

## Um estudo sobre as funções trigonométricas e hiperbólicas de terceira ordem

Talison Gomes Moreira<sup>1</sup>

José Eloy Ottoni<sup>2</sup>

Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2018  
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ  
E-mail: talisond@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso  
Departamento de Estatística, Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ  
E-mail: jeottoni@ufsj.edu.br

<sup>3</sup>Coorientadora do Trabalho de Conclusão de Curso  
Departamento de Estatística, Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ  
E-mail: amandagso@ufsj.edu.br

## **Agradecimentos**

Primeiramente agradeço a DEUS por me dar forças e me permitir chegar até aqui.

À minha esposa pela paciência, companheirismo e por me mostrar que os obstáculos estão aí para serem vencidos.

Aos meus pais pelo grande apoio e incentivo, principalmente nas horas de dificuldade. À minha irmã Tatiana e ao Paulo César pelo apoio.

Aos meus amigos que tanto me impulsionaram nessa caminhada.

Aos colegas de trabalho pela motivação.

Ao meu orientador, José Eloy Ottoni, por sua paciência, dedicação e atenção oferecidas para que esse trabalho pudesse ser realizado.

À professora Amanda, coorientadora desse trabalho, que também nos deu força e ideias para a realização desse projeto.

À minha colega de trabalho, professora Fabiana Parreira que me incentivou tanto nessa caminhada, e também à professora Dulcineia que foi quem me incentivou a começar este trabalho.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar as funções trigonométricas e hiperbólicas generalizadas, mais especificamente as funções trigonométricas e hiperbólicas de terceira ordem, bem como a relação entre elas, seus gráficos, suas derivadas e alguma menção à sua história e algumas aplicações. Primeiramente serão definidas as funções trigonométricas circulares comuns, com seus respectivos gráficos, sua relação com a geometria do círculo, serão demonstradas as mais importantes identidades trigonométricas, fórmulas de adição de arcos, derivadas, integrais dessas funções e suas inversas. A seguir serão apresentadas, através da geometria da hipérbole equilátera, as funções hiperbólicas clássicas, bem como sua parametrização em relação à função exponencial e aplicações. Também serão mostrados os gráficos delas, identidades fundamentais, fórmulas de adição de arco, suas derivadas, integrais e funções inversas. Posteriormente serão definidas as funções hiperbólicas de terceira ordem como caso especial das hiperbólicas generalizadas. O foco será o estudo desse caso especial, e serão traçados seus gráficos, mostradas suas derivadas e relações fundamentais. Finalmente serão definidas as funções trigonométricas de terceira ordem e a relação entre as trigonométricas e as hiperbólicas de ordem três. Através dessa relação entre elas e das propriedades das hiperbólicas, já estudadas, serão mostradas as derivadas, as fórmulas de soma de arcos, algumas identidades e gráficos das trigonométricas. Ao término será feita uma seção com aplicação das funções trigonométricas circulares e hiperbólicas de segunda ordem para alunos do ensino médio e uma breve conclusão sobre perspectivas futuras que esse trabalho pode acarretar.

### Palavras-chave:

Funções trigonométricas. Funções hiperbólicas. Funções hiperbólicas generalizadas. Funções trigonométricas generalizadas. Funções hiperbólicas de terceira ordem. Funções trigonométricas de terceira ordem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>As funções trigonométricas</b>	<b>8</b>
2.1	Razões trigonométricas no triângulo retângulo . . . . .	8
2.2	O círculo trigonométrico . . . . .	9
2.3	Identidades trigonométricas . . . . .	10
2.4	Gráficos das funções trigonométricas . . . . .	10
2.4.1	Gráfico da função seno . . . . .	11
2.4.2	Gráfico da função cosseno . . . . .	11
2.4.3	Gráfico da função secante . . . . .	12
2.4.4	Gráfico da função cossecante . . . . .	12
2.4.5	Gráfico da função tangente . . . . .	12
2.4.6	Gráfico da função cotangente . . . . .	13
2.5	Fórmulas de adição de arcos para as funções trigonométricas . . . . .	14
2.6	Derivadas das funções trigonométricas . . . . .	17
2.7	Integrais das funções trigonométricas . . . . .	19
2.8	As funções trigonométricas inversas . . . . .	20
2.8.1	A função arco seno . . . . .	20
2.8.2	A função arco cosseno . . . . .	20
2.8.3	A função arco tangente . . . . .	21
2.8.4	A função arco secante . . . . .	21
2.8.5	A função arco cossecante . . . . .	22
2.8.6	A função arco cotangente . . . . .	22
2.9	Identidades envolvendo as funções trigonométricas inversas . . . . .	23
2.10	Derivadas das funções trigonométricas inversas . . . . .	25
2.10.1	Derivada da função arco seno . . . . .	25
2.10.2	Derivada da função arco cosseno . . . . .	25
2.10.3	Derivada da função arco tangente . . . . .	26
2.10.4	Derivada da função arco secante . . . . .	26
2.10.5	Derivada da função arco cossecante . . . . .	26
2.10.6	Derivada da função arco cotangente . . . . .	27
2.11	Integrais das funções trigonométricas inversas . . . . .	28
<b>3</b>	<b>As funções hiperbólicas</b>	<b>29</b>
3.1	Relação entre as funções hiperbólicas e a função exponencial . . . . .	29
3.2	Parametrização do seno hiperbólico e do cosseno hiperbólico . . . . .	32
3.3	Fórmulas de adição de arcos para as funções hiperbólicas . . . . .	34
3.4	Identidades envolvendo as funções hiperbólicas . . . . .	35
3.5	Gráfico das funções hiperbólicas . . . . .	35
3.5.1	Gráfico da função seno hiperbólico . . . . .	36
3.5.2	Gráfico da função cosseno hiperbólico . . . . .	36
3.5.3	Gráfico da função tangente hiperbólica . . . . .	37
3.5.4	Gráfico da função secante hiperbólica . . . . .	37
3.5.5	Gráfico da função cossecante hiperbólica . . . . .	38
3.5.6	Gráfico da função cotangente hiperbólica . . . . .	38
3.6	Aplicação das funções hiperbólicas . . . . .	39
3.7	Funções hiperbólicas inversas . . . . .	39

3.7.1	A função arco seno hiperbólico . . . . .	40
3.7.2	A função arco cosseno hiperbólico . . . . .	40
3.7.3	A função arco tangente hiperbólico . . . . .	41
3.7.4	A função arco secante hiperbólica . . . . .	41
3.7.5	A função arco cossecante hiperbólica . . . . .	41
3.7.6	A função arco cotangente hiperbólica . . . . .	42
<b>4</b>	<b>As funções hiperbólicas e trigonométricas de terceira ordem</b>	<b>43</b>
4.1	Relação fundamental e fórmulas de argumento múltiplo . . . . .	49
4.2	Fórmulas de adição de arcos para as funções hiperbólicas de terceira ordem . .	51
4.3	Simetria das Funções Hiperbólicas de Terceira Ordem . . . . .	52
4.4	As funções trigonométricas de terceira ordem . . . . .	54
4.5	Fórmulas de adição de arcos para funções trigonométricas de terceira ordem .	56
4.6	Identidades trigonométricas para as funções de terceira ordem . . . . .	58
4.7	Gráficos das funções trigonométricas de terceira ordem . . . . .	59
4.7.1	Gráficos da função $\cos_{3,0} x$ . . . . .	59
4.7.2	Gráficos da função $\operatorname{sen}_{3,1} x$ . . . . .	60
4.7.3	Gráficos da função $\operatorname{sen}_{3,2} x$ . . . . .	60
4.7.4	Gráfico da função $\tan_{3,1} x$ . . . . .	61
4.7.5	Gráfico da função $\tan_{3,2} x$ . . . . .	61
4.7.6	Gráfico da função $\cot_{3,1} x$ . . . . .	61
4.7.7	Gráfico da função $\cot_{3,2} x$ . . . . .	62
4.7.8	Gráfico da função $\operatorname{sec}_{3,0} x$ . . . . .	62
4.7.9	Gráfico da função $\operatorname{csc}_{3,1} x$ . . . . .	63
4.7.10	Gráfico da função $\operatorname{csc}_{3,2} x$ . . . . .	63
4.8	Aplicação em sala de aula . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Conclusão e perspectivas futuras</b>	<b>67</b>

# 1 Introdução

A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos estímulos gerados pela astronomia, pela agrimensura e pela navegação, por volta do século IV ou V a.C. [1], com os egípcios, babilônios e gregos. As aplicações relacionadas à trigonometria não ficaram restritas somente à matemática, está presente também na física, na cartografia, na arquitetura, na engenharia [2]. Por exemplo, a técnica da triangulação é usada em astronomia para estimar a distância das estrelas próximas; em geografia e na topografia para estimar distâncias entre divisas e em sistemas de navegação por satélite. As funções seno e cosseno, que surgem na trigonometria, são fundamentais para a teoria das funções periódicas, que descrevem as ondas sonoras e luminosas.

A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo [3]. O astrônomo grego Hiparco de Nicéia, posterior a Euclides, por volta de 180 a.C. a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado “o pai da Trigonometria” [2, 3] pois, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia. As principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração de um catálogo estelar, fez melhoramentos importantes em algumas constantes astronômicas como a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios. Também parece ter sido Hiparco o primeiro grego a dividir o círculo em  $360^\circ$  na sua tábua de cordas, como faziam os babilônios muito antes.

Em meados do século XVIII, Vincenzo Riccati (1707 - 1775) definiu as funções hiperbólicas, assim chamadas por guardarem a mesma relação para com a hipérbole equilátera que as funções trigonométricas têm com o círculo (por isso também as trigonométricas são por vezes denominadas *funções circulares*), obtendo as fórmulas de adição e subtração de funções hiperbólicas, análogas às fórmulas para as trigonométricas. Riccati foi o primeiro a introduzir a notação para essas funções,  $Sh\ x$  e  $Ch\ x$  [4], utilizadas para o seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, respectivamente, além de usar  $Sc\ x$  e  $Cc\ x$  para as funções da trigonometria circular. A notação  $senh\ x$  e  $cosh\ x$  para essas mesmas funções, e que vigoram até hoje, surgiram apenas em 1768 com uma publicação do matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), onde se encontra o primeiro desenvolvimento sistemático das funções hiperbólicas. As aplicações dessas funções não demoraram a surgir, na engenharia [32], com a criação e aperfeiçoamento da ponte pênsil, dos cabos de distribuição de energia, de cabos telegráficos e etc, que descrevem uma curva denominada *catenária*, caracterizada por uma função hiperbólica, ou na matemática pura, na chamada geometria hiperbólica, base para a descrição matemática do espaço-tempo de Minkowski, da teoria da relatividade de Einstein, um dos pilares da física moderna.

As funções trigonométricas e hiperbólicas podem ser generalizadas de várias maneiras, e entre as mais estudadas estão as funções de Bessel e as funções hipergeométricas, muito conhecidas pela variedade de aplicações na física matemática. Pouco conhecidas, e talvez por isso mesmo tenham surgido e sido reinventadas repetidamente na matemática desde sua primeira formulação pelo mesmo Vincenzo Riccati, em 1757, são as chamadas funções hiperbólicas (e trigonométricas) generalizadas [8, 6, 7]. Essa classe de funções preservam muito da beleza e simplicidade das funções trigonométricas e hiperbólicas clássicas (que na formulação generalizada são as de segunda ordem), e muitas de suas propriedades podem

ser apresentadas sem o uso de técnicas avançadas de análise matemática. O estudo, e as aplicações dessas funções, está relacionado com tópicos tão diversos quanto o teorema binomial [9], as transformadas finitas de Fourier (FFT) [9], as álgebras de Clifford generalizadas [13, 14, 12], a teoria dos grupos de Lie [16], as matrizes circulantes, anticirculantes e de Toeplitz [5, 10, 16, 17, 20], equações diferenciais lineares ordinárias e parciais de ordem superior [9, 19], mecânica quântica em dimensão finita [13], redes de spin [15], etc.

Em contraste com as funções especiais da física-matemática que são as mais conhecidas generalizações das funções trigonométricas e hiperbólicas de segunda ordem, a generalização considerada aqui pode ser considerada *elementar* e rica fonte de investigação para estudantes e pesquisadores. Há uma vasta e dispersa literatura sobre esse assunto que compreende muitas décadas e diversos idiomas, principalmente em francês, inglês, italiano, alemão e polonês, mas até o momento (aparentemente) nada foi escrito em português (uma referência é feita no trabalho do PROFMAT [20]).

O software utilizado para esboço dos gráficos foi o Geogebra.

## 2 As funções trigonométricas

### 2.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

As razões trigonométricas mais elementares no triângulo retângulo são: o *seno*, o *coseno* e a *tangente*. Considere um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ . Destacando-se o ângulo  $\alpha$  determina-se  $b$  como cateto oposto e  $c$  como cateto adjacente. Denomina-se também a abreviação  $\text{sen}$  para representar *seno*,  $\text{cos}$  para representar *coseno* e  $\text{tg}$  para representar *tangente*. Define-se então as razões a seguir:

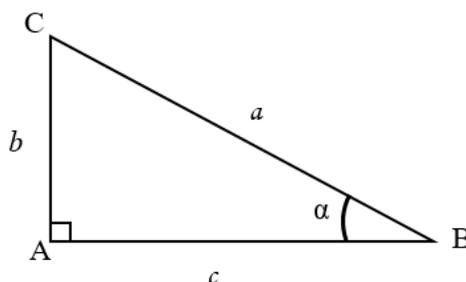


Figura 1: Razões trigonométricas no triângulo retângulo

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}; \quad (1)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}; \quad (2)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}; (\text{cos } \alpha \neq 0). \quad (3)$$

Define-se também outras razões trigonométricas que se relacionam com as três anteriores. São essas: *secante*, a *cossecante* e a *cotangente*. Utiliza-se a abreviação  $\text{sec}$  para representar a *secante*,  $\text{cosec}$  para representar a *cossecante* e  $\text{cotg}$  para representar a *cotangente*. Essas razões são definidas da seguinte forma:

$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}, \quad (\text{cos } \alpha \neq 0) \quad (4)$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}, \quad (\text{sen } \alpha \neq 0) \quad (5)$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\text{tan } \alpha}, \quad (\text{sen } \alpha \neq 0) \quad (6)$$

## 2.2 O círculo trigonométrico

O círculo trigonométrico é uma circunferência de raio unitário usada para representar ângulos e relacioná-los com números reais. Sendo assim cada ponto dessa circunferência está relacionado a um número real que representa um ângulo. O centro dessa circunferência está sobre o ponto de coordenadas  $(0, 0)$ .

A ideia de volta está presente nos círculos trigonométricos. Como o comprimento da circunferência é  $2\pi$ , podemos dizer que uma volta completa nesses círculos tem essa medida, mas o ângulo formado por essa volta mede  $360^\circ$ . Dessa maneira, o número  $2\pi$  relaciona-se com o ângulo  $360^\circ$ . A figura a seguir mostra a localização dos pontos correspondentes aos ângulos  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$  e os números reais, em função de  $\pi$ , relacionados.

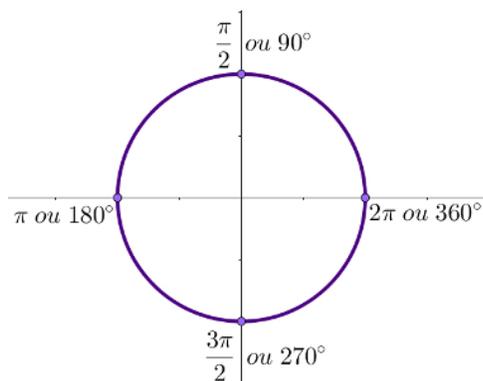


Figura 2: Círculo trigonométrico: representação de alguns ângulos

Neste círculo trigonométrico de raio unitário, o eixo horizontal corresponde ao cosseno e o eixo vertical corresponde ao seno. Como podemos observar na figura abaixo:

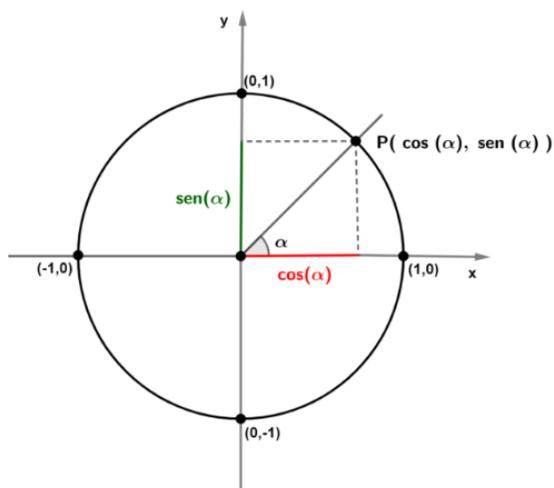


Figura 3: Círculo trigonométrico: funções seno e cosseno

## 2.3 Identidades trigonométricas

As relações trigonométricas fundamentais originam outras expressões, que são importantes e aplicáveis nos casos envolvendo funções de um mesmo arco. Toda igualdade verificável envolvendo funções trigonométricas é denominada identidade trigonométrica.

Observe o círculo trigonométrico de raio unitário abaixo com um triângulo retângulo cujos catetos são seno e cosseno. Aplicando o teorema de Pitágoras para esse triângulo, chega-se na identidade abaixo, denominada **Identidade Fundamental da Trigonometria**:

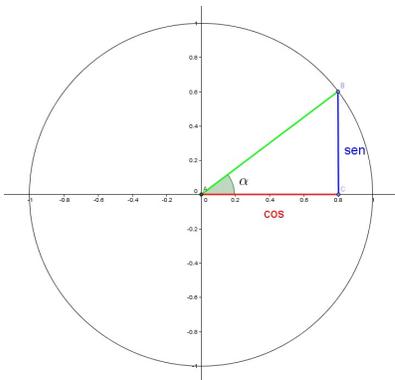


Figura 4: Círculo trigonométrico com um triângulo retângulo

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \quad (7)$$

A partir da identidade fundamental da trigonometria, pode-se mostrar outras identidades. Por exemplo, considere  $\text{sen } \alpha \neq 0$ , e divida os dois membros da equação por  $\text{sen}^2 \alpha$ :

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}$$

logo,

$$1 + \text{cotg}^2 \alpha = \text{cosec}^2 \alpha \quad (8)$$

ou, considere  $\text{cos } \alpha \neq 0$ , e divida os dois membros da equação por  $\text{cos}^2 \alpha$ :

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha}$$

obtendo

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \text{sec}^2 \alpha \quad (9)$$

Pela definição de seno e cosseno citada na seção (2,1), observa-se que para ângulos complementares tem-se as relações:

$$\text{cos } \alpha = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (10)$$

$$\text{sen } \alpha = \text{cos} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (11)$$

## 2.4 Gráficos das funções trigonométricas

Define-se funções periódicas como aquelas nas quais os valores da função  $y = f(x)$  se repetem para determinados valores da variável  $x$ , ou seja, para cada período determinado pelos valores de  $x$ , iremos obter valores repetidos para a função. Define-se também uma função  $y = f(x)$  como par se  $f(-x) = f(x)$ , para todo  $x$  no domínio de  $f$ . O gráfico de

uma função par é simétrico em relação ao eixo  $y$ , e uma função  $y = f(x)$  é dita ímpar se  $f(-x) = -f(x)$ , para todo  $x$  no domínio de  $f$ . O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem.

### 2.4.1 Gráfico da função seno

Considere a função  $y = \sin x$  com  $x \in \mathbb{R}$ , o gráfico dessa função é construído a partir da definição de seno mostrada na seção (2.1) e com o auxílio do círculo trigonométrico da figura (3). Observa-se que o gráfico da função seno é ímpar já que  $\sin(-x) = -\sin x$  e também a função seno é periódica pois ela se repete ao longo da variável independente com um determinado período constante. Portanto se existir um valor real  $T$  tal que  $f(x) = f(x + T)$  então será periódica com período  $T$ . Os valores de sua imagem estão no intervalo  $[-1, 1]$  e seu período é  $2\pi$ .

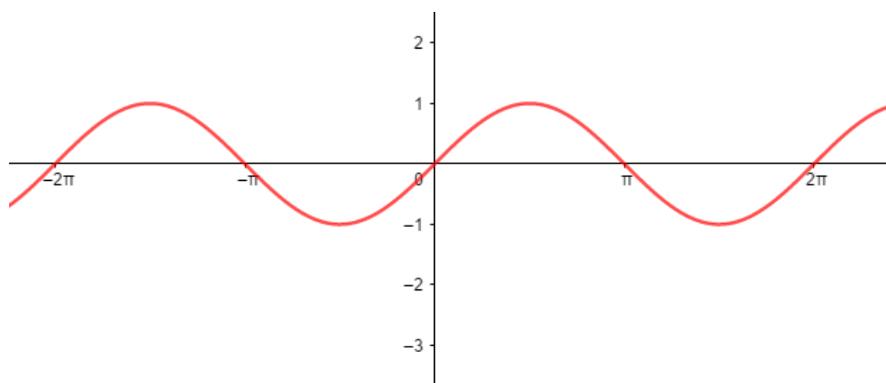


Figura 5: Gráfico da função seno

### 2.4.2 Gráfico da função cosseno

Considere a função  $y = \cos x$  com  $x \in \mathbb{R}$ , o gráfico dessa função é construído a partir da definição de cosseno mostrada na seção (2.1) e com o auxílio do círculo trigonométrico da figura (3). Observa-se que o gráfico da função cosseno é par já que  $\cos(-x) = \cos x$  e também a função cosseno é periódica. Sua imagem está no intervalo  $[-1, 1]$  e seu período é  $2\pi$ .

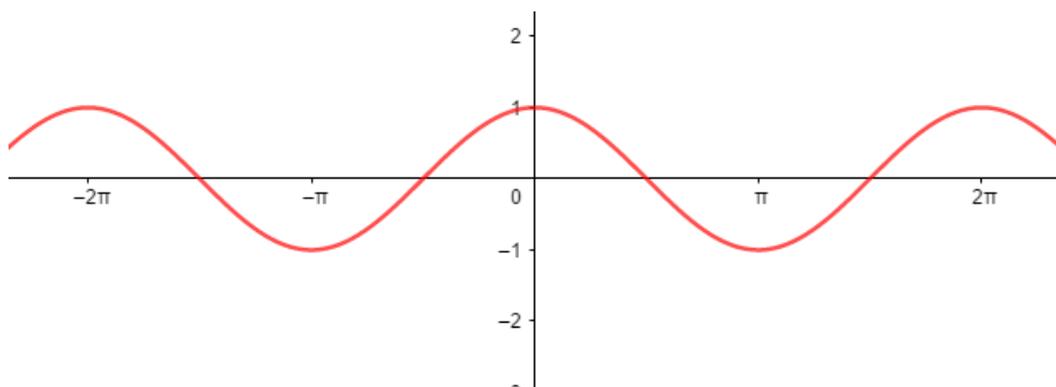


Figura 6: Gráfico da função cosseno

### 2.4.3 Gráfico da função secante

Considere a função  $y = \sec x$  com  $x \in \mathbb{R}$ , o gráfico dessa função é construído a partir da definição de secante mostrada na seção (2.1). Observa-se que o gráfico não é definido onde o cosseno é nulo, ou seja, seu domínio é dado por  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Pela definição nota-se que  $\sec x \leq -1$  ou  $\sec x \geq +1$ , para todo  $x$  real. Seu gráfico é periódico e seu período é  $2\pi$  e essa função é par.

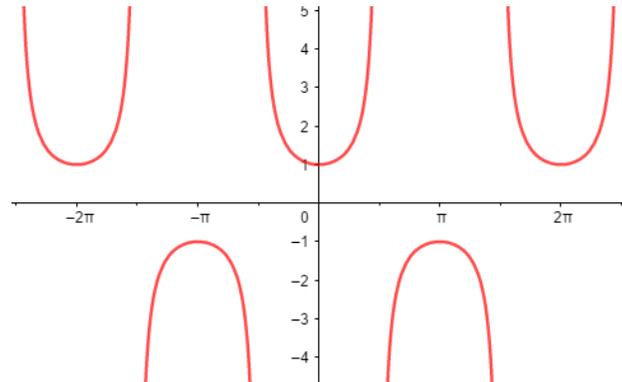


Figura 7: Gráfico da função secante

### 2.4.4 Gráfico da função cossecante

Considere a função  $y = \operatorname{cosec} x$  com  $x \in \mathbb{R}$ , o gráfico dessa função é construído a partir da definição de cossecante mostrada na seção (2.1). Observa-se que o gráfico não é definido onde o seno é nulo, ou seja, seu domínio é dado por  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Pela definição nota-se que  $\operatorname{cosec} x \leq -1$  ou  $\operatorname{cosec} x \geq +1$ , para todo  $x$  real. Seu gráfico é periódico e seu período é  $2\pi$  e essa função é ímpar.

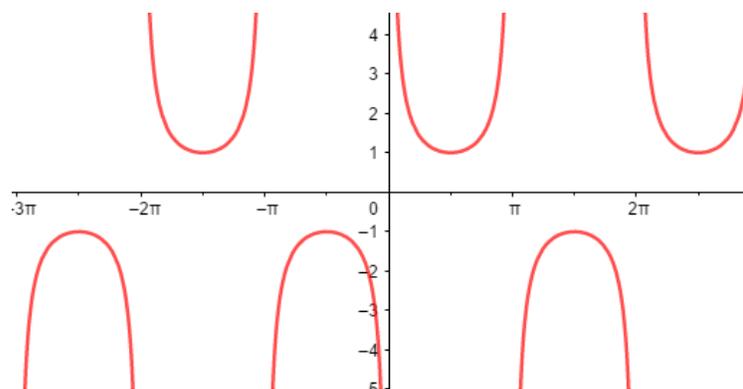


Figura 8: Gráfico da função cossecante

### 2.4.5 Gráfico da função tangente

Considere a função  $y = \operatorname{tg} x$  com  $x \in \mathbb{R}$ , o gráfico dessa função é construído a partir da definição de tangente mostrada na seção (2.1). Observa-se que o gráfico não é definido onde o cosseno é nulo, ou seja, seu domínio é dado por  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Essa função é ilimitada já que a imagem é dada por  $\mathbb{R}$ , mas é periódica, e seu período é  $\pi$ . Observa-se também que essa função é ímpar, já que  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ .

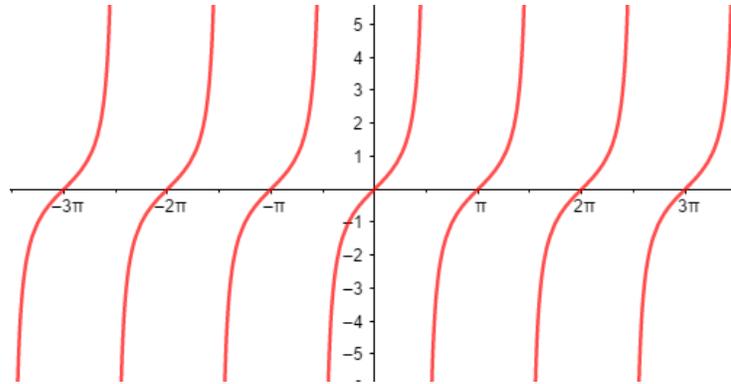


Figura 9: Gráfico da função tangente

#### 2.4.6 Gráfico da função cotangente

Considere a função  $y = \cotg x$  com  $x \in \mathbb{R}$ , o gráfico dessa função é construído a partir da definição de cotangente mostrada na seção (2.1). Observa-se que o gráfico não é definido onde o seno é nulo, ou seja, seu domínio é dado por  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ . Essa função é ilimitada já que a imagem é dada por  $\mathbb{R}$ , mas é periódica, e seu período é  $\pi$ . Observa-se também que essa função é ímpar, já que  $\cotg(-x) = -\cotg x$ .

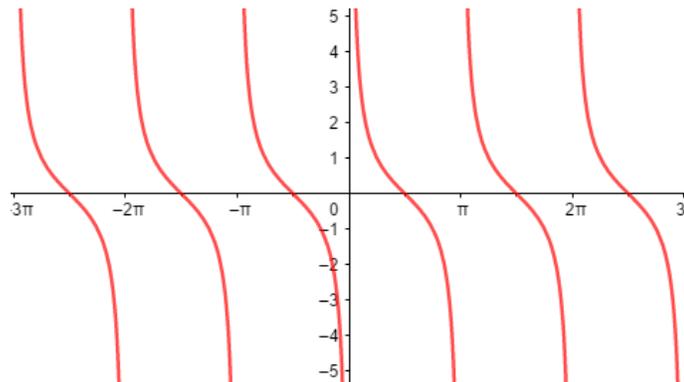


Figura 10: Gráfico da função cotangente

## 2.5 Fórmulas de adição de arcos para as funções trigonométricas

Nesta seção serão deduzidas geometricamente ou algebricamente as fórmulas de adição de arcos para todas as funções trigonométricas definidas acima. Observe o círculo trigonométrico abaixo de raio unitário:

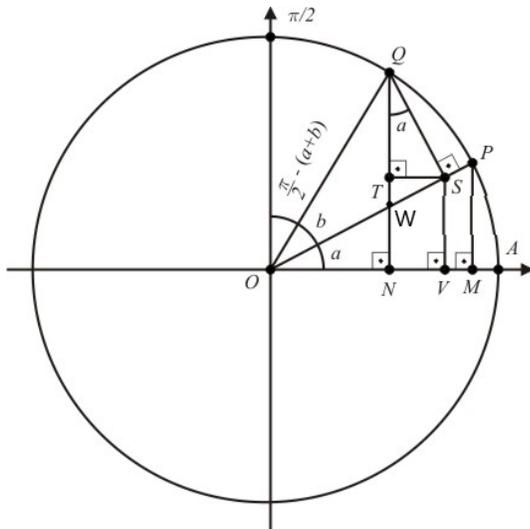


Figura 11: Demonstração geométrica das fórmulas de adição de arcos

Seja  $\widehat{AP}$  o arco com determinação  $a$  e  $\widehat{PQ}$  o arco com determinação  $b$ . O arco  $\widehat{AQ}$  tem determinação  $(a + b)$ . Observando as construções geométricas no círculo trigonométrico acima, pode-se deduzir que os triângulos  $OMP$ ,  $OVS$  e  $QTS$  são retângulos e semelhantes, pois  $OMP$  e  $OVS$  são retângulos e possuem um ângulo agudo  $a$  comum. Por outro lado os triângulos  $OMP$  e  $ONW$  também são semelhantes já que são retângulos e possuem o ângulo  $a$  comum. No triângulo  $ONW$ , o ângulo  $\widehat{OWN}$  pode ser representado por  $180^\circ - 90^\circ - a$ , ou seja,  $90^\circ - a$ . Os ângulos  $OWN$  e  $QWS$  são congruentes, pois são opostos pelo vértice, logo  $QWS$  vale  $90^\circ - a$  e portanto os triângulos  $ONW$  e  $QSW$  são semelhantes e então o ângulo  $WQS$  vale  $a$ . Considere o triângulo  $QTS$ , nota-se que ele é retângulo e possui um ângulo agudo  $a$ , logo ele é semelhante ao triângulo  $ONW$  que por sua vez é semelhante ao triângulo  $OMP$ . A partir das construções mostradas na figura (11) pode-se destacar que:

- (a)  $\overline{OM} = \cos a$
- (b)  $\overline{OS} = \cos b$
- (c)  $\overline{MP} = \text{sen } a$
- (d)  $\overline{SQ} = \text{sen } b$
- (e)  $\overline{ON} = \cos(a + b)$
- (f)  $\overline{NQ} = \text{sen}(a + b)$
- (g)  $\overline{OP} = 1$

Os triângulos  $OVS$  e  $OMP$  são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}}$$

Substituindo as relações (a), (b), (g) na igualdade acima, obtém-se:

$$(h) \overline{OV} = \cos a \cos b$$

Os triângulos  $QTS$  e  $OMP$  são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{OP}}$$

Substituindo as relações (c), (d) e (g) na igualdade acima, obtém-se:

$$(i) \overline{TS} = \sin a \sin b$$

Observando o círculo trigonométrico da figura 11, nota-se que:

$$\begin{aligned} \overline{ON} &= \overline{OV} - \overline{NV} \\ \overline{NV} &= \overline{TS}. \end{aligned}$$

Substituindo as relações (e), (h) e (i) na igualdade acima, obtém-se:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (12)$$

Para determinar  $\cos(a - b)$ , pode-se escrever a relação acima como:  $\cos[a + (-b)] = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$ , e observando a simetria nos gráficos das figuras (5) e (6), obtém-se:  $\cos b = \cos(-b)$  e  $\sin(-b) = -\sin b$ . Então pode-se concluir que:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (13)$$

Considere as equações (10) e (11) citadas na seção (2.3) e a equação (13), então para  $\sin(a + b)$  tem-se:

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b \end{aligned}$$

logo,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (14)$$

Analogamente ao caso do cosseno, para chegar a relação  $\sin(a - b)$ , pode-se fazer:

$$\sin(a - b) = \sin[a + (-b)] = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a$$

e, dadas as já mencionadas simetrias das funções seno e cosseno,  $\cos b = \cos(-b)$  (é uma função par) e  $\sin(-b) = -\sin b$  (a função seno é uma função ímpar), pode-se concluir que:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \quad (15)$$

Sabe-se, pela definição, que a tangente de um ângulo é dada pelo quociente entre o seno e o cosseno deste ângulo. A tangente da soma, poderá ser determinada da seguinte maneira:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro por  $\cos a \cos b$ , ( $\cos a \cos b \neq 0$ ), temos que:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}$$

Portanto:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad (16)$$

Analogamente, é fácil concluir que:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad (17)$$

Pela definição da secante,  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ , a secante da soma poderá ser determinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sec(a+b) &= \frac{1}{\cos(a+b)} = \frac{1}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \\ &= \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos a \cos b}{\frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos a \cos b}}} = \frac{\sec a \sec b \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\frac{1}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} - \frac{1}{\cos a \cos b}} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\sec(a+b) = \frac{\sec a \sec b \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b - \sec a \sec b}. \quad (18)$$

Analogamente mostra-se que :

$$\sec(a-b) = \frac{\sec a \sec b \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b + \sec a \sec b}. \quad (19)$$

Pela definição da cossecante,  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ , a cossecante da soma poderá ser determinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}(a+b) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(a+b)} = \frac{1}{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a} \\ &= \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} a \cos a \operatorname{sen} b \cos b}{\frac{\operatorname{sen} a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos a \cos b} + \frac{\operatorname{sen} b \cos a}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos a \cos b}}} = \frac{\sec a \sec b \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\frac{1}{\operatorname{sen} b \cos a} + \frac{1}{\operatorname{sen} a \cos b}} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\operatorname{cosec}(a+b) = \frac{\sec a \sec b \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\sec a \operatorname{cosec} b + \sec b \operatorname{cosec} a} \quad (20)$$

Analogamente mostra-se que :

$$\operatorname{cosec}(a-b) = \frac{\sec a \sec b \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}{\sec a \operatorname{cosec} b - \sec b \operatorname{cosec} a} \quad (21)$$

Pela definição da cotangente,  $\operatorname{cotg} a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$ , a cotangente da soma poderá ser calculada da seguinte forma:

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)} = \frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a} = \frac{\frac{\cos a \cos b}{\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}} - \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}}{\frac{\operatorname{sen} a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} + \frac{\operatorname{sen} b \cos a}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}$$

Portanto

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} \quad (22)$$

Analogamente mostra-se que:

$$\operatorname{cotg}(a-b) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} a - \operatorname{cotg} b} \quad (23)$$

## 2.6 Derivadas das funções trigonométricas

O conceito de derivadas surgiu com Pierre Fermat no século XVII. Com seus estudos sobre funções, ele chegou a um impasse sobre a definição do que era uma reta tangente. Ele percebeu que algumas das funções estudadas não batiam com a definição de reta tangente da época. Isso ficou conhecido como “problema da tangente”.

Foi, então, que ele resolveu o problema da seguinte maneira: para determinar uma reta tangente a uma curva no ponto  $P$ , ele definiu um outro ponto  $Q$  na curva e considerou a reta  $PQ$ . Desta forma, aproximou o ponto  $Q$  ao ponto  $P$ , obtendo assim retas  $PQ$  que se aproximavam de uma reta  $t$  que Fermat chamou de reta tangente ao ponto  $P$ .

Estas foram as ideias consideradas como “embriões” para o conceito de derivadas. Entretanto, Fermat não possuía as ferramentas necessárias, por exemplo, o conceito de limite por ainda não ser conhecido na época. Foi apenas com Leibniz e Newton que o cálculo diferencial tornou-se possível e importante para as ciências exatas.

Definição: Seja  $I$  um intervalo aberto não-vazio e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$  uma função de  $I$  em  $\mathbb{R}$ . Diz-se que  $f(x)$  é *derivável no ponto*  $a \in I$  se existir o limite :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (24)$$

Se for esse o caso, o número real  $f'(a)$  é chamado de *derivada da função*  $f$  no ponto  $a$ .

Alternativamente, pode-se representar este limite como:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Utilizando esta definição, observe como calcular a derivada da função seno:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(a + h) - \text{sen}(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } a \cos h + \text{sen } h \cos a - \text{sen } a}{h}$$

agrupando o limite tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } a \cos h - \text{sen } a}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h \cos a}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } a(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h \cos a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } a(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h \cos a}{h} \\ &= \text{sen } a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 h - 1)}{h(\cos h + 1)} + \cos a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \\ &= \text{sen } a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-\text{sen}^2 h)}{h(\cos h + 1)} + \cos a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \end{aligned}$$

mas,  $\lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } h = 0$  e  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1$ , pois, conforme podemos observar na figura abaixo, onde (em radianos)  $\overline{AC} = \text{sen } x$ ,  $\overline{BD} = \text{tg } x$  e  $\widehat{BC} = x$ :

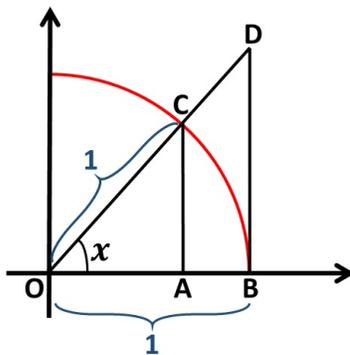


Figura 12: Círculo trigonométrico, destacando o seno e a tangente

Pode-se observar que

$$\begin{aligned} \widehat{AC} &< \widehat{BC} < \text{tg } x \\ \text{sen } x &< x < \text{tg } x \\ \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} &< \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x} \\ 1 &< \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x} \\ \cos x &< \frac{\text{sen } x}{x} < 1 \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Confronto, e aplicando o limite com  $x \rightarrow 0$  tem-se que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Então  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h \text{ sen } h}{h} = 0$  e  $\cos a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = \cos a$ , portanto:

$$\text{sen}' x = \cos x \quad (25)$$

Analogamente mostra-se que

$$\cos' x = -\text{sen } x \quad (26)$$

Por outro lado, para se calcular as derivadas das demais funções trigonométricas, será usada a *regra do quociente para derivadas*. Sejam  $u$  e  $v$  funções deriváveis e considere  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  então a derivada de  $f$  é dada por:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2} \quad (27)$$

Para a tangente usa-se as derivadas de seno e cosseno e a regra do quociente de derivadas:

$$f'(x) = \text{tg}' x = \left( \frac{\text{sen } x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x - \text{sen } x(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

portanto

$$\text{tg}' x = \sec^2 x \quad (28)$$

Para a secante tem-se:

$$\sec' x = \left( \frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{0 \cdot \cos x - 1(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{\cos x}$$

portanto:

$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x \quad (29)$$

Para a cossecante tem-se:

$$\operatorname{cosec}' x = \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)' = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

portanto:

$$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \quad (30)$$

Para a cotangente tem-se:

$$\operatorname{cotg}' x = \left( \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)' = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

portanto:

$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x \quad (31)$$

## 2.7 Integrais das funções trigonométricas

De uma forma geral, a integral indefinida de uma função  $f$  é conhecida como sendo a primitiva de  $f$ . Em outras palavras, a integral indefinida representa toda uma família de funções que são diferenciadas por uma constante  $C$  e que ao calcular sua derivada, encontra-se a função  $f$ . A notação utilizada para o cálculo de integral é  $\int f(x)dx$ .

Definição: Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ . Suponha que este intervalo seja dividido em  $n$  partes iguais de largura  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e seja  $x_j$  um número pertencente ao  $j$ -ésimo intervalo, para  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ . Neste caso a integral definida de  $f$  em  $[a, b]$  denotada por  $\int_a^b f(x)dx$  é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^n f(x_j) \right] \Delta x,$$

se esse limite existir. O teorema fundamental do cálculo afirma que, se  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$ , ou seja,  $F' = f$ .

A partir desse teorema, obtém-se imediatamente as seguintes integrais envolvendo as funções trigonométricas:

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c \quad (32)$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c \quad (33)$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + c \quad (34)$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + c \quad (35)$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + c \quad (36)$$

$$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cosec} x + c \quad (37)$$

## 2.8 As funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas inversas são as inversas de restrições apropriadas (restrições principais) das funções trigonométricas, usualmente são chamadas de função de arco pois retornam o arco correspondente a certa função trigonométrica. O gráfico da função inversa de  $f$  é dado pela rotação em torno da reta  $y = x$  do gráfico de  $f$ . Define-se essas funções como:

### 2.8.1 A função arco seno

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^{-1} x \iff x = \operatorname{sen} y \quad (38)$$

A função seno é bijetora no intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , logo ela possui inversa nesse intervalo. O domínio da função seno é  $\mathbb{R}$  e a imagem é o intervalo  $[-1, 1]$ , logo o domínio da função arco seno será o intervalo  $[-1, 1]$  e sua imagem será  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Observe seu gráfico:

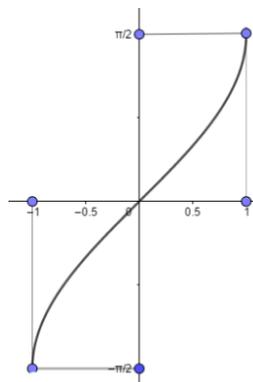


Figura 13: Gráfico da função arco seno

### 2.8.2 A função arco cosseno

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x = \operatorname{cos}^{-1} x \iff x = \operatorname{cos} y \quad (39)$$

A função cosseno é bijetora no intervalo  $[0, \pi]$ , logo ela possui inversa nesse intervalo. O domínio da função cosseno é  $\mathbb{R}$  e a imagem é o intervalo  $[-1, 1]$ , logo o domínio da função arco cosseno será o intervalo  $[-1, 1]$  e sua imagem será  $[0, \pi]$ . Observe seu gráfico:

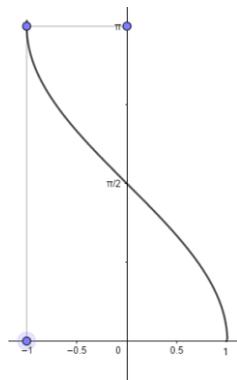


Figura 14: Gráfico da função arco cosseno

### 2.8.3 A função arco tangente

$$y = \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{tg}^{-1} x \iff x = \operatorname{tg} y \quad (40)$$

Como a função tangente é bijetora no intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , ela possui inversa nesse intervalo. O domínio da tangente é  $x \in \mathbb{R}$  e  $x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  e sua imagem é dada por  $\mathbb{R}$ , logo o domínio da função arco tangente será  $\mathbb{R}$  e sua imagem será definida pelo intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Observe seu gráfico:

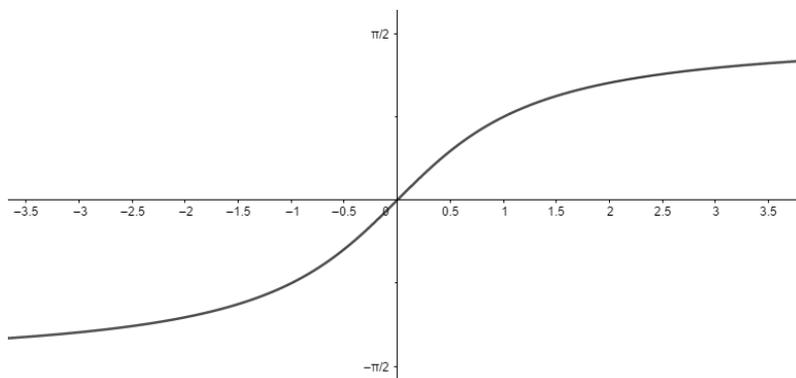


Figura 15: Gráfico da função arco tangente

### 2.8.4 A função arco secante

$$y = \operatorname{arc\,sec} x = \operatorname{sec}^{-1} x \iff x = \operatorname{sec} y \quad (41)$$

Na seção (2.4.4) foi citado o domínio e a imagem da função secante, logo para a função arco secante tem-se o domínio definido por  $]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$  e para a imagem o intervalo  $]0, \pi[$  com  $y \neq \frac{\pi}{2}$ . Observe seu gráfico:

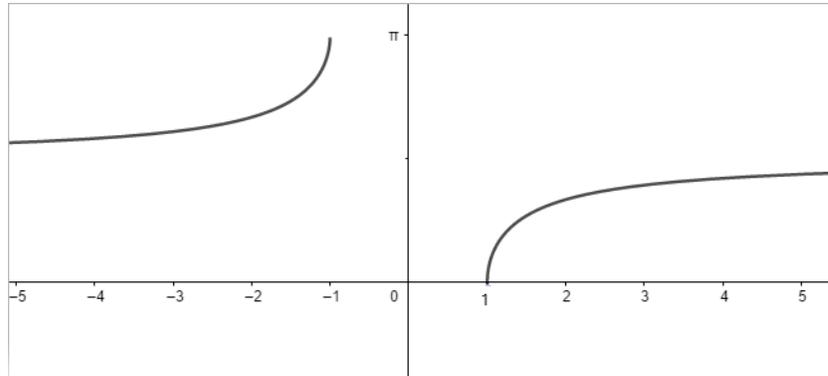


Figura 16: Gráfico da função arco secante

### 2.8.5 A função arco cossecante

$$y = \text{arc cosec } x = \text{cosec}^{-1} x \iff x = \text{cosec } y \quad (42)$$

Na seção (2.4.5) foi citado o domínio e a imagem da função cossecante, logo para a função arco cossecante tem-se o domínio definido por  $] -\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$  e para a imagem o intervalo  $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  com  $y \neq 0$ . Observe seu gráfico:

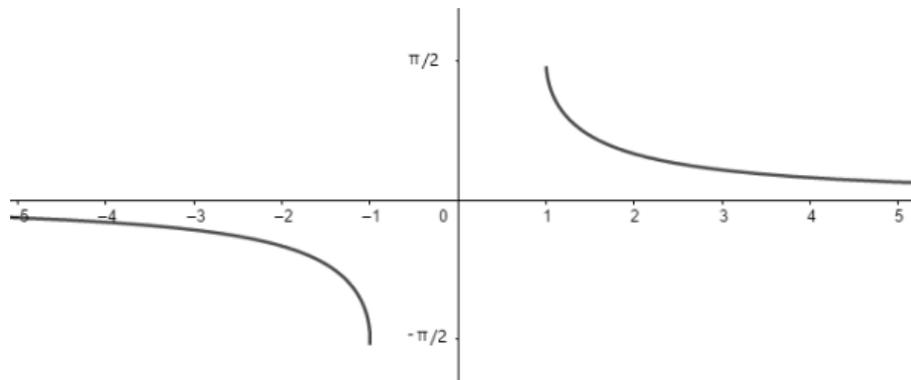


Figura 17: Gráfico da função arco cossecante

### 2.8.6 A função arco cotangente

$$y = \text{arc cotg } x = \text{cotg}^{-1} x \iff x = \text{cotg } y \quad (43)$$

Na seção (2.4.6) foi citado o domínio e a imagem da função cotangente, logo para a função arco cotangente tem-se o domínio sendo  $\mathbb{R}$  e para a imagem o intervalo  $]0, \pi[$ .

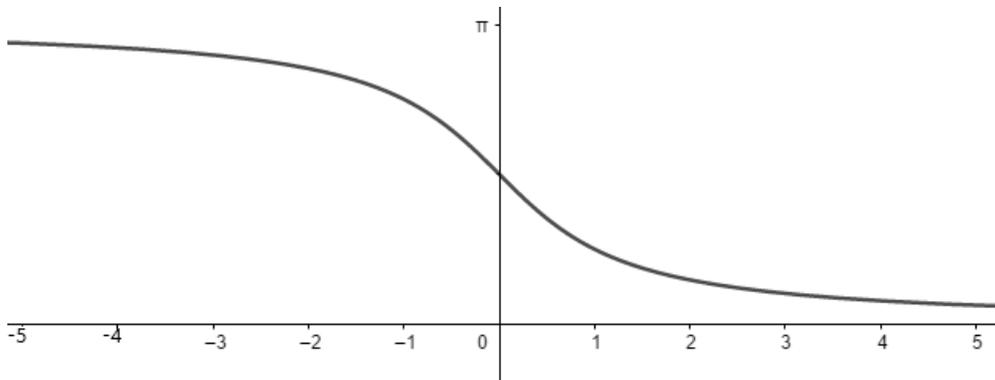


Figura 18: Gráfico da função arco cotangente

## 2.9 Identidades envolvendo as funções trigonométricas inversas

Nesta seção será mostrado como construir algumas identidades de funções trigonométricas através de triângulos retângulos. Considere o triângulo retângulo da figura (19) em que a hipotenusa vale 1 e os catetos valem  $x$  e  $\sqrt{1-x^2}$ .

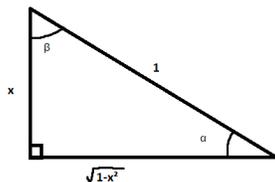


Figura 19: Triângulo retângulo de hipotenusa 1 e catetos  $x$  e  $\sqrt{1-x^2}$

De acordo com as relações definidas na seção (2,1), tem-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{1} \iff \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{x}{1} \iff \beta = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x$$

Pela figura (19) pode-se ver que  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , logo:

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \operatorname{arc} \operatorname{cos} x = \frac{\pi}{2} \quad (44)$$

Considerando ainda a figura (19), nota-se que  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ , e  $\operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ , logo:

$$\operatorname{cos}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = \sqrt{1-x^2} \quad (45)$$

Note ainda que  $\beta = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x$ , e  $\operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ , logo:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{cos} x) = \sqrt{1-x^2} \quad (46)$$

Também deduz-se daí que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , logo:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (47)$$

Considerando agora o triângulo retângulo da figura (20) de hipotenusa  $\sqrt{x^2+1}$  e catetos 1 e  $x$ . Neste triângulo tem-se  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{1}$ ,  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$  e  $\sec \alpha = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1} = \sqrt{1+x^2}$ , logo:

$$\sec(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \sqrt{1+x^2} \quad (48)$$

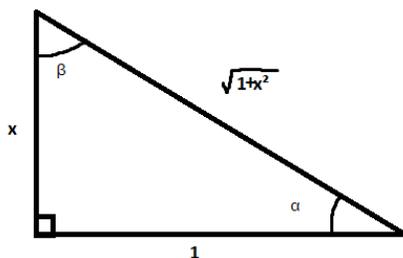


Figura 20: Triângulo retângulo de hipotenusa  $\sqrt{1+x^2}$  e catetos 1 e  $x$

Considerando agora um triângulo retângulo de hipotenusa  $x$  e catetos medindo 1 e  $\sqrt{x^2-1}$ , como na figura (21). Pode-se obter as seguintes relações  $\sec \alpha = \frac{x}{1} = x$ , então  $\alpha = \operatorname{arc} \sec x$  e  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ , logo:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc} \sec x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

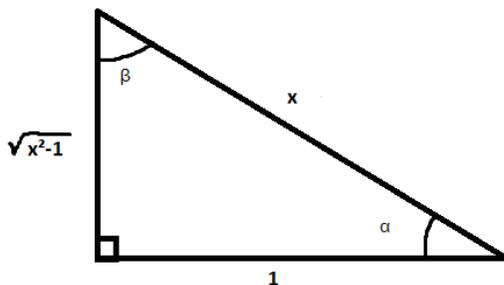


Figura 21: Triângulo retângulo de hipotenusa  $x$  e catetos 1 e  $\sqrt{x^2-1}$

## 2.10 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Nesta seção será mostrado como obter as derivadas das funções trigonométricas inversas. Se  $f$  for uma função cuja derivada é conhecida, então uma maneira para se calcular a derivada de  $f^{-1}$  é reescrever a função  $y = f^{-1}(x)$  como sendo  $x = f(y)$  e derivar implicitamente. Esse método será usado para o cálculo das derivadas das funções trigonométricas inversas.

### 2.10.1 Derivada da função arco seno

$$y = \arcsen x \iff x = \sen y$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx} \sen y \\ 1 &= \cos y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos(\arcsen x)} \end{aligned}$$

Mas, pela equação (47) tem-se que  $\cos(\arcsen x) = \sqrt{1-x^2}$ , logo  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , portanto:

$$\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (49)$$

### 2.10.2 Derivada da função arco cosseno

Analogamente ao caso anterior, tem-se

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx} \cos y \\ 1 &= -\sen y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sen y} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sen(\arccos x)} \end{aligned}$$

mas, pela equação (48) tem-se  $\sen(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ , portanto:

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (50)$$

### 2.10.3 Derivada da função arco tangente

Analogamente aos casos anteriores, faz-se

$$y = \operatorname{arc\,tg} x \iff x = \operatorname{tg} y$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x &= \frac{d}{dx} \operatorname{tg} y \\ 1 &= \sec^2 y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2(\operatorname{arc\,tg} y)} \end{aligned}$$

mas pela equação (50) tem-se que  $\sec(\operatorname{arc\,tg} x) = \sqrt{1+x^2}$ , portanto:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2} \quad (51)$$

### 2.10.4 Derivada da função arco secante

Analogamente aos caso anteriores, faz-se

$$y = \operatorname{arc\,sec} x \iff x = \operatorname{sec} y$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x &= \frac{d}{dx} \operatorname{sec} y \\ 1 &= \sec y \operatorname{tg} y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec(\operatorname{arc\,sec} x) \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sec} x)} \end{aligned}$$

mas  $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sec} x) = \sqrt{x^2-1}$  e  $\sec(\operatorname{arc\,sec} x) = |x|$ , portanto:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc\,sec} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (52)$$

### 2.10.5 Derivada da função arco cossecante

Analogamente aos caso anteriores, faz-se

$$y = \operatorname{arc\,cosec} x \iff x = \operatorname{cosec} y$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} y \\ 1 &= -\operatorname{cosec} y \cotg y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{cosec} y \cotg y} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{cosec}(\operatorname{arc cosec} x) \cotg(\operatorname{arc cosec} x)}\end{aligned}$$

mas  $\cotg(\operatorname{arc cosec} x) = \sqrt{x^2 - 1}$  e  $\operatorname{cosec}(\operatorname{arc cosec} x) = |x|$ , portanto:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc cosec} x = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad (53)$$

### 2.10.6 Derivada da função arco cotangente

Analogamente aos caso anteriores, faz-se

$$y = \operatorname{arc cotg} x \iff x = \cotg y$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx} \cotg y \\ 1 &= -\operatorname{cosec}^2 y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arc cotg} x)}\end{aligned}$$

mas  $\operatorname{cosec}(\operatorname{arc cotg} x) = \sqrt{1 + x^2}$ , portanto:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc cotg} x = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (54)$$

## 2.11 Integrais das funções trigonométricas inversas

Nesta seção será mostrado como obter as integrais das funções trigonométricas inversas. Para calcular essas integrais será usado o método da integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Considere a função  $y = \arcsen x$  e  $c$  uma constante real. Integrando essa função, por partes:

$$\int \arcsen x dx = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$u = \arcsen x; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad dv = dx; \quad v = x$$

e, fazendo  $z = 1 - x^2$ , tem-se que  $dz = -2x dx$ , e substituindo esses valores acima:

$$\begin{aligned} \int \arcsen x dx &= x \arcsen x - \int \frac{1}{-2\sqrt{z}} dz \\ &= x \arcsen x + \frac{1}{2} \int z^{-1/2} dz \\ &= x \arcsen x + \frac{1}{2} \frac{z^{1/2}}{(1/2)} + c \\ &= x \arcsen x + \sqrt{z} + c \end{aligned}$$

portanto:

$$\int \arcsen x dx = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + c \quad (55)$$

Analogamente, mostra-se as integrais das funções trigonométricas inversas abaixo:

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c \quad (56)$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \quad (57)$$

$$\int \operatorname{arc cosec} x dx = x \operatorname{arc cosec} x - \sqrt{1-x^2} + c \quad (58)$$

$$\int \operatorname{arc sec} x dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc sec} x + c \quad (59)$$

$$\int \operatorname{arc cotg} x dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc cotg} x + c \quad (60)$$

### 3 As funções hiperbólicas

As chamadas funções hiperbólicas são similares às funções trigonométricas, porém, assim como as funções trigonométricas podem ser definidas e suas características obtidas das relações geométricas em um círculo de raio unitário, as funções hiperbólicas podem ser definidas e caracterizadas em uma hipérbole equilátera. Usando essa analogia entre o círculo trigonométrico e a hipérbole equilátera, será dado o mesmo tratamento para as funções hiperbólicas que foi dado às funções trigonométricas para desenvolver algumas de suas relações.

Considere um ponto  $M$  pertencente à hipérbole equilátera no plano  $xOy$ , de equação  $x^2 - y^2 = 1$ , e o ângulo  $\theta$  do setor hiperbólico mostrados na figura (22). As funções hiperbólicas são definidas de forma análoga à usada para definir as funções trigonométricas no círculo. Define-se então o *seno hiperbólico* como  $\sinh$ , o *coseno hiperbólico* como  $\cosh$  e a *tangente hiperbólica* como  $\tanh$  de acordo com a figura (22).

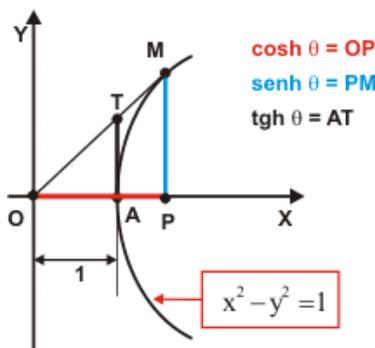


Figura 22: A hipérbole equilátera e as funções hiperbólicas

Pela figura (22) e verificando que os triângulos  $OAT$  e  $OPM$  são semelhantes, pode-se observar facilmente que:

$$\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \quad (61)$$

Define-se também a *secante hiperbólica* como  $\operatorname{sech}$ , a *cossecante hiperbólica* como  $\operatorname{cosech}$  e a *cotangente hiperbólica* como  $\operatorname{cotgh}$  da seguinte forma:

$$\operatorname{sech} \theta = \frac{1}{\cosh \theta} \quad (62)$$

$$\operatorname{cosech} \theta = \frac{1}{\sinh \theta}, \quad \sinh \theta \neq 0 \quad (63)$$

$$\operatorname{cotgh} \theta = \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta}, \quad \sinh \theta \neq 0 \quad (64)$$

#### 3.1 Relação entre as funções hiperbólicas e a função exponencial

Será usada a relação entre a curva  $y = \frac{1}{2x}$  e a hipérbole equilátera  $x^2 - y^2 = 1$  para mostrar as relações entre as funções hiperbólicas. Observe o gráfico da curva  $y = \frac{1}{2x}$ .

Toma-se o plano cartesiano  $xy$  e nele traça-se a curva  $y = \frac{1}{2x}$ , fazendo uma rotação no sentido anti-horário de  $\frac{\pi}{4}$ , no plano  $xy$  obtem-se um novo eixo cartesiano  $XY$  e a hipérbole equilátera  $x^2 - y^2 = 1$  que passa a representar a curva  $y = \frac{1}{2x}$  nesse novo eixo, a rotação  $\frac{\pi}{4}$

do plano cartesiano  $xy$  feita para a obtenção do plano cartesiano  $XY$  é chamada na álgebra linear de mudança de base. Portanto será mostrado que a curva  $y = \frac{1}{2x}$  no plano  $xy$  é representada pela hipérbole equilátera  $X^2 - Y^2 = 1$  no plano  $XY$ .

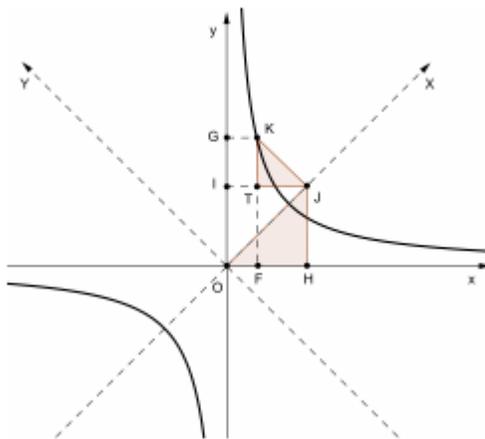


Figura 23: Curva  $y = \frac{1}{2x}$

Seja  $K$  um ponto sobre a curva  $y = \frac{1}{2x}$ . Suas coordenadas em  $xy$  e  $XY$  serão, respectivamente,  $x = OF$ ,  $y = OG$ ,  $X = OJ$  e  $Y = KJ$ . Sabendo que  $HJ = OI$ , pelo triângulo retângulo da figura (24), tem-se:

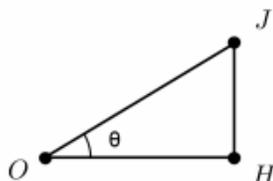


Figura 24: Triângulo retângulo  $JHO$

$$\text{sen } \theta = \frac{HJ}{JO},$$

$$OI = OJ \text{ sen } \theta = OJ \text{ sen } \frac{\pi}{4},$$

$$\text{cos } \theta = \frac{OH}{OJ},$$

$$OH = OJ \text{ cos } \theta = OJ \text{ cos } \frac{\pi}{4}$$

Sabendo que  $TJ = FH$  e  $KT = IG$ . Pelo triângulo retângulo da figura (25), tem-se:

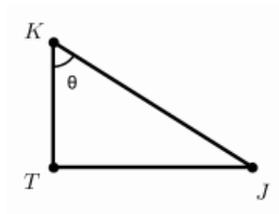


Figura 25: Triângulo retângulo  $KTJ$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{FH}{KJ} \\ FH &= KJ \operatorname{sen} \theta = KJ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{IG}{KJ} \\ IG &= KJ \operatorname{cos} \theta = KJ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Pela figura (23) tem-se que:

$$\begin{aligned}x &= OF = OH - FH \\ x = OF &= OH - FH = OJ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} - KJ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Fazendo  $X = OJ$  e  $Y = KJ$

$$x = OF = OH - FH = OJ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} - KJ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$$

e  $y = OG = OI + IG$ , então tem-se que:

$$y = OG = OI + IG = OJ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + KJ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}$$

Fazendo  $X = OJ$  e  $Y = KJ$ ;

$$y = OG = OI + IG = OJ \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + KJ \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} = xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

Portanto a curva  $y = \frac{1}{2x}$  corresponde à hipérbole equilátera  $X^2 - Y^2 = 1$  girada de um ângulo  $\frac{\pi}{4}$  rad no sentido anti-horário.

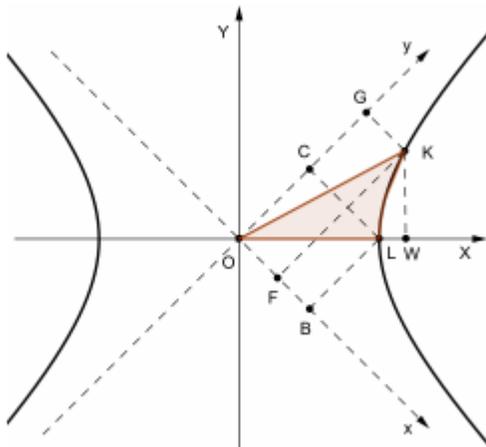


Figura 26: Hipérbole equilátera  $X^2 - Y^2 = 1$

### 3.2 Parametrização do seno hiperbólico e do cosseno hiperbólico

O logaritmo natural de  $x$  é denotado por  $\ln x$  e pode ser definido pela integral:

$$\ln x = \left| \int_1^x \frac{1}{t} dt \right|, \quad (x > 0)$$

Considere a figura (26), a área  $FBLK$  é a área da região plana limitada superiormente pelo gráfico da curva  $y = \frac{1}{2x}$ , inferiormente pela reta  $y = 0$  e lateralmente pelas retas  $x = FK$  e  $x = BL$ . Portanto:

$$A_{FBLK} = \int_{OF}^{OB} \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln OB - \ln OF = \frac{1}{2} \ln \frac{OB}{OF}.$$

A partir daí pode-se fazer a seguinte análise, se  $K$  estiver à esquerda de  $L$  então  $A_{FBLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OB}{OF}$ , e  $A_{GCLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OG}{OC}$ .

Tome um ponto  $K$  sobre a hipérbole  $X^2 - Y^2 = 1$  de tal forma que a área do setor hiperbólico gerado por ele seja  $\frac{\theta}{2}$  unidades de área. Dessa forma  $LOK$  será igual a  $\theta$ . O ponto  $K$ , no plano  $XOY$ , tem coordenadas  $X = OW = \cosh \theta$ ,  $Y = WK = \sinh \theta$  e no plano  $xOy$  tem coordenadas  $x = OF$  e  $y = OG$ .

Nota-se que:

$$OF = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh \theta - \sinh \theta)$$

$$OG = y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh \theta + \sinh \theta)$$

Dadas as coordenadas do ponto  $L$ ,  $X = 1$ ,  $Y = 0$  e  $x = OB$ ,  $y = OC$ , portanto:

$$OB = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

e

$$OC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pelas equações (67) e (68) tem-se que:

$$A_{FBLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OB}{OF} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cosh \theta - \sinh \theta} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh \theta - \sinh \theta),$$

e

$$A_{GCLK} = \frac{1}{2} \ln \frac{OG}{OC} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh \theta + \sinh \theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln(\cosh \theta + \sinh \theta).$$

Sabe-se que o ângulo hiperbólico é igual ao dobro do valor numérico da área do setor hiperbólico, então  $A_{OLK} = \frac{\theta}{2}$ . Como  $A_{OLK} = A_{FBLK}$  tem-se:

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh \theta - \sinh \theta),$$

e como  $A_{OLK} = A_{FBLK}$ ,

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln(\sinh \theta + \cosh \theta).$$

Logo,

$$e^{-\theta} = \cosh \theta - \sinh \theta, \quad (65)$$

$$e^{\theta} = \cosh \theta + \sinh \theta. \quad (66)$$

Somando e subtraindo as equações acima, conclui-se que:

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}, \quad (67)$$

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}. \quad (68)$$

Da definição dada na equação (61) tem-se:

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} = \frac{\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}}{\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}. \quad (69)$$

Pela equação (62):

$$\operatorname{sech} \theta = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \quad (70)$$

Pela equação (63):

$$\operatorname{cosech} \theta = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}} \quad (71)$$

Finalmente, pela equação (64) verifica-se que:

$$\operatorname{cotgh} \theta = \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta} = \frac{\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}}{\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}} \quad (72)$$

### 3.3 Fórmulas de adição de arcos para as funções hiperbólicas

Nesta seção será mostrado como calcular a soma de arcos para as funções hiperbólicas. Para calcular  $\sinh(x_1 + x_2)$  e  $\sinh(x_1 - x_2)$ , será utilizada a forma exponencial do seno hiperbólico.

$$\begin{aligned} \sinh(x_1 + x_2) &= \frac{e^{(x_1+x_2)} - e^{-(x_1+x_2)}}{2} = \frac{e^{x_1}e^{x_2} - e^{-x_1}e^{-x_2}}{2} = \frac{2e^{x_1}e^{x_2} - 2e^{-x_1}e^{-x_2}}{4} \\ &= \frac{2e^{x_1}e^{x_2} - 2e^{-x_1}e^{-x_2} + e^{x_1}e^{-x_2} - e^{x_1}e^{-x_2} + e^{-x_1}e^{x_2} - e^{-x_1}e^{x_2}}{4} \\ &= \frac{e^{x_1}e^{x_2} + e^{x_1}e^{-x_2} - e^{-x_1}e^{x_2} - e^{-x_1}e^{-x_2}}{4} + \frac{e^{x_1}e^{x_2} + e^{-x_1}e^{x_2} - e^{x_1}e^{-x_2} - e^{-x_1}e^{-x_2}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2}\right)\left(\frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_2 \cosh x_1 \quad (73)$$

Note que como:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

substituindo  $x$  por  $-x$ , percebe-se que essa função é par:

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x \quad (74)$$

E também

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

substituindo  $x$  por  $-x$ , percebe-se que essa função é ímpar:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x. \quad (75)$$

Tomando a equação (73) e substituindo  $x_2$  por  $-x_2$  tem-se:

$$\sinh[x_1 + (-x_2)] = \sinh x_1 \cosh(-x_2) + \sinh(-x_2) \cosh x_1$$

Usando as equações (74) e (75) tem-se:

$$\sinh(x_1 - x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 - \sinh x_2 \cosh x_1 \quad (76)$$

Utilizando a equação (71) tem-se:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Logo

$$\cosh(x_1 + x_2) = \frac{e^{(x_1+x_2)} + e^{-(x_1+x_2)}}{2}$$

Analogamente ao que foi feito no caso do seno hiperbólico, pode-se concluir que:

$$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2, \quad (77)$$

$$\cosh(x_1 - x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 - \sinh x_1 \sinh x_2 \quad (78)$$

$$\operatorname{tgh}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{tgh} x_1 + \operatorname{tgh} x_2}{1 + \operatorname{tgh} x_1 \operatorname{tgh} x_2} \quad (79)$$

### 3.4 Identidades envolvendo as funções hiperbólicas

Utilizando as equações (71) e (72) e observando a expressão  $\cosh^2 x - \sinh^2 x$ , tem-se:

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}\right) = 1$$

Portanto conclui-se que:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (80)$$

Pela equação (80) pode-se concluir outras identidades. Tomando a equação (80) e dividindo todos os termos por  $\cosh^2 x$ , (sabendo que  $\cosh x$  nunca é zero), tem-se:

$$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

Logo:

$$\operatorname{tgh}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 \quad (81)$$

Por outro lado, dividindo a equação (80) por  $\sinh^2 x$ , (para  $\sinh x \neq 0$ ), tem-se:

$$\frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x}$$

Logo:

$$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \operatorname{cosech}^2 x$$

portanto

$$\operatorname{cotgh}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1 \quad (82)$$

### 3.5 Gráfico das funções hiperbólicas

Nesta seção serão construídos os gráficos das funções hiperbólicas. Para isso será utilizada a forma exponencial das funções.

### 3.5.1 Gráfico da função seno hiperbólico

O gráfico da função cosseno hiperbólico é facilmente esboçado traçando os gráficos de  $y = \frac{e^x}{2}$  e  $y = -\frac{e^{-x}}{2}$ . Para  $x = 0$  as funções exponenciais resultam em  $\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$ , a soma das duas fornece o valor 0 que é o valor de  $\sinh 0$ . A partir daí quando  $x \rightarrow \infty$  a função  $y = -\frac{e^{-x}}{2}$  se aproxima de 0 e o gráfico do seno hiperbólico se aproxima de  $y = \frac{e^x}{2}$ . Quando  $x \rightarrow -\infty$  a função  $y = \frac{e^x}{2}$  se aproxima de 0 e o gráfico do seno hiperbólico se aproxima de  $y = -\frac{e^{-x}}{2}$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R}$  e sua imagem também é  $\mathbb{R}$ .

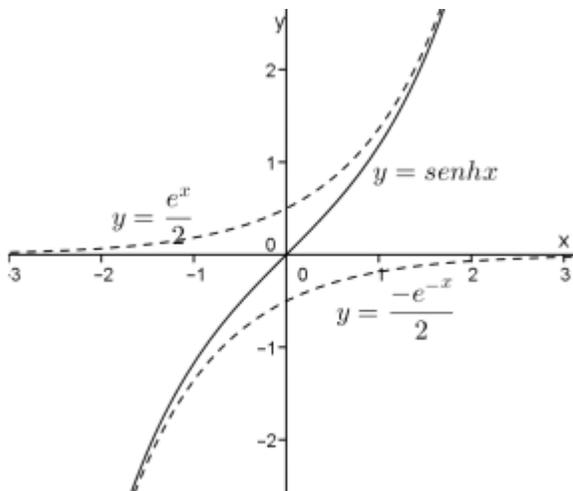


Figura 27: Gráfico da função  $\sinh x$

### 3.5.2 Gráfico da função cosseno hiperbólico

Para construir o gráfico da função cosseno hiperbólico, utilizou-se o mesmo plano cartesiano para esboçar os gráficos de  $y = \frac{e^x}{2}$  e  $y = \frac{e^{-x}}{2}$ . Para  $x = 0$  as funções exponenciais resultam em  $\frac{1}{2}$ , a soma das duas fornece o valor 1 que é o valor de  $\cosh 0$ . A partir daí quando  $x \rightarrow \infty$  a função  $y = \frac{e^{-x}}{2}$  se aproxima de 0 e o gráfico do cosseno hiperbólico se aproxima de  $y = \frac{e^x}{2}$ . Quando  $x \rightarrow -\infty$  a função  $y = \frac{e^x}{2}$  se aproxima de 0 e o gráfico do cosseno hiperbólico se aproxima de  $y = \frac{e^{-x}}{2}$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R}$  e sua imagem também é  $y \in \mathbb{R}$  e  $y \geq 1$ .

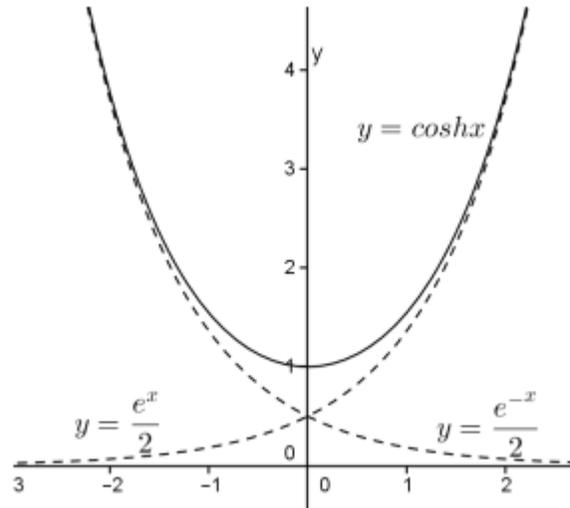


Figura 28: Gráfico da função  $\cosh x$

### 3.5.3 Gráfico da função tangente hiperbólica

Para construir o gráfico da tangente hiperbólica será utilizada a equação (69). Observa-se que para  $x = 0$ ,  $\operatorname{tgh} x = 0$ , quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{tgh} x \rightarrow 1$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\operatorname{tgh} x \rightarrow -1$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R}$  e sua imagem também é o intervalo  $] -1, +1[$ .

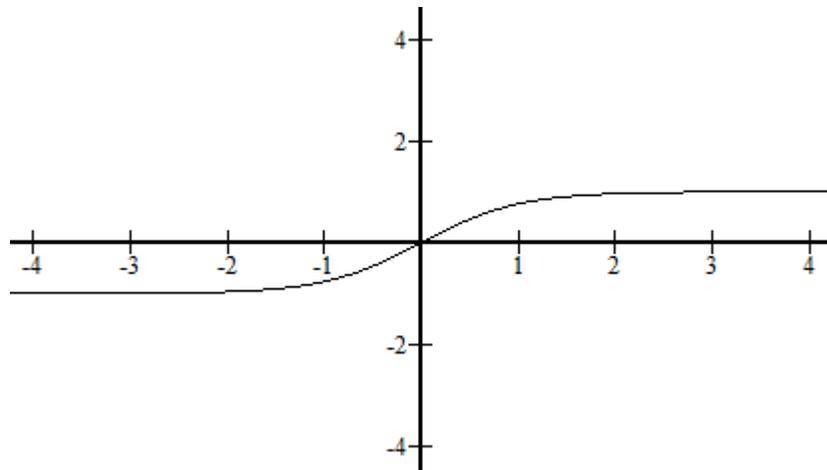


Figura 29: Gráfico da função  $\operatorname{tgh} x$

### 3.5.4 Gráfico da função secante hiperbólica

Para traçar o gráfico da secante hiperbólica, será utilizada a equação (71). Observa-se que para  $x = 0$ ,  $\operatorname{sech} x = 1$ , quando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{sech} x \rightarrow 0$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\operatorname{sech} x \rightarrow 0$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R}$  e sua imagem também é o intervalo  $]0, +1]$ .

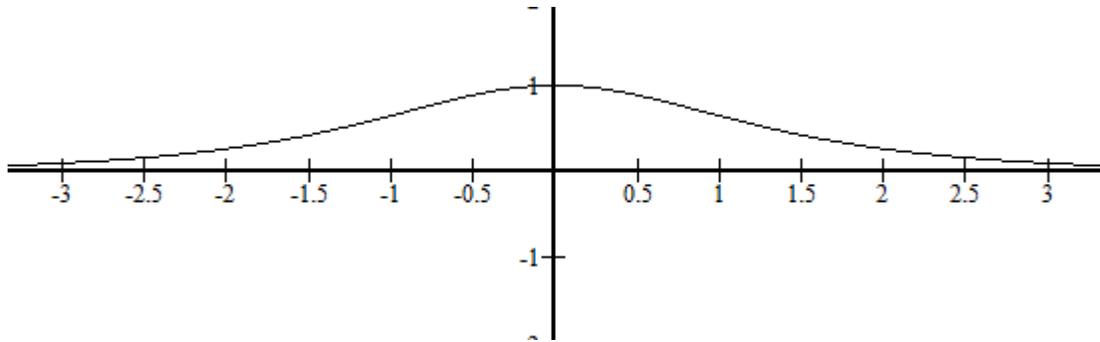


Figura 30: Gráfico da função  $\operatorname{sech} x$

### 3.5.5 Gráfico da função cossecante hiperbólica

Para traçar o gráfico da cossecante hiperbólica, será utilizada a equação (72). Observa-se que para  $x = 0$ , a função não está definida. Quando  $x \rightarrow 0$  pela direita,  $\operatorname{cosech} x \rightarrow +\infty$  e quando  $x \rightarrow 0$  pela esquerda,  $\operatorname{cosech} x \rightarrow -\infty$ . Quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\operatorname{cosech} x \rightarrow 0$  e quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\operatorname{cosech} x \rightarrow 0$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R}^*$  e sua imagem também é  $\mathbb{R}^*$ .

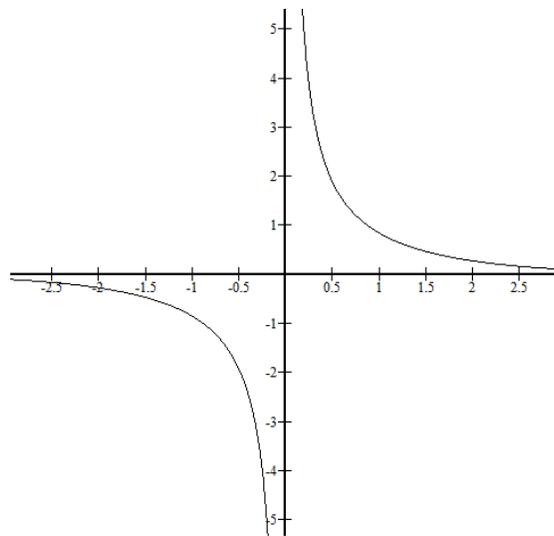


Figura 31: Gráfico da função  $\operatorname{cosech} x$

### 3.5.6 Gráfico da função cotangente hiperbólica

Para construir o gráfico da cotangente hiperbólica será utilizada a equação (70). Quando  $x = 0$  a função não está definida. Quando  $x \rightarrow 0$  pela direita,  $\operatorname{cotgh} x \rightarrow +\infty$ , quando  $x \rightarrow 0$  pela esquerda,  $\operatorname{cotgh} x \rightarrow -\infty$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\operatorname{cotgh} x \rightarrow -1$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\operatorname{cotgh} x \rightarrow +1$ . O domínio dessa função é  $\mathbb{R}^*$  e sua imagem também é  $] -\infty, -1[ \cup ] 1, \infty[$ .

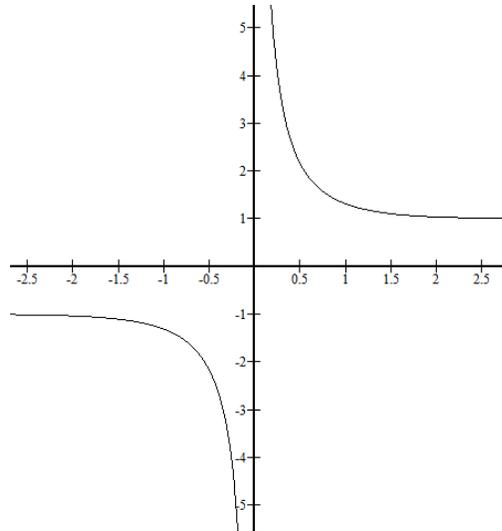


Figura 32: Gráfico da função  $\text{cotgh } x$

### 3.6 Aplicação das funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios, dentro de sólidos elásticos e, mais genericamente, em muitos problemas nos quais a energia mecânica é, gradualmente, absorvida pelo ambiente. Galileu Galilei (1564-1642) conjecturou que uma corda, ou uma corrente, suspensa por suas extremidades, presa a dois pontos fixos e sob influência exclusiva da gravidade, gera uma curva parecida com uma parábola. Christiaan Huygens (1629-1695), físico, matemático e astrônomo holandês, mostrou em 1646, que a conjectura feita por Galileu era falsa. A essa curva, que se parece com uma parábola, mas que não é uma parábola, foi dado o nome de catenária, termo que deriva da palavra latina *catena*, que significa “cadeia” ou “corrente”. A equação matemática que descreve a catenária é dada pela seguinte função hiperbólica:

$$y = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2\alpha}$$

onde  $\alpha$  é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente e massa por unidade de comprimento e a tensão com a qual ela é segura. A catenária é constantemente confundida com uma parábola, mas são completamente diferentes, a parábola é algébrica, quer dizer, sua equação é dada por um polinômio e a catenária é transcendente, sua equação é modelada a partir do cosseno hiperbólico. Apesar disso, ela é uma curva mais comum do que se pensa. Ela pode ser encontrada em diversos lugares; nas extremidades do ovo, na rede elétrica de uma via férrea, nos fios de alta tensão, nas cordas suspensas por duas hastas verticais usadas em supermercado para o anúncio de produtos, em bancos na separação de filas, nas barracas de camping oferecendo resistência à ação dos ventos, na arquitetura, principalmente a catenária invertida, pois estabelece um maior equilíbrio e modernidade e na engenharia com a construção das pontes pênséis.

### 3.7 Funções hiperbólicas inversas

Nesta seção serão mostradas as funções hiperbólicas inversas com seus respectivos gráficos. Uma vez que as funções hiperbólicas são definidas mediante a função exponencial, as suas inversas podem ser expressas em termos do logaritmo.

### 3.7.1 A função arco seno hiperbólico

O seno hiperbólico é monótono em todo  $x \in \mathbb{R}$ , portanto não tem nenhuma restrição sobre o domínio para a determinação de sua função inversa.

A imagem do seno hiperbólico é  $\mathbb{R}$ . Portanto, o domínio do arco seno hiperbólico, é  $D = \mathbb{R}$ . Define-se então:

$$y = \operatorname{arc\,senh} x \iff x = \operatorname{senh} y$$

Observe seu gráfico:

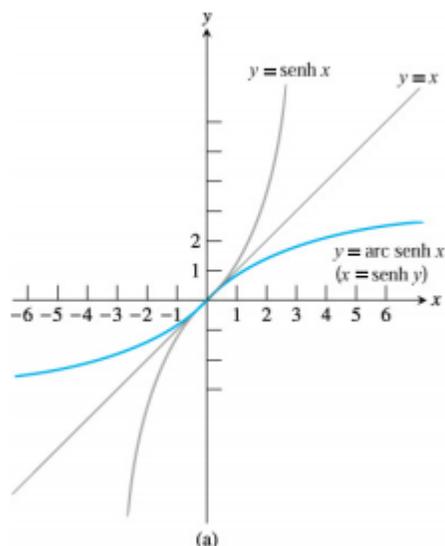


Figura 33: Gráfico da função inversa do seno hiperbólico

### 3.7.2 A função arco cosseno hiperbólico

O cosseno hiperbólico é monótono nos intervalos  $(-\infty, 0]$  e  $[0, \infty)$ . Considerando então o intervalo  $[0, \infty)$  tem-se:

$$y = \operatorname{arc\,cosh} x \iff x = \operatorname{cosh} y$$

A imagem do cosseno hiperbólico, isto é, o domínio do arco cosseno hiperbólico é  $1 \leq x < \infty$ .

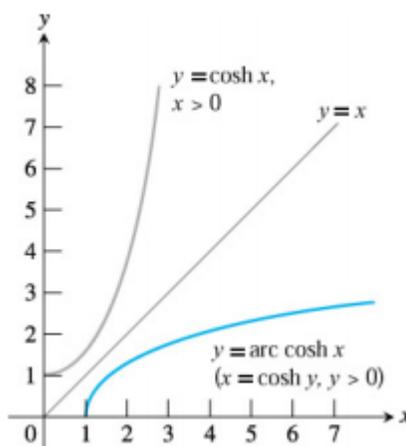


Figura 34: Gráfico da função inversa do cosseno hiperbólico

### 3.7.3 A função arco tangente hiperbólico

A função tangente hiperbólica é monótona em todo seu domínio, portanto sua inversa está definida em toda a imagem.

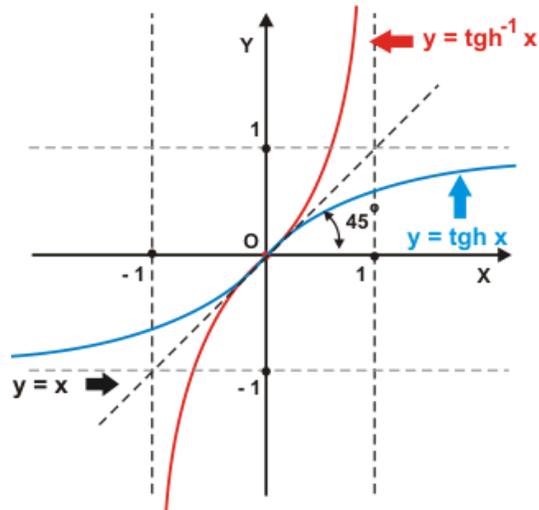


Figura 35: Gráfico da função inversa da tangente hiperbólica

### 3.7.4 A função arco secante hiperbólica

A função secante hiperbólica é monótona em parte de seu domínio, portanto somente nesse intervalo pode-se definir sua inversa, considerando o domínio da função  $\operatorname{sech} x$  sendo o intervalo  $[1, 0]$ , tem-se o gráfico da função arco secante representado com domínio sendo  $]0, 1]$  e imagem  $\mathbb{R}_+$ .

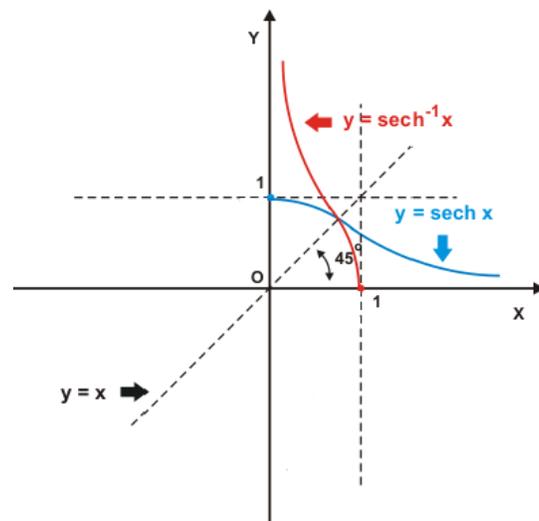


Figura 36: Gráfico da função inversa da secante hiperbólica

### 3.7.5 A função arco cossecante hiperbólica

O domínio da função cossecante hiperbólica é  $\mathbb{R} - \{0\}$  e sua imagem é definida por  $\mathbb{R} - \{0\}$ , logo o domínio da função arco secante será também  $\mathbb{R} - \{0\}$  e sua imagem  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

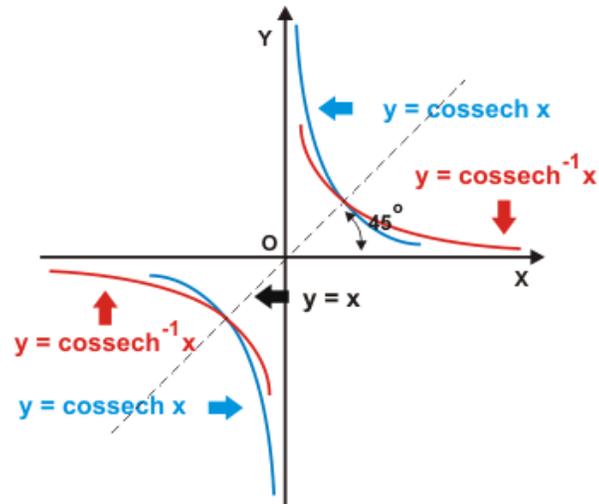


Figura 37: Gráfico da função inversa da cossecante hiperbólica

### 3.7.6 A função arco cotangente hiperbólica

O domínio da função cotangente hiperbólica é  $\mathbb{R} - \{0\}$ , e sua imagem é definida por  $] -\infty, -1[ \cup ] 1, \infty[$ , logo o domínio da função arco cotangente será também  $] -\infty, -1[ \cup ] 1, \infty[$  e sua imagem  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

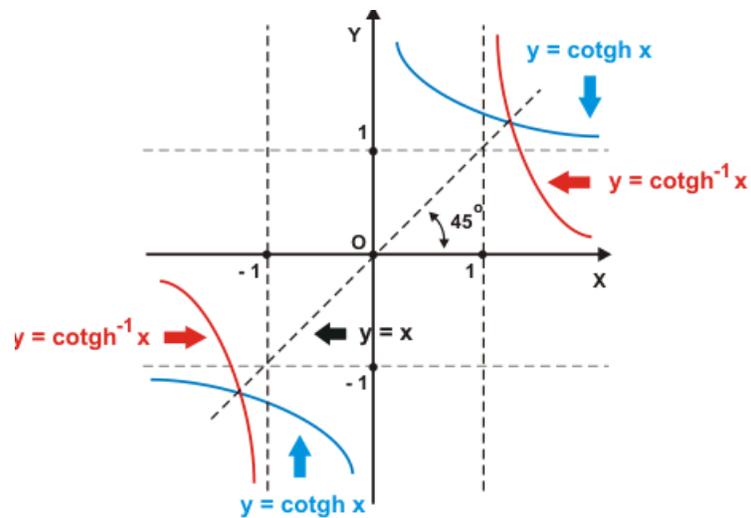


Figura 38: Gráfico da função inversa da cotangente hiperbólica

## 4 As funções hiperbólicas e trigonométricas de terceira ordem

Em 1757, o físico e matemático italiano Vincenzo Riccati, irmão do mecânico teórico Giordano Riccati, e segundo filho do matemático Jacopo Francesco Riccati, formulador da equação de Riccati, tendo desenvolvido as funções hiperbólicas, definiu uma generalização dessas e das funções trigonométricas através de uma série [7, 9]. Essas funções iriam ressurgir na matemática de maneira independente inúmeras outras vezes, com uma variedade de notações [24, 25, 28], e algumas vezes, ligeiramente diferentes (Appel, por exemplo, e outros definiram as funções generalizadas de várias variáveis [23, 26, 27, 29]).

A definição de Riccati das chamadas funções hiperbólicas generalizadas é dada por:

$$H_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{nk+r}}{(nk+r)!} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (83)$$

onde  $H_{n,r}(x)$  é referida como a *função hiperbólica de ordem  $n$  e tipo  $r$* . Portanto existem exatamente  $n$  funções diferentes de ordem  $n$ , cada uma referente a um tipo nessa mesma ordem ( $r$  vai de 0 a  $n-1$ ). É fácil ver que essas funções assim definidas têm como caso especial  $n=2$  (logo  $r=0$  ou  $r=1$ ) precisamente as funções hiperbólicas clássicas. Conforme vimos na seção anterior, e dado que  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (84)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (85)$$

As funções hiperbólicas de terceira ordem:

$$H_{3,r}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+r}}{(3k+r)!} \quad (r = 0, 1, 2) \quad (86)$$

serão objeto de estudo nessa seção. Em vista da multiplicidade de origens históricas independentes dessas funções ao longo dos anos, a literatura contém uma diversidade de notações diferentes para elas. Aqui será usada a notação  $H_{3,0}(x) = \cosh_{3,0} x$ ,  $H_{3,1}(x) = \sinh_{3,1} x$  e  $H_{3,2}(x) = \sinh_{3,2} x$  que é inspirada naturalmente na notação já bem estabelecida para as funções hiperbólicas clássicas de segunda ordem. Portanto, as três funções hiperbólicas básicas de terceira ordem que serão tratadas daqui por diante são dadas por:

$$H_{3,0}(x) = \cosh_{3,0} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \quad (87)$$

$$H_{3,1}(x) = \sinh_{3,1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!} = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (88)$$

$$H_{3,2}(x) = \sinh_{3,2} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+2}}{(3k+2)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (89)$$

Todas elas convergentes  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Muitas das propriedades das funções hiperbólicas de terceira ordem podem ser obtidas de forma pouco laboriosa. É fácil, por exemplo, calcular

a derivada de cada uma dessas funções, derivando termo a termo a série que as define (as séries são sempre convergentes, o que justifica o procedimento). Efetuando os cálculos das derivadas obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cosh_{3,0} x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3kx^{3k-1}}{3k(3k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{3k-1}}{(3k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+2}}{(3k+2)!} \\ \frac{d}{dx} \sinh_{3,1} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+1)x^{3k}}{(3k+1)(3k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!} \\ \frac{d}{dx} \sinh_{3,2} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k+2)x^{3k+1}}{(3k+2)(3k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx} \cosh_{3,0} x = \sinh_{3,2} x \quad (90)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh_{3,1} x = \cosh_{3,0} x \quad (91)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh_{3,2} x = \sinh_{3,1} x \quad (92)$$

É fácil ver que todas as três funções têm a propriedade de serem elas mesmas suas derivadas de terceira ordem, i.e.

$$\frac{d^3}{dx^3} \cosh_{3,0} x = \cosh_{3,0} x$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \sinh_{3,1} x = \sinh_{3,1} x$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \sinh_{3,2} x = \sinh_{3,2} x$$

ou seja, elas são ditas as *autofunções* da equação diferencial ordinária linear de *terceira* ordem  $y'''(x) = y(x)$ , tal como as funções hiperbólicas de segunda ordem ( $\sinh x$  e  $\cosh x$  usuais) são as autofunções, ou soluções linearmente independentes, da equação diferencial ordinária linear de *segunda* ordem  $y''(x) = y(x)$ . As três são soluções da mesma equação diferencial ( $y''' = y$ ), mas têm diferentes *valores iniciais*:

$$\cosh_{3,0}(0) = 1, \quad \cosh_{3,0}'(0) = 0, \quad \cosh_{3,0}''(0) = 0$$

$$\sinh_{3,1}(0) = 0, \quad \sinh_{3,1}'(0) = 1, \quad \sinh_{3,1}''(0) = 0$$

$$\sinh_{3,2}(0) = 0, \quad \sinh_{3,2}'(0) = 0, \quad \sinh_{3,2}''(0) = 1$$

Os gráficos dessas três funções pode ser visto nas figuras a seguir:

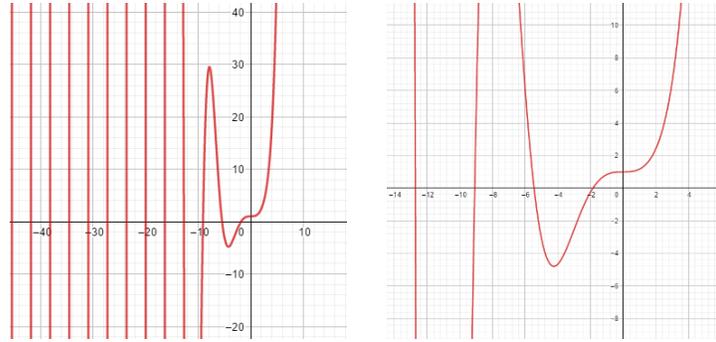


Figura 39: Gráfico da função  $\cosh_{3,0} x$  com diferentes aproximações

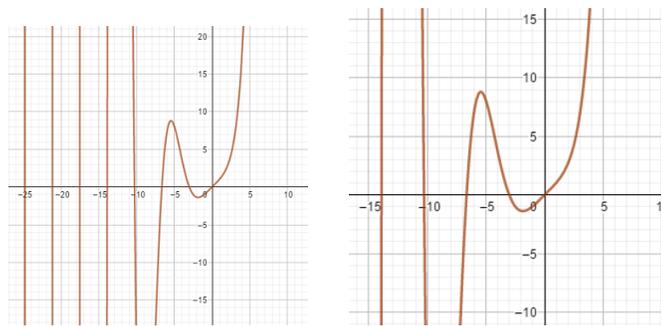


Figura 40: Gráfico da função  $\sinh_{3,1} x$  com diferentes aproximações

A partir das três funções hiperbólicas de terceira ordem básicas acima definidas, pode-se ainda definir as seguintes funções:

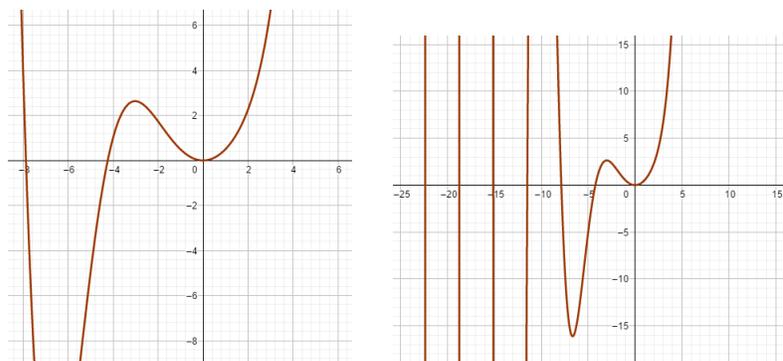


Figura 41: Gráfico da função  $\sinh_{3,2} x$  com diferentes aproximações

$$\operatorname{sech}_{3,0} x = \frac{1}{\operatorname{cosh}_{3,0} x}$$

$$\operatorname{csch}_{3,1} x = \frac{1}{\operatorname{senh}_{3,1} x}$$

$$\operatorname{csch}_{3,2} x = \frac{1}{\operatorname{senh}_{3,2} x}$$

$$\operatorname{tanh}_{3,1} x = \frac{\operatorname{senh}_{3,1} x}{\operatorname{cosh}_{3,0} x}$$

$$\operatorname{tanh}_{3,2} x = \frac{\operatorname{senh}_{3,2} x}{\operatorname{cosh}_{3,0} x}$$

$$\operatorname{coth}_{3,1} x = \frac{1}{\operatorname{tanh}_{3,1} x} = \frac{\operatorname{cosh}_{3,0} x}{\operatorname{senh}_{3,1} x}$$

$$\operatorname{coth}_{3,2} x = \frac{1}{\operatorname{tanh}_{3,2} x} = \frac{\operatorname{cosh}_{3,0} x}{\operatorname{senh}_{3,2} x}$$

Os gráficos dessas novas funções podem ser vistos nas figuras a seguir:

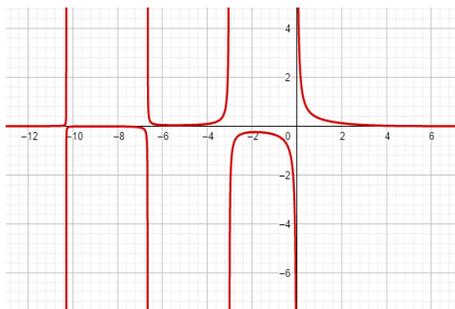


Figura 42: Gráfico da função  $\operatorname{sech}_{3,0} x$

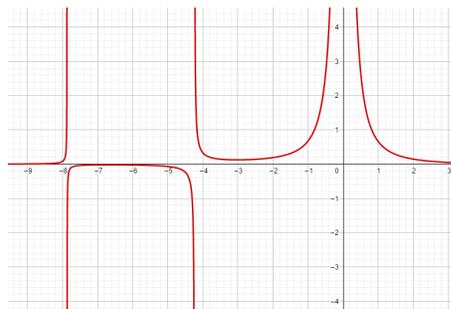


Figura 43: Gráfico da função  $\operatorname{csch}_{3,1} x$

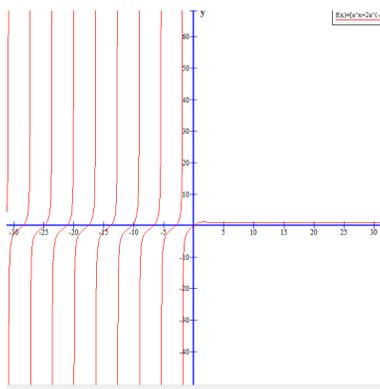


Figura 44: Gráfico da função  $\operatorname{tanh}_{3,1} x$

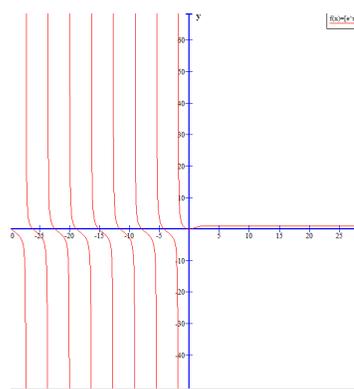


Figura 45: Gráfico da função  $\operatorname{tanh}_{3,2} x$

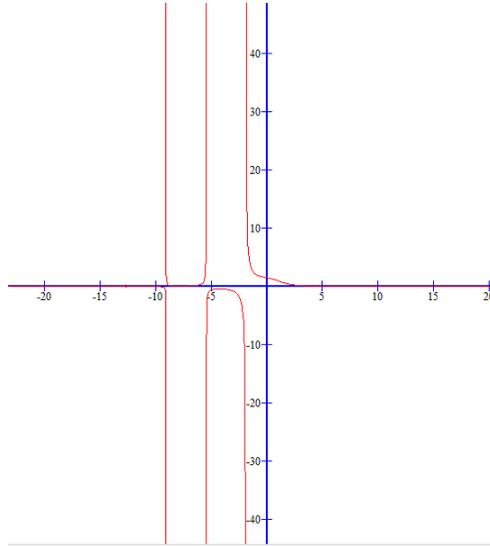


Figura 46: Gráfico da função  $\operatorname{csch}_{3,2} x$

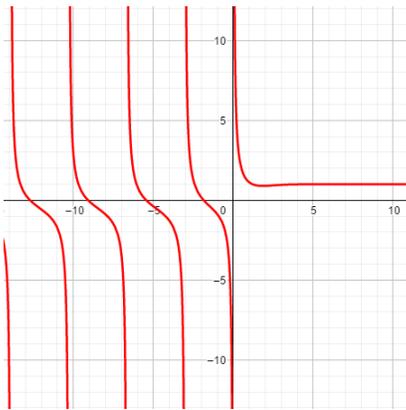


Figura 47: Gráfico da função  $\operatorname{coth}_{3,1} x$

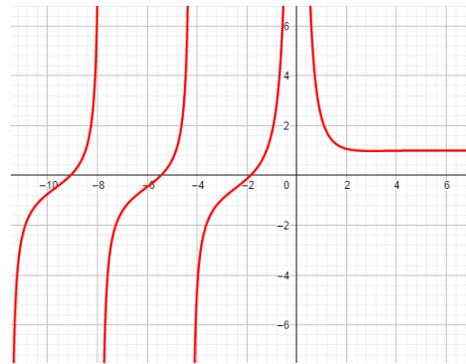


Figura 48: Gráfico da função  $\operatorname{coth}_{3,2} x$

As derivadas dessas funções podem ser calculadas:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}_{3,0} x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cosh_{3,0} x} \right) = -\frac{\sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0}^2 x} = -\frac{1}{\cosh_{3,0} x} \frac{\sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0} x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}_{3,1} x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sinh_{3,1} x} \right) = -\frac{\cosh_{3,0} x}{\sinh_{3,1}^2 x} = -\frac{1}{\sinh_{3,1} x} \frac{\cosh_{3,0} x}{\sinh_{3,1} x}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}_{3,2} x = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sinh_{3,2} x} \right) = -\frac{\sinh_{3,1} x}{\sinh_{3,2}^2 x}$$

ou seja:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}_{3,0} x = -\operatorname{sech}_{3,0} x \tanh_{3,2} x \quad (93)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}_{3,1} x = -\operatorname{csch}_{3,1} x \operatorname{coth}_{3,1} x \quad (94)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch}_{3,2} x = -\operatorname{csch}_{3,2} x \operatorname{coth}_{3,2} x \tanh_{3,1} x \quad (95)$$

e também,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh_{3,1} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sinh_{3,1} x}{\cosh_{3,0} x} \right) = \frac{\cosh_{3,0} x \cosh_{3,0} x - \sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0}^2 x} \\ &= 1 - \frac{\sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0} x \cosh_{3,0} x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tanh_{3,2} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0} x} \right) = \frac{\sinh_{3,1} x \cosh_{3,0} x - \sinh_{3,2} x \sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0}^2 x} \\ &= \frac{\sinh_{3,1} x}{\cosh_{3,0} x} - \left( \frac{\sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0} x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \coth_{3,1} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\cosh_{3,0} x}{\sinh_{3,1} x} \right) = \frac{\sinh_{3,2} x \sinh_{3,1} x - \cosh_{3,0} x \cosh_{3,0} x}{\sinh_{3,1}^2 x} = \\ &= \frac{\sinh_{3,2} x}{\sinh_{3,1} x} - \left( \frac{\cosh_{3,0} x}{\sinh_{3,1} x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \coth_{3,2} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\cosh_{3,0} x}{\sinh_{3,2} x} \right) = \frac{\sinh_{3,2} x \sinh_{3,2} x - \cosh_{3,0} x \sinh_{3,1} x}{\sinh_{3,2}^2 x} = \\ &= 1 - \left( \frac{\cosh_{3,0} x \sinh_{3,1} x}{\sinh_{3,2} x \sinh_{3,2} x} \right) \end{aligned}$$

Portanto;

$$\frac{d}{dx} \tanh_{3,1} x = 1 - \tanh_{3,1} x \tanh_{3,2} x \quad (96)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh_{3,2} x = \tanh_{3,1} x - \tanh_{3,2}^2 x \quad (97)$$

$$\frac{d}{dx} \coth_{3,1} x = \tanh_{3,2} x \coth_{3,1} x - \coth_{3,1}^2 x \quad (98)$$

$$\frac{d}{dx} \coth_{3,2} x = 1 - \coth_{3,2}^2 x \tanh_{3,1} x \quad (99)$$

Serão demonstradas outras propriedades das funções hiperbólicas de terceira ordem na próxima subseção.

## 4.1 Relação fundamental e fórmulas de argumento múltiplo

A principal ferramenta para estudar outras propriedades das funções hiperbólicas generalizadas é o chamado Teorema de Ungar [7]. Para tanto, será definida uma matriz circulante muito especial (para propriedades das matrizes circulantes, ver [5, 20]) que será denominada, seguindo Ungar,  $\mathbf{H}_n(x)$ :

$$\mathbf{H}_n(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{n,0}(x) & \mathbf{H}_{n,1}(x) & \mathbf{H}_{n,2}(x) & \cdots & \mathbf{H}_{n,n-1}(x) \\ \mathbf{H}_{n,n-1}(x) & \mathbf{H}_{n,0}(x) & \mathbf{H}_{n,1}(x) & \cdots & \mathbf{H}_{n,n-2}(x) \\ \mathbf{H}_{n,n-2}(x) & \mathbf{H}_{n,n-1}(x) & \mathbf{H}_{n,0}(x) & \cdots & \mathbf{H}_{n,n-3}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{n,1}(x) & \mathbf{H}_{n,2}(x) & \mathbf{H}_{n,3}(x) & \cdots & \mathbf{H}_{n,0}(x) \end{bmatrix}$$

O Teorema de Ungar faz duas afirmações sobre a natureza dessas matrizes:

**Teorema 1** *Seja  $\det \mathbf{H}_n(x)$  o determinante da matriz  $\mathbf{H}_n(x)$ . Então, para todo  $n \geq 2$ :*

$$\det \mathbf{H}_n(x) = 1, \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (100)$$

$$\mathbf{H}_n(x_1 + x_2) = \mathbf{H}_n(x_1)\mathbf{H}_n(x_2), \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}). \quad (101)$$

Considerando apenas o caso especial  $n = 3$ , para os propósitos desse trabalho:

$$\mathbf{H}_3(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{3,0}(x) & \mathbf{H}_{3,1}(x) & \mathbf{H}_{3,2}(x) \\ \mathbf{H}_{3,2}(x) & \mathbf{H}_{3,0}(x) & \mathbf{H}_{3,1}(x) \\ \mathbf{H}_{3,1}(x) & \mathbf{H}_{3,2}(x) & \mathbf{H}_{3,0}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh_{3,0} x & \sinh_{3,1} x & \sinh_{3,2} x \\ \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x & \sinh_{3,1} x \\ \sinh_{3,1} x & \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x \end{bmatrix}$$

De acordo com o teorema citado, a matriz tem as seguintes características:

$$\det \mathbf{H}_3(x) = 1, \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\mathbf{H}_3(x_1 + x_2) = \mathbf{H}_3(x_1)\mathbf{H}_3(x_2), \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

Calculando explicitamente o determinante dessa matriz  $3 \times 3$ :

$$\det \mathbf{H}_3(x) = \cosh_{3,0} x \Delta_0(x) + \sinh_{3,1} x \Delta_1(x) + \sinh_{3,2} x \Delta_2(x) = 1$$

onde  $\Delta_0(x)$ ,  $\Delta_1(x)$  e  $\Delta_2(x)$  são os respectivos cofatores da matriz  $\mathbf{H}_3(x)$  obtidos eliminando-se os elementos da primeira linha:

$$\Delta_0(x) = \begin{vmatrix} \cosh_{3,0} x & \sinh_{3,1} x \\ \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x \end{vmatrix} = \cosh_{3,0}^2 x - \sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x$$

$$\Delta_1(x) = - \begin{vmatrix} \sinh_{3,2} x & \sinh_{3,1} x \\ \sinh_{3,1} x & \cosh_{3,0} x \end{vmatrix} = \sinh_{3,1}^2 x - \sinh_{3,2} x \cosh_{3,0} x$$

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x \\ \sinh_{3,1} x & \sinh_{3,2} x \end{vmatrix} = \sinh_{3,2}^2 x - \cosh_{3,0} x \sinh_{3,1} x$$

e, substituindo essas funções na equação anterior para o determinante, chega-se na principal identidade entre essas funções. Denominaremos como **Relação Fundamental para as Funções Hiperbólicas de Terceira Ordem**:

$$\cosh_{3,0}^3 x + \sinh_{3,1}^3 x + \sinh_{3,2}^3 x - 3 \cosh_{3,0} x \sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x = 1$$

Tomando a equação acima e dividindo os dois membros por  $\cosh_{3,0}^3 x$ , com  $\cosh_{3,0} x \neq 0$ , obtém-se uma segunda relação fundamental, dessa vez envolvendo as funções  $\operatorname{sech}_{3,0} x$ ,  $\tanh_{3,1} x$  e  $\tanh_{3,2} x$ :

$$\frac{\cosh_{3,0}^3 x}{\cosh_{3,0}^3 x} + \frac{\sinh_{3,1}^3 x}{\cosh_{3,0}^3 x} + \frac{\sinh_{3,2}^3 x}{\cosh_{3,0}^3 x} - \frac{3 \cosh_{3,0} x \sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x}{\cosh_{3,0}^3 x^3} = \frac{1}{\cosh_{3,0}^3 x}$$

com isso, obtém-se a identidade que pode ser denominada **Segunda Relação Fundamental para as Funções Hiperbólicas de Terceira Ordem**:

$$1 + \tanh_{3,1}^3 x + \tanh_{3,2}^3 x - 3 \tanh_{3,1} x \tanh_{3,2} x = \operatorname{sech}_{3,0}^3 x$$

Será visto, a seguir, como usar o teorema citado para explorar outras fórmulas envolvendo essas funções.

## 4.2 Fórmulas de adição de arcos para as funções hiperbólicas de terceira ordem

Nesta seção serão deduzidas algebricamente as fórmulas de adição de arcos para todas as funções hiperbólicas de terceira ordem definidas acima. De acordo com o teorema citado anteriormente, a matriz  $\mathbf{H}_3(x)$  obedece a propriedade:

$$\mathbf{H}_3(x_1 + x_2) = \mathbf{H}_3(x_1)\mathbf{H}_3(x_2) , \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}).$$

logo, a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{3,0}(x_1 + x_2) & \mathbf{H}_{3,1}(x_1 + x_2) & \mathbf{H}_{3,2}(x_1 + x_2) \\ \mathbf{H}_{3,2}(x_1 + x_2) & \mathbf{H}_{3,0}(x_1 + x_2) & \mathbf{H}_{3,1}(x_1 + x_2) \\ \mathbf{H}_{3,1}(x_1 + x_2) & \mathbf{H}_{3,2}(x_1 + x_2) & \mathbf{H}_{3,0}(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

será igual ao produtos das matrizes a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{3,0}(x_1) & \mathbf{H}_{3,1}(x_1) & \mathbf{H}_{3,2}(x_1) \\ \mathbf{H}_{3,2}(x_1) & \mathbf{H}_{3,0}(x_1) & \mathbf{H}_{3,1}(x_1) \\ \mathbf{H}_{3,1}(x_1) & \mathbf{H}_{3,2}(x_1) & \mathbf{H}_{3,0}(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{3,0}(x_2) & \mathbf{H}_{3,1}(x_2) & \mathbf{H}_{3,2}(x_2) \\ \mathbf{H}_{3,2}(x_2) & \mathbf{H}_{3,0}(x_2) & \mathbf{H}_{3,1}(x_2) \\ \mathbf{H}_{3,1}(x_2) & \mathbf{H}_{3,2}(x_2) & \mathbf{H}_{3,0}(x_2) \end{bmatrix}$$

de onde conclui-se que (é suficiente analisar o resultado do produto na primeira linha, as outras linhas não contêm informação adicional):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{3,0}(x_1 + x_2) &= \mathbf{H}_{3,0}(x_1)\mathbf{H}_{3,0}(x_2) + \mathbf{H}_{3,1}(x_1)\mathbf{H}_{3,2}(x_2) + \mathbf{H}_{3,2}(x_1)\mathbf{H}_{3,1}(x_2) \\ \mathbf{H}_{3,1}(x_1 + x_2) &= \mathbf{H}_{3,0}(x_1)\mathbf{H}_{3,1}(x_2) + \mathbf{H}_{3,1}(x_1)\mathbf{H}_{3,0}(x_2) + \mathbf{H}_{3,2}(x_1)\mathbf{H}_{3,2}(x_2) \\ \mathbf{H}_{3,2}(x_1 + x_2) &= \mathbf{H}_{3,0}(x_1)\mathbf{H}_{3,2}(x_2) + \mathbf{H}_{3,1}(x_1)\mathbf{H}_{3,1}(x_2) + \mathbf{H}_{3,2}(x_1)\mathbf{H}_{3,0}(x_2) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \cosh_{3,0}(x_1 + x_2) &= \cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2 \\ \sinh_{3,1}(x_1 + x_2) &= \cosh_{3,0} x_1 \sinh_{3,1} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,2} x_2 \\ \sinh_{3,2}(x_1 + x_2) &= \cosh_{3,0} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,1} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \cosh_{3,0} x_2 \end{aligned}$$

Utilizando-se a definição de  $\tanh_{3,1} x$  pode-se encontrar:

$$\begin{aligned} \tanh_{3,1}(x_1 + x_2) &= \frac{\sinh_{3,1}(x_1 + x_2)}{\cosh_{3,0}(x_1 + x_2)} \\ &= \frac{\cosh_{3,0} x_1 \sinh_{3,1} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,2} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2} \\ &= \frac{\cosh_{3,0} x_1 \sinh_{3,1} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,2} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2} \\ &= \frac{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2} \\ &= \frac{\frac{\sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_2} + \frac{\sinh_{3,1} x_1}{\cosh_{3,0} x_1} + \frac{\sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,2} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2}}{1 + \frac{\sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2} + \frac{\sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tanh_{3,1}(x_1 + x_2) = \frac{\tanh_{3,1} x_1 + \tanh_{3,1} x_2 + \tanh_{3,2} x_1 \tanh_{3,2} x_2}{1 + \tanh_{3,1} x_1 \tanh_{3,2} x_2 + \tanh_{3,2} x_1 \tanh_{3,1} x_2} \quad (102)$$

Analogamente, pode-se encontrar:

$$\begin{aligned}
\tanh_{3,2}(x_1 + x_2) &= \frac{\sinh_{3,2}(x_1 + x_2)}{\cosh_{3,0}(x_1 + x_2)} \\
&= \frac{\cosh_{3,0} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2} \\
&= \frac{\cosh_{3,0} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2} \\
&= \frac{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2} \\
&= \frac{\frac{\sinh_{3,2} x_2}{\cosh_{3,0} x_2} + \frac{\sinh_{3,2} x_1}{\cosh_{3,0} x_1} + \frac{\sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2}}{1 + \frac{\sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2} + \frac{\sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2}}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\tanh_{3,2}(x_1 + x_2) = \frac{\tanh_{3,2} x_1 + \tanh_{3,2} x_2 + \tanh_{3,1} x_1 \tanh_{3,1} x_2}{1 + \tanh_{3,1} x_1 \tanh_{3,2} x_2 + \tanh_{3,2} x_1 \tanh_{3,1} x_2} \quad (103)$$

É fácil ver que muitas outras identidades envolvendo essas funções podem ser extraídas de maneira semelhante.

Uma simples observação dos gráficos dessas funções hiperbólicas de terceira ordem é suficiente para se perceber que nenhuma delas é par, ou ímpar. Na subsecção seguinte será visto o que ainda é possível dizer, com relação às simetrias delas.

### 4.3 Simetria das Funções Hiperbólicas de Terceira Ordem

Considere ainda a matriz  $\mathbf{H}_3(x)$  :

$$\mathbf{H}_3(x) = \begin{bmatrix} \cosh_{3,0} x & \sinh_{3,1} x & \sinh_{3,2} x \\ \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x & \sinh_{3,1} x \\ \sinh_{3,1} x & \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x \end{bmatrix}$$

Conforme visto, o teorema de Ungar afirma que o determinante dessa matriz é 1, portanto essa matriz possui inversa. Para calcular sua inversa vamos utilizar o método a seguir - seja  $\mathbf{A}$  uma matriz invertível, então sua inversa pode ser obtida pela sua adjunta, dividida pelo seu determinante:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \text{adj} \mathbf{A}$$

sendo  $\text{adj} \mathbf{A}$  a matriz adjunta de  $\mathbf{A}$  dada pela transposta da matriz dos cofatores de  $\mathbf{A}$ . Ou seja  $\mathbf{H}_3^{-1}(x) = \frac{1}{\det \mathbf{H}_3(x)} \cdot \text{adj} \mathbf{H}_3(x) = \text{adj} \mathbf{H}_3(x)$  pois, como já foi visto  $\det \mathbf{H}_3(x) = 1$ . Para encontrar a matriz dos cofatores de  $\mathbf{H}_3(x)$ , é suficiente calcular os cofatores dos elementos da primeira linha, pois os cofatores das outras linhas repetirão os da primeira linha, a menos de uma mudança de ordem. Portanto, como no cálculo do determinante feito anteriormente, definiremos três funções de  $x$  dadas pelos cofatores dos elementos da primeira linha:

Seja a função  $\Delta_0(x)$  o primeiro cofator da primeira linha, ou seja, o determinante da matriz obtida eliminando-se a primeira linha e a primeira coluna de  $\mathbf{H}_3(x)$ :

$$\Delta_0(x) = \begin{vmatrix} \cosh_{3,0} x & \sinh_{3,1} x \\ \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x \end{vmatrix} = \cosh_{3,0}^2 x - \sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x$$

seja a função  $\Delta_1(x)$  o segundo cofator da primeira linha, ou seja, o determinante da matriz obtida eliminando-se a primeira linha e a segunda coluna da matriz  $\mathbf{H}_3(x)$ , multiplicado por  $(-1)^{1+2} = -1$ :

$$\Delta_1(x) = - \begin{vmatrix} \sinh_{3,2} x & \sinh_{3,1} x \\ \sinh_{3,1} x & \cosh_{3,0} x \end{vmatrix} = \sinh_{3,1}^2 x - \sinh_{3,2} x \cosh_{3,0}$$

e seja a função  $\Delta_2(x)$  o terceiro cofator da primeira linha, ou seja, o determinante da matriz obtida eliminando-se a primeira linha e a terceira coluna de  $\mathbf{H}_3(x)$ :

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} \sinh_{3,2} x & \cosh_{3,0} x \\ \sinh_{3,1} x & \sinh_{3,2} x \end{vmatrix} = \sinh_{3,2}^2 x - \sinh_{3,1} x \cosh_{3,0}$$

É fácil ver que os cofatores das outras linhas serão os mesmos, a menos de uma mudança de ordem. A matriz dos cofatores será dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta_0(x) & \Delta_1(x) & \Delta_2(x) \\ \Delta_2(x) & \Delta_0(x) & \Delta_1(x) \\ \Delta_1(x) & \Delta_2(x) & \Delta_0(x) \end{bmatrix}$$

Finalmente, como  $\mathbf{H}^{-1}(x) = \text{adj}\mathbf{H}(x)$ :

$$\mathbf{H}_3^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \Delta_0(x) & \Delta_2(x) & \Delta_1(x) \\ \Delta_1(x) & \Delta_0(x) & \Delta_2(x) \\ \Delta_2(x) & \Delta_1(x) & \Delta_0(x) \end{bmatrix}$$

A segunda afirmação do teorema de Ungar diz que  $\mathbf{H}_3(x_1+x_2) = \mathbf{H}_3(x_1).\mathbf{H}_3(x_2)$ . Fazendo  $x_1 = x$  e  $x_2 = -x$  tem-se

$$\mathbf{H}_3[x + (-x)] = \mathbf{H}_3(x).\mathbf{H}_3(-x) = \mathbf{H}_3(0),$$

mas  $\mathbf{H}_3(0) = \mathbf{I}_3$  (pois  $\cosh_{3,0}(0) = 1$ ,  $\sinh_{3,1}(0) = 0$  e  $\sinh_{3,2}(0) = 0$ ), sendo  $\mathbf{I}_3$  a matriz identidade de terceira ordem. Ou seja:

$$\mathbf{H}_3^{-1}(x) = \mathbf{H}_3(-x),$$

logo:

$$\begin{bmatrix} \cosh_{3,0}(-x) & \sinh_{3,1}(-x) & \sinh_{3,2}(-x) \\ \sinh_{3,2}(-x) & \cosh_{3,0}(-x) & \sinh_{3,1}(-x) \\ \sinh_{3,1}(-x) & \sinh_{3,2}(-x) & \cosh_{3,0}(-x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_0(x) & \Delta_2(x) & \Delta_1(x) \\ \Delta_1(x) & \Delta_0(x) & \Delta_2(x) \\ \Delta_2(x) & \Delta_1(x) & \Delta_0(x) \end{bmatrix}.$$

De onde pode-se concluir as seguintes propriedades de simetria das funções hiperbólicas de terceira ordem:

$$\Delta_0(x) = \cosh_{3,0}(-x) = \cosh_{3,0}^2 x - \sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x \quad (104)$$

$$\Delta_2(x) = \sinh_{3,1}(-x) = \sinh_{3,2}^2 x - \sinh_{3,1} x \cosh_{3,0} x \quad (105)$$

$$\Delta_1(x) = \sinh_{3,2}(-x) = \sinh_{3,1}^2 x - \sinh_{3,2} x \cosh_{3,0} x \quad (106)$$

É interessante observar, em particular, que as funções  $\Delta_0(x)$ ,  $\Delta_1(x)$  e  $\Delta_2(x)$  têm, como pode ser facilmente demonstrado, as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Delta_0(x) &= -\Delta_1(x) \\ \frac{d}{dx}\Delta_1(x) &= -\Delta_2(x) \\ \frac{d}{dx}\Delta_2(x) &= -\Delta_0(x)\end{aligned}$$

Efetuada a derivação três vezes de cada uma dessas funções, é fácil ver que todas as três têm a propriedade de serem elas mesmas o negativo de suas derivadas de terceira ordem, i.e.:

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}\Delta_0(x) &= -\Delta_0(x) \\ \frac{d^3}{dx^3}\Delta_1(x) &= -\Delta_1(x) \\ \frac{d^3}{dx^3}\Delta_2(x) &= -\Delta_2(x)\end{aligned}$$

ou seja, elas são soluções da equação diferencial de terceira ordem  $y'''(x) = -y(x)$ , tal como as funções hiperbólicas de terceira ordem são as autofunções da equação diferencial  $y'''(x) = y(x)$ . As três são soluções da mesma equação diferencial com os seguintes valores iniciais:

$$\begin{aligned}\Delta_0(0) &= 1, \quad \Delta_0'(0) = 0, \quad \Delta_0''(0) = 0 \\ \Delta_1(0) &= 0, \quad \Delta_1'(0) = 0, \quad \Delta_1''(0) = 1 \\ \Delta_2(0) &= 0, \quad \Delta_2'(0) = -1, \quad \Delta_2''(0) = 0\end{aligned}$$

Na próxima seção, veremos como definir as **funções trigonométricas de terceira ordem**, através dessas funções.

#### 4.4 As funções trigonométricas de terceira ordem

Será usada a notação  $T_{3,0}(x) = \cos_{3,0} x$ ,  $T_{3,1}(x) = \text{sen}_{3,1} x$  e  $T_{3,2}(x) = \text{sen}_{3,2} x$ , para as três funções trigonométricas de terceira ordem, que serão definidas agora. Analogamente ao caso das hiperbólicas de terceira ordem, as trigonométricas de terceira ordem são as três funções que são soluções da equação diferencial:

$$y'''(x) = -y(x)$$

com os seguintes valores iniciais:

$$\begin{aligned}T_{3,0}(0) &= 1, \quad T_{3,0}'(0) = 0, \quad T_{3,0}''(0) = 0 \\ T_{3,1}(0) &= 0, \quad T_{3,1}'(0) = 1, \quad T_{3,1}''(0) = 0 \\ T_{3,2}(0) &= 0, \quad T_{3,2}'(0) = 0, \quad T_{3,2}''(0) = 1\end{aligned}$$

para construí-las a partir do que foi feito no final da seção anterior, basta fazer:

$$\begin{aligned}T_{3,0}(x) &= \Delta_0(x) = \cosh_{3,0}(-x) \\ T_{3,1}(x) &= -\Delta_2(x) = -\text{senh}_{3,1}(-x) \\ T_{3,2}(x) &= \Delta_1(x) = \text{senh}_{3,2}(-x)\end{aligned}$$

É fácil extrair todas as propriedades dessas novas funções a partir da definição delas, e das propriedades das hiperbólicas de terceira ordem já estudadas. Por exemplo, as séries de Taylor dessas funções são, mudados alguns sinais, obtidas das séries das hiperbólicas:

$$T_{3,0}(x) = \cos_{3,0} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{3k}}{(3k)!} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^9}{9!} + \dots \quad (107)$$

$$T_{3,1}(x) = \text{sen}_{3,1} x = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{3k+1}}{(3k+1)!} = x - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (108)$$

$$T_{3,2}(x) = \text{sen}_{3,2} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{3k+2}}{(3k+2)!} = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (109)$$

Também todas elas convergentes  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Como no caso das hiperbólicas, muitas das propriedades das trigonométricas de terceira ordem podem ser obtidas de forma pouco laboriosa. O trabalho é ainda mais reduzido, dado que as trigonométricas são obtidas através de transformações simples das hiperbólicas.

Através das três funções trigonométricas de terceira ordem pode-se definir as funções:

$$\begin{aligned} \sec_{3,0} x &= \frac{1}{\cos_{3,0} x} \\ \csc_{3,1} x &= \frac{1}{\text{sen}_{3,1} x} \\ \csc_{3,2} x &= \frac{1}{\text{sen}_{3,2} x} \\ \tan_{3,1} x &= \frac{\text{sen}_{3,1} x}{\cos_{3,0} x} \\ \tan_{3,2} x &= \frac{\text{sen}_{3,2} x}{\cos_{3,0} x} \\ \cot_{3,1} x &= \frac{1}{\tan_{3,1} x} = \frac{\cos_{3,0} x}{\text{sen}_{3,1} x} \\ \cot_{3,2} x &= \frac{1}{\tan_{3,2} x} = \frac{\cos_{3,0} x}{\text{sen}_{3,2} x} \end{aligned}$$

As derivadas dessas funções podem ser calculadas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sec_{3,0} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cos_{3,0} x} \right) = \frac{\text{sen}_{3,2} x}{\cos_{3,0}^2 x} = \frac{1}{\cos_{3,0} x} \frac{\text{sen}_{3,2} x}{\cos_{3,0} x} \\ \frac{d}{dx} \csc_{3,1} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\text{sen}_{3,1} x} \right) = - \frac{\cos_{3,0} x}{\text{sen}_{3,1}^2 x} = - \frac{1}{\text{sen}_{3,1} x} \frac{\cos_{3,0} x}{\text{sen}_{3,1} x} \\ \frac{d}{dx} \csc_{3,2} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\text{sen}_{3,2} x} \right) = - \frac{\text{sen}_{3,1} x}{\text{sen}_{3,2}^2 x} = - \frac{1}{\text{sen}_{3,2} x} \frac{\text{sen}_{3,1} x}{\text{sen}_{3,2} x} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\frac{d}{dx} \sec_{3,0} x = \sec_{3,0} x \tan_{3,2} x \quad (110)$$

$$\frac{d}{dx} \csc_{3,1} x = -\csc_{3,1} x \cot_{3,1} x \quad (111)$$

$$\frac{d}{dx} \csc_{3,2} x = -\csc_{3,2} x \tan_{3,1} x \cot_{3,2} x \quad (112)$$

e também,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan_{3,1} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\text{sen}_{3,1} x}{\text{cos}_{3,0} x} \right) = \frac{\text{cos}_{3,0} x \text{cos}_{3,0} x - \text{sen}_{3,1} x (-\text{sen}_{3,2} x)}{\text{cos}_{3,0}^2 x} \\ &= 1 + \frac{\text{sen}_{3,1} x \text{sen}_{3,2} x}{\text{cos}_{3,0} x \text{cos}_{3,0} x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan_{3,2} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\text{sen}_{3,2} x}{\text{cos}_{3,0} x} \right) = \frac{\text{sen}_{3,1} x \text{cos}_{3,0} x - \text{sen}_{3,2} x (-\text{sen}_{3,2} x)}{\text{cos}_{3,0}^2 x} \\ &= \frac{\text{sen}_{3,1} x}{\text{cos}_{3,0} x} + \left( \frac{\text{sen}_{3,2} x}{\text{cos}_{3,0} x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cot_{3,1} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\text{cos}_{3,0} x}{\text{sen}_{3,1} x} \right) = \frac{-\text{sen}_{3,2} x \text{sen}_{3,1} x - \text{cos}_{3,0} x (\text{cos}_{3,0} x)}{\text{sen}_{3,1}^2 x} \\ &= -\frac{\text{sen}_{3,2} x}{\text{sen}_{3,1} x} + \left( \frac{\text{cos}_{3,0} x}{\text{sen}_{3,1} x} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cot_{3,2} x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\text{cos}_{3,0} x}{\text{sen}_{3,2} x} \right) = \frac{-\text{sen}_{3,2} x \text{sen}_{3,2} x - \text{cos}_{3,0} x (\text{sen}_{3,1} x)}{\text{sen}_{3,2}^2 x} \\ &= -1 - \left( \frac{\text{sen}_{3,1} x \text{cos}_{3,0} x}{\text{sen}_{3,2} x \text{sen}_{3,2} x} \right) \end{aligned}$$

Portanto;

$$\frac{d}{dx} \tan_{3,1} x = 1 + \tan_{3,1} x \tan_{3,2} x \quad (113)$$

$$\frac{d}{dx} \tan_{3,2} x = \tan_{3,1} x + \tan_{3,2}^2 x \quad (114)$$

$$\frac{d}{dx} \cot_{3,1} x = -\tan_{3,2} x \cot_{3,1} x - \cot_{3,1}^2 x \quad (115)$$

$$\frac{d}{dx} \cot_{3,2} x = -1 - \cot_{3,2}^2 x \tan_{3,1} x \quad (116)$$

## 4.5 Fórmulas de adição de arcos para funções trigonométricas de terceira ordem

Como visto anteriormente, utilizando a fórmula de soma de arcos para as funções hiperbólicas de terceira ordem tem-se:

$$\cosh_{3,0}(x_1 + x_2) = \cosh_{3,0} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \sinh_{3,1} x_1 \sinh_{3,2} x_2 + \sinh_{3,2} x_1 \sinh_{3,1} x_2$$

substituindo  $x_1$  por  $-x_1$  e  $x_2$  por  $-x_2$ :

$$\begin{aligned} &\cosh_{3,0}[-x_1 + (-x_2)] = \\ &= \cosh_{3,0}(-x_1) \cosh_{3,0}(-x_2) + \sinh_{3,1}(-x_1) \sinh_{3,2}(-x_2) + \sinh_{3,2}(-x_1) \sinh_{3,1}(-x_2) \end{aligned}$$

e, substituindo-se as hiperbólicas por suas respectivas trigonométricas tem-se:

$$\cos_{3,0}(x_1 + x_2) = \cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2 - \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2 - \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2 \quad (117)$$

Para as funções tipo seno, o procedimento é análogo. Tem-se, conforme visto anteriormente:

$$\operatorname{senh}_{3,1}(x_1 + x_2) = \cosh_{3,0} x_1 \operatorname{senh}_{3,1} x_2 + \operatorname{senh}_{3,1} x_1 \cosh_{3,0} x_2 + \operatorname{senh}_{3,2} x_1 \operatorname{senh}_{3,2} x_2$$

substituindo  $x_1$  por  $-x_1$  e  $x_2$  por  $-x_2$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}_{3,1}[(-x_1) + (-x_2)] &= \\ &= \cosh_{3,0}(-x_1) \operatorname{senh}_{3,1}(-x_2) + \operatorname{senh}_{3,1}(-x_1) \cosh_{3,0}(-x_2) + \operatorname{senh}_{3,2}(-x_1) \operatorname{senh}_{3,2}(-x_2) \end{aligned}$$

logo:

$$-\operatorname{sen}_{3,1}(x_1 + x_2) = \cos_{3,0} x_1 (-\operatorname{sen}_{3,1} x_2) - \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \cos_{3,0} x_2 + \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2$$

e, multiplicando-se a equação por  $-1$  conclui-se que:

$$\operatorname{sen}_{3,1}(x_1 + x_2) = \cos_{3,0} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2 + \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \cos_{3,0} x_2 - \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2 \quad (118)$$

Analogamente mostra-se que:

$$\operatorname{sen}_{3,2}(x_1 + x_2) = \cos_{3,0} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2 + \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \cos_{3,0} x_2 + \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2 \quad (119)$$

Utilizando-se a definição de  $\tan_{3,1} x$ , é possível também mostrar que:

$$\begin{aligned} \tan_{3,1}(x_1 + x_2) &= \frac{\operatorname{sen}_{3,1}(x_1 + x_2)}{\cos_{3,0}(x_1 + x_2)} \\ &= \frac{\cos_{3,0} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2 + \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \cos_{3,0} x_2 - \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2 - \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2 - \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2} \\ &= \frac{\cos_{3,0} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2 + \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \cos_{3,0} x_2 - \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}_{3,1} x_2}{\cos_{3,0} x_2} + \frac{\operatorname{sen}_{3,1} x_1}{\cos_{3,0} x_1} - \frac{\operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2} \\ &= \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2} - \frac{\operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2}{\cosh_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2}}{1} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\tan_{3,1}(x_1 + x_2) = \frac{\tan_{3,1} x_1 + \tan_{3,1} x_2 - \tan_{3,2} x_1 \tan_{3,2} x_2}{1 - \tan_{3,1} x_1 \tan_{3,2} x_2 - \tan_{3,2} x_1 \tan_{3,1} x_2} \quad (120)$$

Analogamente, pode-se mostrar:

$$\begin{aligned} \tan_{3,2}(x_1 + x_2) &= \frac{\operatorname{sen}_{3,2}(x_1 + x_2)}{\cos_{3,0}(x_1 + x_2)} \\ &= \frac{\cos_{3,0} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2 + \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \cos_{3,0} x_2 + \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2 - \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2 - \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2} \\ &= \frac{\cos_{3,0} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2 + \operatorname{sen}_{3,2} x_1 \cos_{3,0} x_2 + \operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}_{3,2} x_2}{\cos_{3,0} x_2} + \frac{\operatorname{sen}_{3,2} x_1}{\cos_{3,0} x_1} + \frac{\operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2} \\ &= \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}_{3,1} x_1 \operatorname{sen}_{3,2} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2} - \frac{\operatorname{sen}_{3,2} x_1 \operatorname{sen}_{3,1} x_2}{\cos_{3,0} x_1 \cos_{3,0} x_2}}{1} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tan_{3,2}(x_1 + x_2) = \frac{\tan_{3,2} x_1 + \tan_{3,2} x_2 + \tan_{3,1} x_1 \tan_{3,1} x_2}{1 - \tan_{3,1} x_1 \tan_{3,2} x_2 - \tan_{3,2} x_1 \tan_{3,1} x_2} \quad (121)$$

Na próxima seção, mostra-se as identidades fundamentais para as funções trigonométricas de terceira ordem.

## 4.6 Identidades trigonométricas para as funções de terceira ordem

A relação fundamental para as funções hiperbólicas de terceira ordem afirma que:

$$\cosh_{3,0}^3 x + \sinh_{3,1}^3 x + \sinh_{3,2}^3 x - 3 \cosh_{3,0} x \sinh_{3,1} x \sinh_{3,2} x = 1.$$

Substituindo  $x$  por  $-x$  tem-se:

$$\cosh_{3,0}^3(-x) + \sinh_{3,1}^3(-x) + \sinh_{3,2}^3(-x) - 3 \cosh_{3,0}(-x) \sinh_{3,1}(-x) \sinh_{3,2}(-x) = 1.$$

Substituindo as funções hiperbólicas por suas respectivas trigonométricas na equação anterior, tem-se o que se pode denominar **Relação Fundamental para as Funções Trigonômétricas de Terceira Ordem**:

$$\cos_{3,0}^3 x - \sin_{3,1}^3 x + \sin_{3,2}^3 x + 3 \cos_{3,0} x \sin_{3,1} x \sin_{3,2} x = 1 \quad (122)$$

Utilizando a equação (119) e dividindo-se os dois membros por  $\cos_{3,0}^3 x$  com  $\cos_{3,0} x \neq 0$  obtém-se:

$$\frac{\cos_{3,0}^3 x}{\cos_{3,0}^3 x} - \frac{\sin_{3,1}^3 x}{\cos_{3,0}^3 x} + \frac{\sin_{3,2}^3 x}{\cos_{3,0}^3 x} + \frac{3 \cos_{3,0} x \sin_{3,1} x \sin_{3,2} x}{\cos_{3,0}^3 x} = \frac{1}{\cos_{3,0}^3 x},$$

logo chegamos naquela que pode ser denominada **Segunda Relação Fundamental para as Funções Trigonômétricas de Terceira Ordem**:

$$1 - \tan_{3,1}^3 x + \tan_{3,2}^3 x + 3 \tan_{3,1} x \tan_{3,2} x = \sec_{3,0}^3 x \quad (123)$$

## 4.7 Gráficos das funções trigonométricas de terceira ordem

Como foi visto na seção (4.4), há uma relação entre as funções trigonométricas de terceira ordem e as funções hiperbólicas de terceira ordem. Através dessa relação obtivemos os gráficos das funções trigonométricas de terceira ordem a partir do gráfico das hiperbólicas, conforme visto a seguir.

### 4.7.1 Gráficos da função $\cos_{3,0} x$

O gráfico dessa função é obtido através do gráfico da função  $\cosh_{3,0} x$  substituindo  $x$  por  $-x$ . Como a função  $\cosh_{3,0} x$  não possui restrição em seu domínio, também não haverá para a função  $\cos_{3,0} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

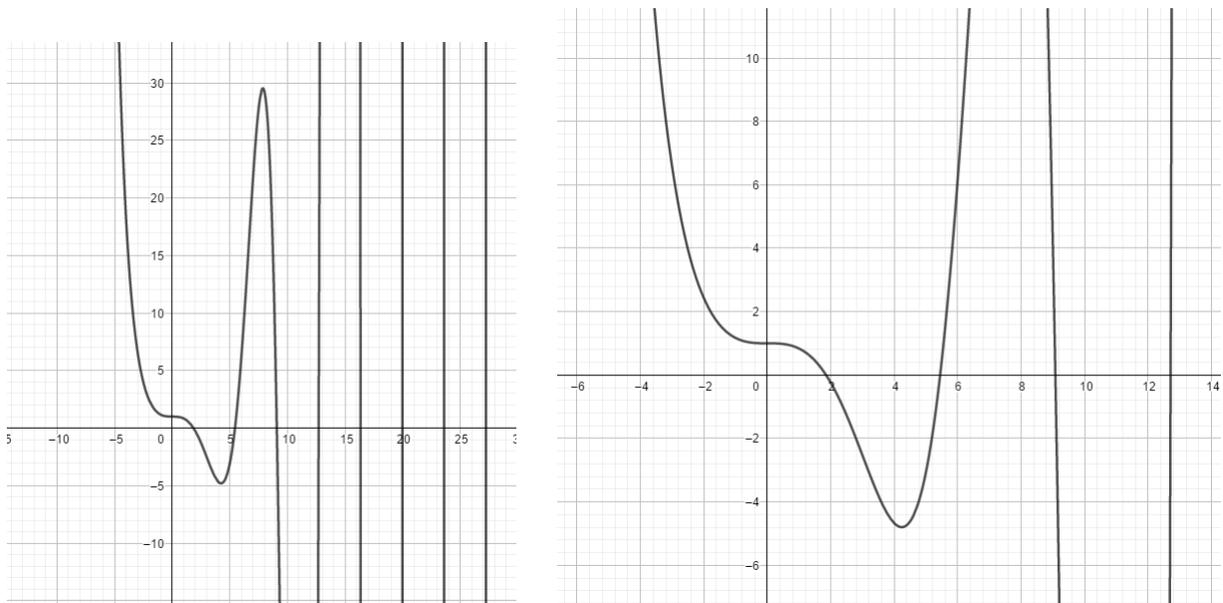


Figura 49: Gráficos da função  $\cos_{3,0} x$  com diferentes aproximações

### 4.7.2 Gráficos da função $\text{sen}_{3,1} x$

O gráfico dessa função é obtido através do gráfico da função  $\text{senh}_{3,1} x$ , substituindo  $x$  por  $-x$  e multiplicando-a por  $-1$ . Como o domínio de  $\text{senh}_{3,1} x$  não possui restrição, também não haverá para a função  $\text{sen}_{3,1} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

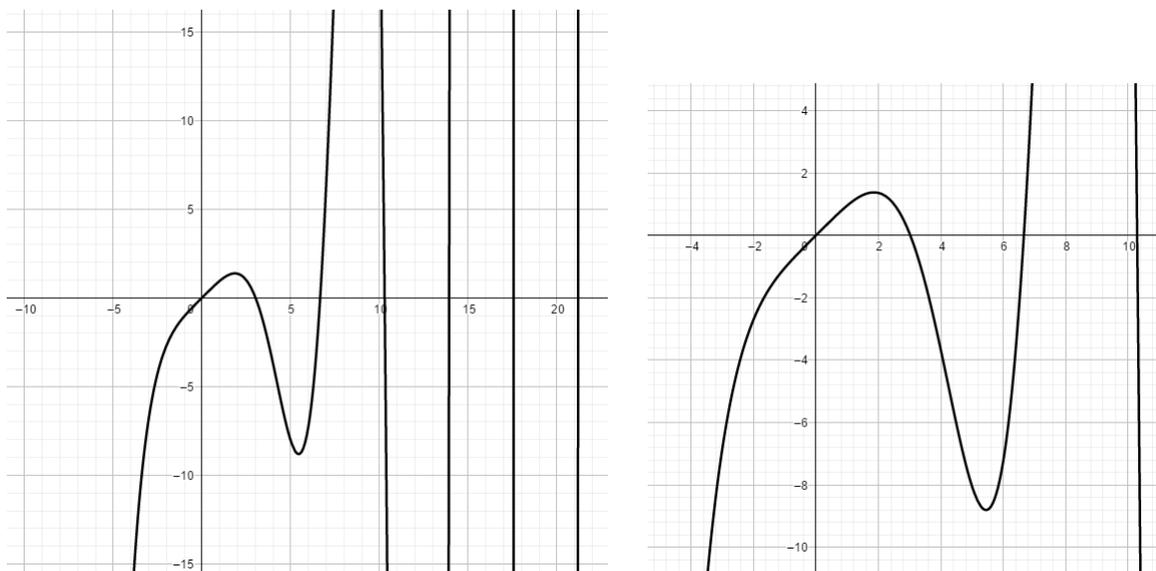


Figura 50: Gráficos da função  $\text{sen}_{3,1} x$  com diferentes aproximações

### 4.7.3 Gráficos da função $\text{sen}_{3,2} x$

O gráfico dessa função é obtido através do gráfico da função  $\text{senh}_{3,2} x$  substituindo  $x$  por  $-x$ . Como o domínio de  $\text{senh}_{3,2} x$  não possui restrição, também não haverá para a função  $\text{sen}_{3,2} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

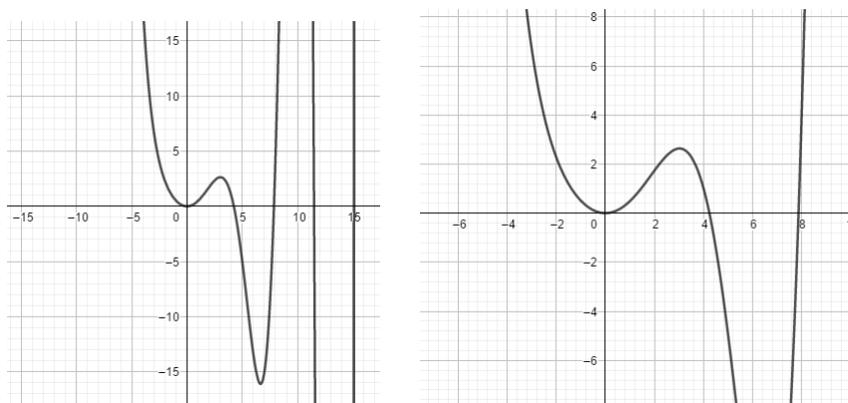


Figura 51: Gráficos da função  $\text{sen}_{3,2} x$  com diferentes aproximações

#### 4.7.4 Gráfico da função $\tan_{3,1} x$

O gráfico dessa função é obtido pela razão entre as funções  $\text{sen}_{3,1} x$  e  $\text{cos}_{3,0} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

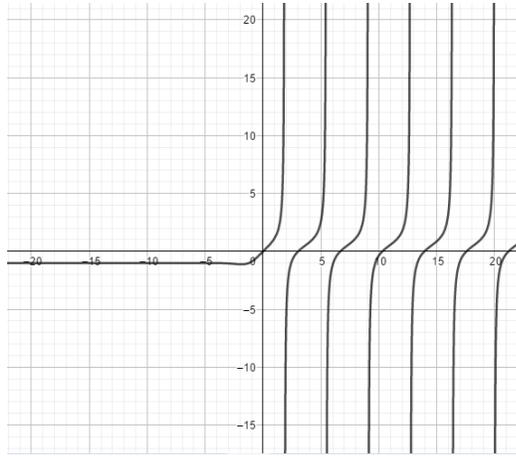


Figura 52: Gráfico da função  $\tan_{3,1} x$

#### 4.7.5 Gráfico da função $\tan_{3,2} x$

O gráfico dessa função é obtido pela razão entre as funções  $\text{sen}_{3,2} x$  e  $\text{cos}_{3,0} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

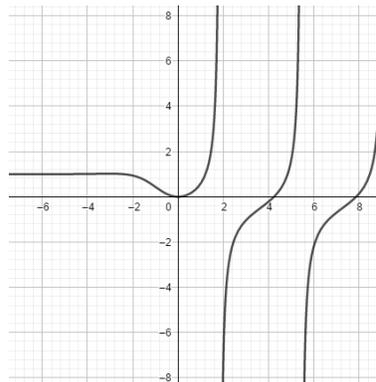


Figura 53: Gráfico da função  $\tan_{3,2} x$

#### 4.7.6 Gráfico da função $\cot_{3,1} x$

O gráfico dessa função é obtido pela razão entre as funções  $\text{cos}_{3,0} x$  e  $\text{sen}_{3,1} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

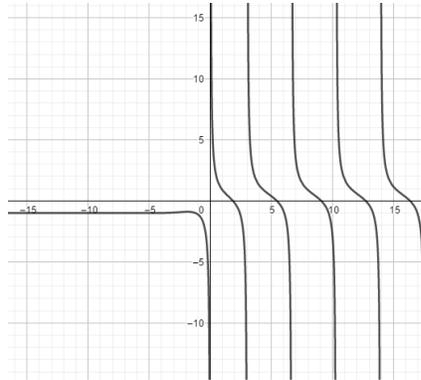


Figura 54: Gráfico da função  $\cot_{3,1} x$

#### 4.7.7 Gráfico da função $\cot_{3,2} x$

O gráfico dessa função é obtido pela razão entre as funções  $\cos_{3,0} x$  e  $\sin_{3,2} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

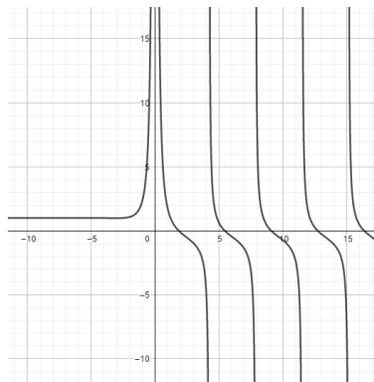


Figura 55: Gráfico da função  $\cot_{3,2} x$

#### 4.7.8 Gráfico da função $\sec_{3,0} x$

O gráfico dessa função é obtido pelo inverso da função  $\cos_{3,0} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

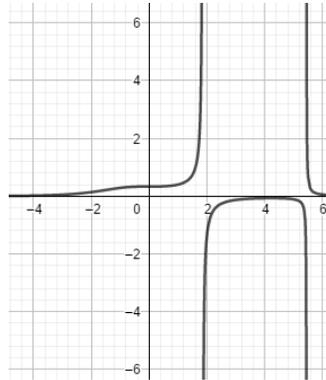


Figura 56: Gráfico da função  $\sec_{3,0} x$

#### 4.7.9 Gráfico da função $\csc_{3,1} x$

O gráfico dessa função é obtido pelo inverso da função  $\sen_{3,1} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

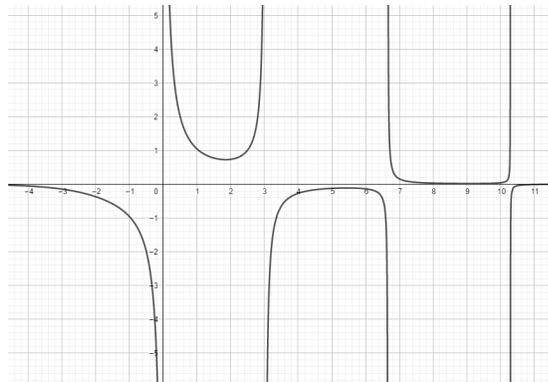


Figura 57: Gráfico da função  $\csc_{3,1} x$

#### 4.7.10 Gráfico da função $\csc_{3,2} x$

O gráfico dessa função é obtido pelo inverso da função  $\sen_{3,2} x$ . Dessa forma, obtém-se o gráfico.

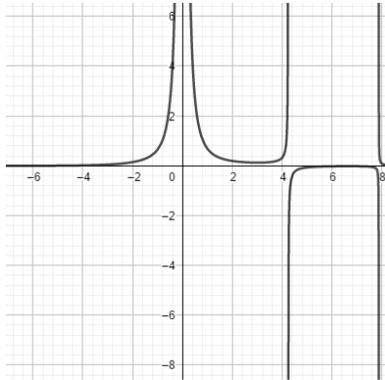


Figura 58: Gráfico da função  $\text{csc}_{3,2} x$

## 4.8 Aplicação em sala de aula

Nesta seção será mostrado alguns exercícios feitos com alunos do ensino médio, em uma aula para mostrar uma aplicação das funções trigonométricas circulares e hiperbólicas. Primeiramente foi explicado a eles o que seria uma função trigonométrica definida no círculo de raio unitário e a função trigonométrica definida em uma hipérbole equilátera. A seguir foi mostrado aos alunos o significado de uma catenária. Depois foi mostrado aos alunos que a equação da catenária em coordenadas cartesianas é dada pelo cosseno hiperbólico e a sua equivalente exponencial. então foi apresentada a função

$$y = \frac{1}{a} \cos(ax) = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax})$$

A seguir foram passadas algumas questões sobre cálculo de alguns valores numéricos para as funções seno e cosseno hiperbólico, e posteriormente, alguns problemas envolvendo uma aplicação das funções trigonométricas. As questões foram as seguintes:

1. Encontre o valor numérico de cada expressão, dado que  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  e  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ :

(a)  $\sinh(0) = ?$

solução:

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

(b)  $\cosh(0) = ?$

solução:

$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

(c)  $(\cosh(0))^{-1} = ?$

solução:

$$(\cosh(0))^{-1} = \left( \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \right)^{-1} = \left( \frac{1 + 1}{2} \right)^{-1} = 1$$

2. Um fio que liga dois postes de 4 metros a 12 metros de distância um do outro, faz um ângulo de  $60^\circ$  entre cada ponto de suspensão e o ponto mais baixo do fio. Calcule a

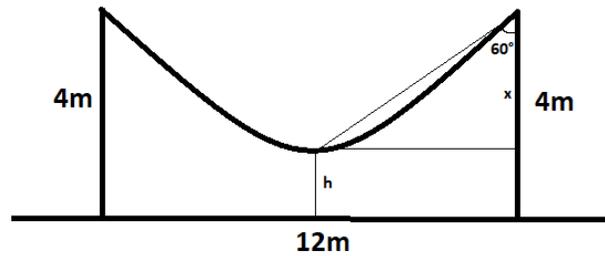


Figura 59: Fio que liga dois postes a 12 metros de distância

altura aproximada do ponto mais baixo do fio. (use  $\sqrt{3} = 1,7$ )

solução: Seja  $h$  a altura do ponto mais baixo do fio, então temos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{6}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{6}{x}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

$$x = 3,4m$$

$$h = 4 - 3,4$$

$$h = 0,6m$$

3. A função a seguir é a catenária. Nessa função  $a$  é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente e massa por unidade de comprimento, e a tensão com a qual ela é segura.

$$f(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$$

Dois postes de alturas iguais e afastados 50 metros um do outro suportam um cabo que descreve uma catenária em que  $a = 0,08$ .

- (a) Qual a distância mínima do cabo ao solo?

solução: toma-se esse ponto mínimo como sendo  $x = 0$ , e substituindo na equação da catenária tem-se:

$$f(0) = \frac{1}{2 \cdot 0,08}(e^{0,08 \cdot 0} + e^{-0,08 \cdot 0})$$

$$f(0) = \frac{1}{0,16}(e^0 + e^0)$$

$$f(0) = \frac{2}{0,16} = 12,5m$$

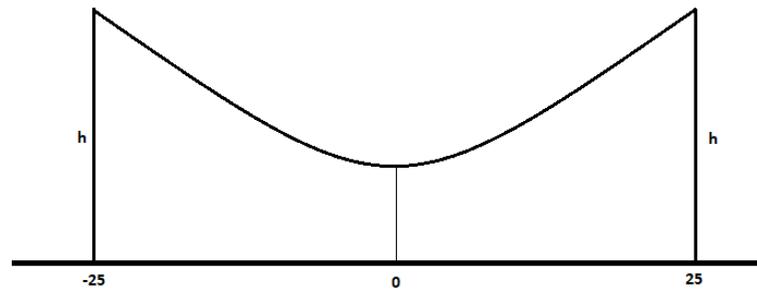


Figura 60: Função Catenária

(b) Qual a altura dos postes?

solução: como o ponto mínimo se encontra em  $x = 0$  e os postes estão a 50 metros de distância um do outro, então a distância de  $x = 0$  ao poste será 25 m, logo toma-se  $x = 25$  e substitui-se na equação da catenária da seguinte forma:

$$f(25) = \frac{1}{2,0,08}(e^{0,08 \cdot 25} + e^{-0,08 \cdot 25})$$

$$f(25) = \frac{1}{0,16}(7,39 + 0,135)$$

$$f(25) = 47,03m$$

Dessa forma pode-se mostrar aos alunos a importância das funções trigonométricas e hiperbólicas através de exemplos práticos do dia a dia.

## 5 Conclusão e perspectivas futuras

Nesse trabalho foram apresentadas as funções trigonométricas e hiperbólicas clássicas, suas definições, gráficos, propriedades, diversas identidades e fórmulas, derivadas e integrais, bem como das funções subsidiárias ( $\sec x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{cosec} x$ ,  $\operatorname{cotg} x$ ,  $\operatorname{sech} x$ ,  $\operatorname{tgh} x$ ,  $\operatorname{cosech} x$ ,  $\operatorname{cotgh} x$ ) e funções inversas ( $\operatorname{arc} \sec x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{sech} x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{tgh} x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{cosech} x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{cotgh} x$ ). A relação das funções trigonométricas com a geometria do círculo, e a relação das funções hiperbólicas com a hipérbole equilátera é mostrada. Também foi feita uma aula prática com alunos do ensino médio, mostrando sua importância e aplicações através de exercícios.

Introduziu-se brevemente as chamadas funções hiperbólicas e trigonométricas generalizadas. De maneira mais aprofundada, definiu-se as funções hiperbólicas e trigonométricas de terceira ordem e foram deduzidas várias de suas propriedades, gráficos, identidades, fórmulas e derivadas, bem como de suas funções subsidiárias. Os gráficos de muitas dessas funções (principalmente das subsidiárias), bem como a concatenação de muitas das propriedades delas são raramente mencionadas na literatura, ou são encontrados de maneira dispersa, em idiomas variados, devido provavelmente ao surgimento histórico recorrente de maneira independente dessas funções. A clara relação das funções hiperbólicas e trigonométricas quando a ordem é três, intimamente ligadas por uma simetria aparente mais simples do que no caso das funções de ordem dois, foi mencionada. A notação aqui utilizada para as funções de terceira ordem é inédita e facilmente generalizada para ordens mais altas. A clareza com que remete a notação convencional das funções clássicas de segunda ordem, que resiste por séculos, é uma vantagem no seu uso, e aparentemente representa uma facilidade, pela analogia imediata que provoca, na exploração das propriedades gerais das funções primárias e subsidiárias de terceira, e até outras ordens.

Como motivo de trabalho futuro pode-se esperar um estudo mais aprofundado das raízes dessas funções, o cálculo de integrais das funções subsidiárias, e suas equações diferenciais. É possível suspeitar que as séries das funções hiperbólicas e trigonométricas de terceira ordem subsidiárias ( $\operatorname{sech}_{3,0} x$ ,  $\operatorname{sec}_{3,0} x$ ,  $\operatorname{tanh}_{3,1} x$ ,  $\operatorname{tanh}_{3,2} x$ ,  $\operatorname{tan}_{3,1} x$ ,  $\operatorname{tan}_{3,2} x$ , etc) estejam relacionadas, por exemplo, com os números de Euler e Bernoulli generalizados, assim como as séries das funções de segunda ordem ( $\operatorname{sech} x$ ,  $\operatorname{sec} x$ ,  $\operatorname{tan} x$ ,  $\operatorname{tanh} x$ ) estão com os números de Euler e Bernoulli. A relação dessas funções com a interessante superfície cúbica de revolução  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$  não foi explorada [21, 22], e é provável que suas propriedades geométricas iluminem o misterioso significado das transformações codificadas pela matriz  $\mathbf{H}_3(\theta)$ , [29]. Nota-se que a rota para exploração das propriedades das funções de ordens mais altas é a mesma, e tudo que aqui foi feito para terceira ordem pode ser feito para ordens maiores que quatro, exatamente com os mesmos procedimentos.

As funções inversas de terceira ordem não foram tratadas aqui, e suas propriedades, como derivadas, integrais, séries, gráficos, raízes, etc podem ser assunto de trabalhos futuros. Possivelmente estejam também relacionados com integrais do tipo  $\int \frac{1}{1+x^3} dx$ , etc.

A necessidade de literatura mais específica sobre o tema, de pouca ou nenhuma referência substancial em português, e de mais estudo explícito visando o preenchimento de muitas lacunas no conhecimento a serem cobertas foram as principais motivações do presente trabalho. É possível que uma maior popularização desses interessantes objetos matemáticos leve ao preenchimento de muitas das lacunas no assunto, e de uma intensificação na busca de suas relações com outras áreas da matemática pura e aplicada.

## Referências

- [1] Silva, Everaldo Raiol. “O surgimento das Trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas” (2014).
- [2] Bortoli, Gladis “Um Olhar Histórico nas Aulas de Trigonometria”.(Maio, 2012)
- [3] Costa, Nilce Lobo. “Educação Matemática em Revista-Revista da SBEM”, 2003 - ufrgs.br
- [4] Mingonanci, Marcos Rogério. “Uma Introdução à Trigonometria Hiperbólica e sua aplicação no Ensino Médio”(Julho 2016)
- [5] Philip J. Davis “Circulant Matrices”; John Wiley & Sons, Inc. (1979), 250 pags.
- [6] L. E. Ward. “Some Functions Analogous to Trigonometric Functions”; The American Mathematical Monthly, Vol. 34, No. 6 (Jun. - Jul., 1927), pp. 301-303
- [7] Abraham Ungar. “Generalised Hyperbolic Functions”; The American Mathematical Monthly Vol.89 no.9 (Nov.,1982), 688-691
- [8] Martin E. Muldoon. “Generalized hyperbolic functions, circulant matrices and functional equations”; arXiv:math/9910143v2, March 4, 2005
- [9] Martin E. Muldoon and Abraham A. Ungar. “Beyond Sin and Cos”; Mathematics Magazine, Vol. 69, No. 1 (Feb., 1996), pp. 3-14
- [10] Robert M. Gray. “Toeplitz and Circulant Matrices: A review”;
- [11] José Cruz dos Santos, Jonas “Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas” (Julho, 2015)
- [12] Kakutaro Morinaga and Takayuki Nono. “On the linearization of a form of higher degree and its representation”; Received Jan. 8, 1952; Mathematical Institute, Hiroshima University
- [13] R. Jagannathan. “On generalized Clifford algebras and their physical applications”; arXiv:1005.4300v1; 24 May 2010
- [14] Alladi Ramakrishnan. Proceedings of the Conference on Clifford Algebra its Generalization and applications. Madras, 1971.
- [15] A. K. Kwansiewski. “A note on generalized Rademacher and hyperbolic functions”; A. Micali et al. Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. pps 215-219. 1992 KhlWer Academic Publishers. Second Workshop held at Montpellier, France, 1989 edited by A. Micali/R. Boudet/J. Helmstetter
- [16] R. K. Kittappa. “A Generalization of the Rotation Matrix and Related Results”; Linear algebra and its applications 92:251-258 (1987) Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987
- [17] I.J. Good. “Skew circulants and the theory of numbers”; Virginia Polytechnic Institute and State University, 1984
- [18] Horst Alzer, Stephan Ruscheweyh and Luis Salinas. “Inequalities for Cyclic Functions”; Journal of Approximation Theory 112, 216–225 (2001) doi:10.1006/jath.2001.3610, available online at <http://www.idealibrary.com>

- [19] E. T. Bell. “A Laplacian Equation”; *The American Mathematical Monthly*, Vol. 39, No. 9 (Nov., 1932), pp. 515-517
- [20] Edson Pereira Arruda Filho. “As Elegantes Matrizes Circulantes”; Dissertação (mestrado) PROFMAT - Universidade Federal de São João DelRei, Orientador: José Eloy Ottoni, 2019
- [21] Desmond MacHale. “My Favourite Polynomial”; *The Mathematical Gazette* Vol. 75, No. 472 (Jun., 1991), pp. 157-165 (9 pages)
- [22] Mark B. Villarino. “A Cubic Surface of Revolution”; arXiv:1301.0243v5
- [23] P. Appel “Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires”; *Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Académie des Sciences* (pag.1378), 1877.
- [24] Kaufman, H. “A Biographical Note on the Higher Sine Functions.”; *Scripta Math.* 28, 29-36, 1967.
- [25] Ungar, A. “Higher Order Alpha-Hyperbolic Functions.”; *Indian J. Pure. Appl. Math.* 15, 301-304, 1984.
- [26] P. Appel. “Proposition d’algèbre et de géométrie déduit de la considération des racines cubiques de l’unité”; *Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Académie des Sciences* (pag.540)
- [27] Théodore Oniga. “Sur une généralisation des fonctions circulaires et hyperboliques”; *Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Académie des Sciences* (pag.1138), 1948.
- [28] Ludwjk Silberstein. “Differentially cyclical sets of functions. An extension of the concept of hyperbolic functions”; *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33:221, 457-461, DOI: 10.1080/14786444208521211, (1942).
- [29] Devisme, Jacques. “Sur l’équation de M. Pierre Humbert.”; *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques, Serie 3, Volume 25* (1933) , pp. 143-238. <http://www.numdam.org/item/AFST-1933-3-25-143-0/>
- [30] Muniz Neto, A. C. “Fundamentos de Cálculo. SBM” (2015), Coleção PROFMAT.
- [31] Anton, Howard “Cálculo - Volume 1”; Bookman. ISBN 9788560031634 (2007), 8 ed. [S.l.].
- [32] Luiz Bizerra de Aguiar. “Relações complexas entre as funções hiperbólicas e a transmissão de energia”; *Científico*. V. 18, N. 37, Fortaleza, jan./jun. 2018