UNIRIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - CCET

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MATHEUS FREITAS DE OLIVEIRA

UM ESTUDO SOBRE A AUTENTICIDADE DE EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DO TIPO PROBLEMAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO

RIO DE JANEIRO - RJ

2020

MATHEUS FREITAS DE OLIVEIRA

UM ESTUDO SOBRE A AUTENTICIDADE DE EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DO TIPO PROBLEMAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Fabio Simas
Doutor em Matemática
UNIRIO

BANCA EXAMINADORA

Fabio Luiz Borges Simas

Prof. Dr. Fabio Luiz Borges Simas (UNIRIO)

Luciane Velasque

Prof. Dra. Luciane de Souza Velasque (UNIRIO)

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (UFRJ)

RIO DE JANEIRO - RJ

2020

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

d48 de Oliveira, Matheus
UM ESTUDO SOBRE A AUTENTICIDADE DE EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DO TIPO PROBLEMAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO / Matheus de Oliveira. -- Rio de Janeiro, 2020.
28

Orientador: Fabio Luiz Borges Simas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Ensino de Matemática. 2. Professores de Matemática. 3. Problemas de Matemática. 4. Autenticidade. I. Luiz Borges Simas, Fabio, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e a sorte da vida por terem me trazido até aqui.

Por ter sido incentivo, amor, paciência, porto seguro e, principalmente, por terem acreditado em sonhos mais altos que imaginei para mim, agradeço aos meus amigos e à minha família.

Aos professores da Escola de Matemática da UNIRIO com quem tive a oportunidade e o prazer de ter aulas, conversas e orientações, agradeço pelos ensinamentos e por terem aberto janelas de conhecimento em minha mente. Obrigado também pela paciência, atenção, disponibilidade e cuidado com o meu processo de formação.

Em particular, gostaria de agradecer ao meu orientador, Fabio Simas, pelo suporte e pelos inúmeros diálogos que permitiram a construção dessa dissertação cujo tema transformou minhas práticas pedagógicas em sala de aula.

UM ESTUDO SOBRE A AUTENTICIDADE DE EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA DO TIPO PROBLEMAS NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E DO ENSINO MÉDIO BRASILEIRO

Matheus Freitas de Oliveira[1]
PROFMAT - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
matheusfreitas@id.uff.br

Resumo

A relevância dos problemas de Matemática para o ensino dessa disciplina é reconhecida na comunidade científica e ratificada em diversos documentos oficiais. Contudo, o uso de problemas envolvendo situações pouco autênticas pode levar o estudante a crer que a Matemática diz respeito apenas ao cotidiano escolar. Em Palm (2009), o autor sugere aspectos que devem ser considerados para se determinar a autenticidade de um problema. Em Chamoso et. al. (2011), os aspectos de Palm são usados para se criar uma sistemática de classificação de problemas de Matemática em níveis de autenticidade. Além de uma análise crítica desses dois artigos, aqui apresentamos também uma proposta de adequação da classificação e uma proposta de questionário para se identificar o nível de autenticidade do problema, visando analisar os problemas sem levar em consideração a circunstância de aplicação do problema. Buscamos levar os professores a uma reflexão crítica sobre o tema, para que considerem os aspectos descritos na escolha, criação e aplicação de problemas. Além disso, o trabalho também pode contribuir para a criação de políticas públicas de educação e para a criação de livros didáticos.

Palavras-chave: Autenticidade de problemas, Educação Matemática, Problemas de Matemática.

[1] Trabalho de Conclusão de Curso desenvolvido sob a orientação do Professor Fabio Simas (EMat/UNIRIO).

Abstract

The relevance of Mathematics problems to the teaching of this discipline is recognized in the scientific community and ratified in several official documents. However, the use of problems involving non-authentic situations can lead the student to believe that Mathematics concerns only the school routine. In Palm (2009), the author suggests aspects that must be considered to determine the authenticity of a problem. In Chamoso et. al. (2011), Palm aspects are used to create a systematic classification of Mathematics problems in levels of authenticity. In addition to a critical analysis of these two articles, here we also present a proposal for classification adequacy and a questionnaire proposal to identify the level of authenticity of the problem, aiming to analyze the problems without taking into account the circumstance of application of the problem. We seek to lead teachers to a critical reflection on the topic, so that they consider the aspects described in the choice, creation and application of problems. In addition, the work can also contribute to the creation of public education policies and the creation of textbooks.

Key Words: Authenticity of problems, Mathematics Education, Mathematical Tasks.

SUMÁRIO

1. Introdução

A aprendizagem de Matemática não está balizada unicamente pela assimilação de fórmulas, algoritmos e conceitos básicos e que sirvam para o entendimento de outros conceitos mais elaborados. Espera-se do ensino de Matemática uma aprendizagem significativa dos conceitos, objetivando uma formação global, com pensamento ativo, estudando Matemática não só para o aprimoramento da ciência, mas como um modo de desenvolver-se para participar criticamente da sociedade, descrevendo, explicando e prevendo fenômenos, e interferindo e modificando situações do cotidiano, ou seja, utilizando a Matemática como ferramenta para a resolução de problemas.

Concordante com os objetivos para a aprendizagem de Matemática citados, João Pedro da Ponte enaltece a importância de propiciar aos alunos um espaço na aula de Matemática de enfrentamento de situações complexas, tomadas de decisões e riscos, e descobertas. Para ele: *"A força motora do desenvolvimento da ciência Matemática são os problemas e não é por isso de estranhar que a atividade de Resolução de problemas constitua uma importante orientação curricular para o ensino desta disciplina."* (PONTE, 1992, p.95).

O que podemos observar ainda é a importância de se trabalhar com problemas de Matemática e contextualizações, uma vez que a *"ação do sujeito de aproximar significado em construção dos que já construiu denota a importância dos âmbitos de ensino em que as relações de aproximação são estimuladas"* (SPINELLI, 2011, p. 12). De acordo ainda com Spinelli, podemos enaltecer o valor da contextualização como ponte entre o concreto e abstrato:

> "A ideia de contextualização do ensino de Matemática está, no senso comum, direta e unicamente associada à aplicação dos conceitos em situações cotidianas. Esta é, de fato, uma das possíveis formas de estimular a atribuição de significados aos objetos de estudo, mas não é a única nem sempre é a mais importante. (...) As características da contextualização do ensino, especialmente no caso da Matemática, estão vinculadas às concepções de como o sujeito constrói seu conhecimento. Quando se acredita que a apresentação dos conteúdos matemáticos deve ocorrer com base na gradação da dificuldade que intrinsecamente apresentam, isto é, do simples ao complexo, têm-se no horizonte determinada possibilidade de contextualização, caracterizada pela ultrapassagem de um a outro nível de compreensão." (SPINELLI, 2011, p.13)

Trabalho com os desses autores sugerem que um dos objetivos do professor nas aulas de Matemática deve ser propiciar um espaço de práticas pedagógicas que envolvam os alunos e que mostrem uma Matemática contextualizada e permeada de problematizações.

Como destacado por Beatriz D'Ambrósio, a presença de problemas de matemática no currículo tem sido tema de discussão na comunidade de Educação Matemática internacional e nacional. Segundo ela, tanto a resolução de problemas quanto a modelagem matemática, são tidas como duas propostas metodológicas de trabalho que lidam com a pergunta "Como ensinar Matemática hoje?" e que tentam alterar o cenário da matemática escolar e do processo de aprendizagem. D'Ambrósio segue dizendo que o modo de se trabalhar com resolução de problemas foi um tanto modificada e

> "a resolução, de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Essa proposta, mais atual, visa a construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. Através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da matemática envolvida. (...) Nesse processo o aluno envolve-se com o "fazer" matemática no sentido de criar hipóteses e conjecturas e investigá-los a partir da situação problema proposta." (D'AMBRÓSIO, 1989, p.17)

Já no caso da modelagem matemática, D'Ambrósio afirma que essa proposta metodológica

> "tem sido utilizada como uma forma de quebrar a forte dicotomia existente entre a matemática escolar formal e a sua utilidade na vida real.(...) Através da modelagem matemática o aluno se torna mais consciente da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas do dia-a-dia". (D'AMBRÓSIO, 1989, p.15)

Além disso, essa discussão não é recente. Ponte comenta sobre a evolução histórica da resolução de problemas como orientação curricular desde 1910 até o final da década de 60, como presente no trecho a seguir.

> "Já era discutida no princípio do século por teóricos da educação como John Dewey. Mereceu, por exemplo, nos anos 40 grande atenção da parte de educadores como William Brownell que sobre ela escreveu em termos de investigação e de sugestões didáticas. Mas foi a partir dos escritos e da ação do grande matemático George Polya (notavelmente do seu livro, *How to Solve It*, publicado originalmente em 1945), que esta atividade começou a ser olhada como fundamental no ensino desta disciplina." (PONTE, 1992, p.95)

De acordo ainda com Ponte (1992), com a chegada do Movimento da Matemática Moderna, o foco no ensino da Matemática foi direcionado para os conceitos e estruturas, desfavorecendo processos mais complexos de pensamento como a Resolução de Problemas.

No entanto, Ponte (1992) esclarece que junto com o declínio dessa reforma na década de 70, a resolução de problemas emerge como orientação pedagógica alternativa, sendo incorporada em 1976 à lista de competências básicas relativas à Matemática apresentada pelo *National Council of Supervisors of Mathematic* (NCSM, 1976). Durante a década de 80, Ponte relata a valorização da resolução de problemas em países como Estados Unidos, Inglaterra e Portugal.

Já levando em consideração o panorama nacional, nos últimos vintes anos, os documentos oficiais, norteadores curriculares e de desenvolvimento de habilidades do Ensino Básico, tem salientado a importância de um processo de aprendizagem que apresente e trabalhe com a Matemática envolvida em situações cotidianas. De acordo Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), por exemplo, dois objetivos das aulas de Matemática devem ser:

> "Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis; Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares." (BRASIL, 1998, p.48)

Dentro do esperado pelos PCN, mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reafirma o valor privilegiado de propostas pedagógicas permeadas por investigações Matemáticas para as séries do Ensino Fundamental . De acordo com a Base:

> "Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade Matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental". (BRASIL, 2017, p.222)

A matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), principal exame de acesso as principais universidade pública atualmente, determina eixos cognitivos comuns a todas as áreas do conhecimentos pertinentes: domínio das linguagens, compreensão dos fenômenos, enfrentamento de situações-problemas, construção de argumentações e elaboração de propostas de intervenção (BRASIL, 2019).

Tendo em vista essa análise geral, nos questionamos, inicialmente, se o ensino de matemática nas escolas tem conseguido mostrar para os estudantes a utilidade da Matemática no dia-a-dia da sociedade por meio de um ensino contextualizado. Em um segundo momento, foi natural perguntar quais são os tipos de problemas de matemática que estão sendo trabalhados pelos professores norteados pelos livros didáticos adotados e se estes são adequados para os propósitos esperados.

O objetivo geral deste trabalho é despertar a consciência crítica para a conceituação e utilização de Problemas de Matemática, de modo que propostas pedagógicas que incluam esses exercícios proporcionem um espaço de investigação adequado e que aproxime os problemas da matemática escolar de situações cotidianas. Como objetivo específico, espera-se identificar os tipos de problemas contextualizados utilizados nos livros didáticos e propor uma classificação de problemas em níveis de autenticidade alternativa aos referenciais teóricos levando em consideração as especificidades da educação brasileira.

Nesse caso, chamamos de Problema de Matemática Autêntico aquele que cumpre com o objetivo de facilitar a aprendizagem de habilidade e conceitos matemáticos úteis para a resolução de problemas cotidianos. Chamaremos de Problemas de Matemática todo exercício de Matemática que envolve elementos externos à Matemática e à História da Matemática e que necessitam da interpretação de dados apresentados em linguagem materna escrita e/ou visual.

Para fazer essa reflexão, primeiramente iremos analisar referenciais teóricos que nos sugerem aspectos de situações da vida real que são necessários para um problema de matemática autêntico e uma classificação de problemas em níveis de autenticidade. Em um segundo momento, iremos propor uma alternativa a esse estudo para o que concebemos ser mais adaptado à realidade da educação brasileira. Para um melhor entendimento do que pretendemos explicar com os aspectos e com os níveis de autenticidade, utilizamos exercícios encontrados em livros didáticos diversos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio. Por fim, apresentamos um fluxograma que pode ser utilizado para classificar os problemas, de acordo com os aspectos apresentados.

2. Análise dos referenciais teóricos

Para analisar a autenticidade dos problemas de Matemática encontrados nos livros didáticos, utilizamos como referência os estudos de dois pesquisadores de Educação Matemática, Torulf Palm e Jose Chamoso.

Cada um desses educadores contribuem de modo diferente para esse estudo. Os estudos de Palm nos permitiram construir aspectos e subaspectos a serem considerados para que um problema de Matemática seja considerado autêntico. Já a pesquisa de Chamoso nos permitiu elaborar uma escala de categorização dos problemas em diferentes níveis de autenticidade.

Os tópicos a seguir irão tratar de um levantamento breve da pesquisa dos educadores.

2.1. Teoria de autenticidade dos problemas de Matemática

O processo de resolução de problemas é uma tarefa de fato complexa do ponto de vista cognitivo, uma vez que exige do aluno a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e a validação da solução (POLYA, 1995).

Apesar da dificuldade, uma vez que um problema de Matemática desse tipo é proposto corretamente, tal investigação propicia uma conexão adequada entre a abstração Matemática e os fenômenos cotidianos, além de facilitar o aprendizado de habilidades necessárias para ser capaz de usar uma Matemática escolar útil e poderosa para resolver questões do cotidiano (PALM, 2009).

Para denominar um problema de Matemática como autêntico nessa perspectiva, ou seja, classificar um problema como próprio para contextualizar, Palm, em seus estudos, apresenta aspectos fundamentais e adicionais para essa caracterização. Os aspectos de uma situação da vida cotidiana considerados importantes são:

- **Evento**: a situação deve ter ocorrido ou ter grande chance de ocorrer;
- **Questionamento**: deve haver uma correspondência entre uma situação fora da escola e a pergunta feita no problema;
- **Dados ou informações**: aspecto que se refere às informações e dados do problema, incluindo valores, modelos e condições apresentadas. Considera-se a existências, realismo e especificidade (por exemplo, dividir um pedaço de pão ou um pedaço de bolo pode fazer com que estudantes pensem diferente para resolver o problema);
- **Apresentação**: aspecto referente ao modo (oral ou escrito por palavras, diagramas ou tabela) e a linguagem utilizada pela tarefa;
- **Estratégias de solução**: para ser bem simulada, uma situação deve apresentar uma função e um propósito claro para quem irá resolvê-la, para isso, a disponibilidade das estratégias utilizadas pelo aluno devem estar afinadas com as que ele encontraria na vida cotidiana.
- **Circunstâncias**: refere-se a como a situação vai ser apresentada, no sentido de avaliar a disponibilidade de ferramentas concretas como calculadora, mapa, réguas, entre outros, orientações direta ou indireta, consulta ou colaboração, uma vez que, cotidianamente, pessoas podem resolver problemas coletivamente, discutindo sobre o significado e entendimento da tarefa, tempo, acesso a diferentes soluções e desdobramentos.
- **Requisitos da solução**: A noção de solução deve ser interpretada de forma ampla, significando o método da solução e a resposta final a uma tarefa. Decisões e julgamentos sobre a validação de respostas e discussões sobre métodos de resolução ou frases que responda a questão presentes no texto da tarefa podem constituir requisitos para as soluções

de tarefas escolares. Em uma situação-problema, esses requisitos devem ser consistentes com o que é considerado como uma solução adequada e os alunos devem estar cientes disso.

- **Propósito no contexto figurado**: A adequação da resposta a uma tarefa e, portanto, as considerações necessárias a serem feitas, muitas das vezes dependem da finalidade de encontrar essa resposta. Já em outros casos, todo o método para solucionar a tarefa depende do propósito em encontrar a resposta. Nesses casos, em uma situação-problema, é fundamental que esteja claro o propósito em responder a pergunta.

2.2. Classificação de problemas autênticos.

De posse de aspectos para a classificação de problemas como autêntico, Chamoso et. al. (2013) faz uma análise de problemas de Matemática encontrados em livros didáticos espanhóis com o objetivo de ver até que ponto as questões contextualizadas refletem, de fato, as situações cotidianas. Para isso, Chamoso et. al. (2013) descreve as razões pelas quais alunos apresentam dificuldades em resolver um problema de Matemática e quais níveis de compreensão são necessários para essa resolução.

O panorama geral apresentado não é otimista. De acordo com ele, a fim de resolver os problemas, os alunos optam por um processo simplificado, como por exemplo, a estratégia de palavras-chave, amplamente utilizada na escola básica. A resolução de problemas levando em conta esses atalhos, nem sempre contribuem para o propósito de aplicar os procedimentos da Matemática na vida cotidiana e, inclusive, fomentam uma visão controversa de que problemas de Matemática sempre têm solução e sempre tem sentido próprio, que existe uma única solução numérica para o problema, que as soluções devem ser encontradas seguindo um conjuntos de operações matemáticas muitas das vezes utilizando todos os dados numéricos do problema entre outros estigmas (CHAMOSO, 2013).

Nesse sentido, segundo os autores, para que os alunos compreendam o real valor da resolução de problemas e façam a conexão adequada entre os conceitos e processos matemáticos com a vida cotidiana, uma alternativa proposta seria a utilização de problemas realistas (que reproduzem situações do mundo real e que exigem do aluno um conhecimento além da Matemática) e autênticos (CHAMOSO, 2013).

Chamoso cita Palm para definir um problema autêntico como aquele que "*representa alguma situação da vida real de modo que aspectos importantes dessa situação se simulem em um grau razoável*" (PALM, 2008, p.40) e categoriza, então, os problemas de Matemáticas em níveis de autenticidade

Em linhas práticas, Chamoso considera como aspectos de um problema autêntico apenas três dos ponderados por Palm anteriormente: Evento, Questionamento e Dados (a Especificidade e o

Propósito no contexto figurado). Uma vez pontuados segundo os aspectos, aos problemas são atribuídos diferentes níveis de autenticidade. De acordo com Chamoso (2013), os problemas de Matemática podem ser classificados como:

- **Autênticos** quando o evento é próximo do contexto do aluno fora da escola, a pergunta formulada tem sentido, os dados oferecidos são adequados, existe um propósito bem definido e os dados são específicos.
- **Padrões ajustados** quando descrevem situações próximas ao aluno, com quantidades razoáveis, mas sem um propósito concreto.
- **Padrões** quando descrevem situações que o aluno poderia encontrar na vida real, com dados adequados, mas não específicos, ou com dados específicos, mas em situações distantes do aluno pela forma que se apresentam.
- **Pertinentes** quando descrevem situações que, mesmo sendo conhecidas pelo aluno, não são próximos nem por evento, nem pela especificidade dos dados.
- **Exercícios camuflados** quando propõem situações, geralmente estranhas, nas quais é evidente que o importante é exercitar uma operação estudada.
- **Problemas absurdos** quando descrevem situações alheias a vida cotidiana do aluno, os dados se apresentam de maneira grotesca ou possui uma pergunta com pouco sentido e finalidade com relação à situação proposta.

Em Chamoso (2015), pode-se observar um aprimoramento dessa discussão e um esclarecimento no modo como essa pontuação foi feita. Chamoso considera como aspectos principais o Evento, Questionamento e os Dados e como aspectos secundários o Propósito e a Especificidade dos Dados. Dessa forma, ele propõe a categorização dos problemas de Matemática em três tipos: Autênticos, Plausíveis e Fictícios.

Essa classificação é feita através de uma tabela de referência com valores entre 0 e 1 de acordo com o indicadores, assim como o apresentado no exemplo a seguir para o caso do aspecto Evento, e, logo após, são classificados segundo as três categorias de acordo com um gabarito.

Aspectos	**Valores**	**Indicadores**
Evento	1	A situação em questão é factível na vida fora da escola
	0	A situação em questão é imaginária mesmo que seja relacionada com situações próprias do mundo real; Poderia acontecer na vida real, mas de forma anedótica ou pouco usual; Evento puramente matemático.

Tabela 1: Valores de referência para análise do aspecto Evento, segundo Chamoso (2015).

Uma das conclusões do estudo de Chamoso assinala que os alunos do Ensino Básico, geralmente, enfrentam a resolução de problemas com um pensamento automatizado e sem raciocínio crítico, não realizando a conexão esperada com as situações cotidianas, reforçando a dicotomia entre a Matemática escolar e a Matemática cotidiana.

3. Uma alternativa para classificação dos problemas de Matemática em níveis de autenticidade

Levando em consideração os apontamentos feitos por Palm e Chamoso sobre autenticidade dos problemas de Matemática, propomos aqui uma classificação alternativa, que consideramos mais adequada para a variada realidade de salas de aula do Brasil.

Em outras palavras, observamos a necessidade de considerar a diversidade de aspectos geográficos, culturais e circunstanciais das plurais salas de aulas do Ensino Básico e a possibilidade do uso de recursos tecnológicos em um mundo globalizado e virtualmente integrado, uma vez que nosso objetivo é refletir sobre a autenticidade de problemas encontrados nos livros didáticos brasileiros.

Com efeito, subdividimos aspectos propostos por Palm em aspectos que são caracterizadores de um problema autêntico e aspectos que levam em consideração as circunstâncias de sua aplicação, contribuindo para a adaptação da atividade em diferentes contextos escolares, aspectos que iremos denominar de aspectos circunstanciais.

Além disso, para os propósitos aqui especificados, propomos como necessária uma flexibilidade maior, em relação ao colocado por Palm, no que se entende por contexto do aluno, ou ações da vida cotidiana, ou ainda, situações do dia-a-dia, uma vez que o aluno, por exemplo, pode nunca ter participado ativa ou fisicamente de um evento, mas pode experienciá-lo pelo contato através de relatos, vídeos, encenações, leituras, realidade virtual ou aumentada, entre outros recursos da era digital.

Por fim, além do que foi proposto no estudo de Chamoso, sugerimos a adição de outra classificação de problemas em níveis de autenticidade, considerando que alguns problemas podem ter situações fantasiosas, caricatas e/ou fictícias, mas com a finalidade bem definida: tratar e resolver os problemas abstratos da Matemática ilustrados por situações que pareçam mais concretas, utilizando elementos da vida cotidiana. Denominamos essa categoria de Alegoria ou Metáfora, que *"como fica explícita na etimologia, implica transferir o sentido por meio da transformação de um conceito abstrato em uma imagem sensorial"* (SPINELLI, 2011, p.68)

Em suma, essa classificação, resultado da resposta de um breve questionário de perguntas objetivas, visa permitir ao professor uma reflexão sobre o tipo de problema de Matemática que ele irá escolher para compor sua proposta pedagógica. O que se pretende é a análise de tais problemas e a conscientização sobre uma utilização em consonância com o objetivo de aproximar a Matemática escolar da vida cotidiana, tendo em vista suas potencialidades pedagógicas e eventuais fragilidades.

3.1. Aspectos e subaspectos

Como dito anteriormente, adequando o estudo de Palm à diversidade de contextos escolares que encontramos no Brasil, percebemos a necessidade de classificar os aspectos e os subaspectos em duas diferentes categorias, tais como apresentadas na tabela a seguir. Os aspectos e subaspectos estão sendo definidos tal como proposto por (Palm, 2009).

<table>
<tr><th colspan="2">ASPECTOS E SUBASPECTOS CARACTERIZADORES</th><th colspan="2">ASPECTOS E SUBASPECTOS CIRCUNSTANCIAIS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Evento</td><td>Dados ou Informações</td><td>Especificidade</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Questionamento</td><td rowspan="2">Apresentação</td><td>Modo</td></tr>
<tr><td>Linguagem</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dados ou Informações</td><td>Existência</td><td rowspan="2">Estratégias de Solução</td><td>Disponibilidade</td></tr>
<tr><td>Realismo</td><td>Experiências anteriores</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="6">Propósito no Contexto Figurado</td><td rowspan="6">Circunstâncias</td><td>Ferramentas externas</td></tr>
<tr><td>Consultores</td></tr>
<tr><td>Orientações</td></tr>
<tr><td>Discussões</td></tr>
<tr><td>Tempo</td></tr>
<tr><td>Consequências do resultado</td></tr>
</table>

Tabela 2: Classificação dos Aspectos e Subaspectos.

A necessidade dessa classificação se dá pelo fato de compreendermos que os Aspectos Caracterizadores dão formato ao problema de Matemática, ou seja, eles são essenciais para a classificação em níveis de autenticidade, diferente dos demais aspectos citados por Palm, os que chamamos de Aspectos Circunstanciais.

Não obstante, os Aspectos Circunstanciais podem comprometer a inserção adequada de um problema de Matemática na sala de aula. Por exemplo, para a resolução de uma situação-problema, se o aluno não contar com o tempo e ferramentas adequadas (Circunstâncias) ou se a linguagem não for compatível com o desenvolvimento cognitivo e acadêmico do aluno (Apresentação), o problema de Matemática não irá cumprir com sua função de ponte entre os processos abstratos da Matemática e a vida cotidiana. Ao contrário do que se espera, o aluno desenvolverá estratégias de resolução artificiais, apenas com o intuito de resolver a questão.

No entanto, tendo em vista uma situação hipotética em que todos os Aspectos Caracterizadores foram contemplados, uma adequação nas circunstâncias e na apresentação do problema de Matemática citado como exemplo é suficiente para tornar o problema autêntico. O que entendemos é que o cerne do problema não foi alterado e, sim, as circunstâncias em que ele foi apresentado. Desse modo os Aspectos Circunstanciais serviriam para uma melhor adequação dos problemas de Matemática para a sala de aula e não para (des) caracterizá-los como autênticos.

Nas subseções que seguem, descrevemos nossa proposta de Aspectos Caracterizadores e ilustramos cada um deles com dois problemas: um que consideramos adequado para fins de autenticidade e outro que consideramos inadequado no aspecto em discussão.

3.1.1. Evento

Tendo como base o Brasil, país que se destaca pela sua pluralidade cultural, diversidade ambiental entre outras muitas multiplicidades, acreditamos que falar de situações que acontecem em um contexto próximo do aluno pode fragilizar qualquer classificação. Por exemplo, usar como cenário de contextualização um lago congelado no Nordeste brasileiro ou como objeto de estudo a embalagem de um produto comercializado apenas em uma determinada região do país.

Quando o problema descreve um evento adequado para fins de autenticidade, isto é, quando o evento descrito pelo problema já aconteceu ou tem grande chance de acontecer em uma situação cotidiana real, seja ela próxima da vivência do aluno ou trazida por um veículo de informação confiável (artigos de jornais, revistas ou científicos, mídias digitais diversas, relatos pessoais, entre outros), dizemos simplesmente que foi cumprida a exigência do Evento.

Nesse caso, então, estamos considerando que o evento se refere a todo o contexto envolvido na situação descrita pelo problema, tomando o cuidado de observar, por exemplo, que o modo como os dados do problema são apresentados, muitas das vezes, fazem parte dessa situação. Por exemplo, considere os exercícios a seguir.

PROBLEMA 1: Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

onde S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo. Cada elemento aij nos dá o número de chopes que i pagou para j, sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3 (aij representa o elemento da linha i, coluna j de cada matriz). Assim, no sábado, Antônio pagou 4 chopes que ele próprio bebeu, 1 chope de Bernardo e 4 de Claudio (primeira linha da matriz S).

a) Quem bebeu mais chope no fim de semana?
b) Quantos chopes Cláudio ficou devendo para Antônio?

Para a análise da situação descrita no Problema 1, estamos considerando como situação a ida de um grupo de amigos a um bar contabilizando a quantidade de chopes pagos e devidos e organizando esses dados e uma tabela (matriz). Nesse caso, consideramos que a situação é um evento não usual, uma vez que não se tem registros comuns da organização desse tipo de dados em uma evento.

PROBLEMA 2: O Hotel de Hilbert é um famoso hotel conhecido por nunca ter deixado um hóspede sem quarto, pois ele possui infinitos quartos e um gerente obstinado. Todos os quartos são numerados com números naturais.
Em um certo dia, o hotel tinha todos os quartos ocupados e um turista chegou para tentar se hospedar. Como o gerente do Hotel de Hilbert deve proceder para hospedar esse turista?

O Problema 2 trata de um famoso experimento mental matemático para abordar questões sobre o infinito. O contexto da situação proposta nesta questão é a instalação de um hóspede em um hotel com infinitos quartos. Por causa da quantidade de quartos, o evento desse problema não é próprio de uma situação cotidiana.

Outro cuidado a ser tomado pelo professor, nesse aspecto, é ser cauteloso e rigoroso no que se considera como situação real, por exemplo, no problema a seguir.

PROBLEMA 3: Em um único lançamento de duas moedas ao mesmo tempo, quais são os resultados possíveis? Qual é a probabilidade de, sem diferenciar a ordem dos elementos, obter apenas uma "cara"?

O que podemos observar no Problema 3 é uma situação artificial que, é possível de acontecer, mas que não representa uma situação cotidiana. O tipo de devolutiva que se observa em sala de aula de alunos ao se depararem com esse tipo de problema é "Quem por aí fica lançando duas ou mais moedas?".

Existem diversas intenções em se utilizar esse problema desde mostrar que a probabilidade está presente no lançamento de moedas até apresentar um plano de fundo para discutir probabilidade, sem qualquer interesse em se aproximar a Matemática do mundo real, na percepção do estudante.

Contudo, uma vez que o professor tenha o interesse de construir os conceitos de probabilidade e mostrar para os seus alunos que eles podem ser utilizados na vida cotidiana realmente, esse exemplo não é pertinente. De fato, não é comum ver alguém fazendo lançamento de moedas despretensiosamente. O Problema 3 não cumpre com a exigência do aspecto Evento.

Vale ressaltar que o intuito do presente trabalho não é desqualificar problemas como o anterior. Entendemos que exercícios como esse podem ser importantes no estudo de probabilidade. O que difere esse problema de exercícios mais objetivos que apresentam comandos como "Calcule…" ou "Determine…" é justamente o contexto, que vem trazer o exercício de uma forma menos abstrata. É importante pontuar que ambos trabalham a mesma estrutura matemática e levar o aluno a aprender o conceito e isso é potencialmente interessante, mas esse problema é deficiente quando objetiva-se a aproximação da Matemática escolar dos problemas cotidianos.

PROBLEMA 4: Uma escola tem 1 000 alunos. O 1º ano tem 55 alunos; o 2º ano, 65. Se houver um sorteio entre todos os alunos da escola, qual será a probabilidade de um aluno:

a) do 1º ano ser sorteado?
b) do 2º ano ser sorteado?
c) do 2º ano não ser sorteado?

Já analisando o Problema 4, o evento levado em consideração é um sorteio simples realizado com um conjunto de pessoas. Esse é um evento que pode ser comumente encontrado nas rotinas escolares ou na vida cotidiana das pessoas, seja para receber prêmios como numa rifa, para a escolha aleatória de um representante, entre outras finalidades, embora isso não esteja explícito no problema. Nesse caso, esse problema cumpre com a exigência desse aspecto.

3.1.2. Questionamento

Esse aspecto refere-se à pergunta feita pelo problema de Matemática. Quando a pergunta que é pertinente a situação descrita pelo problema, ou seja, quando é comum fazer essa pergunta, dizendo que foi cumprida a exigência do Questionamento. O que podemos encontrar são problemas que até simulem situações da vida real, mas com um questionamento antinatural, assim como o Problema 5 a seguir.

PROBLEMA 5: Uma mulher tem 54 anos, e sua filha, 12. Há quanto tempo a idade da mãe foi igual ao quadrado da idade da filha?

De fato, o contexto do problema é plausível: a relação entre uma mulher e sua filha, com idades, respectivamente, iguais a 54 e 12 anos. O que fragiliza esse problema é, justamente, a pergunta não ter conexão lógica com os dados apresentados pelo problema. Essa não é uma pergunta, geralmente, relevante e/ou pertinente à vida real, por isso, esse problema não satisfaz às exigências do aspecto Questionamento.

Por outro lado, o Problema 6 é uma questão para ser resolvida utilizando apenas as operações básicas.

PROBLEMA 6: José tem uma marcenaria. Para fazer certo tipo de armário, ele gasta R$ 800,00, incluindo madeira, cola, salários etc. Para produzir uma encomenda de 80 desses armários, ele e seus empregados demoram 20 dias.
Agora responda:

a. Qual seria o prejuízo de José se cobrasse R$ 50 000,00 pela encomenda de 80 armários?
b. Quanto ele deve cobrar por armário se quiser lucrar R$ 12 000,00 no total?

De acordo com esse problema, José precisa comparar diferentes valores para analisar situações onde ele pode obter lucro ou prejuízo em seu negócio. As perguntas do problemas são relevantes para a situação descrita no problema e podem ser comumente encontradas em situações cotidianas. Esse é um problema que cumpre com as exigências propostas pelo aspecto Questionamento.

3.1.3. Dados ou Informações

Esse aspecto considera as informações apresentadas pelo problema englobando valores, modelos e condições apresentadas. Inicialmente, Palm propõe três subaspectos: Existência, Realismo e Especificidade.

Para a classificação alternativa proposta por nós, neste artigo, usaremos como parâmetro, apenas os subaspectos que questionam a existência e o realismo dos dados. Ao falar da Especificidade, estamos nos referindo a detalhes relacionados aos dados apresentados pelo problema que quando omitidos ou não levados em consideração podem influenciar as estratégias de solução utilizadas ou mesmo a validação da resposta do problema. Nesse caso, quando consideramos o Evento como uma situação mais global do problema, esse aspecto já seria avaliado.

O aspecto Existência se refere à compatibilidade dos dados encontrados na situação da vida real e a descrita no problema, ou seja, se os dados que são trazidos pelo problema estão também disponíveis em contextos fora da escola. Em muitos exercícios, vemos problemas de Matemática que apresentam situações de um contexto real, mas que mostram dados que, a princípio, não estão acessíveis para a resolução do problema naquele contexto, como por exemplo, no Problema 7.

PROBLEMA 7: Pedro, brincando de aviãozinho de papel, observou que a trajetória que seu avião fez foi semelhante à parábola de equação $y = -x^2 + 4x$. De acordo com essas informações, qual é a altura máxima atingida pelo aviãozinho de papel de Pedro?

Na situação descrita pelo Problema 7, Pedro não teria acesso à equação da parábola que o movimento do seu avião descreve sem nem saber os dados do seu lançamento. Desse modo, esse problema apresenta falha na Existência dos dados.

Além disso, outro subaspecto referido ao tipo de informação apresentada pelo problema, trata da necessidade da apresentação de dados com valores compatíveis com a realidade, uma vez que, os valores encontrados como candidatos a solução são referências importantes para a conferência do problema.

PROBLEMA 8: É comum que sites, jornais e revistas calculem o número de pessoas presentes em um ato público considerando que cada metro quadrado seja ocupado por, aproximadamente, 4 pessoas. Determine a estimativa do número de pessoas presentes em uma avenida de formato retangular que tem 10 quilômetros de extensão por 1 quilômetro de largura?

O evento do Problema 8 apresentado anteriormente, trata de um cálculo de estimativa plausível para a contagem de multidões usado em grandes eventos como shows, manifestações, passeatas etc.

Uma das coisas que pode levar o aluno ao erro nessa questão são os valores apresentados por ela. Com efeito, de acordo com a situação proposta pela questão, a manifestação encheria a avenida com 40 milhões de pessoas, um resultado que pode fazer com que o aluno pense que está cometendo um erro.

De fato, ao cotejar os seus conhecimentos de vida e noções de grandezas com o resultado encontrado, o aluno encontra uma quantidade que é mais que o dobro da quantidade de habitantes da cidade do Rio de Janeiro, por exemplo, o que pode levá-lo a levantar questionamentos duvidosos sobre seu raciocínio ou ainda pior, fazê-lo deixar de acreditar que a Matemática escolar não se relaciona com o mundo real: existem os problemas da vida cotidiana e os problemas da escola.

3.1.4. Propósito no Contexto Figurado

Em consonância com o proposto por Palm, conhecer e entender a finalidade de responder um problema de matemática é fundamental para construir a ponte entre a vida cotidiana e a Matemática.

Na prática, um problema de matemática que apresente um evento, questionamentos e dados consistentes, não pode ser considerado um exercício que faça o aluno reconhecer a matemática no seu cotidiano se não houver um propósito explicitamente bem delineado em resolvê-lo.

PROBLEMA 9: Joana foi ao shopping com 200 reais (duas notas de 100 reais) para comprar duas toalhas de banho. Chegando na loja, Joana descobriu que cada toalha de banho custa R$54,90. Se Joana comprou as duas toalhas que precisava e pagou com o seu dinheiro, quanto ela receberá de troco?

O Problema 9 pode ser encontrado nas salas de aulas para ilustrar as possíveis aplicações da subtração em contextos do dia-a-dia. Para defender o problema, o professor pode argumentar dizendo que a finalidade de responder essa questão pode ser facilmente imaginada, apesar de não estar explícita no problema, já que envolve um evento corriqueiro.

Contrapondo essa ideia, o que podemos observar é que existe uma relação entre a necessidade de se explicitar o propósito do problema e a complexidade dos conceitos e sofisticação de situações, como acontece no Problema 10. Quantos maiores são as complexidades dos conceitos e a sofisticação das situações do ponto de vista da aprendizagem, maior a necessidade de explicar o problema.

PROBLEMA 10: Uma medicação prescrita por um médico tem com meia-vida de aproximadamente 2 horas. Isso significa que, por exemplo, depois de 2 horas da ingestão de 200 mg dessa medicação, permanecerão na corrente sanguínea do paciente apenas 100 mg da medicação. Após mais 2 horas (4 horas no total), apenas 50 mg permanecerão na corrente sanguínea e, assim, sucessivamente. Se um paciente recebe 800 mg dessa medicação a cada 6 horas, determine a quantidade dessa medicação que permanecerá na corrente sanguínea na 14ª hora após a ingestão da primeira dose.

Esse tipo de exercício pode ser encontrado em livros didáticos do Ensino Médio ou até mesmo avaliações, posto que essa situação pode ser modelada por uma função exponencial, mas para que esse exercício verdadeiramente sirva ao propósito de mostrar que a Matemática tem conexão com a Biologia, precisaríamos saber precisamente o porquê esse tipo de questionamento é importante, ou seja, qual o propósito de se calcular a quantidade da medicação presente na corrente sanguínea em determinado momento.

Sobretudo, a resposta desse questionamento pode ser encontrada no campo das Ciências Biológicas. Salienta-se, inclusive, a possibilidade e o incentivo de uma parceria interdisciplinar com alguém alguém apropriado de um conhecimento específico para poder justificar e construir o propósito dessa questão, de modo a torná-la autêntica.

Apesar disso, podemos inserir informações adicionais nos dois problemas de modo a torná-los autênticos, adicionando um propósito explícito em responder a pergunta do problema. Por exemplo, no Problema 9, perguntar se com o troco recebido por Joana, ela seria capaz de comprar um vestido de R$129,90 daria um propósito bem definido em saber o valor do troco, bem como, no Problema 10, fornecer informações que expliquem a necessidade de ter determinada concentração mínima na corrente sanguínea para manter o efeito de certo medicamento.

3.2. Níveis de autenticidade de problemas de Matemática

Nessa etapa do trabalho, utilizando os aspectos considerados anteriormente, e embasado no estudo sobre os níveis de autenticidade de Chamoso (2013), iremos propor uma categorização alternativa dos Problemas de Matemática em: situação-problema, problema contextualizado, problema aplicado, exercício camuflado, problema absurdo e alegoria (ou Metáfora).

Da categoria Problema Absurdo proposta por Chamoso, evidenciamos a importância dos problemas que chamaremos de Alegoria (ou Metáfora). De acordo com Spinelli (2011), as metáforas agem como facilitadoras na transmissão de ideias que ainda estão abstratas e por isso estão tão presentes no pensamento científico. De acordo com ele, *"elas são utilizadas para designar coisas que sem serem tomadas ao pé da letra, permitem atiçar nossa capacidade intelectual para que as reconheça, ou ainda, torne a conhecê-las, sob outro ângulo do olhar.* (SPINELLI, 2011, p.68)

Por isso, a inserção dessa categoria se fez necessária para dar um espaço de valor a problemas de matemática com eventos metafóricos, mas que tenham um propósito claro para a Matemática.

Para classificar os problemas em diferentes níveis de autenticidade utilizam-se os aspectos e subaspectos descritos no tópico anterior, levando em consideração as alterações realizadas no estudo do Palm, que também norteou Chamoso. Além disso, comparado ao trabalho do Chamoso, os níveis tiveram a nomenclatura adaptada para nomes que encontramos com recorrência nos estudos dos problemas de Matemática no Brasil.

Ainda com o intuito de ilustrar o que gostaríamos de pontuar, apresentamos exemplos de problemas de Matemática de cada uma das categorias a seguir.

3.2.1. Situação-problema

Para propostas pedagógicas em sala de aula que visem mostrar aos alunos como a Matemática está presente no cotidiano, ou ainda, como a Matemática pode ser utilizada para modelar e resolver problemas do dia-a-dia ou de diferentes áreas do conhecimento, espera-se que:

- o evento proposto pelo problema seja próximo do aluno fora da sala de aula ou ainda que ele possa vivenciá-lo por meio de relatos, pesquisas científicas, tecnologias ou experiências práticas;
- o questionamento do problema tenha sentido dentro do contexto do evento;
- os dados apresentados pelo problema sejam adequados, de modo que, sejam possíveis de ser encontrados pelo alunos na simulação do evento e ainda compatíveis com a realidade;
- e a finalidade em resolver esse problema esteja bem definida para o aluno.

Se todas essas quatro exigências forem cumpridas, o problema de Matemática é classificado como Situação-problema, posto que, de fato, essa questão modela uma situação do cotidiano, como por exemplo, o Problema 11 a seguir.

PROBLEMA 11: Durante a Black Friday de 2018, duas lojas de eletrônicos e eletrodomésticos fizeram uma promoção para seus clientes. Veja as condições de pagamento a seguir:

- Nas Lojas Europeias, o valor da Televisão de 40'' foi reduzido para R$ 999,90 com a possibilidade de um desconto de 15% para pagamentos à vista.
- Na loja Ronaldo Eletro, a mesma TV custa R$ 1129,90, porém o desconto para pagamento a vista é de 25%.

Na intenção de economizar, em qual das duas lojas, você compraria a TV, supondo que tenha condições de realizar o pagamento a vista?

Observe que, apesar de simples, o exercício acima apresenta uma situação que um evento conhecido em muitas realidades do Brasil ou que pode ser extraído de algum jornal ou notícia da internet, tornando a situação ainda mais real, uma vez que não seria necessária a criação de nomes fictícios ou valores. O questionamento e os dados desse problema são pertinentes e adequados à situação-problema e responder a essa pergunta tem um propósito de economizar bem definido.

Além do mais, resolvendo as contas propostas pela situação-problema, pode-se observar que a diferença entre os custos das televisões nas duas lojas é menor que R$2,00, ou seja, a questão pode ser inclusive problematizada com o objetivo de mostrar que escolha pode levar em conta outras variáveis como disponibilidade de estoque, distância da loja física, valor do frete etc.

Esse tipo de problematização que vai além da Matemática, propicia um espaço dialógico que permite ao aluno emular a tomada de decisões em situações da vida real, ou seja, educa o aluno não só para realizar com destreza cálculos matemáticos, mas o ensina a usar a Matemática como ferramenta para a vida.

3.2.2. Problema Contextualizado

Um problema de Matemática, quando não possui uma finalidade bem definida, pode perder a conexão com a situação cotidiana, ou seja, deixa de modelar bem o que acontece na vida real, já que, dessa vez, não se tem o porquê resolver tal problema.

Nesses problemas de Matemática:

- o evento proposto pelo problema seja próximo do aluno fora da sala de aula ou ainda ele possa vivenciá-lo por meio de relatos, pesquisas científicas, tecnologias ou experiências práticas;
- o questionamento do problema tem sentido dentro do contexto do evento;
- os dados apresentados pelo problema são adequados, de modo que, são possíveis de ser encontrados pelo alunos na simulação do evento e ainda compatíveis com a realidade;
- mas não existe um propósito concreto em resolvê-lo.

O que pode ser observado nesse tipo de problema de matemática é que, mesmo que para o professor seja claro qual pode ser o motivo de se responder aquilo, para o aluno, sujeito a quem se destina o processo de aprendizagem, essa situação pode não estar bem definida. Por isso, o chamamos de Problema Contextualizado: ele apresenta um contexto (ou enredo) bem definido, mas não um propósito em resolvê-lo.

Esse tipo de problema de Matemática pode ser facilmente confundido com uma Situação-Problema, uma vez que em muitos casos, a finalidade pode estar implícita ou ser facilmente imaginada.

O Problema 12 é um exemplo de Problema Contextualizado, uma vez que não se tem bem definido o propósito em perguntar o questionamento proposto.

PROBLEMA 12: Pedro e Ricardo são os responsáveis pela venda de ingressos em uma bilheteria de teatro. Ao final do dia, para o fechamento do caixa, eles anotam em uma tabela a quantidade de ingressos que cada um vendeu.

Ingressos vendidos no fim de semana dos dias 03 e 04 de agosto de 2019		
Período	**Ingressos vendidos por Enzo**	**Ingressos vendidos por Jair**
Sábado	798	815
Domingo	815	778

Quem vendeu mais ingressos neste fim de semana? Justifique.

3.2.3. Problema aplicado

Um problema de Matemática é chamado de Problema Aplicado quando descreve situação que o aluno poderia encontrar na vida real com dados adequados, mas não específicos, ou então com dados que são específicos, mas com valores não-compatíveis com a vida real, como no Problema 13.

PROBLEMA 13: Os 200 turistas da agência A foram distribuídos em grupos, os 300 turistas da agência B foram distribuídos em quatro grupos a mais que a agência A. Sabendo que o número de turistas em cada grupo é o mesmo, calcule o número de grupos da agência B.

Neste problema, não existe correspondência entre o modo como os dados do problema estão apresentados pela questão e a forma como podemos obtê-los na vida real.

Em suma, em um Problema Aplicado:

- o evento proposto pelo problema seja próximo do aluno fora da sala de aula ou ainda que ele possa vivenciá-lo por meio de relatos, pesquisas científicas, tecnologias ou experiências práticas;
- o questionamento do problema tem sentido dentro do contexto do evento;
- os dados apresentados pelo problema não são adequados, ou seja: ou esses dados não podem ser encontrados na situação real, ou eles não são compatíveis com os dados que são encontrados em um situação real do problema.

Como os dados do problema de Matemática não estão consoantes com o modo que os dados estão dispostos na vida real, entendemos que não há necessidade em avaliar o propósito em se obter as respostas dessa questão, por isso, não é necessário levar em consideração o aspecto Finalidade para classificá-lo.

O Problema Aplicado recebe esse nome, pois trata-se de um problema de Matemática que não tem compromisso em ter dados afinados com a realidade, ou seja, é um problema de Matemática com uma aplicação superficial no mundo cotidiano.

3.2.4. Exercício Camuflado

Observe o Problema 14.

PROBLEMA 14: Pedro alugou um barco a vela e pretende passar o final de semana percorrendo parte da costa litoral do estado do Rio de Janeiro. Determine a medida da base e a medida da altura da vela, em forma de triângulo retângulo, com 5 m² de área, sabendo que a soma dessas medidas corresponde a 7 m.

O Problema 14 propõe um questionamento que não apresenta nenhuma relação direta com o evento proposto. Para ser capaz de velejar, Pedro não precisaria calcular as dimensões da vela, como sugerido pelo problema. Esse é um exemplo de Exercício Camuflado: Problema de Matemática que recebe um enredo pertinente a uma situação que pode acontecer na vida real, mas que propõe uma pergunta artificial e sem sentido quando comparada às perguntas da vida cotidiana.

Esse tipo de problema de Matemática propõe situações, geralmente, incomuns em que o propósito é, evidentemente, exercitar a operação do objeto de estudo, ou seja, criar fluência em um raciocínio ou cálculo da Matemática.

Nesse caso, consideramos que:

- o evento proposto pelo problema seja próximo do aluno fora da sala de aula ou ainda que ele possa vivenciá-lo por meio de relatos, pesquisas científicas, tecnologias ou experiências práticas;
- o questionamento do problema não tem sentido dentro do contexto do evento.

Um Exercício Camuflado se diferencia de um Problema Aplicado, pois o questionamento proposto tem pouco sentido quando feito no mundo real e faz com que o contexto relacionado ao evento seja meramente um figurante possível de ser substituído, inclusive por um enunciado mais direto como “Determine o valor…” ou “Calcule a medida…”, como proposto na modificação do Problema 15a em Problema 15b a seguir.

PROBLEMA 15 a: As idades dos jogadores de um time de vôlei são: 18 anos, 21 anos, 19 anos, 23 anos, 25 anos e 20 anos. Qual é a média de idade desses jogadores?
PROBLEMA 15 b: Determine a média dos números 18, 21, 19, 23, 25 e 20.

3.2.5. Problema Absurdo

Os problemas de Matemática que são categorizados como problemas absurdos são aqueles que apresentam uma situação fictícia ou jocosa, com os dados que se apresentam de maneira rude e um questionamento que tem pouco sentido e propósito com o restante da questão.

Nesse caso, consideramos que o modo como um Problema Absurdo foi desenvolvido é conflitante com a desejável concordância entre uma situação da vida real e o evento, como por exemplo, no Problema 16 a seguir.

> **PROBLEMA 16:** Após lançar 2014 vezes uma moeda, Antônio contou 997 caras. Continuando a lançar a moeda, quantas caras seguidas ele deverá obter para que o número de caras fique igual à metade do número total de lançamentos?

Apesar do seu impacto pedagógico desfavorecido, os problemas absurdos, assim como os exercícios camuflados, não cumprem com o desejável objetivo dos problemas de Matemática. Um Problema Absurdo pode permitir um afastamento e uma noção de que se é para a resolução desse tipo de problemas que a Matemática se presta na vida real, então ela pode se tornar algo quase descartável.

3.2.6. Alegoria (ou Metáfora)

Esse tópico, não inserido nos estudos de Chamoso, propõe uma situação deveras incomum, fictícia e/ou metafórica, onde os dados não têm nenhum comprometimento com a realidade, mas a proposta possui uma finalidade bem definida para o ensino de Matemática: ilustrar e dar concretude a um objeto ou ideia matemática que pode ser muito abstrato para o público a que se destina o problema.

Sobre esse assunto, Nilson José Machado (1991) diz em A Alegoria em Matemática, que a metáfora, predominantemente presente na linguagem poética, é um instrumento vital aos que se dedicam ao estudo da Matemática, sobretudo ao ensino. De acordo com ele: *"Especialmente quando se trata de aproximar dois contextos, um dos quais se apresenta mais familiar, (...), a metáfora emerge como um poderoso instrumento para a construção analógica de pontes entre os temas considerados" (p. 82)*. A alegoria, por sua vez, é entendida como uma sequência de metáforas.

Assim, com o intuito de construir conceitos de Matemática propiciando um ensino que valorize conhecimentos prévios dos alunos, uma alternativa é considerar a utilização de alegorias concebidas para a real compreensão desses conceitos, por exemplo, como foi feito no Problema 2, onde o Hotel de Hilbert é usado para explicar as ideias de George Cantor sobre o infinito. Outro exemplo, é o exercício proposto no Problema 17 a seguir.

> **PROBLEMA 17:** Observe a balança e resolva o problema.

A massa de cada bolinha é 1 kg, e a balança está em equilíbrio.

a) Represente a situação utilizando uma expressão algébrica.
b) O que acontecerá com a balança se retirarmos 1 caixa e 1 bolinha de cada prato? Represente a nova situação algebricamente com uma igualdade.
c) Use a expressão obtida no item b para calcular a massa de cada caixa.
d) Se a massa de cada caixa for igual a 7 kg, qual deverá ser a massa de cada bolinha para que a balança continue em equilíbrio?

O Problema 17 trata da resolução de uma equação utilizando uma balança como metáfora. Tal alegoria permite que o aluno aprenda as propriedades que são importantes para a resolução de uma equação, ou seja, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Esse exercício, apesar de ter um evento não-real, tem um objetivo bem definido que é oferecer uma entrada facilitada ao estudo das equações.

De forma análoga, pode-se encontrar exercícios que comparem os elementos de uma máquina (valores de entrada, programação interna, valores de saída) com os conceitos de função (domínio, lei de formação e imagem, respectivamente). Essa alegoria é muito rica, uma vez que proporciona ao aluno a possibilidade de entender inclusive como funcionaria uma função inversa (percorrer o caminho contrário da máquina) ou então a composição de funções (a utilização de duas ou mais máquinas).

Em suma, vemos que a Alegoria é um tipo de problema de Matemática, que não pretende mostrar para o aluno que a Matemática pode estar presente no seu cotidiano, desse modo não apresenta engajamento com a fidelidade dos dados ou questionamentos, entretanto, oferece uma ponte de concretude para temas da Matemática que são mais abstratos, visando garantir o melhor entendimento do conceito, por isso tal categoria deve ter uma finalidade bem definida. A Alegoria não pretende usar a Matemática para explicar o mundo e sim, utilizar o mundo para explicar algo, muita das vezes, estritamente pertinente à Matemática.

4. Resultados e considerações finais

No desenvolvimento deste trabalho, encontramos diversos exemplos de Problemas de Matemática presentes em livros didáticos que objetivam conectar a Matemática e as situações cotidianas. Esse propósito nobre visa uma das mais árduas tarefas de um professor de Matemática: mostrar a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em situações reais do cotidiano e responder o porquê devemos aprendê-los.

Acontece que por muitas vezes, é determinado que o professor de Matemática insira, em suas práticas pedagógicas, inclusive em suas avaliações, questões ditas contextualizadas para cumprir a exigência de que seu aluno aprenda a utilizar a Matemática no seu dia-a-dia ou para que o aluno reconheça a importância de estudar Matemática. Essa recomendação pode trazer efeitos colaterais não desejados e até mesmo o oposto do que se espera: um afastamento entre o estudante e a Matemática.

Assim como visto nos exemplos citados ao longo deste trabalho, muitas são as tentativas de contextualizar questões de Matemática, mas sem uma reflexão adequada sobre esse processo. Tal procedimento acaba sendo sobre criar um enredo para um exercício, ou seja, envolver a pergunta em um conjunto de palavras pertinentes a um contexto, o que não é equivalente a realmente criar uma situação-problema.

Ademais, esse tipo de prática cria uma artificialidade nos problemas de Matemática que faz com que alunos aprendam a separar o enredo dos dados realmente relevantes para resolver as questões, um processo de resolução de problemas que usa estratégias mecânicas e pouco críticas, como por exemplo, a busca por palavras-chaves. Como consequência disso, em um cenário pontual, o suposto acerto se fantasia de sucesso pedagógico, mas logo é desmascarado pelo não entendimento sobre como a Matemática pode ser uma ferramenta para a resolução de problemas da vida real.

Portanto, em vista de propiciar um espaço de aprendizado coerente com que se espera dos objetivos dos problemas de matemática como metodologia de ensino, o professor necessita conscientizar-se e refletir sobre os seus planos de aula, no sentido de repensar sobre os aspectos que compõem os problemas de Matemática.

Além disso, o uso desobstinado de qualquer problema de Matemática para exercitar ou avaliar um conceito, acaba escondendo a potencialidade de se estudar Matemática para o desenvolvimento da própria ciência, analisando as inúmeras relações entre os conceitos dentro da própria disciplina. Essa ação camufla a possibilidade de desenvolver o estudo da Matemática como uma ciência bem estruturada e rica em relações, além da possibilidade de descobrir um prazer no aprofundamento do seu estudo.

Para isso, de uma forma prática, desenvolvemos um simples questionário para avaliação de problemas de Matemática em níveis de autenticidade que consiste em quatro perguntas de respostas objetivas que visam classificar o problema. As perguntas que constituem esse formulário levam em consideração o Evento, o Questionamento, os Dados e a Finalidade do problema em questão. São elas:

1. O problema trata de um **evento** que acontece ou tem grande chance de acontecer na vida real?
2. É comum alguém fazer esse tipo de **questionamento** numa situação da vida real?
3. É razoável que esses **dados estejam disponíveis** na vida real E os valores dos **dados são compatíveis** com os dados encontrados em uma situação real?
4. A **finalidade** de responder essa pergunta é tão clara no problema quanto numa situação real?

O resultado das perguntas deste questionário encaminha a classificação dos problemas em níveis de autenticidade, conforme apresentado no fluxograma a seguir:

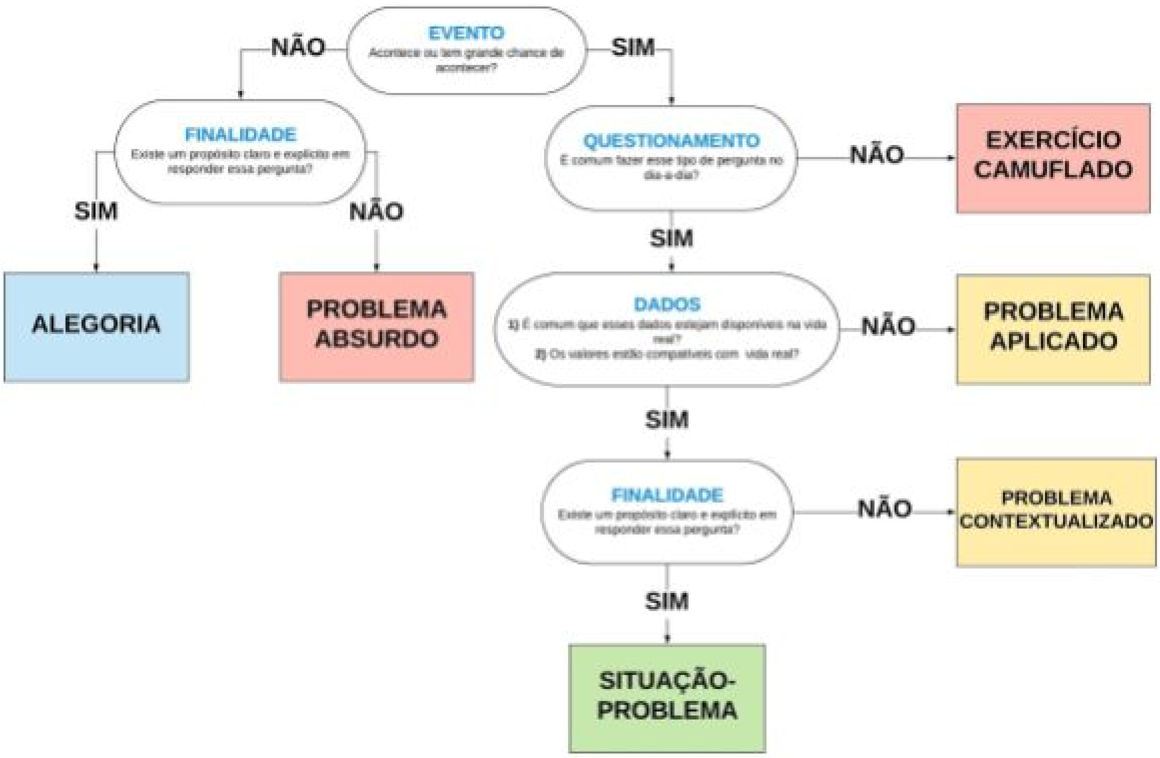

Figura 1: Fluxograma para avaliação de problemas de matemática em níveis de autenticidade

De acordo com os estudos e os aspectos que classificam os problemas em níveis de autenticidade, pudemos concluir que os níveis de autenticidade podem ser agrupados segundo quatro classes tais como assinalados pelas cores no fluxograma acima. São elas: Problemas autênticos, Problemas, Exercícios de fixação e Alegoria.

O agrupamento dos níveis de autenticidade nessas classes, objetivam garantir uma linha de ação prática sobre a utilização de determinado problema de matemática em sala de aula. A sua utilização deve ser intencional e ciente das suas potencialidades pedagógicas tal como suas limitações.

De fato, uma vez que o professor deseje utilizar um problema para mostrar a utilização da Matemática em contextos cotidianos ou como ela pode estar presente no dia-a-dia de diferentes tipos de profissionais, sem dúvidas, o mais adequado seria propor uma Situação-problema (Classe 1: verde, na Figura 1). O professor deve estar ciente que a situação-problema irá explorar competências e habilidades diversas, às vezes não pertinentes à Matemática, e que sua resolução demanda um tempo adequado, busca de informações externas à sala de aula, ferramentas próprias e outros aspectos circunstanciais de cada problema. O que se espera dessa situação é o protagonismo do aluno e um real trabalho de investigação e modelagem.

Ainda em consonância com essa proposta, a Classe 2 (amarelo, na Figura 2), formada pelos Problemas Contextualizados e Problemas Aplicados, inclui uma gama de exercícios que poderiam ser considerados Situações-Problemas, mas que deixam a desejar em aspectos específicos e que podem ser retificados: o propósito e os dados. Por exemplo, leia novamente o Problema 7.

PROBLEMA 7: Pedro, brincando de aviãozinho de papel, observou que a trajetória que seu avião fez foi semelhante à parábola de equação $y = -x^2 + 4x$. De acordo com essas informações, qual é a altura máxima atingida pelo aviãozinho de papel de Pedro?

Aqui podemos levantar duas questões: em geral, o voo de um avião de papel não descreve uma parábola e a equação dada pelo problema não está disponível durante uma situação real. Para retificar, podemos trocar o objeto em questão de modo que o lançamento possa ser modelado matematicamente pela equação de uma parábola, como o lançamento de uma bola. Usando softwares de Geometria Dinâmica, um filme da trajetória da bola ou fotos sucessivas, podemos ajustar uma parábola aos pontos, e então procurar a altura máxima atingida. Existem outra formulações para a pergunta, inclusive, que podem permitir um estudo mais apropriado e significativo para essa questão, por exemplo, como fazer um bom lançamento de modo que seja possível atingir uma altura maior ou um alcance maior, mudando os ângulos de lançamento, por exemplo.

O que podemos concluir é que problemas de matemática da Classe 2, como o Problema 7, apresentam suas informações de modo mais direto do que o que acontece na Situação-Problema podendo ser mais adequadas à propostas avaliativas, onde o aluno terá pouco tempo para resolver o problema, não terá ajuda externa como consultas a materiais, outras pessoas ou ferramentas adequadas, mas ainda sim será avaliado por suas habilidades interpretativas. Tendo isso em vista, nesse tipo de problema, os aspectos referentes a Finalidade e aos Dados tornam-se secundários.

Diferente dos anteriores, a Classe 3 (vermelho, na Figura 2) engloba os Exercícios Camuflados e os Problemas Absurdos, problemas que possuem um enredo inserido de modo protocolar e sem compromisso os objetivos de um problema autêntico. Entretanto, esses problemas são amplamente utilizados para criar a fluência em cálculos matemáticos e intimidade com os procedimentos, o que tem um valor importante para o estudo da Matemática, como já sabido. Porém, esse objetivo não pode ser confundido com a função dos Problemas de Matemática. Nesse caso, sugerimos que tais problemas sejam enunciados de modo objetivo com o intuito de facilitar exclusivamente o exercício de fixar ou avaliar os conceitos trabalhados.

Por último, as Alegorias formam uma classe unitária (Classe 4, azul, na Figura 2) que representa os problemas da Matemática que recebem um contexto para garantir uma melhor compreensão de seus elementos. A utilização de exercícios como esse é de grande valor para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, uma vez visa garantir um entendimento dos conceitos abstratos da Matemática através de um encadeamento de metáforas com o mundo cotidiano. Esses exercícios permitem lidar com uma matemática diferente da utilitária e que se desenvolve para si mesma, o que possibilita a construção de um conceito da Matemática que vai além de sua aplicabilidade, ou seja, uma Matemática que trabalha com estruturas, padrões, conceitos abstratos, deduções, conjecturas e modelos.

O que se pretende com o resultado desse nivelamento não é a banalização ou hierarquização de nenhuma dessas Classes ou seja, não pretende-se dizer que as Situações-problemas (Classe 1) são melhores que as Alegorias (Classe 4), por exemplo. Pretende-se despertar a consciência da utilização de um problema, ou seja, a compreensão de que nem todo Problema de Matemática irá apresentar a Matemática como ferramenta utilitária para a resolução de questões do cotidiano.

Assim, há de se ter cuidado para que, apesar da intenção, o resultado obtido não seja o contrário. Nesse caso, é aconselhável que o professor abra mão da contextualização do seu problema para exercitar especificamente o conceito ou procedimento que gostaria de trabalhar, não criando uma ligação artificial entre a Matemática e a realidade.

Em linhas gerais, apesar do forte incentivo ao ensino de uma Matemática prática como ferramenta para a resolução de problemas cotidianos, alguns conceitos merecem e necessitam ser ensinados como recursos matemáticos para a própria Matemática, permitindo o desenvolvimento próprio da disciplina. Inclusive, alguns temas da Matemática tido como mais áridos são alvejados por juízos negativos e depreciações justamente pela tentativa falha de conectá-los artificialmente a uma aplicação do cotidiano, como por exemplo, o estudo das operações com polinômios (produtos notáveis e fatoração, inclusive), temas relacionados a números complexos, entre outros.

Nesse sentido, nos questionamos se a contextualização da Matemática em situações-problemas é condição suficiente e necessária para o sucesso pedagógico das aulas de matemática ou se o seu ensino não pode estar atrelada à outras motivações e tipo de contextualizações, como por exemplo, o resgate histórico do desenvolvimento da ciência pode ser um modo de mostrar aos alunos como determinado conceito foi importante como pré-requisito para outras ideias mais importantes.

Em suma, observamos que, além do importante compromisso em ensinar conceitos da Matemática escolar aplicados às vivências cotidianas em diferentes contextos, devemos estar comprometidos com o ensino de uma Matemática que permita o desenvolvimento de habilidades que são próprias da disciplina, ou seja, propõe-se um ensino que é também contextualizado, mas que por sua vez, é ambientado nas próprias questões da Matemática.

Assim, espera-se que os alunos reconheçam de fato a Matemática como potencial ferramenta para a resolução de problemas cotidianos, mas que também se sintam participantes ativos de uma Matemática que se desenvolve à frente do nosso tempo, com conceitos nem sempre aplicados a situações reais.

5. Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio. MEC. Brasil. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. 2018. Acesso em: 30 de agosto de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais . Matriz de referência do ENEM. Brasília: Inep, 2019. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem-outros-documentos. Acesso em: 30 de agosto de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 1997

CÁCERES, M.J. CHAMOSO, J.M. y CÁRDENAS, J.A.. Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), Investigación en Educación Matemática XIX, p. 201-210. 2015 Alicante: SEIEM.

CHAMOSO, J. M., et al. Los problemas de matemáticas escolares de primaria, ?son solo problemas para el aula? (pp. 1-17). Presentado en I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe (I CEMACYC), Santo Domingo, República Dominicana. 2013.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. Temas e Debates. SBEM. Ano II N, v. 2, p. 15-19, 1989.

MACHADO, N. A Alegoria em Matemática . Estudos Avançados, v. 5, n. 13, p. 79-100, 1991.

PALM, T. Theory of authentic task situations. In Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations; Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S., Eds.; Sense Publishers: Rotterdam, The Netherlands, p. 3–19. 2009.

POLYA, G. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. Temas e Debates. SBEM. Ano II N, v. 2, p. 15-19, 1989.

PONTE, João Pedro da. Problemas de Matemática e situações da vida real. Revista de Educação, p.

95-108, 1992.

SPINELLI, Walter. A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar: o caso do ensino da matemática. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 2011.