



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



**PROFMAT**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GRAFOS: UMA OUTRA VISÃO SOBRE A ANÁLISE  
COMBINATÓRIA

JULIANA REZENDE DE GOUVÊA

RIO DE JANEIRO

2020

JULIANA REZENDE DE GOUVÊA

GRAFOS: UMA OUTRA VISÃO SOBRE A ANÁLISE  
COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Programa de Pós-graduação em Matemática  
PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a  
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Ronaldo da Silva Busse  
Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro  
2020

Catálogo informatizado pelo(a) autor(a)

G719 Gouvêa, Juliana Rezende de  
Grafos: uma outra visão sobre a análise combinatória / Juliana Rezende de Gouvêa. -- Rio de Janeiro, 2020.  
44 f.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Teoria dos Grafos. 2. Análise Combinatória. I. Busse, Ronaldo da Silva, orient. II. Título.

Juliana Rezende de Gouvêa

GRAFOS: UMA OUTRA VISÃO SOBRE A ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Programa de Pós-graduação em Matemática  
PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a  
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 16 de dezembro de 2020.

*Ronaldo Busse*

---

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse (Orientador) ..... CCET/UNIRIO

*Luzia da Costa Tonon Martarelli*

---

Prof. Dr<sup>a</sup>. Luzia da Costa Tonon Martarelli ..... CCET/UNIRIO

*Leonardo Tadeu Silveires Martins*

---

Prof. Dr. Leonardo Tadeu Silveires Martins ..... UFF

Rio de Janeiro

2020



# Agradecimentos

A minha família pelo apoio incondicional dado durante todo esse trajeto. Agradeço ao meu pai, Geraldo, por todo incentivo que me deu a estudar e que me ensinou a valorizar o conhecimento. À minha mãe, Lúcia, rainha da minha vida, que sempre me fortaleceu! E à minha irmã, Déborah, pelas doses de otimismo, o empenho em me ajudar e pelo carinho de sempre!

Agradeço também aos meus colegas de turma, PROFMAT- 2018 da UNIRIO, pelas trocas, ajudas e pelos momentos de descontração tão importantes nessa jornada que tivemos. Em especial, agradeço ao Luiz Fernando e ao Rubens Caio que foram grandes parceiros nessa trajetória.

Também deixo meus agradecimentos aos professores desse curso pelo trabalho tão dedicado. Vou carregar sempre tudo o que aprendi com eles. Entre eles, agradeço especialmente ao Ronaldo, que não foi apenas um professor inesquecível, mas esteve diretamente comigo neste trabalho como meu orientador.

Agradeço também a todos os amigos que sempre estiveram na torcida pela a conclusão desse mestrado, manifestada com cobranças e muitas palavras motivadoras. Ao amigo Fabio Henrique, em especial, agradeço por ter me guiado até aqui.

E também agradeço aos meus alunos. Todos eles foram uma fonte de inspiração para mim.

# Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo propor, para professores e estudantes da educação básica, um material de introdução à Teoria dos Grafos. Esse é um assunto que não está presente no currículo básico, mas que, além de praticamente não necessitar de pré-requisitos, é uma ferramenta capaz de solucionar diversos problemas interessantes e mostrar ao aluno uma nova perspectiva da Análise Combinatória.

**Palavras-chave:** Grafos, Análise Combinatória, Resolução de Problemas.

# Abstract

This work has as main objective to propose, for teachers and students of high school, an introductory material to the Theory of Graphs. This is a subject that is not present in the basic curriculum, but which, in addition to practically requiring no prerequisites, is a tool capable of solving several interesting problems and showing the student a new perspective of Combinatorial Analysis.

**Keywords:** Graphs, Combinatorial Analysis, Problem Solving.

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO</b>                             | <b>1</b>  |
| <b>1 EULER E AS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG</b> | <b>4</b>  |
| <b>2 TEORIA DOS GRAFOS</b>                    | <b>11</b> |
| 2.1 Conceitos Iniciais . . . . .              | 11        |
| 2.2 Trajetos . . . . .                        | 14        |
| 2.3 Grafos como Matrizes . . . . .            | 23        |
| 2.4 Coloração de Grafos . . . . .             | 25        |
| <b>3 PROBLEMAS PROPOSTOS</b>                  | <b>32</b> |
| <b>4 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                 | <b>42</b> |
| <b>BIBLIOGRAFIA</b>                           | <b>44</b> |

# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Representação do complexo de pontes de Königsberg. . . . .    | 5  |
| 1.2  | Duas pontes ligando A e B . . . . .                           | 6  |
| 1.3  | Quatro pontes ligando A e B . . . . .                         | 7  |
| 1.4  | Exemplo com 15 pontes. . . . .                                | 8  |
| 1.5  | Tabela com o passo a passo do procedimento de Euler . . . . . | 9  |
| 2.1  | Grafo das Sete Pontes de Königsberg . . . . .                 | 12 |
| 2.2  | Diagrama do grafo G . . . . .                                 | 12 |
| 2.3  | Grafo com laço . . . . .                                      | 13 |
| 2.4  | a-d passeio . . . . .   | 15 |
| 2.5  | Grafo conexo . . . . .  | 16 |
| 2.6  | Grafo desconexo . . . . .                                     | 16 |
| 2.7  | Grafo euleriano . . . . .                                     | 17 |
| 2.8  | Grafo semi-euleriano . . . . .                                | 17 |
| 2.9  | Grafo U . . . . .   | 19 |
| 2.10 | Grafo U com ciclos destacados . . . . .                       | 19 |
| 2.11 | Grafo Icosian Game . . . . .                                  | 21 |
| 2.12 | Grafo hamiltoniano . . . . .                                  | 21 |
| 2.13 | Grafo semi-hamiltoniano . . . . .                             | 22 |
| 2.14 | Grafo hamiltoniano . . . . .                                  | 22 |
| 2.15 | Grafo H . . . . .   | 23 |
| 2.16 | Mapa 1 . . . . .  | 25 |
| 2.17 | Mapa 2 . . . . .  | 26 |
| 2.18 | Mapa 1 colorido com apenas quatro cores . . . . .             | 26 |
| 2.19 | Mapa 2 colorido com apenas três cores . . . . .               | 27 |
| 2.20 | Grafo do mapa 1 . . . . .                                     | 27 |
| 2.21 | Grafo Planar . . . . .  | 28 |
| 2.22 | Grafo Planar . . . . .  | 28 |
| 2.23 | Grafo não planar . . . . .                                    | 29 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1  | Grafo do cubo . . . . .                                     | 33 |
| 3.2  | Grafo parcial do cubo . . . . .                             | 33 |
| 3.3  | Cortes do fio para formar o cubo . . . . .                  | 34 |
| 3.4  | Tabuleiro em cruz . . . . .                                 | 34 |
| 3.5  | Casas numeradas . . . . .                                   | 35 |
| 3.6  | Grafo com os possíveis movimentos do cavalo . . . . .       | 35 |
| 3.7  | As quatro cidades e suas estradas . . . . .                 | 36 |
| 3.8  | Matriz de Potência $n$ . . . . .                            | 37 |
| 3.9  | Grafo com os horários . . . . .                             | 38 |
| 3.10 | Tabela com as disciplinas agrupadas por horários . . . . .  | 38 |
| 3.11 | Três Casas e Três Serviços Públicos . . . . .               | 39 |
| 3.12 | Grafo das Três Casas e dos Três Serviços Públicos . . . . . | 39 |
| 3.13 | Vértices $v_1, v_4, v_3, v_6$ conectados . . . . .          | 40 |
| 3.14 | Grafo separando o plano em 3 regiões . . . . .              | 40 |
| 3.15 | O grafo não atende à fórmula de Euler . . . . .             | 41 |

# INTRODUÇÃO

O currículo básico da Matemática vem sofrendo mudanças progressivas ao longo dos últimos anos. Percebe-se nessas mudanças uma crescente valorização do pensar matemático, da percepção de padrões e da capacidade argumentativa. A abordagem mecânica, baseada no uso excessivo de fórmulas, aplicadas a situações descontextualizadas, vem sendo ultrapassada por uma abordagem que visa estimular o raciocínio matemático dos nossos alunos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2018, é um documento que norteia o currículo da educação básica no nosso país, de escolas públicas e privadas. Esse documento indica quais conhecimentos, competências e habilidades que se espera que sejam alcançados na formação básica dos estudantes. Analisando esse documento, vemos claramente como a BNCC pretende levar o ensino da Matemática para um novo caminho, que prioriza o desenvolvimento criativo do aluno.

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BNCC)

Nesse sentido, a resolução de problemas permite que várias dessas habilidades almejadas sejam desenvolvidas. Ao se deparar com um problema, o estudante precisa: interpretar, compreender, elaborar uma estratégia, executá-la e apresentá-la, defendendo seu argumento. Precisa, ainda, ter senso crítico para analisar a adequação da sua resposta. (ROQUE, 2019)

A estratégia da resolução de problemas pode ser utilizada em todos os conteúdos específicos na matemática do Ensino Médio, mas o nosso interesse, em particular, está no campo da Análise Combinatória. Esse interesse se deve ao grande potencial de problemas que podem ser abordados nessa área.

A Análise Combinatória pode ser dividida em três ramos:(CERIOLI, 2008)

- Existência;
- Contagem;
- Otimização.

Porém, sabemos que na educação básica a apresentação da Combinatória, infelizmente, fica restrita a problemas de contagem, limitando a visão que nossos alunos têm dessa área.

Desse modo, vemos na Teoria dos Grafos um caminho interessante que atende aos objetivos da BNCC, muda a percepção do aluno sobre a Análise Combinatória e ainda conta com a vantagem de praticamente não necessitar de pré-requisitos. Aliás, apesar desse trabalho ser voltado para salas de aula do ensino médio, destacamos que, justamente por não exigir conhecimentos matemáticos específicos e com a orientação de que o pensamento combinatório já seja introduzido antes do ensino médio, a Teoria dos Grafos pode ser trabalhada ainda no ensino fundamental.

Nesse sentido, destacamos as palavras da professora e pesquisadora Clara Grima, doutora em Matemática, cujo ramo de pesquisa é a Teoria dos Grafos. Desde 2011 a professora Clara Grima realiza trabalhos de divulgação da Matemática para crianças e adultos (*BBC*, 2020). Em entrevista a *BBC Mundo* a professora diz:

Eu me formei em matemática sem ter visto um grafo. Mas quando comecei a fazer divulgação, muito rapidamente comecei a falar um pouco sobre grafos por dever profissional. E percebi que é uma ferramenta muito útil, que permite modelar problemas matemáticos de uma maneira muito eficiente e resolvê-los sem os cálculos tediosos que as crianças são forçadas a fazer o tempo todo. O que prevalece na solução de problemas usando grafos é instinto e lógica,

Vislumbramos também a oportunidade de se fazer uma abordagem histórica na apresentação dessa teoria, expondo como um novo conceito surge e evolui ao longo do tempo, constatando assim que a Matemática não é uma ciência pronta e rígida em sua forma, mas sim, uma ciência que está em constante processo de construção. Nesse sentido, veremos como um dos primeiros trabalhos sobre Grafos (que aliás sequer usa esse nome) não faz uso dos conceitos e teoremas atuais que só vão ganhar sua forma muitos anos mais tarde.

Esse trabalho tem por objetivo apresentar uma introdução à Teoria dos Grafos com a finalidade de mostrar não apenas a viabilidade de se trabalhar tal assunto na educação básica, mas o ensejo da sua abordagem dadas as vantagens que podem ser obtidas na formação dos nossos alunos. Para atingir esse objetivo, estruturamos nosso trabalho da seguinte forma: no capítulo 1 é feita uma abordagem histórica retratando como Euler

desenvolveu sua solução para o problema das Sete Pontes de Königsberg o que é considerada o surgimento da Teoria dos Grafos. O capítulo 2 exhibe formalmente os conceitos iniciais da Teoria dos Grafos como definições, propriedades e teoremas importantes que nos servirão de base para a resolução de problemas. Na parte final deste trabalho, serão apresentados problemas, de diferentes níveis de dificuldade, com suas respectivas soluções.

# 1 EULER E AS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG

O primeiro registro conhecido, que tem por base a Teoria dos Grafos, tal como conhecemos hoje, é a solução dada pelo reconhecido matemático Leonhard Euler (1707-1783) para o famoso problema das Sete Pontes de Königsberg, no artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, publicado em 1741, com a tradução de (LOPES, 2015).

O problema consistia em uma ilha, localizada em Königsberg, na Prússia (hoje Kaliningrado) que dividia o rio Pregel em dois ramos e sete pontes construídas sobre os ramos desse rio, conectando essa ilha e outras três porções de terra. Os moradores dessa região questionavam se era possível percorrer um trajeto que passasse por todas essas pontes uma única vez. Uns negavam e outros duvidavam, mas foi Euler quem elaborou uma argumentação que pôs fim às dúvidas sobre a solução desse problema e que deu início aos estudos da Teoria dos Grafos.

Leonhard Euler foi um dos maiores nomes da história da Matemática. Publicou 560 livros e artigos e fez numerosas contribuições em diversas áreas da Matemática de sua época. Entre essas contribuições destacam-se resultados importantes obtidos na Teoria dos Números, no desenvolvimento do estudo dos Números Complexos, do Cálculo Diferencial e do próprio conceito de função. Deixou também como herança notações utilizadas até hoje, como  $e$  para o número cujo logaritmo natural é 1 e o  $i$  para  $\sqrt{-1}$ , além de ter ajudado a popularizar outras como o  $\pi$ . Euler também foi responsável pela organização e síntese de teorias já existentes, o que fez de seus livros uma referência. (MOL, 2013)

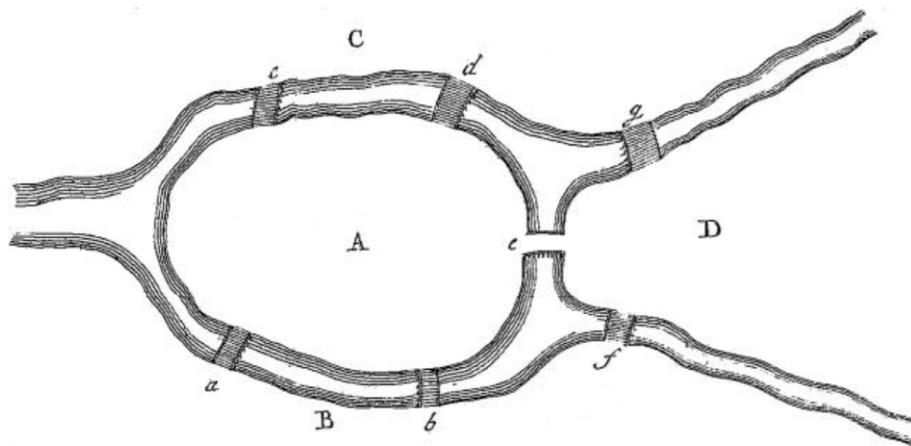
Com esse talento ímpar na Matemática e com sua habilidade de organização de pensamentos, Euler destrinchou o desafio das Sete Pontes de Königsberg, dando o pontapé inicial de uma nova teoria que tomaria forma muitos anos depois.

No seu artigo, Euler sinaliza que para a solução desse problema medidas como o comprimento das pontes e a distância entre as porções de terra são irrelevantes. O essencial para o entendimento desse problema está na determinação da situação e de suas propriedades envolvidas, o que caracteriza, para ele, um problema de “Geometria de situação”.

Euler observa que uma possível maneira de se resolver essa questão é utilizar o método da exaustão, ou seja, buscar todos os caminhos possíveis que poderiam ser percorridos e verificar se algum deles atende às condições impostas. Mas obviamente essa não é a melhor estratégia dado o grande número de combinações a ser verificado. Além do mais, a proposta dele era encontrar uma solução mais geral possível, que pudesse ser verificada para situações similares, mas com um número ainda maior de pontes.

Para resolver o problema, Euler inicialmente nomeia as sete pontes por  $a, b, c, d, e, f$  e  $g$ , as porções de terra por A, B, C e D, como já indicado na figura 1.1, e caracteriza as sequências de letras que serão utilizadas da seguinte maneira: a sequência AB indica que uma ponte, não importa qual, foi atravessada saindo de A e indo para B.

Figura 1.1: Representação do complexo de pontes de Königsberg.



Fonte: LOPES, (2015)

A sequência ABD indica um caminho iniciado em A, passando por B através de uma ponte  $e$ , em seguida, chegando a D por uma outra ponte, nessa ordem. Como as porções de terra são mutuamente separadas pelo rio, para ir de uma região a outra é necessário que se passe por uma ponte. Deste modo, para uma sequência do tipo ABDA, Euler conclui que nesse caminho três pontes foram atravessadas. Na sequência ABDAB, quatro pontes foram utilizadas e assim por diante. Ou seja, em uma sequência qualquer o número de letras é sempre uma unidade maior que o número de pontes utilizadas.

Se o objetivo do problema é atravessar sete pontes, uma única vez cada, deve-se procurar um caminho representado por uma sequência de 8 letras. E mais: como há duas pontes ligando A e B, isso indica que a sucessão imediata dessas duas letras deve ocorrer duas vezes, bem como a das letras A e C, que deve ocorrer duas vezes, e deve haver apenas uma vez a sucessão das letras A e D, D e B e C e D por só existir uma única ponte que conecta cada um desses pares.

Mas Euler não busca encontrar uma sequência com essas características. Ele prefere investigar certas propriedades desse complexo de pontes e terras para concluir a existência ou não de tal sequência.

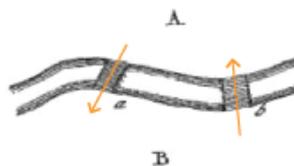
Essas propriedades se referem à quantidade, par ou ímpar, de pontes que tem uma certa região como extremidade. Por exemplo, vamos imaginar uma região A que se conecta a uma região B através de 3 pontes a, b e c. Para atravessarmos essas três pontes, independentemente de iniciarmos o trajeto em A ou B, a letra A aparece na nossa sequência 2 vezes. Se houver 5 pontes ligando as duas regiões, então a letra A deve aparecer três vezes. Generalizando: se houver um número ímpar de pontes que liga a região A a uma outra região, então para atravessar todas elas teremos uma sequência em que a letra A aparece a metade do número de pontes acrescido de uma unidade.

No nosso problema, todas as regiões A, B, C e D têm um número ímpar de pontes incidentes. No caso, 5 para A e 3 para as demais regiões. Pela observação de Euler, na sequência procurada, a letra A deve aparecer  $\frac{5+1}{2} = 3$  vezes e as outras letras  $\frac{3+1}{2} = 2$  vezes. Então teríamos um total de  $3 + 2 + 2 + 2 = 9$  letras o que vai de encontro ao nosso objetivo de encontrarmos uma sequência com apenas 8 letras. Conclusão: o trajeto proposto não existe.

O Problema das Sete Pontes de Königsberg está solucionado, mas em seu artigo Euler não se limita ao fim desse problema, pois seu objetivo maior é trazer uma solução geral para problemas desse tipo e para isso ele precisa analisar o caso em que haja um número par de pontes em certa região, o que não ocorreu no exemplo analisado.

Para essa situação, ele observa que o número de vezes o qual a letra que denota a região aparecerá na sequência depende de onde o trajeto é iniciado: se na própria região ou não. Ele, assim como no caso ímpar, usa exemplos a fim de mostrar uma relação entre o número de pontes e o número de letras da sequência: se há duas pontes distintas ligando as regiões A e B, para atravessá-las iniciando de A, essa letra ocorrerá duas vezes no nosso trajeto: **AaBbA**, por exemplo.

Figura 1.2: Duas pontes ligando A e B

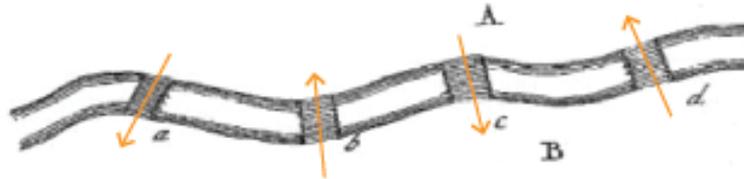


Fonte: Adaptada de LOPES, (2015)

Mas se iniciarmos de B, então A aparece apenas uma vez (**BaAbB**). Para o caso em que haja quatro pontes, nota-se que A ocorrerá três vezes se iniciado por ela. Temos, por

exemplo, a sequência **AaBbAcBdA**. Por outro lado, se o trajeto for iniciado fora de A, essa letra ocorre apenas duas vezes na sequência, como, por exemplo, em **BdAcBbAaB**.

Figura 1.3: Quatro pontes ligando A e B



Fonte: Adaptada de LOPES, (2015)

Daí Euler estabelece a seguinte relação: para uma quantidade par de pontes de uma certa região, a letra que a denota ocorrerá a metade dessa quantidade se o trajeto começar fora dela e a metade mais um se começar por ela.

Feitas essas observações, Euler estabelece as seguintes etapas do procedimento que verifica a viabilidade de um passeio como o proposto no problema das Pontes de Königsberg:

1. Anota-se o total de pontes existentes no nosso mapa e soma-se uma unidade (Euler chama essa quantidade de número prefixado).
2. Anota-se o total de pontes existentes em cada região.
3. Marca-se um asterisco nas que possuem uma quantidade par de pontes (mais a frente será feita uma observação sobre isso).
4. Anota-se o número de vezes que cada letra deve aparecer na sequência, levando em conta que o caminho não se inicia por ela no caso par.
5. Soma-se o total de vezes que cada letra deve ocorrer.
6. Compara-se com o número obtido na primeira etapa.

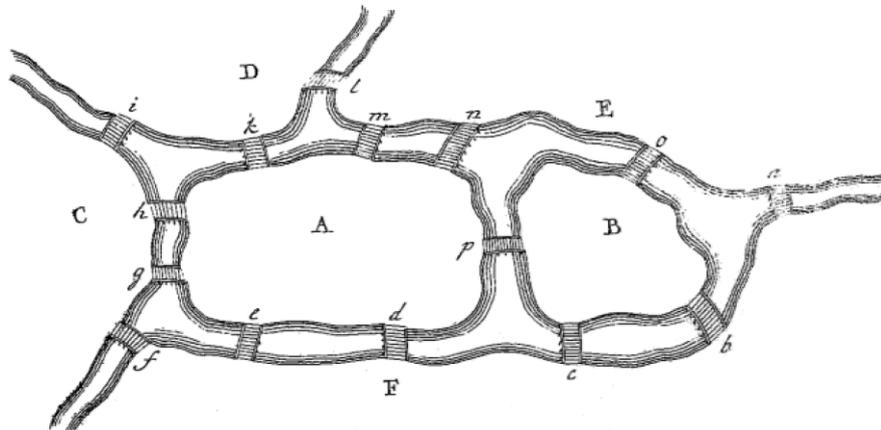
Conclusões:

- Se essa soma for igual ao obtido na primeira etapa do procedimento, então existe um caminho nas condições requeridas e o mesmo deve ser iniciado por uma região não marcada pelo asterisco, ou seja, por uma região associada a um número ímpar de pontes.

- Se essa soma for menor em uma unidade, então o caminho pode ser feito, mas iniciando-se por uma região marcada (lembramos que iniciar o caminho em uma região com um número par de pontes acresce uma letra na nossa sequência, e portanto igualamos os resultados).
- Se a soma for maior, então o trajeto não será possível.

Citado o procedimento, de uma forma bem didática, ele mostra um exemplo de um complexo com quinze pontes, como mostra a figura 1.4, com a mesma proposta do desafio das Sete Pontes: é possível atravessar todas elas uma única vez?

Figura 1.4: Exemplo com 15 pontes.



Fonte: LOPES, (2015)

Se são quinze pontes, então sabe-se que a sequência representativa desse passeio deve conter 16 letras. Em seguida, ele organiza em uma tabela, indicada na figura 1.5, os demais passos.

Figura 1.5: Tabela com o passo a passo do procedimento de Euler

 Número prefixado  
**16**

|    |   |                     |
|----|---|---------------------|
| A* | 8 | $\frac{8}{2} = 4$   |
| B* | 4 | $\frac{4}{2} = 2$   |
| C* | 4 | $\frac{4}{2} = 2$   |
| D  | 3 | $\frac{3+1}{2} = 2$ |
| E  | 5 | $\frac{5+1}{2} = 3$ |
| F* | 6 | $\frac{6}{2} = 3$   |
|    |   | 16                  |

Fonte: Autora (2020)

Como a soma obtida é igual ao número prefixado, decorre que existe o passeio procurado e o mesmo deve ser iniciado por uma região não marcada pelo asterisco, ou seja, pela região D ou E.

Euler termina o exemplo citando um possível caminho que poderia ser percorrido: **EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoEID**.

O procedimento estabelecido por ele torna a tarefa de encontrar soluções para problemas similares muito simples, mas Euler consegue ir além na investigação das relações existentes nesse conjunto e dá uma forma ainda mais eficiente para resolução desses problemas.

Euler explica que a soma do total de pontes que incidem em cada região é, obrigatoriamente, um número par, pois sempre será o dobro do número de pontes existentes. Isso acontece porque cada ponte conecta exatamente duas regiões, logo cada uma delas será contada duas vezes. Assim, não será possível que haja uma única região, ou uma quantidade ímpar de regiões, que tenha um número ímpar de pontes sobre ela. Essas regiões devem ocorrer aos pares. No capítulo 2, onde faremos a apresentação formal da Teoria dos Grafos, esse resultado será enunciado e provado como um teorema.

Se a essa soma, que é o dobro do número de pontes, forem adicionadas duas unidades e, em seguida, for tomada sua metade, obteremos o número prefixado de Euler, ou seja, o número que define a quantidade de letras na sequência associada ao passeio procurado.

Logo se todas as regiões possuem uma quantidade par de pontes, obteremos na

quinta etapa um número menor em uma unidade do que o desejado e isso significa que o passeio poderá ser realizado, podendo iniciá-lo em qualquer região. No capítulo 2, veremos que um grafo com essa característica possui um **trilha euleriana fechada** e tal grafo é chamado de **Grafo Euleriano**, em homenagem a Leonhard Euler.

Se existirem exatamente duas regiões com um número ímpar de pontes, então o número obtido na quinta etapa será igual ao da primeira e a conclusão a ser feita é que existe um passeio nas condições definidas, mas o mesmo deve ser iniciado em uma dessas duas regiões. Também veremos no capítulo 2, que grafos possuírem tal característica possui uma **trilha euleriana aberta** e que esses grafos são chamados de **Semi-Eulerianos**.

Se existirem mais do que duas regiões com um número ímpar de pontes, então a soma encontrada será maior em mais do que uma unidade e, portanto, não existe o caminho procurado.

Euler finaliza o artigo dizendo que para os casos em haja o passeio há ainda a tarefa de encontrá-lo. Ele não entra em muitos detalhes, deixando apenas como dica reduzir o complexo retirando-se pontes que ligam as mesmas regiões, tornando o conjunto menor. Dessa forma fica mais fácil estabelecer o percurso. No capítulo 2, apresentaremos um teorema, cuja demonstração nos dá uma ideia para encontrar o trajeto desejado.

## 2 TEORIA DOS GRAFOS

No capítulo anterior, vimos a estratégia utilizada por Euler na resolução do problema das Sete Pontes. Para elaborar sua solução, Euler associa trajetos a sequências de letras e mostra algumas relações importantes para chegar a um procedimento geral que soluciona problemas como o das Sete Pontes. Ao longo de muitos anos, outros problemas passam a ser modelados baseados nessas relações, que aos poucos passam a ser organizadas e formalizadas, surgindo, assim, a Teoria dos Grafos. Apresentaremos a seguir alguns conceitos iniciais dessa teoria tais como definições, teoremas e corolários com suas respectivas demonstrações.

### 2.1 Conceitos Iniciais

**Definição 2.1.1** (Grafo). *Um grafo é um par de conjuntos  $G = (V, E)$ , em que  $V$  é um conjunto não-vazio cujos elementos são os vértices de  $G$  e  $E$  é um conjunto de arestas que conectam, cada uma, dois vértices.*

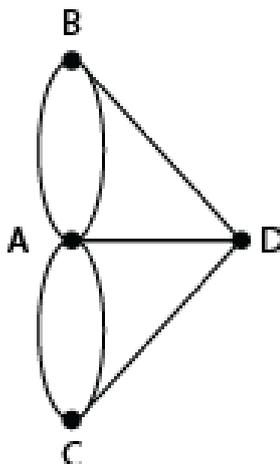
Se cada aresta de um grafo conectar vértices distintos e se duas arestas distintas nunca conectam o mesmo par de vértices, então teremos um Grafo Simples.

Lembremos que a Teoria dos Grafos pode ser vista como um ramo da Análise Combinatória cujo interesse está na forma como os objetos de um conjunto se relacionam. Assim, enquanto os vértices simbolizam os objetos do problema em questão, as arestas (ou ausência delas) traduzem a relação existente entre esses objetos.

Grafos podem ser representados por diagramas nos quais os vértices serão indicados por pontos e as arestas por linhas que ligam os vértices apropriados.

**Exemplo 1.** Podemos modelar o problema das Sete Pontes de Königsberg a um grafo, de modo que os vértices sejam as representações das porções de terra e as arestas as representações das pontes. Na figura 2.1 temos um grafo que representa o problema de Euler.

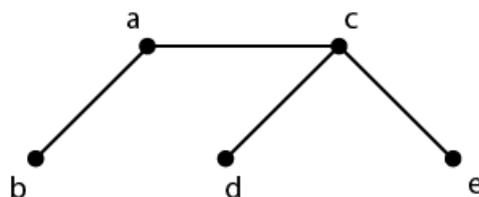
Figura 2.1: Grafo das Sete Pontes de Königsberg



Fonte: Autora, (2020)

**Exemplo 2.** No grafo  $G = (V, E)$ , com  $V = \{a, b, c, d, e\}$  e  $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}$ <sup>1</sup>, temos na figura 2.2 seu diagrama representativo<sup>2</sup>.

Figura 2.2: Diagrama do grafo G



Fonte: Autora, (2020)

Se existe uma aresta conectando dois vértices, dizemos que tal aresta é incidente a eles e os dois vértices serão vizinhos (ou adjacentes).

No grafo G, temos que os vértices  $a$  e  $b$  são vizinhos, pois existe a aresta  $ab$ . Por outro lado  $a$  e  $d$  não são vizinhos.

Repare que no grafo das Sete Pontes existem duas arestas distintas unindo os vértices A e B (bem como para A e C). Tais arestas são chamadas paralelas.

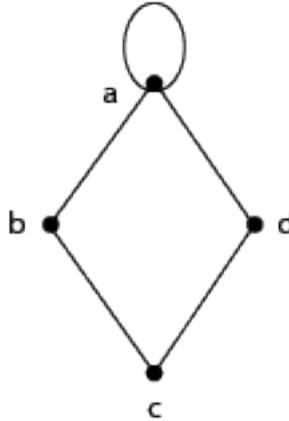
Em um grafo também pode haver uma aresta que liga um vértice a ele mesmo, como na figura 2.3. Nesse caso essa aresta será chamada de laço.

Se um grafo possuir arestas paralelas ou laços, ele será denominado como um multigrafo. O grafo da figura 2.1 é um multigrafo.

<sup>1</sup>Quando não houver risco de confusão, representaremos uma aresta  $\{u, v\}$  por  $uv$

<sup>2</sup>Ao longo do trabalho passaremos a nos referir ao diagrama de um grafo como sendo o próprio grafo.

Figura 2.3: Grafo com laço



Fonte: Autora, (2020)

**Definição 2.1.2** (Ordem de um grafo). A ordem de um grafo  $G$  é o seu número de vértices  $|V|$ .

**Definição 2.1.3** (Grau de um vértice). Dado um vértice  $v$  de um grafo, dizemos que o grau de  $v$ , denotado por  $g(v)$ , é o número de arestas incidentes a  $v$ .

O grafo da figura 2.3 tem ordem 4 e  $g(a) = 4$  e  $g(b) = g(c) = g(d) = 2$ . Note que um laço contribui com duas unidades para o grau do vértice  $a$ .

**Teorema 1.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Então

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2|E|.$$

*Demonstração.* Queremos provar que a soma dos graus de cada vértice é o dobro do número de arestas. Em cada grau de um vértice estão sendo contadas pelo menos uma das extremidades das arestas incidentes a esse vértice. No caso de um laço duas extremidades são contadas. Como uma aresta contém dois extremos, segue que cada uma delas será contada duas vezes.  $\square$

**Observação:** Essa demonstração também pode ser feita por indução no número de arestas, como será mostrado a seguir.

Se  $|E| = 0$  temos que o grafo não possui arestas, assim  $g(v) = 0, \forall v \in V$  e  $\sum g(v) = 0$ . Temos, portanto, que  $\sum g(v) = 2|E|$ .

Suponhamos, como hipótese de indução, que para  $|E| = m$ , vale que  $\sum g(v) = 2m$ .

Consideremos agora  $G = (V, E)$  um grafo tal que  $|E| = m + 1$  e  $ab$  uma aresta de  $E$ . Considere o grafo  $G' = (V, E')$ , tal que  $E' = E - \{ab\}$ . Temos que  $|E'| = m$  e, pela hipótese de indução,  $\sum g_{G'}(v) = 2|E'|$ . Mas

$$\begin{aligned} \sum g_{G'}(v) &= \sum_{V-\{a,b\}} g(v) + g_{G'}(a) + g_{G'}(b) = \sum_{V-\{a,b\}} g(v) + (g_G(a) - 1) + (g_G(b) - 1) = \\ &= \sum g(v) - 2. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} 2|E'| &= \sum g(v) - 2 \\ 2m &= \sum g(v) - 2 \\ 2(m+1) &= \sum g(v) \\ 2|E| &= \sum g(v) \end{aligned}$$

O que prova o nosso teorema.

**Corolário 2.1.1.** *Em todo grafo há um número par de vértices de grau ímpar.*

*Demonstração.* No teorema anterior mostramos que a soma dos graus dos vértices de um grafo  $G = (V, E)$  é sempre o dobro do número de arestas e, portanto, será um número par. Podemos particionar o conjunto  $V$  nos seguintes subconjuntos:

$$I = \{v \in V \mid v \text{ tem grau ímpar}\} \text{ e } P = \{v \in V \mid v \text{ tem grau par}\}.$$

Assim, podemos escrever que

$$\overbrace{\sum_{v \in V(G)} g(v)}^{\text{par}} = \sum_{v \in I} g(v) + \overbrace{\sum_{v \in P} g(v)}^{\text{par}}$$

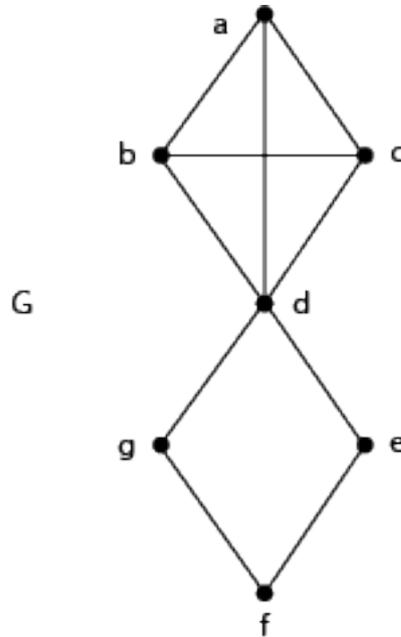
Como  $\sum_{v \in P} g(v)$  é par segue que  $\sum_{v \in I} g(v)$  também deverá ser par e como cada parcela deste último somatório é um número ímpar, então ele deve conter um número par de parcelas.  $\square$

## 2.2 Trajetos

**Definição 2.2.1** (Passeio). *Um passeio é uma seqüência alternada de vértices e arestas, iniciada e finalizada por um vértice.*

No grafo  $G$  da figura 2.4 temos que a sequência  $a, ac, c, cd, d, de, e, ef, f, fg, g, gd, d$  é um **a-d** passeio.

Figura 2.4: a-d passeio



Fonte: Autora, (2020)

Note que, para um grafo simples, em cada par de vértices há no máximo uma aresta incidente, ou seja, não existem arestas paralelas. Assim, ao listarmos somente os vértices, de forma ordenada, as arestas ficam subentendidas e, portanto, o passeio fica bem definido. O passeio listado anteriormente pode ser escrito na forma  $(a, c, d, e, f, g, d)$ .

**Definição 2.2.2** (Comprimento de passeio). *O comprimento de um passeio é o número de arestas do passeio.*

O comprimento do **a-d** passeio no grafo  $G$  é 6.

**Definição 2.2.3** (Trilha). *Um passeio que não repete arestas é chamado de trilha.*

**Definição 2.2.4** (Caminho). *Um passeio que não repete vértice é chamado de caminho.*

Note que todo caminho é uma trilha, pois se não há vértice repetido também não haverá aresta repetida.

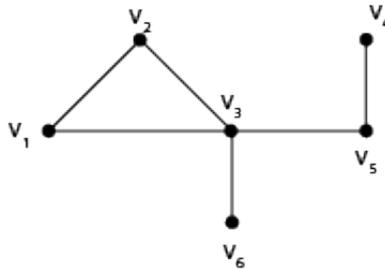
**Definição 2.2.5** (Ciclo). *Um ciclo é um passeio do tipo  $(v_0, v_1 \dots v_n, v_0)$ , tal que  $(v_0, \dots, v_n)$  é um caminho.*

No grafo  $G$ , figura 2.4, temos como exemplo de uma trilha a sequência **(a,b,d,g,f,e,d,c)** e como exemplo de caminho **(a,b,d,e,f,g)**. Ainda no mesmo grafo podemos citar a sequência **(a,b,d,c,a)** como exemplo de um ciclo.

**Definição 2.2.6** (Grafo Conexo). *Um grafo é conexo se dados dois vértices quaisquer  $u$  e  $v$ , existe um  $u$ - $v$  caminho. Caso contrário diremos que o grafo é desconexo.*

Na figura 2.5 temos um exemplo de um grafo conexo. Repare que sempre haverá um caminho entre quaisquer dois vértices.

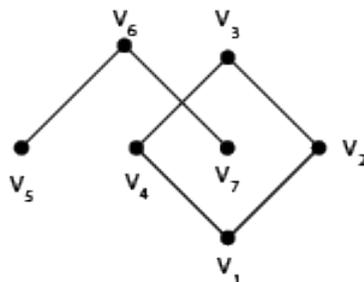
Figura 2.5: Grafo conexo



Fonte: Autora, (2020)

Já a figura 2.6 mostra um grafo desconexo, pois não existe um caminho que conecte os vértices  $V_1$  e  $V_7$ , por exemplo.

Figura 2.6: Grafo desconexo



Fonte: Autora, (2020)

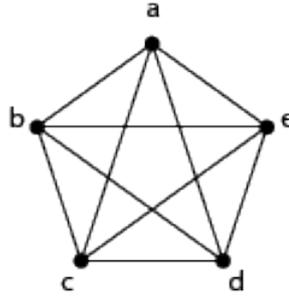
**Definição 2.2.7** (Trilha Euleriana). *Uma trilha que visita todas as arestas de um grafo é denominada trilha euleriana.*

Se em uma trilha euleriana, o vértice final coincidir com o vértice inicial ela será uma trilha euleriana fechada. Caso contrário, será uma trilha euleriana aberta.

Caso um grafo contenha uma trilha euleriana fechada ele será chamado de Grafo Euleriano. Se o Grafo contiver uma trilha euleriana aberta ele será chamado de Grafo Semi-Euleriano. Tais nomes são uma homenagem a Leonhard Euler pelo seu trabalho desenvolvido com o Problema das Sete Pontes, como visto no capítulo 1.

O grafo da figura 2.7 é euleriano, pois contém a seguinte trilha euleriana fechada: **(a,b,c,d,e,a,d,b,e,c,a)**.

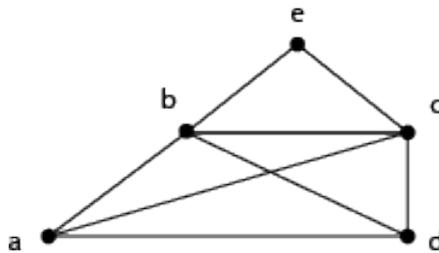
Figura 2.7: Grafo euleriano



Fonte: Autora, (2020)

Na figura 2.8 temos um exemplo de um grafo que possui a seguinte trilha euleriana aberta:  $(a,b,e,c,d,a,c,b,d)$ . Ele é, portanto, semi-euleriano. Mas será que é possível visitar todas as arestas desse grafo, uma única vez, e terminar o trajeto no mesmo vértice de início, ou seja, será possível encontrarmos uma trilha euleriana fechada nesse grafo? O leitor pode até tentar encontrar um trajeto assim, mas para qualquer trilha euleriana encontrada, ela necessariamente terminará em um vértice distinto do inicial.

Figura 2.8: Grafo semi-euleriano



Fonte: Autora, (2020)

**Teorema 2.** Se  $G$  é um grafo tal que  $g(v) \geq 2, \forall v \in G$ , então  $G$  contém um ciclo.

*Demonstração.* Iniciemos uma trilha por um vértice  $v_0$  qualquer desse grafo. A cada vértice visitado ou ele aparecerá pela primeira vez na nossa trilha e, portanto, podemos continuar nosso passeio, já que esse vértice tem grau maior ou igual 2, ou ele estará sendo visitado uma segunda vez, o que certamente ocorrerá em alguma etapa da nossa trilha, já que o número de vértices é finito. Nesse caso, basta considerar a parte da trilha entre a primeira e a segunda ocorrência desse vértice formando, assim, um ciclo.

□

No capítulo 1, vimos que Euler indica algumas condições para que um grafo seja euleriano ou semi-euleriano. Os dois teoremas a seguir referem-se a essas condições.

**Teorema 3.** Um grafo  $G$  é Euleriano se, e somente, se for conexo e não tiver vértices de grau ímpar.

*Demonstração.* Se  $G$  é euleriano, então ele contém uma trilha fechada euleriana  $T$ . Por definição,  $T$  contém todos os vértices do grafo  $G$  e, assim, dados dois vértices quaisquer desse grafo, existe um caminho que os conecta. Logo, o grafo é conexo. Vamos mostrar agora que esse grafo tem apenas vértices de grau par. Consideremos que a trilha  $T$  começa e termina em um certo vértice  $v$ . Seja ainda um vértice  $u \neq v$ . Temos que para cada ocorrência de  $u$  na trilha  $T$ , há duas arestas incidentes: a de chegada e a de saída do vértice, ou seja, uma contribuição de duas unidades no seu grau. Da mesma forma, o vértice  $v$  contribui com duas arestas em suas ocorrências ao longo da trilha  $T$  e com uma no início e mais uma outra no final. Assim, todos os vértices do grafo têm grau par.

Consideremos agora a recíproca. Se o grafo é conexo e possui apenas vértices de grau par, então podemos afirmar que dado um vértice  $v$  qualquer temos que  $g(v) \geq 2$  e, pelo teorema 2, esse grafo contém um ciclo  $C$ . Vamos provar, por indução no número de arestas, que esse grafo possui uma trilha euleriana fechada. Seja  $m$  o número de arestas do grafo  $G$ . Para  $m = 1$  temos um grafo com um único vértice e um laço e, portanto, temos uma trilha euleriana fechada. Consideremos agora, como hipótese de indução, que o teorema é válido para todo grafo com um número de arestas menor que  $m$ . Já vimos que o grafo  $G$  contém um ciclo  $C$ . Se tal ciclo contiver todas as arestas do grafo, ele será uma trilha euleriana fechada e o teorema estará demonstrado. Caso contrário, tomemos um ciclo  $C_1$  e retiremos do grafo  $G$  todas as arestas de  $C_1$ . Nesta operação, estamos diminuindo em duas unidades o grau de cada vértice de  $C_1$  e, desse modo, obteremos um novo grafo,  $H$ , com um número de arestas menor que  $m$  e com todos os seus vértices com grau par. Pela nossa hipótese de indução,  $H$  tem uma trilha euleriana fechada. Mas certamente  $H$  contém um vértice em comum com o ciclo  $C_1$  e ao concatenarmos esse ciclo com o grafo  $H$  através desse vértice, obteremos o grafo  $G$  e uma trilha euleriana maior de comprimento  $m$ . Portanto  $G$  será euleriano.

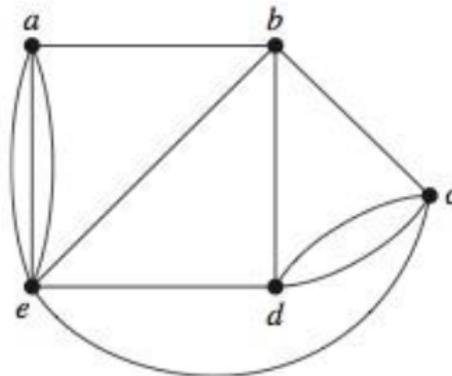
□

Vimos no capítulo 1, a observação de Euler que, para problemas como o das Sete Pontes de Königsberg, existe ainda a tarefa de encontrar o trajeto desejado, quando sabe-se que ele existe. Em seu artigo, Euler dá apenas uma indicação sobre reduzir o complexo, mas não se aprofunda nesse processo. Na demonstração do teorema anterior há uma indicação de um processo construtivo para buscarmos uma trilha euleriana fechada em um grafo euleriano. A ideia é particionar o grafo em ciclos, de menor comprimento, que são

mais fáceis de se identificar, e depois uni-los através de vértices em comum, encontrando, assim, o trajeto procurado.

Vamos aplicar esse processo para determinar uma trilha euleriana fechada no seguinte grafo  $U$ , da figura 2.9.

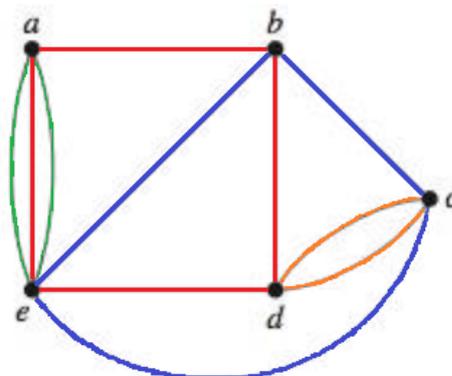
Figura 2.9: Grafo  $U$



Fonte: ROSEN, (2013)

Podemos particionar as arestas do grafo nos seguintes ciclos:  $(a,b,d,e,a)$ ,  $(b,e,c,b)$ ,  $(a,e,a)$  e  $(c,d,c)$ , destacados no grafo na figura 2.10.

Figura 2.10: Grafo  $U$  com ciclos destacados



Fonte: Adaptada de ROSEN, (2013)

Identificados os ciclos, podemos inseri-los um no outro, para construirmos nossa trilha. Por exemplo, o ciclo  $(b,e,c,b)$  pode ser inserido no ciclo  $(a,b,d,e,a)$  através do vértice  $b$ , formando a trilha  $(a,b,e,c,b,d,e,a)$ . Igualmente podemos inserir o ciclo  $(a,e,a)$  na nossa trilha através de qualquer umas das ocorrências do vértice  $a$  (a primeira, por exemplo) e o ciclo  $(c,d,c)$  através do vértice  $c$  formando, assim, a trilha euleriana fechada  $(a,e,a,b,e,c,d,c,b,d,e,a)$ .

**Teorema 4.** Um grafo  $G$  é Semi-Euleriano se, e somente se, é conexo e tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

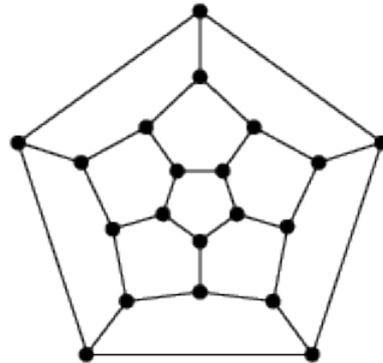
*Demonstração.* Se  $G$  é semi-euleriano, então existe uma trilha euleriana aberta  $T = (u, \dots, v)$  e, portanto,  $G$  é conexo. Agora, considere  $G'$  um grafo tal que  $V(G') = V(G)$  e  $E(G') = E(G) \cup \{uv\}$ . Assim, temos que  $G'$  é euleriano e, pelo teorema anterior, todos os seus vértices tem grau par. Mas, como  $E(G) = E(G') - \{uv\}$ , temos que  $g_G(u)$  é ímpar, pois  $g_G(u) = g_{G'}(u) - 1$ . De modo análogo  $g_G(v)$  também é ímpar. Para todos os outros vértices, seus graus em  $G$  e em  $G'$  serão iguais (já que possuem as mesmas arestas para esses vértices) e, portanto, terão a mesma paridade par. Logo há apenas dois vértices em  $G$  com grau ímpar.

Provemos a volta. Dado  $G$  grafo conexo com apenas dois vértices  $u$  e  $v$  de grau ímpar, considere o grafo  $G'$ , tal que  $V(G') = V(G)$  e  $E(G') = E(G) \cup \{uv\}$ . Logo,  $G'$  é um grafo euleriano com uma trilha euleriana fechada  $T'$ . Assim  $T = T' - \{uv\}$  é uma trilha euleriana aberta em  $G$ . Logo  $G$  é semi-euleriano. □

**Observação:** Note que a trilha euleriana aberta necessariamente deve ser iniciada e finalizada nos vértices de grau ímpar. Esse fato foi observado por Euler, em seu artigo das Sete Pontes.

Um problema parecido com o de encontrar um passeio que passe por todas as arestas de um grafo uma única vez é o de encontrar um passeio que passe por todos os vértices de um grafo uma única vez. Tal problema, foi proposto pela matemático Sir Willian Rowan Hamilton, na forma de um jogo, chamado de *Icosian Game*. Nesse jogo havia um "mundo" na forma de um dodecaedro, onde os vértices representavam cidades e as arestas, ligações entre essas cidades. O objetivo do jogo era partir da cidade de Londres, visitar todas as outras cidades uma única vez e retornar a Londres. Esse jogo pode ser representado na forma de um grafo, como na figura 2.11.

Figura 2.11: Grafo Icosian Game



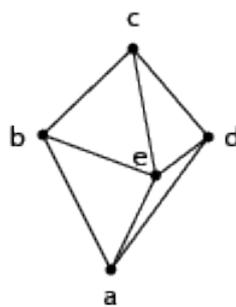
Fonte: Autora, (2020)

Em homenagem a Hamilton, passeios com a característica de visitar cada um dos vértices de um grafo uma única vez recebem seu nome, como veremos nas definições a seguir.

**Definição 2.2.8** (Ciclo Hamiltoniano). *Um ciclo que visita todos os vértices de um grafo é chamado Ciclo Hamiltoniano.*

Um grafo que possui um ciclo hamiltoniano é chamado de Grafo Hamiltoniano. Na figura 2.12 temos um exemplo de um grafo hamiltoniano, com o ciclo **(a,b,c,d,e,a)**.

Figura 2.12: Grafo hamiltoniano

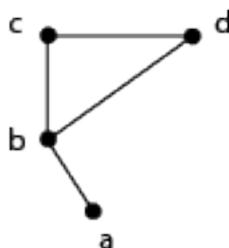


Fonte: Autora, (2020)

**Definição 2.2.9** (Caminho Hamiltoniano). *Um caminho que passa por todos os vértices de um grafo é chamado de Caminho Hamiltoniano.*

Um Grafo Semi-Hamiltoniano é aquele que possui um caminho hamiltoniano, como o mostrado na figura 2.13, com o caminho **(a,b,c,d)**.

Figura 2.13: Grafo semi-hamiltoniano



Fonte: Autora, (2020)

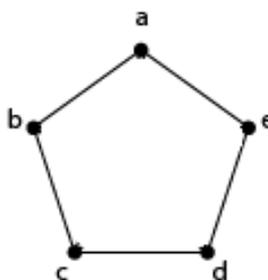
Perceba que todo grafo hamiltoniano também pode ser considerado semi-hamiltoniano. Basta, apenas, não fechar o ciclo permanecendo com um caminho hamiltoniano. No grafo da figura 2.12, por exemplo, podemos tomar o caminho hamiltoniano **(a,b,c,d,e)**.

Já vimos quais são as condições para um grafo possuir uma trilha euleriana. Tais condições são simples, referem-se apenas à conectividade do grafo e ao grau dos vértices. No entanto, apesar das semelhanças com os grafos eulerianos, não se conhece uma condição necessária e suficiente para determinar se um grafo possui um ciclo (ou caminho) hamiltoniano! Mas algumas condições suficientes já foram estabelecidas, como o **Teorema de Dirac**, enunciado a seguir.

**Teorema 5.** Se  $G$  é um grafo simples com  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , e o grau de todo vértice de  $G$  for pelo menos  $\frac{n}{2}$ , então  $G$  possui um ciclo hamiltoniano.

Perceba que não vale a recíproca desse teorema. O grafo apresentado na figura 2.14, por exemplo, é hamiltoniano e não atende às hipóteses do teorema.

Figura 2.14: Grafo hamiltoniano



Fonte: Autora, (2020)

## 2.3 Grafos como Matrizes

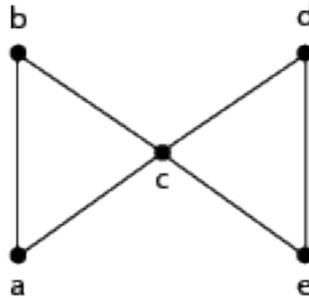
Um grafo também pode ter a sua representação através de uma matriz de dois tipos: a matriz de incidência e a de adjacência.

**Definição 2.3.1** (Matriz de Incidência). *A matriz de incidência associa linhas aos vértices e colunas às arestas do grafo, de modo que se a aresta  $j$  é incidente ao vértice  $i$ , então o elemento da posição  $ij$  é 1 e será 0 caso contrário.*

**Definição 2.3.2** (Matriz de Adjacência). *A matriz de adjacência de um grafo associa suas linhas e colunas aos vértices, de modo que o elemento da posição  $ij$  indica o número de arestas existentes entre os vértices  $i$  e  $j$ .*

Uma consequência da definição é que a matriz de adjacência é uma matriz quadrada, isto é, o número de linhas é igual ao número de colunas. Além disso, tal matriz será simétrica, pois  $a_{ij} = a_{ji}$ . Perceba, ainda, que no caso do grafo ser simples, as entradas da sua matriz de adjacência pertencem ao conjunto  $\{0,1\}$ , já que não há arestas múltiplas.

Figura 2.15: Grafo H



Fonte: Autora, (2020)

No grafo H, mostrado na figura 2.15, associando  $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$ , para os vértices, e associando  $ab = 1, ac = 2, bc = 3, ce = 4, cd = 5, de = 6$  para as arestas, temos que  $I$  é sua matriz de incidência é.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E a sua matriz de adjacência é dada pela matriz  $A$  a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Teorema 6.** Dado um multigrafo  $G$  com  $n$  vértices e sua matriz de adjacência  $A$ , temos que o elemento  $ij$  da matriz  $A^k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , é o número de passeios de comprimento  $k$  que ligam  $i$  a  $j$ .

*Demonstração.* Vamos provar o teorema por indução em  $k$ .

Para  $k = 1$  temos a própria matriz  $A$  que, por definição, informa se há aresta incidindo nos vértices  $i$  e  $j$ . Logo cada elemento  $ij$  indica a quantidade de passeios de comprimento 1 ligando esses vértices.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Suponhamos como hipótese de indução que o teorema é válido para  $k - 1$ , isto é, na matriz  $A^{k-1}$  cada elemento  $b_{ij}$  indica o número de passeios de comprimento  $k - 1$  ligando os vértices  $i$  e  $j$ . Queremos provar que o teorema também é válido para  $k$ .

$$A^{k-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Consideremos a matriz  $A^k = A^{k-1} \cdot A$ :

$$A^{k-1} \cdot A = A^k = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento  $c_{ij}$  foi obtido pela soma  $a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ . Assim, o

elemento  $c_{11}$ , por exemplo, é dado por  $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12} + \dots + a_{n1} \cdot b_{1n}$ .

Como cada elemento  $b_{1j}$  indica quantos passeios de comprimento  $k - 1$  existem do vértice 1 para o vértice  $j$  e cada elemento  $a_{j1}$  informa quantas arestas incidem nos vértices  $j$  e 1, então o elemento  $c_{11}$  indica, justamente, quantos passeios de comprimento  $k$  existem iniciando e terminando no vértice 1.

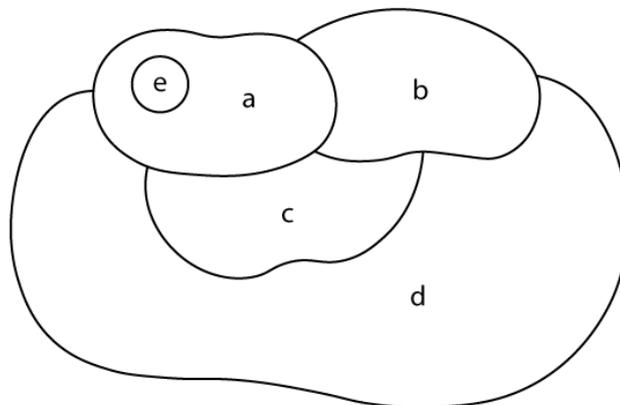
De modo análogo, mostra-se que todo elemento  $c_{ij}$  da matriz  $A^k$  é a quantidade de passeios de comprimento  $k$  existentes do vértice  $i$  ao vértice  $j$ .

□

## 2.4 Coloração de Grafos

O problema de colorir mapas geográficos contribuiu para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos. Dado um mapa qualquer deve-se colorir cada região com uma única cor e regiões com uma fronteira devem ter cores distintas.<sup>1</sup> Se cada região for colorida com uma cor diferente o problema está resolvido. Mas em mapas que apresentam um número muito grande de regiões é interessante que se use o menor número possível de cores. Por exemplo, vemos que o mapa 1 pode ser colorido com cinco cores e o mapa 2 com seis cores, mas o número mínimo de cores que podemos utilizar para a coloração do mapa 1 é quatro, enquanto que para o mapa 2, três cores são suficientes, como é exemplificado nas figuras 2.18 e 2.19. Note que não é possível colorir o mapa 1 com apenas 3 cores, pois as regiões **a**, **b**, **c** e **d** possuem fronteiras comuns, duas a duas. E o mapa 2 não poderia ser colorido com menos do que três cores, pois as regiões **a**, **b** e **c**, por exemplo, também possuem fronteiras comuns.

Figura 2.16: Mapa 1

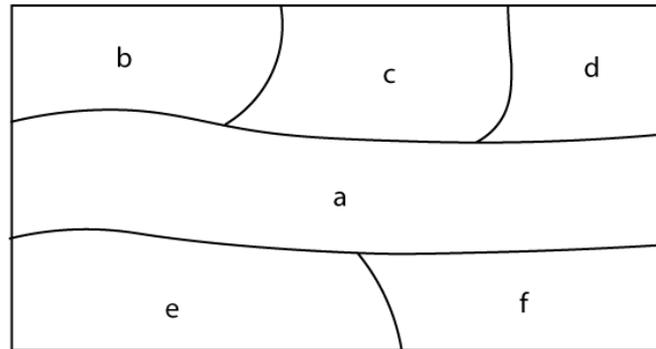


Fonte: Autora, (2020)

---

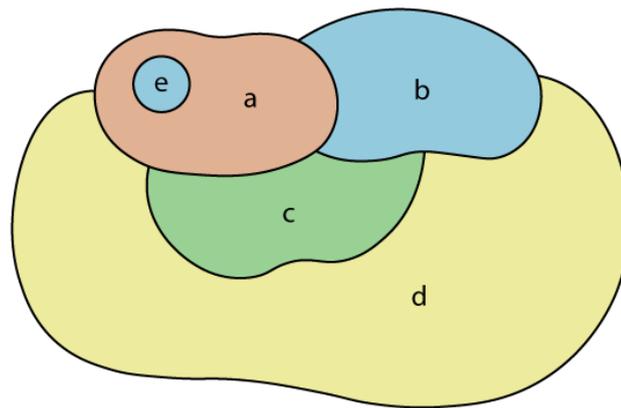
<sup>1</sup>Considera-se que não existe fronteira se a interseção entre duas regiões for um ponto.

Figura 2.17: Mapa 2



Fonte: Autora, (2020)

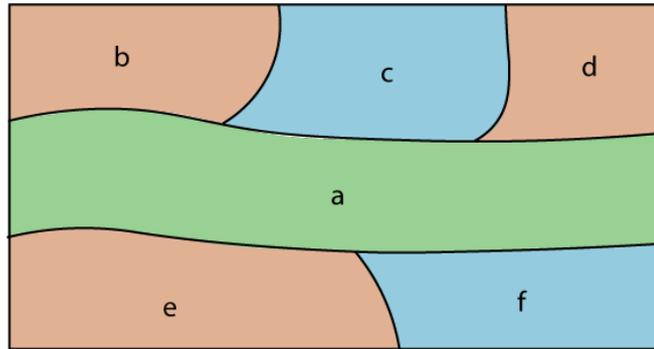
Figura 2.18: Mapa 1 colorido com apenas quatro cores



Fonte: Autora, (2020)

Mapas podem ser representados por grafos, associando cada região a um vértice e incidindo arestas em vértices que representem regiões com fronteira. Os grafos que representam mapas têm uma particularidade: eles podem ser desenhados de forma que não haja interseções entre as arestas, exceto em possíveis vértices. Tais grafos são chamados de planares, como definido a seguir.

Figura 2.19: Mapa 2 colorido com apenas três cores

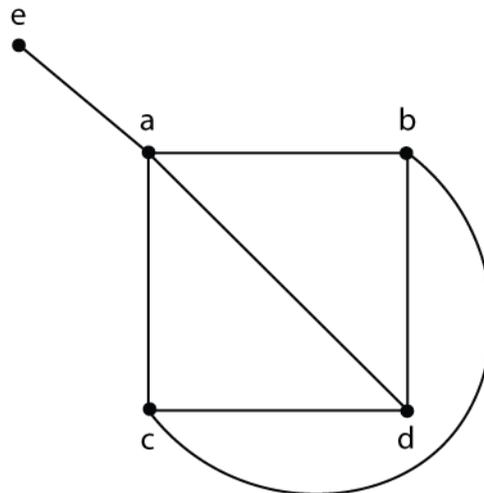


Fonte: Autora, (2020)

**Definição 2.4.1.** *Um grafo é dito planar se ele puder ser representado por um diagrama em que não haja cruzamentos das arestas (exceto em suas extremidades).*

O mapa 1 pode ser representado, por exemplo, pelo seguinte grafo planar que mostra a figura 2.20.

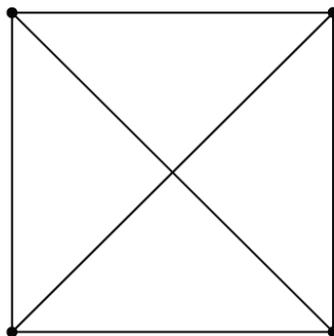
Figura 2.20: Grafo do mapa 1



Fonte: Autora, (2020)

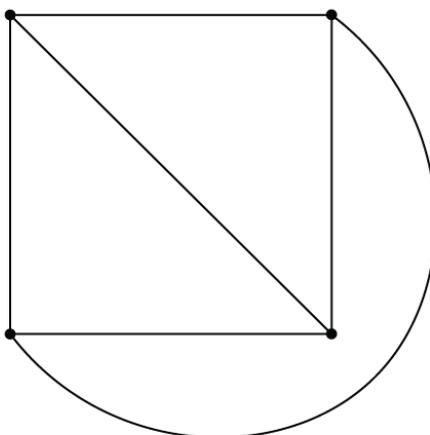
É importante ressaltar que mesmo que um grafo apresente arestas com cruzamentos, ele pode ser planar. Basta que seja possível redesenhá-lo de modo a desfazer esses cruzamentos. Esse é o caso do grafo mostrado na figura 2.21. Aparentemente ele não é planar, mas a figura 2.22 mostra o mesmo grafo redesenhado com os cruzamentos desfeitos, portanto ele é planar.

Figura 2.21: Grafo Planar



Fonte: Autora, (2020)

Figura 2.22: Grafo Planar

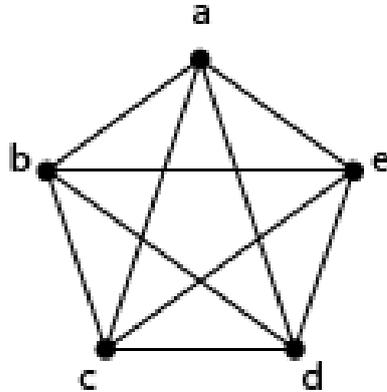


Fonte: Autora, (2020)

Para afirmarmos que um grafo é planar, basta exibirmos uma representação do seu diagrama sem cruzamentos, porém nem sempre isso será possível, ou seja, nem todo grafo é planar. Na figura 2.23 seguinte mostramos um exemplo de um grafo não planar.

O leitor poderá fazer algumas tentativas de redesenhar esse grafo sem cruzamentos, mas vai perceber que todas elas fracassarão em alguma etapa. Além de uma verificação da sua não planaridade por esgotamento das possibilidades há alguns resultados que mostram que esse grafo não é planar. Um deles será apresentado no próximo capítulo como solução de um dos exercícios propostos.

Figura 2.23: Grafo não planar



Fonte: Autora, (2020)

Observe que um grafo planar divide o plano em um certo número de regiões. O grafo da figura 2.22, por exemplo, é dividido em 4 regiões, sendo que uma delas é ilimitada enquanto as outras três são limitadas pelas arestas do grafo. Euler mostrou que qualquer representação planar de um mesmo grafo conexo divide o plano sempre no mesmo número de regiões.<sup>2</sup> Para afirmar isso ele prova uma relação entre o número de vértices, arestas e regiões determinadas de um grafo. (*PITOMBEIRA*)

**Teorema 7** (Fórmula de Euler). Considere  $G$  um grafo planar simples com  $A$  arestas,  $V$  vértices e  $R$  regiões determinadas no plano. Então  $V + R - A = 2$ .

*Demonstração.* Consideremos um grafo simples formado por um único vértice e nenhuma aresta. Qualquer grafo planar conexo pode ser obtido a partir desse grafo simples através das seguintes operações:

- Operação 1: adicionar uma aresta e um vértice a um vértice já existente;
- Operação 2: adicionar uma aresta a dois vértices já existentes;
- Operação 3: adicionar um laço a um vértice já existente.

Note que para tal grafo simples vale a fórmula de Euler pois  $V = 1$ ,  $A = 0$  e  $R = 1$  e assim temos que  $V + R - A = 2$ . Agora vamos observar o efeito que cada uma das operações citadas tem sobre  $V + R - A$ :

---

<sup>2</sup>Esse resultado normalmente é aplicado a poliedros convexos, mas aqui ela está sendo interpretado como um teorema da Teoria dos Grafos.

**Operação 1:**  $\Delta V = 1, \Delta R = 0, \Delta A = 1 \Rightarrow \Delta(V + R - A = 0)$

**Operação 2:**  $\Delta V = 0, \Delta R = 1, \Delta A = 1 \Rightarrow \Delta(V + R - A = 0)$

**Operação 3:**  $\Delta V = 0, \Delta R = 1, \Delta A = 1 \Rightarrow \Delta(V + R - A = 0)$ .

Percebemos, então, que  $(V + R - A)$  é invariante sob as operações descritas. Assim, para qualquer grafo planar conexo, temos que  $V + R - A = 2$ .

□

Além de representarem mapas geográficos, existem algumas aplicações práticas de grafos planares. Por exemplo, em projetos de circuitos eletrônicos, que podem ser modelados por grafos, é interessante evitar cruzamentos de conexões, portanto busca-se projetar circuitos no modelo de grafos planares. (ROSEN, 2013)

Como vimos, mapas geográficos podem ser representados por grafos. Assim, para o problema de descobrir qual o número mínimo de cores para se colorir as regiões de um mapa temos o equivalente a encontrar o número mínimo de cores que se pode colorir os vértices de seu respectivo grafo de modo que vértices vizinhos tenham cores diferentes. Esse número mínimo é chamado *número cromático* do grafo.

Um interessante resultado da teoria dos grafos é o Teorema das Quatro Cores. Ele afirma que dado um grafo planar o seu número cromático é menor ou igual a 4. Desse modo, dado um mapa qualquer podemos afirmar que quatro cores, ou talvez até menos, são suficientes para colorir suas regiões.

**Teorema 8** (Teorema das Quatro Cores). O número cromático de um grafo planar não é maior que quatro.

Houve muitas tentativas para se provar esse teorema que foi finalmente demonstrado em 1976 pelos matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken com o auxílio de computadores que analisaram milhares de configurações! Alguns anos mais tarde uma outra demonstração foi feita reduzindo-se o número de casos a serem analisados, mas ainda assim foi necessário o uso de computadores para essa prova.

**Observação 1:** Note que o teorema refere-se a grafos planares. Ou seja, um grafo não planar pode ter número cromático maior que quatro. Por exemplo, o grafo apresentado na figura 2.23 tem número cromático 5.

**Observação 2:** A consequência do Teorema das Quatro Cores de que todo mapa pode ser colorido com até quatro cores refere-se a mapas físicos, ou seja, o interesse está na coloração das regiões respeitando-se a regra de que regiões com fronteira devem ter cores diferentes. Quando nos referimos a mapas políticos podemos encontrar territórios não contíguos que pertencem a uma mesma unidade administrativa e os mesmos devem

receber a mesma cor. Dessa forma quatro cores podem não ser suficientes para a coloração desse tipo de mapa.

A coloração de grafos tem aplicações que vão além da coloração de mapas. Essa ferramenta é muito útil para nos ajudar a modelar problemas que envolvam agendamento de horários ou distribuições de objetos por categorias, como mostramos no exemplo a seguir.

**Exemplo:** Um zoológico quer montar habitats naturais nos quais possa exibir seus animais. Infelizmente, alguns animais comerão alguns dos outros se tiverem oportunidade. Como um modelo de grafo e uma coloração podem ser usados para determinar o número mínimo de habitats diferentes necessários e a distribuição dos animais nesses habitats?

Podemos criar um grafo de modo que os vértices representem cada tipo de animal e as arestas conectem vértices cujos animais não possam estar juntos em um mesmo habitat. Fazendo a coloração desse grafo, o seu número cromático nos informará a quantidade necessária de habitats a serem montados. Os animais que estiverem representados por vértices de mesma cor, poderão ser alocados em um mesmo habitat.

### 3 PROBLEMAS PROPOSTOS

Neste capítulo são indicados alguns problemas, com suas respectivas soluções, que acreditamos que possam ser trabalhados com estudantes do Ensino Médio. Todos eles utilizam como estratégia de solução a modelagem em grafos, ou seja, faz-se um paralelo entre os dados do problema com os vértices e as arestas de um grafo. Reinterpreta-se a pergunta e utiliza-se os resultados e relações já conhecidos da Teoria dos Grafos para respondê-la. Todos os problemas apresentados necessitam apenas da teoria que foi exposta no capítulo anterior.

**Problema 3.0.1.** *Um determinado reinado tem 100 cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo neste reinado?*

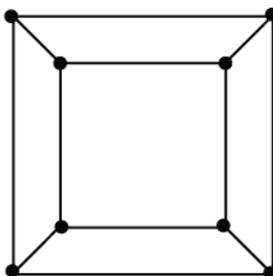
**Solução:** Considerando as cidades como vértices e as estradas como arestas, queremos saber quantas arestas possui esse grafo. No capítulo 2, vimos que em um grafo a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas. Como saem 4 estradas de cada cidade, temos que o grau de cada um dos 100 vértices é 4. Assim, a soma dos graus de todos os vértices é  $100 \cdot 4 = 400$  e, portanto, o número de arestas é  $\frac{400}{2} = 200$ .

Logo esse reinado tem 200 estradas.

**Problema 3.0.2.** *Uma peça de fio tem 120 cm de comprimento. Mostre que não é possível usá-la, sem fazer cortes, para formar as arestas de um cubo com arestas de 10 cm. Determine o número mínimo de cortes necessários para formar o cubo desejado.*

**Solução:** Um cubo possui 12 arestas e como cada uma delas deve ter 10 cm de comprimento, isso significa que a peça deve ser totalmente aproveitada, ou seja, não será possível fazer uma sobreposição do fio para formar uma aresta. A figura 3.1 a seguir mostra um grafo que representa os vértices e as arestas do cubo.

Figura 3.1: Grafo do cubo

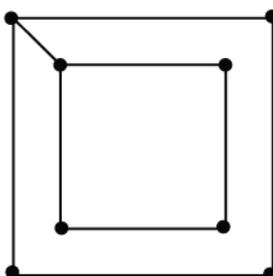


Fonte: Autora, (2020)

Repare que, para garantirmos que não haverá sobreposição, e nem cortes nessa peça, deveríamos ser capazes de desenhar esse grafo sem retirar o lápis do papel e sem passar por uma mesma linha já desenhada. Em termos da linguagem de grafos, queremos visitar todas as suas arestas uma única vez, ou seja, queremos que tal grafo seja euleriano (ou semi-euleriano). Mas é fácil perceber que tal grafo não é euleriano (nem semi) já que o mesmo possui mais de dois vértices de grau ímpar. Logo não se pode formar tal cubo com uma peça inteira de 120 cm.

Para descobrirmos o menor número possível de cortes a ser feito para formarmos o cubo, devemos procurar um grafo com o maior número possível de arestas de modo que o mesmo seja semi-euleriano. A figura 3.2 mostra tal grafo.

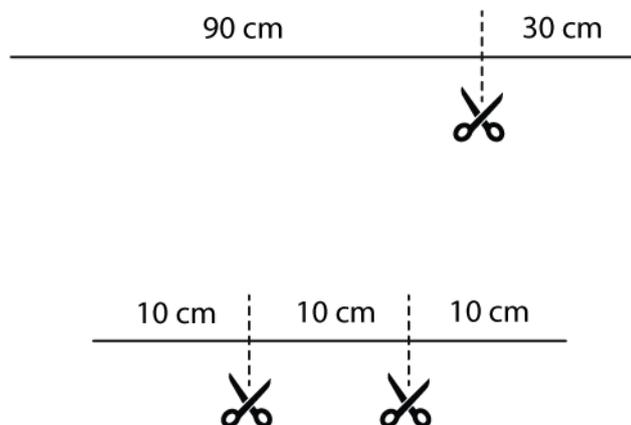
Figura 3.2: Grafo parcial do cubo



Fonte: Autora, (2020)

Note que nele há 9 arestas e, portanto faltam ainda 3 arestas para completá-lo. Assim, três cortes deverão ser feitos, como indicados na figura a seguir.

Figura 3.3: Cortes do fio para formar o cubo

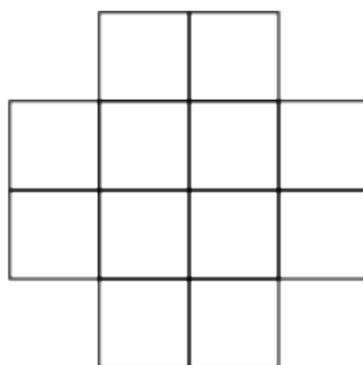


Fonte: Autora, (2020)

Um corte para separar a peça em tamanhos de 90 cm ( $9 \cdot 10\text{cm}$ ) e 30 cm e outros dois para separar o pedaço de 30 cm e três partes de 10 cm, completando as arestas restantes.

**Problema 3.0.3.** *Um tabuleiro com a forma de uma cruz é obtido de um tabuleiro  $4 \times 4$  retirando-se as quatro quinas, como na figura 3.4. Um cavalo pode se mover neste tabuleiro de modo a passar por todos os quadrados exatamente uma vez e terminar no quadrado de onde saiu?*

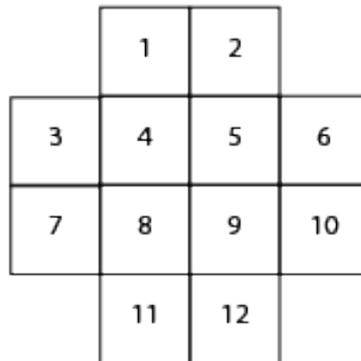
Figura 3.4: Tabuleiro em cruz



Fonte: Autora, (2020)

**Solução:** Podemos numerar cada casa desse tabuleiro e construir um grafo em que os vértices sejam as representações das casas e cada par de vértices terá uma aresta incidente se for possível sair de um vértice para o outro seguindo o movimento do cavalo.

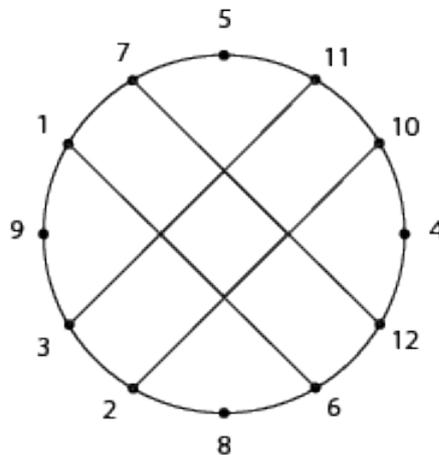
Figura 3.5: Casas numeradas



Fonte: Autora, (2020)

Observe que partindo da casa 1 só é possível chegar às casas 6, 7 e 9 com um movimento do cavalo. Então em nosso grafo o vértice  $v_1$  terá como vizinhos os vértices  $v_6$ ,  $v_7$  e  $v_9$ . Fazendo a mesma análise para cada uma das outras casas, chegamos ao grafo apresentado a seguir na figura 3.6.

Figura 3.6: Grafo com os possíveis movimentos do cavalo

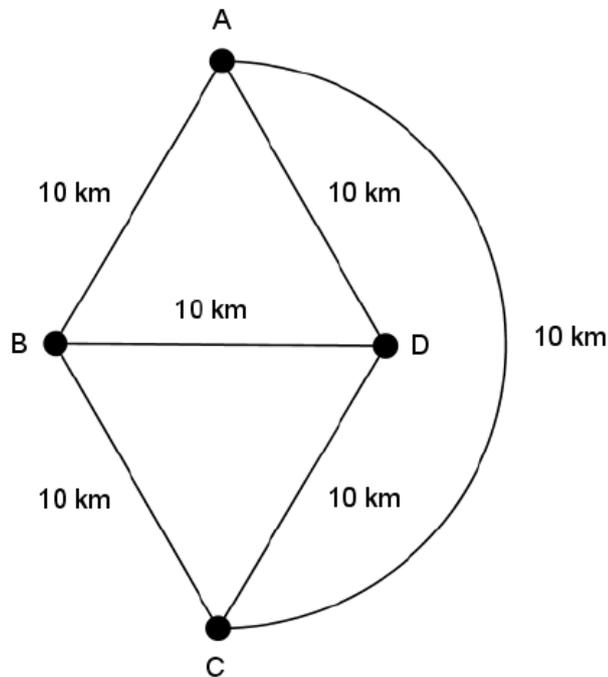


Fonte: Autora, (2020)

Assim, o problema se resume a encontrar um ciclo hamiltoniano no grafo formado. Não é difícil encontrar esse ciclo no grafo. Temos, por exemplo, o seguinte ciclo: **(1,7,5,11,10,4,12,6,8,2,3,9,1)**. Logo, podemos concluir que é possível movimentar esse cavalo pelo tabuleiro, passando por cada casa uma única vez, e retornar à casa inicial.

**Problema 3.0.4. (IME - 2002)** Quatro cidades  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são conectadas por estradas conforme a figura abaixo.

Figura 3.7: As quatro cidades e suas estradas



Fonte: DE OLIVEIRA, (2017)

Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade  $A$  e possuem exatamente  $50$  km?

**Solução:** Podemos modelar o mapa com as quatro cidades como um grafo, de modo que as cidades sejam representadas pelos vértices ( $A = 1, B = 2, C = 3, D = 4$ ) e as estradas pelas arestas. Tal grafo será expresso por sua matriz de adjacência  $M$ , dada a seguir.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como todas as estradas têm um comprimento de  $10$  km, encontrar a quantidade de percursos que iniciam e terminam em  $A$  com exatamente  $50$  km é equivalente a encontrar no grafo o número de passeios de comprimento  $5$ , com vértice inicial e final em  $A$ . Assim, o elemento  $m_{11}$  da matriz  $M^5$  nos fornece esse número.

$$M^5 = \begin{bmatrix} 60 & 61 & 61 & 61 \\ 61 & 60 & 61 & 61 \\ 61 & 61 & 60 & 61 \\ 61 & 61 & 61 & 60 \end{bmatrix}$$

Logo, existem 60 percursos de 50 km que começam e terminam em A.

**Observação:** Podemos generalizar esse problema para passeios de  $10n$  km, com  $n$  inteiro, partindo-se da cidade  $i$  para a cidade  $j$ . Basta tomarmos o elemento  $m_{ij}$  da matriz  $M^n$ . Para encontrar tal matriz, consultamos o site [matrixcalc.org/pt](http://matrixcalc.org/pt), que funciona como uma calculadora online de matrizes. Assim, obtivemos a matriz  $M^n$  a seguir.

Figura 3.8: Matriz de Potência n

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \equiv \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot (-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} \\ \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{3 \cdot (-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} \\ \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{3 \cdot (-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} \\ \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{3 \cdot (-1)^n + 3^n}{4} \end{pmatrix} \equiv$$

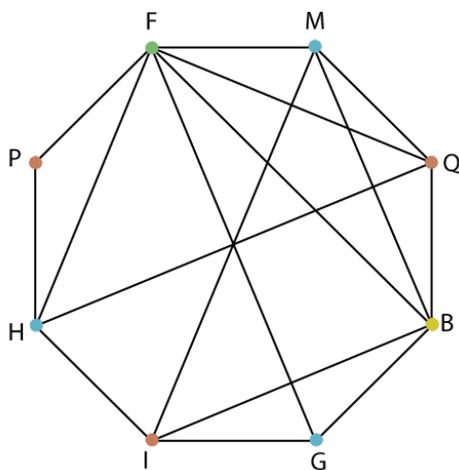
Fonte: MATRIXCALC, (Acesso em: 14 out 2020)

**Problema 3.0.5.** *Alguns alunos do ensino médio de uma escola precisam fazer provas de recuperação nas seguintes disciplinas: Matemática, Português, Química, Biologia, Geografia, História, Física e Inglês. Existem alunos que precisam fazer provas de Matemática e Química, Matemática e Física, Matemática e Inglês, Matemática e Biologia, Química e Biologia, Química e Física, Física e Biologia, Química e História, Biologia e Geografia, Biologia e Inglês, Geografia e inglês, Geografia e Física, Inglês e História, História e Física, História e Português, e Português e Física. O coordenador dessa escola deseja marcar o menor número possível de horários para a realização dessas provas. Quantos horários, portanto, ele deverá agendar?*

**Solução:** Esse problema pode ser resolvido através de uma coloração dos vértices de um grafo. Podemos montar um grafo em que cada vértice representa uma disciplina e dois vértices estarão conectados por uma aresta caso eles representem disciplinas em que haja algum aluno na recuperação de ambas. Daí, podemos colorir os vértices desse grafo de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Portanto, descobrir o número mínimo de horários para aplicações dessas provas é equivalente a encontrar o

número cromático do grafo formado. O grafo seguinte mostra um exemplo de uma possível coloração para ele em que são utilizadas quatro cores.

Figura 3.9: Grafo com os horários



Fonte: Autora, (2020)

É importante notar que 3 cores não seriam suficientes para a coloração desse grafo, pois as disciplinas Biologia, Química, Física e Matemática têm alunos em comum duas a duas. Desse modo, concluímos que o número cromático desse grafo é 4. Logo o coordenador precisará agendar quatro horários para a realização dessas provas.

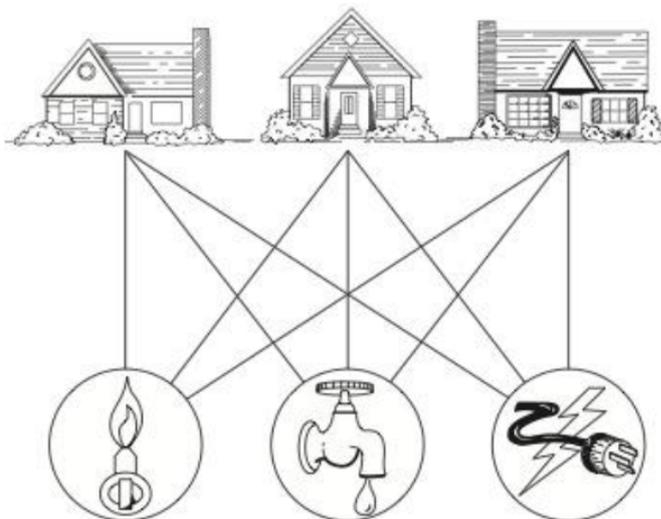
Figura 3.10: Tabela com as disciplinas agrupadas por horários

|           |                                 |
|-----------|---------------------------------|
| Horário 1 | Matemática, Geografia, História |
| Horário 2 | Física                          |
| Horário 3 | Biologia                        |
| Horário 4 | Química, Português, Inglês      |

Fonte: Autora, (2020)

**Problema 3.0.6.** *É possível conectar as três casas aos três serviços públicos, indicados na figura, de modo que não haja cruzamentos entre as conexões?*

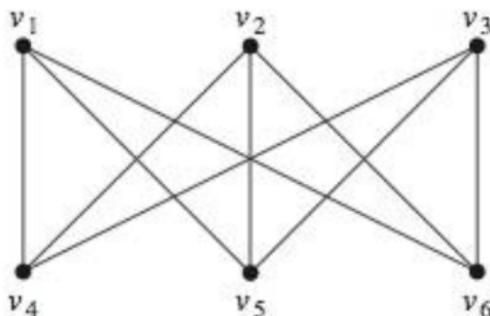
Figura 3.11: Três Casas e Três Serviços Públicos



Fonte: ROSEN, (2013)

**Solução 1:** Associando as casas e os serviços públicos a vértices e as conexões a arestas, temos o grafo na figura 3.12 que modela esse problema e com a seguinte pergunta: ele é planar?

Figura 3.12: Grafo das Três Casas e dos Três Serviços Públicos



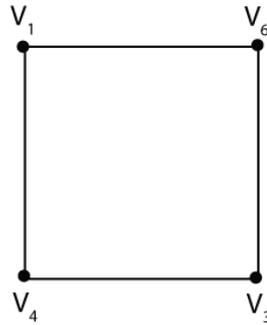
Fonte: ROSEN, (2013)

Vamos tentar desenhá-lo de modo a desfazer os cruzamentos. Como ponto de partida, podemos conectar os vértices  $v_1, v_4, v_3$  e  $v_6$ , como mostra a figura 3.13.

Nosso próximo passo é alocar os vértices restantes. Começemos pelo vértice  $v_5$  que deve estar ligado aos vértices  $v_1$  e  $v_3$ . Esse vértice pode estar tanto na região interna da figura 3.13 como na região externa. Coloquemos  $v_5$  na região interna<sup>1</sup>.

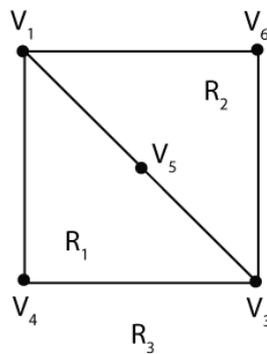
<sup>1</sup>O caso de  $v_5$  ser colocado na região externa é análogo e pode ser verificado pelo leitor.

Figura 3.13: Vértices  $v_1, v_4, v_3, v_6$  conectados



Fonte: Autora, (2020)

Figura 3.14: Grafo separando o plano em 3 regiões



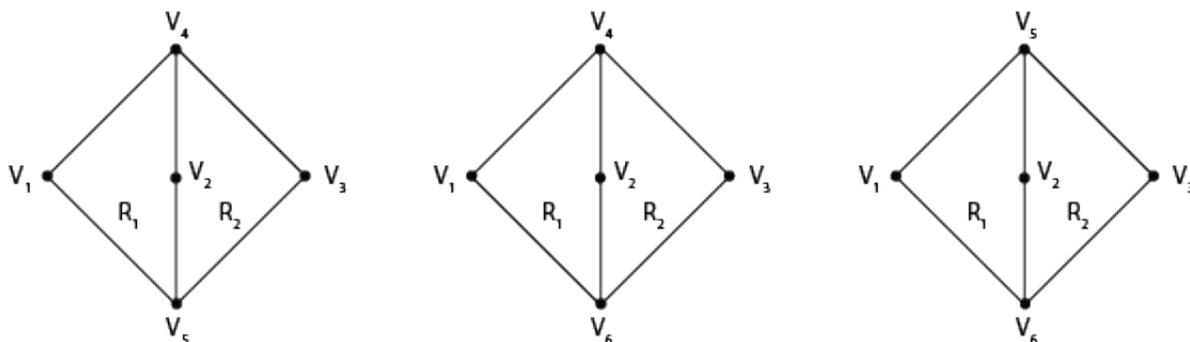
Fonte: Autora, (2020)

Note que nosso grafo parcial divide o plano em três regiões que chamaremos de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ . O vértice restante,  $v_2$ , deve estar conectado a  $v_4, v_5$  e  $v_6$ . Mas se  $v_2$  estiver na região  $R_1$  não será possível ligá-lo a  $v_6$  sem forçar um cruzamento de arestas. Do mesmo modo, acontecerá se  $v_2$  estiver na região  $R_2$  e tentarmos conectá-lo a  $v_4$  ou se o pusermos na região  $R_3$  e tentarmos criar uma aresta que o ligue a  $v_5$ .

Assim, concluímos que o grafo não é planar, e, portanto, não é possível conectar as três casas aos três serviços públicos sem cruzar as conexões.

**Solução 2:** Observe que o grafo é conexo, pois dado dois vértices quaisquer existe um caminho que os conecta. Agora vamos supor que esse grafo seja planar. Então pela fórmula de Euler vale a relação  $V + R - A = 2$ . Para esse grafo, temos que  $V = 6$  e  $A = 9$ , portanto segue que  $R$  deve ser igual a 5, sendo uma dessas regiões ilimitada e as outras 4 limitadas pelas arestas do grafo. Mas, observando o esquema da figura 3.15, percebemos que esse grafo contém pelo menos 6 regiões limitadas, o que contradiz o Teorema de Euler. Logo, o grafo não é planar e assim não será possível fazer as conexões desejadas sem forçar um cruzamento entre elas.

Figura 3.15: O grafo não atende à fórmula de Euler



Fonte: Autora, (2020)

**Observação:** O grafo da figura 3.12 é chamado de  $K_{3,3}$  que se caracteriza por ter o seu conjunto de vértices divididos em dois subconjuntos disjuntos,  $V_1$  e  $V_2$ , cada qual com 3 vértices, de modo que todos os vértices de  $V_1$  sejam vizinhos a todos os vértices de  $V_2$  e que não haja vértices vizinhos em um mesmo subconjunto. Já o grafo da figura 2.23 é um grafo do tipo completo  $K_5$  que se caracteriza por ter todos os seus 5 vértices ligados, dois a dois, por uma aresta. Um dos critérios para se garantir que um grafo é não planar é encontrar um subgrafo do tipo  $K_{3,3}$  ou  $K_5$ , isto é, determinar vértices e arestas, pertencentes ao grafo, que satisfaçam uma dessas propriedades.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho abordou uma parte inicial da Teoria dos Grafos, um assunto que, apesar de relativamente recente na Matemática, já possui uma ampla teoria e que tem um grande potencial de aplicações. Temos a confiança de que esse tema, que inicialmente requer conhecimentos matemáticos muito básicos, possa ampliar os horizontes dos leitores sobre a Análise Combinatória, mostrando que essa área da Matemática tem o seu interesse além dos problemas de contagem: ela estuda também as relações entre objetos e a existência de configurações.

Ao longo desse trabalho apresentamos o que, comumente, se considera o primeiro trabalho na Teoria dos Grafos. Mostramos como o matemático Leonhard Euler desenvolveu um raciocínio para dar uma solução ao famoso problema das Sete Pontes de Königsberg sem utilizar definições como *vértices* e *arestas*, que conhecemos hoje, o que muitos trabalhos equivocadamente afirmam que Euler tenha feito. Na apresentação da sua solução para o problema das Sete Pontes percebe-se de modo muito claro o modo como uma nova teoria surge na Matemática: temos um problema motivador, na sua tentativa de solucioná-lo faz-se observações de propriedades, as mesmas se relacionam de tal modo que culminam em um grande resultado que soluciona o problema. A definição de objetos que validam as relações existentes ocorrem ao longo ou no final desse desenvolvimento. Essa ordem natural da elaboração de uma teoria é diferente da ordem apresentada em textos matemáticos: apresentação de definições, seguida de propriedades, seguidas de um importante resultado e finalmente a aplicação desse resultado na resolução de um problema. Normalmente essa última ordem é a adotada em sala de aula na introdução de conteúdos, mas será que é a mais adequada? Acreditamos que conhecer a história do nascimento de uma nova ideia matemática pode nos fazer repensar a ordem expositiva da sua apresentação para nossos alunos.

No capítulo seguinte apresentamos formalmente conceitos iniciais dessa teoria, buscando sempre exemplificá-los para facilitar a compreensão e procuramos nos ater àqueles necessários para a resolução dos problemas propostos. Quanto a esses, tentamos apresentar problemas práticos, contextualizados, que provocassem a curiosidade e o interesse na busca de uma estratégia para a sua resolução. Buscamos também mostrar as diferen-

tes abordagens que podem ser seguidas com a teoria dos grafos: problemas relacionados a trajetos com grafos eulerianos e hamiltonianos, problemas envolvendo coloração com aplicações a mapas e elaboração de horários e grafos representados como matrizes. Destacamos nessa última abordagem uma oportunidade para ressignificar o estudo de matrizes no Ensino Médio, uma vez que tal assunto vem sendo trabalhado de forma descontextualizada e com poucas aplicações práticas.

Obviamente existem muitos outros problemas sobre esse assunto que podem ser apresentados para professores e estudantes da educação básica. Podemos encontrar uma vasta quantidade de trabalhos sobre esse tema com diferentes abordagens adequadas aos mais variados níveis educacionais que vão desde o ensino fundamental ao ensino médio e outros, ainda, voltados ao ensino superior.

Esperamos que esse trabalho possa despertar o interesse de alunos e professores pela Teoria dos Grafos e que possa ser um estímulo para que busquem e se aprofundem mais sobre o assunto. Acreditamos também que o contato com um assunto fora do currículo tradicional, mas que apresenta uma ferramenta simples e eficaz na resolução de problemas tão interessantes possa encorajar a pesquisa por outros tópicos que sejam tão atraentes quanto a Teoria dos Grafos.

# Referências Bibliográficas

BBC, M., Entrevista: Clara Grima, *Noticiário SBM*, 15(21), 14–16, 2020.

CERIOLI, M., Matemática Finita - notas de aula, 2008.

FOMIN, D., *Círculos Matemáticos - A Experiência Russa*, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2015.

JURKIEWICZ, S., Grafos - uma introdução, 2009.

LOPES, F., Euler e as Pontes de Königsberg, *RBHM*, 15(30), 23–32, 2015.

MOL, R. S., *Introdução à História da Matemática*, CAED-UFMG, Belo Horizonte, MG, 2013.

OLIVEIRA, A. E. D., Análise combinatória - aplicação de técnicas alternativas na resolução de problemas interessantes, Master's thesis, UNIRIO, 2017.

PITOMBEIRA, J. B., O problema das ligações de Água, luz e telefone, *RPM*, 11.

ROQUE, T. R. e. J. B. P. d. C., PITOMBEIRA, *Tópicos de História da Matemática*, SBM, Rio de Janeiro, RJ, 2019.

ROSEN, K. H., *Matemática Discreta e Suas Aplicações*, AMGH, Porto Alegre, RS, 2013.