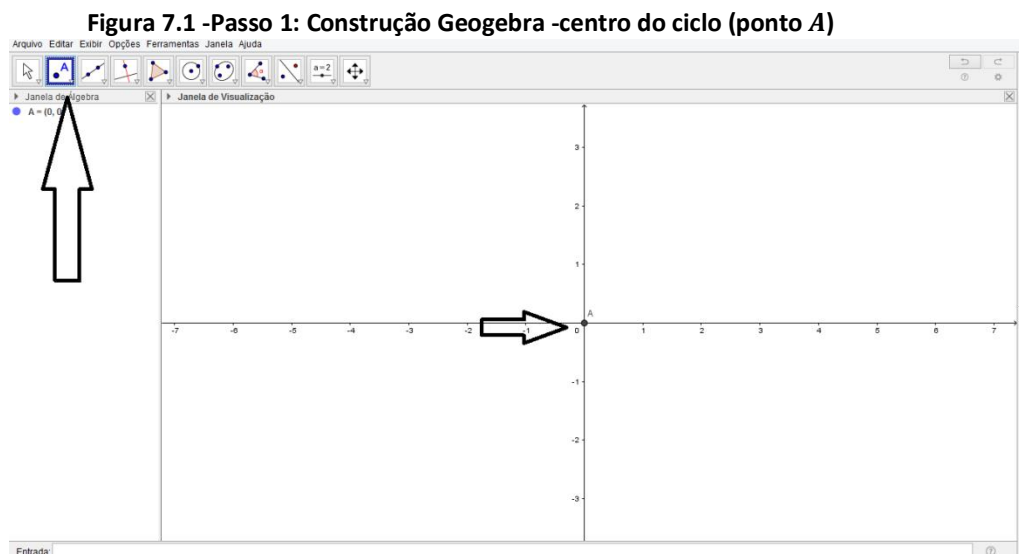
Neste capítulo faremos um tutorial de como construir no Geogebra o ciclo trigonométrico, com proposta de atividade baseada nas construções das funções trigonométricas e seus gráficos, e por fim daremos um tutorial das construções feitas nos capítulos das equações e inequações trigonométricas.

7.1 CICLO TRIGONOMÉTRICO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Vamos iniciar nos passos de 1 a 5, a construção dos elementos básicos no ciclo trigonométrico.

Passo 1: Centro do Ciclo

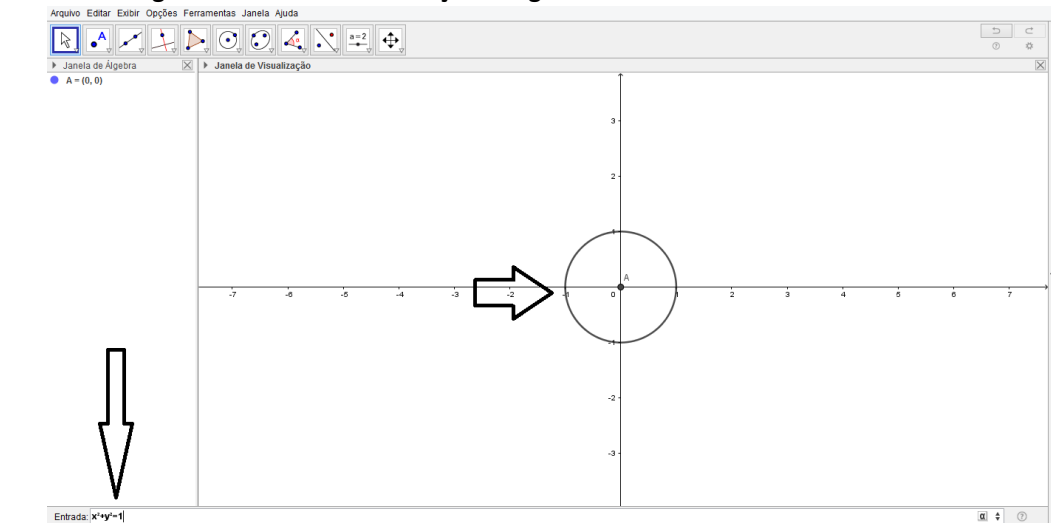
Clique no 2º ícone (ponto) → Selecione a 1ª opção → Clique na Origem dos eixos x e y



Passo 2: Construção da circunferência unitária

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira a equação $x^2 + y^2 = 1$.

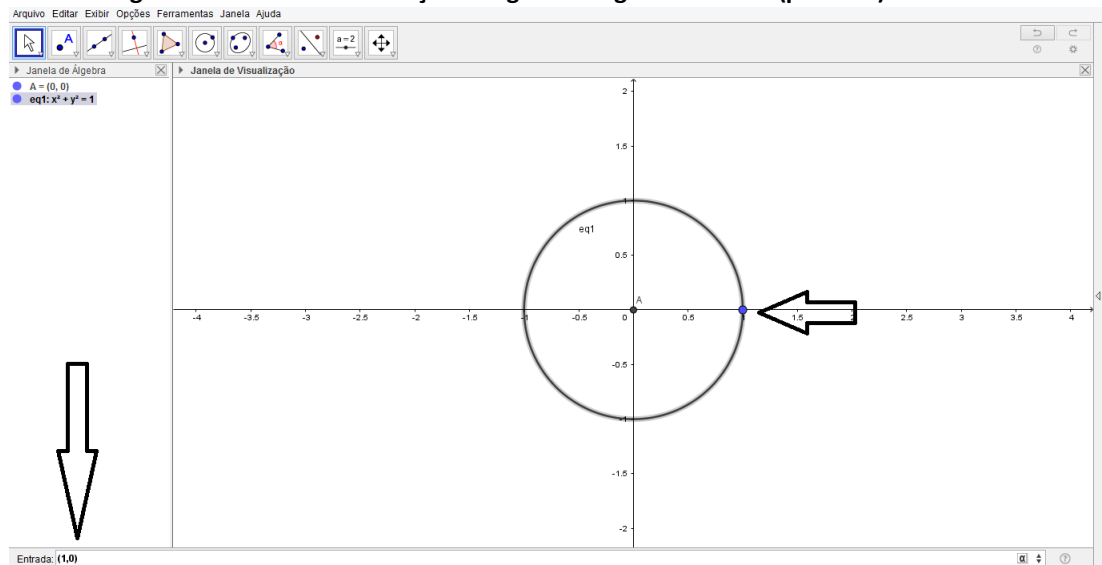
Figura 7.2 -Passo 2: Construção Geogebra -circunferência unitária



Passo 3: Construção da origem dos arcos.

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira o ponto (1,0).

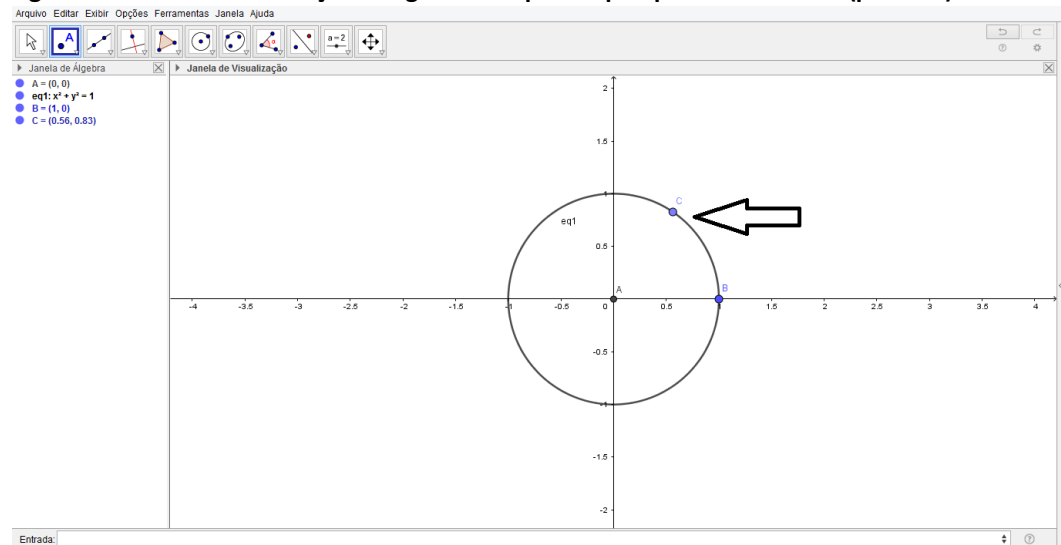
Figura 7.3 -Passo 3: Construção Geogebra -origem dos arcos (ponto B)



Passo 4: Construindo um ponto qualquer C sobre o Ciclo.

Clique no 2º ícone (ponto) → Selecione a 1ª opção → Clique em qualquer ponto sobre a circunferência.

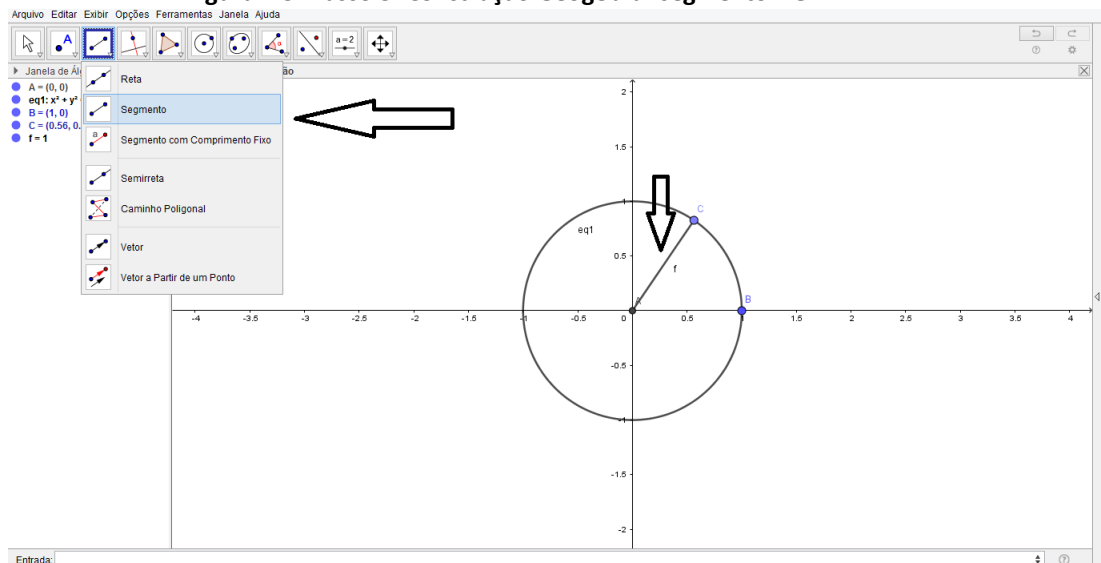
Figura 7.4 -Passo 4: Construção Geogebra -um ponto qualquer sobre o ciclo (ponto C)



Passo 5: Construir um segmento unindo o centro a um ponto do ciclo.

Clique no 3º ícone (reta) → Selecione a 2ª opção (segmento) → Clique no ponto A e depois no ponto C.

Figura 7.5 -Passo 5: Construção Geogebra -segmento $\overline{AC}$

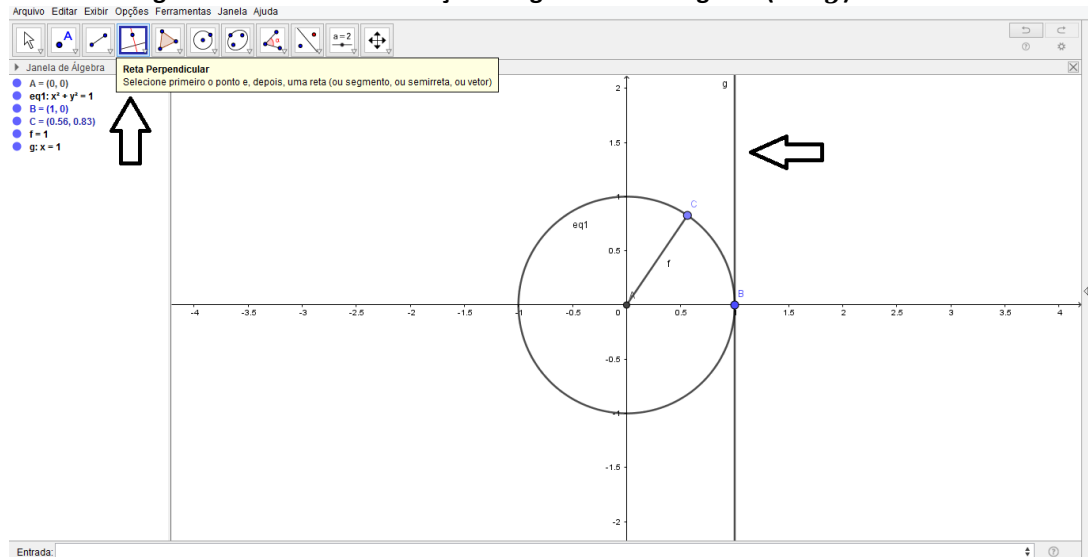


Nos passos de 6 a 14, vamos definir uma reta que tangencia o ciclo no ponto B (eixo tangente), determinar os pontos que indicam a projeção do ponto C, sobre os eixos, das ordenadas (y) e das abscissas (x), e do eixo tangente (reta g). Os segmentos construídos a partir das projeções do ponto C, serão necessários para determinar o valor de seno, cosseno e tangente associados ao arco $\widehat{BC}$.

Passo 6: Construir eixo das tangentes

Clique o 4º ícone (reta perpendicular) → Selecione a 1ª opção → Clique no ponto B e depois no eixo x . Na construção de cada elemento aparece automaticamente um rótulo. No nosso caso a reta tangente aparece como reta g .

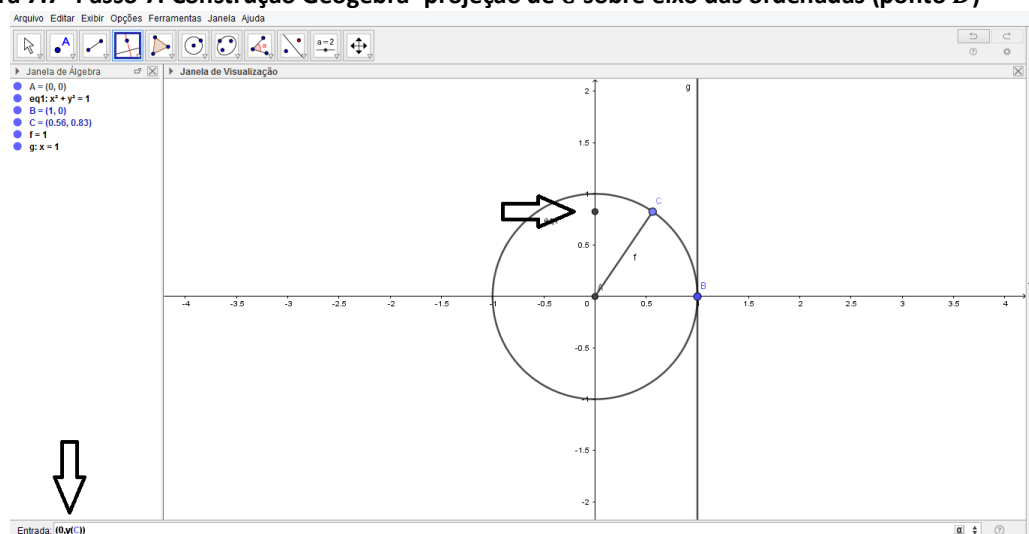
Figura 7.6 -Passo 6: Construção Geogebra -eixo tangente (reta g)



Passo 7: Construir ponto correspondente à projeção do ponto C sobre o eixo das ordenadas (eixo dos senos).

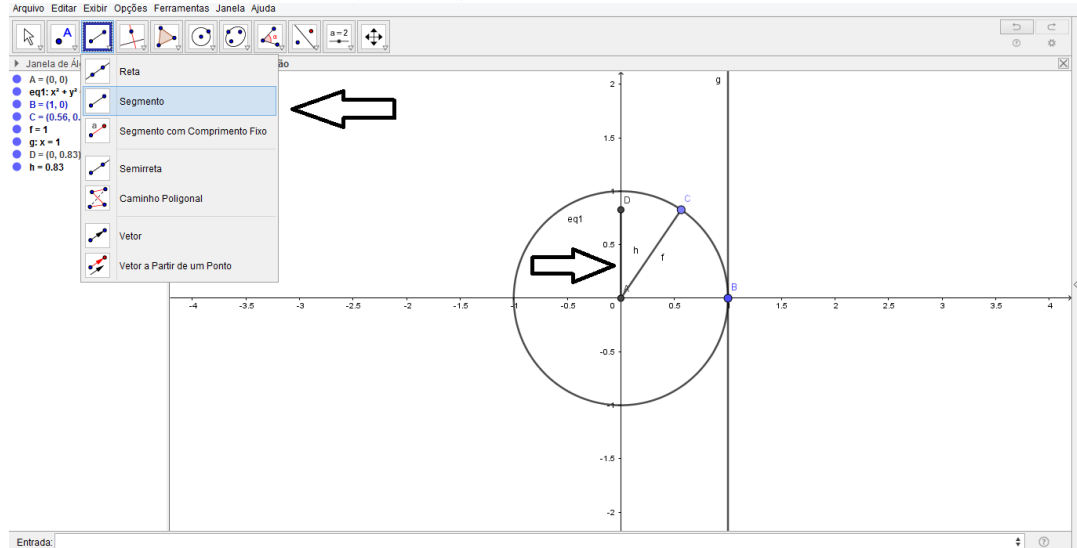
Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $D = (0, y(C))$.

Figura 7.7 -Passo 7: Construção Geogebra -projeção de C sobre eixo das ordenadas (ponto D)



Passo 8: Construa o segmento $(\overline{AD})$ (valor do seno associado ao arco $\widehat{BC}$) clique no 3º ícone (reta) → Selecione a 2ª opção (segmento) → Clique no ponto A e depois no ponto D. (rótulo h)

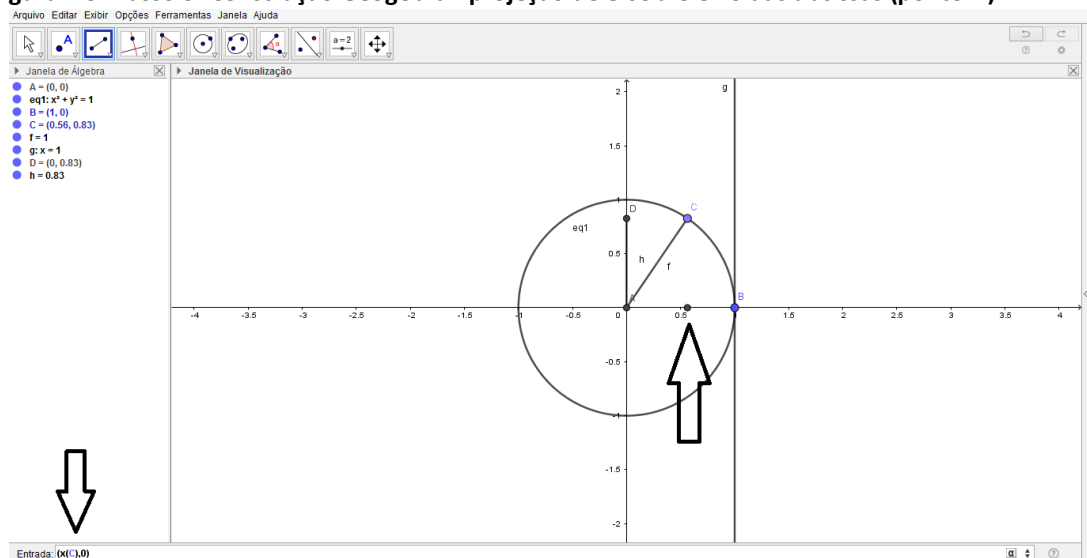
Figura 7.8 -Passo 8: Construção Geogebra -segmento $(\overline{AD})$ (valor do seno associado ao arco $\widehat{BC}$)



Passo 9: Construir ponto E correspondente à projeção do ponto C sobre o eixo das abcissas (eixo dos cossenos).

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $E = (x(C), 0)$.

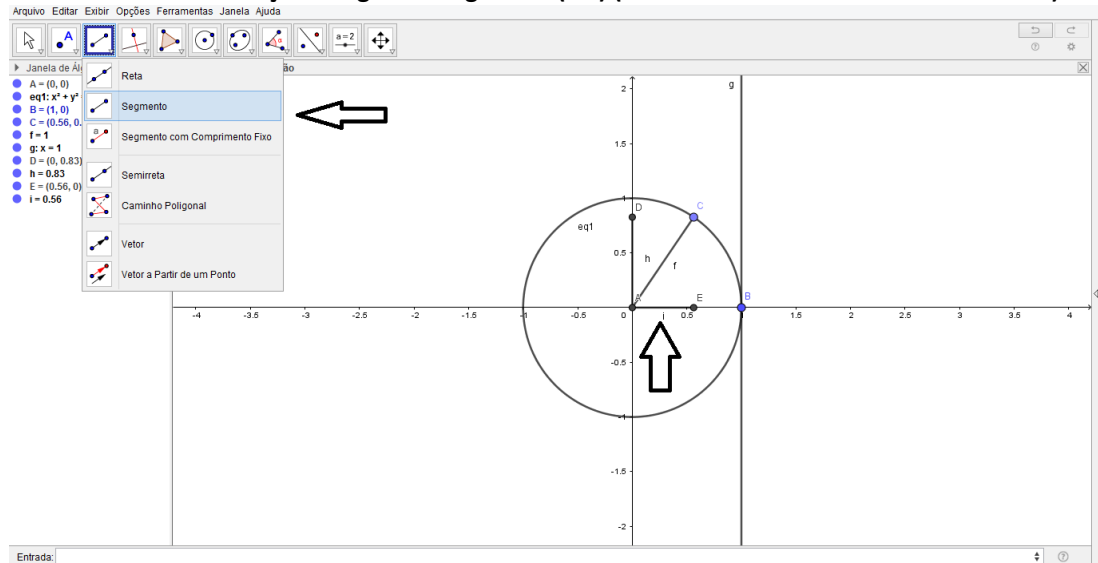
Figura 7.9 -Passo 9: Construção Geogebra - projeção de C sobre eixo das abcissas (ponto E)



Passo 10: Construa o segmento $(\overline{AE})$ (cosseno associado ao arco $\widehat{BC}$).

Clique no 3º ícone (reta) → Selecione a 2ª opção (segmento) → Clique no ponto A e depois no ponto E. (rótulo i)

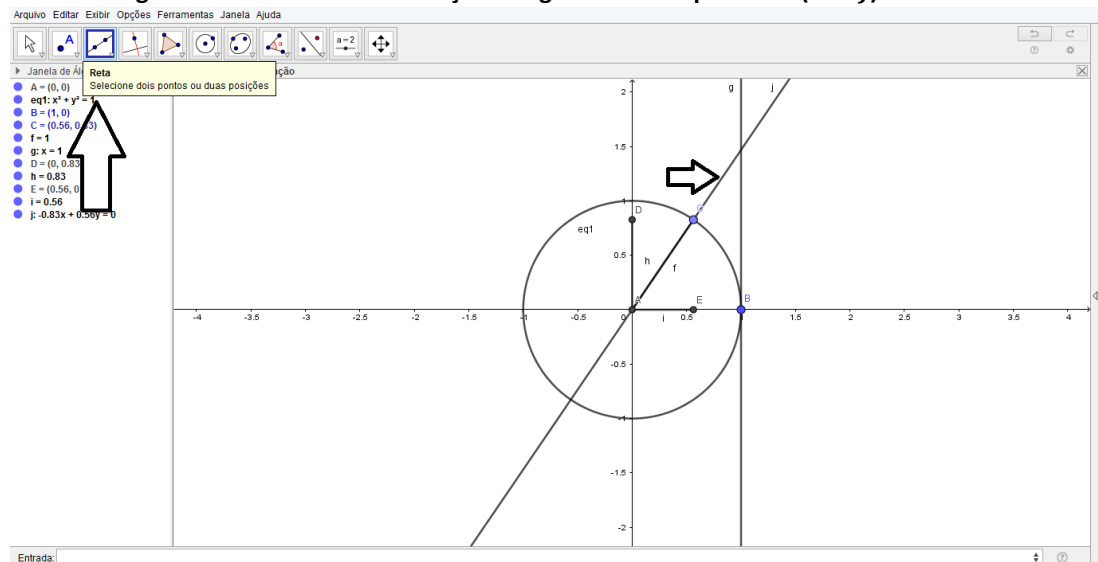
Figura 7.10 -Passo 10: Construção Geogebra - segmento $\overline{AE}$ (valor do cosseno associado ao arco $\widehat{BC}$)



Passo 11: Construção da reta suporte $\overleftrightarrow{AC}$ para determinar o valor da tangente associada ao arco $\widehat{BC}$. (rótulo j)

Clique no 3º ícone (reta) → Selecione a 1ª opção → Clique no ponto A e depois no ponto C.

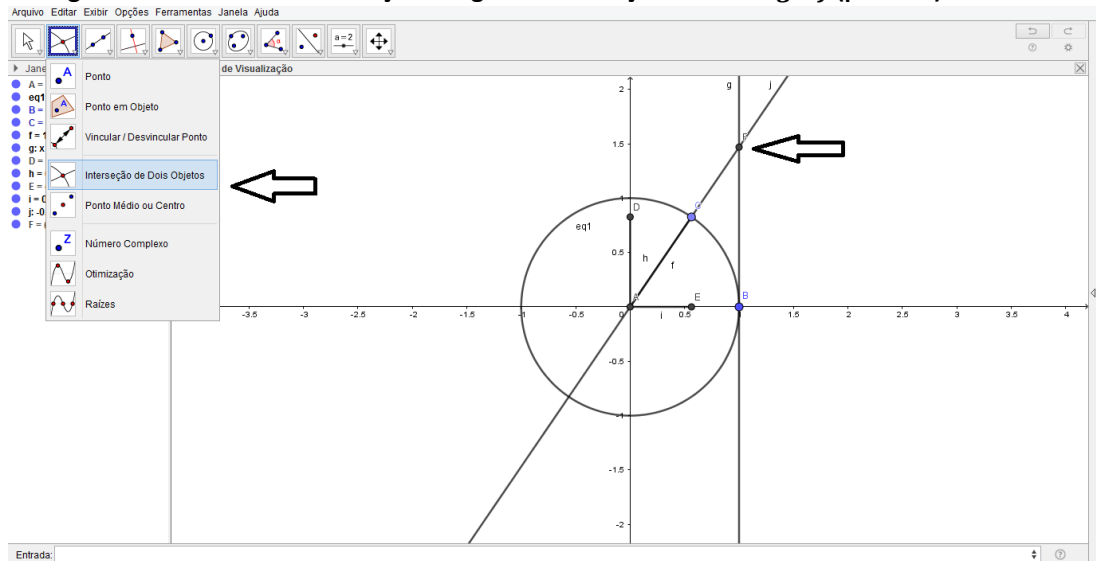
Figura 7.11 -Passo 11: Construção Geogebra -reta suporte $\overleftrightarrow{AC}$ (reta j)



Passo 12: Crie o ponto F (interseção das retas g e j).

Clique no 2º ícone (ponto) → Selecione a 4ª opção (interseção e dois objetos) → Clique na reta g e depois j .

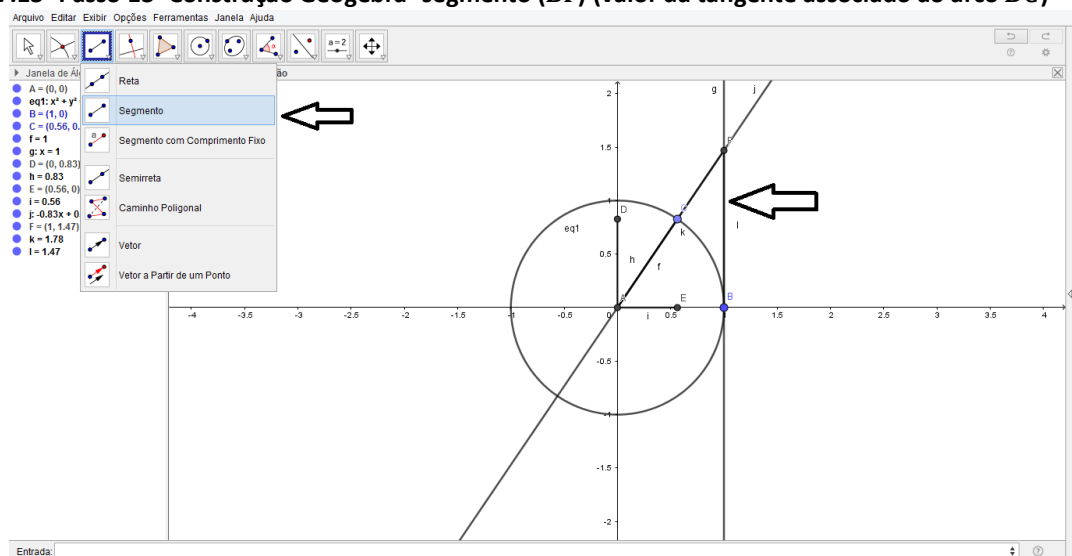
Figura 7.12 -Passo 12: Construção Geogebra -interseção das retas g e j (ponto F)



Passo 13: Construa o segmento $(\overline{BF})$ (tangente associado ao arco $\widehat{BC}$).

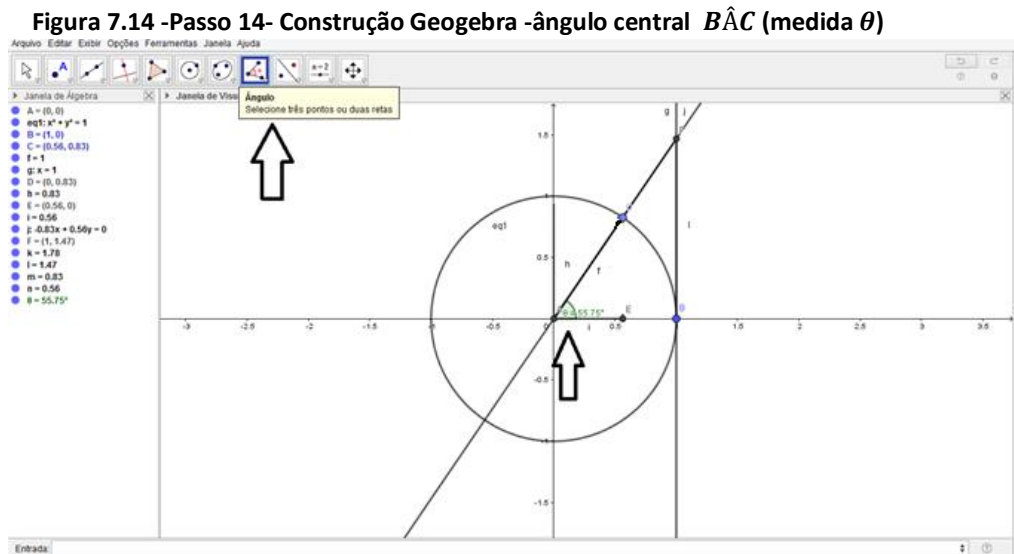
Clique no 3º ícone (reta) → Selecione a 2ª opção (segmento) → Clique no ponto B e depois no ponto F .(rótulo l)

Figura 7.13 -Passo 13- Construção Geogebra -segmento $(\overline{BF})$ (valor da tangente associado ao arco $\widehat{BC}$)



Passo 14: Construa um ângulo θ ($\widehat{BAC}$)(medida do ângulo central, que corresponde ao arco $\widehat{BC}$).

Clique no 8º ícone (ângulo) → Selecione a 1ª opção → Clique nos pontos B , A e C , nessa sequência.



7.2 VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

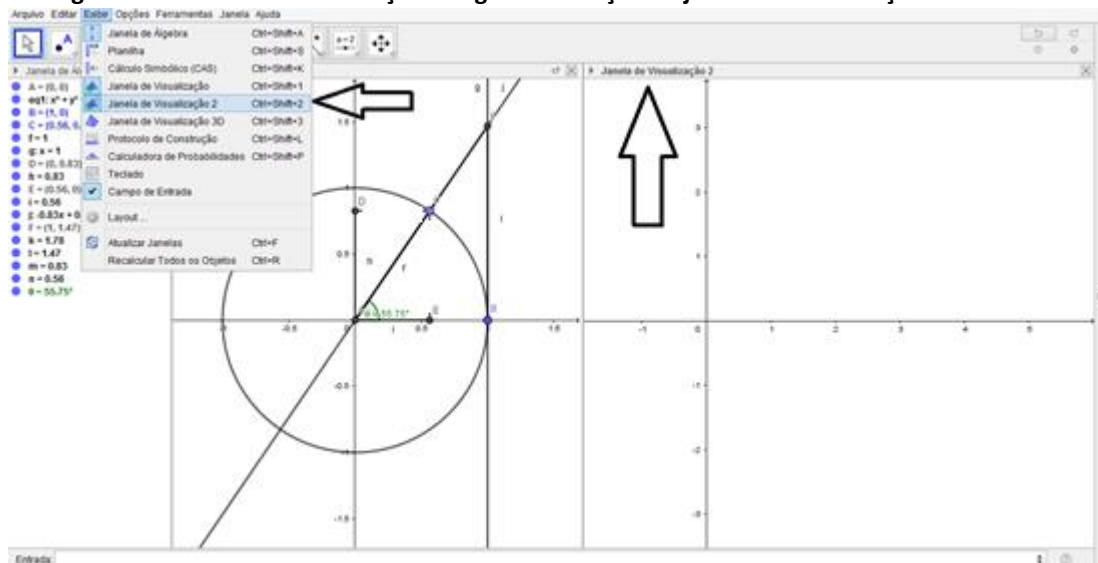
Nesta seção vamos fazer um tutorial para desenvolver uma atividade de visualização dos gráficos das funções trigonométricas com base em elementos vinculados ao ciclo trigonométrico.

Nos passos de 15 à 20, inicialmente, abriremos a janela de visualização 2, na qual serão exibidos os gráficos, e nesta mesma janela, indicaremos a construção dos pontos G , H e I todos associados ao ângulo θ . Esta construção permitirá que nos passos de 21 à 25 os pontos, G , H e I , quando habilitado o rastro, tracem os gráficos das funções trigonométricas, vinculados ao movimento de C no ciclo trigonométrico.

Passo 15: Abra a janela de visualização 2:

Selecione a opção “exibir” na primeira barra → Clique em Janela de visualização 2 para ativá-la. A Janela de visualização 2, será o campo em que os gráficos das funções, estarão representados, associados ao ponto C (arco $B\hat{C}$).

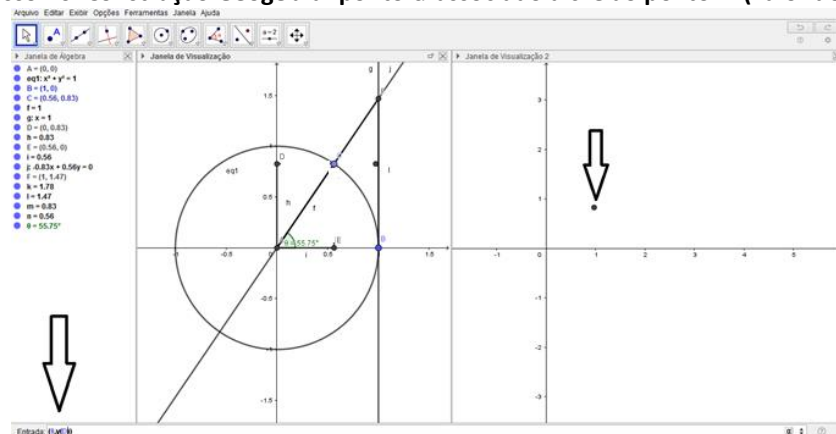
Figura 7.15 -Passo 15: Construção Geogebra -exibição da janela de visualização 2



Passo 16: Construção do ponto $G = (\theta, y(D))$.

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $(\theta, y(D))$. O ponto G , indica que sua coordenada cartesiana, estará associada ao ângulo θ na sua abscissa, e ao ponto D na sua ordenada, sendo que a determinação de ambas coordenadas está associada à variação do movimento do ponto C sobre o ciclo.

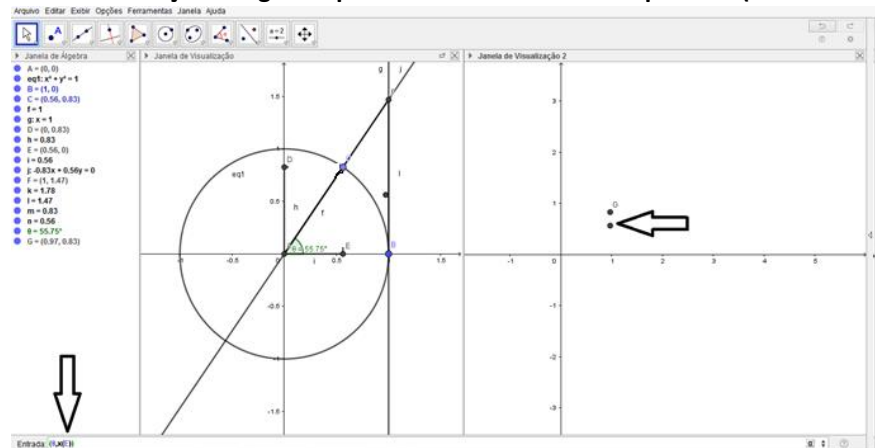
Figura 7.16 -Passo 16: Construção Geogebra -ponto G associado a θ e ao ponto D (valor do seno)



Passo 17: Construção do ponto $H = (\theta, x(E))$.

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $(\theta, y(D))$. O ponto H , indica que sua coordenada cartesiana, estará associada ao ângulo θ na sua abscissa, e ao ponto E na sua ordenada, sendo que a determinação de ambas coordenadas está associada à variação do movimento do ponto C sobre o ciclo.

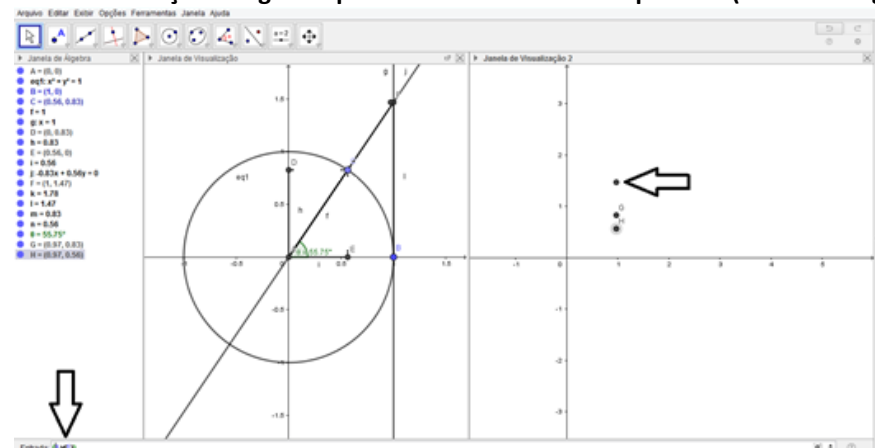
Figura 7.17 -Passo 17: Construção Geogebra -ponto H associado a θ e ao ponto E (valor do cosseno)



Passo 18: Construção do ponto $I = (\theta, y(F))$.

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $(\theta, y(F))$. O ponto I , indica que sua coordenada cartesiana, estará associada ao ângulo θ na sua abscissa, e ao ponto F na sua ordenada, sendo que a determinação de ambas coordenadas está associada à variação do movimento do ponto C sobre o ciclo.

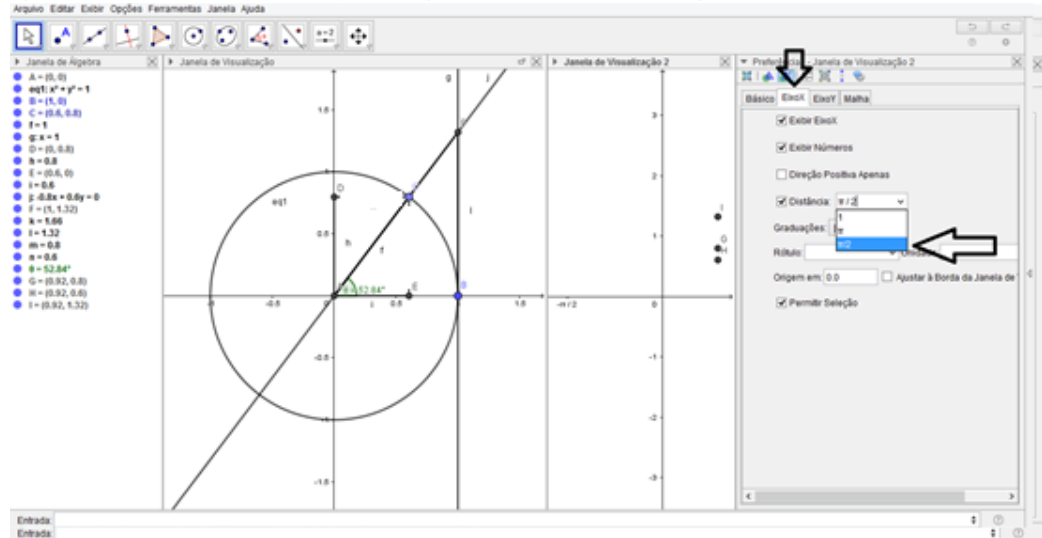
Figura 7.18 -Passo 18: Construção Geogebra -ponto I associado a θ e ao ponto F (valor da tangente)



Passo 19: Eixo x com medida em radiano.

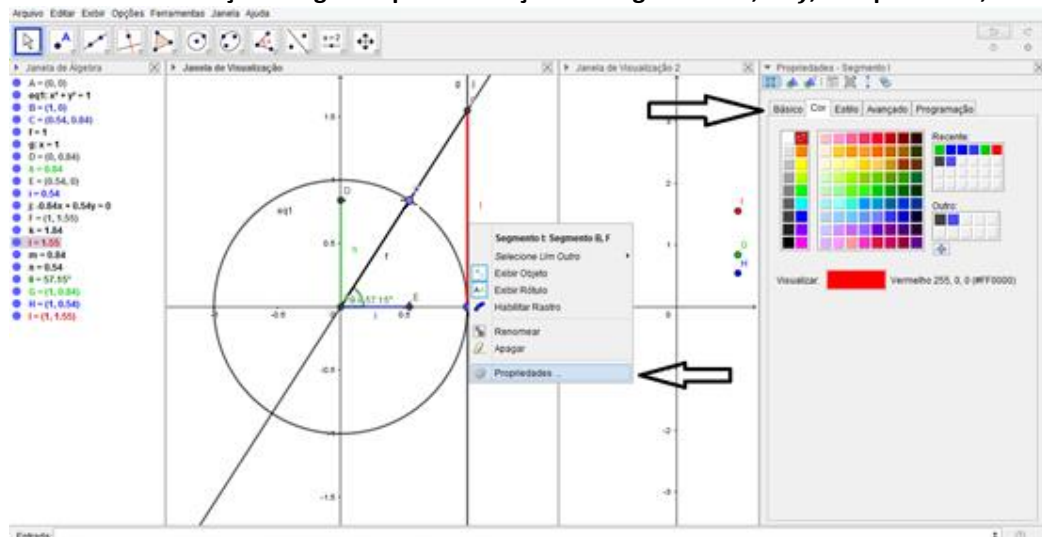
Na janela de visualização 2, com o botão direito, selecione “janela de visualização...” → Abra a aba “eixo x” → Em “distância” selecione a opção $\frac{\pi}{2}$. O eixo x , estará representando os valores do ângulo θ , relacionado nas abscissas dos pontos H , G e I , optamos por utilizar a medida em radianos e graduar com espaçamento de $\frac{\pi}{2}$ rad.

Figura 7.19 -Passo 19: Construção Geogebra -eixo das abscissas graduado em radianos



Passo 20: Personalizando os segmentos h, i, l e os pontos respectivos às suas movimentações G, H , e I . Os segmentos h, i e l , da janela de visualização 1, estão respectivamente, associados aos pontos G, H e I construídos na janela de visualização 2, e assim ao personalizar cores para os segmentos, o rasto deixado pelos pontos, em função da posição de C , estará representado por estas cores.

Figura 7.20 -Passo 20: Construção Geogebra -personalização dos segmentos h, i e j , e os pontos G, H e I



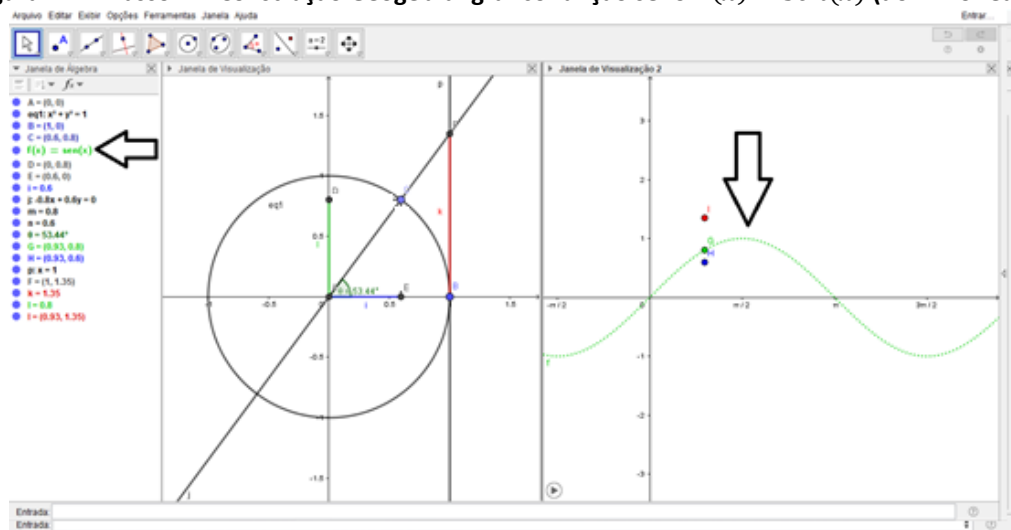
Nos passos de 21 à 25 obteremos os gráficos das funções trigonométricas de forma independente, ou seja, apenas digitando no comando de entrada do Geogebra, a lei da função trigonométrica que se deseja construir o gráfico e também através do

rastro dos pontos G , H e I , em função do movimento do ponto C sobre o ciclo, quando o rastro estiver habilitado.

Passo 21: Entrada da função Seno na Janela 2.

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $f(x) = \text{sen}(x)$. Ao digitar a função seno no comando de entrada, seu gráfico estará esboçado, (pontilhado em verde), conforme a personalização anterior associada ao ponto G pertencente a este gráfico.

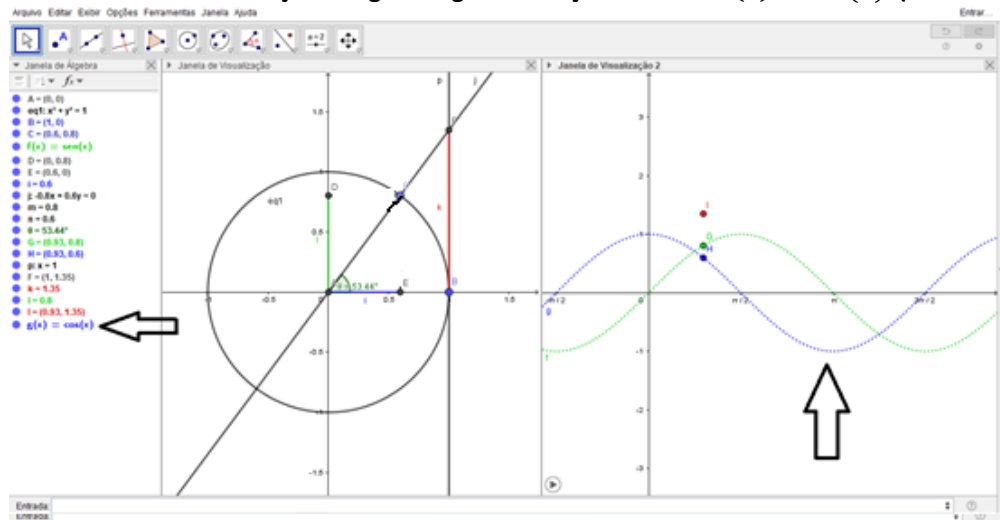
Figura 7.21 -Passo 21: Construção Geogebra -gráfico função seno $F(x) = \text{sen}(x)$ (domínio real)



Passo 22: Entrada da função cosseno na Janela 2.

Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $g(x) = \cos(x)$. Ao digitar a função cosseno, no comando de entrada, seu gráfico estará esboçado, (pontilhado em azul), conforme a personalização anterior associada ao ponto H pertencente a este gráfico.

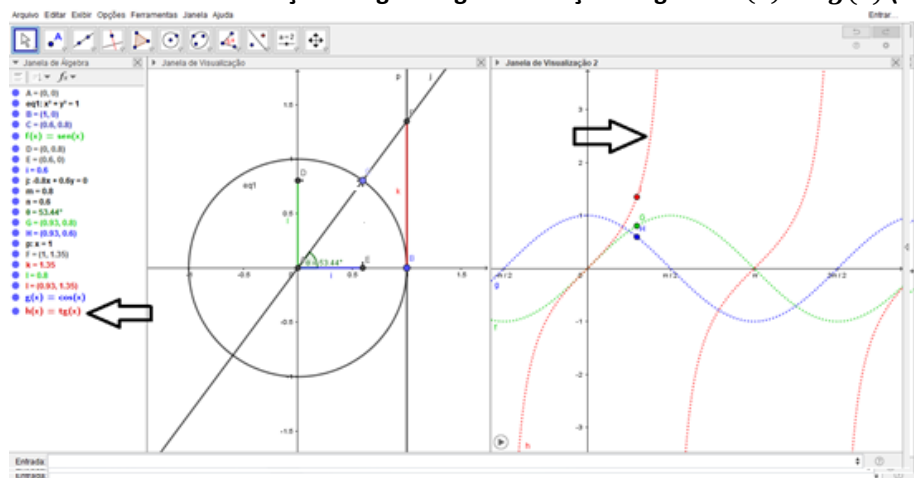
Figura 7.22 -Passo 22: Construção Geogebra –gráfico função cosseno $G(x) = \cos(x)$ (domínio real)



Passo 23: Entrada da função Tangente na Janela 2.

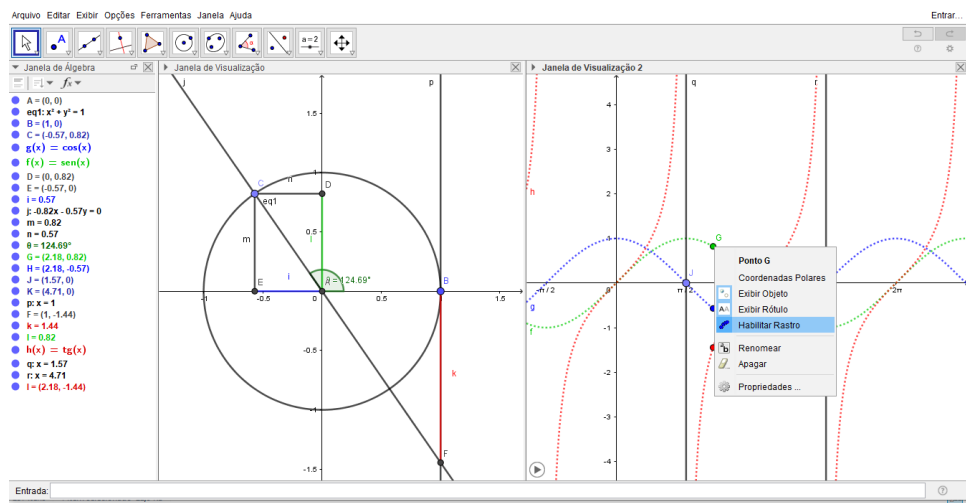
Na parte inferior da tela, na linha em que está indicando “entrada”, insira $h(x) = tg(x)$. Ao digitar a função tangente, no comando de entrada, seu gráfico estará esboçado em vermelho, conforme a personalização anterior associada ao ponto I.

Figura 7.23 -Passo 23: Construção Geogebra –gráfico função tangente $H(x) = tg(x)$ (domínio real)



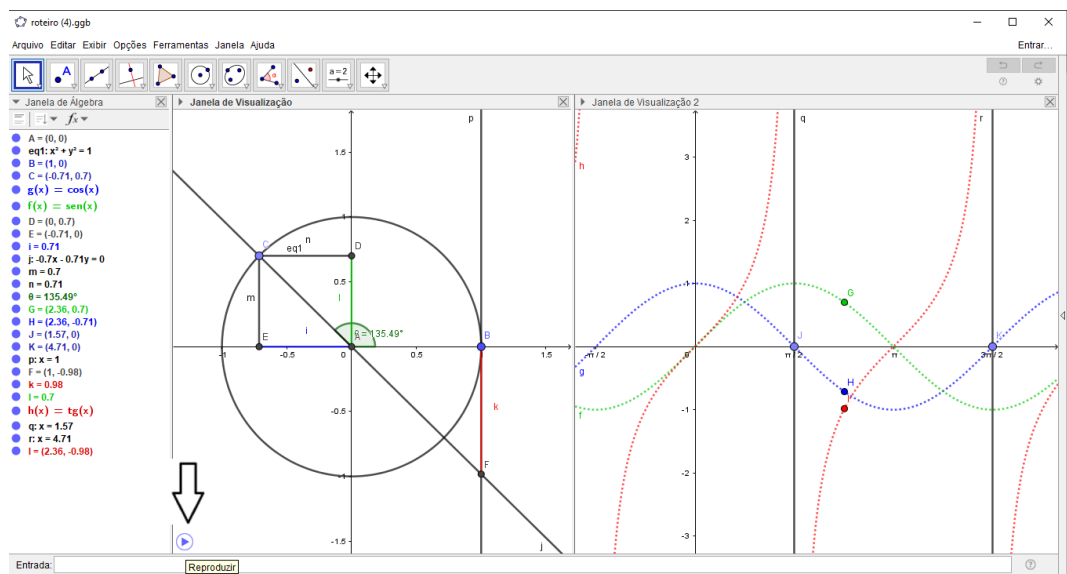
Passo 24: Habilitando o rastro dos pontos G , H , e I na Janela 2. Para habilitar rastro basta seguir o seguinte passo: com o botão direito, clique sobre o ponto desejado → selecione “habilitar rastro”.

Figura 7.24 -Passo 24: Construção Geogebra -habilitando o rastro dos pontos.



Passo 25: Animação do ponto C. Para o movimento automático, em movimentos cíclicos sobre o ciclo, basta seguir o seguinte passo: de um clique no espaço da janela de visualização, se o ícone indicado na seta na figura 7.25, não estiver aparecendo → em seguida clique em “reproduzir”. Pra cessar o movimento basta clicar novamente em “pausar”.

Figura 7.25 -Passo 25: Construção Geogebra -animação do ponto C.



O movimento do ponto C pode ser manipulado manualmente quando, com o cursor, selecionamos o ponto e arrastamos com o mouse.

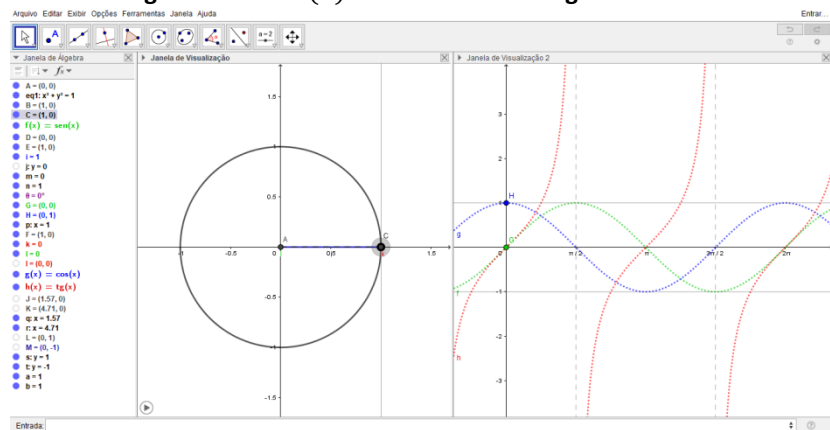
Encerraremos esta seção com uma análise do crescimento/decrescimento das funções trigonométricas em cada quadrante, fazendo uso do rastro de pontos obtido das construções anteriores.

FUNÇÃO SENO

Com a função rastro habilitada para o ponto G , ao movimentar o ponto C sobre a circunferência, o ponto G vai se movimentar e formar um rastro em verde indicando o caminho percorrido.

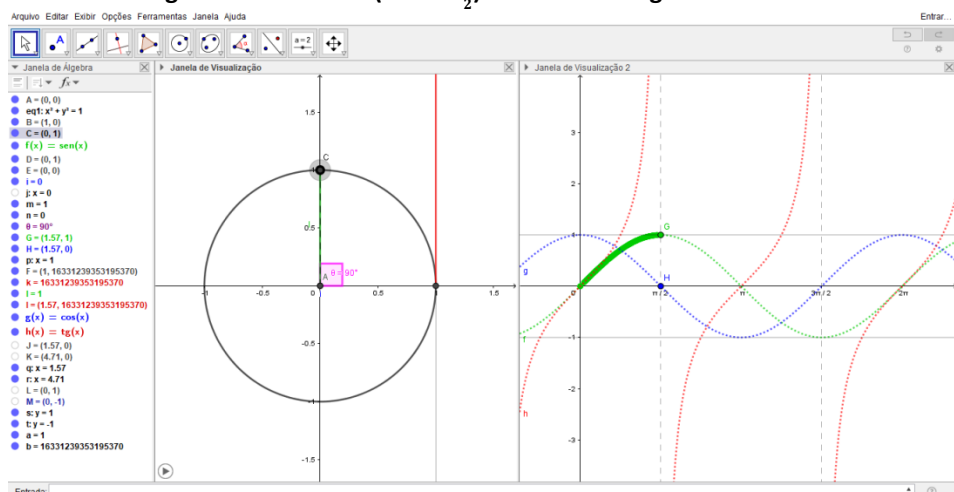
Selecionando o ponto C e movendo ele para a posição $\theta = 0$, o ponto G está na origem $(0,0)$, sendo $\text{sen}(0) = 0$.

Figura 7.26 - $\text{sen}(0) = 0$ -atividade Geogebra



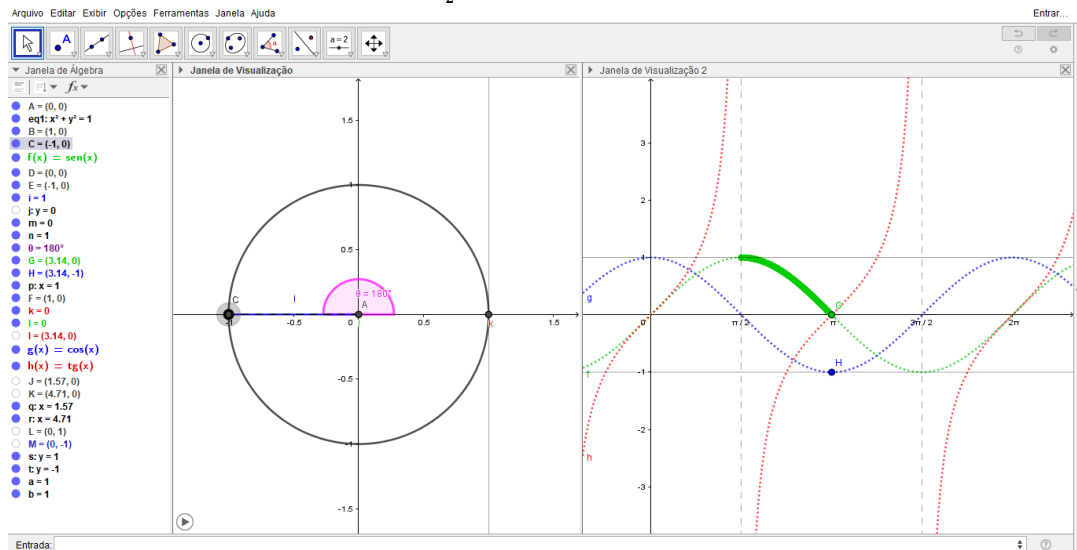
No primeiro quadrante ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), temos uma função crescente positiva, com $\text{sen}(0) = 0$ (valor nulo da função seno) e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (valor máximo da função seno).

Figura 7.27 -Seno θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) -atividade Geogebra



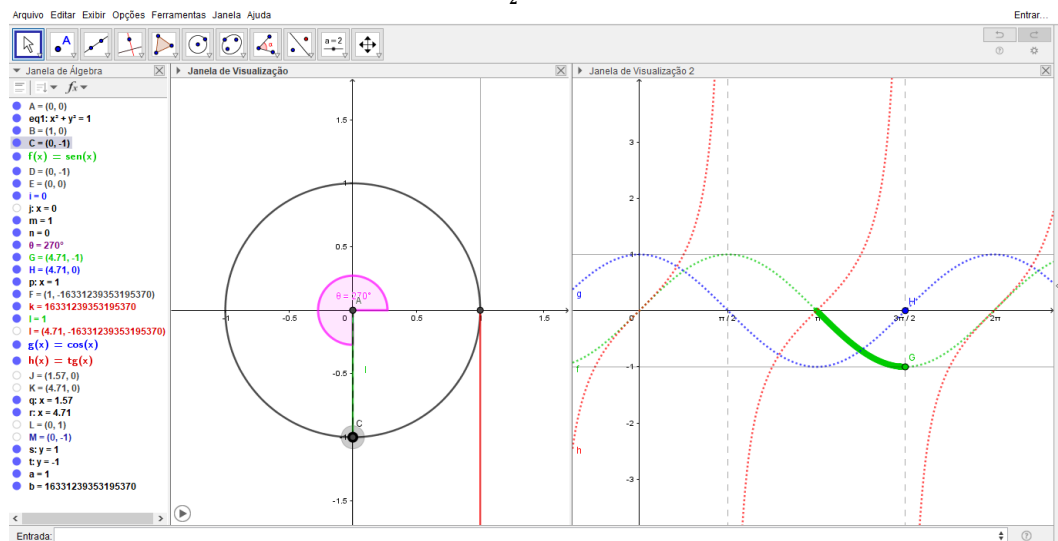
No segundo quadrante, para $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, temos uma função decrescente e positiva, sendo $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (valor máximo da função seno) e $\text{sen}(\pi) = 0$ (valor nulo da função seno).

Figura 7.28 -Seno θ ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) -atividade Geogebra



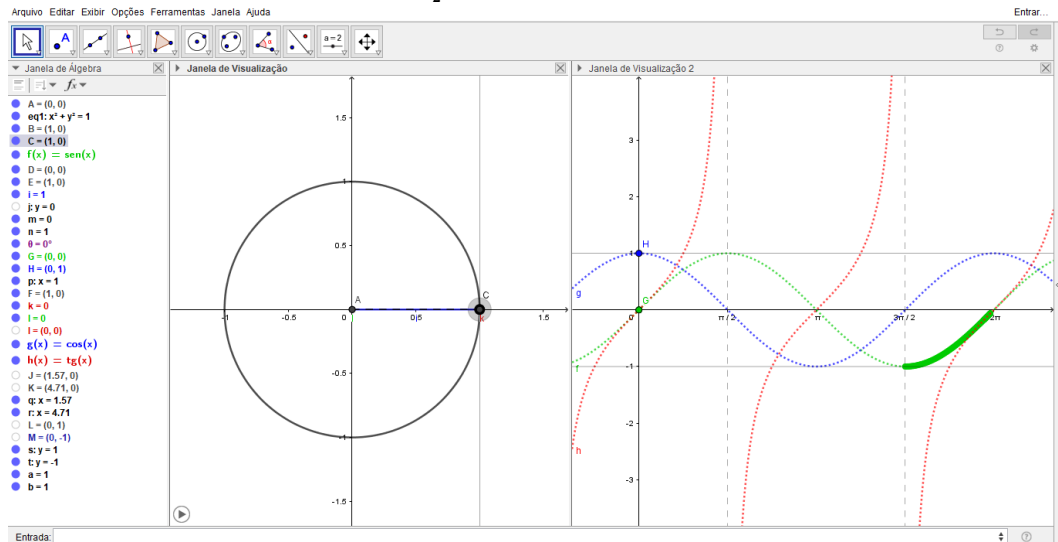
No terceiro quadrante ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$), temos uma função decrescente e negativa, com $\text{sen}(\pi) = 0$ (valor nulo da função seno) e $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ (valor mínimo da função seno).

Figura 7.29 -Seno θ ($\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$) -atividade Geogebra



No quarto quadrante, para $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, temos uma função crescente e negativa, com $\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$ (valor mínimo da função seno) e $\text{sen}(2\pi) = 0$ (valor nulo da função seno).

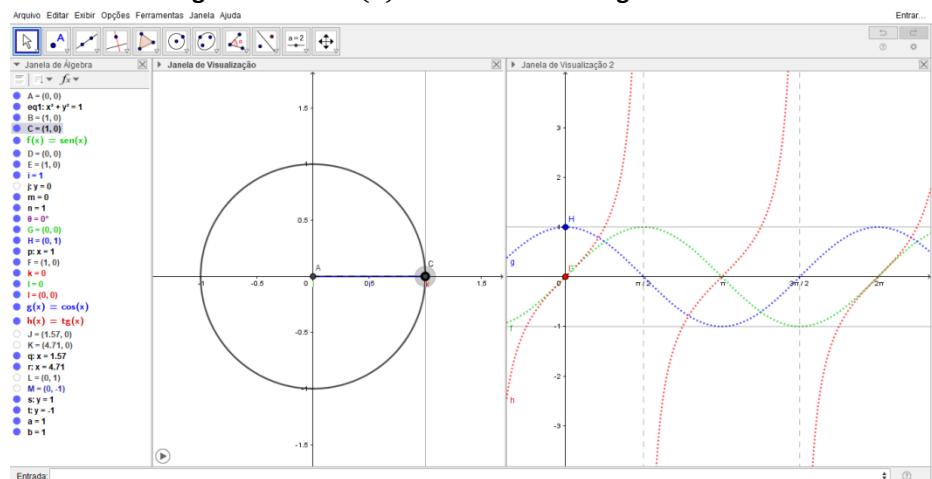
Figura 7.29 -Seno θ ($\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$) -atividade Geogebra



FUNÇÃO COSSENO

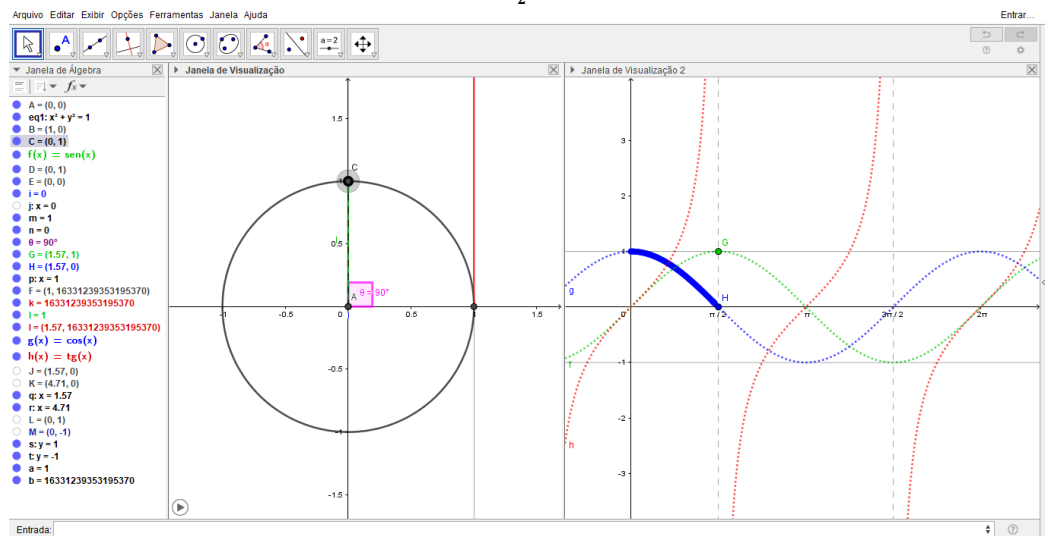
Para $\theta = 0$, o ponto H está na coordenada $(0,1)$, sendo $\cos(0) = 1$ (valor máximo da função cosseno).

Figura 7.30 -cos (0) = 1 -atividade Geogebra



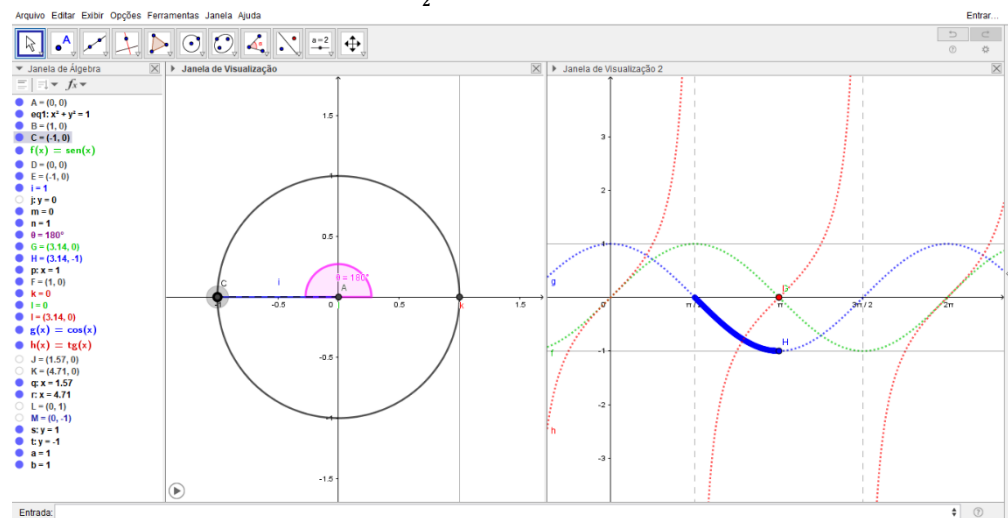
No primeiro quadrante, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos uma função decrescente e positiva, sendo $\cos(0) = 1$ (valor máximo da função cosseno) e $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ (valor nulo da função cosseno).

Figura 7.31-Cosseno θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) -atividade Geogebra



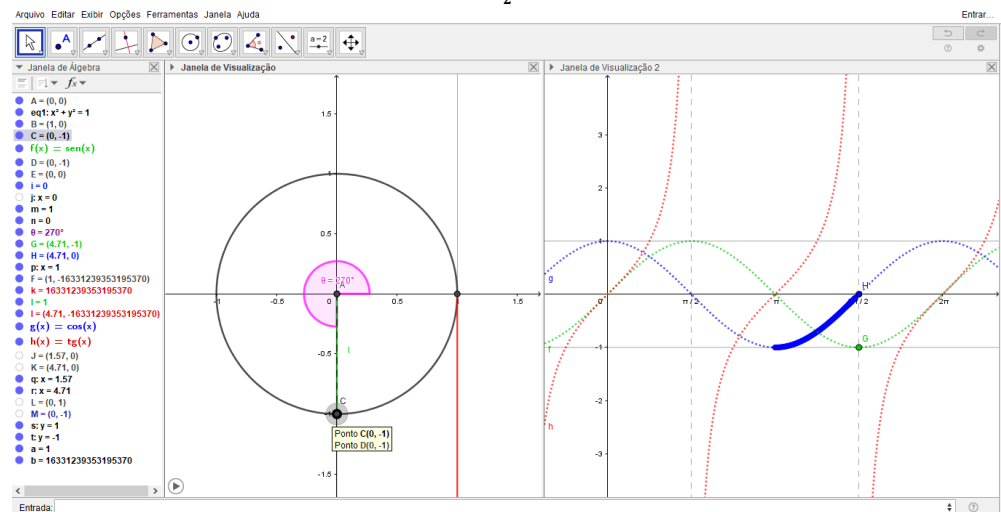
No segundo quadrante, para $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, temos uma função decrescente e negativa, sendo $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (valor nulo da função cosseno) e $\cos(\pi) = -1$ (valor mínimo da função cosseno).

Figura 7.32 -Cosseno θ ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) -atividade Geogebra



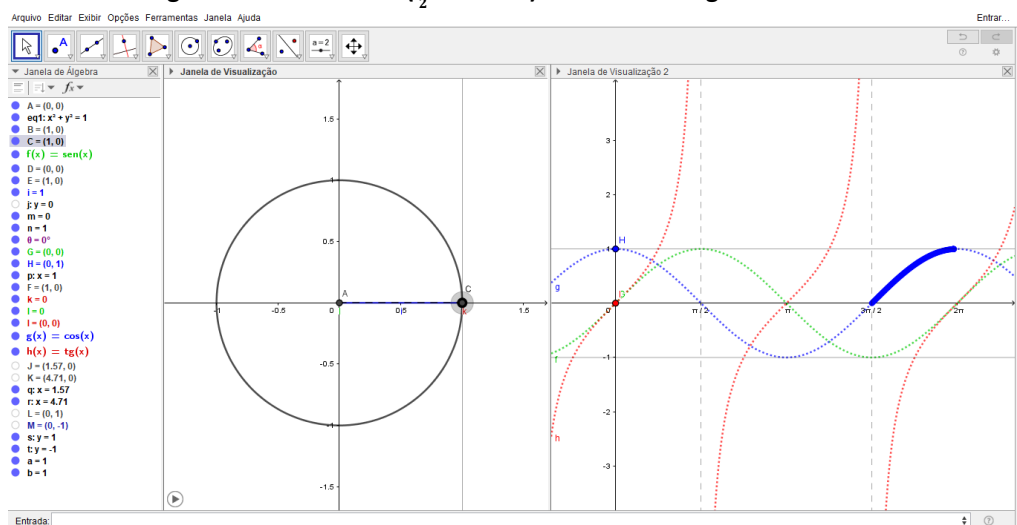
No terceiro quadrante, para $\pi < \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, temos uma função crescente e negativa, sendo $\cos(\pi) = -1$ (valor mínimo da função cosseno) e $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ (valor nulo da função cosseno).

Figura 7.33 -Cosseno θ ($\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$) -atividade Geogebra



No quarto quadrante, para $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, temos uma função crescente e negativa, sendo $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ (valor nulo da função cosseno) e $\cos(2\pi) = 1$ (valor máximo da função cosseno).

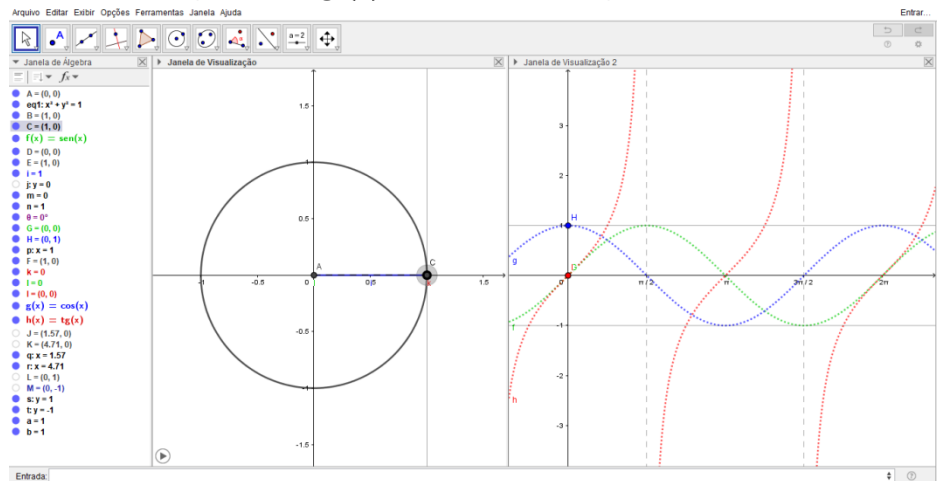
Figura 7.34 -Cosseno θ ($\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$) -atividade Geogebra



FUNÇÃO TANGENTE

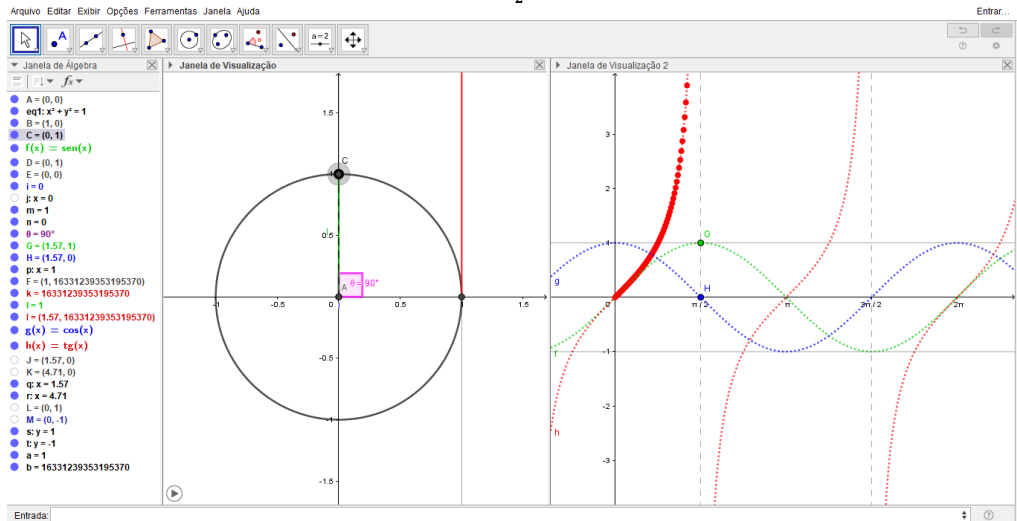
Para $\theta = 0$, o ponto I está na origem $(0,0)$, sendo $tg(0) = 0$ (valor nulo da função tangente).

Figura 7.35 $-tg(0) = 0$ -atividade Geogebra



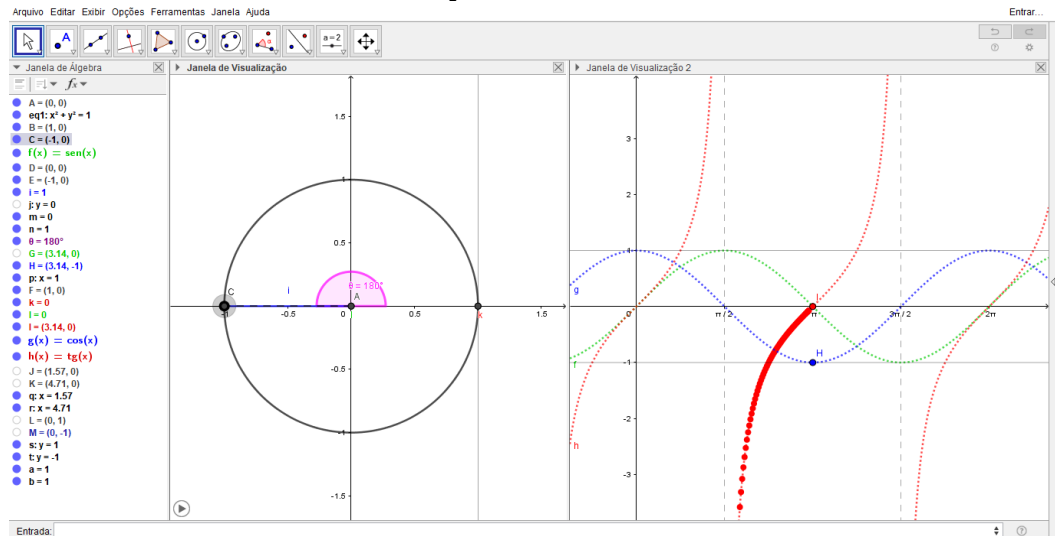
No primeiro quadrante ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) temos uma função crescente e positiva, sendo que $tg(0) = 0$ (valor nulo da função tangente) e $tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ não se define, assim sua imagem se apresenta de 0 e tende a $+\infty$.

Figura 7.36 -Tangente θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) -atividade Geogebra



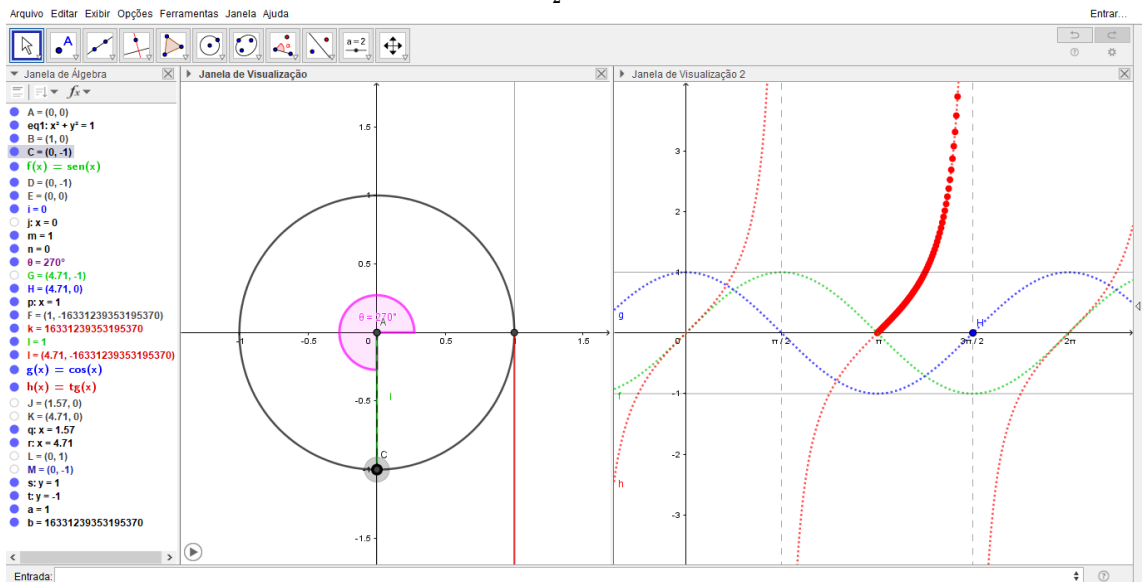
No segundo quadrante, para $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, temos uma função crescente e negativa, sendo que $tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ não se define e $tg(\pi) = 0$ (valor nulo da função tangente), assim sua imagem se apresenta de $-\infty$ até 0.

Figura 7.37 -Tangente θ ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) -atividade Geogebra



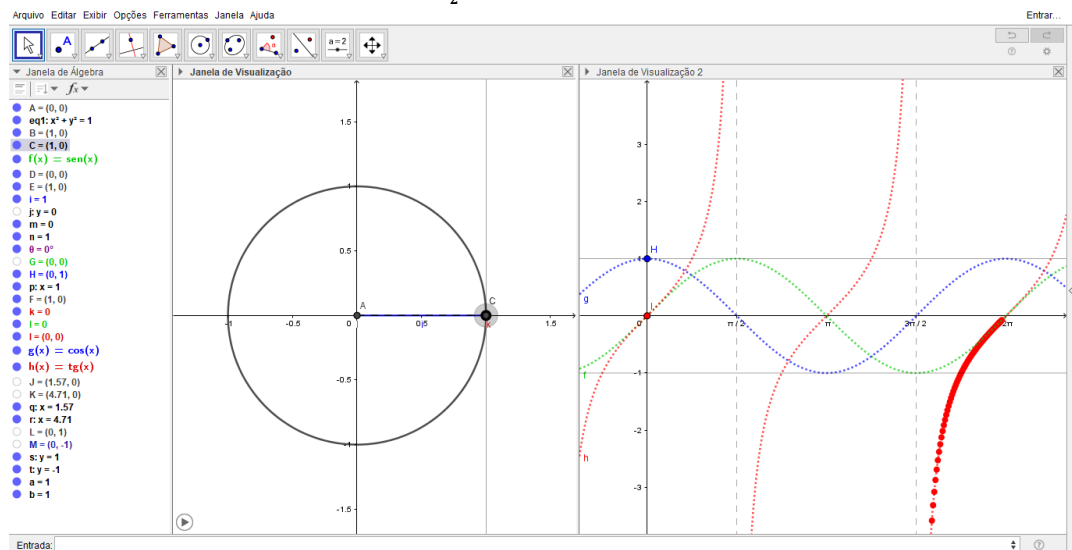
No terceiro quadrante ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) temos uma função crescente e positiva, sendo que $tg(\pi) = 0$ (valor nulo da função tangente) e $tg\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ não se define, assim sua imagem se apresenta de 0 e tende a $+\infty$.

Figura 7.38 -Tangente θ ($\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$) -atividade Geogebra



No quarto quadrante, para $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, temos uma função crescente e negativa, lembrando que $tg\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ não se define e $tg(2\pi) = 0$ (valor nulo da função tangente), assim sua imagem se apresenta de $-\infty$ até 0.

Figura 7.39 -Tangente θ ($\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$) -atividade Geogebra



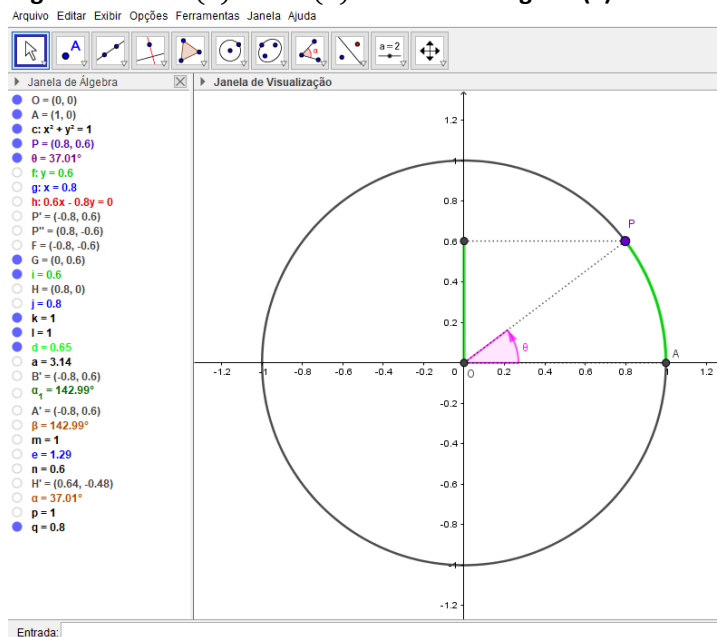
7.3 CONSTRUINDO AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

Equações do tipo: $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$.

No caso em as imagens de x e θ coincidem no ciclo trigonométrico, concluímos que:

$$x = \theta + k \cdot 2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

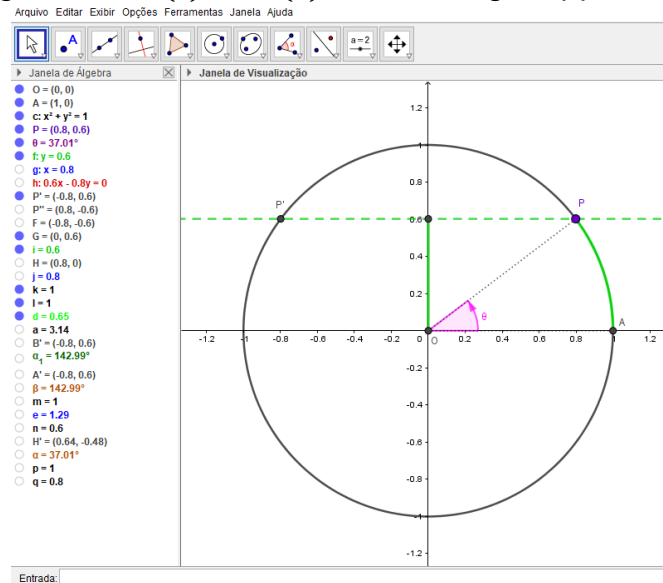
Figura 7.40 - $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$ -atividade Geogebra(1)



No caso em que as imagens de x e θ serem simétricas em relação ao eixo das ordenadas, obtemos que:

$$x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Figura 7.41 - $\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$ -atividade Geogebra (2)



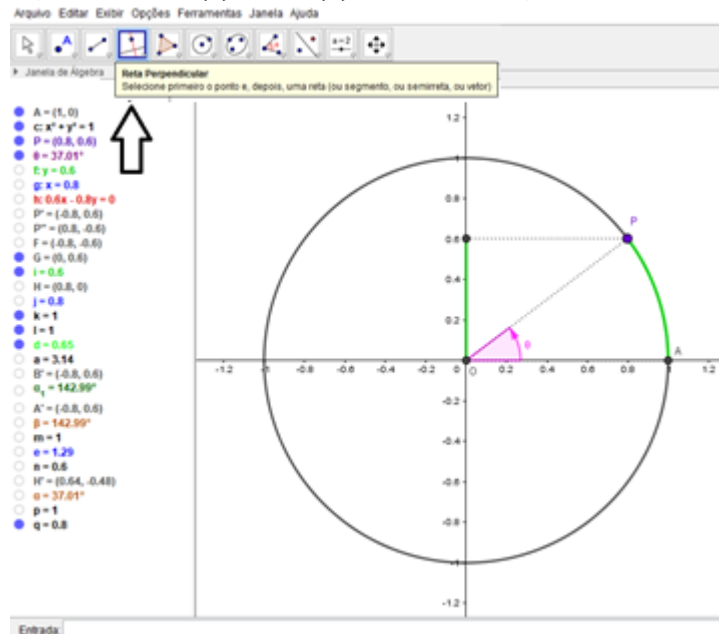
Para a construção e visualização no GeoGebra, seguimos alguns passos que serão descritos a seguir.

- I. Construímos o ciclo trigonométrico de raio 1.
- II. Construímos um ângulo θ e identificamos o ponto P .
- III. Traçamos um seguimento $\overline{OP}$, para limitar, visivelmente, o ângulo θ construído.
- IV. Construímos o arco circular acompanhando o ângulo θ . Esse passo é necessário apenas para a visualização mais clara das coincidências das extremidades.
- V. Traçamos uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas que passe por P .
- VI. Marcamos o ponto de interseção entre o eixo das ordenadas e a reta construída. Esse ponto será a projeção do ponto P no eixo y .
- VII. Traçamos um seguimento da origem ao ponto de interseção marcado acima.
- VIII. Marcamos o segundo ponto de interseção entre a reta paralela que foi construída e o ciclo trigonométrico (no 2º quadrante).

Para construir o ciclo trigonométrico veja os passos 1 à 5. Para construir o ângulo veja o passo 14. Para traçar uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe por P , siga o passo abaixo:

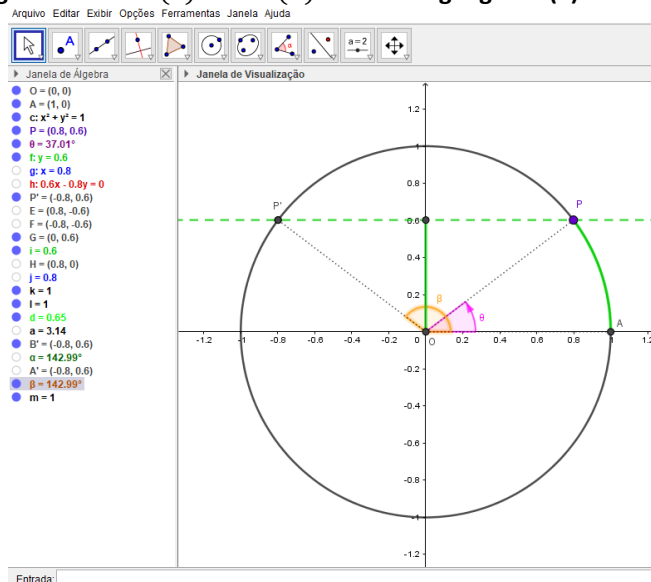
Clique o 4º ícone (reta perpendicular) → Selecione a 1ª opção → Clique no ponto P e depois no eixo y .

Figura 7.43 $-\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$ -atividade Geogebra(3)



Para construção do segmento OP' veja passo 5. Para construir o ângulo $A\hat{O}P'$ veja passo 14.

Figura 7.44 $-\text{sen}(x) = \text{sen}(\theta)$ -atividade geogebra (4)

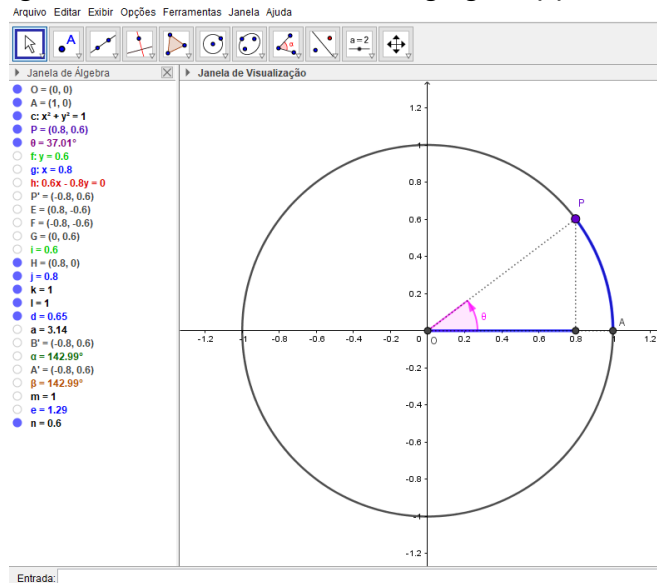


Para equações do tipo: $\cos(x) = \cos(\theta)$.

No caso em que as imagens de x e θ coincidem no ciclo trigonométrico, concluímos que:

$$x = \theta + k \cdot 2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

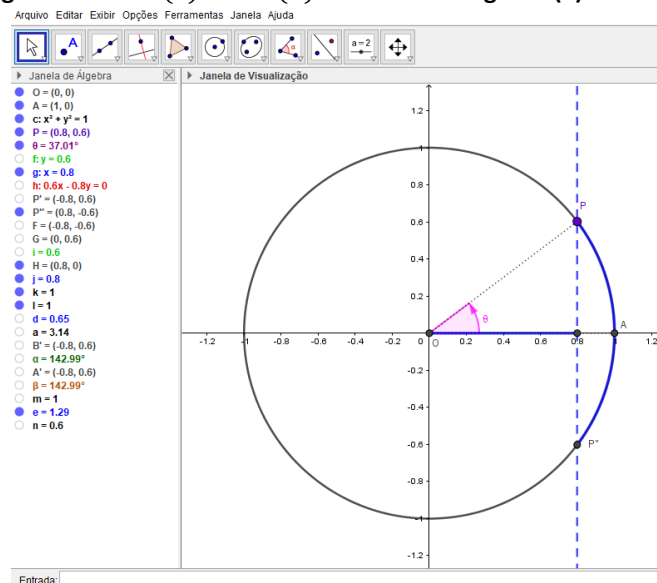
Figura 7.45 - $\cos x = \cos \theta$ -atividade geogebra (1)



No caso em que as imagens de x e θ são simétricas em relação ao eixo das abscissas, obtemos que:

$$x = -\theta + k \cdot 2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Figura 7.46 - $\cos(x) = \cos(\theta)$ -atividade Geogebra (2)



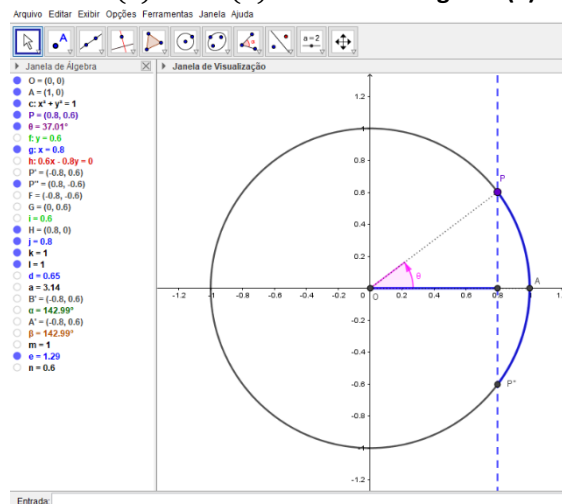
Para a construção e visualização no GeoGebra, seguimos alguns passos que serão descritos a seguir.

- I. Construímos o ciclo trigonométrico de raio 1.
- II. Construímos um ângulo θ e identificamos o ponto P .
- III. Traçamos um segmento $\overline{OP}$, para limitar, visivelmente, o ângulo θ construído.

- IV. Construímos o arco circular acompanhando o ângulo θ . Esse passo é necessário apenas para a visualização mais clara das coincidências das extremidades.
- V. Traçamos uma reta perpendicular ao eixo das abscissas que passe por P .
- VI. Marcamos o ponto de interseção entre o eixo das abscissas e a reta construída. Esse ponto será a projeção do ponto P no eixo x .
- VII. Marcamos o segundo ponto de interseção entre a reta perpendicular que foi construída e o círculo trigonométrico (no 4º quadrante).
- VIII. Construímos um arco circular entre os pontos e interseção do ciclo trigonométrico com a reta perpendicular ao eixo das abscissas. Esse passo é necessário apenas para a visualização mais clara das coincidências das extremidades.

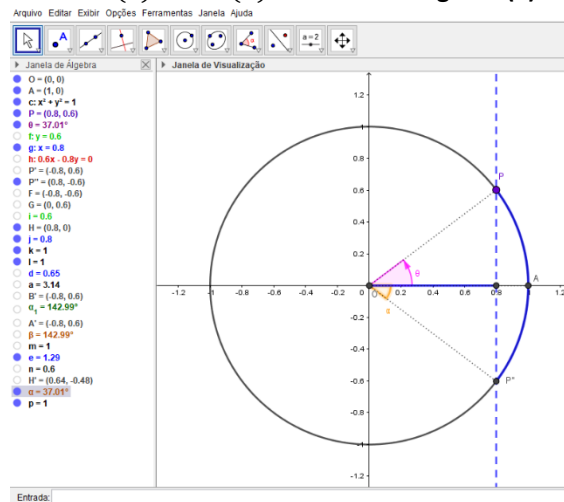
Seguindo esses passos e, personalizando as cores e estilos de algumas construções, teremos a seguinte imagem:

Figura 7.47 $-\cos(x) = \cos(\theta)$ -atividade Geogebra (3)



Os passos de construções são análogos ao feito na equação $\sin x = \sin \theta$. Para construção do segmento OP' veja passo 5. Para construir o ângulo $A\hat{O}P'$ veja passo 14.

Figura 7.48 $-\cos(x) = \cos(\theta)$ -atividade Geogebra (4)



Equações do tipo: $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\theta)$.

No caso em que as imagens de x e θ possuem o mesmo valor para a tangente, obtemos:

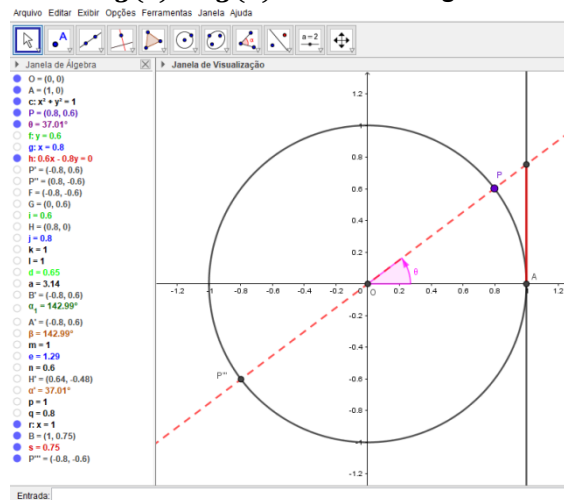
$$x = \theta + k \cdot \pi, (k \in \mathbb{Z}) \text{ com } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi.$$

Para a construção e visualização no GeoGebra, seguimos alguns passos que serão descritos a seguir.

- I. Construímos o ciclo trigonométrico de raio 1.
- II. Tangente ao ciclo e perpendicular ao eixo x em 1, construímos uma reta que será o eixo das tangentes.
- III. Construímos um ângulo θ e identificamos o ponto P .
- IV. Traçamos a reta $\overrightarrow{OP}$.
- V. Marcamos o ponto de interseção entre a reta construída e a reta tangente ao ciclo.
- VI. Marcamos o segundo ponto de interseção entre a reta $\overrightarrow{OP}$ e o ciclo trigonométrico (no 3º quadrante).

Seguindo esses passos e, personalizando as cores e estilos de algumas construções, teremos a seguinte imagem:

Figura 7.49 - $\text{tg}(x) = \text{tg}(\theta)$ -atividade Geogebra

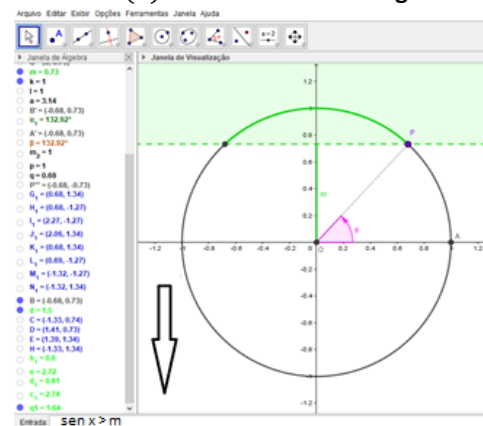


7.4 CONSTRUINDO AS SOLUÇÕES DAS INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

Para inequações do tipo: $\text{sen}(x) > m$.

Neste caso as soluções são obtidas pela intersecção do ciclo com o semiplano acima da reta perpendicular ao eixo y passando por P .

Figura 7.50 - $\text{sen}(x) > m$ -atividade Geogebra

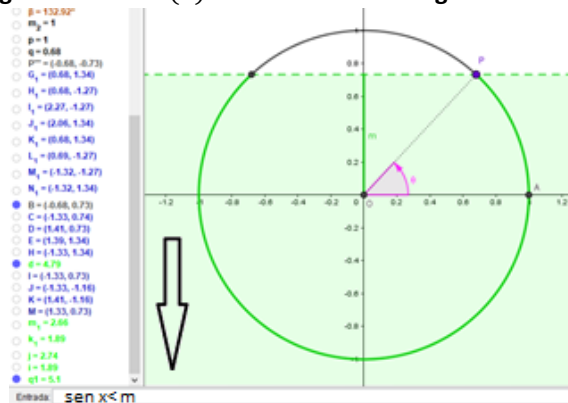


Para construir basta colocar $\text{sen}(x) > m$ na barra de entrada.

Para inequações do tipo: $\text{sen}(x) < m$.

Neste caso as soluções são obtidas pela intersecção do ciclo com o semiplano abaixo da reta perpendicular ao eixo y passando por P .

Figura 7.51 $-\sin(x) < m$ -atividade Geogebra

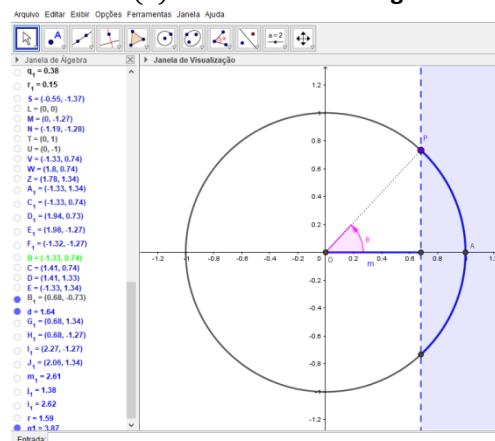


Para construir basta colocar $\sin(x) < m$ na barra de entrada.

Para inequações do tipo: $\cos(x) > n$.

Neste caso as soluções são obtidas pela intersecção do ciclo com o semiplano a direita da reta perpendicular ao eixo x passando por P .

Figura 7.52 $-\cos(x) > n$ -atividade Geogebra

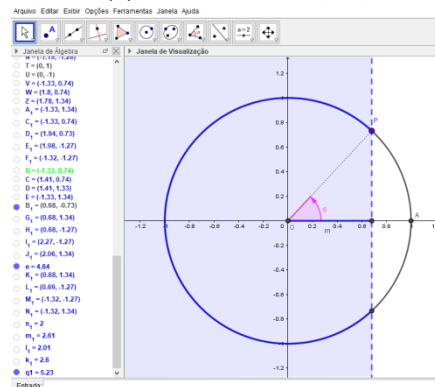


Para construir basta colocar $\cos(x) > n$ na barra de entrada.

Para inequações do tipo: $\cos(x) < n$.

Neste caso as soluções são obtidas pela intersecção do ciclo com o semiplano a esquerda da reta perpendicular ao eixo x passando por P .

Figura 7.53 - $\cos(x) < n$ -atividade geogebra

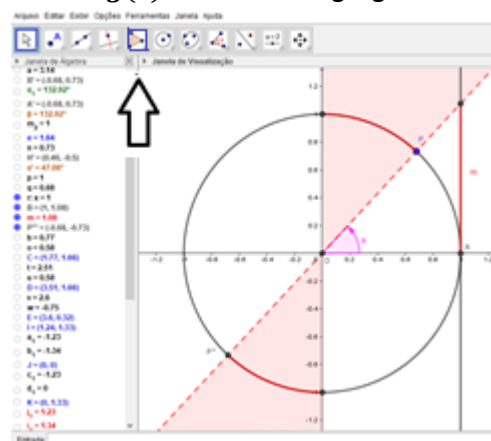


Para construir basta colocar $\cos(x) < n$ na barra de entrada.

Para inequações do tipo: $\operatorname{tg}(x) > t$ e $\operatorname{tg}(x) < t$.

Temos que as soluções que satisfazem tais inequações pertencem à interseção do ciclo com os ângulos formados pela reta $\overrightarrow{OP}$ e o eixo y .

Figura 7.54 - $\operatorname{tg}(x) > t$ -atividade geogebra



Para construir a região em destaque (um dos casos $\operatorname{tg}(x) > t$) use a 5º ícone (Polígono) para criar um polígono que englobe a região desejada.

8 CONCLUSÃO

No desenvolvimento desse trabalho é possível observar que ao se trabalhar com o ensino de trigonometria, especificamente no estudo de funções trigonométricas e resolução de equações e inequações trigonométricas as ferramentas gráficas de visualização se mostram eficazes e de suma importância para a compreensão do estudante.

A utilização de ferramentas visuais e de tecnologias para o ensino-aprendizagem de matemática é uma acepção emergente, e acreditamos que são capazes de facilitar a assimilação de diversos assuntos permitindo assim melhor compreensão e aflorando o intuitivo matemático.

Esperamos que este estudo teórico e as atividades no GeoGebra aqui expostas sirvam como material de apoio aos docentes que forem ministrar as temáticas aqui abordadas, quebrando um pouco a barreira do uso das tecnologias.

REFERÊNCIAS

ASSIS, CIBELLE DE CASTRO. Formação continuada para professores de Matemática: integrando softwares educativos à prática docente. XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIAEM, **Anais** Recife: Jun 2011, p.1-12.

BARBOSA, JOÃO LUCAS MARQUES. **Geometria Euclidiana Plana**, 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

IEZZI, GELSON. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria**. v. 3. 8ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

MORAN, JOSÉ MANUEL. **As Mídias na Educação**- texto publicado no livro: Desafios na Comunicação Pessoal. 3ª Ed. São Paulo: Paulinas, 2007, p. 162-166.

NETO, ANTÔNIO DE CAMINHA MUNIZ. **Tópicos de Matemática Elementar**. v. 2. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NETO, AREF ANTAR et al. **Trigonometria: Noções de Matemática**. v. 3. Fortaleza: Vestseller, 2009.

PAIVA, MANOEL. **Matemática Paiva**. 3º ed. São Paulo: Moderna, 2015.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP Rio Claro, SP, 2002.

ZULATTO, R. B. A. **A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores**. 2007. 173 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2007.