Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT

NILSON HERMINIO NICACIO

UMA JUSTIFICAVA DA VALIDADE DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO

Natal, agosto de 2013

NILSON HERMINIO NICACIO

UMA JUSTIFICAVA DA VALIDADE DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof^{a}. Dr^{a}. Debora Borges Ferreira

Natal, agosto de 2013

Dedicatória

Dedico este trabalho à Deus por proporcionar-me saúde e à minha família.

Agradecimentos

A Deus que pelo seu amor, misericórdia e graça concedeu-me esta oportunidade.

A todos os meus familiares. Em especial ao meu pai Manoel Herminio Nicacio; a minha mãe Noêmia Laranjeira Nicacio; a minha esposa Ana Maria Virgínio da Silva Herminio; aos meus filhos Nilson Herminio Nicacio Júnior e Ana Beatriz Herminio Nicacio e aos meus dez irmãos.

A professora e coordenadora Viviane Simioli Medeiros Campos sempre competente, atenciosa e prestativa para solucionar os nossos mais diversos questionamentos.

A minha orientadora Débora Borges Ferreira pela excepcional orientação, paciência, ajuda e disponibilidade para que pudéssemos concluir esse trabalho.

A todos os professores do Profmat na UFRN, por toda dedicação destinada ao ensino e aprendizagem nas disciplinas ministradas.

A todos os meus colegas de turma do Profmat, em especial Anderson Luis de Azevedo Paulo , Abraão Eduardo Brito Rocha de Azevedo e Agamenon Henrique de Carvalho Tavares que muito me incentivaram a dar continuidade na conclusão desse trabalho.

Aos colegas colaboradores Carlos Alexandre Gomes da Silva, Cátia Regina dos Santos Silva e Lydianne Patrícia Machado da Silva.

"A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar."

G. Polya

Resumo

Dentre os vários teoremas que são ensinados na educação básica, alguns podem ser demonstrados em sala de aula e outros não, devido o grau de dificuldade de sua prova formal.

Um exemplo clássico é o Teorema Fundamental da Álgebra, que não é demonstrado, pois é necessário conhecimentos em Matemática de nível superior.

Neste trabalho, justificamos intuitivamente a validade do Teorema Fundamental da Álgebra usando o software Geogebra. E, baseados em [2], apresentamos uma clara demonstração formal desse teorema que está endereçada aos professores do ensino básico e alunos de licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Equação polinomial. Função polinomial. Geogebra. Teorema Fundamental da Álgebra

Abstract

Among several theorems which are taught in basic education some of them can be proved in the classroom and others do not, because the degree of difficulty of its formal proof.

A classic example is the Fundamental Theorem of Algebra which is not proved, it is necessary higher-level knowledge in mathematics.

In this paper, we justify the validity of this theorem intuitively using the software Geogebra. And, based on [2] we will present a clear formal proof of this theorem that is addressed to school teachers and undergraduate students in mathematics.

Keywords:Polynomial Equation. Polynomial Function. Geogebra. Fundamental Theorem of Algebra

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Esse trabalho é destinado aos professores do ensino básico e aos alunos de licenciatura em Matemática que possuam interesse em se aprofundar na teoria das equações polinomiais, em particular o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) e, com isso, melhorar o seu conhecimento matemático para facilitar o aprendizado do aluno.

Observando os conteúdos contidos nos currículos do ensino médio, o estudo das equações polinomiais de grau maior que dois ocupa um lugar de destaque, visto que, na maioria das escolas é assunto da 3ª série do ensino médio como vemos na matriz curricular do Estado de São Paulo [3], sendo também base para as disciplinas de cálculo e álgebra no ensino superior. Esse tema também pode ser usado como motivação para desenvolver o estudo dos números complexos.

Os materiais didáticos de Matemática do ensino médio enunciam o Teorema Fundamental da Álgebra sem apresentar uma justificativa de validade desse teorema dizendo apenas que a demonstração desse resultado exige conhecimentos avançados em Matemática, não abordados no ensino médio, como citamos a seguir:

> "... ele é apresentado nos livros como se fosse um axioma, sem quaisquer razões para pelo menos mostrar que se trata de um resultado plausível. Isso se justifica pelo fato de que sua demonstração requer argumentos que não podem ser feitos de modo preciso no Ensino Médio. Mas é interessante que pelo menos o professor tenha uma ideia sobre como demonstrá-lo."[8, pag.: 230]

Para amenizar essa problemática apresentamos nosso trabalho, que está dividido em três capítulos organizados da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos um breve resumo da História das equações polinomiais, relembramos como resolver equações polinomiais de graus 1 e 2 e apresentamos os métodos de resolução das de graus 3 e 4. No Capítulo 2, tratamos da teoria das equações polinomiais com coeficientes complexos. E, no Capítulo 3, interpretamos graficamente as raízes não reais de um polinômio e com o auxílio do software Geogebra [5] construímos alguns gráficos que, a partir deles, conjecturamos alguns resultados que servirão como justificativa informal para validade do TFA. Para concluir esse capítulo apresentamos uma demonstração formal deste teorema.

Capítulo 1

Um breve histórico das equações polinomiais

Toda teoria sobre as equações polinomiais se resume basicamente em responder duas perguntas: dada uma equação polinomial, como obter uma raiz para essa equação (que são as fórmulas resolutivas)? E será que toda equação polinomial possui solução? Responder essas duas perguntas foi tema de estudos de alguns matemáticos por muitos anos. Com este trabalho pretendemos percorrer a trajetória desses estudos.

Podemos dizer que os egípcios foram os precursores no estudo das equações polinomiais, pois os primeiros trabalhos escritos abordando tal tema estão nos papiros de Rhind (1650 a.C.)[4], neles aparecem problemas que são resolvidos por equações polinomiais do 1º grau. Por outro lado, os babilônios foram os primeiros a tratar, de forma eficiente, as equações polinomiais do 2º grau também através de problemas práticos; embora não reconhecessem as soluções negativas por não conhecerem os números negativos até então. Por fim, foi na Índia que as resoluções das equações polinomiais do 2º grau teve seu desfecho, com as contribuições de dois matemáticos: o primeiro foi Brahmagupta (589-668)[2] que apresentou as soluções negativas e o segundo foi Bhaskara Acharya (1114-1185)[2] que apresentou o método de resolução das equações polinomiais do 2º grau através do completamento de quadrados. Vale salientar que a fórmula resolutiva para equações polinomiais do 2º grau que conhecemos como fórmula de Bhaskara não foi apresentada por ele, pois na sua época não usava-se letras para representar os coeficientes nem os sinais de operações que conhecemos. Na verdade, se fôssemos dar um nome a essa fórmula seria fórmula de François Viete (1540-1603), pois foi esse matemático francês que introduziu o uso das letras para representar quantidades desconhecidas e sinais para representar algumas operações.

O desdobramento das equações de grau 3 e 4 ocorreu na Itália. O primeiro foi trabalho do matemático Nicolo Fontana de Brescia (1500-1557) [4], mais conhecido como Tartaglia, que primeiro resolveu as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, depois resolveu as do tipo $x^3+px+q = 0$, tarefa essa também realizada por Scipione Del Ferro (1465-1526)[4] e, por último, Tartaglia resolveu as equações do tipo $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ transformando-a em uma do tipo $x^3 + px + q = 0$ que ele já conhecia a solução. Já as equações de grau 4 foram resolvidas pelo matemático Ludovico Ferrari (1522-1565)[4] que resolveu primeiramente as equações do tipo $x^4+px^2+qx+r = 0$, pois as completas $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$ podem ser sempre transformadas em uma do tipo anterior.

Esses matemáticos expressaram fórmulas que fornecem as raízes das equações de graus 2, 3 e 4, mas ao manuseá-las se deparavam, às vezes, com raízes quadradas de números negativos, números que não conheciam até então; problema resolvido por Rafael Bombelli (1526-1572)[2] que se utiliza das mesmas regras sobre números reais, para manipular as raízes de números negativos, acabando com o desconforto que os matemáticos da época tinham com esses números.

As soluções das equações polinomiais de graus 2, 3 e 4 apresentadas foram fórmulas expressas por radicais. Então surge a pergunta: será que as equações polinomiais de grau 5 possuem também soluções expressas por radicais? Dois grandes matemáticos tentaram responder; o primeiro foi o suíço Leonhard Euller (1707-1783) e o segundo foi Joseph Louis Lagrange (1736-1813)[2], mas não obtiveram êxito. Surgem então outras perguntas: será que toda equação de grau 5 possui solução? Ou melhor, dada a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, onde n é um número natural e $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números reais, será que ela tem solução para todo n natural? E quais equações possuem soluções expressas por radicais?

A primeira pergunta foi respondida pelo alemão Carl F. Gauss (1777-1855)[4] que em sua tese de doutorado mostrou que toda equação polinomial de grau $n \geq 1$, com coeficientes complexos, possui pelo menos uma raiz complexa, esse resultado é conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra. A segunda foi dada pelo matemático francês Evariste Galois (1811-1832)[4] que demonstrou (usando o Teorema Fundamental da Álgebra) que toda equação polinomial de grau maior que 4 não possui solução expressa por radicais completando o trabalho do matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829)[4].

1.1 Equações polinomiais que são resolvidas por fórmulas.

"Como resolver essa equação?" Essa pergunta é feita normalmente pelos alunos quando estão diante de uma equação seja ela polinomial ou não. Ensinamos como resolver equações polinomiais de 1º e 2º graus, mas os livros didáticos não ensinam, nem mesmo falam, que existem métodos para resolver equações polinomiais de 3º e 4º graus. O que faremos nesse capítulo é relembrar os métodos de resolução das equações polinomiais de 1º e 2º graus e apresentar os métodos de resolução das de 3º e 4º graus.

1.1.1 Equação polinomial do 1º grau.

"Uma quantidade, somada a seus $\frac{2}{3}$, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é essa quantidade? (ver em [4])" Esse problema era um dos que constavam nos papiros de Rhind cuja tradução matemática é $x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 33$, onde x representa a quantia procurada. Expressão como essa pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, onde a e b são números reais com $a \neq 0$ que chamamos de equação polinomial de 1º grau cuja resolução é feita da seguinte forma.

Dada a equação $ax + b = 0$, com a e b reais e a diferente de zero, temos:

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Retomando a equação que traduz o problema introdutório dessa seção temos:

$$x + \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} = 33,$$

multiplicando por 42 temos;

$$\begin{aligned} 42x + 28x + 21x + 6x &= 1368; \\ 97x &= 1368, \end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{1}{97}$ temos:

$$x = \frac{1368}{97}.$$

Assim, vemos que equações desse tipo são fáceis de encontrarmos a solução: $x = \frac{-b}{a}$. Um problema mais complicado surge quando envolvemos termos quadráticos no problema. Isto será abordado na próxima seção.

1.1.2 Equação polinomial do 2º grau.

"Multiplique ambos os membros da equação pelo número que vale quatro vezes o coeficiente do quadrado e some a eles o número igual ao quadrado do coeficiente original da incógnita. A solução desejada é a raiz quadrada disso [11]". Essa regra era utilizada pelos indianos para resolver as equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$ antes de Bhaskara.

Será que essa regra é equivalente ao que conhecemos? É isso que veremos agora: dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c sendo números reais e a diferente de zero, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ax^2 + bx &= -c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{b}{a}\right) x &= \frac{-c}{a}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Somando em (1.1), $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, temos que:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

então:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Somando em (1.2), $\frac{-b}{2a}$, segue que

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Isso é o que conhecemos.

Voltando à regra usada pelos indianos, temos que multiplicando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$, por $4a$, obtemos:

$$\begin{aligned}
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 &= b^2 \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \\
2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Logo, as formulas são equivalentes. Em ambos os casos chegamos a solução fazendo apenas cálculos algébricos, o que é possível também para as equações de graus 3 e 4. Vejamos isto nas próximas duas seções.

1.1.3 Equação polinomial do 3º grau.

Imaginemos que um aluno nos peça para resolver a equação $x^3 - 12x - 16 = 0$ usando apenas cálculos algébricos, como foi feito para as equações de graus 1 e 2, o que diríamos para ele? Diante desse impasse, precisamos conhecer melhor as equações desse tipo. O método de resolução algébrica para esse tipo de equação que chamamos de equação polinomial do 3º grau foi apresentado por Tartaglia e Del Ferro [2, 4] como segue.

Dada a equação

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1.3}$$

onde p e q são números reais. Seja $x = a + b$ uma raiz dessa equação, logo teremos:

$$\begin{aligned} x^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ x^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \\ x^3 = a^3 + 3abx + b^3 \\ x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

comparando os coeficientes das equações (1.3) e (1.4), temos:

$$\begin{array}{rclcrcll} -3ab & = & p & \text{e} & -a^3 - b^3 & = & q, & \text{ou seja,} \\ a^3b^3 & = & -\dfrac{p^3}{27} & \text{e} & a^3 + b^3 & = & -q, & \end{array}$$

logo a^3 e b^3 são as raízes da equação polinomial do 2º grau:

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0,$$

cujas raízes são:

$$y = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

e

$$y = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{4p^3}{4 \cdot 27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Logo teremos:

$$a^3 = y_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e

$$b^3 = y_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

o que implica em:

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

e

$$b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

e portanto a raiz procurada é:

$$x = a + b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{1.5}$$

Para o caso geral temos que toda equação polinomial de grau 3 pode ser transformada em uma equação da forma $x^3 + px + q = 0$. Vejamos então: dada a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde a, b, c e d são números reais com a diferente de zero, seja $x = y + m$ uma raiz dessa equação, logo teremos:

$$\begin{aligned} a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3) + b(y^2 + 2my + m^2) + c(y+m) + d = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ay^3 + (3am+b)y^2 + (3am^2 + 2bm + c)y + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Fazendo

$$3am + b = 0, \tag{1.7}$$

temos

$$m = -\frac{b}{3a}. \tag{1.8}$$

Assim, substituindo (1.7) e (1.8) em (1.6) obtemos:

$$ay^3 + \left(\frac{3ab^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{-ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0$$

$$ay^3 + \left(\frac{3ab^2 - 6ab^2 + 9a^2c}{9a^2}\right)y + \frac{(-ab^3 + 3ab^3 - 9a^2bc + 27a^3d)}{27a^3} = 0,$$

multiplicando por $\left(\frac{1}{a}\right)$, temos:

$$y^3 + \left(\frac{3b^2 - 6b^2 + 9ac}{9a^2}\right)y + \frac{(-b^3 + 3b^3 - 9abc + 27a^2d)}{27a^3} = 0. \tag{1.9}$$

Portanto, a equação (1.9) é do tipo $y^3 + py + q = 0$ que já sabemos resolver. Assim, podemos encontrar y, e portanto a raiz da equação geral, ou seja, $x = y + m$, onde $m = -\frac{b}{3a}$.

Conhecendo esse método de resolução, fica fácil de encontrar uma solução para a equação proposta pelo aluno. Vejamos abaixo.

Seja $x = a + b$ uma solução de $x^3 - 12x - 16 = 0$, logo temos que $-3ab = -12$ e $-a^3 - b^3 = -16$, pois a equação é do tipo $x^3 + px + q = 0$, e portanto $a^3 + b^3 = 16$ e $a^3b^3 = 64$, logo a^3 e b^3 são as raízes da equação $y^2 - 16y + 64 = 0$, ou seja, $a^3 = y_1 = 8$ e $b^3 = y_2 = 8$ o que implica em $a = 2$ e $b = 2$ e portanto $x = 4$.

Observando os métodos de resolução apresentados até aqui, vemos que a medida que o grau da equação aumenta, aumenta também a dificuldade de resolução; vejamos então as de grau 4 na próxima seção.

1.1.4 Equação polinomial do 4º grau.

Dentro do costume da época entre os matemáticos de proporem problemas uns aos outros como forma de desafio, um matemático italiano, Zuanne de Tonini da Coi [4], submeteu ao matemático Girolamo Cardano (1501-1576) uma questão que envolvia a equação $x^4+6x^2-60x+36=0$. Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano passou a questão ao jovem Ferrari que, num lampejo de gênio, encontrou o método geral para a solução das equações polinomiais do 4º grau. Método esse que apresentaremos agora. Dada a equação

$$x^4+px^2+qx+r=0, \tag{1.10}$$

onde p, q e r são números reais. Adicionando px^2+p^2-qx-r em (1.10) temos:

$$x^4+2px^2+p^2=px^2-qx-r+p^2, \tag{1.11}$$

adicionando $2z(x^2+p)+z^2$, em (1.11), onde z é um número real qualquer, obtemos:

$$\begin{aligned}(x^2+p)^2+2z(x^2+p)+z^2 &= px^2-qx-r+p^2+2z(x^2+p)+z^2\\ (x^2+p+z)^2 &= (p+2z)x^2-qx+(p^2-r+2pz+z^2).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Tome z tal que o 2º membro de (1.12) seja um quadrado perfeito, isto é quando o discriminante do trinômio do 2º grau em x

$$(p+2z)x^2-qx+(p^2-r+2pz+z^2)$$

é igual a zero, ou seja,

$$q^2-4(p+2z)(p^2-r+2pz+z^2)=0,$$

A equação acima é uma equação polinomial do 3º grau em z e portanto pode ser resolvida pela fórmula (1.5), assim encontramos o valor de z. Logo, teremos uma equação do tipo

$$(x^2+p+z)^2=k^2, \tag{1.13}$$

De (1.13) obtemos o valor de x, ou seja, a raiz da equação:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Para o caso geral temos que toda equação polinomial do 4º grau pode ser transformada em uma da forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

do seguinte modo:

Dada a equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{1.14}$$

onde a, b, c, d, e e são números reais com a diferente de zero, seja $x = y + m$ uma raiz para (1.14). Logo, teremos:

$$a(y + m)^4 + b(y + m)^3 + c(y + m)^2 + d(y + m) + e = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a(y^4 + {} & 4my^3 + 6m^2y^2 + 4m^3y + m^4) + b(y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3) + \\ & c(y^2 + 2my + m^2) + d(y + m) + e = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ay^4 + {} & (4am + b)y^3 + (6am^2 + 3bm + c)y^2 + \\ & (4am^3 + 3bm^2 + 2cm + d)y + (am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $4am + b = 0$ temos que $m = -\dfrac{b}{4a}$, e substituindo em (1.15), temos:

$$ay^4 + \left(\frac{6ab^2}{16a^2} - \frac{3b^2}{4a} + c\right)y^2 + \left(-\frac{4ab^3}{64a^3} + \frac{3b^3}{16a^2} - \frac{2bc}{4a} + d\right)y +$$

$$\left(\frac{ab^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^3} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{bd}{4a} + e\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad ay^4 + \left(\frac{6b^2 - 12b^2 + 16ac}{16a}\right)y^2 + \left(-\frac{b^3}{16a^2} + \frac{3b^3}{16a^2} - \frac{2bc}{4a} + d\right)y +$$

$$\left(\frac{b^4}{256a^3} - \frac{b^4}{64a^3} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{bd}{4a} + e\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad ay^4 + \left(-\frac{6b^2}{16a} + \frac{16ac}{16a}\right)y^2 + \left(\frac{-b^3 + 3b^3}{16a^2} - \frac{bc}{2a} + d\right)y +$$

$$\left(-\frac{3b^4}{256a^3} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{bd}{4a} + e\right) = 0. \tag{1.16}$$

Multiplicando (1.16) por $\dfrac{1}{a}$, obtemos:

$$y^4 + \left(-\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}\right)y^2 + \left(\frac{-b^3 + 3b^3}{16a^3} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{d}{a}\right)y + \left(-\frac{3b^4}{256a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}\right) = 0.$$

Chamando $p = \dfrac{-3b^2}{8a^2} + \dfrac{c}{a}$, $q = -\dfrac{3b^3}{16a^3} - \dfrac{bc}{2a^2} + \dfrac{d}{a}$ e $r = \dfrac{-3b^4}{256a^4} + \dfrac{b^2c}{16a^3} - \dfrac{bd}{4a} + \dfrac{e}{a}$, portanto teremos:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Após conhecer o método desenvolvido por Ferrari, podemos aplicá-lo na equação proposta a Cardano $x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
x^4+6x^2-60x+36 &= 0,\\
\Rightarrow x^4+6x^2 &= 60x-36,\\
\Rightarrow x^4+12x^2+36 &= 6x^2+60x,\\
\Rightarrow (x^2+6)^2 &= 6x^2+60x,\\
(x^2+6)^2+2(x^2+6)z+z^2 &= 6x^2+60x+2(x^2+6)z+z^2,\\
(x^2+6+z)^2 &= (6+2z)x^2+60x+(z^2+12z),
\end{aligned}$$

como o 2º membro é igual a um quadrado perfeito então $60^2-4(6+2z)(z^2+12z)=0$ que é uma equação polinomial do 3º grau, cuja resolução é conhecida pelo método de Tartaglia, assim obtido z temos uma equação, em x, do tipo $(x^2+6+z)^2=k^2$ que resolvida obtém-se x. Portanto, os métodos apresentados para resolver equações polinomiais de graus 3 e 4 não são práticos, pois recaímos em uma equação de grau 3 cuja resolução não é fácil; embora os métodos sejam de extrema importância para o conhecimento matemático do professor, além do valor histórico.

Capítulo 2

As equações polinomiais com coeficientes complexos

As equações que estudamos até agora são com coeficientes reais. Sabemos que tais equações nem sempre possuem raízes reais. Algumas vezes essas raízes estão contidas no conjunto dos números complexos que é uma extensão dos reais. O surgimento desse conjunto se deu no contexto de resolução de equações polinomiais de grau 3, como pode ser visto em [4]. Admitiremos como conhecimento do professor de ensino básico e aluno de licenciatura a teoria básica do conjunto dos números complexos comumente abordada no ensino médio [6, 8].

2.1 Introdução sobre equações polinomiais com coeficientes complexos

Definição 2.1. *Um número complexo tem a forma* $z = x + iy$*, onde* x *e* y *são números reais e* i *é a unidade imaginária que satisfaz* $i^2 = -1$*.*

Definição 2.2. *Chamamos de função polinomial de grau* n *ou polinômio complexo de grau* n*, onde* n *é um número natural, a função* p *de* $\mathbb{C}$ *em* $\mathbb{C}$*, onde* $\mathbb{C}$ *é o conjunto dos números complexos, dada por*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \tag{2.1}$$

onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ *com* a_n *diferente de zero.*

A partir de agora, sempre que usarmos a palavra polinômio entenderemos como polinômio complexo.

Definição 2.3. *Seja p uma função polinomial de grau n, chamamos de equação polinomial de grau n a expressão $p(z) = 0$, onde $p(z)$ é dada pela expressão (2.1).*

Definição 2.4. *Dizemos que z_0 é uma raiz de uma função polinomial p, em (2.1), ou de uma equação polinomial $p(z) = 0$ se, satisfaz $p(z_0) = 0$.*

Exemplo 2.1. *Resolver a equação $2z^2 - 3iz = 0$.*

Solução: $2z^2 - 3iz = 0,$

$$\Rightarrow z(2z - 3i) = 0.$$

Assim, as raízes da equação proposta são $z = 0$ ou $z = \dfrac{3i}{2}$.

Definição 2.5. *Um polinômio p é dito nulo quando $p(z) = 0$ para todo z complexo.*

De acordo com a definição acima, para verificar se um polinômio é nulo deveríamos observar se todo número complexo anula o polinômio, o que é impossível de ser verificado, pois $\mathbb{C}$ é infinito e não enumerável. Portanto, precisamos de um critério para concluir tal fato e esse critério é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Um polinômio p é nulo se e, somente se, todos os coeficientes de p forem nulos.*

Demonstração. Primeiro, considere $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, de modo que $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$, assim:

$$p(z) = 0z^n + 0z^{n-1} + ... + 0z + 0 = 0.$$

Por outro lado p é nulo, então existem $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, α_n complexos distintos dois a dois tais que,

$$\begin{aligned}
p(\alpha_0) &= a_n\alpha_0^n + a_{n-1}\alpha_0^n + ... + a_1\alpha_0 + a_0 = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + ... + a_n\alpha_0^n = 0,\\
p(\alpha_1) &= a_n\alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + ... + a_1\alpha_1 + a_0 = a_0 + a_1\alpha_1 + ... + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + a_n\alpha_1^n = 0,\\
&\vdots\\
p(\alpha_n) &= a_n\alpha_n^n + a_{n-1}\alpha_n n - 1 + \cdots + a_1\alpha_n + a_0 = a_0 + a_1\alpha_n + \cdots + a_{n-1}\alpha_n^{n-1} + a_n\alpha_n^n = 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos um sistema $(n+1)\times(n+1)$ linear homogêneo onde as incógnitas são $a_0, a_1, ..., a_n$. Cujo o determinante da matriz dos coeficientes é dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

A expressão (2.2) é desta forma, pois o determinante de uma matriz coincide com o da sua transposta.

Por ser o determinante de uma matriz de Vandermond [7] cujos elementos característicos são $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, todos distintos dois a dois, temos que:

$$D = (\alpha_1 - \alpha_0).(\alpha_2 - \alpha_1).(\alpha_2 - \alpha_0)...(\alpha_n - \alpha_0) \neq 0$$

e, portanto, o sistema tem uma única solução que é $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

■

Definição 2.6. *Dois polinômios f e g são idênticos ou iguais quando $f(z) = g(z)$, para todo z complexo.*

De forma semelhante aos polinômios nulos temos também um critério para identificar polinômios idênticos.

Teorema 2.2. *Dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais.*

Demonstração. Sejam $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ e $g(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$, logo teremos:

$$\begin{aligned}
& f(z) = g(z) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & (a_n - b_n) z^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) z^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1) z + (a_0 - b_0) = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & a_n - b_n = 0, a_{n-1} - b_{n-1} = 0, \ldots, a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.
\end{aligned}$$

■

Como os polinômios são funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, então podemos definir as operações de adição, subtração e multiplicação; isso é feito da mesma forma como são definidas para funções reais. Uma outra operação de extrema importância para o estudo das equações polinomiais é a divisão, que é definida em seguida.

Definição 2.7. ***(Divisão de polinômios)**: Dividir um polinômio f por um outro g, não nulo, é obter dois outros polinômios q e r satisfazendo as seguintes condições:*

1. $f = g.q + r$
2. $grau(r) < grau(g)$ *ou* $r = 0$.

Mas como obter q e r? Para responder essa pergunta vamos conhecer o resultado que segue.

Teorema 2.3. *Dados os polinômios f, g (não nulos) sempre existem e são únicos os polinômios q e r satisfazendo as condições:*

1. $f = g.q + r$

2. grau$(r) <$ *grau*(g) *ou* $r = 0$.

Demonstração.

Existência:

1º Caso: Se $f = 0$, então basta tomar $q = r = 0$.

2º Caso: Se grau(f) <grau(q), então basta tomar $q = 0$ e $r = f$.

3º Caso: Sejam

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

e

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$$

onde $a_n.b_n \neq 0$ com $n > m$ e consideremos

$$r_1(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_n}x^{n-m}g(x). \tag{2.3}$$

Observemos que a parcela $a_n x^n$ de (2.3), é cancelada, logo grau$(r_1) < n$. Sendo $r_1 = 0$ ou grau$(r_1) < m$ então está concluída a demonstração, pois basta tomar $r = r_1(x)$ e

$$q = \frac{a_n}{b_n}x^{n-m}, \tag{2.4}$$

que teremos $f(x) = r_1(x) + x^{n-m}g(x)$, de acordo com (2.3). Caso contrário, vamos mostrar que se pudermos dividir $r_1(x)$ por $g(x)$, então também podemos dividir $f(x)$ por $g(x)$.

De fato, sejam q e r tais que

$$r_1(x) = g(x).q + r, \tag{2.5}$$

substituindo (2.3) em (2.5) temos

$$f(x) - \frac{a_n}{b_n}x^{n-m}g(x) = g(x).q + r,$$

ou seja,

$$f(x) = \left(\frac{a_n}{b_n}x^{n-m} + q\right).g(x) + r.$$

Assim podemos repetir o processo para r_1 e obter um novo resto parcial r_2 , onde r_2 tem grau menor que o de r_1, e assim por diante, de tal forma a existir um α tal que grau(r_α) <grau(g). Quando isso ocorrer, então, temos que o resto da divisão de f por g é r_α e o quociente é a soma dos termos (2.4) obtidos em cada processo.

Unicidade:

Mostraremos agora que os polinômios q e r, satisfazendo as condições do teorema, são únicos. Para isso, consideremos os polinômios r_1, q_1, r_2 e q_2 satisfazendo as condições 1 e 2, ou seja, $f = g.q_1 + r_1$ e $f = g.q_2 + r_2$. Logo teremos $g.q_1 + r_1 = g.q_2 + r_2$, o que implica em $g.(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Se $q_1 - q_2 \neq 0$, então grau$[g.(q_1 - q_2)] \geq$grau(g) >grau($r_2 - r_1$) o que é absurdo. Logo $q_1 = q_2$ o que implica em $r_2 = r_1$.

■

Encontrar raízes de uma equação polinomial de grau maior que 2 não é uma tarefa fácil. Mas, se conhecermos uma raiz dessa equação podemos escrevê-la como um produto de um polinômio de grau 1 por um outro de grau uma unidade inferior aquele presente na equação, como veremos no Corolário 2.1. Com isso, nosso trabalho agora é resolver essa equação de grau inferior, o que é teoricamente mais fácil do que resolver a equação original. Para realizar essa tarefa, precisamos conhecer o algoritmo da divisão e os dois resultados que virão a seguir, onde o primeiro é apenas uma ferramenta que será usado na demonstração do segundo.

Lema 2.1. *A função polinomial $p(z) = z^n - \alpha^n$ é divisível por $z - \alpha$, onde α é um número complexo qualquer.*

Demonstração. Observemos que,

$$
\begin{aligned}
(z-\alpha) \quad . & \quad (z^{n-1}+\alpha.z^{n-2}+\alpha^2.z^{n-3}+...+\alpha^{n-2}z+\alpha^{n-1}) \\
= & \quad (z^n+\alpha.z^{n-1}+...+\alpha^{n-2}z+\alpha^{n-1}z)-(\alpha z^{n-1}+\alpha^2 z^{n-2}+...+\alpha^{n-1}z+\alpha^n) \\
= & \quad z^n+(\alpha z^{n-1}-\alpha z^{n-1})+(\alpha^2 z^{n-2}-\alpha^2 z^{n-2})+...+(\alpha^{n-1}z-\alpha^{n-1}z)-\alpha^n
\end{aligned}
$$

$= z^n - \alpha^n$, ou seja, $p(z)$ é divisível por $(z-\alpha)$.

■

Teorema 2.4. *Um número complexo α é raiz de um polinômio p se, e somente se, p é divisível por $(z-\alpha)$.*

Demonstração. Seja $p(z) = a_n z_n + a^{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ e α raiz de p, então $p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$,. Logo teremos:

$$
\begin{aligned}
p(z) &= p(z)-p(\alpha) \\
&= (a_n z_n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) - (a_n\alpha_n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) \\
&= a_n(z^n-\alpha^n) + a_{n-1}(z^{n-1}-\alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(z-\alpha).
\end{aligned}
$$

Como todas as parcelas são divisíveis por $(z-\alpha)$, de acordo com o Lema 2.1, temos que $p(z)$ é divisível por $(z-\alpha)$, ou seja, $p(z) = (z-\alpha).q(z)$, onde $q(z)$ é um polinômio de grau $n-1$. Suponhamos que $p(z) = (z-\alpha).q(z)$, logo $p(\alpha) = 0$ e portanto α é raiz de p.

■

Diante do resultado anterior, fica claro que se conhecermos mais uma raiz do polinômio de grau inferior então o grau da equação vai diminuindo e com isso a tarefa de obter outras raízes pode se tornar mais fácil. Para verificar a veracidade dessa consequência do resultado anterior, enunciamos e demonstramos o corolário seguinte.

Corolário 2.1. *Se os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ são raízes distintas de uma função polinomial p de grau n, então existe uma função polinomial q de grau $n-m$ tal* *que* $p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_m).q(z)$.

Demonstração. Sendo α_1 raiz de p, então $p(z) = (z - \alpha_1)q_1(z)$, mas α_2 também é raiz de p e como $\alpha_1 \neq \alpha_2$, então α_2 é raiz de $q_1(z)$, logo

$$q_1(z) = (z - \alpha_2)q_2(z),$$

e, portanto,

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)q_2(z).$$

Repetindo esse processo m vezes, temos:

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_m)q_m(z),$$

onde $q_m(z)$ é de grau $n - m$, pois $(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_m)$ é de grau m.

■

O Teorema 2.5 permite obter o resto da divisão de um polinômio por $(z - a)$, de uma forma bem prática como veremos a seguir.

Teorema 2.5. ***(Teorema do Resto)*** *O resto da divisão de um polinômio* $p(z)$ *por* $(z - a)$ *é (o polinômio constante) igual a* $p(a)$.

Demonstração. Sendo $(z - a)$ um polinômio de grau 1, então o resto da divisão de $p(z)$ por $(z - a)$ é igual a um número r, logo temos que:

$$p(z) = (z - a)q(z) + r,$$

e, portanto,

$$p(a) = (a - a)q(a) + r = r.$$

■

Como vimos, o teorema do resto nos fornece o resto da divisão de um polinômio por um da forma $(z - a)$. O dispositivo que apresentaremos em seguida nos dará tanto o resto como também o quociente da divisão em questão.

2.1.1 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Consideremos um polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ e sejam $q(z) = b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_1 z + b_0$ e $r(z) = r_0$ o quociente e o resto, respectivamente, da divisão de $p(z)$ por $(z - a)$. Daí temos que:

$$\begin{aligned}
p(z) &= q(z)(z-a) + r_0 \\
&= (b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0)(z-a) + r_0 \\
&= (b_{n-1} z^{n} + b_{n-2} z^{n-1} + \ldots + b_1 z^2 + b_0 z) \\
&\quad -(ab_{n-1} z^{n-1} + abn - 2z^{n-2} + ... + ab_1 z + ab_0) + r_0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 &= b_{n-1} z^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) z^{n-1} \\
&\quad +(b_{n-3} - ab_{n-2}) z^{n-2} + ... + (b_0 - ab_1) z + (r_0 - ab).
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes correspondentes, temos: $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1}$, $b_{n-3} - ab_{n-2} = a_{n-2}$, ..., $b_0 - ab_1 = a_1$ e $r_0 - ab_0 = a_0$, ou seja,

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n, \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + ab_{n-1}, \\
b_{n-3} &= a_{n-2} + ab_{n-2}, \\
&\vdots \\
b_0 &= a_1 + ab_1, \\
r_0 &= a_0 + ab_0,
\end{aligned}$$

de forma simplificada temos:

$$\begin{array}{c|cccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & r_0 \end{array}$$

Exemplo 2.2. *Resolver a equação $z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = 0$, sabendo que 1 é raiz.*

Solução: *Como 1 é raiz de $z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = 0$ então $z^3 - 2z^2 + 3z - 2$ é divisível por $z - 1$, tendo como quociente:*

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & 3 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$z^2 - z + 2$, *ou seja,*

$$z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = (z - 1)(z^2 - z + 2) = 0$$

e, portanto, para obter as demais raízes da equação acima, basta resolver a equação polinomial do 2º grau $z^2 - z + 2 = 0$ que tem como raízes $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$ e $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$. Logo, o conjunto solução da equação dada é:

$$S = \left\{1; \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i; \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i\right\}.$$

De acordo com o exemplo anterior, a equação $z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = 0$ tem duas raízes não reais que são números complexos conjugados. Será que toda equação polinomial que tem uma raiz não real tem também seu conjugado como raiz? Isso não é verdade, pois a equação $z^2 - 2i = 0$ tem como raízes 0 e $2i$, mas $-2i$ não é raiz. Então, em que condições a afirmação é verdadeira? Vejamos então o teorema seguinte.

Teorema 2.6. *Seja p um polinômio de coeficientes reais e z_0 uma raiz de p, então, o conjugado de z_0 ($\bar{z}_0$) é também raiz desse polinômio.*

Demonstração. Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$, logo teremos:

$$p(\bar{z_0}) = a_n(\bar{z_0})^n + a_{n-1}(\bar{z_0})^{n-1} + ... + a_1(\bar{z_0}) + a_0.$$

como os coeficiente são reais, então seus conjugados coincidem com eles mesmos. Assim

$$p(\bar{z_0}) = \bar{a_n}(\bar{z_0})^n + \bar{a}_{n-1}(\bar{z_0})^{n-1} + ... + \bar{a_1}(\bar{z_0}) + \bar{a_0}.$$

Como o conjugado do produto é o produto dos conjugados, temos

$$p(\bar{z_0}) = \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0}$$

e o conjugado da soma é a soma dos conjugados, então

$$p(\bar{z_0}) = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0 + a_0} = \overline{p(z_0)} = \bar{0}.$$

■

Exemplo 2.3. *Obter uma equação polinomial com coeficientes reais de grau mínimo que tem como raízes* 1*,* i *e* $1 - i$*.*

Solução: *Queremos obter uma equação polinomial com coeficientes reais com grau mínimo que possua raízes* 1*,* i *e* $1 - i$*, logo* $-i$ *e* $1 + i$ *são também raízes. Portanto, uma equação desse tipo pode ser,*

$$\begin{aligned} (z-1)(z-i)(z-1+i)(z+i)(z-1-i) &= 0; \\ z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 5z^2 + 4z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Uma consequência desse teorema é que as raízes não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais sempre aparecem aos pares, a raiz e seu conjugado. Portanto toda equação desse tipo de grau ímpar possui pelo menos um raiz real. A existência dessa raiz é garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), que veremos no próximo capítulo.

Quantas raízes tem um polinômio? Para responder a essa pergunta mostraremos que todo polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em fatores do 1º grau e portanto tem n raízes complexas. Para isso usaremos o TFA embora ainda não demonstrado.

Teorema 2.7. *Toda função polinomial $p(z)$ de grau $n \geq 1$ pode ser escrita na forma $p(z) = c(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$, onde c é uma constante complexa e $z_1, z_2, ..., z_n$ são raízes complexas de $p(z)$. Além disso, essa forma é única, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração. Como $p(z)$ tem grau $n \geq 1$ então pelo TFA existe z_1 complexo que é raiz de p, logo pelo resultado do capítulo anterior temos $p(z) = (z - z_1)q_1(z)$ onde $q_1(z)$ tem grau $n - 1$. Se $n = 1$ então $q_1(z)$ é uma constante e assim o teorema estaria demonstrado. Se $n > 1$ então $q_1(z)$ é um polinômio de grau maior ou igual 1, logo existe z_2 complexo que é raiz de $q_1(z)$ e portanto $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)q_2(z)$ onde $q_2(z)$ tem grau $n - 2$ pelo mesmo motivo anterior. Se $n = 2$ então $q_2(z)$ é constante e está concluída a demonstração. Se $n > 2$ então podemos continuar esse processo de tal forma a escrever $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)q_n(z)$ onde $q_n(z)$ é uma constante igual a c, ou seja, $p(z) = c(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$.

Para demonstrarmos a unicidade tomaremos duas decomposições de p em fatores do 1º grau e mostraremos que elas são iguais; sejam $p(z) = c_1(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)$ e $p(z) = c_2(z - w_1)(z - w_2)...(z - w_n)$ essas decomposições. Fazendo os produtos e igualando os coeficientes temos que $c_1 = c_2$ e, portanto,

$$(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_3) = (z - w_1)(z - w_2)...(z - \alpha_n). \tag{2.6}$$

Logo, substituindo $z = w_1$ em (2.6) temos $(w_1-\alpha_1)(w_1-\alpha_2)...(w_1-\alpha_n) = 0$ e portanto pelo menos um dos fatores dessa última expressão é igual zero. Suponhamos que seja $w_1-\alpha_1 = 0$, ou seja, $w_1 = \alpha_1$. Substituindo (2) em (1) temos $(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)...(z-\alpha_n) = (z - w_2)(z - w_3)...(z - w_n)$, fazendo $z = w_2$ vem $(w_2 - \alpha_2)(w_2 - \alpha_3)...(w_2 - \alpha_n) = 0$ e, portanto, pelo mesmo raciocínio anterior temos que $w_2 = \alpha_2$. Seguindo esse processo temos que $w_3 = \alpha_3$, $w_4 = \alpha_4$,...,$w_n = \alpha_n$.

■

Exemplo 2.4. *Mostre que* $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1.$

Solução: *$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ são números reais, logo $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ também é real. Seja $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ esse número, assim temos:*

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\\
x^3 &= 2+\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2-\sqrt{5}\\
x^3 &= 4+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\\
x^3 &= 4+3(-1)x,
\end{aligned}
$$

pois $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=-1$ e o que está entre parênteses é o próprio x, logo teremos:

$x^3=4-3x$, ou seja, $x^3+3x-4=0$. Portanto temos uma equação polinomial do 3º grau cujos coeficientes são reais, logo ela tem uma raiz real; por outro lado 1 é raiz para essa equação, assim temos:

$x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)=0$, mas $x^2+x+4=0$ não tem raízes reais, portanto a equação $x^3+3x-4=0$ tem uma única raiz real que é igual a 1, ou seja, $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

Embora o teorema acima garanta a existência de n raízes complexas para um polinômio de grau n, não temos como obter, através de cálculos algébricos, essas raízes, a não ser em casos particulares, mas sempre é possível obter relações entre elas e os coeficientes da equação, da seguinte forma.

2.2 Relações entre coeficientes e raízes (Relações de Girard)

Para entendermos como as relações são obtidas, faremos primeiramente para as equações de graus 2 e 3 e daí concluiremos para o caso geral. Seja então $ax^2+bx+c=0$ uma equação do 2º grau, logo $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ onde x_1 e x_2 são as raízes dessa equação, assim teremos

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

que igualando os coeficientes temos,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Agora seja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ uma equação do 3º grau, logo

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

onde x_1, x_2 e x_3 são as raízes, logo teremos

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - ax_1x_2x_3$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \qquad \text{e} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Portanto, para o caso geral temos:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

onde x_1, x_2,...,x_n são as raízes, assim temos que,

$$\begin{aligned} a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 &= a_nx^n - a_n(x_1 + x_2 + ... + x_n)x^{n-1} \\ &\quad + a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n)x^{n-2} + ... \\ &\quad + a_n(-1)^n x_1x_2...x_n \end{aligned}$$

e, portanto, teremos:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + ... + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
\Rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
\Rightarrow x_1x_2...x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Usando o Geogebra para entender o TFA e sua demonstração formal

Até o momento não encontramos na literatura uma demonstração formal do Teorema Fundamental da Álgebra que possa ser apresentada aos alunos do ensino médio. Neste capitulo, Seção 3.1, apresentamos uma justificativa intuitiva desse teorema, usando o software gratuito Geogebra. Na Seção 3.2 traremos uma demonstração formal do Teorema Fundamental da Álgebra [2].

3.1 Usando o Geogebra para entender o TFA

Como os polinômios complexos sendo funções de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ não é possível construir o gráfico dessas funções, mas é possível construir o gráfico de subconjuntos do domínio e de suas respectivas imagens. Para isso, sejam $x, y \in \mathbb{R}$, r um número real positivo e consideremos como subconjuntos do domínio circunferências com centro na origem e raio variável ($x^2 + y^2 = r^2$) e observemos nas construções que seguem o que ocorre com as imagens dessas circunferências. Para tal usaremos o software Geogebra, onde as curvas de azul representam essas circunferências e as de vermelho as respectivas imagens.

Passos para construção:

1. Construir uma circunferência de centro 0 e raio r;

2. Crie um ponto A sobre a circunferência;

3. Defina a entrada $P = (x(A) + 3, y(A))$ se $p(z) = z + 3$; por exemplo;

4. Clique na ferramenta “lugar geométrico”;

5. Clique em P e depois em A, assim a construção está concluída.

Considerando $z = x + yi$ e seguindo os passos apresentados, façamos as seguintes construções:

Construção 1: Seja $p(z) = z + 3$, logo $p(z) = x + yi + 3 = (x + 3) + yi = (x + 3, y)$ e, portanto

$$P = (x(A) + 3, y(A)).$$

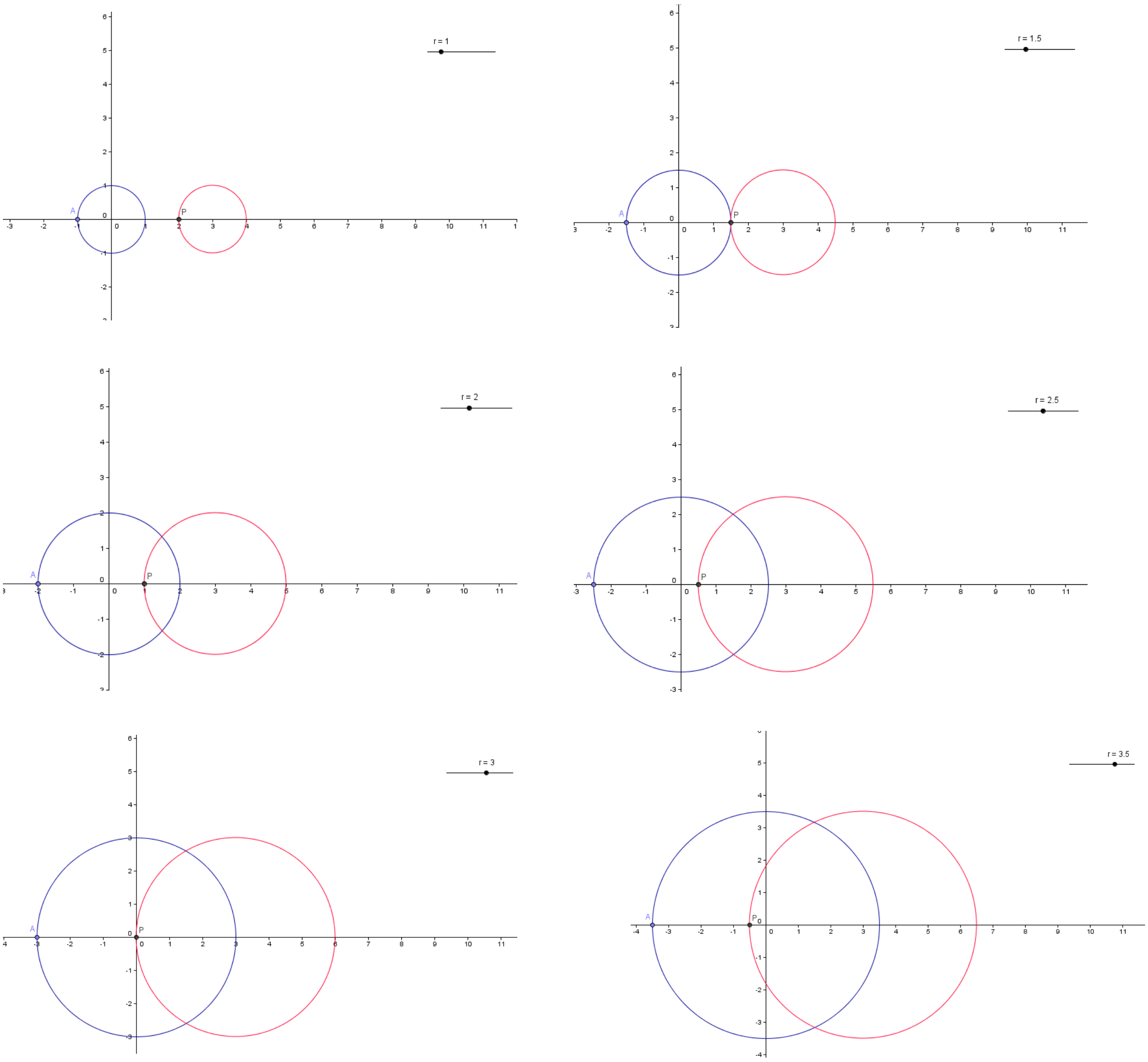

Figura 3.1: As circunferências com centro na origem e raio r (de azul) são transformadas por p em circunferências com centro no complexo $z = 3$ e raio r (de vermelho).

Construção 2: Seja $p(z) = z^2$, logo

$$p(z) = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = (x^2 - y^2, 2xy)$$

e, portanto

$$P = \left((x(A))^2 - (y(A))^2, 2x(A)y(A)\right).$$

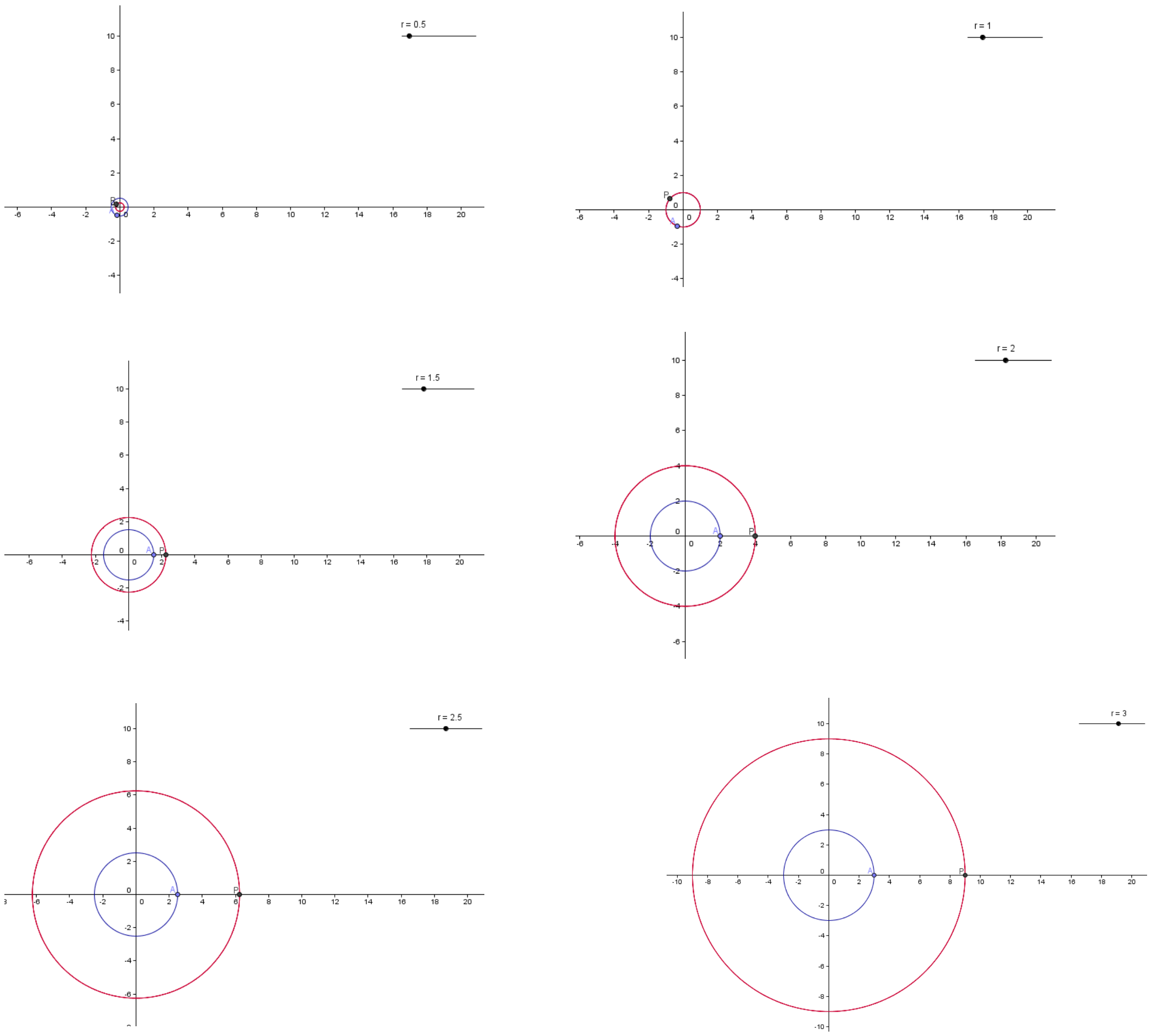

Figura 3.2: As circunferências com centro na origem e raio r (de azul) são transformadas por p em circunferências com centro na origem e raio r^2 (de vermelho).

Construção 3: Seja $p(z) = z^3$, logo

$$p(z) = (x+yi)^3 = x^3+3x^2yi+3x(yi)^2+(yi)^3 = x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i = (x^3-3xy^2, 3x^2y-y^3)$$

e, portanto

$$P = \left((x(A))^3 - 3x(A)(y(A))^2, 3(x(A))^2y(A) - (y(A))^3\right).$$

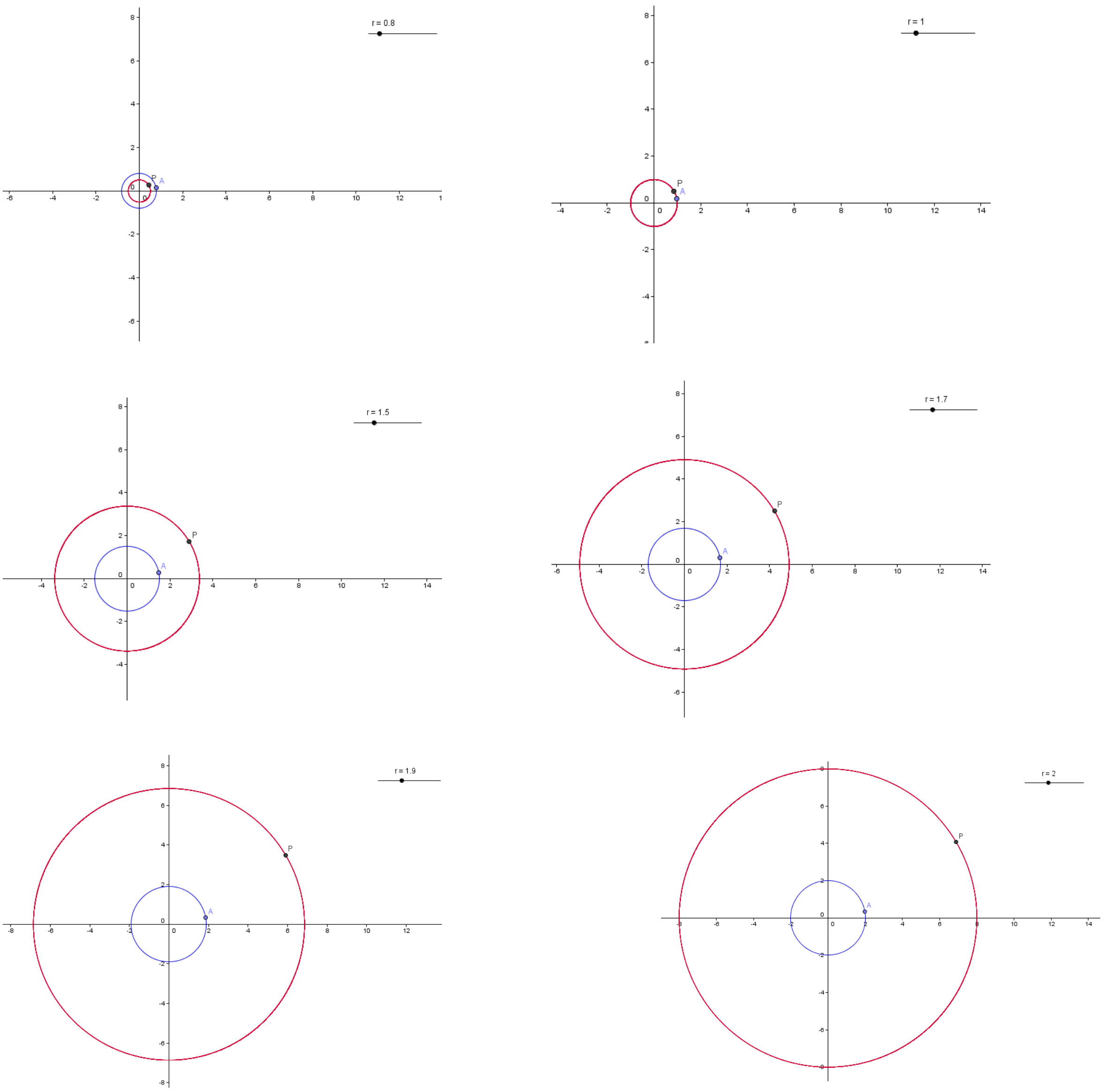

Figura 3.3: As circunferências com centro na origem e raio r (de azul) são transformadas por p em circunferências com centro na origem e raio r^3 (de vermelho).

Construção 4: Seja $p(z) = z^2 + z + 3$, logo

$$p(z) = (x+yi)^2 + (x+yi) + 3 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 + x + yi + 3 = (x^2 - y^2 + x + 3, 2xy + y)$$

e, portanto

$$P = \left((x(A))^2 - (y(A))^2 + x(A) + 3, 2x(A)y(A) + y(A)\right).$$

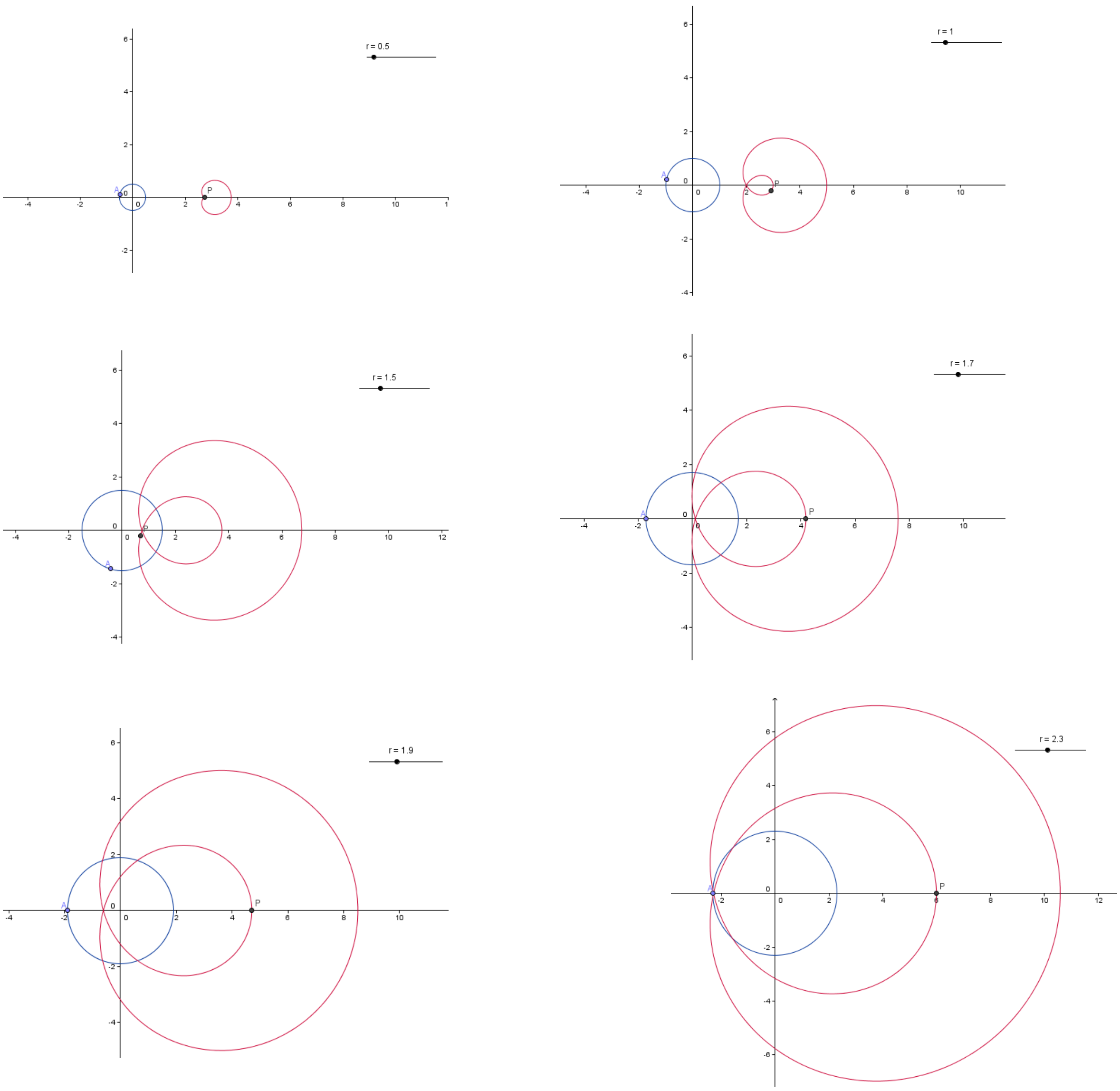

Figura 3.4: As circunferências com centro na origem e raio r (de azul) são transformadas por p em curvas fechadas (de vermelho).

Construção 5: Seja $p(z) = z^3 + z^2 + z + 3$, logo

$$\begin{aligned} p(z) &= (x+yi)^3 + (x+yi)^2 + (x+yi) + 3 \\ &= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i + x^2 - y^2 + 2xyi + x + yi + 3 \\ &= (x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 3, 3x^2y - y^3 + 2xy + y) \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} P &= ((x(A))^3 - 3x(A)(y(A))^2 + (x(A))^2 - (y(A))^2 + x(A) + 3, \\ & 3(x(A))^2y(A) - (y(A))^3 + 2x(A)y(A) + y(A)). \end{aligned}$$

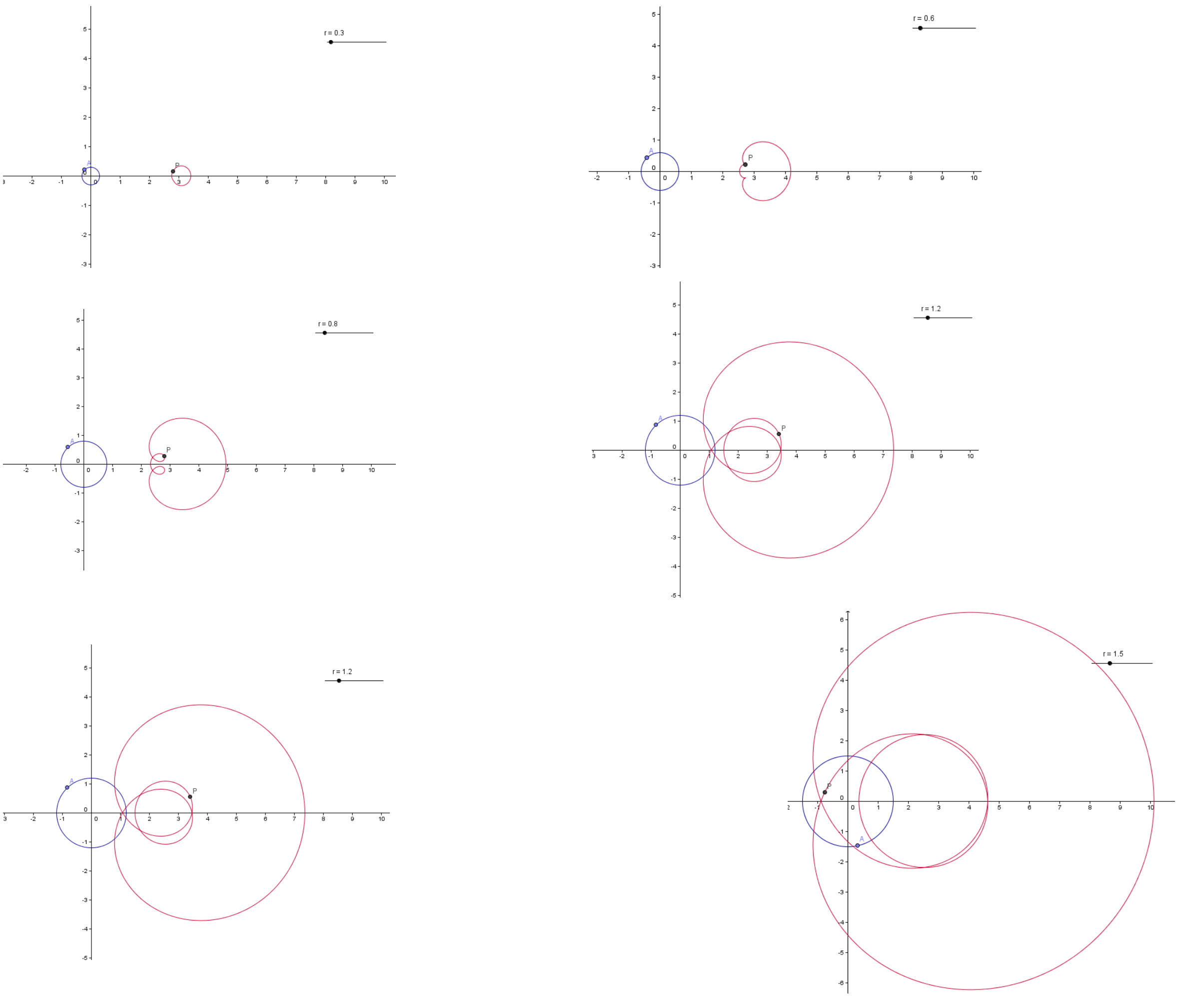

Figura 3.5: As circunferências com centro na origem e raio r (de azul) são transformadas por p em curvas fechadas (de vermelho).

Analisando as construções, podemos descrever, de forma intuitiva, as seguintes observações:

1. Os gráficos das imagens são curvas fechadas (que volta ao ponto de partida);
2. Para r suficientemente pequeno as imagens são curvas parecidas com uma circunferência com centro no termo independente e a origem do sistema cartesiano no exterior dessa curva;
3. Para r suficientemente grande as imagens são curvas parecidas com uma circunferência com centro na origem do sistema cartesiano;
4. À medida que r cresce as imagens vão evoluindo continuamente de tal forma que a origem do sistema cartesiano passa a ficar no interior dessas curvas.

As observações descritas servirão aqui de justificativa intuitiva para um dos mais belos teoremas da matemática, o Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema Fundamental da Álgebra (TFA): Toda função polinomial de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

Justificativa Intuitiva: Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, logo pelas observações realizadas, temos que $p(z)$ evolui de uma curva fechada com a origem em seu exterior a uma outra onde essa origem passa a ficar em seu interior. Como essa evolução é dada de forma contínua, então vai existir uma dessas curvas que passará necessariamente pela origem, ou seja, existirá um complexo z_0 sobre uma circunferência com centro na origem e raio r tal que $p(z_0) = 0$.

Essa justificativa se baseia no seguinte fato: seja z um ponto da circunferência de centro na origem e raio r, logo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ onde θ é o argumento de z. Portanto, fixando r e variando θ de 0 a 2π, temos que A dá uma volta sobre essa circunferência enquanto que P:

Construção 1: dá uma volta sobre a circunferência de centro em 3 e raio r, pois

$$p(z) = z + 3 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + 3.$$

Construção 2: dá duas voltas sobre a circunferência de centro na origem e raio r^2, pois

$$p(z) = z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Construção 3: dá 3 voltas sobre a circunferência de centro na origem e raio r^3, pois

$$p(z) = z^3 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta).$$

Construção 4: dá uma curva fechada de uma volta com centro em 3 que se aproxima de uma circunferência com centro nesse mesmo ponto à medida que r é suficientemente pequeno e é uma curva fechada de 2 voltas com centro na origem que se aproxima de uma circunferência com centro também na origem a medida que r é suficientemente grande, pois

$$\begin{aligned} p(z) &= z^2 + z + 3 \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) + r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + 3 \\ &= r^2\left[(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + \frac{3}{r^2}\right]. \end{aligned}$$

Construção 5: a análise é análoga a anterior.

De forma semelhante, podemos fazer para o caso geral, ou seja, dado

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

então P descreve uma curva fechada de um volta centrada em a_0 que se aproxima de uma circunferência com centro nesse mesmo ponto à medida que r é suficientemente pequeno e uma curva fechada de n voltas centrada na origem que se aproxima de uma circunferência também com centro na origem para r suficientemente grande.

Dessa forma para r suficientemente pequeno, a curva descrita por P tem a origem em seu exterior enquanto que para r suficientemente grande tem essa origem em seu interior. Como essas curvas evoluem continuamente, existirá um r tal que a curva descrita por P passará pela origem, ou seja, existe um z sobre uma circunferência de centro na origem e raio r tal que $p(z) = 0$. Portanto, todo polinômio de grau ≥ 1 possui uma raiz complexa (TFA).

3.2 Demonstração formal do TFA

Baseado em [2], este capítulo é direcionado aos professores de matemática do ensino médio, pois apresentamos uma demonstração formal do TFA muito mais elementar do que temos no ensino superior. Nesta demonstração usaremos basicamente o conhecimento de função contínua no plano complexo. Para atingir esse objetivo, precisamos conhecer algumas noções de topologia no plano complexo que serão relembradas abaixo e, para aqueles que tenham interesse em se aprofundar nessa teoria, basta consultar [9, 10].

Para falarmos das funções contínuas, precisamos conhecer alguns subconjuntos dos complexos, como os que serão definidos em seguida.

Definição 3.1. *Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Temos as seguintes definições:*

a) *Um disco aberto de centro z_0 e raio r é o conjunto*

$$\Delta(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}.$$

b) *Um disco fechado de centro z_0 e raio r é o conjunto*

$$\bar{\Delta}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}.$$

c) *Um círculo de centro z_0 e raio r é o conjunto*

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}.$$

Definição 3.2. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{C}$. Dizemos que um ponto $z \in A$ é um ponto interior de A quando existe $r > 0$ tal que $\Delta(z; r) \subset A$. O conjunto de todos os pontos interiores a A é chamado interior de A e indicado por $Int(A)$.*

Um resultado de fácil verificação é que $Int(A) \subset A$. Com isso, podemos falar de conjuntos abertos e conjuntos fechados. Portanto, se A é um subconjunto de $\mathbb{C}$, então dizemos que:

1. A é um conjunto aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, $int(A) = A$.

2. A é um conjunto fechado quando seu complementar, denotado por C/A, é aberto.

Os subconjuntos de $\mathbb{C}$ que merecem destaque são aqueles que podem ser colocados dentro de um disco aberto.

Definição 3.3. *Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é chamado de limitado quando existe $s > 0$ tal que $A \subset \Delta(0; s)$.*

Como já é tradição, após estudar um conjunto (complexos) e seus principais subconjuntos, vamos ver as relações entre eles.

Definição 3.4. *Chamamos de função complexa de variável complexa a toda função $f : A \to \mathbb{C}$, onde o domínio A é um subconjunto de $\mathbb{C}$.*

Dentre as funções complexas de variáveis complexas destacaremos apenas aquelas que são contínuas.

Definição 3.5. *Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in A$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ sempre que $z \in A$ e $|z - z_0| < \delta$, ou seja, $f[A \cup \Delta(z_0; \delta)] = \Delta(f(z_0; \epsilon))$.*

Com o objetivo de concluir que as funções polinomiais são contínuas, apresentaremos a seguir três proposições. As duas primeiras são de fácil verificação enquanto que a segunda se faz da mesma forma como é feita para funções reais.

Proposição 3.1. *A função constante f de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ dada por $f(z) = \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$, é contínua.*

Proposição 3.2. *A função f de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ dada por $f(z) = z$ é contínua.*

Proposição 3.3. *Se f, g de A em $\mathbb{C}$ são funções contínuas, então $f + g$, fg de A em $\mathbb{C}$ são contínuas.*

Proposição 3.4. *A função polinomial p de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ dada por $p(z) = a_n z^n + an - 1z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ é contínua.*

A veracidade da Proposição 3.4 é uma consequência das Proposições 3.1, 3.2 e 3.3.

Apresentaremos a seguir um teorema que será primordial para demonstração do TFA, mas sua validade depende do fato de K ser compacto. Então o que significa um conjunto ser compacto?

Definição 3.6. *Um subconjunto $K \subset \mathbb{C}$ é chamado de conjunto compacto quando é fechado e limitado.*

Proposição 3.5. *O disco fechado $\bar{\Delta}(z_0; r)$ e o círculo $C(z_0; r)$ são conjuntos compactos.*

Teorema 3.1. ***(Teorema de Weierstrass)**: Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto então toda função f de A em $\mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximos e mínimos em A, ou seja, existem a, $b \in A$ tais que $f(a) \leq f(z) \leq f(b)$ para todo $z \in A$.*

Chegamos em um dos momentos mais importante do nosso trabalho, pois apresentaremos uma demonstração do TFA usando apenas a teoria apresentada nessa seção. A demonstração é composta por vários resultados que implicam nos seguintes passos.

Demonstração do TFA: Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ uma função polinomial de grau $n \geq 1$. Demonstre os seguintes passos:

- **Passo 1:** Se $a_0 = 0$ então p possui raiz.

  Sendo $a_0 = 0$, temos que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z$, logo $p(0) = 0$ e portanto 0 é raiz de p.

- **Passo 2:** Se $a_0 \neq 0$ e admitindo que $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$ então existe um número real $r > 0$ tal que $|p(z)| > |p(0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e $|z| > r$.

  Sendo $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$ então, por definição, existe um número real $r > 0$ tal que $|z| > r$ implica $|p(z)| > |a_0|$, mas $p(0) = a_0$ e portanto temos que $|p(z)| > |a_0| = |p(0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e $|z| > r$.

- **Passo 3:** Se $a_0 \neq 0$ e considerando que a função $|p| : \bar{\Delta}(0; r)$ em $\mathbb{R}$ é contínua então existe um $z_0 \in \bar{\Delta}(0; r)$ tal que $|p(z)| \geq |p(z_0)|$ para todo $z \in \bar{\Delta}(0; r)$.

  Como $|p|$ é contínua e está definida em um disco fechado então existe um $z_0 \in \bar{\Delta}(0; r)$ que é mínimo ou seja, $|p(z)| \geq |p(z_0)|$ para todo $z \in \bar{\Delta}(0; r)$ (Teorema 3.1).

- **Passo 4:** $|p(0)| \geq |p(z_0)|$.

  $0 \in \bar{\Delta}(0; r)$ e portanto, pelo passo 3, temos que $|p(0)| \geq |p(z_0)|$.

- **Passo 5:** $|p(z)| \geq |p(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

  Pelos passos 2 e 4 temos que $|p(z)| > |p(0)| \geq |p(z_0)|$ para $|z| > r$ e do passo 3 temos que $|p(z)| \geq |p(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq r$ e portanto $|p(z)| \geq |p(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

- **Passo 6:** Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função polinomial $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Se $q(z) = p(z + z_0)$, $z \in \mathbb{C}$, então existe $1 \leq k \leq n$ tal que $q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)]$, onde $a \neq 0$ e $r(z)$ é uma função polinomial com $r(0) = 0$ (ver demonstração em [2]. Usando esse fato, supondo que $p(z_0) = c \neq 0$ e definindo $q(z) = p(z + z_0)$, mostre que $q(z) = c + z^k[a + r(z)]$, onde $a \neq 0$ e $r(0) = 0$.

  Sendo $q(z) = p(z + z_0)$ então, por hipótese, $q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)]$ onde $a \neq 0$, $r(0) = 0$ e $1 \leq k \leq n$, mas $p(z_0) = c$, logo teremos $q(z) = c + z^k[a + r(z)]$.

- **Passo 7:** Definindo $B = \{z \in \mathbb{C}/|z + c| < |c|\}$, ou seja, B é o disco aberto de centro $-c$ e raio $|c|$; Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $aw^k = -c$. Mostre que $aw^k \in B$.

  Temos que $aw^k = -c$, logo $|aw^k + c| = | - c + c| = |0| < |c|$, portanto $aw^k \in B$.

- **Passo 8:** Considere a função contínua f de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ definida por $f(z) = zw^k$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que se $u \in (a; \delta)$ então $f(u) \in B$.

  Sendo f contínua então existe $\delta > 0$ tal que $f[\Delta(a; \delta)]$ está contido $\Delta(f(a), |c|)$, mas pelo passo 7 temos que $f(a) = aw^k = -c$, logo $f[\Delta(a, \delta)]$ está contido em $\Delta(f(a), |c|) = \Delta(-c; |c|) = B$ e portanto temos que se $u \in \Delta(a; \delta)$ então $f(u) \in B$.

- **Passo 9:** Considere a função contínua g de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tal que $g(z) = a + r(z)$. Mostre que existe $\mu > 0$ tal que se $|z| < \mu$ então $g(z) \in \Delta(a; \delta)$.

  Sendo g contínua então existe $\mu > 0$ tal que $g[\Delta(0; \mu)]$ está contido em $\Delta(g(0); \delta) = (a; \delta)$, pois $g(0) = a+r(0)$, como $r(0) = 0$ temos que $g(0) = a$, ou seja, se $|z| < \mu$ então $g(z) \in (a; \delta)$.

- **Passo 10:** Mostre que $f(g(z)) \in B$.

  Seja $|z| < \mu$ então, pelo passo 9, $g(z) \in (a; \delta)$ logo, pelo passo 8,temos que $f(g(z)) \in B$.

- **Passo 11:** Mostre que $f(g(z)) = [a + r(z)]w^k$.

  De fato, pois $f(g(z)) = g(z)w^k = [a + r(z)]w^k$.

- **Passo 12:** Seja $0 < t < 1$ tal que $|tw| > \mu$. Mostre que $f(g(tw)) \in B$.

  Sendo $|tw| < \mu$ então $g(tw) \in (a; \delta)$ logo $f(g(tw)) \in B$.

- **Passo 13:** Mostre que $f(g(tw)) = [a + r(tw)]w^k \in B$.

  De fato, pois $f(g(tw)) = g(tw)w^k = [a + r(tw)]w^k$.

- **Passo 14:** Se w e c são números complexos tais que $|w+c| < |c|$ e t é um número real tal que $0 < t < 1$, então $|tw + c| < |c|$; ou seja, se $w \in B$ então $tw \in B$ (ver demonstração em [2]. Usando esse fato, mostre que $[a + r(tw)](tw)^k \in B$.

Sabemos que $f(g(tw)) = [a + r(tw)]w^k \in B$ e $0 < t < 1$, logo $0 < t^k < 1$ e portanto, por hipótese, $[a + r(tw)]w^k t^k = [a + r(tw)](tw)^k \in B$.

- **Passo 15:** Fazendo $z_1 = tw$, mostre que $[g(z_1) - c] \in B$.

  Sendo $z_1 = tw$, temos que $[a + r(z_1)]z_1^k \in B$, mas $q(z_1) = p(z_1) + z_1^k[a + r(z_1)] = c + z_1^k[a + r(z_1)]$, logo $q(z_1) - c = z_1^k[a + r(z_1)] \in B$.

- **Passo 16:** Usando, passo 15, mostre que $|p(z_1 + z_0)| < |p(z_0)|$.

  Sabemos que $[q(z_1) - c] \in B$, logo $|q(z_1) - c + c| = |q(z_1)| < |c|$ portanto $|q(z_1)| = |p(z_1 + z_0)| < |c| = |p(z_0)|$.

- **Passo 17:** Conclua que todo polinômio de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.

  Pelo, passo 1, temos que se $a_0 = 0$ então 0 é raiz do polinômio. Supondo $p(z_0) = c \neq 0$, concluímos que $|p(z_1 + z_0)| < |p(z_0)|$ o que é absurdo, pois $|p(z)| \geq |p(z_0)|$ para todo z complexo. Portanto $p(z_0) = 0$ e z_0 é raiz de p.

3.3 Conclusão

O Teorema Fundamental da Álgebra é um dos mais belos resultados que temos na matemática, tanto do ponto de vista de sua demonstração quanto de sua história. Acreditamos que todos que lerem esse trabalho irão ter uma visão diferente para esse teorema e fazendo as construções com seus alunos, terão uma interpretação das raízes complexas e saberão justificar de forma elementar o motivo pelo qual todo polinômio de grau ≥ 1 tem pelo menos uma raiz complexa. Assim, o que é abstrato passará a ter "vida" nas construções feitas com software Geogebra, que além de ser uma ferramenta excelente é gratuito.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.*, Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006 . Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 09 de maio 2013.

[2] FERNANDES, C. S.; SANTOS, R. A. *O Teorema Fundamental da Álgebra*, V Bienal da SBM - UFPB, 2010.

[3] FINI, M. I. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*, 2008. Disponível em: http:// . Acesso em 11 mar. 2013.

[4] GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*, São Paulo: Makron Books, 1997.

[5] GEOGEBRA *www.geogebra.org*. Acesso em: 06 jun. 2013.

[6] IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 6*, São Paulo: Atual, 1995.

[7] IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 4*, São Paulo: Atual, 1993.

[8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 3*, Rio de Janeiro: SBM, 1998.

[9] LIMA, E. L. *Análise no* $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

[10] LIMA, E. L. *Análise real, vol. 1.* Rio de Janeiro: SBM, 1993.

[11] Só Matemática *www.somatematica.com.br/biograf/bhaskara.php.* Acesso em: 06 jun. 2013.