UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – UNIRIO

CENTRO DE CIÊNCIAS E EXATAS E TECNOLOGIA – CCET

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

NÚMEROS REAIS E ENSINO MÉDIO

Frederico Augusto Benedito Lima Barreto

RIO DE JANEIRO - RJ

2020

Frederico Augusto Benedito Lima Barreto

NÚMEROS REAIS E ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. José Teixeira Cal Neto
Doutor em Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro
2020

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

B273 Benedito Lima Barreto, Frederico Augusto
Números Reais e Ensino Médio / Frederico Augusto Benedito Lima Barreto. -- Rio de Janeiro, 2020.
86 p.

Orientador: José Teixeira Cal Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Números Reais. 2. História da Matemática. 3. Números Racionais e Irracionais. 4. Ensino Médio. 5. Cortes de Dedekind. I. Teixeira Cal Neto, José, orient. II. Título.

Frederico Augusto Benedito Lima Barreto

NÚMEROS REAIS E ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

JOSE TEIXEIRA CAL NETO:85458970730 Digitally signed by JOSE TEIXEIRA CAL NETO:85458970730 Date: 2021.02.02 12:44:23 -03'00'

Prof. Dr. José Teixeira Cal Neto – Orientador
UNIRIO

ALINE CAETANO DA SILVA BERNARDES:07611974785 Assinado de forma digital por ALINE CAETANO DA SILVA BERNARDES:07611974785 Dados: 2021.02.02 18:51:07 -03'00'

Prof. Dra. Aline Caetano da Silva Bernardes
UNIRIO

JOSE KOILLER josekoiller@id.uff.br:07585488777 Digitally signed by JOSE KOILLER josekoiller@id.uff.br:07585488777 Date: 2021.02.02 21:32:17 -03'00

Prof. Dr. José Koiller
UFF

Rio de Janeiro, 2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Pedro e Maria da Penha, à memória de minha avó, Zelia e às comunidades de pesquisa e ensino em Matemática.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me capacitar, fortalecer e abençoar.

Aos meus pais, pelo carinho e apoio.

Ao professor orientador Doutor José Teixeira Cal Neto, pela orientação e pelo apoio.

À professora Doutora Aline Bernardes, por suas sugestões.

A todo o corpo docente da UniRio, pelas aulas de qualidade e pela dedicação aos alunos.

Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo e pela convivência.

À CAPES, por ter financiado minha participação no PROFMAT.

“*A matemática é a linguagem da precisão; é o vocábulo indispensável daquilo que conhecemos.*” (Karl Wilhelm Theodor Weierstrass)

RESUMO

Os números reais têm grande importância na Matemática, uma vez que foram motivação no processo de formalização e abstração no século XIX e estão presentes na prática matemática geral e em suas diferentes áreas. Além disso, são consequência do desenvolvimento da própria Matemática, o qual recebeu contribuições relevantes para esse conceito, principalmente as de fundamentação teórica, no século IV a.C. e no século XIX. No Ensino Básico, o trabalho com números reais aparece do 9º ano do Ensino Fundamental em diante, em todas as unidades curriculares da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a área da Matemática e até em outros temas de Ciências da Natureza. Na etapa do Ensino Médio, a maioria dos modelos matemáticos é de natureza contínua e é necessário que os alunos saibam identificar, reconhecer propriedades e efetuar cálculos com esses números. Os objetivos deste trabalho são fazer um estudo sobre os números reais voltado ao Ensino Médio e apresentar uma proposta voltada ao próprio ensino. Estão presentes exemplos históricos concretos de números reais, demonstrações de resultados sobre racionalidade e irracionalidade desses números e fundamentos do conjunto $\mathbb{R}$, além da discussão de questões pertinentes ao ensino e uma atividade para a sala de aula.

ABSTRACT

Real numbers have a great importance in mathematics, since they were a motivation in the process of formalization and abstraction in the 19th century and are present in general mathematical pratice and its different areas. Beyond, they are a consequence of the development of mathematics itself, which received relevant contributions to this concept, mainly those of theoretical foundation, in the 4th century B.C. and in the 19th century. In Basic Education, the work with real numbers appears in the final stages and in all “curricular units” of the BNCC (Base Nacional Comum Curricular-Brazil) for the area of Mathematics and even in other subjects of Natural Sciences. Most mathematical models involved are of a continuous nature and it is necessary for students to be able to identify these numbers, perform calculations and understand their properties. The objectives of this work are to make a study on the real numbers directed to Secondary Education and to present a proposal directed to teaching. There are concrete historical examples of real numbers, demonstration of results on the rationality and irrationality of these numbers and fundamentals of the set $\mathbb{R}$, in addition to the discussion of issues relevant to teching and an activity for the classroom.

LISTA DE FIGURAS E QUADROS

Figura 1 – Sistema de numeração babilônico 20
Figura 2 – Diagonal do quadrado - Babilônios antigos 21
Figura 3 – Sistema de numeração egípcio 22
Figura 4 – Frações egípcias 22
Figura 5 – Diagonal do quadrado e duplicação do cubo 25
Figura 6 – Diagonal do quadrado 27
Figura 7 – Diagonal do quadrado. Etapa 1 28
Figura 8 – Diagonal do quadrado. Etapa 2 29
Figura 9 – Retângulo de ouro 31
Figura 10 – Retângulos semelhantes 31
Figura 11 – Retângulo de ouro. Etapas seguintes 32
Figura 12 – Hexágonos inscrito e circunscrito à circunferência 33
Figura 13 – Tábua ou tabela de cordas 35
Figura 14 – Ângulos e cordas na circunferência 36
Figura 15 – Corda versus seno na circunferência........ 36
Figura 16 – Produto com radicais, do ano em 1344 38
Figura 17 – Diagrama: Organização dos números em conjuntos 51
Figura 18 – Método de Newton-Raphson ou Método das tangentes 53
Figura 19 – Exemplos de Cortes de Dedekind 59
Figura 20 – Representação geométrica dos números reais 63
Figura 21 – Exemplos de intervalos 64
Figura 22 – Interpretação geométrica dos problemas 13 e 14 67
Figura 23 – Resposta do aluno. Atividade 1, questão 4 74
Figura 24 – Resposta do aluno. Atividade 2, questão 1 74
Figura 25 – Resposta do aluno. Atividade 2, questão 2 74
Figura 26 – Resposta do aluno. Atividade 2, questão 3 75
Figura 27 – Resposta do aluno. Atividade 3, questão 3 75
Figura 28 – Lado e altura do triângulo equilátero 76
Figura 29 – Diâmetro e comprimento da circunferência 77
Quadro 1 – Parte das questões da atividade 1 71
Quadro 2 – Parte das questões da atividade 2 72

Quadro 3 – Parte das questões da atividade 3 73
Quadro 4 – Esquema para classificação dos números reais 77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
YBC	Yale Babylonian Collection

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	15
1	**IDEIA DE NÚMERO REAL**	17
1.1	**Evolução histórica da ideia de número e surgimento do número real**	17
1.2	**O ensino dos números reais e sua aplicabilidade**	19
2	**PRIMEIROS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS**	20
2.1	**Matemática Babilônica e Egípcia**	20
2.2	**Matemática Grega**	24
2.2.1	Teoria das Proporções de Eudoxo	25
2.2.2	A incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado com a unidade	27
2.2.3	Razão áurea	30
2.3	**Alguns resultados com números racionais e irracionais: Do final da Matemática Grega até o século XVIII**	32
2.3.1	Cálculo de Pi, por Arquimedes	32
2.3.2	Aproximações para a raiz quadrada, de Heron	34
2.3.3	A Trigonometria, por Ptolomeu	35
2.3.4	Matemática Islâmica e Leonardo di Pisa	37
2.3.5	Exemplos do Renascimento	38
2.3.6	A Matemática nos séculos XVII e XVIII	39
3	**OUTROS RESULTADOS SOBRE RACIONAIS E IRRACIONAIS**	41
3.1	**Casos clássicos de números irracionais**	41
3.2	**Teorema das Raízes Racionais**	45
3.3	**Representação Decimal**	47
3.4	**Classificação dos números irracionais**	50
3.5	**Aproximação de irracionais por racionais**	52
4	**O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS**	56
4.1	**A matemática no século XIX**	56
4.2	**Cortes de Dedekind**	57
4.2.1	A definição de número real, a relação de ordem e a adição em $\mathbb{R}$	59
4.3	**O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo**	62
4.3.1	Representação Geométrica	63
4.4	**Densidade dos racionais e irracionais em $\mathbb{R}$**	65

5 **ENSINO DOS NÚMEROS REAIS** 69
5.1 **Características acerca do ensino** 69
5.2 **Aplicação em sala de aula** 70
5.2.1 Apresentação, objetivo geral, metodologia 70
5.2.2 Descrição e objetivos das atividades 71
5.2.3 Resultados observados 73
5.3 **Outras sugestões** 76
CONCLUSÃO 78
REFERÊNCIAS 79
APÊNDICE 1 81
APÊNDICE 2 – Fichas de atividades dos alunos 84

INTRODUÇÃO

O tema desta dissertação é “Números Reais e Ensino Médio”. Quando se fala em números reais, subentendem-se seus subconjuntos de números: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Este trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica sobre números reais e história da matemática, além de uma proposta de atividades para o ensino dos números reais no 1º ano do Ensino Médio. É direcionado para estudantes de graduação, professores de Matemática do Ensino Básico e demais interessados no tema.

No Ensino Básico, os números reais relacionam-se com outros diversos conceitos de Matemática e também de Ciências da Natureza. Além disso, são relevantes para o próprio desenvolvimento da Matemática, uma vez que foram parte de seu processo de formalização, abstração e de resposta a vários problemas. Temos por objetivo fazer um estudo sobre os números reais voltado para a Educação Básica. Esta pesquisa se diferencia por mostrar fatos históricos e alguns recursos teóricos da Matemática relacionados ao tema.

Abordaremos momentos da História da Matemática que pensamos terem sido importantes à construção do conceito de número real. Traremos resultados relevantes sobre números racionais e irracionais e formulação do conjunto dos reais. Também apresentaremos discussões sobre o Ensino e uma proposta de atividade de sala de aula.

Pensamos que essa forma de desenvolvimento pode contribuir na pesquisa. A História da Matemática permite uma melhor interpretação da Matemática através da análise da evolução dos conceitos ao longo do tempo. Os resultados relevantes em aritmética e análise têm relação direta com o conceito de número real. E as discussões sobre o Ensino motivam uma melhor abordagem em sala de aula.

A importância desta pesquisa se reflete em incentivar discussão acerca de um tema rico, que envolve conteúdos de diferentes áreas, como Matemática Pura, Geometria e História da Matemática, e que pode proporcionar visão mais ampla ao professor e ao aluno.

Este trabalho insere-se na área de Ensino de Matemática. Procuraremos desenvolver os tópicos teóricos de números reais com o mínimo de rigor e apresentar os fatos históricos de forma real e coerente; e em conexão com a prática docente. Vamos basear nossa reflexão e nossa proposta de ensino nas orientações dos documentos oficiais de Educação no Brasil e de outros autores das áreas de Ensino (e História) de

Matemática. Nosso foco será o número real e não aprofundaremos a discussão sobre o conceito abstrato de número, pois se distancia de nossa proposta.

Adotamos como metodologia a pesquisa bibliográfica. Para a fundamentação teórica em Matemática, os autores considerados são Antônio Caminha Muniz Neto, Elon Lages Lima, Geraldo Ávila, Ivan Niven, além de algumas notas do professor Ion Moutinho. Em História, Asger Aaboe, Carl Boyer e Tatiana Roque. Para a fundamentação em Ensino, são consideradas bases de documentos oficiais do Brasil recentes. Os documentos são os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 2000), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), e outros.

O trabalho está dividido em 5 capítulos. O 1º capítulo inicia a discussão de modo geral, falando sobre motivações, a ideia de número real e seu ensino. Do 2º ao 4º capítulo, são apresentados conceitos teóricos sobre os números reais. O 2º capítulo traz alguns momentos da história da matemática em que aparecem números reais, desde a antiguidade até o século XVIII. O 3º capítulo traz generalizações importantes e outros resultados acerca dos racionais e dos irracionais e o 4º trata do Conjunto dos Números Reais. No 5º capítulo, são discutidas questões específicas de Ensino de Matemática, ao discorrermos sobre a forma de abordagem e os conteúdos. Haverá também experiência de atividades aplicadas em sala de aula, desenvolvida por nós, contendo: expansões decimais finitas e infinitas, reconhecimento de números irracionais, operações com números reais, noção de densidade e sugestões de outras atividades. Há dois apêndices: no primeiro constam algumas propriedades sobre números inteiros e irracionais, úteis a demonstrações do 2º e 3º capítulos e, no segundo, as atividades apliacadas em sala de aula.

CAPÍTULO 1) IDEIA DE NÚMERO REAL

Neste capítulo, faremos a abordagem inicial de número real a partir de breve discussão histórica e também de alguns aspectos gerais de ensino relacionados com os números reais.

1.1) Evolução histórica da ideia de número e surgimento de número real

Número é um objeto matemático abstrato usado para descrever quantidades e medidas. De acordo com Lima (2013, pág. 29): "números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza." É abstrato pelo fato de um mesmo símbolo expressar quantidades iguais de coisas distintas.

Historicamente, o desenvolvimento do conceito de número real não foi um processo linear. Houve, ao longo do tempo, diferentes perspectivas e contribuições para esse desenvolvimento. Os conjuntos numéricos, como conhecemos hoje, foram estabelecidos no final do século XIX por Cantor, Dedekind e Weierstrass.

A ideia original de número está associada à contagem. Por volta de 3500 a.C, na Babilônia (região atual do Iraque), surgiram, em comum, os primeiros registros de escrita e de Matemática. De acordo com Roque (2012, pág. 2): "as primeiras formas de escrita foram motivadas pela necessidade de se registrarem quantidades (...): contagem do rebanho, insumos relacionados à sobrevivência e à organização da sociedade".

Com o desenvolvimento de sociedades como a dos Babilônios Antigos (2000 a.C – 1600 a.C., Mesopotâmia – atual Iraque) e dos Egípcios Antigos (3100 a.C. – 30 a.C.) também se tornava mais complexa a organização dessas sociedades, requerendo quantificações, registros de bens, medições etc. Isso incluía a escrita (já em tabletes de argila e papiros) e regras para essa organização. Esses povos tinham métodos de contagem e medida. É importante destacar que tanto os Babilônios quanto os Egípcios Antigos criaram sistemas de numeração, efetuavam as operações fundamentais e trabalhavam, inclusive, com o que hoje sabemos se tratar de números racionais.

Muitas vezes, a Matemática se desenvolveu motivada pela resolução de problemas com natureza prática (ou aplicada). Porém, na Grécia antiga, na época de Euclides, existiu um primeiro processo de formalização e sistematização. Os matemáticos gregos tiveram preocupação em criar uma estrutura lógica coerente, baseada em postulados e axiomas, definições, resultados-base e resultados subsequentes. Os resultados-base viriam a partir dos axiomas, postulados e definições, e todos os resultados deveriam ser verdadeiros, sem que houvesse contradições.

Nesta mesma época, surgiriam os conceitos de razão e proporção para grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Num momento seguinte e com maior frequência, apareceram tentativas para o cálculo aproximado de razões entre grandezas que hoje sabemos ser incomensuráveis, porém estas situações aritméticas (números irracionais e aproximações por racionais) eram resolvidas sem que o resultado final fosse considerado um “número”. Durante muito tempo, apenas os naturais eram tratados como números. Até o século XVIII, os números irracionais eram classificados como “falsos”, “impossíveis” etc.

Entre os séculos II a.C e XVIII, outros povos da Europa, hindus, chineses, árabes, dentre outros, contribuiriam para o desenvolvimento da Matemática. Pouco a pouco, surgiriam outros conceitos como trigonometria, equações lineares, sistema de numeração hindu, álgebra, a ideia de números negativos, equações de 2º e 3º grau, frações decimais, logaritmos, curvas, derivadas e séries. Também a notação foi se modificando.

O século XVIII foi um período de avanços e criatividade na Matemática. Em 1758, com Kästner (1719 – 1800), houve a ideia de um agrupamento contendo números naturais, negativos, frações, números decimais e irracionais. Segundo Roque (2012, p. 238) A partir do século XIX, a noção de rigor matemático assumiria nova característica, principalmente sendo relacionado à sistematização das bases da Matemática (formalização) e sua abstração, e surgiria a definição de número real.

Segundo Courant e Robbins (1941, pág. 61), a expansão do conceito de número serve a maior campo de problemas matemáticos:

> “Devemos estender amplamente o conceito original de número, considerado como número natural, para criar um instrumento suficientemente poderoso para as necessidades da prática e da teoria. Em uma longa e hesitante evolução, o zero, os inteiros negativos e as frações foram gradualmente aceitos no mesmo nível de importância que os inteiros positivos (...) Porém, para adquirir completa liberdade em operações algébricas, devemos ir além e incluir quantidades irracionais e complexas no conceito de número.”

O que inclui números reais, que serão objeto deste trabalho.

1.2) O ensino dos números reais e sua aplicabilidade

Entendemos que a importância do estudo dos números reais no Ensino Básico se deve ao fato de serem um pré-requisito a outros diversos conceitos da área da Matemática. “A maior parte dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio está vinculada a modelos matemáticos de natureza contínua. Os números reais e os espaços geométricos: reta, plano e espaço tridimensional.” (Orientações Curriculares Nacionais. BRASIL, 2006, p. 94).

Além disso, são uma ferramenta para estimativa de resultados em componentes curriculares da área de Ciências da Natureza.

> “O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível. (...) Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção da modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento.”
> (PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais ; Ensino Médio. BRASIL, 2000. Pág. 44)

CAPÍTULO 2) PRIMEIROS NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

Neste capítulo, vamos apresentar alguns fatos relacionados aos números reais em determinados momentos da História da Matemática. Falaremos sobre alguns registros das Matemáticas Babilônica, Egípcia e também características e conceitos da Matemática Grega euclideana. Estes períodos contêm os primeiros indícios do que hoje entendemos como números racionais e irracionais. Comentaremos ainda sobre alguns resultados do século III a.C (pós Euclides) até o século XVIII, que estão relacionados à evolução dos conceitos da Matemática, em torno da ideia de número real.

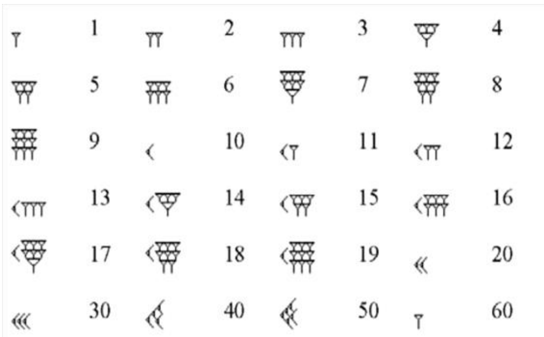
2.1) Matemática Babilônica e Egípcia

De acordo com Roque (2012, p. 6), durante o período Babilônico Antigo, o que se fazia em matemática estava relacionado a problemas práticos como mensurações e contagens. O conhecimento atual sobre esta época é derivado de tabletes de argila, encontrados durante escavações no século XIX, e mostram a existência de um sistema de numeração, medições de polígonos e técnicas para cálculos de áreas e volumes.

Esse sistema de numeração era posicional de base 60 (sexagesimal), com símbolos para os algarismos 1 a 9 e para as dezenas 10, 20, 30, 40 e 50. Os babilônios sabiam somar, subtrair, multiplicar, dividir e calcular raiz quadrada. [1]

Não há símbolo para representar frações. Porém, vemos um antecedente para a ideia de número racional, uma vez que a unidade também poderia ser subdividida e as partes eram contadas.

Figura 1 – Sistema de numeração babilônico



Fonte - Roque (2012, p. 8).

[1] Nota: O sistema de numeração também tinha ambiguidades, como o mesmo símbolo para representar o 1 e o 60 e a ausência de um marcador para a unidade (“vírgula” atual). Porém, poderiam se distinguir por sua posição ou dado o contexto de um problema.

Por exemplo, o número $79{,}5$ teria, no sistema de numeração babilônico, representação equivalente a $1;19{,}30$ em base 60. [2] Pois:

$$79 = 1 \cdot 60 + 19 \quad \text{e}$$

$$0{,}5 = \frac{30}{60} \; .$$

É importante considerarmos o registro do tablete YBC (Yale Babylonian Collection) 7289, também do período Babilônico Antigo, chamado "Diagonal do Quadrado". Nele, há a indicação do número, que escrito em notação atual e base 60 é $1, 24; 51; 10$, para a obtenção da medida da diagonal de um quadrado.

Figura 2 – Diagonal do quadrado – Babilônios antigos

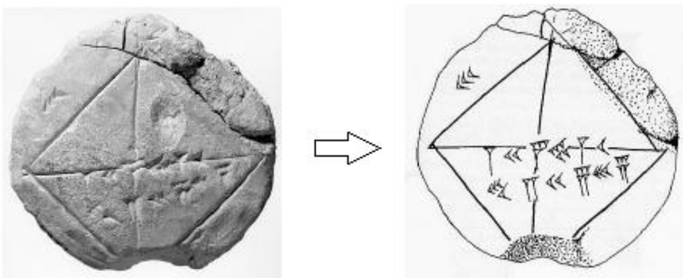


Figura 2 – Roque (2012, p. 16).

Este valor, em base 10, corresponde a:

$$1 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$$

$$= 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} = \frac{305470}{216000} = 1{,}41421\overline{296}$$

que é um número racional muito próximo à raiz quadrada de 2, com 5 casas decimais exatas.

Também foram encontrados tabletes de argila datados de 300 a.C., época do império babilônico selêucida, contendo técnicas matemáticas sofisticadas e desenvolvimento de astronomia. Além disso, mostram que o conhecimento do período babilônico antigo não foi perdido. [21]

Na "Matemática Egípcia" da Idade Antiga, o que se fazia estava relacionado também a problemas práticos: necessidades administrativas, contagem, medições de terras etc. O conhecimento atual é derivado de textos como o papiro de Ahmes,

[2] A vírgula separa a parte inteira da parte fracionária. Ponto e vírgula separam as ordens.

(aproximadamente 1650 a.C) e o papiro de Moscou (aproximadamente 1850 a.C.). Eles são registros que contém problemas e soluções. Esses problemas eram relacionados a regras de três, frações, progressões, equações simples, cálculo de áreas e volumes. Mas os egípcios não usavam fórmulas e sua matemática era por regras; receitas.

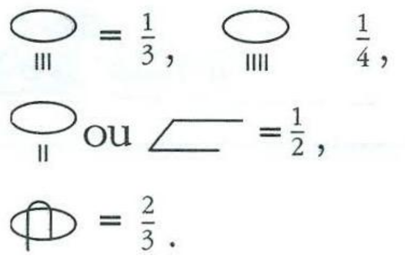
Havia um sistema de numeração aditivo. Nesse sistema, há símbolos correspondentes aos números inteiros 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000. Há símbolos correspondentes às frações unitárias 1/2, 1/3, 1/4 e também 2/3 e outras frações, menos comuns.

Figura 3 – Sistema de numeração egípcio

1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
traço	osso de calcanhar	laço	flor de lótus	dedo indicador	girino	homem com as mãos para cima

Fonte: Bianchini (2004, p. 2).

Figura 4 – Frações egípcias



Fonte: Roque (2012, p. 27).

Os egípcios efetuavam operações equivalentes a adição, multiplicação e divisão. As frações apareciam como uma parte do resultado da operação de divisão.

Por exemplo, a divisão de 17 por 6, em linguagem atual. Toma-se o 6 como referência e são contados múltiplos, metades, terças partes etc., até que se totalize 17.

$$1 \text{ --- } 6$$

$$2 \text{ --- } 12$$

$$\frac{1}{2} \text{ --- } 3$$

$$\frac{1}{3} \text{ --- } 2$$

Temos $17 = 12 + 3 + 2$. Assim:

$$17:6\ (\text{ou}\ \tfrac{17}{6}) = 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ .$$

Tanto na Matemática Babilônica quanto na Egípcia, há registros em tabletes/papiros que mostram que essas civilizações possuíam procedimentos para cálculos como o comprimento da circunferência, área do círculo, volume de cilindros. É importante mencionar que o número pi ainda não era conhecido. A descoberta das grandezas incomensuráveis teria ocorrido por volta de 400 a.C. (ROQUE, 2012, p.61).

O tablete YBC 7302 mostra que os babilônios possuíam um procedimento equivalente à relação $S = \frac{c^2}{12}$ para circunferências, onde S é a área e c é o comprimento (ROQUE, 2012, p.37). Desenvolvendo essa igualdade com as relações atuais e sendo a uma aproximação para o valor de π, obtemos:

$$ar^2 = \frac{(2 \cdot a \cdot r)^2}{12}$$

Ou ainda

$$12 \cdot a \cdot r^2 = 4 \cdot a^2 \cdot r^2$$

$$12 \cdot a - 4 \cdot a^2 = 0$$

$$4 \cdot a \cdot (3 - a) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3.$$

Nos tabletes babilônicos, há também resultados aproximando pi por $3\frac{1}{8}$.

No Papiro de Ahmes, os egípcios determinavam a área de uma circunferência considerando como o valor próximo à área de um quadrado cujo lado era igual a $8/9$ do diâmetro dessa circunferência (ROQUE, 2012, p.39). Em linguagem atual, temos $S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, onde S é a área e d é o diâmetro. Novamente desenvolvendo uma igualdade em termos atuais (com a sendo também uma aproximação para o valor de π):

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

$$a \cdot r^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot (2 \cdot r)\right)^2$$

$$a \cdot r^2 = \frac{64}{81} \cdot 4 \cdot r^2 \ \Rightarrow \ a = \frac{256}{81} \cong 3{,}16$$

Apesar de não haver a formalidade e a notação atuais, não se pode desprezar o conhecimento de Matemática que povos como os antigos babilônios e egípcios tinham. Existiam regras e resultados interessantes. Os babilônios possuíam um procedimento para resolver problemas que hoje modelamos com equações de segundo grau, e os egípcios atingiram desenvolvimento notável em geometria métrica.

As frações apareciam nas Matemáticas egípcia e babilônica (e esses sistemas também seriam utilizados por gregos e romanos antigos). Os egípcios tinham uma aritmética para a soma de frações unitárias, que usavam em alguns casos, e o sistema de numeração babilônico, embora não tivesse símbolo especial, admitia representação para números inteiros e partes desses números.

2.2) Matemática grega

Matemática grega é o período da História da Matemática compreendido entre os séculos VII a.C. e III d.C.. Pode ser dividida em 3 fases: pré Euclides, euclideana e pós Euclides.

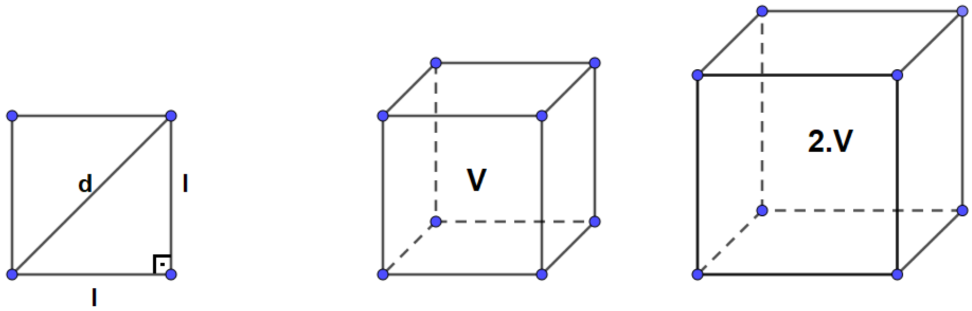
Segundo Roque (2012, p. 50), na primeira fase, Tales (~620 a.C – 550 a.C.) e Pitágoras (~570 a.C – 490 a.C) são os principais matemáticos. Tales também foi astrônomo e filósofo. Atribuem-se a ele resultados de geometria plana como a congruência de ângulos do triângulo isósceles e a proporcionalidade de segmentos de reta correspondentes em um feixe de retas paralelas. O conhecimento disponível sobre sua vida e obra é muito pouco, e derivado de comentários em livros posteriores. Pitágoras fundou uma escola que estudava filosofia e ciência, porém com características místicas e religiosas. Produziram-se conceitos e resultados importantes como números pares, e ímpares, primos e compostos, e algumas das primeiras demonstrações em Geometria. Para os pitagóricos, número era a essência de tudo. [3]

Até a época de Pitágoras, acreditava-se que duas grandezas (segmentos de reta, áreas, volumes ou outras grandezas escalares) do mesmo tipo sempre pudessem ser medidas, ao mesmo tempo, com uma unidade comum, ou seja, seriam comensuráveis. Entretanto, os próprios pitagóricos teriam percebido que esse resultado não seria possível para a diagonal e o lado do quadrado.

[3] Há evidências de que o “Teorema de Pitágoras” já existia antes mesmo da escola pitagórica, porém num contexto aritmético.

Os gregos buscaram respostas a problemas como medir, rigorosamente, a diagonal de um quadrado, a aresta de um cubo com volume dobrado e a área de um círculo.

Figura 5 – Diagonal do quadrado e duplicação do cubo



Fonte: o autor, 2020.

De acordo com Roque (2012, p. 50), a partir do final do século V a.C., começaria a existir um novo tipo de pensamento, influenciado pelo contexto grego da época, em que surgia a *polis* - a cidade-estado grega. Esse pensamento, desenvolvido por Platão e Aristóteles, era baseado na argumentação e na lógica, sendo os critérios de uma verdade estabelecidos por coerência.

Os Elementos, de Euclides (300 a.C.), é o texto matemático completo mais antigo de que se tem conhecimento e recebeu essa influência do pensamento grego. Nele, a Matemática passaria por um processo de abstração e formalização. Está dividido em 13 livros (na ordem): 6 de geometria plana, 4 de aritmética e 3 de geometria espacial. Pela primeira vez a geometria estaria separada da aritmética.

2.2.1) Teoria das Proporções de Eudoxo

No livro V de *Os Elementos*, constam a teoria das proporções de Eudoxo, com definições relacionadas a razão e proporção. Essa teoria não classificava expressamente números em racionais ou irracionais, mas os identificou corretamente. Aparece em termos de grandezas (homogêneas, conforme visto em 2.2) e tem caráter geométrico. Nesta época, apenas os naturais eram considerados números. Traremos as definições (terceira, quinta e sexta) dessa teoria conforme constam em Ávila (2006, p. 53) e Roque (2012, p. 81). A terceira definição estabelece razão entre duas grandezas, a quinta é sobre proporção entre quatro grandezas e a sexta é sobre proporção como uma igualdade entre razões. Vejamos:

3ª Definição) “Razão é uma relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo.”

5ª definição) “Sejam A, B, C e D quatro grandezas do mesmo tipo. Dizemos que elas são proporcionais (na notação atual $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$) se para todo par de números naturais m e n, temos um dos casos abaixo:

$$n\cdot A<m\cdot B \text{ então } n\cdot C<m\cdot D$$
$$n\cdot A=m\cdot B \text{ então } n\cdot C=m\cdot D$$
$$n\cdot A>m\cdot B \text{ então } n\cdot C>m\cdot D\text{”}$$

6ª definição) “Grandezas que possuem a mesma razão são chamadas proporcionais.”

As definições se aplicam a pares de grandezas (razões) A e B, *sendo comensuráveis ou incomensuráveis*. Então, Eudoxo separou pares de números naturais em 3 classes, em relação à razão $\frac{A}{B}$: os que são maiores do que essa razão, os que são iguais e os que são menores.

Na linguagem atual, temos:

$$\frac{A}{B}<\frac{m}{n}$$
$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$$
$$\frac{A}{B}>\frac{m}{n}$$

E como A e B podem ser comensuráveis ou não, dessa forma, ficam determinados números racionais e irracionais.

Eudoxo encontrou a solução para o problema da incomensurabilidade (p. 23), mas sem estender o conceito de número. Trabalhou, corretamente, com razões e desigualdade entre razões. Segundo Lima (2009, p. 7):

> “Os pitagóricos não conseguiram resolver o impasse, uma saída para o qual foi fornecida um século depois por Eudoxo. Em vez de solucionar o problema estendendo o conceito de número, criando os números reais, como se tem hoje,

> ele encontrou uma solução diferente, seguida pelos matemáticos gregos posteriores. Eudoxo manteve o princípio de que a palavra "número" significa número natural mas teve de desistir de medir as grandezas, isto é, de exprimir por *meio de um número* o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade adotada.
>
> Para comparar duas grandezas da mesma espécie, em vez de número, Eudoxo adotou o conceito de "razão entre duas grandezas". Claro, hoje em dia a razão entre duas grandezas é simplesmente a medida de uma delas quando se toma a outra como unidade, ou seja, é um número real. Mas não era assim naquela época.
>
> Eudoxo desenvolveu a teoria das proporções de forma logicamente impecável (...). As definições básicas são as de igualdade e desigualdade entre duas razões."

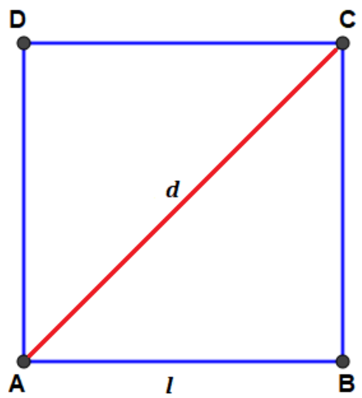
2.2.2) A incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado com a unidade

Discutiremos a questão da diagonal do quadrado. Inicialmente, com base em Roque (2012, p. 63), provaremos a incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado com a unidade. Em seguida, faremos o cálculo aritmético da razão entre esses segmentos.

a) A incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado com a unidade

Demonstração:
Seja $ABCD$ um quadrado com diagonal $d = \overline{AC}$ e lado $l = \overline{AB}$.

Figura 6 - Diagonal do quadrado

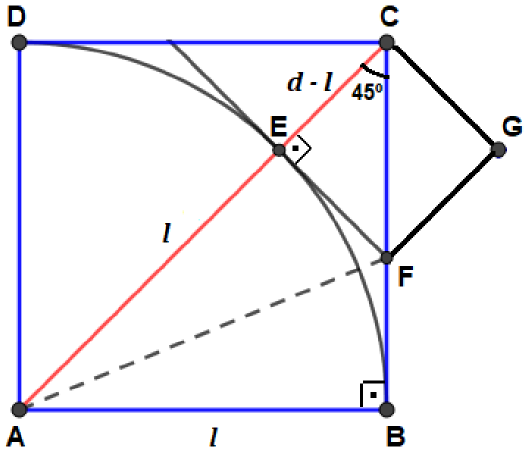


Fonte: o autor, 2020.

Vamos supor, por absurdo, que a diagonal e o lado do quadrado sejam comensuráveis com certo segmento u, ou seja, após uma quantidade finita de subtrações recíprocas entre d e l, não se chega a um segmento de reta menor do que u.

Consideremos um arco de circunferência com centro em A e raio $AB = l$, que intercepta a diagonal AC no ponto E. Consideremos também a reta $\overleftrightarrow{EF}$ tangente ao arco nesse ponto.

Figura 7 – Diagonal do quadrado - Etapa 1



Fonte: o autor, 2020.

i) O triângulo AFB é congruente ao triângulo AFE pelo caso cateto-hipotenusa. Logo, $\overline{EF} = \overline{BF}$.

ii) O triângulo CEF é retângulo. Como $m(\widehat{ECF}) = 45°$, teremos $m(\widehat{EFC}) = 45°$ também. Logo, o triângulo CEF é isósceles, com $\overline{CE} = \overline{EF} = d - l$.

iii) Mas $\overline{EF} = \overline{BF}$. Então, como $\overline{EF} = d - l$, teremos:

$\overline{BF} = d - l$ e

$\overline{CF} = l - (d - l) = 2l - d$

iv) Construindo um quadrado Q_1 $CEFG$, seu lado l_1 e sua diagonal d_1 medem, respectivamente:

$$l_1 = \overline{EF} = d - l \quad \text{e}$$

$$d_1 = \overline{CF} = 2l - d.$$

Vamos provar, então, que os segmentos l_1 e d_1 são menores do que a metade dos primeiros, l e d, respectivamente, ou seja, $l_1 < \frac{l}{2}$ e $d_1 < \frac{d}{2}$. Ou também:

$$d - l < \frac{l}{2}$$

$$2l - d < \frac{d}{2}.$$

No triângulo retângulo CEF, valem as relações:

$d - l < 2 \cdot l - d$ (cateto menor do que hipotenusa)

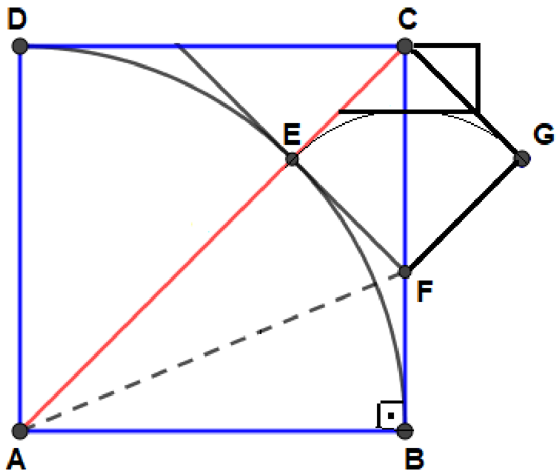
$2l - d < 2 \cdot (d - l)$ (desigualdade triangular)

Na primeira desigualdade, obtemos $2d < 3l$. Ou ainda, $2d - 2l < l$. Logo, $d - l < \frac{l}{2}$.

Na segunda desigualdade, obtemos $4l < 3d$. Ou $4l - 2d < d$. Logo, $2l - d < \frac{d}{2}$.

A construção que passou do quadrado original ABCD ao quadrado Q_1 CEFG pode ser repetida, chegando-se a um quadrado Q_2 de lado l_2 e diagonal d_2, que serão menores do que a metade de l_1 e a metade de d_1.

Figura 8 – Diagonal do quadrado - Etapa 2



Fonte: o autor, 2020.

Repetindo-se esta construção outras vezes, pela propriedade 5 do Apêndice 1, após alguma quantidade de etapas, o lado e diagonal de um quadrado Q_n poderão se tornar menores do que qualquer medida dada, mesmo que seja muito pequena, ou menor do que u. Contradição. ■

b) Cálculo aritmético da razão entre a diagonal e o lado do quadrado

b.1) Por semelhança de triângulos

Na Figura 7, os triângulos ABC e CEF são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Os lados homólogos são proporcionais. Assim:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CE}} \text{ Ou seja: } \frac{d}{l} = \frac{2l-d}{d-l}\ .$$

A proporção acima admite a propriedade de se manterem, na mesma razão que a determina, a soma dos numeradores para a soma dos denominadores. [4]

$$\frac{d}{l} = \frac{2l-d}{d-l} = \frac{d+2l-d}{l+(d-l)} = \frac{2l}{d}$$

Sendo $\frac{d}{l} = r$, vem $r = \frac{2}{r}$. Logo, $r^2 = 2$. Portanto $r = \sqrt{2}$ e $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$. [5]

b.2) Pelo Teorema de Pitágoras

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos: $d^2 = l^2 + l^2$, o que resulta $d^2 = 2 \cdot l^2$. Logo, $\frac{d^2}{l^2} = 2$ e $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$.

2.2.3) Razão áurea

A razão áurea é uma constante matemática presente na arquitetura e em fenômenos naturais, caracterizando a harmonia de formas geométricas. Seus primeiros indícios históricos aparecem na construção do Partenon (440 a.C.), na Grécia, e no livro VI de Euclides. Vamos determinar seu valor usando notação moderna.

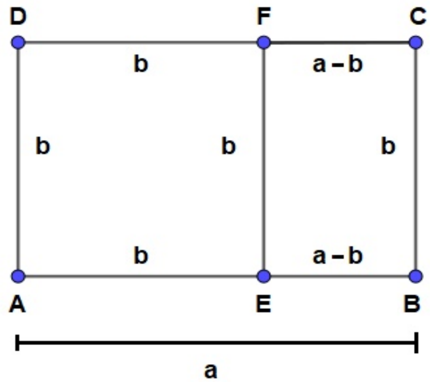
Um retângulo áureo é um exemplo cujas medidas estão nessa razão. É definido da seguinte forma: quando dele se retira um quadrado cujo lado é o menor dos lados do retângulo, o retângulo que sobra é semelhante ao original.

---

[4] No quadrado Q_2, a diagonal mede $3 \cdot d - 4 \cdot l$ e o lado, $3 \cdot l - 2 \cdot d$. Estes valores, respectivamente, formam uma razão que mantém a proporção anterior.

[5] O problema b.1 e sua solução são totalmente originais deste texto.

Figura 9 – Retângulo de ouro



Fonte: o autor, 2020.

A razão $\frac{a}{b}$ entre a base a e a altura b é a razão áurea. Vamos representá-la por r e calcular este valor.

Solução: Por definição, o retângulo $ABCD$ é semelhante ao retângulo $BCFE$. Então, os lados homólogos são proporcionais e temos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \ .$$

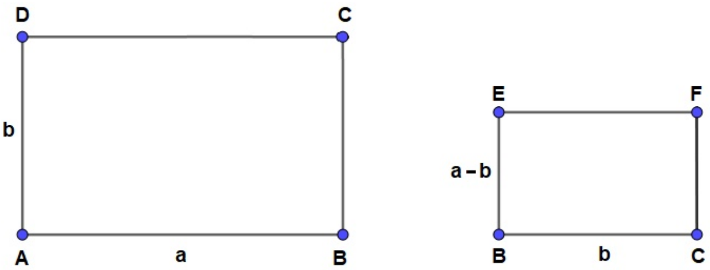
Podemos escrever a igualdade acima como:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{b}{a} \ .$$

Isso é o mesmo que $\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{b}{a}$. Sendo $\frac{a}{b} = r$, com $r > 0$, temos $r - 1 = \frac{1}{r}$, o que nos dá $r^2 - r - 1 = 0$. Portanto, $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. No apêndice, veremos a justificativa de que r é irracional.

É importante observar ainda que a razão entre a base e a altura é a mesma que entre os lados homólogos, ou razão de semelhança. Ou seja, os retângulos $ABCD$ e $BCFE$ são semelhantes também pela razão r.

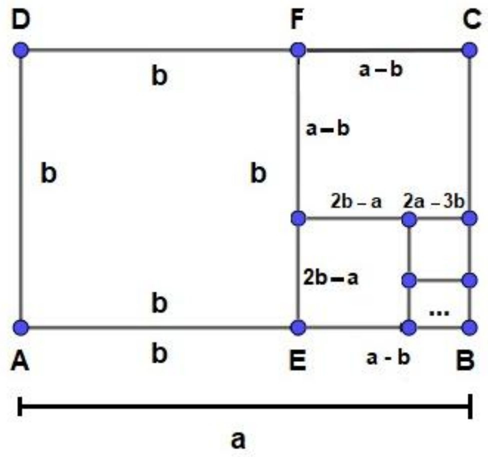
Figura 10 – Retângulos semelhantes



Fonte: o autor, 2020.

Além disso, num processo parecido com o da diagonal e do lado do quadrado, esses dois segmentos a e b também serão incomensuráveis. O par de segmentos irá gerar, infinitamente, polígonos menores na mesma proporção.

Figura 11 – Retângulo de ouro. Etapas seguintes.



Fonte: adaptado de Ávila (2006, p. 51).

2.3) Alguns resultados com números racionais e irracionais: Do final da Matemática Grega até o século XVIII

Após a segunda fase da Matemática grega até o século XVIII, a Matemática desenvolveu seus conceitos sem foco predominantemente teórico nem formalização sobre os números. Entretanto, os chamados "números reais" apareceram em contextos diversos. Veremos alguns casos de interesse, brevemente.

2.3.1) Cálculo de Pi, por Arquimedes

Diferentemente da época de Euclides, na terceira fase do período grego a matemática aplicada foi predominante. De acordo com Boyer (2012, p. 132): "De Hiparco (~190 a.C. – 120 a.C.) a Ptolomeu (~100 – 170) houve progressos na astronomia e geografia, óptica e mecânica, mas nenhum desenvolvimento significativo na matemática, além da trigonometria."

De acordo com Roque (2012, pág. 89), Euclides demonstrou que a área do círculo e o quadrado de seu raio eram proporcionais. (Círculos estão entre si como seus diâmetros). Por volta de 250 a.C., em *A medida do círculo*, Arquimedes (~290 a.C. –

210 a.C.) inicialmente provou que um círculo era equivalente (mesma área) a um triângulo retângulo cujos catetos mediam, respectivamente, o comprimento da circunferência e o raio deste círculo (ibid, p. 115), ou seja:

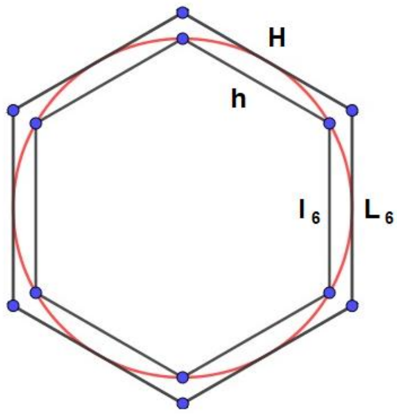
$$A = \frac{1}{2} \cdot C \cdot r$$

Isso nos dá:

$$\frac{A}{r^2} = \frac{C}{2 \cdot r}.$$

Portanto, tal razão é a mesma que entre o comprimento e o diâmetro da circunferência. Em seguida, Arquimedes buscou seu valor com certa precisão, usando o método da exaustão, de Eudoxo. Partiu de uma circunferência e dois hexágonos, um inscrito (h) e outro circunscrito (H) a ela, e situou seu comprimento C entre os perímetros do hexágono inscrito e circunscrito à circunferência, $6 \cdot l_6$ e $6 \cdot L_6$, respectivamente. (ROQUE, 2012, p. 117):

Figura 12 – Hexágonos inscrito e circunscrito à circunferência



Fonte: o autor, 2020.

Podemos representar com a desigualdade: $6 \cdot l_6 < C < 6 \cdot L_6$.

Em seguida, dobrou os números de lados desses polígonos: 12, 24, 48, até 96, o que tornaria os valores dos perímetros mais próximos ao comprimento da circunferência.

$$12 \cdot l_{12} < C < 12 \cdot L_{12}$$

$$24 \cdot l_{24} < C < 24 \cdot L_{24}$$

$$\ldots$$

Assim, Arquimedes obteve a aproximação:

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{C}{2 \cdot r} < 3 + \frac{10}{70} \ .$$

Sua estimativa por excesso é $\frac{C}{2 \cdot r} = \frac{22}{7}$, comumente utilizada. Além disso, $\frac{C}{2 \cdot r} \cong 3{,}14$, com duas casas decimais exatas. É importante lembrar que a notação π viria muito mais tarde, em 1737, com Euler.

2.3.2) Aproximações para a raiz quadrada, de Heron.

Por volta do ano 60 d.C., Heron, no seu livro *Métricas*, utilizou uma extensão do método babilônico para calcular valores aproximados de raízes quadradas irracionais. Os babilônios antigos calculavam aproximações para a raiz quadrada de um número k determinando o lado de um quadrado cuja área fosse igual a este número. Usavam um procedimento equivalente a

$$\sqrt{k} \cong \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{k}{a}\right),$$

onde a seria o quadrado perfeito mais próximo de k. Mas este método não utilizava sequências. Heron utilizou-o, com a diferença de introduzir a utilização de etapas sucessivas. Aumentando-se o número de etapas, melhorava-se a aproximação, o que se trata exatamente da recorrência:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{k}{a_n}\right).$$

Passando-se ao limite, obtemos $\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{k}$. Vale lembrar que este é um dos registros mais antigos de recorrência. Este procedimento corresponde ao que conhecemos hoje como método de Newton para a obtenção da raiz de uma função, aplicado ao cálculo de raízes quadradas:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vejamos: a função $f(x) = x^2 - k$, onde $\sqrt{k}$ será sua raiz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - k}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + k}{2x_n} = \frac{x_n^2 + k}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right).$$

2.3.3) A Trigonometria, por Ptolomeu

No século II, Ptolomeu escreveu o livro *Almagesto* (palavra de origem árabe que significa “O maior”) ou *Coleção Matemática*. Alguns de seus conceitos são atribuídos a Hiparco, que é considerado o fundador da Trigonometria. Essa “área” da Geometria surgiu para responder a problemas de astronomia, geografia, navegação e de cálculo do tempo. Segundo Aaboe (2002, p. 129), no livro, entre outros resultados, há a construção de uma tabela com arcos e medidas (aproximadas) de cordas formadas por estes arcos numa circunferência de raio determinado.

Figura 13 – Tábua ou tabela de cordas

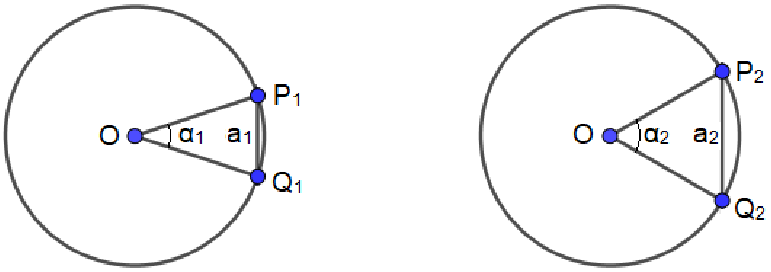
Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Tábua de Cordas		
περιφε-ρειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcos	cordas	sexagésimos
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

Fonte: Aaboe (1984, p. 132).

Exemplo:

Cada ângulo α_i determina, numa circunferência, um comprimento de corda a_i, com $1 \leq i \leq n;\ i, n \in \mathbb{N}$.

Figura 14 – Ângulos e cordas na circunferência

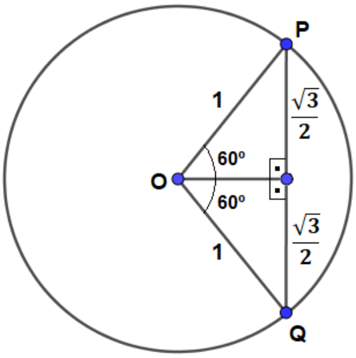


Fonte: o autor, 2020.

A ideia é próxima à do seno atual, mas não igual, pois a corda de um arco corresponde exatamente ao dobro do seno da metade do ângulo, proporcionalmente ao raio.

Exemplo: Consideremos uma circunferência de raio 1. Obtemos:

Figura 15 – Corda versus seno na circunferência



Fonte: o autor, 2020.

- corda de $120°\ = \sqrt{3}$ unidades.
- $\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Nessa tabela, os arcos estão na primeira coluna, começando em $1/2\,°$ e terminando em $180°$, variando de $1/2\,°$ em $1/2\,°$. A segunda coluna tem as medidas das cordas em números sexagesimais e a terceira coluna contém valores para interpolações. Quase todas as medidas das cordas são números irracionais aproximados por racionais.

Segundo Aaboe (2002, p. 131), Ptolomeu obteve, inicialmente, cordas dos arcos de 72°, 36°, 60°, 90° e 120°, que são possíveis de se calcular via teorema de Pitágoras. E propôs que cordas formadas por soma ou diferença de arcos poderiam ser obtidas a partir das cordas originais desses arcos, o que equivale, atualmente, ao seno e ao cosseno da soma ou da diferença de ângulos.

Então, calculou cordas de $12°$, fazendo $72° - 60°$. "Invertendo" o raciocínio, sendo possível calcular a corda do dobro de um ângulo, também seria possível calcular a corda da metade desse ângulo. E obteve cordas de $6°$, $3°$ e $3/2\,°$. Para chegar a $1/2\,°$, calculou fazendo a terça parte de $3/2\,°$. Todos os demais ângulos da tabela podem ser obtidos por combinações dos anteriores.

No século V, os hindus passaram a trabalhar com a semicorda, um conceito mais próximo ao seno atual. O matemático Aryabhata (477 – 550) elaborou tabelas contendo medidas de semicordas de arcos, além de sugerir a aproximação $\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$ para o número π. A matemática hindu trouxe grandes contribuições à aritmética, à geometria e à álgebra, principalmente no período 400 – 1600.

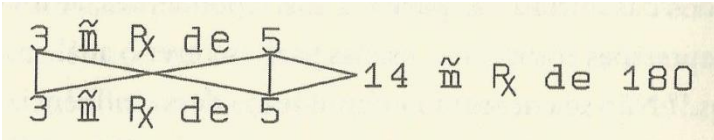
2.3.4) Matemática Islâmica e Leonardo di Pisa

De acordo com Roque (2012, p. 148), "matemática islâmica" é um período que compreende a teoria e a prática matemática desenvolvidas em regiões onde a religião muçulmana era predominante (Oriente Médio, Paquistão, o norte da África e península Ibérica), de 750 a 1450. O matemático mais conhecido desse período foi o árabe Mohammed ibn Musa Al-Khwarizmi (780 – 850), que escreveu obras como *De numero indorum* ou *Sobre a arte indu de calcular*, onde fez exposição completa do sistema de numeração indu, e *Hisob al-jabr wa´l-muqabala* ou *Tratado sobre Cálculo por Restauração e Balanceamento*, que continha definições para objetos da álgebra e métodos para resolução de equações lineares e quadráticas, sendo considerado um dos mais importantes da idade média. O termo árabe *al-jabr* deu origem à palavra álgebra.

Ambos trabalhos seriam decisivos a evolução da matemática a partir de então, com a proposta do sistema de numeração posicional de base 10, o desenvolvimento da álgebra e a introdução de um vocabulário padrão para objetos de problemas, que mais tarde resultaria no uso de símbolos para estes objetos. É importante observar ainda que, em *Hisob al-jabr wa´l-muqabala*, há registros de operações elementares com números racionais e racionais "mistos", como se conhecem hoje, que são muito comuns no Ensino Fundamental. Além disso, embora os árabes rejeitassem soluções e grandezas negativas, conheciam o que atualmente entendemos como regras de sinais para os números. [21]

No século IX, o matemático egípcio Abu Kamil (850 – 930) passou a considerar os números irracionais como soluções de equações, além de ter encontrado relações entre raízes quadradas, como $\sqrt{8}+\sqrt{32}=\sqrt{72}$. Começariam a surgir expressões com radicais. A figura abaixo mostra um exemplo de produto feito pelo matemático Dardi di Pisa, em 1344. O produto é: $\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)=14-\sqrt{180}$.

Figura 16 – Produto com radicais, do ano 1344.



Fonte: Roque [21] (2012, p. 266).

No início do século XIII, os tratados árabes tiveram grande difusão na Itália, principalmente por Leonardo di Pisa (1170 – 1250). Seu trabalho *Liber Abaci* ou *Livro do Cálculo* continha problemas resolvidos e introduziu o sistema de numeração indo-arábico na Europa.

2.3.5) Exemplos no Renascimento

Mais tarde, o Renascimento (período da história da Europa, de meados do século XIV ao final do século XVI) foi caracterizado pela transição do feudalismo para o capitalismo e marcada pelas grandes navegações e por transformações culturais (evolução das artes, da filosofia e das ciências), econômicas e políticas. Entre os principais matemáticos, podemos citar Girolamo Cardano (1501 – 1576), John Napier (1550 – 1617), Christoff Rudolff (1499 – 1545), Niccolo Fontana (Tartaglia) (1500 – 1557) e François Viète (1540 – 1603). Os avanços foram, principalmente, a evolução da álgebra, com a solução de equações cúbicas por meio de radicais e a introdução de novas notações. Também o uso de frações decimais e a criação dos logaritmos.[6]

[6] O simbolismo também seria desenvolvido por matemáticos árabes e italianos entre os séculos XII e XIV e, a partir do século XV, com Cardano, seria utilizado de forma mais sistemática. O símbolo para raiz quadrada foi introduzido pelo alemão Rudolff e seria uma abreviação da letra r. A padronização dos símbolos matemáticos ocorreria a partir do final do século XVII. (ROQUE, 2012, p. 163)

Em 1545, Cardano escreveu *Ars Magna* ou *A Grande Arte*. Utilizando fórmulas de Tartaglia e Del Ferro, para resolver equações cúbicas, encontrou números como:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10} \quad \text{ou} \quad 5+\sqrt{-15} \ \text{ e } \ 5-\sqrt{-15}\ .$$

Assim, os matemáticos se deparavam com números irracionais e, além disso, perceberam a necessidade de lidar com uma fundamentação adequada para números negativos e buscar um artifício para concluir as resoluções de equações cúbicas quando houvesse o cálculo da raiz quadrada de um número negativo. Isso levaria, três séculos mais tarde, à criação do conceito de número complexo.

Em 1579, Viète escreveu *Cânone Matemático*, onde defendia fortemente o uso de frações decimais em vez de sexagesimais (BOYER, 2012, p. 211). Em 1585, essa ideia foi defendida também por Simon Stevin (1548 – 1620) em *O décimo*, que recomendou ainda ordens para os dígitos resultantes do numerador das operações com frações decimais. Surgia a representação decimal (ibid, p. 220).

Em 1614, Napier escreveu *Canône dos Logaritmos*, no qual propôs um método que facilitasse operações e diminuísse erros em cálculos, principalmente com "números grandes", na resolução de problemas (no contexto da época). Nesse livro, havia tabelas com: ângulos, senos dos ângulos, números correspondentes aos senos e regras para obtenção desses números, que foram chamados por Napier de logaritmos. Usando esse método, multiplicações e divisões ficavam reduzidas a adições e subtrações. O trabalho de Napier seria utilizado por astrônomos, navegadores e também comerciantes. Alguns anos depois do trabalho de Napier, Henri Briggs propôs o uso de logaritmos decimais.

2.3.6) A Matemática nos séculos XVII e XVIII

O século XVII foi marcado, principalmente, pelo trabalho voltado a curvas geométricas. Houve o desenvolvimento de métodos algébricos, num primeiro momento, com Rene Descartes (1596 – 1650) e Pierre Fermat (1601 – 1665). Num segundo momento, de séries, com John Wallis (1616 – 1703) e James Gregory (1638 – 1675). E, por fim, métodos infinitesimais, com Isaac Newton (1643 – 1727) e Gottfried Leibniz (1646 – 1716)[7], destacando-se a derivada e as integrais. Todos esses conceitos surgiam gradativamente e se aplicariam aos problemas de se determinarem reta tangente, área sob curva e comprimento de arco.

---

[7] Leibniz encontrou, através da série de Gregory (arcotangente), a relação $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$.

Números irracionais eram entendidos apenas como símbolos que representavam grandezas geométricas contínuas, não possuindo existência fora dessa situção. Buscava-se associar a área a um número. No contexto de Leibniz, se coloca o problema de admitir π como um número. [21]

No século XVIII, dentre os principais nomes, podemos citar Jean D`Alembert (1717 – 1783), Leonhard Euler (1707 – 1783), Joseph Lagrange (1736 – 1813) e Adrien Legendre (1752 – 1833)[8]. A Matemática passou por uma transformação importante, onde o principal objeto de estudo não seria mais o número, mas a lei de variação de uma grandeza, ou função. Isto foi motivado, principalmente, pela necessidade de haver uma expressão analítica geral para uma curva (o que considerou também as séries de potências).

Acerca dos números, apareceriam como ideia de variável de uma função. Segundo Roque (2012, pág. 230), em 1748, no livro *Introductio it analysin infinitorum* ou *Introdução à análise dos infinitos*, a respeito de uma variável, Euler escreveu: “Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários.”

É importante lembrar que este período foi marcado por um extenso desenvolvimento de análise algebrizada e havia, para a época¸ uma noção de rigor, mas que estava relacionada a justificativas para os métodos do cálculo infinitesimal.

[8] Em 1794, Legendre mostrou que π é irracional.

CAPÍTULO 3) OUTROS RESULTADOS SOBRE RACIONAIS E IRRACIONAIS

Neste capítulo, traremos alguns exemplos de números racionais e irracionais notáveis, organizando os casos em problemas. Estes exemplos podem ser considerados “clássicos” por sua importância histórica e por serem recorrentes na Matemática Básica. Traremos também teoremas úteis ao reconhecimento desses números e ao trabalho com eles.

3.1) Casos Clássicos de Números Irracionais

Verificaremos alguns fatos sobre irracionalidade da raiz quadrada de números primos. Inicialmente, abordaremos os casos de 2 e 3, para, depois, passarmos ao caso geral de um número natural primo e a uma outra generalização para a raiz quadrada irracional. Em seguida, apresentaremos a raiz quadrada do produto de números primos e a combinação dessas raízes, respectivamente. Ao final, abordaremos também o caso da raiz cúbica de 2.

Problema 1) Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.

Demonstração:
Vamos supor, por absurdo, que exista este número racional. Então, existem a e b inteiros tais que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, ou ainda $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$.
Ou seja, $a^2 = 2 \cdot b^2$.
A quantidade de fatores 2 nas fatorações de a^2 e b^2, somente, é par. E, na igualdade anterior, a quantidade de fatores 2 em a^2 é par e, em $2 \cdot b^2$, é ímpar. Contradição.
Logo, $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$. ■

Problema 2) Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

Demonstração:
Vamos supor que $\sqrt{3}$ é racional. Logo, existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

O que resulta $a^2 = 3 \cdot b^2$.

O número 3 é primo. Logo, 3 | a^2. Pela propriedade 4 (Apêndice 1- Lema de Euclides), 3 | a. Então $a = 3 \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, substituindo em $a^2 = 3 \cdot b^2$, temos $(3 \cdot k)^2 = 3 \cdot b^2$. Ou ainda $3 \cdot k^2 = b^2$.

Logo, 3 | b^2 e 3 é primo. Logo, 3 | b. Mas a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível. Contradição.

Portanto, $\sqrt{3}$ é irracional. ■

As demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ que apresentamos têm características ligeiramente diferentes. Enquanto a primeira explora a contradição da paridade nas expressões dos lados da igualdade, a segunda usa o recurso da propriedade 4 (ambas formas funcionariam em qualquer um dos casos). Este recurso se torna ferramenta útil à demonstração da irracionalidade de $\sqrt{p}$, p primo.

Problema 3) Prove que $\sqrt{p}$, p primo, é irracional;

Demonstração:

Vamos supor que $\sqrt{p}$ é racional. Logo, existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}$$

Temos $a^2 = b^2 \cdot p$.

Logo, $p|a^2$ e, então $p|a$. Assim, $a = m \cdot p$, com m inteiro.

Substituindo na igualdade anterior, temos $(m \cdot p)^2 = b^2 \cdot p$, que resulta $b^2 = m^2 \cdot p$.

Logo, $p|b^2$ e, então, $b|p$. Assim, $b = n \cdot p$, com n inteiro. Contradição. ■

A seguir, apresentaremos uma generalização para a raiz quadrada irracional, cuja ideia já constava em *Os Elementos*. (Livro X, Proposição 9)

Problema 4) Se um número natural não é o quadrado de um outro número natural, sua raiz quadrada é irracional.

Demonstração: Resolveremos usando a contrapositiva desta proposição.

Se a raiz quadrada de um número natural n é racional, então existem p e q inteiros tais que

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q}$$

Ou ainda $p^2 = n \cdot q^2$.

As quantidades de cada fator primo de p^2 são pares, o que também ocorre em q^2. Logo, o mesmo valerá para n, que será o quadrado de um número natural (Ou da forma $n = a^2$).■

Problema 5) Prove que $\sqrt{pq}$, p e q primos distintos, é irracional.

Demonstração:

Vamos supor que $\sqrt{pq}$ é racional. Logo, existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que:

$$\sqrt{pq} = \frac{a}{b}$$

Então $pq = \frac{a^2}{b^2}$ e $a^2 = b^2pq$.

Temos que $p|a^2 = a \cdot a$ e $q|a^2 = a \cdot a$. Pela propriedade 4 do Apêndice 1, $p|a$ e $q|a$. Então $a = p \cdot k$, k inteiro, e teremos $a^2 = p^2 \cdot k^2$. Assim, $p^2 \mid a^2$. E, da mesma forma, $q^2 \mid a^2$.

Como p e q são primos entre si, p^2 e q^2 também são. Como, $p^2 \mid a^2$ e $q^2 \mid a^2$, pela Propriedade 3 do Apêndice 1, temos $p^2 \cdot q^2|a^2$. Logo, $a^2 = p^2 \cdot q^2.r$, $r \in \mathbb{Z}$.

Substituindo $a^2 = p^2 \cdot q^2.r$ em $a^2 = b^2pq$, obtemos:

$$p^2 \cdot q^2.r = b^2pq$$

Ou ainda $p \cdot q \cdot r = b^2$, com $p \mid b^2$ e $q \mid b^2$. Porém, isto resulta $p \mid b$ e $q \mid b$. Contradição. ■

Problema 6) Use o Problema 5 para provar que $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ é irracional (Adaptado de Profmat, 2014).

Demonstração:

Vamos supor que $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ é racional. Logo, existe uma fração $\frac{a}{b}$ tal que:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \frac{a}{b}$$

Temos:

$$p + 2\sqrt{pq} + q = \frac{a^2}{b^2}$$

Assim,

$$\sqrt{pq} = \frac{\frac{a^2}{b^2} - p - q}{2}$$

E $\sqrt{pq}$ é racional. Pelo problema anterior, obtemos uma contradição. ■

Problema 7) A duplicação do cubo - Considerando-se um cubo de volume V, qual deve ser a medida da aresta de um outro cubo que tem volume igual ao dobro do primeiro?

Solução:

Sejam a e b as medidas das arestas do primeiro e do segundo cubo, respectivamente.

No primeiro cubo, temos $V = a^3$. No segundo cubo, temos $2 \cdot V = b^3$.

Logo, $2 \cdot a^3 = b^3$. Assim, $b = a \cdot \sqrt[3]{2}$.

Problema 8) Prove que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Demonstração:

Vamos supor, por absurdo, que $\sqrt[3]{2}$ seja racional. Logo, existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que:

$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$$

Ou seja, $a^3 = 2 \cdot b^3$ e a^3 é par.

Se a^3 é par, então a é par. (Apêndice 1. Nota da Propriedade 1).

Assim, temos $a^3 = (2 \cdot n)^3 = 8 \cdot n^3$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Mas $a^3 = 2b^3$. Logo, $8 \cdot n^3 = 2 \cdot b^3$. Então, temos $b^3 = 4n^3 = 2 \cdot (2n^3)$ e b^3 é par.

Se b^3 é par, então b é par. Contradição.

Portanto, $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$. ■

Problema 9) Mostre que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional.[9]

Demonstração:
O problema 6 já justifica este resultado. Um outro caminho seria supor $\sqrt{2}+\sqrt{3}=a$ racional. Seu quadrado é $a^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{6}$ e também deve ser racional. Mas, assim $\frac{a^2-5}{2}=\sqrt{6}$ seria racional. Contradição. ■
Ou também pela Propriedade 6 do Apêndice 1. Contradição. ■

3.2) Teorema das Raízes Racionais

O Teorema das Raízes Racionais é presente em livros de Ensino Médio de autores conhecidos atuais, como Gelson Iezzi, Luiz Roberto Dante e Manoel Paiva. É apresentado como um recurso para a obtenção das raízes de polinômios, principalmente de grau 3, por tentativa. Além desse recurso, pode ser também uma ferramenta para identificação de números irracionais. Este teorema generaliza vários problemas da seção anterior.

Teorema 1) Se um número racional irredutível $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros, primos entre si e $q\neq 0$, é raiz de uma equação polinomial $P(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\cdots+a_1\cdot x+a_0=0$, com coeficientes inteiros, então q divide a_n e p divide a_0.

Demonstração:
Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $P(x)$, então $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$. Logo,

$$a_n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_{n-2}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\cdots+a_2\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^2+a_1\cdot\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0.$$

Ou seja,

$$a_n\cdot\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\cdot\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+a_{n-2}\cdot\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}}+\cdots+a_2\cdot\frac{p^2}{q^2}+a_1\cdot\frac{p}{q}+a_0=0$$

Multiplicando a igualdade anterior por q^n:

[9] É importante lembrar que números desta forma são irracionais algébricos. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, por exemplo, é solução da equação $x^4-10x^2+1=0$.

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + a_{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \cdots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0$$

Isolando $a^n \cdot p^n$ e $a_0 \cdot q^n$, obtemos:

$$a_n \cdot p^n = -(a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + a_{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \cdots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n)$$
$$a_0 \cdot q^n = -(a^n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + a_{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \cdots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1})$$

Ou ainda:

$$a_n \cdot p^n = -q.(a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} \cdot q + \cdots + a_2 \cdot p^2 \cdot q^{n-3} + a_1 \cdot p \cdot q^{n-2} + a_0 \cdot q^{n-1})$$
$$a_0 \cdot q^n = -p.(a^n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q + a_{n-2} \cdot p^{n-3} \cdot q^2 + \cdots + a_2 \cdot p \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1})$$

Logo, q divide $a_n \cdot p^n$ e p divide $a_0 \cdot q^n$.

É válida a seguinte propriedade: $mdc(p,q) = 1 \Rightarrow mdc(p^n, q^m) = 1$, para quaisquer m e n naturais. Portanto, $mdc(p^n, q) = 1$ ou $mdc(p, q^n) = 1$.

Logo, pela propriedade 2 do Apêndice 1 (Lema de Gauss), q divide a_n e p divide a_0. ■

Corolário:

Consideremos a equação polinomial $p(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros. Se essa equação tiver uma raiz racional, ela será um número inteiro e divisor de a_0.

Demonstração: Pelo Teorema 2, se o número racional $\frac{p}{q}$ for raiz dessa equação, q dividirá 1 e p dividirá a_0. Então $q = \pm 1$ e a raiz $\frac{p}{q}$ será o número inteiro $\frac{p}{q} = \pm p$ que é divisor de a_0. ■

Vejamos, então, alguns exemplos de raízes racionais de uma equação polinomial e do uso do teorema como ferramenta para a demonstração de irracionalidade.

a) Raiz racional de equação de grau 3:

$$2 \cdot x^3 - 17 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 11 = 0$$

Se há raiz racional $\frac{p}{q}$, então, pelo teorema, p é divisor de -11 e q é divisor de 2, ou seja, $p \in \{1, -1, 11, -11\}$ e $q \in \{1, -1, 2, -2\}$. Assim, as possibilidades são:

$$\left\{1, -1, 11, -11, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{11}{2}\right\}.$$

Verificando-se uma a uma, $\frac{1}{2}$ é uma raiz racional da equação. (As demais são $4+\sqrt{5}$ e $4-\sqrt{5}$).

b) Raiz inteira de equação de grau 3:

$$x^3 - 7 \cdot x^2 + 14 \cdot x - 8 = 0$$

Se há raiz racional, então, pelo corolário, será um número inteiro e divisor de 8. Assim, as possibilidades são $\{1, -1,2, -2,4, -4,8, -8\}$. Verificando-se, vemos que as raízes são 1, 2 e 4.

c) Raiz inteira equação de grau 2:

$$x^2 - 8 \cdot x + 15 = 0$$

Se a equação tiver raiz racional, pelo corolário ela será um número inteiro e divisor de 15. Os divisores de 15 são $1, -1, 3, -3, 5, -5, 15$ e -15. Substituindo esses valores na igualdade, vemos que as raízes são 3 e 5 (inteiras).

d) Demonstração de que $\sqrt{10}$ é irracional:

Temos que $\sqrt{10}$ é raiz da equação $x^2 - 10 = 0$. Se a equação tiver raiz racional, será um número inteiro e divisor de -10. Os divisores de -10 são $1, -1, 2, -2, 5, -5, 10$ e -10. Substituindo-os na igualdade, vemos que nenhum desses números é raiz de tal equação. Logo, não há raiz inteira nem racional. ■

e) Demonstração de que $\sqrt[3]{2}$ é irracional:

De forma análoga ao item anterior, $\sqrt[3]{2}$ é raiz da equação $x^3 - 2 = 0$. Se houver raiz racional, será um número inteiro e divisor de -2. Logo, as possibilidades são $1, -1, 2$ e -2 e, nenhuma delas é raiz da equação. Logo, não há raiz inteira nem racional. ■

3.3) Representação Decimal

Definição 1) Consideremos uma sequência qualquer $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de algarismos. Ela será *periódica* a partir de um certo ponto se for da forma:

$$\left(a_1, a_2, \ldots, a_l, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_p}_{p}, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_p}_{p}, \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_p}_{p}, \ldots\right)$$

Definição 2) A representação decimal de um número real positivo r é uma expressão da forma:

$$r = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

e que também pode ser escrita como

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots ,$$

onde a_0 é um número natural e a_i é um algarismo, com $0 \leq a_i \leq 9$, para $i = 1, 2, 3, \dots$.

Exemplos:

$$1{,}375 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{11}{8}$$

$$0{,}454545 \dots = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \cdots = \frac{5}{11}$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135 \dots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \cdots \neq \frac{p}{q}$$

Uma representação decimal pode ser finita ou infinita. Uma representação decimal infinita pode ser periódica ou não periódica. E pode ser de um número racional (quando for finita ou infinita periódica) ou de um irracional (quando for infinita e não periódica).

Teorema 2) A representação decimal $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ corresponde a um número racional se, e somente se, a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ for periódica como na definição 1.

Demonstração:

Seja o número x, na forma das definições 1 e 2.

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_l b_1 b_2 \dots b_p b_1 b_2 \dots b_p b_1 b_2 \dots b_p \dots$$ [10]

Seja $y \in \mathbb{N}$ o número cuja representação decimal é $y = b_1 b_2 \dots b_p$.

Multiplicando a igualdade de x por 10^l, e a igualdade assim obtida por 10^p, obtemos:

$$10^l \cdot x = a_1 a_2 \dots a_l\, , \; b_1 b_2 \dots b_p b_1 b_2 \dots b_p b_1 b_2 \dots b_p \dots$$

$$10^{l+p} \cdot x = a_1 a_2 \dots a_l \; \underline{b_1 b_2 \dots b_p} \; , b_1 b_2 \dots b_p b_1 b_2 \dots b_p \dots$$

Portanto,

$$10^{l+p} \cdot x - 10^l \cdot x = a_1 a_2 \dots a_l b_1 b_2 \dots b_p - b_1 b_2 \dots b_p$$

[10] Nota: Há também a notação $x = 0, a_1 a_2 \dots a_l \overline{b_1 b_2 \dots b_p}$.

Logo

$$x = \frac{a_1 a_2 \dots a_l b_1 b_2 \dots b_p - b_1 b_2 \dots b_p}{10^l \cdot (10^p - 1)}$$

Nesta expressão de x, o numerador é inteiro e o denominador é diferente de zero ($p \neq 0$). Logo, x é um número racional.

Reciprocamente, sejam $x = \frac{a}{b}$, com $a, b \in N$.

Pelo algoritmo da divisão,

$a = b \cdot q_0 + r_0$, com $0 \leq r_0 < b$. Isto implica que $\frac{r_0}{b} < 1$.

Temos a parte inteira da expansão, já que:

$$x = \frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} \quad , \quad \frac{r_0}{b} < 1\ .$$

A partir daí, continuamos iterando:

$$10 \cdot r_0 = q_1 \cdot b + r_1 \Rightarrow x = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b} \quad , \quad \frac{r_1}{10b} < \frac{1}{10}$$

Ou seja, q_1 é a primeira casa decimal de x. E este processo se repete: $10r_1 = q_2 b + r_2$, ... de modo que:

$$x = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100} + \cdots$$

Os valores q_1, $q_2, \dots$ serão as sucessivas casas decimais $(x = q_0, q_1 q_2 \dots)$. Se o resto zero for encontrado em alguma etapa, o processo termina com uma expansão decimal finita de x. Como será sempre $0 \leq r_j < b$, em no máximo b iterações, algum valor r_k, dentre os restos, será repetido, digamos $q_j = q_k\ , j > k$. Mas a partir daí, claramente o algoritmo gerará os mesmos números repetidamente, o que implica que a expansão será periódica, com o trecho $q_k q_{k+1} \dots q_j$ se repetindo.■

Vejamos alguns exemplos concretos:

a) A representação decimal 0,14333 ... , que corresponde à fração $\frac{43}{300}$.

$$x = 0{,}14333 \dots$$

$$100 \cdot x = 14{,}333 \dots$$

$$1000 \cdot x = 143{,}333 \dots$$

$$\Rightarrow x = \frac{129}{900} = \frac{43}{300}$$

b) O recíproco de (a), ou seja, a fração $\frac{43}{300}$ que corresponde à representação decimal 0,14333 ...

$$430 = 300 \cdot 1 + 130$$
$$1300 = 300 \cdot 4 + 100$$
$$1000 = 300 \cdot 3 + 100$$
$$1000 = 300 \cdot 3 + 100$$
$$\ldots$$
$$\Rightarrow \frac{43}{300} = 0{,}14333\ldots$$

c) As fórmulas vistas na escola: $0, aaa \ldots = \frac{a}{9}$ e $0, ababab \ldots = \frac{ab}{99}$.

Seja $x = 0, aaa \ldots$. Assim, $10x = a, aaa \ldots$ e teremos $9x = a$ ou $x = \frac{a}{9}$.

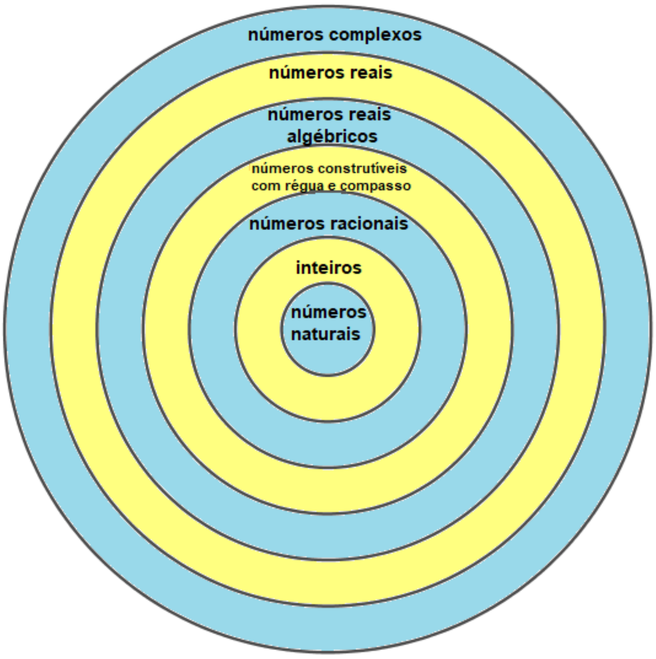
Seja $y = 0, ababab \ldots$. Assim, $100y = ab, ababab \ldots$ e teremos $99y = ab$ ou $y = \frac{ab}{99}$.

3.4) Classificação dos Números Irracionais

Um número é dito algébrico quando é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, e é dito transcendente, caso contrário. Os números reais irracionais podem ser classificados em algébricos ou transcendentes. Por exemplo, $\sqrt{5}$ é algébrico, pois é solução de $x^2 - 5 = 0$. Por outro lado, π e $2^{\sqrt{2}}$ são transcendentes, pois não são soluções de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.

O diagrama abaixo, conforme apresentado por NIVEN (1961), dispõe os números em conjuntos.

Figura 17 – Diagrama: organização dos números em conjuntos



Fonte: Niven, 1961.

Continuando a apresentação de casos recorrentes de números irracionais, provaremos, a seguir, a irracionalidade de dois números "trigonométricos" e um "logarítmico", de acordo com nomenclatura mencionada pelo mesmo autor (p. 77). Os únicos elementos racionais do conjunto $\{\cos\theta°, \theta \in \mathbb{Z}\} \cup \{\operatorname{sen}\theta°, \theta \in \mathbb{Z}\}$ são 0, ± 1 e $\pm 1/2$. A irracionalidade dos demais pode ser verificada, em alguns casos, usando-se identidades trigonométricas, tais como relação fundamental, $\operatorname{sen}(n\theta) = f(\operatorname{sen}\theta)$, $\cos(n\theta) = f(\cos\theta)$, onde f é um polinômio em $\operatorname{sen}\theta$ (ou em $\cos\theta$), junto com o Teorema 1, ou usando apenas essas identidades, o que for conveniente. Já para números logarítmicos, uma ferramenta estratégica é a decomposição em fatores primos.

Problema 10) Prove que sen $10°$ é irracional.

Solução: Consideremos a identidade $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$. Assim,

$$\operatorname{sen} 30° = 3\operatorname{sen} 10° - 4\operatorname{sen}^3 10° .$$

Fazendo $\operatorname{sen} 10° = x$. Temos:

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3$$

ou ainda

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 .$$

Se a equação acima tiver raízes racionais, serão da forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \{-1, 1\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Há 8 possibilidades para as raízes, que são:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right\}.$$

Verificando-se uma a uma, vemos que nenhuma delas é raiz da equação. Logo, $\operatorname{sen} 10°$ é irracional. ■

Problema 11) Prove que $\operatorname{sen} 20°$ é irracional.

Solução:
Consideremos a identidade $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta$. Se $\operatorname{sen} 20°$ fosse racional, $3 \operatorname{sen} 20° - 4 \operatorname{sen}^3 20° = \operatorname{sen} 60°$ também seria. Mas $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Contradição. ■[11]

Problema 12) Prove que $\log 5$ é irracional.

Solução:
Suponhamos que $\log 5$ seja racional. Então, existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ tal que $\log 5 = \frac{a}{b}$. Logo, $10^{\frac{a}{b}} = 5$. Elevando ambos lados da igualdade a b, obtemos:

$$10^a = 5^b$$
$$\rightarrow (5 \cdot 2)^a = 5^b$$
$$\rightarrow 2^a = 5^{b-a}$$

2^a é uma potência de 2 e 5^{b-a} é uma potência de 5. Contradição. Portanto, $\log 5$ é irracional. ■

3.5) Exemplos de aproximação de irracionais por racionais

Nesta seção, veremos alguns exemplos de cálculo de aproximações de números irracionais por racionais em representação decimal usando o método de Newton-Raphson.

[11] A potência de um número racional é um número racional. Por outro lado, um polinômio calculado em um número irracional não necessariamente é irracional. A ideia da solução do problema 10 não funcionaria no problema 9, pois sen 10° é irracional e sen 30° é racional.

Teorema 3) Método de Newton ou Newton-Raphson ou Método das Tangentes

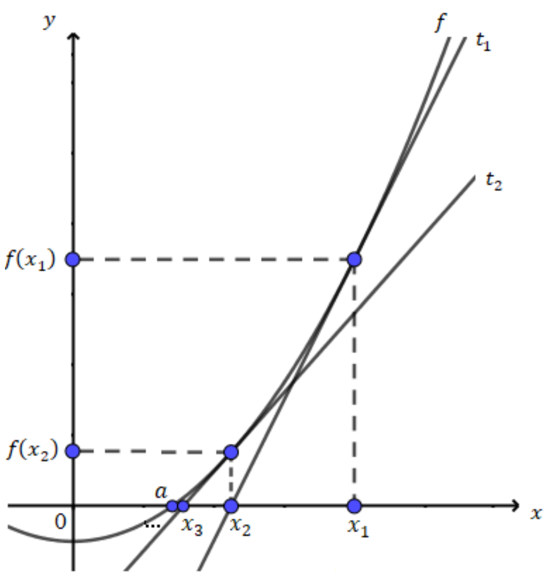
O método de Newton-Raphson[12] é um recurso que permite calcular aproximações para a raiz de uma função real, se existir. Assim, esse método se torna também uma ferramenta útil ao cálculo da aproximação de um número real. Para isso, basta definir uma função $f: I \to \mathbb{R}$ da qual o número seja uma raiz. O método funcionará desde f seja de classe C^1 em I e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. (LIMA, 2004, p. 111)

Um valor inicial x_1 de abscissa, arbitrário, determina uma reta tangente ao gráfico da função e a interseção dessa reta com o eixo horizontal determina um novo valor x_2 de abscissa. O mesmo pode ser aplicado em x_2. Assim, uma recorrência (sobre a fórmula da função, sua derivada e o valor inicial de abscissa) gera uma sequência de valores $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ que se aproximarão da raiz a da função. Sua fórmula é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Consideremos uma função f e um valor aproximado inicial x_1. A derivada da função aplicada em x_1 é o coeficiente angular da reta tangente t_1 ao gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$. Vejamos:

Figura 18 – Método de Newton Raphson ou Método das tangentes



Fonte: Adaptado de Lima (2004. p. 112).

[12] O método de Newton-Raphson é um método de aproximações sucessivas comumente estudado em cálculo numérico.

Consideremos $(x_2, 0)$ o ponto de interseção desta reta tangente com o eixo horizontal. Determinando a equação de tal reta, temos a relação:

$$f(x_1) - 0 = f'(x_1) \cdot (x_1 - x_2)$$

Logo,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Sendo x_2 a segunda aproximação e repetindo-se este procedimento algumas vezes, teremos:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\dots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

De acordo com Lima (2004, p. 111), se a sequência (x_n) for convergente, seu limite a será uma raiz da equação $f(x) = 0$, pois $a = a - f(a)/f'(a)$, donde $f(a) = 0$. Vamos verificar dois exemplos, até a quarta aproximação.

É importante observarmos ainda que o método de Newton não necessariamente produz uma sequência de racionais, mesmo que comece com um racional. Depende da função.

a) $\sqrt{6}$

Este número é raiz da função $f(x) = x^2 - 6$. A derivada é $f'(x) = 2x$.

Podemos utilizar $x_1 = 3$ como valor inicial. Temos, assim:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \;\Rightarrow\; x_2 = 3 - \frac{3}{6} = \frac{5}{2} \; ou \; 2{,}5\,.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{5}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{5} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20} \; ou \; 2{,}45\,.$$

Repetindo-se este procedimento, obtemos $x_4 = \frac{4801}{1960} = 2{,}4494897591\ldots$, com 7 casas decimais exatas. ($\sqrt{6} = 2{,}449489742\ldots$)

b) $\sqrt[3]{2}$

Este número é raiz da função $f(x) = x^3 - 2$. A derivada é $f'(x) = 3x^2$.

Podemos utilizar $x_1 = 2$ como valor inicial. Temos, assim:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{6}{12} = \frac{3}{2} \; ou \; 1{,}5 \, .$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2} - \frac{\frac{11}{8}}{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{11}{54} = \frac{35}{27} \; ou \; 1,\overline{296} \, .$$

Repetindo-se o procedimento, obtemos $x_4 = \frac{125116}{99225} = 1{,}2609322247 \ldots$, com erro da ordem de 10^{-3}. ($\sqrt[3]{2} = 1{,}259921049 \ldots$)

Aproximações racionais podem ser calculadas também a partir de sequências ou séries convergentes. Há inclusive teoremas que determinam valores de n que garantem aproximações com erro fixado.

CAPÍTULO 4) O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Neste capítulo, falaremos sobre o conjunto dos números reais. Vamos abordar o contexto histórico do século XIX e parte da construção dos números reais com os cortes de Dedekind. Traremos ainda resultados sobre a densidade dos números racionais e irracionais nos reais, que são relacionados com a educação básica.

4.1) A matemática no século XIX

A Matemática se desenvolveu muito a partir do século XVI. Porém não houve preocupação com as sutilezas dos procedimentos rigorosos. Os matemáticos trabalhavam com números racionais e irracionais livremente e desenvolvendo suas propriedades, mas sem que houvesse fundamentação adequada dos sistemas numéricos.

No século XIX[13], a Matemática passaria por um processo de mudanças relacionadas à sua fundamentação e surgiria uma nova noção de rigor, indo além da análise algebrizada do século XVIII. Essas mudanças eram motivadas por respostas a questões como continuidade da reta e condições de integrabilidade de uma função (o que envolvia também as séries de Fourier). A preocupação não era apenas sobre o cálculo, mas as condições totais para ele.

> “No início do século XIX, esboçou-se uma reação crítica, expressa entre outros por Abel e Cauchy, e durante a última metade daquele século foram dados os passos finais no sentido da solidificação dos fundamentos do cálculo, quando Dedekind, Weierstrass e Cantor introduziram os números reais de maneira sem objeções.” (AABOE, 1984, p. 50)

A nova noção de rigor trouxe a abstração e a formalização para os fundamentos da Matemática. Questões de física deixariam de ser centrais, houve uma transição da concepção de número como quantidades ou grandezas para um conceito abstrato de número, o qual vimos no capítulo 1. No final do século XIX, surgem a caracterização dos números reais, onde números irracionais foram incluídos formalmente, e também a noção de conjunto.

---

[13] Em 1873, Hermite (1822 – 1901) mostrou que e é transcendente. Em 1885, Weierstrass fez alterações nessa demonstração.

Além disso, a fundamentação dos números reais precedeu a dos racionais, a dos inteiros e a dos naturais, diferentemente da ordem com a qual os números são ensinados na educação básica.

> "E é interessante observar que a fundamentação desses sistemas ocorreu na ordem inversa: primeiro foram organizados os números complexos, depois os números reais, os racionais, os inteiros e, finalmente, os números naturais." (ÁVILA, 2006, p. 55)

4.2) Cortes de Dedekind

Richard Dedekind (1831 – 1916) foi um matemático alemão. É considerado um dos principais nomes do século XIX e foi quem estabeleceu o conceito de número real, inspirando-se na definição de Eudoxo.

Segundo Ávila (2006, p. 57), a definição de Eudoxo associa, a cada par (A, B) de grandezas, três conjuntos de pares (m, n) de números naturais: o conjunto dos pares em que $m \cdot B > n \cdot A$ (ou $\frac{A}{B} < \frac{m}{n}$), o conjunto dos pares em que $m \cdot B = n \cdot A$ (ou $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$) e o conjunto em que $m \cdot B < n \cdot A$ (ou $\frac{A}{B} > \frac{m}{n}$).

Dedekind observou que cada número racional r separa todos os demais números racionais em dois conjuntos, ou "cortes", que são o conjunto E formado por todos os números racionais que são menores do que ele e o conjunto D, formado pelos que são maiores. Os cortes E e D (mais o conjunto $\{r\}$) são partições dos números racionais. O número racional r funciona como elemento separador. Porém, poderão existir casos de cortes em que não haja um número racional como elemento separador.

Exemplos:

a) Vamos considerar os conjuntos A e B abaixo.

$A = \{x \in \mathbb{Q} |\ x < 25\}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} |\ x \geq 25\}$

O elemento separador é 25.

b) Vamos considerar os conjuntos E e D abaixo.

$E = \{x \in \mathbb{Q} |\ x \leq 47{,}9\}$

$D = \{x \in \mathbb{Q} |\ x > 47{,}9\}$

O elemento separador é 47,9.

c) Vamos considerar os conjuntos E e D abaixo.

$E = \{x \in \mathbb{Q}|\ x \leq 0\}\ \cup \{x \in \mathbb{Q}|x^2 < 2\}$

$D = \{x \in \mathbb{Q}|\ x > 0\}\ \cap \{x \in \mathbb{Q}|x^2 > 2\}$

Não há elemento (racional) separador.

O conjunto E do exemplo (c) não possui elemento máximo:

Demonstração:

Consideremos $x \in E$. Logo, $x^2 < 2$. Vamos comparar a diferença $\epsilon = 2 - x^2$ e determinar um número racional positivo h, bastante pequeno, para que $(x + h)^2 < 2$.

Temos $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.

Como $x < 2$, teremos $2xh < 4h$. Além disso, $h < 2$ implica $h^2 < 2h$. Logo:

$(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 < x^2 + 6h$. Então $(x + h)^2 < x^2 + 6h$.

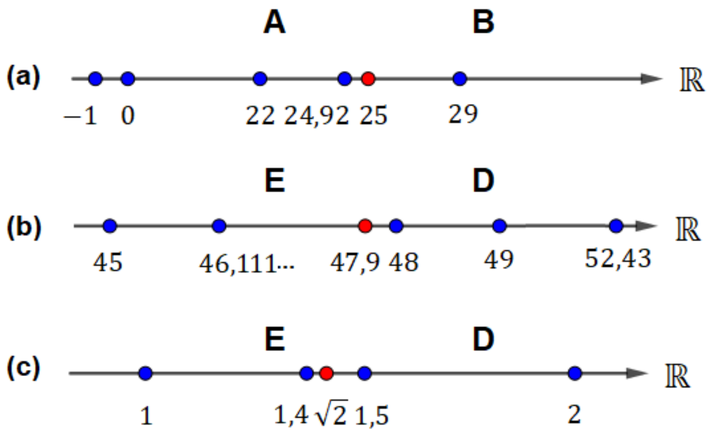
Portanto, se escolhermos $h = \frac{\varepsilon}{6}$, obteremos $(x + h)^2 < 2$, o resultado desejado. ■

Assim, não existe $\sup E$ (menor cota superior) pertencente ao próprio E, nem ao conjunto D. Logo, não existe $\sup E$ “racional”, já que $E \cup D = \mathbb{Q}$. Pode-se provar, com raciocínio análogo, que não existe $\inf D$ racional. O número real deveria ser criado, então, de forma que sempre existisse o elemento separador. A ideia de corte estendeu o conjunto dos números racionais ao dos reais.

Observemos que, com a definição anterior:

- No exemplo (a), o conjunto A (ou o conjunto B) é o corte que determina o número real 25.
- No exemplo (b), o conjunto E (ou o conjunto D) é o corte que determina o número real $47{,}9$.
- No exemplo (c), o conjunto E (ou o conjunto D) é o corte que determina o número real $\sqrt{2}$.

Figura 19 – Exemplos de cortes de Dedekind



Fonte: o autor, 2020.

Dedekind observou que a existência de cortes sem elemento de separação, como no exemplo (c), é a expressão aritmética da descontinuidade de $\mathbb{Q}$. Com o acréscimo dos novos elementos, obteremos o conjunto $\mathbb{R}$, contínuo numérico.

4.2.1) A definição de número real, a relação de ordem e a adição em $\mathbb{R}$

Vejamos duas definições conforme Guidorizzi (2008, p. 538 e 540). A primeira, de número real e, a segunda, sobre a relação $\leq$.

"Seja α um subconjunto de $\mathbb{Q}$. Dizemos que α é um *número real* se satisfaz as condições:

(R1) $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(R2) $\forall p, q \in \mathbb{Q}$, se $p \in \alpha$ e $q < p$; então $q \in \alpha$.

(R3) α não tem máximo."

Ela representa um número real pelo conjunto dos racionais que o precedem e segue a ideia do corte. A outra:

"Sejam α e β dois números reais. Definimos:

a) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$

b) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$"

Prova-se que "$\leq$" é uma relação de ordem (usando propriedades dos conjuntos) e que determina a ordem em $\mathbb{R}$.

Faremos a seguir a apresentação dos teoremas 4 e 5, sobre o fechamento da soma e do produto de números reais, respectivamente. As demonstrações seguem ideia próxima a Guidorizzi (2008, p.541).

Teorema 4) Se α e β são números reais, então $\gamma = \{a + b |\ a \in \alpha, b \in \beta\}$ também é número real.

Demonstração:

É necessário provar que γ satisfaz as condições (R1), (R2) e (R3).

(R1) Como α e β não são vazios, existem $a \in \alpha$ e $b \in \beta$. Temos $a + b \in \gamma$. Logo, $\gamma \neq \emptyset$.

Além disso, como α e $\beta \neq \mathbb{Q}$, então existem racionais r e s, com $r \notin \alpha$ e $s \notin \beta$.

$\forall a \in \alpha, a < r$ e $\forall b \in \beta, b < s$.

Assim, $a + b < r + s$. Então, $r + s \notin \gamma$.

Logo, $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(R2) Precisamos provar que se $x \in \gamma$ e $y < x$, então $y \in \gamma$.

$x \in \gamma \Leftrightarrow x = a + b$, para algum $a \in \alpha$ e algum $b \in \beta$.

Sendo $y < x$, temos $y < a + b \Rightarrow y - a < b$. Como $b \in \beta$, temos $y - a \in \beta$.

Então, $y = a + (y - a)$, sendo $a \in \alpha$ e $(y - a) \in \beta$.

Logo, $y \in \gamma$.

(R3) Precisamos provar que γ não tem máximo, ou seja, se $x \in \gamma$, então existe $y \in \gamma$ com $x < y$.

$x \in \gamma \Leftrightarrow x = a + b$, para algum $a \in \alpha$ e algum $b \in \beta$.

α e β não têm máximo. Então existem racionais $r \in \alpha$ e $s \in \beta$, com $a < r$ e $b < s$. Segue que $a + b < r + s$. Fazendo-se $y = r + s$, tem-se $x < y$, com $y \in \gamma$. Assim, γ não tem máximo.

Da verificação de (R1), (R2) e (R3), segue que $\gamma \in \mathbb{R}$.■

Teorema 5) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$. Então

$$\gamma = \mathbb{Q}_- \cup \{ab | a \in \alpha, b \in \beta, a > 0, b > 0\}$$

é um número real.

Demonstração:

É necessário provar que γ satisfaz as condições (R1), (R2) e (R3).

(R1) Primeiramente, $\gamma \neq \emptyset$, pois $\mathbb{Q}_- \subset \gamma$.

Temos também que existem racionais m e n, com $m \notin \alpha$ e $n \notin \beta$. Então,

$\forall a \in \alpha$, com $a > 0, a < m$ e

$\forall b \in \beta$, com $b > 0, b < n$.

Logo, $ab < mn$ para todo $a \in \alpha, a > 0$, para todo $b \in \beta, b > 0$.

Assim, $mn \notin \gamma$.

(R2) Consideremos p e q racionais, com $p \in \gamma$ e $q < p$. Temos que provar que $q \in \gamma$. Então:

i) Se $p \leq 0$, então $q < 0$. Logo, $q \in \gamma$.

ii) Se $p > 0$ e $q \leq 0$, $q \in \gamma$.

iii) Se $p > 0$ e $q > 0$:

$p \in \gamma$ e $p > 0 \Rightarrow p = ab$ para algum $a \in \alpha, a > 0$, e para algum $b \in \beta$, $b > 0$.

$0 < q < p = ab \Rightarrow \frac{q}{a} < b$. Então, $\frac{q}{a} \in \beta$ e $\frac{q}{a} > 0$. Assim,

$q = a \cdot \frac{q}{a}$ com $a \in \alpha, a > 0$ e $\frac{q}{a} \in \beta$, $\frac{q}{a} > 0$.

Portanto, $q \in \gamma$.

(R3) Precisamos provar que γ não tem máximo. Basta provarmos que, se $p \in \gamma$ e $p > 0$, então existe $q \in \gamma$ com $q > p$.

$p \in \gamma, p > 0 \Rightarrow p = ab$ para algum $a \in \alpha, a > 0$ e algum $b \in \beta$, $b > 0$.

Sendo α e β números reais, existem $a` > a$, com $a` \in \alpha$ e $b` > b$, com $b` \in \beta$.

Logo, $a`b` > ab = p$, com $a`b` \in \gamma$.

Da verificação de (R1), (R2) e (R3), segue que $\gamma \in \mathbb{R}$.■

4.3) O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Um corpo é um conjunto C não-vazio, munido das operações de adição e multiplicação, de tal forma que, a cada par de elementos $x, y \in C$, a adição faz corresponder a soma $x + y \in C$ e a multiplicação o produto $x \cdot y \in C$, e que devem satisfazer os axiomas 1 a 5, listados abaixo. (ÁVILA, 2006, p. 71)

1) (Associatividade) Dados quaisquer $x, y, z \in C$,

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ e } (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

2) (Comutatividade) Quaisquer que sejam $x, y \in C$,

$$x + y = y + x \text{ e } x \cdot y = y \cdot x.$$

3) (Distributividade da multiplicação em relação à adição) Quaisquer que sejam x, y, $z \in C$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

4) (Elementos neutros) Existe um elemento em C, chamado "zero" ou "elemento neutro", indicado pelo símbolo "0", tal que:

$$x + 0 = x \text{ para todo } x \in C.$$

Existe um elemento em C, chamado "elemento unidade" e indicado com o símbolo "1", tal que:

$$1 \cdot x = x \text{ para todo } x \in C.$$

5) (Elementos inversos) Existe um elemento $x`$ em C, chamado "elemento oposto", indicado por $-x$, tal que:

$$x + x` = 0 \text{ para todo } x \in C.$$

Existe um elemento $x``$ em C, chamado "elemento oposto", indicado por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$, tal que:

$$x \cdot x`` = 1 \text{ para todo } x \in C, \text{ desde que } x \neq 0.$$

Prova-se que o elemento oposto e o elemento inverso são únicos. Segundo Lima (2004, p. 12), a diferença entre x e y é definida como a soma de x com o oposto de y, indicada por $x - y$ (com $x - y = x + (-y)$) e o quociente de x por y como o produto de x pelo inverso de y, indicado por x/y (com $x/y = x \cdot y^{-1}$). Dos axiomas, resultarão as conhecidas regras de sinais e outras regras usuais para o conjunto dos reais.

Um corpo C se diz *ordenado* se nele existe um subconjunto P, chamado o conjunto dos elementos positivos, tal que:

i) a soma e o produto de elementos positivos resulta em elementos positivos;

ii) dado $x \in C$, ou $x \in$ P, ou $x = 0$ ou $-x \in P$.

Assim, o *conjunto dos números <u>racionais</u>* ($\mathbb{Q}$) é um *corpo ordenado*.

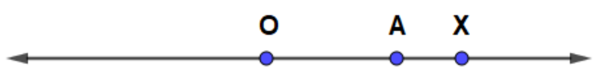
A partir das definições e dos teoremas vistos em 4.2.1, as operações, suas propriedades e a relação de ordem com números reais podem ser *estabelecidas e demonstradas* e prova-se que existe um isomorfismo do corpo $\mathbb{Q}$ na classe (E, D). Define-se como irracional um número real que não for racional. Valerá também a propriedade do supremo, que diz que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente admite supremo.[14] Por conta disto, afirmamos que o *conjunto dos números reais* ($\mathbb{R}$) é também um *corpo ordenado*, com a diferença de ser *completo*. Esse fato é admitido como "axioma" em algumas bibliografias de graduação, para que sejam utilizados em outros resultados. Mas é necessário no contexto deste trabalho.

Finalmente, podemos afirmar que número real é todo número que é racional, o que compreende números inteiros e naturais como casos particulares, ou irracional. E a totalidade dos números racionais com os irracionais é o chamado conjunto dos números reais. As notações são $\mathbb{N}$, para o conjunto dos naturais, $\mathbb{Z}$ para o conjunto dos inteiros, $\mathbb{Q}$ para o conjunto dos racionais e $\mathbb{R}$ para o conjunto dos reais. Para o conjunto dos irracionais, usam-se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{I}$.

4.3.1) Representação geométrica

Vamos escolher uma reta r e sobre ela fixar um ponto O, chamado origem, e um ponto A, com $A \neq O$. Tomaremos o segmento OA como unidade de comprimento, com $\overline{OA} = l$.

Figura 20 – Representação geométrica dos reais



Fonte: o autor, 2020.

[14] Os demais resultados podem ser encontrados em [2] ou em [12].

A origem O divide a reta em duas semirretas. A que contém o ponto A é chamada positiva e a que não contém é chamada negativa. Diremos que os pontos que pertencem à semirreta positiva estão à direita de O e os que pertencem à semirreta negativa estão à esquerda de O.

Seja X um ponto qualquer da reta $\overleftrightarrow{OA}$. Em relação ao segmento OA, um segmento de reta OX pode se encaixar, resumidamente, nas seguintes possibilidades:

i) OX pode ser comensurável com OA;

Isso significa que existe um segmento de reta u tal que $\overline{OX} = m \cdot u$ e $\overline{OA} = n \cdot u$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. O módulo de $\overline{OX}$ será um *número racional*.

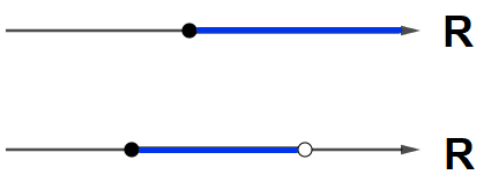
ii) OX pode não ser comensurável com OA;

Isso significa que não existe segmento de reta u tal que $\overline{OX} = m \cdot u$ e $\overline{OA} = n \cdot u$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. O módulo de $\overline{OX}$ será um *número irracional*.

Segundo Muniz Neto (2014, p. 23), há uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta r e o conjunto dos números reais (axioma). Todo ponto da reta está associado a um número real e vice-versa. Temos, assim, a *reta real*.

Intervalo é qualquer subconjunto contínuo de $\mathbb{R}$, ou qualquer pedaço da reta real. É marcado por um ou dois extremos (pontos), podendo ser ilimitado ou limitado, respectivamente. Pode ser ainda aberto, quando o(s) extremo(s) não pertence(m) ao conjunto, ou fechado, quando pertence(m). Há 8 tipos possíveis de intervalos de $\mathbb{R}$, além do próprio $\mathbb{R}$. As definições para cada tipo de intervalo, com desigualdade ou colchetes, podem ser encontradas em [13] ou [14].

Figura 21 – Exemplos de intervalos



Fonte: o autor, 2020.

Segundo Lima (2012, pág. 67): “O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Esta inter-relação (...) é responsável por grandes progressos da Matemática atual.”

4.4) Densidade dos racionais e irracionais nos reais

Os problemas (13) e (14) a seguir dão a ideia de que entre dois números racionais, existem (infinitos) números racionais e irracionais. Estes resultados podem ser importantes, ainda, a outros teoremas de Matemática.

Sejam a e b racionais, com $a < b$. Prove que:

Problema 13) $a < \frac{a+b}{2} < b$ e $a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b$.

Demonstração:

i) Como $a < b$, então podemos formar as duas desigualdades abaixo:

$$a + a < a + b \qquad \text{e} \qquad a + b < b + b.$$

Logo,

$$2a < a + b \qquad \text{e} \qquad a + b < 2b.$$

Portanto,

$$a < \frac{a+b}{2} < b\,.$$

ii) Além disso, como $a < b$, vale a desigualdade abaixo:

$$0 < \frac{b-a}{\sqrt{2}}\ .$$

Logo,

$$a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}\ .$$

e $a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ é irracional.

Como $1 < \sqrt{2}$ e $b - a > 0$, temos $b - a < (b - a) \cdot \sqrt{2}$. Ou ainda:

$$\frac{b-a}{\sqrt{2}} < b - a\,.$$

Portanto,

$$a < a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} < b\ . \blacksquare$$

Problema 14) Prove que o intervalo (a, b) contém infinitos números racionais e infinitos números irracionais.

Demonstração:

i) Vamos supor $r_1, r_2, \ldots, r_n \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$, com $r_1, r_2, \ldots, r_n$ todos distintos $(a < r_1, r_2, \ldots, r_n < b)$

Vamos provar que $a < r_n < b$ implica $a < r_{n+1} < r_n < b$, por exemplo.

Por hipótese, temos $a < r_n < b$. Pelo problema (13), podemos ter:

$$a < \frac{a + r_n}{2} < r_n$$

E $\frac{a+r_n}{2}$ é racional.

Fazendo

$$r_{n+1} = \frac{a + r_n}{2}$$

temos, então, que $r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1} \in (a, b)$, com $r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}$ todos distintos.

ii) Utilizaremos um raciocínio semelhante ao da resolução anterior.

Vamos supor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (a, b) \cap \mathbb{I}$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ todos distintos. $(a < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < b)$

Da mesma forma, vamos provar que $a < \alpha_n < b$ implica $a < \alpha_{n+1} < \alpha_n < b$, por exemplo.

Por hipótese, temos $a < \alpha_n < b$.

Notemos que:

$$\frac{b - a}{2\sqrt{2}} < \frac{b - a}{\sqrt{2}}$$

Pelo problema (13), podemos ter o irracional

$$\alpha = a + \frac{b - a}{\sqrt{2}}$$

tal que:

$$a < \alpha < b.$$

Além disso,

$$a < a + \frac{b - a}{2\sqrt{2}} < a + \frac{b - a}{\sqrt{2}} < b.$$

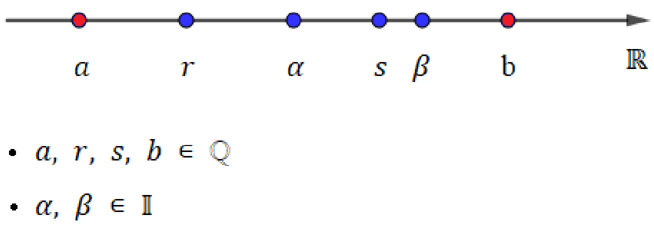
Fazendo

$$\alpha_n = a + \frac{b-a}{2^n\sqrt{2}}$$

temos α_{n+1} também irracional e tal que $a < \alpha_{n+1} < \alpha_n < b$. Logo, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in (a, b)$, com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ todos distintos. ■

A interpretação geométrica dos problemas 13 e 14 é de uma reta contendo um segmento cujas extremidades são pontos correspondentes aos números racionais a e b, e entre estas extremidades, existem outros pontos correspondentes a números racionais e irracionais, maiores que a e menores que b, com a quantidade desses pontos sendo infinita. Há a ideia de densidade dos racionais e irracionais nos reais.

Figura 22: interpretação geométrica
dos problemas 13 e 14



Fonte: o autor, 2020.

Os problemas 15 e 16, a seguir, generalizam o resultado dos problemas 13 e 14, mostrando que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são densos em $\mathbb{R}$.

Sejam dados números reais a e b, com $a < b$ (Vamos considerar apenas o caso $a \geq 0$, pois é suficiente).

Problema 15) Prove que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < b - a$ e existe um $m \in \mathbb{N}$ $0 < \frac{\sqrt{2}}{m} < b - a$.

Demonstração:

$a < b \;\Rightarrow\; 0 < b - a \;\;;\;\; b - a \in \mathbb{R}$.

i) Consideremos $x = b - a \in \mathbb{R}$. O conjunto dos números reais admite a propriedade arquimediana. Logo, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$, $x \in \mathbb{R}$, ou $0 < \frac{1}{n} < b - a$.

ii) Consideremos também $y = \frac{b-a}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. Pela propriedade do item anterior, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m} < y$, $y \in \mathbb{R}$. Assim, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{m} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, ou $0 < \frac{\sqrt{2}}{m} < b - a$. ■

Problema 16) Sendo $a \geq 0$ e n e m escolhidos como no problema 15, mostre que um dos números $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ e um dos números $\frac{\sqrt{2}}{m}, \frac{2\sqrt{2}}{m}, \frac{3\sqrt{2}}{m}, \ldots$ pertencem ao intervalo (a, b).

A demonstração segue ideia próxima a Lima (2004, Curso de análise volume 1, p.84):
i) Como $b - a > 0$, existe um número natural n tal que $0 < \frac{1}{n} < b - a$. Seja o conjunto $A = \left\{k \in \mathbb{Z};\ \frac{k}{n} \geq b\right\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não-vazio de números inteiros, limitado inferiormente por $b \cdot n$. Consideremos $k_0 \in A$ seu menor elemento. Logo, $b \leq \frac{k_0}{n}$. Como $k_0 - 1 < k_0$, temos $\frac{k_0 - 1}{n} < b$. Podemos afirmar que $a < \frac{k_0 - 1}{n} < b$, pois, se não fosse assim, teríamos $\frac{k_0 - 1}{n} \leq a < b \leq \frac{k_0}{n}$ e $b - a \leq \frac{1}{n}$, contradição.

ii) Além disso, existe um número natural m tal que $0 < \frac{\sqrt{2}}{m} < b - a$. Analogamente, sejam $B = \left\{k \in \mathbb{Z};\ \frac{k\sqrt{2}}{m} \geq b\right\}$ o conjunto de números irracionais da forma $\frac{k\sqrt{2}}{m}$ e k_0 seu menor elemento. Logo, $b \leq \frac{k_0\sqrt{2}}{m}$. E, da mesma forma, teremos $a < \frac{(k_0 - 1)\sqrt{2}}{m} < b$. ■

CAPÍTULO 5) ENSINO DOS NÚMEROS REAIS

Neste capítulo, discutiremos questões relacionadas a características do ensino dos números reais na Educação Básica, que envolvem objetivos de aprendizagem, sua motivação, e os principais conceitos estudados. Apresentaremos também uma atividade aplicada em sala de aula, desenvolvida por nós, e outras sugestões de atividades e estratégias para o ensino desse tema.

5.1) Características acerca do ensino

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o conteúdo de Matemática do Ensino Básico (Fundamental e Médio) está distribuído em cinco unidades curriculares: Números e Operações (a qual compreende as noções sobre números reais), Grandezas e Medidas, Álgebra e Funções, Estatística e Probabilidade e Geometria. O trabalho com números reais se insere em todas as unidades curriculares de Matemática da BNCC. Até mesmo em Estatística e Probabilidade, onde a maioria dos modelos matemáticos são discretos. Ele se inicia no 8º ano do Ensino Fundamental, mas é mais presente do 9º ano em diante.

Os objetivos de aprendizagem relativos aos números, para o Ensino Médio, são: "compreender a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos dos naturais aos reais; e sistematizar procedimentos de cálculo e propriedades para resolver problemas do cotidiano de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática." (BRASIL, 2017, p. 573)

Conforme discussão da seção 1.2, pensamos que a importância do ensino dos números reais está no fato de serem base para diversos conteúdos de Matemática na escola. Por exemplo, dependem de números reais: intervalos, soluções de equações, demonstrações de geometria, resultados numéricos de problemas, entre outros.

Propomos também que esse tópico seja um instrumento capaz de retirar do aluno a compreensão geral da Matemática de forma "discreta", ou seja, associando diversos conceitos e problemas a contagens, o que é um erro. Em alguns anos atuando no Ensino Básico, constatei que, até nas etapas avançadas, é comum o aluno formular seu raciocínio a partir de números inteiros, além da falta de habilidade com racionais e irracionais.

É importante lembrar ainda que o trabalho com este tema oferece oportunidades de apresentar ao aluno algumas demonstrações de irracionalidade, discussão de propriedades dos números (racionais e irracionais) e dos conjuntos e exemplos com raciocínio abstrato.

O conteúdo de números reais deve englobar: os pré requisitos dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, operações e correspondência entre representação decimal e frações, no conjunto $\mathbb{Q}$ e apresentação do conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$. Para o conjunto $\mathbb{R}$, operações, sua representação geométrica, intervalos, densidade e completude.

5.2) Aplicação em sala de aula

Foi aplicada uma sequência de 3 atividades sobre números reais em duas turmas de primeiro ano, em que eu lecionava, de um colégio estadual de Ensino Médio, no Rio de Janeiro. A aplicação ocorreu nos dias 14, 21 e 28 de Novembro de 2019, respectivamente. As motivações estão em conformidade com a discussão das seções 1.2 e 5.1.

5.2.1) Apresentação, objetivo geral, metodologia.

Nas aulas do começo do ano letivo, os alunos tiveram as primeiras noções relacionadas aos números reais estudadas no Ensino Médio, como dízimas periódicas, números irracionais, organização dos números em conjuntos numéricos, o conjunto $\mathbb{R}$ como reunião dos racionais com os irracionais, a relação com conceitos de geometria como comprimento de segmento de reta e de circunferência, e intervalos. O objetivo geral das atividades nesse momento seguinte era reforçar a compreensão do tema, o que envolveu o raciocínio lógico principalmente sobre a representação decimal, as propriedades aritméticas, a representação geométrica e a percepção, com a definição, posteriormente, do conjunto dos números reais como sendo formado por números racionais e irracionais.

Também nesse momento, durante a abordagem interagi com as turmas, tirando dúvidas pontuais e apresentando outros exemplos, mas deixando a conclusão para o aluno. Duas turmas de 1º ano participaram, separadamente, e as atividades seriam pontuadas. Em cada turma, os alunos formaram duplas e deveriam responder questões em sua maioria discursivas (quando não, verdadeiro ou falso) numa folha e resolver a atividade proposta em um tempo de uma hora.

5.2.2) Descrição e objetivos das atividades

A primeira atividade consiste em identificar números racionais ou irracionais com base na representação decimal. Há ítens como reconhecer números racionais e irracionais. Apresenta, ainda, uma situação motivadora da necessidade de ampliação de conjuntos numéricos (neste caso, de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$), e mostra um problema simplificado cujo resultado é o número irracional solução da equação $x^2 - x - 1 = 0$, que tem como pano de fundo o cálculo da razão áurea, um tópico de geometria. Fiz este comentário durante a atividade.

Quadro 1 – Parte das questões da Atividade 1

1) Diga se é possível escrever os números abaixo em forma de fração. Nos casos possíveis, escreva **uma** fração para o número.

a) -2	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
b) 0,8	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
c) $1,555\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
d) $0,121212\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
e) $0,101001000\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
f) $\sqrt{3} = 1,7320508\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:

3) Um aparelho de som, que custa 1200 reais, é financiado da seguinte forma: uma entrada de 300 reais e o saldo em 24 prestações fixas. Determine o valor da prestação. Este número é inteiro ou não inteiro? É racional?

4) A equação do 2º grau $x^2 - x - 1 = 0$ aparece em diversos problemas de matemática. Resolva esta equação e considere a maior de suas raízes. Este número é racional ou irracional?

Obs: Este número é conhecido como “razão áurea”.

O autor, 2020.

Para a segunda atividade, é esperado dos alunos reconhecer a ideia de um conjunto mais amplo formado por racionais e irracionais, o dos números reais, sua aritmética e a reta real. São trabalhadas questões sobre operações com números racionais e irracionais e itens de verdadeiro ou falso acerca de propriedades de fechamento. São trabalhadas também questões sobre ordenamento e ideia de densidade dos racionais e irracionais nos reais. Na ocasião, sugeri aos alunos que trabalhassem com a reta real para criar exemplos.

Quadro 2 – Parte das questões da Atividade 2

2) Efetue. Atenção com os cálculos

a) $-\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$

b) $2{,}8+1{,}2$

c) $0{,}494949\ldots + 0{,}050505\ldots$

d) $0{,}72222\ldots + 0{,}0101010\ldots$

e) $5\cdot(-2)$

f) $\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{2}$

g) $(2+5\sqrt{2})+(4+2\sqrt{2})$

h) $(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})$

i) $4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{10}$

j) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$

k) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$

Obs:

- Não existe um número racional e irracional, ao mesmo tempo. Um número, ou é racional, ou é irracional.
- O conjunto dos números reais é formado por números racionais e por números irracionais.

4) Considere os **números reais 1,35 e 1,8**

a) Qual deles é o menor?

b) Escreva um número racional que esteja entre eles.

(...)

O autor, 2020.

Na terceira atividade, há dois objetivos. Os alunos devem desenvolver o cálculo de uma representação decimal de um número irracional. E compreender que as aproximações racionais sucessivas tendem a um número real, no caso, $\sqrt{a}$. Usa-se o método de Heron, ou seja, a recorrência $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, com a determinado e x_1 sendo uma aproximação arbitrária de a. Obtêm-se aproximações $x_2, x_3, \ldots$ para a raiz quadrada deste "a". É necessário explicar previamente a ideia de recorrência. Reforcei com os alunos que a fórmula se tratava de uma média aritmética.

Quadro 3 – Parte das questões da atividade 3

(...)

Sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$. Vamos obter uma sucessão de valores aproximados para a raiz quadrada de 2. (Utilize uma calculadora e use 4 casas decimais para cada resposta)

a) Por tentativa, consideremos inicialmente a aproximação $\sqrt{2} \cong 1{,}5$. Calcule x_1:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right)$$

b) Com o resultado x_1 encontrado no item (a), calcule x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$$

c) Com o resultado x_2 encontrado no item (b), calcule x_3:

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right)$$

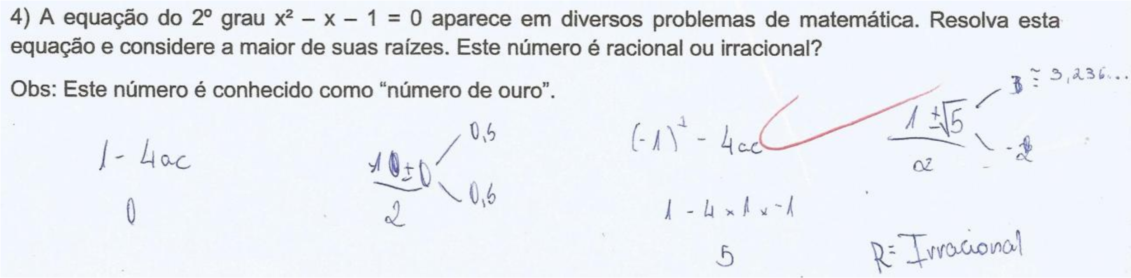
O resultado x_3 é uma aproximação para raiz quadrada de 2.

O autor, 2020.

5.2.3) Resultados observados

As duas turmas envolvidas tiveram boa participação e também se interessaram pelas atividades. Compreenderam adequadamente (maioria deles) a ideia de número real como racional ou irracional, conforme discutimos em 5.2.1. Na questão 4 da atividade 1 (figura 23, abaixo), era esperado do aluno concluir que a solução da equação era um número irracional baseando-se no exemplo 2-c dessa mesma atividade.

Figura 23 – Resposta do aluno - Atividade 1, questão 4.



4) A equação do 2º grau $x^2 - x - 1 = 0$ aparece em diversos problemas de matemática. Resolva esta equação e considere a maior de suas raízes. Este número é racional ou irracional?

Obs: Este número é conhecido como "número de ouro".

$1 - 4ac$

0

$\frac{10 \pm 0}{2}$ 0,5 0,6

$(-1)^2 - 4ac$

$1 - 4 \times 1 \times -1$

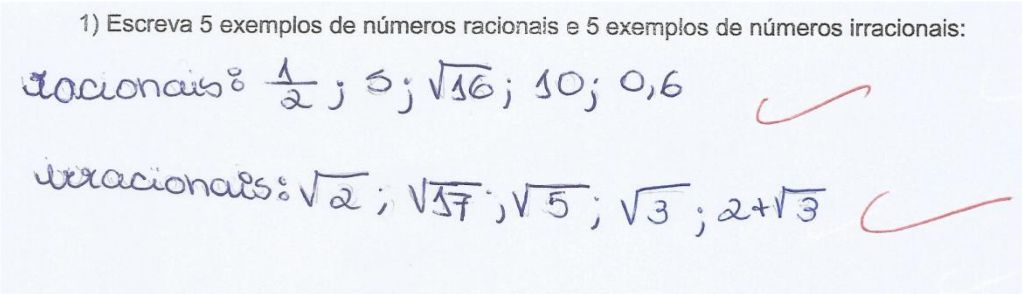
5

$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 3 ≅ 3,236...

R: Irracional

Fonte: dados da pesquisa, 2020.

Figura 24 – Resposta do aluno - Atividade 2, questão 1



1) Escreva 5 exemplos de números racionais e 5 exemplos de números irracionais:

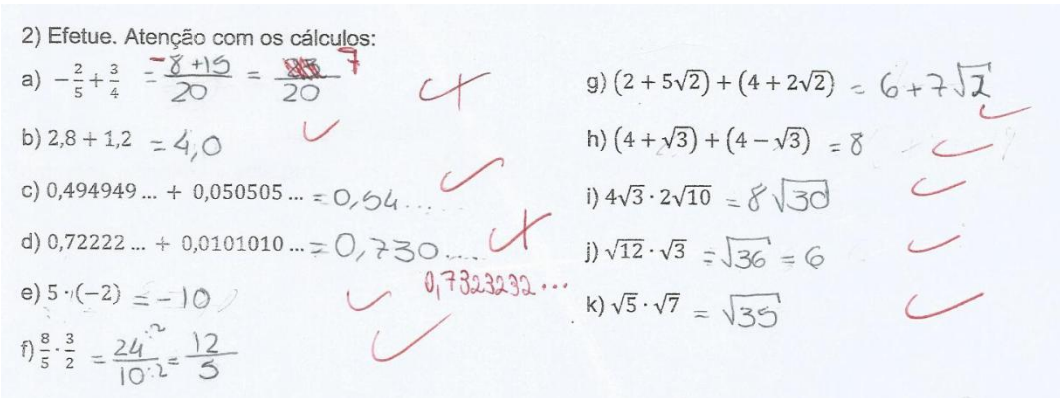
racionais: $\frac{1}{2}$; 5; $\sqrt{16}$; 10; 0,6

irracionais: $\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$

Fonte: dados da pesquisa, 2020.

Alguns alunos apresentaram algumas dificuldades nas questões 2 e 3, da atividade 2. Por conta deste fato, percebi falta de base do Ensino Fundamental ainda e abstração insuficiente, porém houve melhora em relação ao início do ano.

Figura 25 – Resposta do aluno - Atividade 2, questão 2



2) Efetue. Atenção com os cálculos:

a) $-\frac{2}{5}+\frac{3}{4} = \frac{-8+15}{20} = \frac{7}{20}$

b) $2{,}8 + 1{,}2 = 4{,}0$

c) $0{,}494949\ldots + 0{,}050505\ldots = 0{,}54\ldots$

d) $0{,}72222\ldots + 0{,}0101010\ldots = 0{,}730\ldots$ 0,7323232...

e) $5 \cdot (-2) = -10$

f) $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

g) $(2 + 5\sqrt{2}) + (4 + 2\sqrt{2}) = 6 + 7\sqrt{2}$

h) $(4 + \sqrt{3}) + (4 - \sqrt{3}) = 8$

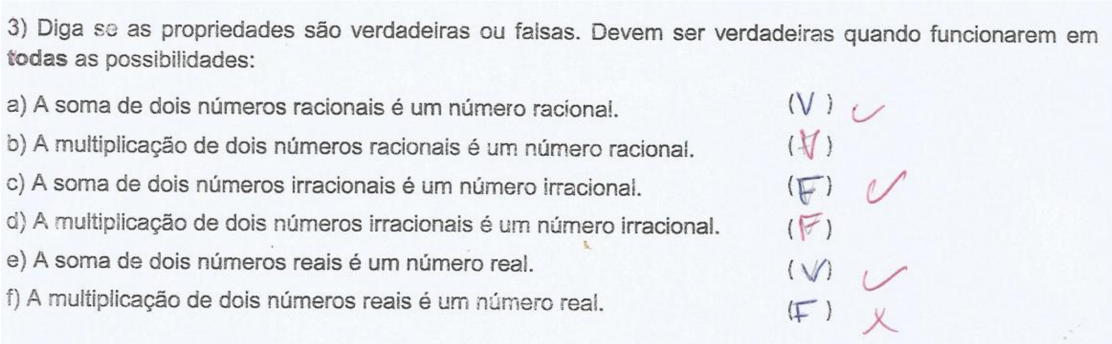
i) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{10} = 8\sqrt{30}$

j) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$

k) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35}$

Fonte: dados da pesquisa, 2020.

Figura 26 – Resposta do aluno - Atividade 2, questão 3



3) Diga se as propriedades são verdadeiras ou falsas. Devem ser verdadeiras quando funcionarem em **todas** as possibilidades:

a) A soma de dois números racionais é um número racional. (V)

b) A multiplicação de dois números racionais é um número racional. (V)

c) A soma de dois números irracionais é um número irracional. (F)

d) A multiplicação de dois números irracionais é um número irracional. (F)

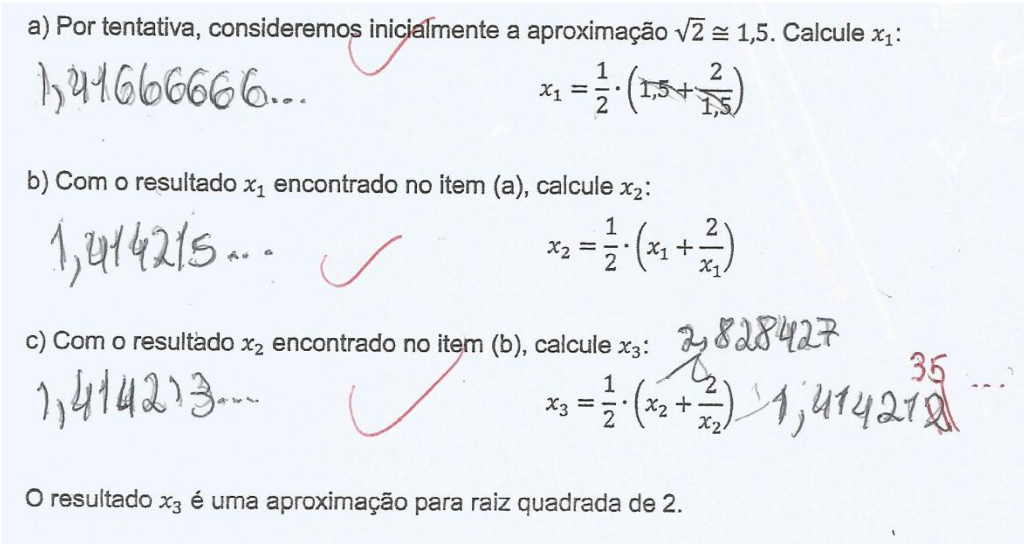
e) A soma de dois números reais é um número real. (V)

f) A multiplicação de dois números reais é um número real. (F) X

Fonte: dados da pesquisa, 2020.

Na atividade 3, os alunos compreenderam a ideia de recorrência, mostraram-se motivados a calcular a representação decimal e tiveram bom desempenho nessa atividade para algo diferente do que conheciam. Foi autorizado o uso da calculadora para o cálculo de $2/x_i$ e para a média aritmética.

Figura 27 – Resposta do aluno - Atividade 3, questão 3



a) Por tentativa, consideremos inicialmente a aproximação $\sqrt{2} \cong 1{,}5$. Calcule x_1:

1,41666666...

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right)$$

b) Com o resultado x_1 encontrado no item (a), calcule x_2:

1,414215...

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$$

c) Com o resultado x_2 encontrado no item (b), calcule x_3:

2,828427

1,414213...

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right)$$

1,414213 35 ...

O resultado x_3 é uma aproximação para raiz quadrada de 2.

Fonte: dados da pesquisa

A tabela a seguir contém as médias de cada turma e em cada atividade.

Resultados dos alunos (0,0 a 10,0) em cada atividade.

	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3
Turma 1	8,5	7,9	7,9
Turma 2	8,6	8,0	6,4

Fonte: dados da pesquisa

A média geral das 3 atividades foi 8,1, na turma 1, e 7,7, na turma 2. Os objetivos foram atingidos e consideramos a aplicação satisfatória. Poderiam ter sido acrescentadas às atividades outras questões sobre geometria e desigualdades.

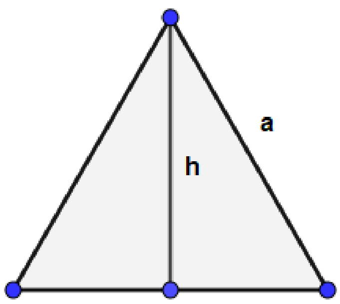
5.3) Outras sugestões

Seguem sugestões de outros tópicos de Matemática Básica envolvendo números reais. É interessante explorar os números irracionais justamente como um diferencial. Essas sugestões podem servir como base para criar outras atividades puramente matemáticas ou contextualizadas. Segue também um esquema para classificação dos números reais a partir da representação decimal.

a) Altura do triângulo equilátero.

Se o lado de um triângulo equilátero tem por medida o número racional a, então a altura tem por medida o número irracional $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Figura 28 – lado e altura do triângulo equilátero

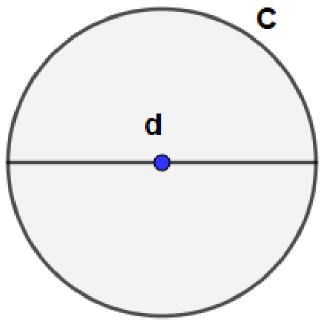


Fonte: o autor, 2020.

b) Comprimento e diâmetro da circunferência.

Se em uma circunferência, o diâmetro tem por medida o número racional d, então o comprimento tem por medida o número irracional $C = \pi \cdot d$.

Figura 29 : diâmetro e comprimento da circunferência



Fonte: o autor, 2020.

c) Cálculo aproximado de logaritmos onde o logaritmando não é potência racional da base do logaritmo, cujo cálculo requer o recurso da mudança de base. Por exemplo, $\log_2 6$. $\left(= \frac{\log 6}{\log 2} \cong 2{,}58\right)$. Este logaritmo é irracional.

d) Série geométrica convergente $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$, cujo limite é o número real 2.

Notemos que:

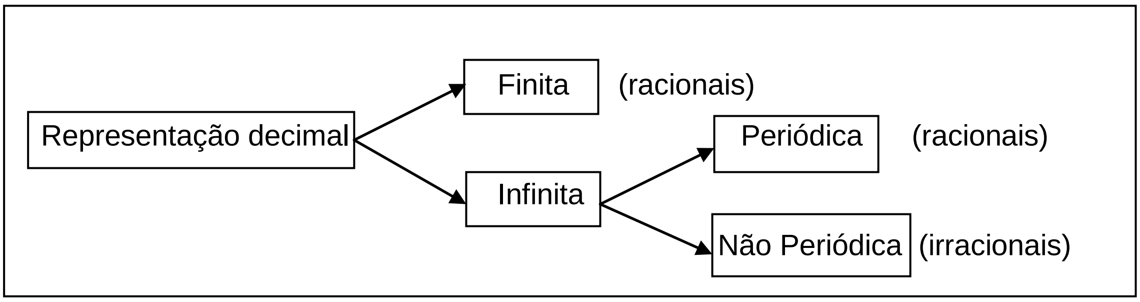
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1 \cdot ((1/2)^n - 1)}{(1/2) - 1} = 2 - \frac{2}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Alguns valores para S_n, em representação decimal, podem ajudar intuitivamente a reconhecer o limite dessa série geométrica que é um número real, além de ser inteiro.

$$S_1 = 1\,;\; S_2 = 1{,}5\;;\; S_3 = 1{,}75\;;\; S_4 = 1{,}875\;;\; \ldots\;;\; S_8 = 1{,}9921875\;;\; \ldots$$

e) Propomos o esquema seguinte para facilitar a classificação dos números reais.

Quadro 4 – Esquema para classificação dos números reais



O autor, 2020.

CONCLUSÃO

Este trabalho abordou os números reais a partir de exemplos históricos concretos, resultados relevantes sobre números irracionais e racionais, apresentação do conjunto dos números reais e uma proposta para a sala de aula.

No Ensino Médio, os números reais são estudados considerando a classificação em racionais e irracionais, operações, reta numérica e intervalos. Quanto a sua aplicação, aparecem alguns exemplos históricos, além de que a maioria dos conteúdos matemáticos estão vinculados a modelos de natureza contínua.

Notamos o desenvolvimento do conceito de número real como consequência do desenvolvimento da própria Matemática, em um processo não-linear, o qual recebeu contribuições sistematizadas significativas nos séculos IV a.C. e XIX. Consideramos que avanços igualmente importantes da Matemática ocorreram neste intervalo, não na forma sistematizada e que voltaria à tona. Por envolverem tópicos estratégicos e estarem relacionados aos números reais, podem ajudar a compreender melhor esse processo todo.

Os teoremas sobre representação decimal, casos de irracionalidade e aproximação por racional são ferramentas importantes à Matemática e ao Ensino. Pois trazem algumas generalizações e ajudam a identificar um número real, classificá-lo como racional ou irracional, reconhecer irracionais comuns e determinar uma representação decimal por um método.

No século XIX, surgiu o conceito de número real num processo de abstração e formalização da Matemática, motivado por problemas como continuidade da reta e condições para o cálculo diferencial e integral, o que foi desenvolvido por Dedekind com inspiração na teoria das proporções de Eudoxo, além das contribuições de Cauchy, Weierstrass, Cantor e outros.

Na atividade de sala de aula, os conceitos de números reais foram revistos e o resultado geral foi satisfatório. A abstração dos alunos pode ser melhorada. Não houve grande dificuldade com aritmética nem representação geométrica dos reais.

Esperamos que os tópicos de Matemática pura, História da Matemática e Ensino presentes neste trabalho possam contribuir ao ensino dos números reais na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

[1] AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Trad. João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2002.

[2] AGUILAR, Ivan. DIAS, Marina Sequeiros. In: 4º Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, Minicurso 6. 2015, Catalão, GO. **A construção dos números reais e suas extensões**. Niterói, Ed. UFF.

[3] ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3 ed. São Paulo, SP. Editora Edgard Blücher, 2006.

[4] BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**. São Paulo, SP. Editora Moderna, 2004, vol.1.

[5] BOYER, Carl. **História da Matemática**. 3 ed, 1974. Trad. Helena Castro. São Paulo, SP. Editora Edgard Blücher, 2012.

[6] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF. MEC, 2017.

[7] ______. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, DF. MEC, 2006.

[8] ______. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, DF. MEC, 2000.

[9] COIMBRA, Jayro Mendes. **O Ensino de Cálculo na Educação Básica**. Dissertação de Mestrado – PROFMAT/UERJ. Rio de Janeiro, RJ. 2015

[10] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática**. Trad. Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro, RJ. Editora Ciência Moderna, 2000.

[11] EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. Irineu Bicudo. SP. Editora UNESP, 2009.

[12] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. Volume 1. 5 ed. Rio de Janeiro, RJ. LTC, 2008.

[13] IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar** – volume 1. 8 ed. São Paulo, SP. Atual Editora, 2011.

[14] LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio –** volume 1. 10 ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2012.

[15] LIMA, Elon Lages. **Análise Real** – volume 1. 7 ed. Rio de Janeiro, RJ. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[16] **_______**. **Curso de análise vol. 1**. 11 ed. Rio de Janeiro, RJ. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[17] MOUTINHO, Ion. **O Ensino de Números Reais**, 2017. Página sobre números reais voltada para graduação. Disponível em: <http://construindoreais.blogspot.com>

[18] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar** – volume 1. 2 ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM. 2014.

[19] NIVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais.** 1961. Trad. Renata Wanatabe. Rio de Janeiro, RJ. SBM. 1990.

[20] RIO DE JANEIRO. **Currículo Mínimo Estadual**: Matemática. Rio de Janeiro, RJ. SEEDUC, 2012.

[21] ROQUE, Tatiana. PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática.** 1 ed. Rio de Janeiro, RJ. SBM, 2012.

[22] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro, RJ. Editora Zahar, 2012.

APÊNDICE 1

Faremos a demonstração de quatro propriedades de divisibilidade dos números inteiros e do critério de Eudoxo para convergência de uma sequência infinita. Estas ideias já constavam em *Os Elementos*. E demonstraremos também duas propriedades de soma e multiplicação de racionais com irracionais e a resolução de um problema de número irracional. Estes resultados podem ajudar na demonstração de teoremas sobre números racionais e irracionais deste texto e outros teoremas.

Propriedade 1) Seja a inteiro positivo. Se a é par, então a^2 é par. E se a é ímpar, então a^2 é ímpar.

Demonstração:
Se a é par, podemos escrever na forma $a = 2 \cdot k$. Logo, $a^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot (2 \cdot k^2)$, que é par.
Se a é ímpar, podemos escrever na forma $a = 2 \cdot k + 1$.
Logo, $a^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4 \cdot k^2 + 4 \cdot k + 1 = 2 \cdot (2 \cdot k^2 + 2 \cdot k) + 1$, que é ímpar. ■

Com raciocínio análogo, podemos provar também que se a é par, então a^3 é par. E se a é ímpar, então a^3 é ímpar.

Propriedade 2) (Lema de Gauss) Sejam a, b e c inteiros positivos, com a e b primos entre si. Se $a \mid b \cdot c$, então $a \mid c$.

Demonstração:
Se $mdc(a, b) = d$, então existem inteiros tais que $m \cdot a + n \cdot b = d$. Como a e b são primos entre si, $m \cdot a + n \cdot b = 1$. Multiplicando esta igualdade por c, obtemos:

$$c \cdot m \cdot a + c \cdot n \cdot b = c$$

Como $a \mid b \cdot c$, então $b \cdot c = a \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo na igualdade acima:

$$c \cdot m \cdot a + n \cdot a \cdot k = c \text{ ou também } a \cdot (c \cdot m + n \cdot k) = c.$$

Logo, $a \mid c$. ■

Propriedade 3) Sejam a, b e c inteiros positivos, com a e b primos entre si. Se $a \mid c$ e $b \mid c$, então $a \cdot b \mid c$.

Demonstração:

Se $a \mid c$, então $c = a \cdot m$, $m \in \mathbb{Z}$. Se $b \mid c$, então $b \mid a \cdot m$. Como a e b são primos entre si, pela propriedade 2, $b \mid m$. Podemos escrever $m = b \cdot n$.

Substituindo $m = b \cdot n$ em $c = a \cdot m$, obtemos $c = a \cdot b \cdot n$. Logo, $a \cdot b \mid c$. ■

Propriedade 4) (Lema de Euclides) Sejam a, b e p inteiros, com p primo. Se $p \mid a \cdot b$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Demonstração:

Se $p \mid a$, não há mais o que provar. Se $p \nmid a$ então p e a são primos entre si e, pela propriedade 2, $p \mid b$. ■

Propriedade 5) Critério de Eudoxo (Os Elementos, Livro X, Proposição 1) segundo Aaboe (2002, p. 50).

> "Considere duas grandezas diferentes (por exemplo, comprimentos, áreas, volumes). Da maior, retire pelo menos sua metade. Da parte restante, retire pelo menos sua metade e assim sucessivamente. Após um número finito de passos, o que resta será menor do que a menor das grandezas."

Demonstração:

Em linguagem moderna, temos: Dado $a > b > 0$, se $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \dots)$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n < b$ ou, equivalentemente, se $\alpha_i \leq \frac{1}{2}$, então $\lim_{n \to \infty} a \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = 0$.

Seja o número real a_i o que resta de a após i reduções α_i a, no máximo, a metade de a. Assim, aumentando-se o número de etapas:

$$a_1 = a \cdot \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \cdot a$$

$$a_2 = a \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \leq \frac{1}{2^2} \cdot a$$

$$\dots$$

$$a_n = a \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n \leq \frac{1}{2^n} \cdot a$$

Temos que:

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n} \cdot a$$

Passando-se ao limite, temos $\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cdot a$. Pelo Teorema do confronto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 < b$. ■

Propriedade 6) A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Demonstração:

Consideremos a um número racional e α um número irracional. Vamos supor, por absurdo, que a soma $a + \alpha = b$ seja racional.

Assim, teríamos $\alpha = b - a$ racional. Contradição. ■

Propriedade 7) O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Demonstração:

Usando raciocínio semelhante ao item anterior, vamos considerar a um número racional não nulo, α um número irracional e supor, por absurdo, que o produto $a \cdot \alpha = b$ seja racional.

Assim, teríamos $\alpha = \frac{b}{a}$ racional. Contradição. ■

APÊNDICE 2 - FICHAS DE ATIVIDADES DOS ALUNOS

Números Reais – Atividade 1

1) Diga se é possível escrever os números abaixo em forma de fração. Nos casos possíveis, escreva **uma** fração para o número.

a) -2	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
b) $0{,}8$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
c) $1{,}555\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
d) $0{,}121212\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
e) $0{,}101001000\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:
f) $\sqrt{3} = 1{,}7320508\cdots$	( ) Possível	( ) Impossível	Fração:

2) Classifique cada número em racional ou irracional:

a) 5 ________________________

b) $\sqrt{2} = 1{,}414213562\cdots$ ________________________

c) $3 + \sqrt{2} = 4{,}414213562\cdots$ ________________________

d) $\frac{7}{4} = 1{,}75$ ________________________

e) $\frac{7}{3} = 2{,}333\cdots$ ________________________

f) $\sqrt{16} = 4$ ________________________

g) $\sqrt{17} = 4{,}1231056\cdots$ ________________________

h) $\pi = 3{,}141592\cdots$ ________________________

3) Um aparelho de som, que custa 1200 reais, é financiado da seguinte forma: uma entrada de 300 reais e o saldo em 24 prestações fixas. Determine o valor da prestação. Este número é inteiro ou não inteiro? É racional?

4) A equação do 2º grau $x^2 - x - 1 = 0$ aparece em diversos problemas de matemática. Resolva esta equação e considere a maior de suas raízes. Este número é racional ou irracional?

Obs: Este número é conhecido como “razão áurea”.

<u>Números Reais – Atividade 2</u>

1) Escreva 5 exemplos de números racionais e 5 exemplos de números irracionais:

2) Efetue. Atenção com os cálculos:

a) $-\frac{2}{5}+\frac{3}{4}$

b) $2{,}8 + 1{,}2$

c) $0{,}494949\ldots + 0{,}050505\ldots$

d) $0{,}72222\ldots + 0{,}0101010\ldots$

e) $5 \cdot (-2)$

f) $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{2}$

g) $(2+5\sqrt{2}) + (4+2\sqrt{2})$

h) $(4+\sqrt{3}) + (4-\sqrt{3})$

i) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{10}$

j) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

k) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$

3) Diga se as propriedades são verdadeiras ou falsas. Devem ser verdadeiras quando funcionarem em **todas** as possibilidades:

a) A soma de dois números racionais é um número racional. ( )
b) A multiplicação de dois números racionais é um número racional. ( )
c) A soma de dois números irracionais é um número irracional. ( )
d) A multiplicação de dois números irracionais é um número irracional. ( )
e) A soma de dois números reais é um número real. ( )
f) A multiplicação de dois números reais é um número real. ( )

Obs:

- <u>Não existe um número racional e irracional, ao mesmo tempo. Um número, ou é racional, ou é irracional.</u>
- <u>O conjunto dos números reais é formado por números racionais e por números irracionais</u>.

Dizemos que um número “está entre” dois números a e b quando é maior do que a e menor do que b .

4) Considere os **números reais 1,35 e 1,8**

a) Qual deles é o menor?

b) Escreva um número racional que esteja entre eles.

c) Escreva um número racional que esteja entre 1,35 e o número que você escreveu no item b)

5) Considere os **números reais 1,287 e 5**.

a) Qual deles é o menor?

b) Escreva um número irracional que esteja entre eles.

c) Escreva um número irracional que esteja entre 1,287 e o número que você escreveu no item b)

Nos exercícios 4 e 5, sempre é possível encontrar um outro número, menor (ou maior, no sentido contrário), e continuar este processo **infinitamente.** Dizemos que os conjuntos Q e I são **densos** (em R).

<u>Números Reais – Atividade 3</u>

1) Escreva dois exemplos de números racionais e dois exemplos de números irracionais **usando a representação decimal**.[15]

2) Duas calculadoras apresentaram os seguintes resultados para a raiz quadrada de 2: $1,4142135$ e $1,4142136$.

a) Por que são diferentes?

b) Você acha que a raiz quadrada de 2 é maior do que estes dois números, menor do que estes dois números ou está entre eles? Por que?

3) Observe o problema abaixo:

I) Consideremos o produto: $x \cdot \frac{2}{x} = 2$

Neste produto, se x aumenta, (2/x) diminui; e se x diminui, (2/x) aumenta.

II) Procuramos um valor que iguala x a (2/x), que será a raiz quadrada de 2.

Vejamos: $x = \frac{2}{x}$

Então, pela proporcionalidade, $x^2 = 2$. Logo, $x = \sqrt{2}$ (Vamos considerar apenas a raiz positiva)

III) Partindo de um valor "a" arbitrário, próximo à raiz quadrada de 2, e outro "$2/a$" e usando a média aritmética entre os dois, podemos chegar a um valor aproximado x para a raiz.

Se usarmos este valor aproximado x e continuarmos o processo de média aritmética entre x e $2/x$, em etapas posteriores o valor de x estará mais próximo a raiz quadrada de 2.

Sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$. Vamos obter uma sucessão de valores aproximados para a raiz quadrada de 2. (Utilize uma calculadora e use 4 casas decimais para cada resposta)

a) Por tentativa, consideremos inicialmente a aproximação $\sqrt{2} \cong 1,5$. Calcule x_1:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1,5 + \frac{2}{1,5}\right)$$

b) Com o resultado x_1 encontrado no item (a), calcule x_2:

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right)$$

c) Com o resultado x_2 encontrado no item (b), calcule x_3:

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right)$$

O resultado x_3 é uma aproximação para raiz quadrada de 2.

---

[15] A rigor, escrever um número finito de casas decimais, apenas, não é suficiente para determinar se o número é racional ou irracional. Mas contribui à intuição do aluno do Ensino Médio sobre números reais.