UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

ONDE ESTÃO OS NÚMEROS IRRACIONAIS?

Emerson Gordiano de Almeida

Orientador: Maurício de Araújo Ferreira

Feira de Santana

Setembro de 2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

ONDE ESTÃO OS NÚMEROS IRRACIONAIS?

Emerson Gordiano de Almeida

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira

Feira de Santana
06 de Outubro de 2020

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

A446 Almeida, Emerson Gordiano de
Onde estão os números irracionais? / Emerson Gordiano de Almeida. – 2020.
164 f.: il.

Orientador: Maurício de Araújo Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Feira de Santana, 2020.

1. Números irracionais. 2. Matemática – História. 3. Matemática – Ensino. I. Título. II. Ferreira, Maurício de Araújo, orient. III. Universidade Estadual de Feira de Santana.

CDU: 511.145(091)

Luis Ricardo Andrade da Silva - Bibliotecário - CRB-5/1790

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE EMERSON GORDIANO DE ALMEIDA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e nove dias do mês de outubro de dois mil e vinte às 14:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: meet.google.com/qrb-rgjm-ppe, da dissertação apresentada sob o título **"ONDE ESTÃO OS NÚMEROS IRRACIONAIS?"**, do discente **Emerson Gordiano de Almeida**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Maurício de Araujo Ferreira (Orientador, UEFS), Katia Silene Ferreira Lima Rocha (UFRB) e Eliene Barbosa Lima (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: aprovado.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 29 de outubro de 2020.

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira (UEFS)
Orientador

Katia Silene F. Lima Rocha

Prof.ª Dra. Katia Silene Ferreira Lima Rocha (UFRB)

Eliene Barbosa Lima

Prof.ª Dra. Eliene Barbosa Lima (UEFS)

Visto do Coordenador:

Dedico todo este feito à memória de Joana Angélica (Dica), minha segunda mãe e a minha madrinha Rosenil, ambas responsáveis por ter encontrado, nessa profissão, o encantamento e a realização que me moveram até aqui.

Agradecimentos

Toda minha gratidão a bondade do Senhor Deus por me permitir traçar esse caminho e completar o percurso apesar dos percalços e angústias e aos meus pais, meu presente divino, por quem me sinto na obrigação de avançar cada vez mais para recompensar seu esforço, sacrifícios e apoio permanente em todas as etapas da minha educação.

O PROFMAT era um objetivo desde a época da graduação. E a cada curso de aperfeiçoamento para professores do ensino médio, se fortalecia a crença que dele eu me faria um profissional melhor e por isso agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática por conceber e levar a frente esse projeto magnífico com um alcance tão importante para o desenvolvimento da docência em matemática pelo país.

Agradeço a Universidade Estadual de Feira de Santana, a Universidade que fez de mim um professor e onde jurei contribuir com uma educação melhor por acolher o programa. Espero que esse trabalho seja efetivamente uma contribuição de monta para o ensino básico em gesto de retribuição a todos os esforços que foram feitos por mim. Em especial agradeço aos colegas da turma PROFMAT 2018 por proporcionar inúmeros momentos agradáveis e estudos colaborativos o que fez tudo um pouco mais fácil e os professores que atuaram nas disciplinas, fazendo jus tão magnificamente ao ofício docente de partilhar seus saberes conosco

Um agradecimento especial ao meu orientador, professor Maurício, por quem sempre nutri uma grande admiração como modelo de profissional dedicado, competente e engajado, mas também por toda paciência, ajuda e inspiração ao contribuir com esse trabalho desde o início da proposta, o que muito me honrou.

Gratidão também aos meus alunos, todos aqueles que a providência deste Universo permitiu que chegassem até mim e contribuíssem com o meu aprimoramento.

De nós professores é esperado a maior contribuição quanto a transmissão dos saberes, mas não cabe dúvida do quanto podemos aprender com eles. De forma muito particular encaminho meu sentimento de gratidão as turmas do Colégio Comercial de Serrinha cuja busca do conhecimento me fazia mais empenhado ainda nos estudos para satisfazê-los com qualidade sendo aprovação no ENA 2018 - Exame Nacional de Acesso - decorrente, em muito, desses estudos. Quero estender esse agradecimento a comunidade escolar que me acompanhou no início dessa empreitada pelas palavras de congratulação e incentivo. E a Marília e Jaildes por toda palavra de leveza, compreensão e incentivo, sem as quais possivelmente teriam me faltado energias para chegar a etapa final desse grande sonho.

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real"
Lobachevsky

"Uma das tarefas do pesquisador em Educação Matemática é tornar explícito aquilo que fica invisível na prática da sala de aula"
Humberto Bortolossi

Resumo

O presente trabalho se dedica a constatar as insatisfações na abordagem dos números irracionais no ensino de matemática e propor estratégias que pretendem reverter este óbice. No capítulo apresentamos uma revisão de literatura com relatos e conclusões de pesquisadores (Broetto (2019), Pommer (2012), Corbo (2012) e Souto (2010)) do tema acerca da apresentação desse conhecimento em livros didáticos, na educação básica e formação de professores juntamente com uma discussão de como documentos norteadores curriculares como a Base Nacional Comum Curricular - BNCC - Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e Diretrizes Curriculares Nacionais de Cursos de Matemática - DCNCM - preveem a abordagem do tema além de um estudo feito com os trabalhos de conclusão do PROFMAT, dada a realidade institucional desse trabalho e a relevância e alcance deste programa para professores da educação básica. O capítulo 2 é um compêndio dos fatos matemáticos relevantes para o professor, tendo em vista as dificuldades apontadas pelos teóricos, discutimos a caracterização dos números irracionais como um conjunto, propriedades operatórias entre irracionais e racionais e demonstrações da irracionalidade dos irracionais mais conhecidos. Ainda no intuito de aprimorar o referencial teórico do professor, trazemos uma reconstituição histórica com a intenção de elucidar alguns pontos da gênese e desenvolvimento dos números irracionais, esclarecendo tópicos obscurecidos pela historiografia tradicional como o período babilônico e egípcio, a "crise dos incomensuráveis" e o vácuo de informações e referências pós Grécia Antiga até o ressurgimento na Matemática do século XVIII. De forma alguma pensamos em esgotar o tema (mesmo porque isso seria impossível) mas selecionamos, para adentrar a exposição, tópicos que julgamos mais relevantes para o objetivo do trabalho. No último capítulo propomos uma sequência de ensino complementar aos livros didáticos vigentes, possibilitando ao professor novas formas de abordar o tema.

Palavras-chave: Números irracionais - História dos números irracionais - Ensino dos números irracionais

Abstract

The present paper firstly is dedicated to observe the insatisfactions of the approach of irrational numbers in math´s teaching and suggest strategies that intend to reverse this obstacle. From a litterature´s review in chapter one we amplified the horizons of the work based on the reports and conclusions from the main researchers of the theme focusing in this knowledge´s presentation in didatic books, elementary education and teachers´formation course integrated with a discussion about how curricular guiding documents´ predict an approach of the theme and litterature´s review focused in PROFMAT´s conclusion papers´ envioronment given the institutional reality of this paper and the reach and relevance of this program for teachers of elementary school. Chapter 2 is a compendium of relevant and desirable math facts to compose the knowledge of the teacher that teachs in elementary education. In view of difficulties indicated by theorics, we discuss the caracterization of irrational numbers as a set, operational properties between irrational and rational as well as demonstrations of irrationality of the main irrational. Still intending to improve techer´s theoretical we brought a historical reconstitution trying to put light on some genesis´ and development points of irrational numbers and some obscured topics by tradiotional historiography as babylonian and egyptian period, the "immeasurable´s crisis" and the great lack of information and references from after Ancient Greece up to math´s renewal in century XVIII. No way we expect to finish the theme (this would be impossible) but we have chosen the topics here according to ours relevance´s requirement for the goal of the paper. In the last chapter we brought implementation´s suggestions courseware figuring meaning possibilities to the teacher to complement available textbooks in order to delegate to the teacher possibilities to make more meaningful approaches.

Key words: Irrational numbers - Irrational numbers´ history - Irrational numbers´ teaching.

Sumário

Introdução

Há três acepções da palavra irracional no dicionário Aurélio da língua portuguesa, sendo a terceira concernente a matemática: "diz-se da quantidade cuja relação com a unidade não se pode traduzir em números". Enquanto que ao solicitarmos no buscador da página sinonimos.com.br/irracional/, palavras correlatas a irracional encontramos: ilógico, insensato, absurdo, incoerente, incongruente, disparatado, contraditório, paradoxal e até louco entre outros. É claro que o teor das palavras nesta lista aproxima-se muito mais do mundo habitual e cotidiano do que da acepção por nós desejada, que deve estar atrelada ao contexto da matemática. Contudo é indiscutível que o aluno do oitavo ano (momento em que ocorre o primeiro contato com essa espécie numérica) terá muito mais facilidade em associar o termo irracional a qualquer um daqueles adjetivos do que compreender a definição proposta pelo dicionário. Ora os números irracionais começam a chamar atenção pelo nome! E pudera... são fascinantes os mistérios que pairam ao redor deles.

Outra forma de intuir a significação desses números a partir da sua denominação é pensar que ao colocarmos o prefixo "i" frente a um adjetivo já existente estamos formando uma nova palavra, que vai negar a existência do atributo para algum objeto ao qual esse novo adjetivo formado vai se referir. Assim um número irracional seria aquele que não é racional, mas o que é um número racional?

Conforme o PCN (1999) e a recente BNCC (2017), os alunos do ensino fundamental têm contato com os números racionais desde bem cedo, logo que adquirem familiaridade com a operação de divisão. Já no primeiro ciclo (1°, 2° e 3° ano), lidam com as ideias associadas a metade e terça parte por intermédio da divisão por 2 e por 3, respectivamente. No segundo ciclo (4° e 5° ano) têm seu primeiro contato com as frações, expandindo as ideias do ciclo anterior, e chegam ao quinto ano sistematizando operações com números nas formas fracionária e decimal. O termo número racional normalmente aparece no 6° ano do ensino fundamental, onde se dá a ampliação das noções de número racional iniciadas no ciclo anterior, assim o terceiro ciclo (6° e 7° ano) inicia a caracterização dos números racionais como conjunto, seguindo uma crescente na abstração do tratamento.

Os detalhes históricos sobre a construção do conceito de número racional desde a antiguidade ficam por conta de seções complementares e as vezes tão somente gravuras com um breve comentário dispostos na introdução ou no final de alguma seção dos capítulos dos livros, o que representa uma perda lastimável, já que essa contextualização poderia preencher de significado o conceito de número racional. A despeito do maior tempo que os alunos do fundamental têm em contato com os números racionais, ainda não se alcança uma compreensão conceitual e operatória sobre os números irracionais conforme está posto nos documentos norteadores como veremos.

Chegando ao oitavo ano do ensino fundamental, o aluno depara-se com a dicotomia racional x irracional. Os números racionais são agrupados como aqueles que tem representação decimal finita ou infinita e periódica e os números irracionais, como aqueles que não são racionais, são aqueles que não admitem representação decimal finita ou periódica. É dito ainda que tais números não podem ser representados como uma fração de números inteiros, então cabe a pergunta: como se pode obter a representação decimal de um número dessa natureza?

Esta resposta em geral não chega nesta etapa da escolarização! Em lugar disso é dado o conceito de número real como sendo qualquer número racional ou irracional, e consequentemente, definindo o conjunto dos números reais como a reunião do conjunto dos racionais e dos irracionais. A discussão sobre comensurabilidade, que poderia ser uma justificativa para a ideia da não possibilidade de representação como razão de dois inteiros, virá apenas no nono ano, mas totalmente direcionada para o conceito de razão de segmentos a fim de introduzir o Teorema de Tales. Aliás nesse meio tempo a palavra irracional desaparece! Os cálculos com radicais, as equações do segundo grau e o estudo geral da geometria plana que acontecem esse ano não fazem mais menção alguma aos números irracionais.

No Ensino Médio as coisas não figuram de forma diferente! O aluno do primeiro ano adentra na matemática deste segmento com uma revisão do conjunto dos números reais por cada um dos seus subconjuntos próprios (naturais, inteiros, racionais e irracionais), permeados por uma forte simbologia e linguagem de conjuntos e com o intuito de estudar funções de uma variável real com a maior generalidade possível. Daí, novamente, deparar-nos-emos com outra grande lacuna da abordagem dos números irracionais que retornarão brevemente somente na introdução dos logaritmos para explicitar um tratamento de potências de expoentes irracionais.

Chama muito nossa atenção que não sejam feitas relações entre números irracionais e logaritmos, geometria plana ou trigonometria, já que nestas áreas da matemática a presença dos irracionais ocorra de forma muito natural.

Souto (2010) diz que a escolha de uma definição para um objeto matemático tem papel primordial no aprendizado, sendo o objeto em si muito mais amplo do que sua definição, uma ação localizada como uma expressão ou registro linguístico não conseguirão esgotá-lo, haverá então a necessidade de recorrer a outros conceitos e teorias que possam revelar ao aluno o que a definição não pode expressar, isto é, conceituar vai muito além de definir. Nesse sentido Souto (2010) apresenta três formas de abordagem que costumam aparecer em livros atuais ou contemporâneos com frequência. As duas primeiras diretamente ligadas ao conceito de número irracional e a terceira conceitua os irracionais indiretamente por meio da ideia de número real:

- Chama-se irracional o número que não pode ser escrito na forma de uma fração de inteiros.
- Chama-se irracional o número cuja representação decimal é uma dízima não periódica.
- Qualquer número racional ou irracional é um número real.

> Estas "definições" vistas com rigor matemático podem se tornar complicadores deste ensino, pois podem levar um aluno do ensino médio a pensar que números complexos da forma $(a + bi)$, com $b \neq 0$ não nulo, seja um número irracional. Ou ainda, que tornam as definições de número irracional e número real logicamente recorrentes: "irracional é todo número real que não é racional e número real é todo número irracional ou racional". (SOUTO, 2010 apud. Félix, 2018 p. 47)

Sobre isso Pommer(2012) esclarece que:

> ... os números irracionais representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem deste assunto em sala de aula. Esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos didáticos e epistemológicos para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico de modo significativo, no ensino básico (POMMER, 2012, p. 27).

Pommer (2012) vê aprendizado dos irracionais como um problema de natureza teórica o qual exige um entendimento do modo como a abordagem fará a transição do conhecimento empírico para o conhecimento teórico. Nesse sentido o mais conveniente seria optar por abordagens diversas que trouxessem estilos também diversos de definição para que o aluno compare, relacione, construa e reconstrua uma interpretação acerca da pluralidade de possibilidades de conceituar e escolha por qual vai primar nos estudos vindouros ou tenha pelo menos a possibilidade de escolher por conveniência qual definição é melhor de usar.

No entanto, as definições como colocadas por Souto (2012) evidenciam a forte descontinuidade lógica, não sistemática e horizontal no tratamento da teoria, ou seja, não é perceptível uma organização hierarquizada de saberes na abordagem dos números irracionais ao contrário do que o aluno observou anteriormente durante toda a vida escolar prévia com os naturais, inteiros e racionais: conceito, aplicação, representação geométrica, comparação, operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) e isso sem dúvida ocasiona um forte isolamento do tema dentro da matemática da sala reduzindo seu significado.

Visto tudo isso percebemos que a abordagem dos números irracionais na educação básica tende a ser estática, repetitiva e feita de forma bastante fragmentada, onde predominam exercícios mecânicos, a exemplo do tratamento aritmético que se dá aos radicais no nono ano ou o condicionamento da verificação da irracionalidade de um número de forma empírica abrindo espaço para imprecisões conceituais e erros.

Por exemplo, se tão somente dizemos para o aluno que número irracional é todo aquele cuja representação decimal é infinita e não periódica estaremos encaminhando-o a sempre executar a divisão até o momento que reconheça o período. No caso da fração $\frac{23}{19} = 1,\overline{210526315789473684}$, que conta com dezoito algarismos periódicos, é nitidamente contraproducente executar a divisão até o ponto de verificar todo o período para atestar sua racionalidade, interrompendo-se antes disso em um número de vezes considerado suficiente (quanto seria esse número de vezes?) o método empírico empregado pode erroneamente atestar que dito número é irracional.

E mesmo assim como certificar-se que em uma iterada mais a frente deste processo surgirá um algarismo não periódico? Este pode ser um questionamento muito natural se, restritos a essa forma de conceituar, já tivermos explorado exemplos como $\frac{74}{45} = 1,6\bar{4}$ onde a representação decimal inclui um algarismo não-periódico. Não são poucos os exemplos, tão problemáticos quanto esse, que podem nos sugerir que esta conceituação apenas é insuficiente.

As experiências com espécies numéricas anteriores (inteiros e naturais) estão mais diretamente ligadas ao mundo concreto: contagem no caso dos naturais e comparação de quantidades no caso dos inteiros. A compreensão conceitual dos racionais e irracionais exigirão argumentos lógicos devido a questionamentos naturais referentes a maneira de se pensar nos elementos desses conjuntos. Construir o entendimento do que é um número irracional no ensino fundamental de fato não é uma tarefa fácil! Exige cuidado por parte de quem ensina. De acordo com Félix

> dada a pouca intuitividade e o nível de abstração nos conceitos o método de trabalho deve levar em conta a estranheza dos alunos para a compreensão destes números, pois além do fato de propor um conteúdo com pouca aplicação para este momento na vida destes alunos, ainda se tem a impossibilidade de não poder mensurar irracionais, como se mostra em uma régua comum para a maioria dos números naturais. (Félix, 2018, p.34)

Tradicionalmente, a historiografia tem atribuído a descoberta dos números irracionais aos pitagóricos entre 450 e 400 a.C. no famigerado episódio que ficou conhecido como a crise dos incomensuráveis, devido a perplexidade que os integrantes da escola de Pitágoras foram submetidos quanto a quebra de paradigmas envolvendo essa descoberta. A escola pitagórica teve um fim violento perseguido pelo povo da sua cidade sede, Crotona, e o próprio Pitágoras não deixou nada escrito. De lá pra cá os gregos apenas contornaram o problema dos incomensuráveis com a teoria das proporções de Eudoxo (408 - 355 a.C.) e o desenvolvimento de uma teoria dos números irracionais veio ocorrer somente nos tempos modernos por volta do século XVIII quando temos matemáticos abordando temas relacionados aos irracionais de forma consistente.

Historiadores têm feito críticas a essa versão dos fatos e estabelecem uma análise distinta, a partir de divergências que se evidenciam dentro da mesma escola pitagórica e contestam desde a autoria do que hoje conhecemos por Teorema de Pitágoras até sua relação com os incomensuráveis e o suposto escândalo lógico. Retomaremos essa discussão no momento de um tratamento puramente histórico, por hora, observamos que apesar do tema ter raízes antigas (envoltas em obscurantismo), o avanço da evolução teórica dos irracionais é recente (pouco mais de 200 anos).

Os fatos apresentados nos levam então a refletir o quanto a ausência de uma teoria consistente, nos séculos que se seguiram à descoberta dos incomensuráveis, contribuiu para que nos dias de hoje ainda tenhamos inadequações nas abordagens na educação básica, como demonstrado no início desse trabalho, assim como na formação de professores.

Se no ensino de matemática da educação básica, a abordagem reduz os irracionais a sua natureza aritmética, focalizando nas manipulações algébricas e ferramentas operatórias, nos cursos de ensino superior a discussão dos irracionais, que geralmente é feita no início de disciplinas de Análise Matemática, é puramente abstrata e desarticulada com outras abordagens (histórica e geométrica por exemplo).

A literatura, usualmente adotada como aporte teórico destas disciplinas, tratam da construção dos irracionais por um dos dois vieses: limites de sequências, conforme

Cantor (1845-1918) ou cortes de Dedekind (1831 - 1916).

Em qualquer uma das duas abordagens, o foco na verdade é a construção do conceito dos números reais e o estabelecimento de suas propriedades para adentrar no conceito de continuidade e nas ferramentas do cálculo tornando os irracionais uma etapa de passagem.

No que diz respeito a formação de professores, este quadro comprova que os números irracionais se constituem um entrave didático no ensino básico porque são também um entrave epistemológico no ensino superior. O licenciando não tem a oportunidade de confrontar o dilema que permeia os números irracionais: ao se fazer uma abordagem pouco rigorosa, os conceitos perdem em significância, por outro lado se a abordagem for excessivamente rigorosa, compromete-se o aprendizado do aluno.

É imprescindível que o professor saia da disciplina de análise dominando as demonstrações algébricas, capaz de fazer generalizações de regularidades e formalizar observações empíricas para que sua mediação propicie ao estudante o aprimoramento da capacidade de relacionar, comparar e fazer abstrações, localizar um número irracional na ordem numérica, fazer aproximações, levantar hipóteses e construir argumentações em situações que envolvam esses números como construção de figuras geométricas, gráficos de funções e análise de outras situações menos corriqueiras, mas que enriquecem a discussão a nível de ensino médio. Desta forma, se o professor, em sua formação, não tem a oportunidade de compreender em profundidade os irracionais terá dificuldades em tornar este conteúdo significativo para os seus alunos, como resultado teremos egressos da educação básica que também pouco compreendem o tema.

Nesse sentido, traçamos um repertório de estratégias para contornar o problema descrito em todas as suas facetas. Iniciamos fazendo uma revisão de literatura para fundamentar nossos argumentos e observações dos irracionais nos principais materiais utilizados por professores e alunos e sugerir mais fontes de consulta. Apresentamos sistematicamente fatos e propriedades referentes aos números irracionais mais relevantes ao trabalho do professor da educação básica e um relato histórico sintético do avanço dos conceitos e teorias envolvendo esses números.

Por fim apresentamos uma proposta de intervenção embasados no que foi discutido ao longo de todo trabalho e adequado para turmas do 9° ano do Ensino Fundamental a fim de dar significação profunda aos alunos desta série a respeito do tema. Esperamos que este trabalho venha contribuir de forma positiva para a reversão do panorama atual sobre o ensino-aprendizagem de irracionais tornando este tema da matemática básica realmente significante.

Capítulo 1

Nos currículos e nas pesquisas acadêmicas

Uma revisão bibliográfica é uma forma de pesquisa que se dá apresentando dados já disponíveis sobre o tema que podem ser vislumbrados em retrospectiva. A importância desse tipo de pesquisa, ou melhor dizendo, deste procedimento dentro do nosso estudo está na integração das informações do conjunto de estudos já realizados separadamente. Desta forma, ao invés de ficarem retidos à leituras fragmentadas de alguns artigos, leitores e pesquisadores tem acesso a um espectro mais amplo de informações que podem contemplar ideias conflitantes ou coincidentes ao longo do tempo, assim como propostas de intervenção que já foram elaboradas, quais questões já foram contempladas em investigação, e quais seguem passíveis de reflexão e detalhamento, traçando perspectivas para futuras pesquisas e permitindo conclusões panorâmicas sobre o tema.

Começaremos a exposição através da apresentação do tema números irracionais conforme sugestões dos principais documentos norteadores do currículo da educação básica: Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e Parâmetros curriculares Nacionais (PCN), bem como da formação de professores que se estabelecem pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para Licenciatura em Matemática (DCN).

1.1 Nos documentos curriculares oficiais

A BNCC é um documento de natureza normativa, resultado do debate com diferentes sujeitos do campo educacional (atores e especialistas) e da sociedade, com o objetivo de orientar os rumos da educação básica no país, propondo uma base nacional comum como matriz de elaboração dos currículos de todas as etapas da educação básica, respeitando os direitos fundamentais de aprendizagem e as singularidades regionais e locais. O documento é, portanto, um compromisso do estado brasileiro previsto na LDB/96 e no PNE/2014 que se baseia nas dez competências gerais que guiam o desenvolvimento escolar das crianças e jovens bem como em experiências educacionais entendidas como avançadas e de sucesso mundo afora. De acordo com esse documento, a educação básica fica dividida em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. As etapas correspondentes aos Ensinos Fundamental e Médio ficam divididas por áreas do conhecimento que abrangem as componentes curriculares, estas por sua vez são descritas por competências específicas de área e habilidades dentro das unidades temáticas (grupo de objetos de conhecimento com similaridades epistemológicas) e objetos de conhecimento (conteúdos)[1].

Segundo a BNCC, o conhecimento matemático é necessário a todos os alunos da educação básica dado seu potencial na formação da criticidade do indivíduo cidadão, além de aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento e da vida humana. Desta forma, a matemática não se restringe a quantificação de fenômenos determinísticos - contar, medir e técnicas de cálculo - ou mesmo dos fenômenos aleatórios, mas também elabora uma série de sistemas abstratos que organizam e inter-relacionam os fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números associando-os, quando este é o caso, ao mundo físico.

Ainda que a matemática se enquadre numa perspectiva de ciência hipotético-dedutiva, dada a natureza de suas premissas e demonstrações, no que se refere a aprendizagem da mesma, não se deve descartar a heurística das experimentações. A BNCC preconiza para o ensino fundamental, especialmente no ciclo final, uma articulação entre as áreas constituintes da disciplina que venha garantir aos alunos capacidade de relacionar observações empíricas do mundo real e suas representações, associando a conceitos e propriedades matemáticas por meio de raciocínios indutivos e conjecturas. Nesse sentido, o documento ressalta a seleção de conteúdos, competências e habilidades dentro de estratégias de aprendizado como resolução de problemas, investigação, modelagem e construção de projetos privilegiando o caráter de jogo intelectual para desenvolver o raciocínio lógico e crítico tornando o sujeito apto a utilizar matemática para resolver problemas, aplicando procedimentos e resultados para obter soluções assim como interpretá-las e comunicá-las, argumentando

[1] A altura da escrita desse trabalho - 1° semestre de 2020 - O texto referente a BNCC do ensino fundamental já se encontra em fase de implementação enquanto que do ensino médio ainda está aguardando implementação.

para validá-las ou refutá-las[2].

Para a BNCC do ensino fundamental o conteúdo de matemática se distribui em cinco grandes unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística, cada uma permeada por diversas competências específicas que garantem a aquisição de conhecimentos. A primeira competência é a compreensão de que a matemática é uma ciência vinda das necessidades humanas e preocupações de diferentes culturas e momentos históricos, embasando soluções científicas e tecnológicas, descobertas e construções. Dentro dessa competência, no que diz respeito aos números irracionais podemos pautar a chamada "crise dos incomensuráveis", ainda bem frequente na literatura, como ponto de surgimento das discussões e utilização dos números irracionais, o que parte dos historiadores já criticam. Por outro lado, ainda que o conceito de número irracional seja sumamente mais sofisticado e não-trivial que os das demais espécies numéricas apreendidas pelos alunos anteriormente, os irracionais estão no pano de fundo de diversos modelos matemáticos importantes para outras ciências como datação de fósseis, leis de resfriamento, construções e artes.

Uma segunda competência é o desenvolvimento do raciocínio lógico, espírito de investigação e argumentação fazendo-se recurso aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. Acreditamos que algumas das demonstrações por absurdo que tipificam os números irracionais são contempladas por essa competência e podem ser um recurso para a retomada do uso da demonstração no ensino básico conforme exibiremos no capítulo de sugestões didáticas, além de extirpar o empirismo como validador dos fatos importantes sobre esse tópico, o que tem conduzido a equívocos, conforme pesquisas que apresentaremos na próxima seção.

Na competência 3 pede-se para compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, dando segurança e auto estima quanto à capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos. No que se refere aos números irracionais, isso pode ser verificado com o desenvolvimento histórico do tema entre geometria, aritmética, álgebra e mais extensivamente a análise.

As competências 4 e 5, em essência, pedem para se fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas diversas dimensões da vida humana produzindo, interpretando e comunicando informações com criticidade a partir de ferramentas matemáticas e tecnologias digitais. Para tanto, sugerimos de forma

[2]Este conjunto de habilidades é entendido como letramento matemático. As estratégias de investigação e construção de projetos preveem a aquisição do mesmo em estado de fruição

muito especial a pesquisa de Mózer (2013) onde a autora expõe em sua investigação uma série de fenômenos cuja ocorrência está diretamente ligada a manifestação inesperada de números irracionais. Tal pesquisa centrou nossa quinta atividade da proposta pedagógica apresentada no capítulo 4.

Os números irracionais situam-se essencialmente na unidade temática “Números”, onde se deve desenvolver o pensamento numérico e o conhecimento referente a quantificar e julgar argumentos baseados em quantidades. Para tanto é necessário desenvolver ideias relativas a aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem em situações significativas da ampliação dos conjuntos numéricos onde se enfatize registros, usos, significados e operações. A BNCC estabelece então a apresentação desta espécie numérica nos anos finais do ensino fundamental através de problemas que façam o aluno perceber a insuficiência dos racionais. Contudo apontamos que na unidade temática “Álgebra” que preconiza a identificação de padrões e sequências numéricas, bem como criação e interpretação de representação simbólica, os irracionais são contemplados no que diz respeito a duas definições que são apresentadas nessa fase de ensino: decimais infinitos não periódicos (aqui nos referimos a ambiguidade que se abate sobre os alunos quanto a números cujo padrão de expansão decimal não é a periodicidade dos dígitos e portanto não irracionais apesar desse padrão) e não possibilidade de representar como frações de dois inteiros com o segundo não-nulo (forma $\frac{a}{b}$ que estabelece a continência de $\mathbb{Q}$ sobre inteiros e naturais e o separa dos irracionais).

Na unidade temática “Gemetria” destaca-se a ideia de estudar a posição e o deslocamento no espaço e usar do pensamento geométrico para investigar a propriedades e produzir argumentos de modo que temos a licença para associar os números irracionais e as grandezas incomensuráveis bem como a construção desses segmentos com os instrumentos euclidianos dando conta das ideias de localização na reta real e comparação conforme Atividade 1 do Capítulo 4. No Apêndice 1, o leitor encontrará um quadro com a indicação da abordagem dos números irracionais ao longo do ensino fundamental por série, elencando-se os objetos de conhecimento e competências dentro da unidade temática onde ocorrem essas manifestações.

Quanto ao Ensino Médio, a BNCC aponta para uma ampliação em relação ao fundamental na área de matemática e suas tecnologias no sentido de que se espera do aluno que além de resolver problemas possa formulá-los descrevendo dados, selecionando modelos e desenvolvendo pensamento computacional.

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2017, p. 518)

No que se refere a conteúdos, destacamos que o documento não estabelece o currículo desta etapa, mas define as aprendizagens essenciais que devem ser garantidas a todos os estudantes e tomadas como eixo norteador da (re)elaboração de currículos e propostas pedagógicas (são as competências específicas e habilidades que evocam os conteúdos). A organização do documento para esta etapa está em consonância com sua disposição para abraçar as demandas regionais, locais e até mesmo individuais materializadas nos chamados itinerários formativos que se propõem a flexibilizar a organização curricular fora das disciplinas como componentes curriculares, além de prever estilos de organizações diferenciados para os discentes como clubes, fóruns e oficinas entre outros para atender as referidas demandas dos mesmos.

Desta forma entre as competências específicas associadas a temática dos números reais citamos:

> **Competência 1:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda, questões econômicas, ou tecnológicas divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral - aqui podemos enquadrar o número de ouro, presente em manifestações artísticas e na constituição de diversos organismos.
> **Competência 3:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos - Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística - para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente - esta competência evoca a modelagem por funções e equações (polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas) donde há, portanto, uma necessidade intrínseca de trabalhar com os irracionais.
> **Competência 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. - similarmente ao que foi discutido no Ensino Fundamental.

Também elaborado de forma participativa por educadores brasileiros e agentes governamentais e não-governamentais na década de 90, o PCN tem por objetivo propor reflexão sobre a prática pedagógica e planejamento das aulas, análise e seleção de materiais didáticos e recursos tecnológicos, além de contribuir para a formação e atualização profissional por meio da fundamentação curricular, que tende a delinear o tipo de formação que se dá para o professor, bem como a produção de livros e materiais adequados ao uso do aluno. Cabe destacar que o PCN e a BNCC estão em comunhão quanto a respeitar diversidades regionais e culturais, além de construir referências nacionais comuns ao processo educativo ante as políticas existentes no país, necessários para exercer a cidadania em sociedade.

Quanto a matemática, o documento apresenta uma análise da trajetória das reformas curriculares que o país atravessou fazendo uma crítica massiva sobretudo ao movimento matemática moderna, influenciador curricular das décadas de 60 e 70 com ênfase no formalismo, convertendo a matemática do ensino fundamental em um gargalo para o acesso ao Ensino Médio e consequentemente em um filtro social, uma tendência que veio se revertendo a partir dos currículos de 80 e 95, quando as competências básicas para a aquisição do exercício da cidadania e o papel ativo do aluno na construção do conhecimento assumiram o protagonismo nos direcionamentos curriculares.

> Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. (BRASIL, 1998, p. 15)

A relevância social e as contribuições para o desenvolvimento intelectual do aluno devem ser os critérios para seleção dos conteúdos, e a resolução de problemas é entendida como estratégia privilegiada para introduzir os temas juntamente com a história e as TICs - Tecnologias da Informação e Comunicação - como caminhos de fazer matemática trazendo os conteúdos em suas dimensões conceitual, procedimental e atitudinal[3]. Levando em conta que o desenvolvimento da matemática e suas aplicações dão-se de forma indissociável com as atividades humanas, quer seja na vida quotidiana, nas elaborações de outras ciências ou ainda das especulações puras na busca de respostas dentro da própria matemática. O PCN traz como proposta a inserção de contextos que incluem essas situações dentre as abordagens realizadas nas aulas de matemática no sentido de propiciar visão ampla.

Esse apelo é uma crítica a constituição pedagógica que organiza os conteúdos da matemática como elos de uma corrente em torno de seus pré-requisitos, em respeito a estrutura lógica e formal da matemática. Isso determina um tratamento isolado

[3]Correspondem respectivamente a saber o que é, o que fazer e como integrar esse conhecimento ao ser, de acordo com a teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel na década de 60.

e impõe a exaustão rápida e superficial como indicam de forma muito particular, dentro do tema aqui tratado, as pesquisas acadêmicas na seção seguinte. Em contrapartida, o aluno consolida de forma mais abrangente o conteúdo quando pode retomá-lo e fazer novas conexões, relacionar diferentes representações e estabelecer extensões. Ocorre aqui outro ponto comum entre PCN e BNCC ao incluir a heurística como ponto relevante da aprendizagem do conhecimento matemático.

No PCN, os conteúdos se apresentam distribuídos em quatro blocos: Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação, descritos por conceitos, procedimentos e objetivos que se estabelecem em quatro ciclos. No terceiro ciclo que engloba os 6° e 7° anos encontramos uma pequena referência aos irracionais em conteúdos e procedimentos no bloco números e operações com cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas e fazendo uso de calculadoras.

O quarto ciclo que corresponde aos 8° e 9° anos traça como (parte) de seus objetivos referentes ao pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a

- ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;
- resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Assim como da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a

- ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável;

Com relação aos cálculos numéricos convém observar que os irracionais podem ser aproximados tanto quanto se queira por números racionais e que sua representação decimal é necessariamente infinita e não-periódica, sendo portanto, um momento propício para discussão do problema da aproximação numérica, ou seja, a necessidade que se tem de considerar uma quantidade finita de ordens decimais na representação do número abordando o conceito de arredondamento e suas consequências nos resultados.

Há um alerta no documento quanto a operações aritméticas e algébricas com os irracionais: há uma tendência dos alunos operarem com radicais nos moldes estabelecidos para os racionais, por isso a recomendação é para uma abordagem fora do contexto formal, evitando a identificação do número irracional simplesmente com radicais, enfatizando apenas os cálculos operatórios como na realidade tem ocorrido tradicionalmente. O PCN aponta que os alunos chegam ao fim desse ciclo da escolaridade com um conhecimento insuficiente quanto a utilização e significados das espécies numéricas, decorrente de abordagens infundadas e do abandono de problemas essencialmente aritméticos iniciados no ciclo anterior e que persistem neste último.

Na seção referente a conceitos e procedimentos, quanto aos irracionais no quarto ciclo, o PCN destacam ainda:

Bloco espaço forma:

- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Bloco números e operações:

- Constatação da existência de situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são racionais.
- Identificação de um irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.
- Análise, interpretação, formulação e resolução de situações problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais.

O PCN pedem ainda, para esse momento, o estímulo a capacidade de argumentar e contra-argumentar com base em conteúdos matemáticos que é semear o gérmen da demonstração. Vale ressaltar que o documento faz uma distinção entre argumentação e demonstração colocando a prática argumentativa como atividade discursiva e espontânea, enquanto a demonstração está pautada nas leis da coerência e lógica formal.

O PCN do Ensino Médio, de forma análoga a BNCC, apresentam o discurso norteador curricular exclusivamente em torno de competências e habilidades que são desejáveis para o perfil do aluno egresso sendo os conteúdos disponíveis na matemática ferramentas para alcance desses objetivos. Vemos ser reforçada a defesa do uso das estratégias didáticas como contextualização no quotidiano, na história e nas outras ciências, em conformidade com que já havia sido preconizado no segmento anterior como meio de garantia do espírito investigativo por parte dos alunos, além da capacidade instrumental de resolver problemas matemáticos e seguir no estudos posteriores e exercer cidadania. No que diz respeito aos conhecimentos numéricos por exemplo, encontramos:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumental disponível. (BRASIL, 1998, p.44)

Registramos que a área é referida como "Matemática e suas Tecnologias" o que evoca intervenções e julgamentos práticos em contribuição para a legitimidade do uso de calculadoras, planilhas eletrônicas e outros aparatos relacionados a computação como instrumentos didáticos. Segundo o PCN, o saber matemático científico e tecnológico é uma condição de cidadania e não prerrogativa de especialistas, nesse sentido o aprendizado não pode resumir-se à exposição dos alunos ao discurso professoral ou retenção a materiais instrucionais, mas com a participação ativa e coletiva para a superação das tendências pré-universitaristas e profissionalizantes que vem estigmatizando o Ensino Médio e universalizar essa etapa da escolarização.

Quanto aos professores, o documento registra a falta de uma formação profissional qualificada (inicial e continuada) ligada a restrições nas condições de trabalho e ineficiência de políticas educacionais como um dos maiores obstáculos para o ensino de matemática no Brasil quando afirma que parte considerável dos professores não tem clara visão sobre as propostas curriculares e os problemas que motivaram as reformas, assim incorporam tais propostas com interpretações equivocadas das concepções pedagógicas, resultando na ineficácia da maior parte delas de forma que sem recursos para práticas diferenciadas, os professores apoiam-se exclusivamente no livros didáticos, que no entendimento do PCN, são de qualidade insatisfatória.

> Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/ aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a idéia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência. Além disso, essa transposição implica conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos e procedimentos para que o professor possa compreender melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos.(BRASIL, 1998 p. 36)

Os cursos de Licenciatura em Matemática têm suas diretrizes curriculares estabelecidas a nível nacional por meio de uma portaria do MEC desde 2002. Este documento aponta como objetivo principal a formação de professores que exercerão docência na educação básica, prevendo a presença de conteúdos matemáticos nas áreas de álgebra, geometria e análise. Desta forma, podemos afirmar que os números irracionais devem constar no currículo universitário tanto como conteúdo próprio da matemática, como saber pedagógico em conexão com aplicações em outras áreas do saber científico, fato avalizado ainda por outros objetivos de relevância como garantir ao licenciado a possibilidade de realizar estudos de pós-graduação, estabelecer relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento e trabalhar na interface com outros campos de saber;

A Matemática estabelece vínculos com diversas áreas do conhecimento. Historicamente são a Física e as Engenharias que tem destaque nesse panorama, porém mais recentemente, tem-se destacado interseções da Matemática com Ciências Biológicas, Econômicas, Humanas e Sociais o que demonstra a possibilidade e a necessidade de articular essas áreas do conhecimento no âmbito escolar através de contextualizações que enfatizem a atualidade e as dimensões social, pessoal e profissional dos alunos, de modo que na formação do professor de matemático é imprescindível o aprofundamento da compreensão dos significados dos conceitos matemáticos.

1.2 Nas pesquisas acadêmicas

A intenção da nossa pesquisa vem da observação do tratamento superficial dado aos números irracionais em distinção aos números naturais, inteiros e racionais ainda na educação básica, o que persiste até as disciplinas da graduação quando os números irracionais sempre estiveram presentes, mas em segundo plano. Daí surgiu o pensamento de buscar, entre a história da matemática e da educação matemática, razões que pudessem justificar esse tratamento.

O acesso a autores como Souto (2010), Pommer (2012), Corbo (2012) e Broetto (2016) apontou-nos perspectivas do problema com as quais pudemos refletir e expandir os horizontes da investigação, dando maior consistência a mesma, e elevando o grau de formalidade através da definição objetiva da pergunta que nos serviria de diretriz - “onde estão os números irracionais?” - da definição das variáveis a serem observadas (apresentação do tema em livros didáticos, na docência do ensino básico e na formação do professor) e a metodologia com o objetivo de responder a essa pergunta.

Broetto (2016) chama a atenção para a ocorrência acidental de uma contradição entre as recomendações dos documentos oficiais e a prática de professores cuja formação costuma estar mais direcionada a fundamentação matemática em si do que para a abordagem do ensino. O autor faz um alerta para a insuficiência do conhecimento dos conteúdos para a formação docente, afirma que também é preciso um conhecimento pedagógico do conteúdo que se pretende ensinar, além de um conhecimento curricular, o que abarcaria as peculiaridades da matemática escolar.

> Para os tópicos mais frequentemente ensinados Shulman (1986) inclui como parte do conhecimento pedagógico do conteúdo: as formas mais úteis de representação daquelas ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações. E como não existe uma forma infalível de ensinar, Shulman (1986)[a] recomenda que o professor deve possuir um verdadeiro arsenal de formas de representar e formular um assunto, derivados de pesquisas ou da prática e que o tornem compreensível para outras pessoas. (BROETTO, 2016, p. 42)
>
> [a]SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching. Harvard Educational Review, v. 57, n. 1,p. 1?22, 1987.

Segundo Broetto (2016), “Números irracionais” é um conteúdo presente desde a Educação Básica até o Ensino Superior, em cursos das áreas de ciências exatas e tecnológicas. Além disso, consta de forma direta em livros didáticos e técnicos e é referenciado em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2000), Base Nacional Curricular Comum BNCC (BRASIL, 2017), matrizes de referência para avaliações externas como o Sistema de Avaliação da

Educação Básica - SAEB (BRASIL, 2008), Prova Brasil (BRASIL, 2011) e matrizes de referência para o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM (BRASIL, 2009).

O meio acadêmico brasileiro e internacional tem recebido contribuições de trabalhos publicados em anais de congressos, revistas científicas e pesquisas de mestrado e doutorado, surgidas a partir da preocupação com questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses números. Não há um consenso dos autores quanto a um esforço matemático para conceituar de modo satisfatório os números reais até o século XVIII, quando Cantor e Dedekind trazem em seus trabalhos, separadamente, uma sistematização do conjunto dos reais (consequentemente dos irracionais). No campo acadêmico existem poucos trabalhos envolvendo a abordagem destes temas no ciclo básico, conforme escritos de Klein (1932)[4] e trabalhos recentes em nível de mestrado e doutorado relacionados ao ensino e à aprendizagem dos números irracionais desde a segunda metade da década de 1990. Tais pesquisas (incluindo as entrangeiras) põem em foco especialmente três aspectos: conhecimentos de professores e alunos sobre o tema, tratamento dado ao tema pelos livros didáticos e formação de professores de Matemática.

Broetto (2016) faz reflexões quanto aos problemas de ensino e aprendizagem de números irracionais tanto nos livros didáticos quanto na formação do professor. O objetivo de seu trabalho foi diagnosticar imagens conceituais de números racionais e irracionais trazidos por licenciandos em matemática, utilizando o campo teórico de imagem e conceito devido a Vinner e Tall (1981)[5], compreensão instrumental e relacional de Skemp (1976)[6]. A análise do autor atestou a precariedade nos conhecimentos, pautados em exemplos e numa compreensão instrumental. A intervenção pedagógica conduzida pelo autor resultou em ganhos significativos que apontaram novas possibilidades.

A preferência por estratégias didáticas pautadas em exemplos decorreria do reconhecimento por parte do professor da impossibilidade de tratar os números reais com a mesma estrutura formal: definição - teorema - demonstração, como se faz tradicionalmente no curso de análise na universidade. É uma opção menos arriscada, sobretudo quando o professor vê-se refém da inoperância dessa estrutura formal no

[4]KLEIN, Felix. *Elementary mathematics from an advanced standpoint.* Londres: Mcmillian and Co., 1932.

[5]TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, p. 151-169, 1981.

[6]SKEMP, Richard. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, n. 77, p. 20-26, 1976.

ensino, assim ele acaba recorrendo a suas memórias de quando estudou os irracionais na educação básica ou se refugia nos livros didáticos que fazem recorrente e amplo uso dessa estratégia conforme Souto (2010) dentre outras pesquisas focadas na abordagem do livro didático que indicam um excesso de exemplos como recurso para justificar conceitos e propriedades na apresentação dos irracionais, conduzindo a falhas de entendimento e valorização das técnicas procedimentais do saber fazer, tornando a experiência de aprendizagem incompleta.

Broetto (2016) observa que há uma superficialidade no tratamento conceitual quando experiências computacionais como a verificação de uma expansão decimal como periódica ou não-periódica no visor de uma calculadora aparecem como fonte de conceituação, por mais que não se possa justificar a irracionalidade de um número com o simples exame de sua expansão decimal. Por outro lado problemas relacionados a medida e comensurabilidade não são mencionados. Dessa forma abre-se espaço para um raciocínio circular que resulta em lacunas no conceito de número irracional.

> Um número é irracional porque é dízima não-periódica e é dízima não-periódica porque é irracional. Isso gera um tipo de conhecimento pouco valoroso, pois, como não faz ligações com outros conceitos matemáticos, tende a ser volátil1. Em termos práticos, o fato de o período não ter aparecido até a segunda casa decimal não garante que $2 - \sqrt{2}$ será um número irracional, pois existem números cuja dízima periódica só se revela após várias casas decimais. (BROETTO, 2019, p.733)

Exemplificando os danos do raciocínio circular posto por Broetto (2019), Pommer (2012) elucida que a circularidade permite ao aluno concluir que os números imaginários são irracionais pois não podem ser escritos como frações conforme dados de Ripoll (2001). De fato, não podemos escrever qualquer número imaginário como fração de inteiros, mas nem por isso eles são irracionais.

Nesse sentido, Sirotic e Zazkis (2004) quando 40% dos professores secundaristas canadenses que compunham a amostra não identificaram como irracionais dízimias não-periódicas como 0,1212212221..., dado que é possível prescrever algum padrão na expansão das casas decimais além do que 30% também não sabia que uma razão entre inteiros é sempre racional. Por fim 20% dos participantes declararam conhecer apenas os irracionais genéricos e estabelecem confiabilidade irrestrita a calculadora. Em ambas as pesquisas percebeu-se ainda uma tendência dos pesquisados em qualificar como irracionais, dízimas periódicas com um período muito grande como $\frac{53}{83}$.

Ainda dentro dos resultados obtidos por Zazkis e Sirotic (2004) no que diz respeito a aspectos conceituais, parte da amostra identifica o conjunto dos irracionais com uma quantidade maior de elementos que $\mathbb{Q}$, mas apenas 3 defenderam esse ponto de vista argumentando em torno da cardinalidade do conjunto. Fischbein, Jehian e Cohen (1995), num trabalho investigativo com alunos da educação básica de Tel Aviv, perceberam que os sujeitos tecem imagens conceituais equivocadas de noções relativas a densidade dos reais, quando os alunos pesquisados atribuem o modelo geométrico da reta real as mesmas propriedades da reta racional, isso quando não concebem uma estrutura quase que discreta para os reais. Os pesquisadores observaram ainda confusões quanto a propriedade do máximo elemento, ao apurar que na opinião de parte dos alunos, conjuntos de números reais possuem máximo, enquanto que conjuntos de racionais não.

Para Fischbein, Jehiam e Cohen (1995) pouca atenção é dada aos números irracionais na Matemática Elementar, opinião com a qual concordamos e que indicamos como motivação inicial da pesquisa. Os autores acrescentam que a matemática da escola básica é essencialmente concebida como um conjunto de aplicações de técnicas, o que pode justificar os lapsos relatados, que dizem respeito a uma análise muito mais qualitativa, com uma abstração residente no conceito do infinitamente divisível.

No sentido da experimentação, um outro problema surge quanto ao ensino de π como a constante resultante da razão entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência independente do tamanho. Ocorre que os instrumentos físicos de medida sempre nos darão números racionais para estas grandezas, portanto o quociente entre eles sempre terá expansão decimal finita! Como poderia ser então π irracional? Aliás como poderia ser constante se com poucas observações observamos ligeiras diferenças nos valores? Pautar o ensino dessa constante exclusivamente nos experimentos empíricos resulta num conflito com as duas definições mais usualmente apresentadas para irracional na educação básica.

Uma proposta reversa ao uso excessivo da experimentação e observação está em Boff (2006), que constrói os reais em turmas do ensino fundamental e médio aliando rigor matemático, construção e intuição através do uso da régua decimal infinita, estratégia que permite estender o conjunto dos racionais fazendo uso da representação decimal, do algoritmo da divisão e aproximações sucessivas ao ponto que se desejar para o resultado final, permitindo preencher os intervalos numéricos e evidenciar a insuficiência dos racionais a partir da lista de decimais infinitos e não-periódicos. Pommer (2012) no entanto levanta algumas observações:

> Os diálogos presentes na referida pesquisa, expressos como registros transcritos em forma de protocolos, não explicam como os alunos produziram a referida lista para o caso dos números irracionais. O texto da referida pesquisa citou que os [...] alunos se contentam com duas casas decimais e a seguir se manifestam: "Chega! Já entendemos!". Nesse momento a pesquisadora encerrou a questão. Em termos práticos, a pesquisa de Boff (2006) revelou uma dificuldade intrínseca ao procedimento realizado. Os alunos limitaram-se à produção de uma lista finita para intentar a ideia da criação de um processo infinito. Mas, então, como aliar um processo construtivo e finito, à concepção da régua decimal infinita? (POMMER, 2012, p. 29)

Ao associar recursos computacionais com experiências de pensamento, a estratégia de Boff favorece o raciocínio indutivo, propiciando o surgimento de ideias importantes sem a necessidade de recorrer a uma axiomática extremamente formal e rigorosa conforme Pommer (2012). Soares, Ferreira e Moreira (1999) legitimam essa concepção em uma pesquisa movida no âmbito da formação de professores. No trabalho, os autores elencam e debatem representações conceituais a partir de um questionário realizado entre 84 alunos dos cursos de matemática da UFMG e UFSC. A conclusão dos pesquisadores indica que a problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciandos deveria ser sua ferramenta de instrumentalização para uma visão global do conjunto $\mathbb{R}$ que os prepare para ensinar o tema no básico. Para estes autores não há a necessidade de se começar por grandes ideias, mas sim por métodos computacionais que permitirão obter os resultados desejados.

As disciplinas de Cálculo geralmente ocupam parte considerável da grade inicial dos cursos de Matemática a nível universitário. A abordagem dessas disciplinas coloca os números irracionais em segundo plano quando parece supor que os alunos dominam tópicos como as operações estarem bem definidas e a propriedade de completude da reta que dizem respeito, respectivamente, as estruturas algébrica e topológica de $\mathbb{R}$ e a ideia intuitiva do limite de uma função.

> Ainda assim, uma grande parte dos alunos recorda a noção de reta, mas não necessariamente para melhor ajudá-los a conceituar a noção de completude. Um dos participantes dá uma definição operacional. O conjunto dos reais é completo, o que significa que não tem saltos, nem lacunas. Ela tem a propriedade do supremo, e é contínuo. Algumas respostas estão mais perto de serem operacionais, descrevendo $\mathbb{R}$ tal como um conjunto de cortes, no sentido de Dedekind, sem "saltos" nem "lacunas". Outras respostas referem-se à reta real como justificativa formal. De modo geral, as respostas dos alunos evocam o sentido cotidiano da palavra completo. Isto sugere imagens fracas de definições matemáticas. (SOUTO, 2010, p.25)

A disciplina de análise é, para muitos pesquisadores na formação de professores de matemática, o momento que o licenciando pode compor uma fundamentação dos tópicos a ensinar, construindo uma visão aprofundada do conhecimento matemático para a educação básica, prevendo os possíveis obstáculos epistemológicos[7] que se farão presentes. Nos cursos de Análise apresenta-se $\mathbb{R}$ como uma estrutura munida de duas operações que satisfazem uma certa lista de propriedades. Nessa abordagem formalista, desloca-se as questões de existência para o comportamento dos números reais como objetos de um corpo ordenado completo. Ainda assim, através de Broetto (2019) evidencia uma quantidade significativa de professores que não conseguem exemplificar concretamente como os conhecimentos adquiridos na disciplina de Análise aplicar-se-iam na Educação Básica.

Na escola, o conceito de número real é estabelecido como uma extensão dos números naturais, através de um processo elaborativo onde o aluno vai reformulando esquemas cognitivos para incorporar cada novo campo numérico a partir do anterior. Isso começa pelos naturais, passa pelos inteiros e os racionais até chegar nos reais. Pommer (2012) estabelece uma crítica a pressuposição da necessidade de compreender completamente os racionais para que assim se possa ter compreensão dos irracionais. Essa linha de pensamento, quando se constitui numa abordagem, enquadra os irracionais de forma simplista e negativa ao induzir o raciocínio circular: primeiro os reais são postos como a união disjunta entre racionais e irracionais, em seguida diz-se que os números irracionais são reais que não são racionais. A dúvida entre o que é real e o que é irracional persiste como resposta a ingênua tentativa de enquadrar os irracionais, simplesmente como números não-racionais.

Corbo (2012) também discute a apresentação dos conjuntos numéricos hierarquizados na matemática escolar com ênfase na relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, o que induz alunos e professores a acreditarem que para compreender o campo numérico seguinte é imprescindível a completa compreensão do campo anterior. A autora dá exemplos de influências indesejadas ao se utilizar em todos os conjuntos numéricos o mesmo molde operacional estabelecido para o conjunto dos naturais: vemos alunos procedendo somas como $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ e estabelecendo para con-

[7] A teoria dos obstáculos didáticos foi introduzida na escola francesa de educação matemática pelo filósofo Gastón de Bachelard em sua obra "A formação do espírito científico", como o elemento responsável pela não-linearidade dos processos de aprendizagem. Eles constituem-se a partir da noção de obstáculo epistemológico que Bachelard aponta como a rejeição de conhecimentos anteriores, algo típico do processo natural de evolução de todos os conhecimentos científicos. Para Bachelard, é o confronto com certos obstáculos que proporcionam o aprendizado, estes não são, portanto, a ausência de conhecimento, mas sim ideias antigas cristalizadas e resistentes a chegada de novas concepções.

secutivos de $\frac{2}{3}$, $0,5$, $3,4444\ldots$ e $3,69$ números como $\frac{3}{3}$, $0,6$, $3,5555\ldots$ e $3,7$, na tentativa de manter a ideia de sucessor no conjunto $\mathbb{Q}$ como se fazia em $\mathbb{N}$, onde os números que se sucedem tem uma diferença constante. Essa estratégia de gradação dos conjuntos numéricos, na visão da autora é um claro exemplo de constituição de obstáculos didáticos difíceis de se contornar, o aluno é levado a pensar que o funcionamento do conjunto dos racionais é idêntico ao dos naturais com a vantagem de que agora se pode fazer qualquer divisão em que o divisor não seja zero. O tratamento isento de referências à questões inerentes do campo numérico priva os alunos de conseguir explorar e ampliar aspectos relevantes e necessários para uma compreensão maior.

Enquanto isso, na academia, os cortes de Dedekind e as sequências de Cauchy fazem o elo entre racionais e reais, muito mais de uma forma construtiva do que como elemento de ligação, tanto que a menção aos irracionais é dispensável. Em Em Broetto (2019), vemos argumentos sobre o enfoque formalista da Análise esvaziar o sentido dos irracionais como elemento ligante já que estes não são os novos entes que serão acrescentados aos já conhecidos racionais para assim obter os reais. Eles surgem simplesmente como os reais que não são racionais. Esse fato pode também justificar a ausência da incomensurabilidade em livros de Análise Real.

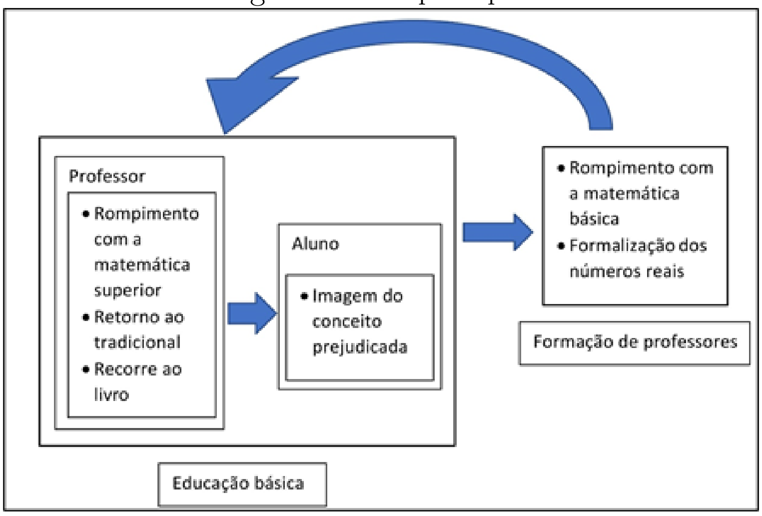
Para o licenciando, essa dissonância teórica tende a formar obstáculos didáticos que lhe imporão dificuldades de aprendizagem, cujo recurso de saída será acrescentar novas imagens mentais dos irracionais e reais conflitantes com os esquemas já estabelecidos por aprendizados anteriores. Os alunos passarão então a utilizar uma ou outra versão e até mesmo simbioses das duas coisas, conforme lhe parecer mais adequado em detrimento da definição formalmente correta apresentada pelo professor do curso de Análise, porém incompreendida pelo aluno.

Segundo Broetto (2016), faz-se necessária uma nova abordagem dos sistemas numéricos que seja específica para a formação de professores, problematizando o campo conceitual dos alunos e suas representações, isto é incorporar as idiossincrasias da Matemática escolar e a partir daí axiomatizar o conteúdo com o devido grau de generalidade e formalismo, conforme proposta de Soares, Ferreira e Moreira (1999) como discutimos anteriormente.

Se levarmos em conta que tais discussões vêm de pesquisas recentes, percebemos que não temos todavia avanços de monta na questão. Pelo contrário! Vemos o isolamento dos cursos universitários decorrente da ausência de preocupação com o Ensino Básico por parte dos professores universitários em acordo ao que Klein (1932) já escrevia em meados do século XX quando alertava que a formação de professores, no que diz respeito ao tratamento do conhecimento matemático, olhava mais para a frente no sentido da pós-graduação do que para trás, isto é para a educação básica, algo ratificado por Bortolossi (2017)[8] dentro do Colóquio do Instituto de Matemática e Estatística da UFF sobre a formação do professor da escola básica. Klein (1932) explica ainda o processo que chama de dupla ruptura do conhecimento vivenciados pelos professores de matemática.

> Durante a licenciatura os futuros professores ainda são confrontados com problemas que em nada se referem às coisas com as quais fora confrontado na escola. Naturalmente ele esquece essas coisas rapidamente e completamente. Quando, ao final do curso, ele se torna um professor, é esperado dele que ensine a matemática elementar da forma tradicional e pedante e, como não foi capacitado para discernir alguma conexão entre a matemática escolar e a da universidade, ele rapidamente retorna à forma de ensinar consagrada pelo tempo, e seus estudos universitários permanecem apenas como uma memória mais ou menos agradável que não têm influência em sua forma de ensinar. (KLEIN, 1932, p. 1, apud. BROETTO, 2019, p.742, tradução de Broetto)

Figura 1.1: Dupla ruptura



Fonte: Broetto, 2019

Segundo Broetto (2019), quanto a avanços dentro desse quadro, temos em Ferreira, Moreira e Soares (1999) a busca de novas abordagens dos sistemas numéricos, específicas para a formação de professores: o curso de Análise proposto por Sílvio César Otero-Garcia, que discute relações dos temas da Análise com a Matemática escolar ofertado no IFSP em Campos do Jordão e na UFMG, além de uma disciplina existente na licenciatura em Matemática chamada Números na Educação Básica.

[8]Palestra disponível na íntegra em https://www.youtube.com/watch?v=FSzSetkZLq0. Acesso em 19/04/2020.

Igualmente aos demais autores citados até aqui, Pommer (2012) discute uma polarização do tema entre os aspectos pragmático e teórico, sendo a parte teórica restritiva e rasa em detrimento da prática que privilegia o operatório em contextos exatos, finitos e determinísticos, propiciando a formação de obstáculos de aprendizagem. Estas conclusões são obtidas pelo autor após análise de pesquisas sobre os números irracionais e sua apresentação em livros didáticos. Um argumento distinto do que surgiu até aqui, na visão dele, é a não ocorrência de um intercâmbio das abordagens formal e empírica consagradas nos livros do ensino básico, isto é, o autor que utiliza uma abordagem formal tende a não estabelecer uma conversação com observações empíricas e vice-versa, o que resulta num esgotamento precoce e na superficialidade no tratamento do tema.

> Como seria possível passar do sistema dos números racionais para o conjunto dos números reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os números irracionais são parte de um sistema e ficam incompletos sem a conceituação dos números reais. Renegar os números irracionais é suficiente para derrubar todo o sistema. Isto é o que acontece hoje em dia.(Fischbein, Jehian, Cohen, 1995 p. 30 apud. Pommer, 2012 p. 23 tradução de Pommer)

A retomada dos aspectos históricos configuram uma grande oportunidade para desvelar detalhes significativos que ficaram obscurecidos pela minuncia centrada em tópicos essencialmente teóricos, exatos, determinísticos e finitos conforme Pommer (2012) destaca quando se apropria dos eixos constituintes de significação dos números reais: discreto $\times$ contínuo, finito $\times$ infinito e exato $\times$ aproximado como esteio da evolução epistemológica dos números reais e como o pilar de uma abordagem significativa.

Quanto ao eixo discreto $\times$ contínuo, a discussão gira em torno da dicotomia entre as grandezas discretas[9], isto é contáveis e as contínuas[10], ou seja passíveis de medida conforme terminologias latinas. Na matemática pré-helênica não havia distinção entre o uso dos racionais e aproximações irracionais para medida ou contagem, o que vemos mudar drasticamente na mentalidade grega especialmente após os registros de Euclides (323 a.C - 283 a.C.) quando se estabelece a geometria como o reino da continuidade e a aritmética o locus do discreto conforme Brolezzi (1996) (apud Pommer, 2012 p.109) e se verifica a primeira tentativa de ruptura entre o discreto e contínuo.

[9]vem de discretus que é o passado do verbo discernere e significa discriminar, separar ou distinguir.

[10]vem de contenere que significa manter junto, unido, seguro, portanto contínuo é o que está imediatamente unido a outra coisa.

Esta dicotomia fez-se presente por séculos e mantém efeitos até hoje. No que diz respeito ao ensino, o discreto e o contínuo são estabelecidos como dicotômicos e complementares, associados a duas importantes atividades matemáticas que são também experiências primárias no conhecimento da disciplina: contar e medir. Nesse sentido, nos rudimentos originais da geometria enquanto disciplina do conhecimento humano e o própio surgimento das frações de inteiros no Egito, quando se percebeu que é mais raro que a unidade de medida caiba um número exato de vezes na grandeza a ser medida que o contrário, evidencia-se esse elo.

> [...] em primeiro lugar trará o número para o domínio das relações espaciais, possibilitando a continuidade de exploração métrica do espaço com novos recursos. Dessa forma, o aluno perceberá que a Aritmética e a Geometria não são dois ramos complementares distintos da Matemática; eles se fundem e se complementam, um abrindo novos caminhos à compreensão do outro. Em segundo lugar, porque esse tema reforçará a compreensão do conceito da equivalência de frações, introduzirá o conceito de irredutibilidade de frações e dará uma maior amplitude ao conceito de fração aplicado a todos contínuos. (MIGUEL; MORIM, 1986, p. 123 apud. POMMER, 2012, p. 114)

A transposição didática do campo dos números irracionais é realizada de modo a diluir a ênfase do conhecimento frente ao par exato-aproximado. Nos documentos oficiais, as sugestões de estratégias didáticas restringem o cálculo aproximado a si mesmo sem dar muito destaque a representação geométrica, pondo em segundo plano o significado dos conceitos de aproximação e incomensurabilidade. A história mostra-nos que nas concepções dos povos antigos, não havia distinção entre o que é exato e o que é aproximado.

> Contrapondo dialeticamente o exato, o ensino deve também considerar aspectos referentes ao aproximado e ao estimado. Sabe-se que grande parte dos números que expressam medidas, de natureza infinita e ligada ao contínuo, provém de uma grandeza expressa por um número de natureza irracional, que pode ser aproximado para um número racional de natureza finita. (POMMER, 2012, p. 120)

O ensino básico inicia com a exposição dos inteiros e racionais, dado que essas espécies numéricas são instrumentos de tarefas do quotidiano: contar e medir. Na atividade de medir, que abrange os racionais, vemos o nível de abstração avançar consideravelmente. O resultado da operação "medir" é efeito de uma comparação entre duas grandezas de mesma espécie que partem de três pressupostos elementares: o estabelecimento de uma unidade de medida, a comparação que permite dizer quantas vezes a grandeza cabe na unidade de medida e finalmente a expressão dessa comparação em um número. Podemos perceber que há uma subordinação desses pressupostos a convencionalidade já que expressar a magnitude de certa grandeza por um número decorre da escolha de uma unidade de medida apropriada a situação. Aqui devemos registrar mais uma vez a inevitável passagem dos inteiros aos racionais, dado que escolha conveniente nenhuma dribla o fato de que as grandezas não são todas particionadas por uma unidade de medida um número inteiro de vezes, todas as vezes, ainda mais ao pensar em pares de grandezas que não tem uma unidade de medida comum, as incomensuráveis.

A única via de acesso que temos a um número irracional são as aproximações racionais consecutivas. Os números irracionais são sim um conceito teórico dentro do nosso mundo prático, mas esta dificuldade não deve ser um salvo conduto para produzir uma perplexidade lógica frente aos irracionais na tentativa de dar ênfase ao tema como a historiografia atual tem discutido no que se refere ao episódio nomeado como "crise dos incomensuráveis" como veremos a frente. Devemos ressaltar que o uso de instrumentos físicos já conduz necessariamente a ideia de aproximação, dadas as limitações físicas do aparelho e de quem o manuseia.

Seria mais produtivo discutir o eixo exato × aproximado no sentido de esclarecer o que é uma boa aproximação entre números reais. Para Pommer (2012), uma boa aproximação substitui um objeto por outro de mesma natureza, mais simples e operacional, suficientemente próximo do primeiro e mesmo assim pode ser melhorada conforme as necessidades ou condições de uma situação. Sendo assim, as sequências didáticas deveriam trazer momentos de discussão que privilegiassem a escolha de aproximações e seu grau de eficiência, sobretudo para os irracionais uma vez que as boas aproximações são sua "materialização" [11] na realidade.

Dentro do eixo finito × infinito, cabe a discussão da natureza conceitual do infinito que permaneceu controversa por séculos, principalmente por conflitar com a intuição. Na visão aristotélica, o infinito era simplesmente algo que poderia se tornar tão extenso quanto se quisesse, sendo portanto, impensável, a figura do caos. A visão de Aristóteles foi influenciada pelos paradoxos de Zenão de Eleia, um conjunto de observações que concebe o movimento dos objetos como algo irreal e paradoxal, proveniente da ilusão dos sentidos. Os dois paradoxos mais famosos são a disputa de uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga que teria recebido do herói grego uma pequena dianteira, mas suficiente, pelo raciocínio de Zenão, para lhe assegurar a vitória uma vez que a cada momento que Aquiles avançasse na direção da tartaruga esta já teria avançado um pouco mais na dianteira. O outro paradoxo é o da flecha

[11] as aspas marcam nosso recurso a metáfora para melhor esclarecer nosso ponto de vista frente as observações de Pommer, uma vez que matemática é a ciência do abstrato por natureza e até mesmo os números inteiros denotativos de quantidade são entes abstratos.

que disparada nunca deverá atingir o seu alvo, uma crítica a teoria das mônadas dos pitagóricos. As mônadas seriam corpúsculos indivisíveis e de extensão nula que formam o corpo de uma reta. No movimento em linha reta da flecha, em um determinado instante, a ponta deve estar sobre uma mônada específica, mas isso faz do movimento uma série de impossibilidades, pois se o tamanho das mônadas é nulo e nada pode acontecer entre elas como a flecha estaria se movimentando então? Para Zenão, ou a reta não seria formada por mônadas conforme diziam os pitagóricos ou entre dois corpúsculos deveria haver outro com tamanho maior que a mônada ou estes corpúsculos seriam coincidentes. Sobre este raciocínio, Pommer (2012) nos leva a pensar que podemos colocar uma mônada entre duas outras indefinidamente, então qual o número que se atribuiria a um segmento de reta ou a própria reta?

> Para Zenão, se a reta contivesse um número infinito de mônadas, então a totalidade dos infinitos termos teria uma quantidade infinita. Consequentemente, o movimento seria impossível, pois não seria possível atravessar um número infinito de mônadas em um tempo finito. Este fato, aliás, se constitui um erro de Zenão, que confundiu uma distância finita com uma distância infinitamente divisível (entre dois pontos não há uma distância infinita, mas sim uma distância finita que podemos dividir infinitamente). (POMMER, 2012, p. 124)

Nos séculos que se seguiram, somente Cantor conseguiu elucidar estes questionamentos por meio de sua teoria dos transfinitos ao estabelecer relações entre o infinito que se pode estender o quanto se desejar, o infinito potencial cujo exemplo é a sucessão de inteiros positivos que podem se estender indefinidamente acrescentando mais um, e o infinito relativo a um segmento contínuo que é infinitamente divisível, o que se chama de infinito em ato ou atual caracterizado pela possibilidade de dado um determinado ponto e outro subsequente, por mais próximos que estejam sempre será possível encontrar um outro ponto intermediário, indefinidamente. Assim determina-se uma diferença qualitativa considerável entre uma sucessão infinita de elementos discretos e uma sucessão de pontos em linha contínua, sendo aparentemente o infinito em ato uma propriedade necessária do contínuo.

Enquanto o infinito potencial está dentro dos parâmetros desenhados pela intuição, o infinito atual impõe uma barreira no que toca a ideia de que a parte não necessariamente é menor que o todo. Galileu (1564 - 1642) já vislumbrava essa ideia desde a época do Renascimento quando percebeu que a quantidade de números quadrados era a mesma dos naturais. Em vista disso, advertimos quanto ao risco de tentar lidar com o infinito unicamente com o senso comum, exaltando ainda mais a genialidade de Cantor ao conseguir fixar o assunto em termos lógicos e racionais.

A teoria estabelecida por Cantor parte da possibilidade de construir bijeções entre $\mathbb{N}$ e outros conjuntos infinitos.

Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita uma bijeção ou correspondência biunívoca entre X e Y quando dois elementos quaisquer de X tem imagens distintas em Y e todo elemento de Y é imagem de algum elemento de X. Quando dois conjuntos quaisquer, X e Y, são tais que $f : X \longrightarrow Y$ é uma bijeção, então X e Y possuem o mesmo cardinal (ver Definição 2.46).

Para conjuntos finitos, este fato adequa-se naturalmente: ora se X é finito com n elementos, então existe uma bijeção $g : I_n \longrightarrow X$, mas a composta de bijeções é também uma bijeção, logo $g \circ f : I_n \longrightarrow Y$ nos diz que Y tem a mesma quantidade n de elementos. Cantor usa essa ideia extensivamente, construindo bijeções dos inteiros e racionais com $\mathbb{N}$, permitindo verificar que estes equivalem-se em quantidade de elementos. Obtemos assim, uma relação de igualdade que permite construir uma gradação entre conjuntos infinitos (ver exemplos 2.47 ao 2.50). Na teoria dos transfinitos, estes conjuntos tem o mesmo número cardinal, que é designado por $\aleph_0$[12]. Um conjunto de cardinalidade equivalente a $\mathbb{N}$ (ou algum subconjunto finito seu) é dito enumerável. Fazendo uso de um raciocínio construtivo indireto, que provocou certa rejeição naquela época, Cantor provou que irracionais e reais não se correspondem biunivocamente com os naturais e designou a cardinalidade desses conjuntos por $\aleph_1$. Temos então, $\sharp\mathbb{N} = \sharp\mathbb{Z} = \sharp\mathbb{Q} = \aleph_0 < \aleph_1 < \sharp\mathbb{R}$. O problema conhecido como hipótese do contínuo, que segue aberto até então, consiste em verificar se existe algum cardinal intermediário entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$.

> Partindo-se da "Crise dos incomensuráveis", que representa o marco de surgimento dos números irracionais, uma dicotomia ficou pontuada entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos irracionais. Os números racionais representam geometricamente segmentos comensuráveis ou elementos de um conjunto do tipo enumerável. Em contrapartida, os números irracionais representam segmentos incomensuráveis ou elementos de um conjunto não-enumerável com a cardinalidade dos números reais, superior a cardinalidade dos conjuntos enumeráveis. (POMMER, 2012, p. 132)

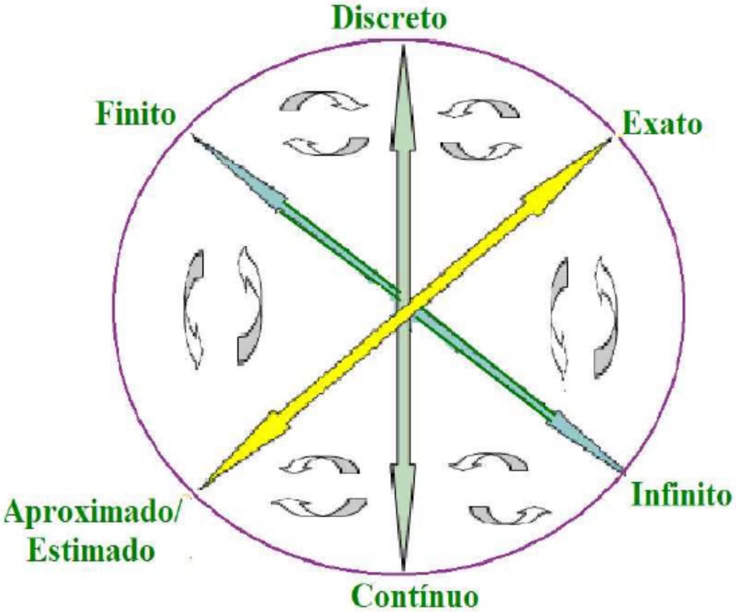
Pommer (2012) traz a história do infinito como um exemplo de assunto importante que partindo de ideias turvas superou as próprias inconsistências e passou a um status de tema fundamental da Matemática, um pilar dos números reais.

Destacamos, dentro da análise de Pommer, sua observância quanto a complementaridade desses eixos na construção do assunto números reais. De fato, nos relatos anteriores, percebemos por vezes que os eixos encontram-se tão fortemente associ-

[12] Este símbolo é a primeira letra do alfabeto hebraico e lê-se "alef".

ados que uma abordagem centrada na tentativa de fazer uma separação absoluta pode tornar-se contraproducente conforme tenta ilustrar a figura 1.2.

Figura 1.2: Espaços de significação dos números irracionais



Fonte: Pommer, 2012

A pesquisa de Corbo (2012) propõe-se a investigar os conhecimentos necessários ao professor de matemática para ensinar números irracionais na educação básica contando com a participação de 23 professores do ensino fundamental e médio da rede pública de São Paulo, motivados por questões referentes como a não-completude dos racionais pode auxiliar na ampliação e reconstrução dos conhecimentos dos professores sobre os irracionais e investigar as experiências necessárias nos cursos de formação inicial e/ou continuada do professor, afim de compreender as dificuldades que os alunos enfrentam na construção do conceito de número irracional. Por meio de uma atividade diagnóstica, a autora já constatou inconsistências sobre a compreensão dos números racionais e irracionais, mas indica que, ao final da intervenção, as discussões e reflexões indicam resultados positivos para o progresso da imagem conceitual dos professores, assim como a formalidade e adequação a sua prática docente.

Corbo (2012) questiona a real necessidade de ensinar os irracionais ainda no ensino secundário e qual ônus essa omissão poderia trazer dado que em geral numa primeira apresentação dos irracionais no secundário a memorização é a habilidade que permeia a aprendizagem, conforme a mesma autora demonstra em sua pesquisa de mestrado: “o sujeito não compreende o conceito por si mesmo” e indica a existência de dois obstáculos intuitivos: a não surpresa das pessoas quanto a existência de grandezas incomensuráveis e a coexistência de dois conjuntos infinitos distintos num mesmo intervalo.

Explicando melhor: a intuição que leva a afirmar que dois segmentos de comprimentos diferentes são múltiplos inteiros de uma mesma unidade de medida e que a existência de infinitos pontos entre dois racionais quaisquer por mais próximos que eles sejam dão uma garantia do preenchimento completo da reta não são banais. Em Corbo (2012) encontramos autores que fazem defesa da centralização das abordagens de ensino dos irracionais em torno da definição que põe foco na impossibilidade de expressar o número como razão entre dois inteiros e omitir a referência a representação decimal ou apresentá-la como consequência da primeira, como uma propriedade representacional para garantir que haja de fato compreensão da relação entre dízima periódica e geratrizes, sob pena de incorrer em concepções incorretas como dar o status de racional a qualquer dízima que tenha algum padrão de repetição, que não necessariamente um grupo de algarismos periódicos ou a exclusão de dízimas periódicas com longos períodos de difícil identificação. Por outro lado, utilizar apenas a definição decimal dá a entender que a classificação racional $\times$ irracional é apenas um jogo inútil de rotulação e que obscurece o conceito de número irracional.

Somando tudo isso, a conclusão é de que o grau de abstração necessário à compreensão do significado de número irracional é muito alto para introduzir esse conteúdo nos anos finais do Ensino Fundamental. Em verdade a provocação inicial desse conteúdo pode partir da experimentação, por meio da medição de segmentos ou a obtenção de aproximações decimais com calculadora, mas a complementação formal se faz necessária ou se pode induzir o aluno à uma compreensão equivocada. Nenhum algoritmo, por maior número de casas que se possa obter, pode garantir que um período não vai ser observado mais a frente na expansão de $\sqrt{2}$, então não basta o professor dizer que este é um número irracional, esta convicção tem que ser instituída por meio de uma prova formal.

Schwarzenberger e Tall (1978)[13] considera que as tradicionais provas por absurdo são inacessíveis nesse momento, baseado na pouca experiência que os alunos teriam com relação a argumentação e demonstrações matemáticas e no esforço cognitivo que esse procedimento pede: supor o contrário de algo verdadeiro e concluir uma contradição. Para estes autores, cabe ao professor apresentar provas por absurdo,

[13] TALL, David Orme; SCHWARZENBERGER, Rolph Ludwig Edgar. Conflicts in the learning of real numbers and limits, in: *Mathematics Teaching*, 82, 44-49. University of Warwick, 1978.

as mais diretas possíveis e selecionar estratégias que sejam igualmente o menos conflitante.

Por tudo que foi exposto, acreditamos que o conteúdo, números irracionais, não deve ser omitido na educação básica, mas melhor formatado e proposto. Quanto aos prejuízos demandados por tal omissão, teríamos que repensar o ensino de funções polinomiais, onde o uso de radicais aritméticos é inevitavelmente demandado, a ideia da continuidade dos gráficos, praticamente toda geometria e trigonometria métrica, exponenciais e logaritmos. Algum leitor poderá pensar que esses temas têm sido trabalhados sem qualquer necessidade de menção aos irracionais e esse é exatamente o nosso ponto: a omissão dos irracionais no ensino nos leva ao quadro que temos hoje, onde o significado conceitual desses números não é utilizado para reforçar fatos matemáticos relevantes.

A matemática é uma ciência que educa para o raciocínio! Dos diversos tópicos que formam as distintas áreas de interesse da matemática: da aritmética a geometria, da análise a teoria das probabilidades, todas giram em torno de estabelecer raciocínios válidos e concisos para responder a problemas. Se os números irracionais demandam o pensamento demonstrativo no ensino básico, por que não os empregar para tornar essa uma tendência neste segmento de ensino, que ano após ano vem abrindo mão dessa proposta de atividade ao invés de enfatizar unicamente o tecnicismo de procedimentos e operações?

Os números irracionais estão na base dos números reais, que por sua vez permeiam a estrutura da geometria métrica, do cálculo e da análise. Nesse sentido, citamos Bruner (1987) quando diz que não se deve adiar o ensino de assuntos essenciais por conta da crença de que eles são difíceis, pois as ideias fundamentais de qualquer assunto podem ser ensinadas na escolaridade básica, priorizando compreensão em detrimento dos aspectos técnicos. Portanto simplesmente ignorar os irracionais não contribui para um quadro melhor e nem resolve o problema no que diz respeito a formação dos professores, apenas adia uma discussão que se faz necessária.

1.3 No PROFMAT

Acreditamos na pertinência de um enfoque da revisão de literatura no âmbito do (PROFMAT), pois não obstante o fato de ser a realidade institucional em que esse trabalho se insere, o PROFMAT, desde quando surgiu, através de ações coordenadas entre CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - SBM - Sociedade brasileira de Matemática - IMPA - Instituição de Matemática

Pura e Aplicada e Instituições de Ensino Superior Associadas tem por objetivo principal aprimorar o professor de matemática, em especial aqueles em efetivo exercício nas escolas públicas, garantindo-lhes aprofundamento do conteúdo relevante para a docência. O programa tem um alcance nacional desde 2012, quando passou a atingir as 27 unidades da federação através das vagas ofertas pelo sistemas UAB em 67 campi, um número que vem crescendo desde então e é uma iniciativa que está em consonância com o Plano Nacional de Educação (PNE), Lei Nº 13.005, vigente de junho de 2014 a 2024, contribuindo principalmente com a meta 16 que pretende formar em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da Educação Básica, até o último ano de vigência deste PNE, além de garantir a estes profissionais formação continuada em sua área de atuação, segundo as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino. Além disso, o Profmat também atende as metas 14, 17 e 18 que tratam, respectivamente, de elevar o número de matrículas na pós-graduação stricto sensu, da valorização do professor e do plano de carreira. Portanto no que nos diz respeito, este ponto do trabalho servirá para futuras pesquisas e análises quanto a produção do PROFMAT, ainda que no tocante ao tema específico dos números irracionais, e seus impactos na pós-graduação e na educação básica brasileira conforme seus objetivos.

Esta etapa da pesquisa se deu por meio da busca e análise de trabalhos de conclusão disponíveis no site do PROFMAT[14], a partir de palavras-chave, sugestionados pelas leituras feitas na revisão de literatura. Nosso objetivo maior era fazer um levantamento dos trabalhos do PROFMAT que traziam contribuições para o desenvolvimento do tema. Separamos então os trabalhos em categorias e a partir daí analisamos resumo e introdução para constatar os objetivos pretendidos, estruturação e desenvolvimento do trabalho, existência de uma proposta pedagógica específica com relato e considerações finais.

Para uma organização melhor do texto, o relato que começamos a seguir vai do termo com menor registro no número de trabalhos ao maior, assim conseguimos identificar mais facilmente trabalhos que se repetiam a partir de termos diferentes. Inicialmente, tínhamos incluído entre os termos de busca "números reais", o que retornou 39 resultados, sendo que a grande maioria concentrava as discussões em torno de processos de construção dos números reais e propriedades de corpo ordenado completo e alguns poucos textos que se dedicavam a debater concepções de ensino ou o conhecimento do professor, dando protagonismo aos números reais em si o que

[14]Todos os Trabalhos de Conclusão Final estão disponíveis em http:// www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes.

nos fez optar por excluir da discussão os trabalhos que vieram através desse termo de busca.

Para o termo “Cantor”, observamos quatro registros dos quais dois concentram-se na área de matemática e não propõem qualquer intervenção pedagógica no ensino básico. As outras duas, curiosamente a mais recente - Camargo (2019) e a mais antiga - Freitas (2014) - nesse tópico, trazem enfoques pedagógicos em torno da distinção de infinitos proposta por Cantor. A linguagem de ambos está centrada na contemplação de professores, embora Camargo (2019) traga em seu relato uma linguagem acessível a alunos, além de comentários sobre suas impressões quanto as atividades aplicadas e uma exposição sobre infinito em outras áreas do conhecimento. O autor destaca a inconsistência da hipótese do contínuo a partir das contribuições de Godel, enquanto que Freitas (2014) utiliza a construção do conjunto de Cantor em associação com séries geométricas e fractais.

Ambos os trabalhos fazem uma apresentação rigorosa do conceito matemático de infinito, mas Camargo (2019) destaca-se ao propor uma sequência didática comentada a ser aplicada em turmas da 1ª série do ensino médio, onde os temas conjuntos e funções são mais frequentemente abordados. Enquanto Camargo (2019) faz uma construção rigorosa de $\mathbb{R}$ utilizando classes de equivalências de sequências de Cauchy para apresentar a teoria dos números transfinitos, Freitas (2014) constrói o conjunto de Cantor a partir de conceitos da análise real (corpo, intervalos, sequências, séries) e prova propriedades surpreendentes do mesmo como o fechamento e a não enumerabilidade que lhe serve de argumento para afirmar que $\mathbb{R}$ também é não enumerável e que tais propriedades são responsáveis pela atratividade desse conteúdos para os jovens do ensino médio.

Sobre a constante de Euler fizemos duas buscas distintas: “número de Euler”, obtendo três trabalhos e “número e”, obtendo quatro trabalhos dos quais dois não tem exatamente a ver com o que investigamos aqui[15] e portanto não entraram na análise.

Os trabalhos alocados na primeira busca convergem na importância e versatilidade da constante de Euler que, costuma surgir como um resultado do cálculo diferencial e integral, mas se apresenta na Análise matemática, Teoria das funções, Matemática financeira, Probabilidade, Geometria, Estatística e Teoria dos Números conforme Figueira (2017). Os autores dos trabalhos mencionados aqui fazem uma abordagem histórica da constituição conceitual de e relacionando com os logarit-

[15]Os títulos desses dois trabalhos que excluímos trazem a letra “e” como palavra autônoma, daí sua inclusão pelo buscador do site.

mos de Napier, além de fazer diversas caracterizações pertinentes. Embora os três estejam claramente destinando seus trabalhos a ampliação do conhecimento dos professores no tocante a prática do ensino médio, não encontramos propostas de atividades destinadas a alunos desse segmento em Figueira (2017). Villani (2017) é quem mais se dedica a aplicabilidade desse tema no ensino médio, sugerindo uma abordagagem que conjuga a função exponencial e modelos matemáticos para decaimento radioativo, lei do resfriamento de Newton, estudo de epidemias em populações e investimento de capitais que já são temas habituais nas disciplinas do Ensino Médio. Santos (2016) concentra sua abordagem em problemas de contagem e probabilidade onde há a ocorrência do número de Euler e sugere ao final uma aplicação no ensino básico centrada na capitalização contínua e no estudo intuitivo de limites, acreditando ser um ponto positivo de conexão dos alunos com temas da matemática do ensino superior.

No segundo grupo de trabalhos que trataram do número e, encontramos em Vasconcelos (2013) uma exposição mais centrada na matemática, onde o autor objetiva apresentar e como limite infinito de uma sequência, bem como demonstrar sua existência, irracionalidade e transcendência. De modo que podemos apontar esse trabalho como direcionado a ampliação do conhecimento dos professores. O capítulo final traz uma série de exercícios sugeridos, mas não há indicações da propositividade dos mesmos, apenas a resolução de alguns e na sequência sugestões de questões similares. Damos destaque a primeira sugestão que pede a verificação do limite $\lim \left(n + \frac{1}{n}\right)^n$ para valores cada vez maiores de n. Já o trabalho de Lima (2016) segue numa vertente ligeiramente distinta, aproximando-se bastante da modelagem como proposta por Villani (2017), o autor traz uma discussão qualitativa sobre os resultados de um questionário em que tentou perceber questões da prática docente com respeito a metodologia de ensino das exponenciais, contando com professores das redes pública, privada e de pré-vestibulares além de sugerir uma sequência didática gradativa, no que diz respeito ao esforço cognitivo exigido dos alunos em cada passo: começando por potenciação de base e expoente racionais, ela avança até situaçãoes como $2^{\sqrt{2}}$ e outras que fazem uso do número de Euler nas resoluções de equações exponenciais e logarítmicas, modeladoras de fenômenos que ampliam os exemplos propostos por Villani (2017).

Ao buscar com o termo “número PI”, tivemos o retorno de quatro trabalhos. Um destinado a fazer uma exposição elementar, nas palavras do autor, as demonstrações da irracionalidade e transcendência do número π a partir de ferramentas do cálculo.

Este primeiro trabalho está mais direcionado a aprofundamentos do conhecimento do professor em aspectos técnicos do conteúdo, apenas o capítulo final faz uma breve discussão pedagógica do tema a partir de problemas do cálculo aproximado e iterativo de $\sqrt{2}$. Chamamos atenção para o fato do autor atribuir o surgimento dos irracionais com as discussões sobre a diagonal do quadrado de lado unitário, o que resguarda em si uma imprecisão histórica[16].

Os quatro trabalhos convergem quanto a apresentar uma abordagem histórica da constituição do π em termos de conceito, simbologia e cálculo de aproximações ainda que no primeiro trabalho exposto no parágrafo anterior esse desenvolvimento seja bem menor e menos detalhado. O enfoque maior desses trabalhos se dá no problema das quadraturas e adapatação do método de exaustão devido a Arquimedes. Os trabalhos estão direcionados para a expansão do repertório conceitual dos professores, mas também contam com sugestões de atividades com intencionalidade, diretrizes para execução e comentários para o professor no tocante a construções geométricas - Pereira (2013) - uso de planilhas eletrônicas - Ribeiro (2014) e história da matemática como recurso pedagógico de transposições didáticas - Roveran (2015).

Os números de Liouville são o primeiro exemplo na história da existência de números transcendentes. Sabemos que todo número transcendente é irracional e a partir dessa reflexão decidimos analisar e incluir os resultados na revisão de literatura ainda que esse conteúdo não esteja prescrito para o ensino básico por nenhum documento oficial e na graduação apareça em momentos bastante específicos de disciplinas já avançadas de Análise sendo muitas vezes um tópico omitido. Buscando pelo termo "números de Liouville", encontramos três registros, pensamos que tais trabalhos se destinariam excepcionalmente a contribuir com a formação do professor e nos objetivos pautados pelos autores tivemos essa confirmação, no entanto o terceiro trabalho que analisamos nessa perspectiva, Amarante (2017), apresenta uma proposta didática com exercícios e orientações (sendo o único deste segmento com essa proposta.

Apontamos que os exercícios propostos em Amarante (2017) estão em dissonância com autores da nossa revisão de literatura propõem, pois trazem situações com um grau de abstração elevado e trabalhoso para o que se pode esperar dos alunos do Ensino Médio. Os exercícios mais simples giram em torno de nomenclatura e classificação dos algébricos em inteiros ou racionais e dos transcendentes, o que se constitui em um esvaziamento de sentido que tradicionalmente já estigmatiza os

[16] Detalharemos a respeito no Capítulo 3

irracionais no ensino básico. Registramos que o autor evoca, em sua conclusão, as dificuldades quanto ao ensino de espécies numéricas orientando os docentes a contextualizar matematicamente esses números nas situações-problema e em seguida propõe que se ensine números algébricos relacionados aos polinômios e critérios de classificação, assim como uma atividade didática que solicita uma pesquisa dos alunos sobre as aplicações práticas dos números de Liouville e o cálculo de suas aproximações iterativamente, quando ele mesmo reconhece que estes números não estão vinculados a alguma aplicação concreta e sua importância decorre de terem viabilizado a verificação da existência dos números transcendentes e a transcendência de números como e e π.

Registramos ainda nessa seção, a afirmação por parte de Oliveira (2015) de que os irracionais são apresentados no ensino básico como números que não podem ser escritos como frações e que isso permite a boa compreensão da irracionalidade de $\sqrt{2}$, um contrassenso com os autores apresentados em nossa revisão e também com nossos pensamentos e observações.

Os termos "transcendência" e "transcendentes" deram-nos cinco e dez trabalhos respectivamente, dos quais três foram contemplados nas análises dos parágrafos anteriores. A estrutura dos trabalhos que surgem, nesse momento, guardam muitas similiaridades como o apoio na crença da história como ferramenta educacional para a abordagem dos números, aliás observamos uma tendência dos autores desse bloco em discutir a expansão da ideia conceitual de número pelo tempo, ao avançar em tópicos abstratos como demonstrações da transcendência de números. Grande parte dos autores apoia-se no avanço dessas teorias no sentido de ampliar o repertório de conhecimento do professor, disponibilizar material em linguagem acessível sobre esse tema, que é escasso, e despertar no leitor fascínio por essa teoria.

A estrutura temática também é bastante análoga: divisibilidade, corpos ordenados, aproximações racionais de números irracionais, enumerabilidade e por fim teoria dos números transcendentes com demonstrações da irracionalidade e transcendência de e, π e constante de Liouville. Quanto as propostas de intervenções pedagógicas, a maioria de autores desse bloco ou fez uma construção elementar dos conjuntos numéricos assentando as sequências didáticas na representação dos irracionais como decimais não exatos e não periódicos que não podem ser escritos como razões de inteiros sem discutir a razão dessa equivalência e no tratamento operacional desses números ou apelou para a história da matemática como metodologia, nesse sentido queremos registrar que todos os autores atribuem o surgimento dos irracionais ao pitagorismo da Grécia antiga e reforçam a teoria da crise que o aspecto conceitual desses números teria causado.

Dentro desse bloco queremos ressaltar as propostas didáticas de Carvalho (2018) que indica um site onde os alunos podem verificar a presença de qualquer número inteiro na expansão decimal de π exibindo o número, sua localização e a vizinhança numa abordagem que envolve tecnologia e permite ao professor construir uma série de atividades que enfatizam a arbitrariedade da expansão decimal desse número intrigante, deslocando a questão da irracionalidade para discussões mais aprofundadas que a mera menção do fato. Destacamos ainda Oliveira (2015) que propôs um questionário a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio, que pretendiam sondar o sentido de número e das diferentes espécies numéricas construídas por esses alunos ao longo de seu trajeto estudantil para que depois fosse constituída uma proposta de elucidação dos conteúdos em aulas além de uma palestra proferida aos alunos do Ensino Médio. Por fim, neste segmento, temos Faria (2019) que propôs uma sequência didática investigativa com demonstrações por contradição da irracionalidade de radicais, onde o professor guia os passos da demonstração, provocando os saberes prévios do aluno para cada passo necessário da demonstração, além disso aborda os cortes de Dedekind e as propriedades operatórias com calculadora.

Quanto a pesquisa com os termos “número de ouro” (15 registros), “razão áurea” (19 registros) e “PHI” (4 registros), observamos a tendência contrária ao que se verificou nos temas relacionados a números transcendentes, onde a temática desenvolvida era distante das sugestões didáticas, que em sua maioria traziam a superficialidade criticada e se aproximavam dos exercícios paradigmáticos dos livros didáticos do ensino básico. Aqui a maioria dos trabalhos traz sua intervenção pedagógica levando em conta a história do número de ouro, processos de construção geométrica manuais (Azevedo (2013)) ou com softwares como o Geogebra (Castro (2017)) ou diferentes contextualizações que vão desde a presença do número ϕ nas artes visuais (Melo (2017) e Landim (2014)), na biologia (Silveira (2018)) ou a própria matemática em associação com sequências, em especial a sequência de Fibonacci, para daí explorar os conteúdos matemáticos pertinentes (Santos (2013), Ramos (2013), Silva (2015), Queiroz (2013), Sodré (2013) entre muitos outros).

Usando “irracionais” e “irracional” como chave de busca encontramos respectivamente 17 e 11 registros, entre esses, sete já tinham sido encontrados e analisados anteriormente. Para este momento da revisão, percebemos uma alternância nas concepções e escolhas de abordagens dos autores: alguns pretenderam subsidiar a investigação do ensino desses números, fornecer propostas de intervenções didáticas diferenciadas e até inovadoras e outros apenas ampliar o conhecimento do docente que vai atuar nestes segmentos de ensino e desenvolveram a temática num eixo mais conteudista e formal com sugestões de intervenção próximas do que vemos nos livros didáticos dos referidos anos escolares ou se desviaram até dessa contribuição.

Encontramos em Félix (2018), Vasconcelos (2016) e Santos (2013) análises consistentes com relação a apresentação do tema em livros didáticos de grande saída no país. Em Félix (2018) encontramos ainda uma discussão sobre a utilização dos números irracionais (ou melhor dizendo de suas aproximações) já no antigo Egito e em Santos (2014) uma crítica mais consistente a ideia do surgimento dos irracionais somente no pitagorismo grego, pensamento que foi bastante recorrente ainda nos trabalhos alocados dentro desses dois termos. Destacamos ainda Mosca (2013) e Vasconcelos (2018), que trazem a discussão do ensino dos números irracionais na perspectiva do PCN.

De todos os trabalhos desse quinhão, as apresentações de Mózer (2013) e Santos (2013) merecem atenção! Enquanto Mózer (2013) tece um quadro de exemplos da impossibilidade de certos fatos ocorreram por conta da irracionalidade dos números envolvidos, manifestando os irracionais de forma qualitativa fora da geometria, em áreas onde o uso desses números não é nada óbvio como aritmética e combinatória. A autora ainda propõe uma série de atividades motivadoras que exploram o conteúdo matemático dentro dos exemplos investigados. Santos (2013), por sua vez, propõe atividades de simples exequibilidade que retiram a extrema abstração tipicamente atribuída aos números irracionais. Um dos objetivos da autora é por em prática novamente nas salas de aula o uso dos instrumentos de desenho geométrico, é nesse sentido que ela traz um processo geométrico de verificação de comensurabilidade de dois segmentos acompanhado de uma demonstração que ao nosso ver é acessível para os alunos do ensino básico. A autora propõe ainda uma série de sequências didáticas baseado nas ideias por ela abordadas, onde esclarece a duração prevista, o conteúdo abordado, os materiais necessários, pré-requisitos os objetivos bem como um relato detalhado da aplicação dessas atividades e em seus anexos folhas de respostas dos alunos.

Dos trabalhos concentrados no viés da formação do professor destacamos aqueles que apresentam exposição sobre a expansão dos irracionais em frações contínuas como alternativa para a expansão decimal infinita. Três trabalhos que se concentraram nesse viés da temática: Nascimento (2013), Oliveira (2013) e Noleto (2014), trouxeram uma abordagem história e sugeriram aos professores abordagens de alguns contextos da física, da álgebra e do calendário gregoriano como aplicações das frações contínuas. Ainda no que se refere a uma abordagem alternativa ao que temos com frequência no ensino básico, vemos em Pinto (2018) e Mosca (2013) alternativas para o Ensino Médio envolvendo critérios de irracionalidade, demonstrações geométricas de incomensurabilidade e resolução de equações por métodos não analíticos, dos quais o segundo autor tem maior foco, lançando mão de uma simbiose com métodos numéricos e tecnologias. Em termos de abordagens com apelo tecnológico, temos em Armão (2018) uma proposta de trabalho com o irracional π envolvendo robótica educacional com alunos do 7º ano fundamental da rede privada. O autor desenvolve a teoria matemática dos conjuntos numéricos, bem como um estudo sobre o número π e seu desenvolvimento perante a história para em seguida descrever o contexto da matemática na tecnologia através da robótica educacional. Os planos de aula desenvolvidos são apresentados com relatos de aplicação, constando resultados das atividades propostas além de trazer nos apêndices de materiais para reaplicação das atividades.

Os demais trabalhos desta parte da pesquisa utilizam a formação do professor em profundidade como objetivo maior e seus textos concentram-se muito mais em teorias que escapam ao escopo da etapa básica de educação, desviando-se de apresentar propostas didáticas consistentes ou apresentando-as com algum grau de discrepância entre os conteúdos abordadas pelos autores. É importante ater-nos ao fato de que a formação não ocorre apenas com conteúdo sem transposição didática.

Em Burle Neto (2013), propõe-se uma aula para explanação de Potência de expoente irracional para alunos do terceiro ano do Ensino Médio, utilizando conceitos como limite e convergência de sequências e sequências de Cauchy. O autor não elenca estes assuntos na seção "pré-requisitos," mas utiliza no avanço da sua exposição que é toda em tom de sugestão de planejamento para o professor. Por diversas vezes ressalta que o rigor e a formalização precisam ser evitados, mas não indica como isso pode ser feito dentro da sua exposição que se vale de formalismo. Sugere ainda o uso substancial da calculadora como modo de economizar tempo em contas trabalhosas e extensas, mas não encontramos observações quanto aos cuidados que se deve ter para compreender a eficiência de uma aproximação.

Em suas conclusões o autor afirma prever uma dificuldade de abordagem maior na rede pública de ensino do que em boas escolas da rede particular, pois nessas últimas o alunado tem uma base matemática sólida capaz de eliminar as dificuldades na compreensão dos conteúdos ensinados, visto que já viram em séries anteriores os conteúdos mencionados como pré-requisitos. Isto se faz ambíguo com a menção e o uso dos pré-requisitos do autor: não sabemos se ele refere-se aos mencionados (resolução de equações e inequações do 1º e do 2º grau, resolução de inequações modulares, função quadrática, função exponencial e método de demonstração por absurdo) cuja abordagem é pautada por documentos curriculares nacionais e a não abordagem é um problema significativo, passível de investigação científica para apontar causas e soluções ou se refere-se a limites, sequência e convergência (amplamente utilizados na abordagem), que nas palavras do próprio autor, a imensa maioria das escolas do país não trata desses temas na educação básica, o que está em conformidade com os documentos oficiais.

Os argumentos que lançamos mão nas observações desse trabalho tentam chamar a atenção para o que se chama de inversão didática na teoria da transposição didática[17] que ocorre quando o processo de transformação e seus recursos ocupam o espaço de primazia que o saber a se ensinar tinha no objetivo inicial da transposição. No caso em análise, o autor argumenta que as potências de expoente irracional são omitidas na sequência de ensino de potenciação no ensino básico, em parte por sua dificuldade, e que seu objetivo era montar uma exposição que preenchesse esta lacuna, mas na exposição vemos que a menção de termos como limite, sequência e critérios de convergência ocupa um espaço central. A compreensão da natureza conceitual de um número irracional e do significado de suas aproximações racionais a priori são ferramentas suficientes para entender como o cálculo com expoente irracional funciona e como o resultado converge na direção de um número irracional quanto melhor for a aproximação racional do expoente.

[17]A teoria da transposição didática foi elaborada pelo didata Chevallard em 1991 e trata do processo de transformação que um saber científico passa para se constituir como um saber a se ensinar.

Capítulo 2

No conhecimento do professor de matemática da educação básica

Ao compor nossa revisão de literatura, percebemos que muitos pesquisadores indicam uma série de deficiências conceituais na formação dos professores. Nos livros didáticos, notamos uma apresentação do tema marcada por exercícios mecânicos pautados muito mais em memorização do que em compreensão. Este capítulo dedica-se então a dialogar com o professor de matemática da educação básica para apresentar a ele os fatos mais relevantes que caracterizam os números irracionais algebrica e geometricamente.

Optamos por começar com uma revisão de elementos primordiais da aritmética dos inteiros que serão fortemente utilizados como esteio de muito do que vamos apresentar. Na sequência falamos de representações decimais e da dicotomia entre racionais e irracionais o que nos oferece uma base conceitual para caracterizar algumas classes de irracionais (radicais aritméticos, logaritmos e razões trigonoméricas) e a partir daí caracterizar as propriedades operatórias que envolvem esses números. As seções finais falam da dicotomia entre números transcendentes e algébricos, ainda que este não seja um tema propriamente integrante do ensino básico atual, muitos números transcendentes como π, e podem ser explorados dentro do Ensino Médio, portanto apresentamos a demonstração da irracionalidade desses números pensando na ampliação do cionhecimento do professor.

2.1 Preliminares de aritmética

A aritmética dos inteiros guarda importantes definições e teoremas que faremos uso com frequência nas seções seguintes. Esta seção presta-se a compilar todas essas informações, as quais precisaremos recorrer e que foram apresentados em Hefez (2016), livro texto indicado para a disciplina Aritmética do PROFMAT.

Definição 2.1. Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, dizemos que b é divisor ou fator de a, se existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot q$ e escrevemos $b \mid a$.

O Teorema 2.2 é um importante resultado da Teoria dos Números que dá abertura a muitos outros resultados relevantes.

Teorema 2.2 (Teorema da divisão euclidiana)**.** *Dados* $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ *existe um único par de inteiros* (q, r) *tal que* $a = bq + r$*, com* $0 \leq r \leq b - 1$*.*

Quando b não é fator de a temos que $a = bq + r$, onde os inteiros q e r são ditos quociente e resto respectivamente. Neste caso podemos escrever $b \nmid a$.

Dois inteiros distintos a e b apresentam sempre ao menos um divisor em comum. Em particular, interessar-nos-emos pelo maior desses divisores que é chamado m.d.c (máximo divisor comum) e é denotado por (a, b). No caso mais restrito $(a, b) = 1$, dizemos que a e b são coprimos. Em geral, para fazer as demonstrações sobre a irracionalidade dos números convém supor que numerador e denominador sejam coprimos o que se chama de fração irredutível.

Definição 2.3. Quando o conjunto de divisores positivos de um inteiro consiste apenas do número 1 e desse mesmo inteiro ele é dito primo.

Com exceção do número 1, que apresenta apenas um divisor positivo (que é ele mesmo), todo inteiro que não é primo é chamado composto.

O Teorema a seguir ocupa também uma posição central na Teoria dos Números e será um conhecimento chave por nós evocado para definir duas classes importantes de irracionais nos teoremas das seções 2.5 e 2.6.

Teorema 2.4 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número inteiro maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

2.2 Representações decimais, números racionais e irracionais

A notação posicional na escrita numérica representa um grande avanço computacional no desenvolvimento da matemática. Nosso sistema de numeração é dito decimal, pois se utiliza dos dez símbolos conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ e } 9\}$ para escrever qualquer número.

O valor que um algarismo denota, na escrita de um número, depende da posição que esse algarismo ocupa, da esquerda para a direita, nessa escrita. Assim cada algarismo de um número possui uma ordem, também contada da direita para a esquerda, que indica o seu valor relativo por produtos com potências de dez. Da direita para a esquerda, o algarismo que está na posição mais a direita tem ordem 1 e seu valor relativo é igual ao absoluto, o seguinte tem ordem 2 e seu valor relativo é dez vezes o valor absoluto, o seguinte tem ordem 3 e seu valor relativo é cem vezes o valor absoluto e assim por diante. Ao reunirmos um grupo de três ordens, da direita para a esquerda, temos uma classe. Veja a Figura 2.1.

Figura 2.1: Classes e ordens sistema posicional de numeração

Classe do Milhão			**Classe do Milhar**			**Classe das Unidades**		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de Milhão	Dezenas de Milhão	Unidades de Milhão	Centenas de Milhar	Dezenas de Milhar	Unidades de Milhar	Centenas	Dezenas	Unidade

Fonte: O autor, 2020

Os sistemas de numerações posicionais resultam numa aplicação do Teorema da Divisão Euclidiana. Vejamos o Teorema 2.5:

Teorema 2.5. *Dados os inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$, existem inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \ldots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, únicos, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n$.*

Demonstração. Utilizaremos indução completa sobre a. Se $0 < a < b$, tomamos $n = 0$ e $r_0 = a$, obviamente temos a unicidade neste caso. Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, onde $a \geq b$, vamos prová-lo para a.

Do Teorema 2.2, sabemos que existem q e r, únicos, tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Dado que $0 < q < a$, pela hipótese de indução, sabemos que existem os inteiros $m \geq 0$ e $0 \leq r_1, \ldots, r_{m+1} < b$, com $r_{m+1} \neq 0$, únicos tais que $q = r_1 + r_2 b + \ldots + r_{m+1} b^m$.

Assim, $a = bq + r = b(r_1 + r_2 b + \ldots + r_{m+1} b^m) + r$, quando pomos $r = r_0$ e $n = m + 1$, o resultado segue imediatamente:

$$a = r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n + r_0 \tag{2.1}$$

$\square$

Exemplo 2.6. O símbolo do número vinte e cinco é 25, onde o algarismo cinco indica de fato cinco unidades, já que ocupa a primeira ordem, mas o algarismo 2 simboliza duas dezenas ou vinte unidades uma vez que está na segunda ordem. O símbolo do número cinquenta e dois utiliza os mesmos dígitos, mas inverte suas ordens, alterando o valor posicional assumido por estes. Assim quando escrevemos 52 subentende-se que o algarismo cinco agora indica cinco dezenas ou cinquenta unidades, já o 2 denota apenas duas unidades.

A expressão 2.1, dada pelo Teorema 2.5, é chamada de expansão relativa à base b, particularmente, quando $b = 10$, essa expressão é chamada expansão decimal. O Teorema 2.5 também nos dá um algoritmo para obtermos a expansão de um número qualquer em uma base b. O método consiste em executar uma série de divisões sucessivas, onde os restos ocupam as ordens na escrita numérica conforme sua obtenção na sequência de divisões:

$$a = bq_0 + r_0, \quad r_0 < b,$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, \quad r_1 < b,$$

$$q_1 = bq_2 + r_2, \quad r_2 < b,$$

e assim sucessivamente, até que em certo ponto, teremos

$$q_{n-1} < b,$$

mas como $q_{n-1} = bq_n + r_n$, decorre que

$$0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \ldots,$$

e portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \ldots$. O que nos leva a $a = r_0 + r_1 b + \ldots + r_n b^n$.

Exemplo 2.7. Vamos aplicar o algoritmo acima para o inteiros 2915 para obter sua expressão decimal:

$$2915 = 291 \cdot 10 + 5$$

$$291 = 29 \cdot 10 + 1$$

$$29 = 2 \cdot 10 + 9$$

Assim $2915 = 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$.

Esta observação usualmente é omitida[1], mas tal procedimento para obter a representação decimal é extensiva a parte fracionária do número. Por exemplo:

$$834,25 = 8.10^2 + 3.10^1 + 4.10^0 + 2.10^{-1} + 5.10^{-2}$$

Isso nos motiva a seguinte definição:

Definição 2.8. Uma expressão decimal é um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$$

onde a_0 é um número inteiro e $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ são os dígitos da expressão decimal α.

Exemplo 2.9. Obter a forma decimal de $\frac{15}{4}$

$$15 = 4 \cdot 3 + 3$$

O resto desta divisão é 3 unidades que equivalem a 30 décimos o que nos leva a divisão seguinte:

$$30 = 4 \cdot 7 + 2.$$

Aqui devemos entender que o resto 2 indica dois décimos o que equivale a 20 centésimos

$$20 = 4 \cdot 5.$$

A vírgula surge como símbolo que separa a parte inteira da parte decimal que se inicia quando "convertemos" 3 unidades em 30 décimos. Assim temos:

$$\frac{15}{4} = 3,75.$$

Naturalmente é mais interessa executar (e executamos sempre) esse processo da forma mais sintética possível, sobretudo quando a extensão da representação decimal vai ficando cada vez maior, como no caso de $\dfrac{7}{16}$. Há casos ainda em que esse processo é infinito como em $\dfrac{13}{7} = 1,\overline{857142}\ldots$[2]

[1]Incentivamos o professor a fazer essa conexão o que tende a ampliar a percepção dos alunos quanto ao processo de obtenção da representação decimal após a vírgula evitando o surgimento de dúvidas e obstáculos didáticos.

[2]Utilizaremos a barra sobre os algarismos após a vírgula para indicar que eles se repetem periodicamente na mesma ordem que estão exibidos sob a barra.

Estes exemplos motivam-nos ao seguinte questionamento: haverá como distinguir se a parte fracionária de uma representação decimal termina sem necessariamente efetuar a divisão? E como saber de antemão se essa representação vai ser periódica?

Estes questionamentos evocam a dicotomia entre números racionais e irracionais. Como verificamos na revisão de literatura, existem professores que não compreendem a equivalência entre as definições apresentadas usualmente para os números racionais na educação básica.

Definição 2.10. Um número racional é um número que pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Os resultados que provaremos a seguir, permite-nos compreender a equivalência entre as definições que são usualmente apresentadas no Ensino Médio segundo Pommer (2012), isto é, a divisão de dois inteiros ter sempre uma representação decimal finita ou infinita periódica, o que significa que somente estes números são racionais.

Teorema 2.11. *A divisão entre dois números inteiros é um decimal finito ou infinito e periódico.*

Demonstração. O Teorema 2.2 garante que todo inteiro admite um par q e r únicos tal que $a = bq + r$. Se $r = 0$ então $b|a$ e $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ e tem uma representação decimal finita. Se $r \neq 0$ então o cálculo da parte fracionária continua a partir de $\frac{r_i}{b}$ onde $r_i \in \{1, 2, \ldots b-1\}$ são os sucessivos restos obtidos na iteração do processo de divisão. Se algum elemento desse conjunto é tal que $b|10r_i$ então a representação decimal encerra com o quociente dessa divisão, do contrário o processo continua a ser iterado até que após b divisões algum r_i vai repetir-se, ocasionando uma sucessão de quocientes repetidos que formará o período da parte fracionária. □

Os Teoremas a seguir oferecem um critério de verificação para quando o quociente de inteiros indica uma representação decimal finita ou infinita e periódica.

Teorema 2.12. *Um número racional na forma irredutível $\frac{a}{b}$ tem representação decimal finita se e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.*

Demonstração.

$$\frac{a}{b} = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \Leftrightarrow$$

$$\frac{10^n a}{b} = 10^n a_0 + a_1a_2a_3 \ldots a_n$$

Observando o segundo membro da última igualdade percebemos que se trata de um número inteiro. Isso quer dizer que $b|10^n a$ mas como $b \nmid a$ então $b \mid 10^n$, portanto a fatoração por primos de b tem apenas 2 e 5 como fatores.

Por outro lado, se $b = 2^m 5^k$ para $m, k \in \mathbb{N}$, suponhamos $m < k$, assim,

$$\frac{a}{2^m 5^k} = \frac{a}{2^m 5^k} \cdot \frac{2^{k-m}}{2^{k-m}}$$

$$= \frac{a \cdot 2^{k-m}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{a \cdot 2^{k-m}}{10^k}.$$

Estendendo o algoritmo sugerido no 2.5 à expansões decimais na base b conforme fizemos no exemplo 2.9 concluímos que $\dfrac{a \cdot 2^{k-m}}{10^k}$ tem uma expansão decimal finita. Supondo $m > k$, ao multiplicando o numerador e o denominador da fração por 5^{m-k}, obtemos $\dfrac{a \cdot 5^{k-m}}{10^k}$, o que nos levará as mesmas conclusões. □

Corolário 2.13. *Um número racional possui representação decimal infinita e periódica, se e somente se, quando escrito na forma irredutível, a decomposição em fatores primos do denominador apresenta outros fatores primos além de 2 e 5.*

Demonstração. É a contrapositiva do último Teorema. □

Chamaremos as representações decimais infinitas e periódicas de dízimas periódicas e a fração de inteiros correspondente de fração geratriz. Em 2.12 temos um método para obter a fração de um certo número racional a partir de sua representação decimal finita, podemos fazer algo semelhante para obter as frações geratrizes das dízimas periódicas:

$$x = \alpha, a_1 a_2 \ldots a_r \overline{b_1 b_2 \ldots b_s} \ldots \tag{2.2}$$

$$10^r x = \alpha a_1 a_2 \ldots a_r, \overline{b_1 b_2 \ldots b_s} \ldots \tag{2.3}$$

$$10^{r+s} x = \alpha a_1 a_2 \ldots a_r b_1 b_2 \ldots b_s, \overline{b_1 b_2 \ldots b_s} \ldots \tag{2.4}$$

Subtraindo membro a membro as equações 2.4 e 2.3, teremos

$$10^r.x(10^s - 1) = \alpha a_1 a_2 \ldots a_r b_1 b_2 \ldots b_2 - \alpha a_1 a_2 \ldots a_r$$

$$x = \frac{\alpha a_1 a_2 \ldots a_r b_1 b_2 \ldots b_s - \alpha a_1 a_2 \ldots a_r}{10^r (10^s - 1)}.$$

A fração geratriz de uma dízima periódica tem por numerador a diferença entre o inteiro formado pela concatenação da parte inteira com os dígitos da parte fracionária não periódicos e do primeiro período completo, menos o inteiro determinado pela parte inteira, juntamente com os dígitos não periódicos da parte fracionária, e o denominador é o inteiro com tantos noves em sua escrita quanto forem os algarismos não periódicos seguido de tantos zeros quanto forem os algarismos não periódicos, como se costumava dizer em antigos compêndios de aritmética.

Exemplo 2.14. Ao aplicar esse procedimento ao número $0,\bar{9}$ obtemos um resultado curioso.

$$x = 0,\bar{9} \tag{2.5}$$

$$10x = 9,\bar{9} \tag{2.6}$$

De 2.6 - 2.5 vem

$$9x = 9 \Longrightarrow x = \frac{9}{9} \Longrightarrow x = 1.$$

Devemos observar que na definição de expressão decimal fica o seguinte fato:

$$\alpha = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

O somatório na última expressão indica uma soma com infinitas parcelas, contudo isto não faz sentido! Na verdade o que temos é o valor de α aproximado pelo racional $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_n}{10^n}$ com erro inferior $\frac{1}{10^n}$. Assim, o exemplo 2.14 está nos contando que 0,9, 0,99, 0,999, ... são aproximações para 1.

Sendo 1,0000... = 0,9999... somos levados a observar que toda representação decimal finita admite um formato infinito e periódico, isto dá as frações como no Teorema (2.12) duas representações decimais essencialmente distintas.

Exemplo 2.15.

$$1,3 = 1,2 + 0,1 = 1,2 + 0,0\bar{9} = 1,299999999\ldots = 1,2\bar{9}$$

$$2,345 = 2,344 + 0,001 = 2,344 + 0,000\bar{9} = 2,344999999999\ldots = 2,344\bar{9}$$

Assim podemos “simplificar” a dicotomia entre racionais e irracionais da seguinte forma: todo número que admite representação decimal infinita e não-periódica é irracional e todo número cuja representação decimal é infinita e periódica é racional.

Em toda essa discussão deve ficar claro que: não se pode obter números irracionais a partir da divisão entre dois inteiros! Então de onde vem os irracionais?

2.3 Representações decimais, segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Historicamente, os irracionais surgem no contexto das grandezas e medidas, quando nas civilizações Pré-helênicas, estes eram caracterizados como operadores em cálculos aproximados da área de uma região circular ou diagonais de um quadrado (conforme veremos em detalhes na seção 3.1).

Já na Grécia Antiga, o pensamento grego que privilegiava a abstração no desenvolvimento da matemática dá uma configuração mais formal a esta discussão. Os gregos acreditavam numa correspondência plena entre segmentos de reta e números racionais. Vamos usar linguagem moderna para ilustrar essa ideia: seja AB um segmento de reta, podemos medi-lo ao estabelecer um segmento-padrão u como unidade de medida (ou segmento unitário). Se em AB podemos justapor k segmentos de magnitude u a partir de $k-1$ pontos igualmente espaçados entre si, então $\overline{AB} = k \cdot u$. Contudo é possível que o segmento u não caiba um número inteiro de vezes em AB, se possível, tomamos então um segmento de reta $w < u$, tal que $u = n \cdot w$ e $AB = m \cdot w$, neste caso $\overline{AB} = \dfrac{m}{n}$, dizemos então que AB e u são comensuráveis, isto é, podem ser mensurados por uma mesma unidade de medida, vemos então que a noção de comensurabilidade conduz à noção de fração.

A ideia de que dois segmentos eram sempre comensuráveis permaneceram no pensamento grego até esbarrar na diagonal do quadrado. Segundo Roque e Pitombeira (2012), a existência do mdc de dois inteiros quaisquer pode ter motivado essa crença já que o mdc era entendido como uma medida comum para dois números. Para esses autores, justamente a contraparte geométrica do cálculo do mdc de dois inteiros é que provavelmente deu conta de trazer a tona a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado. Tal método é conhecido como antifairese e será apresentado na Seção 3.2.1, aqui utilizaremos a linguagem dos dias atuais a ilustração do que é feito normalmente nos textos quando se quer demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$:

Dado o quadrado $ABCD$ tomando o lado AB como segmento unitário, se de fato $\overline{AC} = \dfrac{m}{n}$, do Teorema de Pitágoras teríamos:

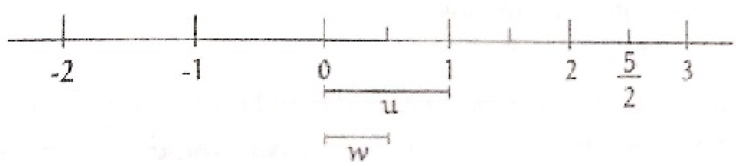
$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \Longrightarrow m^2 = 2n^2.$$

Em decorrência do Teorema 2.4, sabemos que m^2 apresentará o fator 2 elevado a um expoente par, enquanto que pelas mesmas razões, $2n^2$ deve apresentar uma quantidade ímpar pra expoente do 2, revelando uma contradição que torna impossível a igualdade, estabelecendo a existência de segmentos incomensuráveis e explicitando a insuficiência dos inteiros e racionais para medir todos os segmentos de reta.

Segundo Lima et al. (2016) a maneira mais simples de descrever o conjunto dos números reais é como corpo ordenado completo. As propriedades de corpo ordenado também se fazem presente no conjunto dos números racionais, sendo a propriedade de completeza sua única distinção para $\mathbb{R}$, dessa forma a complementaridade entre $\mathbb{Q}$ (racionais) e $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ (irracionais) é o que faz da reta o modelo geométrico do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

De fato, seja uma reta e donde tomamos o ponto O para determinar duas semirretas: a direita de O definimos o ponto A que será o sentido positivo da reta e de modo que OA será o segmento unitário. Seja X um ponto qualquer da reta, se X está a direita de O será a abcissa de um número positivo e se estiver a esquerda será a abcissa de um número negativo. Daí temos duas possibilidades: se X é tal que $\overline{OX} = mw$ e $\overline{OA} = nw$ para algum segmento w, então X é a abcissa de um número racional - particularmente se $n = 1$, X é a abcissa de um inteiro, caso contrário OX é um segmento incomensurável com OA e portanto X é a abcissa de um número irracional, e disso temos a correspondência biunívoca entre pontos da reta e números reais[3].

Figura 2.2: Reta real



Fonte: Lima et. al, 2016

Por fim devemos alertar que o uso do termo "incomensurável" exprimindo a ideia de quantidade muito grande é absolutamente inadequado e deve ser evitado! Incomensurabilidade é uma relação entre duas grandezas, portanto não pode ser usado como sinônimo de incontável ou imenso, nestes casos é preferível utilizar imensurável ou imenso pois nada é incomensurável a menos de ser comparado com outra grandeza de mesma espécie.

[3]Essa caracterização de $\mathbb{R}$ foi o que permitiu grandes avanços na matemática do século XVI dando origem a geometria analítica e uma fundamentação mais rigorosa do cálculo.

2.4 Irracionalidade de radicais

A exemplo de como mostramos a irracionalidade de $\sqrt{2}$, podemos provar a irracionalidade de $\sqrt{p}$ com p primo e do produto de primos distintos:

Proposição 2.16. *Se p é primo, então $\sqrt{p}$ é irracional e se q é um inteiro que não possui qualquer fator p, então $\sqrt{pq}$ é irracional.*

Demonstração. Suponhamos que tal afirmação seja falsa, assim devem existir $m, n \in \mathbb{Z}$, coprimos, tais que $\dfrac{m}{n} = \sqrt{p}$. Assim,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = p \Longrightarrow m^2 = pn^2$$

Novamente temos uma contradição com o Teorema 2.4, donde esperamos somente expoentes pares na decomposição de m^2, enquanto que em pn^2 notamos que o expoente do fator p será inevitavelmente ímpar. Analogamente, se $\dfrac{m}{n} = \sqrt{pq}$ entraríamos novamente em contradição por conta dos expoentes distintos sobre pq em cada lado da igualdade, pois

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = pq \Longrightarrow m^2 = (pq)n^2.$$

□

Corolário 2.17. *$\sqrt{p} + \sqrt{q}$ é irracional se p ou q são primos distintos.*

Demonstração. Afirmar que $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ é racional implicaria na racionalidade de $(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2$, mas desenvolvendo o produto chegamos a $p + q\sqrt{p.q}$ que não é racional. □

Diante desses resultados, ampliamos os recursos para argumentar sobre a irracionalidade dos números.

Exemplo 2.18. A irracionalidade de $\sqrt{6}$ segue da Proposição 2.16, enquanto que o Corolário 2.17 nos diz que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ como irracional.

Com os mesmos argumentos, podemos generalizar a irracionalidade de $\sqrt{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i}$ onde os p_i são todos primos distintos e consequentemente de todos as raízes quadradas não-exatas.

Exemplo 2.19. $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ e $\sqrt{120} = 2\sqrt{5 \cdot 3 \cdot 2} \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$.

O próximo Teorema permite-nos atingir o maior grau de generalidade quanto a irracionalidade de radicais e para demonstrá-lo em sua totalidade, precisamos relembrar a definição da operação de radiciação.

Definição 2.20. Seja $n \geqslant 2$ e $a \geq 0$, definimos:

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

Desta definição, podemos destacar uma equivalência entre radicais e potências de expoente fracionário. Com efeito, $\sqrt[n]{a^m} = x$ é equivalente a $x^n = a^m$. Por outro lado, sabemos que para todo número real: $a^{\frac{m}{n}} = y$ é o mesmo que $\Leftrightarrow$ $a^m = y^n$. Comparando as duas igualdades vemos que $x^n = y^n$ implica $x = y$.

Dada essa equivalência entre radicais e expoentes fracionários e o Teorema 2.23, podemos facilmente estabelecer como irracional toda potência cujo expoente fracionário na forma irredutível não seja inteiro. Assim podemos manusear as propriedades dos radicais em analogia ao que fazemos com as potências.

Exemplo 2.21. $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$

Exemplo 2.22. $\sqrt[3]{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^4} = 2^2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 20\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$

Teorema 2.23. *Seja P um conjunto finito de primos distintos. São irracionais os números $\sqrt[n]{p_i^m}$ com $(m,n) = 1$ e $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{j} p_i^{\alpha_i}}$ com $p_i \in P$, para todo i natural e $(\alpha_i, n) = 1$ para ao menos um α_i.*

Demonstração. Observar que se $n|m$, então pela definição 2.20, $\sqrt[n]{p_i^m} = p_i^{\frac{m}{n}}$ é na verdade uma potência inteira de p_i. Suponhamos $\sqrt[n]{p_i} = \dfrac{a}{b}$, com $(a,b) = 1$, então $p_i b^n = a^n$, mas como $(a,b) = 1$, estes dois números não tem fatores primos em comum, o que nos permite ver quantidades distintas de fatores primos p_i em cada lado da igualdade, contrariando o Teorema 2.4, assim $\sqrt[n]{p_i}$ é irracional. Com os mesmos argumentos, analisando as expressões

$$\sqrt[n]{p_i^m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow p_i^m b^n = a^n,$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{j} p_i^{\alpha_i}} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b^n \prod_{i=1}^{j} p_i^{\alpha_i} = a^n,$$

concluímos uma contradição com Teorema 2.4 o que nos permite atestar a irracionalidade desses radicais (dados os p_i distintos e pelo menos um dos α_i não múltiplos do índice). $\square$

2.5 Logaritmos de base inteira

Os logaritmos têm grande relevância desde que revolucionaram a matemática na época de sua invenção. Nesta seção, vamos nos ater a estabelecer critérios de irracionalidade para logaritmos cuja base é um número inteiro. Relembremos a definição da operação de logaritmação:

Definição 2.24. Dado um número real positivo a, indicamos seu logaritmo na base $b \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ por $\log_b a = x \Longleftrightarrow b^x = a$.

Lema 2.25. *Sejam a e b inteiros com $b \geq 2$. Se as decomposições em primos de a ou b apresentarem pelo menos um fator incomum, então $\log_b a$ é um número irracional.*

Demonstração. Supondo por contradição que existem inteiros m e $n \neq 0$, tais que $\log_b a = \dfrac{m}{n}$, temos $b^m = a^n$, mas pelo Teorema 2.4, tal igualdade só é válida se a e b, possuírem exatamente os mesmos fatores primos, o que contradiz nossa hipótese. □

Teorema 2.26. *Sejam os inteiros $a > 0$ e $b = p_1 p_2 \ldots p_r$ onde $p_i's$ são primos distintos para todo $1 \leq i \leq r$, o número $\log_b a$ é racional, se e somente se, $a = b^q$, onde q é um número inteiro não-negativo.*

Demonstração. Suponhamos que existem inteiros m e $n \neq 0$, de modo que $\log_b a = \dfrac{m}{n}$, então o Lema 2.25 nos diz que $a = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \ldots p_r^{q_r}$. Pela definição de logaritmação temos então

$$b^{\frac{m}{n}} = a \Longrightarrow b^m = a^n \Longrightarrow$$

$$p_1^m p_2^m \ldots p_r^m = p_1^{q_1 n} p_2^{q_2 n} \ldots p_r^{q_r n} \Longrightarrow$$

$$(p_1 p_2 \ldots p_r)^m = (p_1^{q_1} p_2^{q_2} \ldots p_r^{q_r})^n \Longrightarrow$$

$$nq_1 = nq_2 = \ldots = nq_r = m \Longrightarrow$$

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_r.$$

Logo, $a = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \ldots p_r^{q_r} = (p_1 p_2 \ldots p_r)^q = b^q$. A recíproca segue de forma imediata. De fato, se $a = b^q$, onde q é um inteiro positivo ou zero, então $\log_b a = \log_b a^q = q$. □

No Ensino Médio, os logaritmos mais usais, tradicionalmente, são de base 10, chamados de logaritmos decimais cuja base costuma ser omitida na escrita da base.

Corolário 2.27. *Os números $\log a$ são irracionais, para $a \in Z$, exceto quando a é uma potência de 10.*

Demonstração. Basta observar que qualquer potência de 10 é da forma $(2 \cdot 5)^p$, onde $p \in \mathbb{Z}$. □

Exemplo 2.28. São irracionais os números $\log 2, \log 21, \log 5 + \log 3 = \log 15$

No exemplo a seguir, veremos como as propriedades operatórias dos logaritmos, podem ampliar o critério oferecido pelo Teorema 2.26.

Exemplo 2.29.

$$\begin{aligned} \log \frac{3}{2} = \log \frac{15}{10} \Longrightarrow \\ = \log 15 - \log 10 \Longrightarrow \\ = \log 15 - 1. \end{aligned}$$

Do exemplo anterior 2.28, temos $\log 15 \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$, portanto $\log 15 - 1$ também é irracional, já que tem a mesma parte decimal.

O argumento usado no exemplo 2.29 pode ser empregado sempre que pelo menos um dos termos da fração é divisor de alguma potência de 10, mas interessante seria apresentar um argumento mais abrangente sobre a irracionalidade de números da forma $\frac{m}{n}$. Pois vejamos!

Proposição 2.30. *Os números da forma* $\log_b \frac{m}{n}$ *são irracionais, quando* $(m, n) = 1$ *e* $n^q \neq b^p$.

Demonstração. Suponhamos que $\log_b \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, e vamos analisar dois casos separadamente.
Primeiro com $p > 0$, temos

$$b^{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \Longrightarrow b^p n^q = m^q.$$

Para $p < 0$, temos

$$b^{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n} \Longrightarrow b^p n^q = m^q \Longrightarrow n^q = m^q b^{-p}.$$

Mas como supomos $(m, n) = 1$, o Teorema 2.4 garante a impossibilidade dessas igualdades, já que teríamos quantidades distintas de fatores primos em ambos os lados da igualdade. A única exceção ocorre no segundo caso, quando temos $m = 1$ e n^q uma potência de b. □

Na seção a 2.6 veremos em exemplos como as propriedades operatórias dos logaritmos podem ampliar os critérios dados pelos teoremas dessa seção e na seção 2.8 vamos completar os critérios de irracionalidade dos logaritmos de números reais de base inteira no Teorema 2.45.

2.6 Propriedades do fechamento

De posse dessas duas amplas classes de irracionais, vamos agora analisar algumas propriedades operatórias envolvendo números racionais e irracionais que nos permitirão caracterizar alebricamente o conjunto. Muitos dos fatos que veremos aqui serão sustentados por raciocínio indireto (prova por absurdo ou contraexemplo).

Definição 2.31. Dizemos que um conjunto K é fechado em relação a uma operação quando aplicando essa operação a dois elementos quaisquer desse conjunto o resultado é um terceiro elemento de K.

Exemplo 2.32. O conjunto dos números pares é fechado em relação à adição e à multiplicação, já o conjunto de potências inteiras e positivas de 2 é fechado em relação à multiplicação, mas não em relação à adição. De fato, sendo $m, n \in \mathbb{N}$, $2m + 2n = 2(m + n)$, $2m \cdot 2n = 4, (m, n)$ e $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$, mas com um simples exemplo mostramos o não fechamento da adição no conjunto das potências de 2: $2^2 + 2^3 = 12 \neq 2^n$, qualquer que seja n natural.

Os axiomas de Peano, que constroem indutivamente o conjunto dos números naturais e definem as operações de adição e multiplicação nesse conjunto, garantem o fechamento dessas operações entre os inteiros, fato que usaremos na demonstração do teorema a seguir:

Teorema 2.33. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é fechado para a adição e multiplicação.*

Demonstração. Sejam os racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n}$. Sabemos que $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + mb}{nb}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{an}{bn}$ dado que a, b, m e n são inteiros, estamos certo de que os numeradores e denominadores em ambos os casos são inteiros, donde decorre o fechamento das duas operações em $\mathbb{Q}$. □

Teorema 2.34. *São válidas as seguintes propriedades operatórias envolvendo números irracionais:*

1. *A soma entre um número racional e um número irracional é irracional.*

2. *O produto entre um racional não-nulo e um irracional é irracional.*

3. *São irracionais o oposto aditivo e o inverso multiplicativo de um irracional.*

Demonstração. As demonstrações seguem por absurdo. Sejam $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ tais que $\dfrac{a}{b} + x = \dfrac{m}{n}$, mas assim $x = \dfrac{m}{n} - \dfrac{a}{b}$. Dado que a diferença entre racionais pode ser entendida como soma do primeiro com o oposto do segundo entramos em contradição com o Teorema 2.33 que nos diria ser x um racional. Analogamente, se $\dfrac{a}{b} \cdot x = \dfrac{m}{n}$, então $x = \dfrac{bm}{an}$ seria racional. A veracidade da última afirmação do Teorema decorre que o caso contrário nos levaria a pensar em números que são irracionais e racionais ao mesmo tempo:

$$-x = \frac{a}{b} \Longrightarrow x = -\frac{a}{b}$$

e

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \Longrightarrow x = \frac{b}{a}$$

$\square$

Exemplo 2.35. O número $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como número de ouro é irracional.

De posse do Teorema 2.34, somos capazes de fabricar exemplos de irracionais a partir de qualquer racional e observar que as operações no conjunto dos números irracionais, em geral, não tem fechamento.

1. A soma de números irracionais pode ser racional ou irracional:

   - $(\pi + 1) + (3 - \pi) = 4 \in \mathbb{Q}$
   - $(5 + 3\pi) + (2 - 5\pi) = 7 - 2\pi \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$
   - $\log 8 + \log\left(\dfrac{1}{8}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$
   - $\log 3 + \log 7 = \log 21 \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$

2. O produto de números irracionais pode ser racional ou irracional:

   - $2\sqrt[3]{3} \cdot 4\sqrt[3]{9} = 24 \in \mathbb{Q}$
   - $\sqrt{5} \cdot \phi = \frac{\sqrt{5}+5}{2} \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$
   - $log_{50}1000 = \dfrac{\log 1000}{\log 50} = \dfrac{3}{\log 50} \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$

O fato da definição de número irracional carregar uma negação intrínseca, faz os irracionais serem identificados por aquilo que eles não são, aliás foi com uma percepção assim que Liouville (1809 - 1882) fez surgir uma importante classe de irracionais conforme veremos mais a frente, porém esta mesma característica muitas vezes é um dificultador para provar propriedades relevantes a estes números.

2.7 Razões trigonométricas

Entre as razões trigonométricas, há uma grande quantidade de números irracionais. Podemos usar algumas identidades trigonométricas como critério de verificação da irracionalidade. Vejamos:

Proposição 2.36. *Se* $\cos x$ *for racional, então* $\cos 3x$ *também será racional.*

Demonstração. De fato, pela fórmula $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ com $a = 2x$ e $b = x$, obtemos $\cos 3x = \cos(2x)\cos x - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x$, aplicando as identidades $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$, obtemos finalmente $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ deixa bem evidente que a racionalidade de $\cos x$ incorre na racionalidade de $\cos 3x$. □

De forma equivalente, a Proposição 2.36 conta-nos que $\cos 3x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ implica $\cos x \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$.

Proposição 2.37. *Se* x *é tal que* $\cos 2x$ *é irracional, então* $\cos x, sen\ x, tg\ x$ *são também irracionais.*

Demonstração. Supondo que $\cos x$ é racional, consequentemente seriam também racionais $\cos^2 x$ e $2\cos^2 x - 1$, mas isso implicaria $\cos 2x$ racional contradizendo a hipótese. Lembrando que $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, analogamente concluímos a irracionalidade de $\operatorname{sen} x$. Dado que $\operatorname{tg} x$ é racional, também $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ seria racional, mas como $\sec^2 x \cdot \cos^2 x = 1$, esta suposição nos leva a

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - cos^2 x)$$

$$cos(2x) = 2cos^2 x - 1$$

$$cos^2 x = \frac{cos(2x) + 1}{2},$$

contradizendo a hipótese. □

Vamos aliar as manipulações de identidades trigonométricas com um resultado conhecido na Álgebra como teste das raízes racionais das equações polinomiais.

Teorema 2.38. *Seja* $a_i \in \mathbb{Z}$ *para todo* $i \in \{0, \ldots n\}$, *a equação*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

só admite como raízes racionais as frações irredutíveis $\dfrac{p}{q}$ *onde* $p|a_0$ *e* $q|a_n$.

Demonstração.

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

$$p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n$$

Se $p \nmid q$, já que são coprimos, então $p \nmid q^n$ portanto $p|a_0$. Por outro lado, como

$$q(a_{n-1}p^{n-2} + \ldots + a_1q^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n,$$

pelas mesmas razões, concluímos que $q|a_n$. $\square$

Devemos observar que o Teorema 2.38 não garante a existência das raízes, contudo indica a quais condições a ocorrência destas está submetida. Olhando dessa forma ele pode ser visto como um recurso para provar a irracionalidade de números.

Exemplo 2.39. O número $\cos 25°$ é irracional. Dado que $\cos 150° = \cos 2 \cdot 75° = -\frac{1}{2}$, podemos escrever como $4 \cdot \cos^2 75° \; -1 = 0$. De acordo com o Teorema 2.38, tal equação na incógnita $\cos 75°$ admitiria como raízes racionais apenas $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$, mas nenhuma dessas verifica a equação logo, $\cos 75°$ é irracional, assim como $\cos 25°$ conforme o Teorema 2.36.

Exemplo 2.40. Dado que $\cos 60° = \cos 3 \cdot 20° = \frac{1}{2}$, de $\cos 3x = 4cos^3 x - 3\cos x$, obtemos $8 \cdot \cos^3 20° - 6 \cdot \cos 20° - 1 = 0$, cujas únicas raízes racionais possíveis são $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$. Por inspeção, vemos que nenhuma desses valores satisfaz a equação, logo novamente pelo Teorema 2.36, $\cos 20°$ é irracional.

De posse de todos esses resultados, podemos concluir a irracionalidade de uma infinidade de razões trigonométricas. De fato, sendo $\cos 20°$ irracional, ao aplicar recursivamente a ideia do Teorema 2.37, percebemos que o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos da forma $\frac{20}{2^n}$ com n inteiro serão todas irracionais.

2.8 Números algébricos e transcendentes

Na seção anterior, trouxemos as equações polinomiais como ferramentas para provar a irracionalidade de razões trigonométricas. No contexto das equações, temos ainda uma interessante teoria que propõe uma outra separação dos números reais que não em racionais e irracionais: números algébricos × números transcendentes.

Definição 2.41. O número real que satisfaz uma equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

em que todos os coeficientes são inteiros é chamado de algébrico. Os números que não são algébricos são ditos transcendentes.

Teorema 2.42. *Todo número racional é algébrico.*

Demonstração. Basta observar que qualquer número da forma $\dfrac{a}{b}$ com a e $b \neq 0$ inteiros é raiz da equação $bx - a = 0$. □

Segue então que todo número transcendente (não-algébrico) é irracional. Os exemplos mais famosos de números transcendentes são as constantes de Euler, de Liouville, π, $2^{\sqrt{2}}$ e os logaritmos decimais de números racionais que não sejam potências de 10. Enquanto a transcendência dos três primeiros é conhecida desde o século XIX, os últimos só foram comprovados na década de 30 do século XX após esforços de monta de matemáticos admiráveis. Contudo nem todo número irracional é transcendente!

Exemplo 2.43. $\alpha = \sqrt[n]{p^m}$ satisfaz a equação $x^n - p^m = 0$, portanto todos os radicais aritméticos são algébricos.

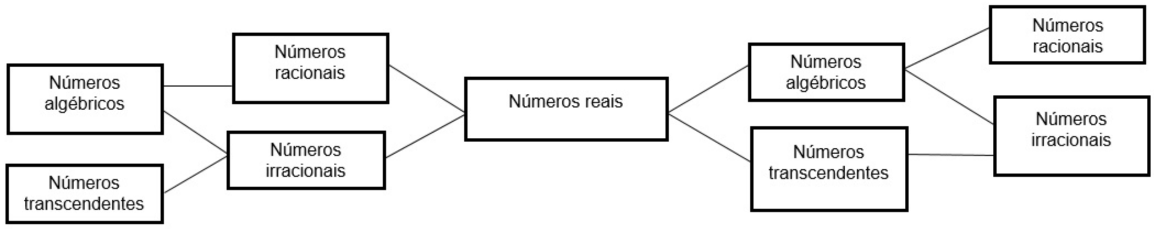
Exemplo 2.44. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$, de modo que ϕ é algébrico.

Teorema 2.45. $x = \log_b t$ *é irracional, quando* $b > 1$ *é inteiro e* $t > 0$ *é transcendente.*

Demonstração. Por contradição, suponha $\log_b t = \dfrac{m}{n}$, assim temos $b^{\frac{m}{n}} = t$, ou equivalentemente $b^m = t^n$. Uma vez que t é transcendente, então t^n também é, para verificar, veja que t^n for raiz da equação algébrica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ax + a_0 = 0$, então t é raiz da equação $a_n x^{nm} + a_{n-1} x^{mn-n} + \ldots + ax^n + a_0 = 0$. Por outro como b é inteiro, b^m é algébrico, donde concluímos uma contradição com a igualdade $b^m = t^n$. □

Existem portanto, duas formas de pensar na composição dos números reais: racional x irracional, algébrico x transcendente. Um número real que é racional ele é algébrico, um número real irracional pode ser algébrico ou transcendente, assim todos os números transcendentes são irracionais. Veja a Figura 2.3.

Figura 2.3:
Partição dos reais: racionais $\times$ irracionais, algébricos $\times$ transcendentes



Fonte: o autor, 2020

A teoria dos números transcendentes é relativamente recente, o termo transcendente foi atribuído pelo matemático Leonhard Euler (1707-1783) que descreveu esses números como capazes de transcender as operações algébricas. Naquele momento não havia qualquer exemplo de um número desse tipo, mas certamente os matemáticos previram sua existência o que finalmente se confirmou a partir da teoria dos números algébricos desenvolvida nos trabalhos de Gauss (1777-1855) e Galois (1811-1832). Embora os resultados relevantes sejam recentes, a teoria dos números algébricos e transcendentes tem raízes profundas em outros problemas mais antigos: hoje por exemplo, sabe-se que os três problemas clássicos, em geral, não tem solução porque são inconstrutíveis com os instrumentos euclidianos, os números necessários a solução. Dois deles $\sqrt[3]{2}$ e $\cos 20°$ são inconstrutíveis por serem algébricos de grau 3 (soluções algébricas de equações cúbicas) e π por ser transcendente conforme o teorema das construções geométricas enunciado em Niven (2012)[4].

O primeiro exemplo formal de número transcendente surgiu em 1844, quando Joseph Liouville verificou uma propriedade satisfeita por todos os números algébricos e tratou de formular um número que não apresentasse tal propriedade. A tarefa de demonstrar a transcêndencia de um número costuma ser muito complicada o que explica a existência de muitas conjecturas ainda em aberto, além de requisitar recursos que estão além dos objetivos da matemática da educação básica, estando portanto alheio ao interesse maior desse trabalho. Contudo a partir da próxima Seção nos dedicaremos a demonstrar a irracionalidade dos mais notáveis irracionais transcendentes, acreditando ser pertinente ao repertório de conhecimento do professor.

[4]Teorema das construções geométricas: Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um número algébrico de grau 2^n.

Paradoxalmente se sabe que a quantidade de transcendentes é maior, pois este conjunto é não enumerável. De fato alguns números algébricos são racionais e outros irracionais, mas todos os transcendentes são irracionais, isso destaca o conjunto $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ por ter uma cardinalidade maior do que os demais subconjuntos de reais (com exceção dos intervalos). Daremos uma demonstração desse fato, omitindo alguns resultados prévios sobre enumerabilidade para não desviar do foco sobre os números irracionais. Para uma leitura mais pormenorizada sugerimos a leitura do Capítulo 1 de Lima (2016).

Definição 2.46. Dizemos que X é um conjunto enumerável quando é finito ou existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$, f então é dita uma enumeração ou contagem de X.

Lembrando que uma função de domínio natural é dita uma sequência, esta definição diz na prática que podemos ordenar os elementos de X em sequência.

Exemplo 2.47. O conjunto P dos números naturais pares e I dos ímapares são enumeráveis como evidenciam as bijeções $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$, tal que $f(n) = 2n$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow I$ com $g(n) = 2n + 1$.

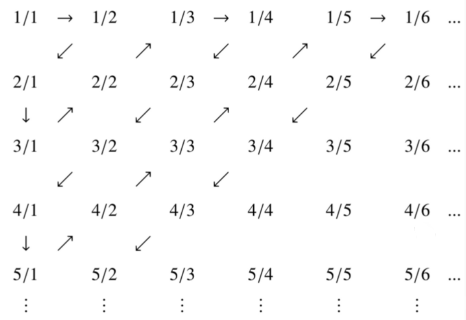
Exemplo 2.48. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável, pois $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dado por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é bijetiva.

Observe que, para efeitos de contagem, quando nos referimos a $\mathbb{N}$ estamos desconsiderando o zero como número natural. O procedimento descrito no exemplo 2.49 ficou conhecido como diagonalização de Cantor e esta descrito na figura 2.4:

Figura 2.4: Passeio de Cantor pelas frações



Fonte: Wikibook, 2020

Exemplo 2.49. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável. Para ver isto basta observar que na figura 2.4, conseguimos organizar nas linhas e em ordem crescente todas as frações de naturais com um denominador específico: na primeira linha aparecem todos as frações de denominador 1, isto é naturais, na segunda as frações de denominador 2, na terceira os de denominador 3 e assim por diante. Procedendo desta forma, todo número racional positivo claramente irá aparecer nessa formação. Podemos excluir os números que já apareceram e acrescentar o zero e os opostos obtendo a sequência infinita $(0, -r_1, r_1, r_2, -r_2, ...)$ que contém todos os racionais de fato.

Exemplo 2.50. Sabendo que a união de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável e que $\mathbb{R}$ é não enumerável, presume-se que os irracionais são não enumeráveis. Com efeito, se o intervalo $(0, 1)$ fosse enumerável, poderíamos escrever esses números em sequência como indica a organização abaixo:

$$p_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$

$$p_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$

$$p_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots$$

$$\dots$$

onde p_i é um número escrito como fração decimal infinita de forma única (conforme vimos na seção 2.2) e cada símbolo a_{ij} é um dos nove dígitos do sistema de numeração, mas o número $0, b_1b_2b_3\dots$ com $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, b_3 \neq a_{33}$ que certamente está nesse intervalo escapa dessa oganização. Com uma multiplicação conveniente, podemos encontrar números como este por todos os intervalos da reta. Portanto $\mathbb{R}$ é não enumerável, existem números irracionais e eles formam também um conjunto não enumerável.

Cantor, no entanto, foi muito além ao demonstrar que um subconjunto bem mais amplo de $\mathbb{R}$ é não enumerável conforme mostramos a seguir.

Teorema 2.51. *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração. Seja $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ onde $a_i = 0$ é inteiro para todo $i \in \mathbb{N}$. A altura da equação algébrica é o número $h = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_0| + n$. A altura de uma equação é, portanto, um inteiro positivo logo para cada altura específica existe um número finito de equações que por sua vez, o Teorema Fundamental da Álgebra garante haver no máximo n raízes reais, logo o conjunto de raízes de todas as equações de uma dada altura é um conjunto enumerável. Como o próprio conjunto dos inteiros é enumerável podemos configurar o conjunto dos números algébricos como a união enumerável do conjunto de equações dada a sua altura, concluindo, portanto que o conjunto dos algébricos é enumerável. □

Com o Teorema 2.51, damos conta de perceber que existe o conjunto não enumerável dos números transcendentes.

2.9 Constante de Liouville

No exemplo 2.14, comentamos que as frações decimais podem aproximar números racionais e irracionais com um erro inferior a 10^{-n}. Muitas vezes frações com outros denominadores constituem uma aproximação muito melhor. Por exemplo, $\frac{22}{7}$ está mais próximo de π do que $\frac{31}{10}$ e $\frac{314}{100}$. Então como podemos obter aproximações racionais melhores sem que o denominador seja necessariamente potência de 10?

Niven (2012)[5] apresenta como resultado a existência de infinitos $\frac{m}{n}$ tais que

$$\frac{-1}{\sqrt{5}n^2} < x - \frac{m}{n} < \frac{1}{\sqrt{5}n^2},$$

sendo $\sqrt{5}$ a constante que fornece a melhor aproximação possível desse tipo. O autor cita ainda que em geral, não é possível obter infinitos racionais $\frac{m}{n}$ com erro inferior a $\frac{1}{n^3}$ capazes de aproximar um número real x qualquer. No entanto, existe uma classe de números reais que podem ser aproximados por infinitos racionais $\frac{m}{n}$ a menos de $\frac{1}{n^p}$ para p arbitrariamente grande.

Tendo essa propriedade em vista, Liouville foi o primeiro a exibir um desses números, o que na verdade corresponde ao primeiro registro histórico dos números transcendentes na matemática. Este número que apresentamos na definição a seguir foi batizado como contante de Liouville. A partir daí, temos a classe dos números de Liouville, que é formada por todos os números reais transcendentes que podem ser aproximados tão bem quanto se queira. Vale detacar que, embora todo número de Liouville seja transcendente, existem números transcendentes que não são de Liouville como e e π.

[5]No capítulo 6, o referido autor demonstra vários resultados a repeito do grau de precisão com que se pode aproximar um número irracional qualquer, mas o resultado que tratamos em especial aqui surge na Seção 6.6 do texto.

Definição 2.52. Chamamos de constante de Liouville, o número real

$$\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,110001000000000000000...$$

A representação decimal da constante de Liouville dá-se da seguinte forma: os dígitos 1 ocupam as casas decimais referentes a $n!$ com n natural, enquanto as demais casas são preenchidas por zero.

O Teorema 2.53, nos mostra que a irracionalidade desse número repousa precisamente na impossibilidade de aproximar um racional por $\dfrac{1}{q^n}$, onde q e n são números positivos arbitrários.

Teorema 2.53. *Se l é um número de Liouville, então é irracional.*

Demonstração. Vamos supor, por contradição, que exista um $l = \frac{a}{b}$, que seja de Liouville. Dado que o conjunto dos números inteiros é ilimitado, para algum n positivo é possível que $2^{n-1} > b$. Como l é Liouville, então $0 < \left|\dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^n}$. Levando em conta a 1ª parte da desigualdade temos:

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| > 0 \Longrightarrow |aq - bp| > 0,$$

mas como $\dfrac{a}{b} - \dfrac{p}{q} \neq 0$ temos $aq - bp \neq 0$, portanto $|aq - bp| > 1$. Assim,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| \geq \frac{1}{bq}.$$

Como $2^{n-1} > b$ e $q > 1 \Longrightarrow q^{n-1} \geq 2^{n-1}$, segue $\dfrac{1}{bq} > \dfrac{1}{2^{n-1}q} \geq \dfrac{1}{q^n}$. Concluímos então que, $\left|l - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{1}{q^n}$. Contradição! Logo todo número de Liouville é irracional.

□

2.10 A constante de Euler

Num curso de cálculo aprendemos que a sequência $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente. De fato, para todo $n \geq 1$ vemos que a sequência é estritamente crescente e fazendo o desenvolvimento binomial de Newton veremos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} \ldots + \frac{n!}{n!n^n}$$

Dado que $\dfrac{n(n-1)}{n^2}, \dfrac{n(n-1)(n-2)}{n^3}, \ldots, \dfrac{n!}{n!n^n}$ são positivas maiores que 1, podemos escrever

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!}$$

Por indução podemos ver que $2^n \leq (n+1)!$ para $n \geq 1$ de modo que $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{2^n}$. Logo

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ora,

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n < 3$$

Donde resulta que $2 < a_n < 3$. Pelo Teorema De Bolzano-Weierstrassa, sabemos que toda sequência monótona e limitada converge, chegamos a definição da constante de Euler.

Definição 2.54. O número e é o limite da sequência $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Prova-se ainda que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, a importância disto no cálculo está na peculiar propriedade de que funções ke^x são suas próprias derivadas. O símbolo e, possivelmente foi cunhado por Euler em deferência a inicial da palavra exponencial. A despeito do que ocorre no Ensino Superior, a constante e praticamente não é mencionada ou utilizada na matemática do ensino básico em decorrência da predileção da base 10 para as potências e logaritmos que habitualmente entram na resolução de problemas nessa fase.

Poder-se-ia dizer que o número e não tem fins práticos interessantes ou é muito difícil até para o Ensino Médio, mas Almeida (2018) explica como modelos envolvendo perdas e juros contínuos a partir de um capital C a uma taxa percentual i em um período de tempo t pode servir de motivação para adentrar o número e no Ensino Médio. De fato, ao fim de um primeiro período do investimento teremos um rendimento em juros de $\dfrac{i.C}{100}$ e o capital tornar-se-ia $C + iC = C(1+i)$. Dessa forma após t períodos destes, o capital transforma-se em $C(1+i)^t$. Tomando a n-ésima fração desse período, o mesmo capital C, empregado à mesma taxa de juros, deverá render $\dfrac{i.C}{n}$ de juros transformando o capital em $C + \dfrac{iC}{n} = C\left(1 + \dfrac{i}{n}\right)$ e de forma semelhante ao que fizemos anteriormente o capital resultante no final de n períodos a $C\left(1 + \dfrac{i}{n}\right)^n$. Naturalmente, o investidor desejará que seus juros sejam capitalizados continuamente (incorporados ao capital a cada instante). Assim, para um tempo t referido na mesma unidade da taxa $\lim C\left(1 + \dfrac{it}{n}\right)^n = C.e^{it}$.

No intuito de demonstrar a irracionalidade de e, faremos uso do conteúdo do lema 2.55. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em Lages (2016) - optamos por omiti-la aqui para não nos desviarmos do objetivo principal.

Lema 2.55. *Usando a série de Taylor com $x = 1$, temos* $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Teorema 2.56. *A constante e é irracional*

Demonstração. Seja $S(x) = \sum_{n=0}^{x} \frac{1}{n!}$ uma função que associa a cada x natural a soma das x primeiras parcelas da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Observemos que a expressão

$$x!e - x!S(x) = \sum_{n=x+1}^{\infty} \frac{x!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x!}{(n+x+1)!}.$$

E ainda que,

$$\frac{x!}{(n+x+1)!} = \frac{1}{(x+1)(x+2)...(x+n)(x+n+1)}.$$

Dado que $n! < (x+1)(x+2)...(x+n)$ e $x < (x+n+1)$, temos

$$\frac{x!}{(n+x+1)!} < \frac{1}{n!x}.$$

Deste modo $x!e - x!S(x) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x.n!}$, de forma que $0 < x!e - x!S(x) < \frac{e}{x}$.

Suponhamos por absurdo que $e = \frac{p}{q}$ onde p e q são naturais e coprimos. Assim, $0 < \frac{x!p}{q} - x!S(x) < \frac{p}{qx}$. Substituindo $x = pq$ na desigualdade, chegamos a

$$0 < \frac{(pq)!p}{q} - (pq)!S(pq) < \frac{1}{q^2}$$

.

Pelos cálculos feitos antes da Definição 2.54, verificamos que $3 < e < 2$, sabemos que se $p, q \notin \{0, 1\}$, então o número pq é superior a ambos os fatores, o que faz de

$$\frac{(pq)!p}{q} = \frac{(pq)(pq-1)\dots q(q-1)\dots 1.p}{q}$$

um número inteiro.

Agora vejamos que

$$(pq)! \sum_{n=0}^{pq} \frac{1}{n!} = (pq)! \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(pq)!} \right)$$

também é um inteiro. Ora, isto quer dizer que existe um inteiro r, tal que $0 < r < \frac{1}{q^2}$ o que é uma contradição. Logo e é um número irracional. $\square$

2.11 O número π

O número π talvez seja o mais famoso dos irracionais. Registros de seu emprego em cálculos que envolvem regiões circulares remetem ao antigo Egito de mais de 5000 anos atrás e até mesmo a Bíblia Sagrada, segundo Figueiredo (2011, p.13). Conhecido como a constante que resulta da razão entre o perímetro e diâmetro do círculo, foi denotado pela fração $\frac{\pi}{\delta}$ que são as iniciais destas palavras em grego, sendo a notação definitiva $\pi = \frac{C}{D}$ cunhada por Euler no século XVIII. A demonstração original da irracionalidade do π dada por Lambert (1728 - 1777) é razoavelmente complicada, porém levando em conta a relevância que este número tem para professor, é necessário conhecer uma prova desse fato, daremos aqui uma demonstração proposta por Niven (1915 - 1999) cujos argumentos mais complexos demandam apenas um conhecimento de indução matemática e cálculo integral.

Lema 2.57. *(Teorema do confronto) Se* $\lim x_n = \lim y_n = L$ *e* z_n *é tal que* $x_n < z_n < y_n$ *então* $\lim z_n = L$.

Demonstração. Com efeito, se $\lim x_n = L$, então existe n_1 tal que $n > n_1$ implica $L + \epsilon < x_n < L - \epsilon$, da mesma forma se $\lim y_n = L$ existe, então há n_2 tal que $n > n_2$ implica $L + \epsilon < y_n < L - \epsilon$ para algum real $\epsilon > 0$. Tomando $n_0 = max\,\{n_1, n_2\}$ teremos $L + \epsilon < x_n < z_n < y_n < L - \epsilon$. □

Lema 2.58. *Dada a sequência* (I_n) *cujo termo geral é*

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt$$

e r *natural, então* $(I_n) \geq 0$ *e* $\lim r^n I_n = 0$.

Demonstração. Ora, $f(t) = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t$ é uma função par, podemos escrever $I_n = \frac{2}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt$, dado que $\frac{\pi^2}{4} - t^2 \geq 0$ e $\cos t \geq 0$ em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ então $f(t) \geq 0$ para todo $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donde segue que $I_n \geq 0$ para todo n natural.

Assim seja $r \in \mathbb{N}$, temos

$$|r^n I_n| = r^n I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n dt$$

$$\leq \frac{2r^n}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n dt$$

$$= \frac{2r^n}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^n \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi \frac{\left(\frac{r\pi^2}{4}\right)^n}{n!}$$

Desta forma,

$$-\pi \frac{\left(\frac{r\pi^2}{4}\right)^n}{n!} \leq r_n I_n \leq \pi \frac{\left(\frac{r\pi^2}{4}\right)^n}{n!}.$$

Aplicando o Lema 2.57, concluímos que $\lim r^n I_n = 0$. □

Lema 2.59. *Para todo inteiro não negativo, $I_n = P_n(\pi^2)$, onde P_n é um polinômio de grau menor ou igual a n com coeficientes inteiros.*

Demonstração. Façamos indução sobre n! O caso $n = 0$:

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2.$$

Logo I_0 é um polinômio de grau zero em π^2. Para o caso $n = 1$, usando integração por partes com $u = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)$ e $dv = \cos t dt$, teremos

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) \cos t dt = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) \text{sen} t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \text{sen} t dt.$$

Calculando as integrais definidas, teremos $I_1 = 4$ que é um polinômio de coeficientes inteiros e grau menor igual a 1.

Sendo assim, dado $m \geq 1$ fixo, podemos supor que a proposição é verdadeira para todo $0 \leq j \leq m$. Assim teremos,

$$I_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{m+1} \cos t dt.$$

Aplicando a integração por partes,

$$u = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{m+1} \longrightarrow du = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^m (m+1)(-2t)$$

$$dv = \cos t dt \longrightarrow v = \text{sen}\, t,$$

ficamos com

$$\frac{1}{(m+1)!}\left[\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right) \text{sen}\, t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2(m+1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^m \text{sen} t dt\right],$$

calculando a integral definida, na primeira parcela da expressão anterior, ficamos com:

$$\frac{1}{(m+1)!}\left[2(m+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m \operatorname{sen} t dt\right] =$$
$$= \frac{2}{m!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m \operatorname{sen} t dt.$$

Novamente aplicando a integração por partes na integral definida:

$$u = t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m \longrightarrow du = \left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m - 2mt^2\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{m-1} dt$$

e

$$dv = \operatorname{sen} t dt \longrightarrow v = -\cos t$$

$$\frac{2}{m!}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{m+1} \operatorname{sen} t dt,$$

obtemos

$$\frac{2}{m!}\left[-t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m \cos t\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m - 2t^2m\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right) dt\right]$$

Sendo $-t^2 = \left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right) - \frac{\pi^2}{4}$, podemos reescrever I_{m+1} como

$$I_{m+1} = \frac{2}{m!}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left[\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m + 2m\left(\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)-\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{m-1}\right] dt\right]$$
$$= \frac{2}{m!}\left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\left[(2m+1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m - \frac{\pi^2 m}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{m-1}\right] dt\right]$$
$$= \frac{4m+2}{m!}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m \cos t dt - \frac{\pi^2}{(m-1)!}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^m \cos t dt$$
$$= (4m+2)I_m - \pi^2 I_{m-1}$$

A hipótese de indução nos diz que

$$I_m = P_m(\pi^2) = a_m(\pi^2)^m + a_{m-1}(\pi^2)^{m-1} + \ldots + a_1(\pi^2) + a_0 = a_m(\pi^2)^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i(\pi^2)^i$$

e

$$I_{m-1} = Q_{m-1}(\pi^2) = b_{m-1}(\pi^2)^{m-1} + b_{m-2}(\pi^2)^{m-2} + \ldots + b_1\pi + b_0 = \sum_{i=0}^{m-1} b_i(\pi^2)^i$$

com $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$ para todo $j \in \{0, \dots, m\}$ e todo $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Então,

$$I_{m+1} = (4m+2)I_m - \pi^2 I_{m-1}$$

$$= (4m+2)[a_m(\pi^2)^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i(\pi^2)^i] - \pi^2 \sum_{i=0}^{m-1} b_i(\pi^2)^i$$

$$= [(4m+2)a_m](\pi^2)m + \sum_{i=0}^{m-1}[(4m+2)a_i](\pi^2)^i] - \sum_{i=0}^{m-1} b_i(\pi^2)^{i+1} + (4m+2)a_0$$

$$[(4m+2)a_m - b_{m-1}](\pi^2)^m + \sum_{i=1}^{m-1} b_{i-1}(\pi^2)^i + (4m+2)a_0$$

$$[(4m+2)a_m - b_{m-1}](\pi^2)^m + \sum_{i=1}^{m-1}[(4m+2)a_i - b_{i-1}](\pi^2)^i + (4m+2)a_0 = R_{m+1}(\pi^2)$$

onde

$$R_{m+1}(t) = [(4m+2)a_m - b_{m-1}]t^m + [(4m+2)a_{m-1} - b_{m-2}]t^{m-1} + \dots +$$
$$+[(4m+2)a_2 - b - 1]t^2 + [(4m+2)a_1 - b_0]t + (4m+2)a_0$$

é um polinômio com coeficientes inteiros de grau máximo $m+1$. A proposição então é verdadeira para qualquer natural. □

Teorema 2.60. *π é um número irracional.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que π é racional. Sejam a e b inteiros tais que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, segue então do Lema 2.59 que $b^n P_n\left(\frac{a}{b}\right) = b^n I_n$ para todo inteiro não negativo. Seja então $\{x_n\}_n \geq 0$ tal que $x_n = b^n P_n\left(\frac{a}{b}\right)$, com $I_n > 0$ e P_n de coeficientes inteiros com grau máximo n, em consequência do Lema 2.58, $\lim b^n I_n = 0$, o que faz de $\{x_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de inteiros positivos tal que $\lim x_n = 0$, o que nos coloca em contradição com o Teorema do Confronto. Por último, e mais simples, se π é racional, o Teorema 2.34 diz que $\frac{1}{\pi}$ também o, é assim como o produto $\frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = \pi$ é irracional. Contradição! Portanto π é irracional. □

2.12 O número de ouro

Há muito tempo já se sabe que o número de ouro tem fortes ligações com nossa apreciação estética e por isso está presente em diversas manifestações artísticas como pintura, escultura e arquitetura. Relata-se que os gregos, possivelmente tenham tido contato com o número de ouro a partir da figura dos pentagramas que eram comuns entre os povos do Oriente Médio Antigo com os quais os gregos estabeleciam relações de intercâmbio cultural. O pentagrama é uma figura formada a partir de um pentágono regular cujas diagonais se intersectam de forma que a razão entre os comprimentos da diagonal e do maior segmento da seção estão para a razão entre os comprimentos determinados pela seção da diagonal.

Traduzindo o que foi dito por último em notação moderna, sejam d e x os comprimentos da diagonal e do maior segmento definido pela seção, respectivamente, em notação moderna temos

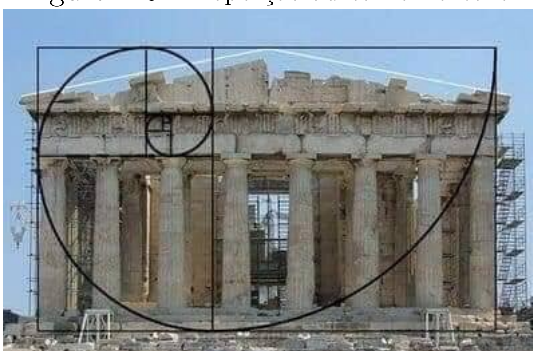
$$\frac{d}{x} = \frac{x}{d-x} \Leftrightarrow x^2 = d(d-x) \Leftrightarrow x^2 + dx - d^2 = 0.$$

Resolvendo tal equação encontramos como raiz positiva $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Daqui podemos ver em detalhes que ϕ de fato é algébrico, como discutido no exemplo 2.41 e claramente é irracional, já que é o quocientre entre a soma de um racional e um irracional por um racional, conforme o exemplo 2.20.

Os gregos tratavam com bastante deferência essa forma de seccionar segmentos, referida de forma particular como seção, tamanho era o seu apreço estético. O templo do Partenon na Grécia foi eregido por Fídias (480 - 430 a.C.) entre 450 a.C e 430 a. C. e teria feito uso dessa proporção em sua fachada retangular. Para obtermos um retângulo que respeite tais proporções a partir de um quadrado $ABCD$, podemos fixar a ponta seca do compasso sobre o ponto médio M do lado AB e com abertura MC traçar um arco de circunferência que intersecte o prolongamento do lado AB, digamos num ponto E, daí basta prolongarmos o lado CD e baixar a perpendicular a esse lado na direção de E e o retângulo obtido é tal que a razão entre o comprimento e a largura é aproximadamente $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Figura 2.5: Proporção áurea no Partenon



Fonte: LGA Cursos Arquitetura, 2019

O termo secção áurea surgiria apenas 2000 anos depois de Euclides, a partir de Johannes Kepler (1571 - 1630). Enquanto que a designação pela letra grega ϕ ocorreria apenas no século, XX a partir do matemático americano Mark Barr (1871 - 1950) que escolheu este símbolo em referência ao escultor Fídias.

A sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), visualizada quando tentamos dar solução ao famoso problema proposto pelo Liber Abaci de Fibonaccci do século XIII, tem interessantes ligações com o número de ouro.

> "um homem põe um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano, se supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (PISA, apud. Marques, 2013, p.11)."

Que faça uso de números irracionais, a fórmula do termo geral de uma sequência de números naturais, é algo no mínimo surpreendente. Vejamos este fato na proposição a seguir.

Proposição 2.61. *O termo geral da sequência de Fibonacci é*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Demonstração. Primeiro devemos observar que a sequência de Fibonacci é uma recursão linear de segunda ordem definida como $f_1 = f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. A equação característica[6] associada a tal recorrência é $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim,

$$f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Aplicando as condições iniciais $f_1 = f_2 = 1$, obtemos as equações:

$$-C_1 - C_2 + C_1\sqrt{5} - C_2\sqrt{5} = 2 \tag{2.7}$$

$$6C_1 - 2\sqrt{5}C_1 + 6C_2 + 2\sqrt{5}C_2 = 4 \tag{2.8}$$

que são satisfeitas simultaneamente quando $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, assim provamos que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

□

[6] Ver Morgado e Carvalho (2015 p. 76-84)

Investigando a sequência de Fibonacci, Kepler demonstrou que a razão entre dois termos consecutivos convergia para o número de ouro. Vejamos na proposição a seguir:

Proposição 2.62. *Seja* $r_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, *temos* $\lim r_n = \phi$.

Demonstração. De antemão, vamos admitir que r_n é uma sequência convergente e seja $x = \lim \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$, das definições recursivas de f_n e r_n, obtemos

$$\begin{aligned} x = \lim \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} &= \lim 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \\ &= 1 + \lim \frac{1}{\dfrac{f_n}{f_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x = 1 + \lim \frac{1}{r_n} &\iff \\ x = 1 + \frac{1}{x} &\iff \\ x^2 - x - 1 = 0&, \end{aligned}$$

cujas raízes são $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, vemos que $x_2 < 0$, mas $r_n > 0$ sempre, então $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$. □

Capítulo 3

Na história

3.1 No período pré-helênico

Normalmente, a história da origem dos números é associada com processos de subsistencia que foram se complexificando a mesma medida que as organizações humanas foram avançando em termos de tecnologia. É perceptível que tal associação se estende à própria história da matemática como um todo.

Eves (2004) assim descreve as necessidades matemáticas dos povos que habitavam a região entre os rios Tigre e Eufrates que viria a ser designada por Mesopotâmia:

> Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviram para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitantemente. Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis. (EVES, p. 57, 2004)

A própria escrita antiga pode ter sido um produto dos processos de contagem, esta tese foi apresentada nos anos 90 por Denise Schamandt-Besserat que observou a descoberta constante em escavações de pequenos objetos de argila em formatos diversos que ficaram conhecidos como tokens provavelmente utilizados como registros de bens da agricultura e na fase urbana de manufaturados. Os tokens tinham formatos distintos, pois a depender do que se pretendia contar usava-se um ou outro formato (os principais eram de cones, esferas, cilindros e discos), posteriormente passou-se a armazenar os tokens dentro de um invólucro oco de formato esférico feito de argila, como os tokens ficariam inacessíveis a vista dentro do recipiente, fazia-se a marcação da quantidade do conteúdo dali de dentro com o token na argila ainda úmida o que daria origem a escrita cuneiforme, com o tempo os tokens seriam substituídos por estiletes e os recipientes circulares por tábuas de argila. Para um melhor detalhamento desse processo consultar Roque e Carvalho (2012).

Existe uma tendência de apontar toda a matemática pré-helênica[1] como essencialmente empírica ou indutiva. Essa apreciação está em conformidade com os preceitos da filosofia grega e sua predileção aos aspectos lógico e formal ressaltando tais características das quais nossa prática matemática atual é herdeira. As relações das civilizações mais antigas com a matemática estão ligadas ao próprio processo de formação, por isso a ênfase inicial foi dada em torno da aritmética e mensuração, mas com o avanço das atividades administrativas surgiu um grupo social que detinha o conhecimento sobre os processos de impressão na argila e seria responsável por transmitir esse conhecimento aos jovens, futuros componentes dessa elite intelectual: o escriba. Esse mesmo traço pedagógico determinou uma tendência no sentido da abstração e de se estudar uma ciência por ela mesma.

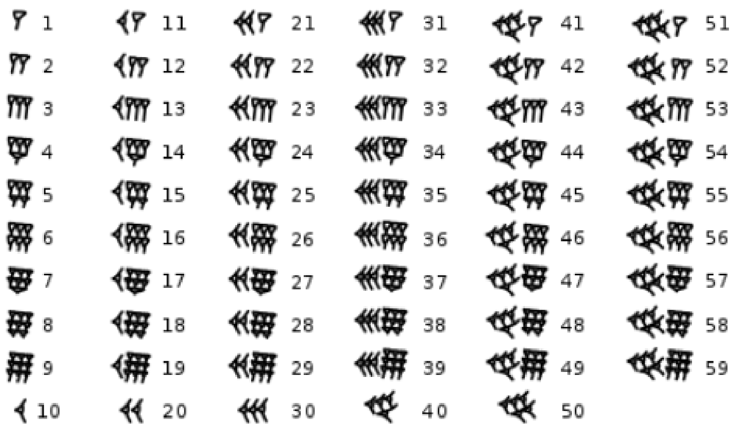
Aliás no que diz respeito ao próprio processo de contagem, temos uma crescente, no sentido de abstração, pois a princípio o que se fazia era relacionar quantidades com objetos específicos para depois atribuir um mesmo símbolo para quantidades iguais de objetos diferentes. Sobre isso Roque e Carvalho (2012) diz que contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato.

Um passo mais além veio com a utilização do sistema posicional de base 60 pelos babilônios[2], onde uma pequena quantidade de símbolos consegue representar uma diversidade de números, sendo que o mesmo símbolo representa números diferentes a depender da disposição na escrita. A predileção pela base 60 provavelmente se deu por conta da prática da astronomia, mas uma coincidência agradável da escolha

[1] o termo é admitido como o gentil para as pessoas que habitavam as cidades estado da Grécia Antiga.

[2] Segundo Boyer (1996) esta designação costumeiramente dada para as civilizações da antiga Mesopotâmia faz referência a cidade da Babilônia como centro cultural da região, ainda que esta tenha sido palco do surgimento e subjugação de uma sucessão de impérios que sob a mão de Sargão I (2276 - 2221 a.C.) estabeleceu uma unificação e absorção pelos invasores da cultura suméria inclusive a escrita cuneiforme.

Figura 3.1: Sistema sexagesimal de numeração babilônico



Fonte: Wikipedia, 2020

dessa base vai para a aritmética já que os recíprocos dos divisores próprios de 60 $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\}$ tem desenvolvimentos decimais finitos nessa base.

Para Boyer (1996), a escolha da base 60 ocorreu de forma consciente para satisfazer de maneira mais fácil necessidades relacionadas com medidas, pois como o fato exposto no parágrafo anterior deixa claro, uma grandeza de 60 unidades tem até dez subdivisões possíveis. Na verdade o que pode ter ocorrido foi uma combinação das bases seis e dez, o que fica evidente já que a cada dez números os símbolos se repetem também. Seja como for o sistema sexagesimal teve uma duração longa e temos vestígios do seu emprego até hoje nas unidades de medida de tempo e ângulos planos.

Tabletes de argila antigos indicam que os babilônios efetuavam adições e subtrações de forma simples e análogas ao que fazemos na base 10, nesse sentido os tabletes funcionavam como as nossas tabuadas modernas e facilitavam bastante o trabalho dos escribas com relação a multiplicação inclusive porque a divisão era feita por meio do produto do dividendo pelo inverso multiplicativo. Assim para calcular a divisão de m por n seria verificado no tablete o resultado de $m \times \dfrac{1}{n}$, esse procedimento era ainda mais importante quando $\dfrac{1}{n}$ tinha uma desenvolvimento decimal infinito na base 60.

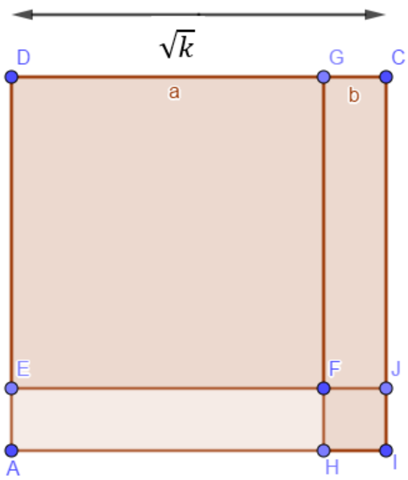
Além das operações fundamentais, os babilônios calculavam potências e raízes. A análise do YBC 7243[3] sugere que os escribas babilônios conheciam a relação entre

[3]Yale Babylonian Collection, tabelete de argila onde encontramos uma lista de constantes numéricas que sugerem ser este um artefato de referência e consulta para vários tipos de problemas.

o lado e a diagonal do quadrado indicando $\frac{l}{d} =$ pelo valor $(1, 24; 51; 10)_{(60)}$ que na nossa notação decimal converte-se em 1,414212962962, fornecendo uma aproximação para $\sqrt{2}$ com cinco algarismos corretos.

Tal grau de precisão, já nesta remota época, leva-nos a questionar como os babilônios lidavam com esse tipo de raízes, que hoje sabemos ser números irracionais. Segundo Katz (1998) apud. Roque e Carvalho (2012), o procedimento para encontrar $\sqrt{k}$ era proveniente de um raciocínio geométrico, conforme podemos perceber analisando a Figura 3.2.

Figura 3.2: Cálculo geométrico de $\sqrt{2}$



Fonte: Roque, 2012

Calcular $\sqrt{k}$ corresponde a identificar o lado do quadrado de área k. Determinamos os pontos E e G sobre os lados de $AICD$ de modo que $GDEF$ seja um quadrado de lado a. Sendo $\overline{GC} = b$, podemos obter a área k do quadrado maior somando as áreas dos quadrados $EFGD$ e $HIJF$ e dos retângulos $AHFE$ e $FJCG$, o que nos dá

$$k = a^2 + ab + ab + b^2 \Longrightarrow k = (a + b)^2.$$

Disso chegamos a $k - a^2 = b^2 + 2ab$, basta agora observarmos que a^2 está mais próximo de k, quanto menor for b. Assim para um valor suficientemente pequeno, b^2 é desprezível então ficamos com

$$b \approx \frac{k - a^2}{2a}.$$

De modo que

$$\sqrt{k} = a + \frac{k - a^2}{2a}.$$

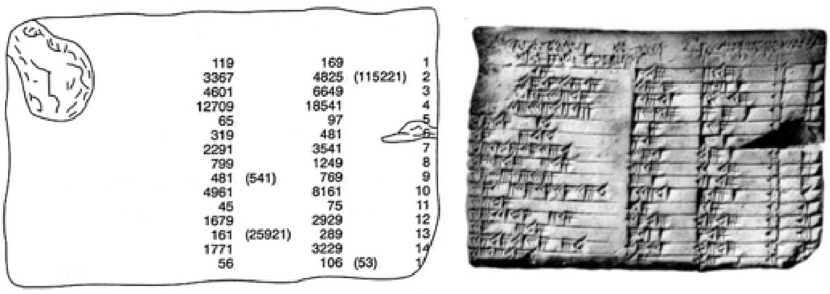
De forma mais simplificada, tal método consiste em identificar qual o menor acréscimo que devemos fazer no lado de um quadrado cuja área é conhecida e originalmente se aproxima por falta do número k.

Este processo assimila-se ao método iterativo empregado para resolver equações do tipo $x^2 - a = 0$, conhecido como método de Newton, que em nossa notação moderna traduz-se como a fórmula recursiva:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a_n}\right).$$

Plimpton 322[4] é sem dúvida uma tábua com revelações notáveis sobre a matemática pré-helênica. Esta tábua apresenta três colunas com caracteres numéricos que correspondem numa mesma linha (a exceção de quatro deles conforme a figura 3.3 indica) a hipotenusa e um cateto de triângulos retângulos de lados inteiros. Para pesquisadores da atualidade, este registro pode significar que os babilônios tinham alguma familiaridade com o que conhecemos hoje por Teorema de Pitágoras.

Figura 3.3: Tábua de Plimpton: transcrição moderna e orignal



Fonte: Eves, 2004

Se procedermos o cálculo do outro cateto dos triângulos retângulos sugeridos em Plimpton, encontramos ternos pitagóricos primitivos (com exceção de apenas dois, o 11 e o 15). Um terno pitagórico é um conjunto de três números inteiros positivos (a, b, c) que se correspondem aos três lados de um triângulo retângulo satisfazendo a relação $a^2 + b^2 = c^2$, dizemos que esse terno é primitivo quando o m.d.c. dos três números é 1. Os gregos, muitos séculos depois, viriam a provar que todo terno pitagórico primitivo admite a seguinte parametrização: $a = 2u$, $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$ onde u, v são inteiros coprimos com um par e outro ímpar e $u > v$. Aparentemente os babilônios tinham alguma consciência da representação

[4]Tábua da Coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia catalogada sobre o número 322.

paramétrica dos ternos e talvez essa observação tenha surgido das tábuas usadas para multiplicação e divisão, uma vez que todos os valores u e v são chamados de regulares, isto é, seus inversos tem representação decimal finita em base 60.

Figura 3.4: Ternos pitagóricos em Plimpton

a	b	c	u	v
120	119	169	12	5
3456	3367	4825	64	27
4800	4601	6649	75	32
13500	12709	18541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2700	2291	3541	54	25
960	799	1249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4961	8161	81	40
60	45	75	2	1
2400	1679	2929	48	25
240	161	289	15	8
2700	1771	3229	50	27
90	56	106	9	5

Fonte: Eves, 2004

É válido ressaltar que não há qualquer vestígio de demonstração desses fatos. A relação entre os babilônios e sua matemática era muito mais procedimental. Um outro exemplo interessante disso é a relação desses povos com o que hoje chamamos de π e o cálculo da área de um círculo. O costume era tomar a décima segunda parte do quadrado do comprimento da cirucnferência correspondente. Ora

$$r = \frac{S}{2\pi} \Longrightarrow A = \pi \times \frac{S^2}{4\pi^2} \Longrightarrow A = \frac{S^2}{4\pi} \Longrightarrow$$

Considerando $\pi = 3$ chegamos a $A = \dfrac{S^2}{12}$.[5]

Daqui vemos que para os babilônios, o π não era entendido como uma constante de proporcionalidade entre elementos métricos do círculo como hoje fazemos, mas como um comando verbal para uma operação de multiplicação.

As fontes do conhecimento matemático egípcio são mais escassas uma vez que os registros foram feitos em pergaminhos de papiros, e resistiram menos a ação do tempo do que os tabletes de argila da Mesopotâmia. O mais famoso documento matemático do Egito antigo é o papiro de Moscou onde há alguns relatos de problemas envolvendo geometria o que em termos de Egito antigo significava o cálculo

[5] Convém ressaltar aqui a vantagem da base sexigaseimal já que $\frac{1}{12}$ tem representação decimal finita enquanto que na base dez sua representação é infinita.

de comprimentos, áreas e volumes similarmente ao que acontecia na Babilônia. No problema 50 temos o seguinte texto: "a área de um campo circular cuja medida do diâmetro é nove unidades de comprimento é a mesma área de um quadrado cuja medida dos lados é oito unidades de comprimento."

Em notação moderna isso nos dá:

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8 \times 8 \Leftrightarrow \pi = 3,1604.$$

Outro registro da ocorrência de irracionais no antigo Egito está na construção das pirâmides. Observa-se que a pirâmide do faraó Quéops é uma pirâmide áurea. Diz-se que uma pirâmide de base quadrada é áurea quando a razão entre o dobro da sua altura e o lado da base corresponde a $\sqrt{\phi} \approx 1,272....$ A grande pirâmide (pirâmide de Quéops) tem altura 146,59 m e a lateral da sua base tem 230,3 m. Executando os cálculos:

$$\frac{2 \times 230,3}{146,59} \approx 1,272....$$

O curioso deste fato é o nível de precisão com os quais os elementos dessa construção, que remonta 4500 anos, relaciona-se ao número de ouro, apesar dos instrumentos de medida. Este mesmo fato repete-se ainda na pirâmide de Quéfren com altura 65,00 m e comprimento da lateral da base 143,50, mas com menor precisão, o que levou estudiosos do Egito antigo a discussões se tais construções teriam sido planejadas a partir do número ϕ, investigação ainda inconclusiva.

Há ainda outros registros que levam a crer que os babilônios e os egípcios aproximavam π através da igualdade das razões entre os perímetros e áreas de polígonos circunscritos e sua circunferência. Tudo isso nos faz perceber que esses povos já percebiam a existência dos números irracionais ainda que de forma empírica.

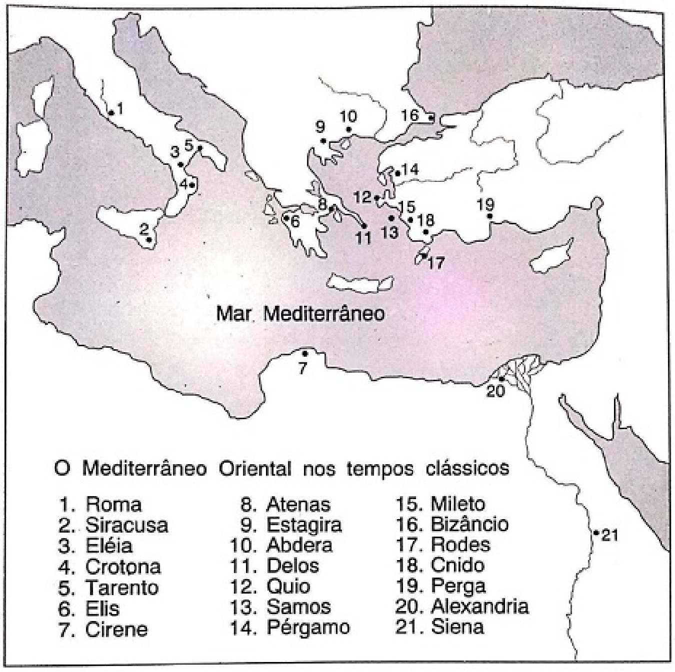
3.2 "Na crise dos incomensuráveis"

Na Grécia, as discussões em torno da matemática tomam um outro formato devido ao estilo de vida na pólis. O cidadão no exercício da sua cidadania, no mundo grego antigo, tinha assegurado o direito ao debate público e a discussão das controvérsias. A valorização da habilidade de persuasão impulsionou a predileção pela racionalidade e deslocou o modelo geométrico das medidas dos povos antigos para um que privilegiava a geometria em sua essência.

Platão em sua dialética faz críticas a esse método de produção consagrando a filosofia como único meio eficaz de alcançar a distinção entre as ideias particulares das verdades puras e universais, estabelecendo assim a oposição entre razão e opinião, devotando à matemática o caráter da disciplina do abstrato por excelência, onde Aristóteles inaugura o rigor da demonstração pautada em sua lógica, que julgava a validade a partir de uma cadeia de conclusões o que está muito bem representado nos trabalhos de Eudoxo, Hipócrates e Euclides.

Os gregos Tales de Mileto e Pitágoras de Samos são as figuras mais antigas associadas com descobertas matemáticas específicas e ao mesmo tempo sua produção está envolta em nebulosidade já que os relatos de seus feitos sempre se dão por fontes indiretas posteriores. Muita matemática já havia sido produzida e executada sobre um outro aspecto pelas sociedades do vale do Crescente Fértil[6] com tendências mais aplicadas a problemas específicos. Mileto e Samos, de onde Tales e Pitágoras eram originários, localizavam-se no extremo leste da bacia do Mediterrâneo, próximos dos centros culturais do conhecimento da época (Egito e Babilônia) - conforme mostra a Figura 3.5, essa proximidade privilegiada permitiu-lhes adquirir e aprimorar os conhecimentos desses povos sobre astronomia e matemática.

Figura 3.5: Colônias Gregas no Oriente Próximo na Antiguidade



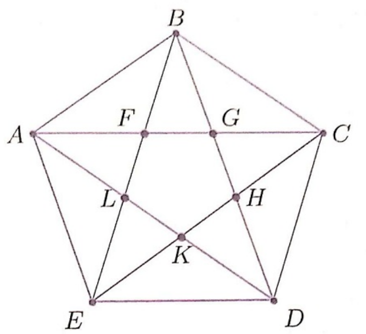
Fonte: Eves, 2004

[6]O Crescente Fértil é considerado por muitos o berço da civilização. Cortado pelos rios Tigre, Eufrates, Nilo e Jordão a região tem o formato de uma lua crescente, o que lhe dá nome, em suas terras propícias para a agricultura viu o florescer das civilizações mesopotâmicas, egípcia, israelita, persa e fenícia. Atualmente abriga territórios da Palestina, Jordânia, Israel, Líbano, Kuwait e Chipre e partes do Egito, da Síria, do Irã e da Turquia.

Absorver elementos de outra cultura e ampliá-los dentro de sua perspectiva parece ter sido uma vocação dos sábios gregos como a história demonstra. Quanto aos números irracionais, sob esse aspecto, podemos observar que a utilização particular de suas aproximações, obtidas por processos manuais e empíricos para problemas numéricos específicos foi substituído pela análise da consistência das grandezas incomensuráveis.

Uma evidência da conexão dos conhecimentos entre as civilizações do Oriente Antigo e a Grécia pode estar no símbolo da escola pitagórica: o pentágono estrelado ou pentagrama que já era uma figura presente na arte babilônia de acordo com tabletes e vasos que remetem a 3200 a.C. onde a figura aparece entalhada. Esta figura é construída a partir das diagonais de um pentágono regular que se intersectam de modo que a medida do comprimento da diagonal está para a maior parte assim como a maior parte está para a menor. Os pontos determinados pelas interseções das diagonais constituem um novo pentágono regular no centro da figura original o que nos sugere, pelo menos em tese, que temos a possibilidade, de replicar a figura original indefinidamente procedendo infinitamente.

Figura 3.6: Pentágono estrelado



Fonte: Roque e Carvalho

Euclides, em seu livro IV dos elementos, denomina esse processo de dividir um segmento em média e extrema razão, mas os gregos tinham tanto apreço por esse procedimento que designavam esse processo simplesmente por secção como se quisessem dizer que essa era a forma adequada de particionar um segmento de reta.

Algumas versões argumentam que a descoberta da incomensurabilidade teria ocorrido por meio dessa figura, possivelmente por Hipaso de Metaponto no século V a.C. no processo de criar uma série de pentágonos e pentagramas encaixados indefinidamente com tamanhos cada vez menores, o que pode ser usado para provar que o lado e a diagonal do pentágono não admitem uma unidade comum, isto é não são comensuráveis, uma vez que admitindo uma unidade para mensurar ambas, por menor que ela seja, sempre podemos repetir o processo, obtendo um pentágono com diagonais e lados menores que a unidade estabelecida. Assim teria sido $\sqrt{5}$ a expor a existência da incomensurabilidade e não $\sqrt{2}$ como afirmam as versões mais tradicionais que refutam veementemente essa tese, alegando que elas exigiam mais conhecimento geométrico do que os gregos dispunham a época.[7]

O que todas as narrativas não contestam é o fato da descoberta ter-se dado no seio da escola pitagórica. É comum dentro da narrativa tradicional, depararmo-nos com o relato de um escândalo lógico que tal descoberta teria desatado e ocasionado uma crise dentro da matemática da época. Os argumentos que sustentam essa versão e os que se opõem a ela, levam em conta que a escola pitagórica, mais do que um grupo de matemáticos, compunha-se como uma seita adepta a visões esotéricas e místicas sobre o papel dos números na explicação do cosmos ao contrário dos demais filósofos da época que estabeleciam os elementos físicos como a causa de tudo.

> O número um, diziam eles, é o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par, ou feminino, o número da opinião; três é o primeiro número masculino verdadeiro, o da harmonia, sendo composto de unidade e diversidade; quatro é o número da justiça ou retribuição indicando o ajuste de contas; cinco é o número do casamento, união dos primeiros números verdadeiros feminino e masculino; e seis é o número da criação; o sete representava os astros errantes visíveis e conhecidos da época que vieram a dar nome os dias da semana; e por fim o dez era o número do universo representando a soma de todas as possíveis dimensões geométricas. (BOYER, p.36, 1996)

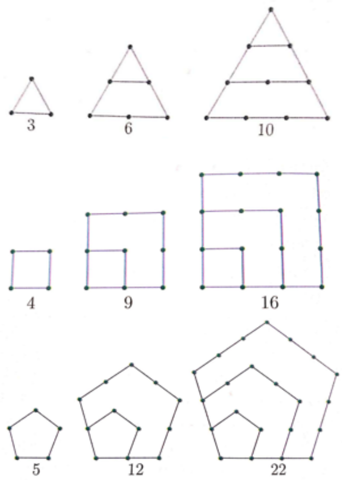
A máxima "tudo é número" pode parecer um tanto chistosa do nosso ponto de vista atual pela contradição que carrega com o fato de que para os pitagóricos apenas os naturais[8] recebiam o status de número, sendo as frações não um ente único existente por si só, mas uma relação entre inteiros. A aritmética dos inteiros era, portanto, estabelecida por meio da manipulação de certas configurações das bolinhas que representavam esses números, chamados de figurados.

Segundo Roque e Carvalho (2012), informações como "todo número quadrado é obtido por meio da soma de dois triangulares consecutivos" eram obtidas de forma visual. Assim nos dias de hoje há uma discussão quanto ao Teorema de Pitágoras ter sido desenvolvido de fato por Pitágoras ou qualquer um de seus discípulos, o que pelo costume da época, iria render-lhe os créditos de igual maneira. Como já mencionamos na seção 3.1, os babilônios já tinham conhecimento sobre as triplas

[7]Para o leitor interessado na tese menos tradicional, que a descoberta da incomensurabilidade teria se dado a partir da proporção áurea do pentagrama, consultar von Fritz, 1945.

[8]Nesse aspecto o Oriente antigo se sobressai: no Egito, além dos naturais, o domínio dos números incluía as frações unitárias e na Babilônia, todo corpo das frações racionais da base 60.

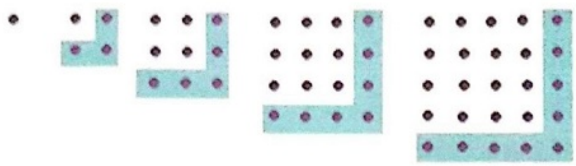
Figura 3.7: Números pitagóricos figurados



Fonte: Roque, 2012

pitagóricas evidenciando que esta relação já era conhecida possivelmente desde o século XVIII a.C. De qualquer forma o certo é que o Teorema de Pitágoras dentro da escola pitagórica não teve tratamento geométrico.

Figura 3.8: Gnomons utilizados na aritmética pitagórica



Fonte: Roque, 2012

É a partir desse fato que pretendemos lançar mão dos questionamentos sobre a suposição do trauma da descoberta dos incomensuráveis na versão mais tradicional uma vez que o número $\sqrt{2}$ teria sido produzido pela aplicação do teorema no cálculo da diagonal do quadrado. A concepção pitagórica previa que existissem dois inteiros cuja razão resultasse em tal número, mas com esta suposição os pitagóricos chegavam inevitavelmente a um paradoxo sobre a paridade desses inteiros.

O escândalo atribui-se ao impasse que teria acometido os pitagóricos: ou estavam eles diante de uma entidade que fugia a suas explicações pois não era um número inteiro e tampouco se exprimia pela razão de outros inteiros ou seriam as suas crenças que estariam equivocadas. As lendas a favor dessa versão contam que Hipaso de Mataponto, a quem se atribui a descoberta, foi jogado ao mar por ter tido o atrevimento de produzir algo no Universo que seria inexplicável pela lógica dos números, outras versões contam que ele foi expulso da seita e ainda em vida teve seu túmulo erigido como indicativo de que estava morto por tamanha blasfêmia.

Segundo Gonçalves e Possani (2009), a tese que defende o escândalo conta com autores da Antiguidade, que fazem deferência ao fato. A figura de Pitágoras como matemático chega a nós por meio de Proclo (485 d.C.) que lhe faz referência por meio de um escrito de história da geometria devida a Eudemo (320 a.C.) cujo texto original não se tem notícia, mas se supõe que Proclo tinha uma cópia deste quando fez a citação.

> "E após esses, Pitágoras transformou a filosofia sobre ela [a geometria] em um esquema de educação liberal, procurando os princípios dela a partir do alto e perseguindo os teoremas de um modo imaterial e intelectual; e ele descobriu então tanto o assunto dos irracionais como a construção dos esquemas cósmicos [isto é, os sólidos regulares]" (PROCLO apud. GONÇALVES e POSSANI, p.17-18, 2009)

Jâmblico (330 a.C) é um outro autor que faz menção aos fatos, dizendo que seria Hipaso de Metaponto (470 a.C) um usurpador da fama da descoberta da incomensurabilidade na ocasião de uma investigação geométrica sobre o dodecaedro regular, comunicando esta descoberta a pessoas comuns, consideradas indignas da revelação o que se constituía como crime contra a seita e justificaria sua terrível punição - afogamento ou ostracismo. Temos ainda Papus de Alexandria que faz menção aos fatos, mas interpreta a punição de forma conotativa.

> "Essa ciência (ou conhecimento) teve sua origem na seita (ou escola) de Pitágoras, mas passou por um importante desenvolvimento nas mãos do ateniense, Teeteto[...]. De fato, a seita (ou escola) de Pitágoras foi de tal forma afetada por sua reverência por essas coisas que uma história tornou-se corrente nela, a saber, aquele que primeiro desvendou o conhecimento de inexprimíveis ou irracionais e o divulgou entre a massa de gente comum pereceu por afogamento; o que é mais provavelmente uma parábola pela qual eles procuraram expressar sua convicção de que, primeiro, é melhor esconder todo inexprimível, ou irracional ou inconcebível no universo e, segundo, a alma que por erro ou descuido desvela ou revela qualquer coisa dessa natureza que esteja nela ou neste mundo, vaga (por isso) aqui e ali no mar da não-identidade (isto é, carecendo de toda similaridade de qualidade ou acidente), imersa no fluxo do vir-a-ser e do deixar-de-ser, onde não há padrão de medida." (PAPUS apud. GONÇALVES e POSSANI, p. 18, 2009)

Por fim temos Oscar Beker que em seus estudos aponta para uma sequência de proposições do livro IX de Euclides referentes a paridades dos inteiros que aparentavam vir de uma tradição mais antiga e mais simples que os demais livros e seriam, portanto, uma sistematização lógico-dedutiva da aritmética pitagórica. Com isso ele sustenta que o pitagorismo teria conhecimento suficiente para elaborar a prova por absurdo da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado como anunciada por Aristóteles, sendo tal prova a afronta a sua doutrina primeira de explicar tudo por meio de inteiros.

O primeiro argumento a ir contra a versão do escândalo lógico sustenta-se no fato de as fontes que fazem referência a Pitágoras serem sempre posteriores e algumas bem posteriores: enquanto as descobertas são alocadas ao século V a.C., bem como a existência de Pitágoras, os escritos de Jâmblico localizam-se cerca de oitocentos anos depois ao passo que o relato de Proclo, fonte mais segura em defesa de Pitágoras como matemático segundo Gonçalves e Possani (2009), está praticamente mil anos a frente. Suspeita-se que hajam interpolações anacronísticas e mal entendidos por conta de gregos posteriores. Não havia por exemplo, razão para Eudemo, enquanto destacado discípulo de Aristóteles, referir-se a matemática de Pitágoras por meio dos termos imaterial e intelectual enquanto seu mestre distinguia os pitagóricos dos verdadeiros matemáticos porque esses últimos aplicavam suas proposições a corpos. Outra contestação nessa linha é de que o texto de Proclo parece mais uma reformulação de Jâmblico no *De communi mathematica scientia* quando este se refere à pureza, sutileza e exatidão do método de Pitágoras e a como sua matemática purifica a alma e a conduz para os mais altos princípios e para o reino do ser puro e imaterial dando sentido ao uso dos termos imaterial e intelectual por parte de Proclo.

De acordo com Gonçalves e Possani (2009) já é um consenso dos historiadores da matemática e da filosofia gregas que Proclo interpolou o texto de Jâmblico no de Eudemo, porque originalmente este falava pouco ou nada de Pitágoras, colocando em xeque a ideia de que seria verdadeiramente um matemático ou uma invenção de neopitagóricos como Jâmblico (que viveu 800 anos depois de seu mestre).

Os textos de Jâmblico não são claros em diversos aspectos! Não se sabe se Hipaso teria sido o único delator da descoberta dos *alogos - inexprimível* ou *aratos - não tendo razão* ou se haveria outros. Também não se consegue obter qualquer ligação entre a construção do dodecaedro e o problema da incomensurabilidade o que para um neopitagórico como ele seria de máxima importância elucidar. Atualmente existe também a suspeita de que os pitagóricos conhecessem o dodecaedro apenas de forma empírica e nunca chegaram a construí-lo. Essa teoria é levantada por Eva Sachs e se apoia em evidências arqueológicas: existência de dodecaedros de bronze já nos séculos IX ao VI a.C.

Os próprios pitagóricos não deixaram escritos, possivelmente apoiados na ideia que suas descobertas ficariam retidas na memória daqueles que merecessem tomar conhecimento delas como Plutarco, o historiador, traz em seu relato. Aliás Plutarco que é anterior a Jâmblico e seu contemporâneo, Papus de Alexandria, não apresentam qualquer menção a uma crise entre incomensurabilidade e a teoria pitagórica de que tudo é número, além de dar uma interpretação alegórica as punições sofridas pelos delatores dos feitos dentro da seita.

Outro ponto levantado contra a crise dos incomensuráveis é o fato dos autores não fazem uma ligação clara do contraste entre a incomensurabilidade e a filosofia de que tudo é número. Para Gonçalves e Possani (2009), isso exigiria a conexão de três requisitos por parte dos pitagóricos: a oposição entre pares e ímpares o que é um consenso entre os historiadores, uma aritmética capaz de demonstrar teoremas sobre pares e ímpares e aqui já não há mais consenso pois sabe-se que a aritmética no pitagorismo não tinha um tratamento lógico-dedutivo e por fim uma prova da incomensurabilidade que recorra a pares e ímpares, o que Burkert (1962) apud. Gonçalves e Possani (2009) aponta como impossível no seu trabalho de reprodução com seixos das provas indutivas e pictóricas típicas do pitagorismo que recorria aos padrões visuais para dispor as pedrinhas e representar os números. Como representariam $a^2 = 2b^2$?

Uma prova por redução ao absurdo, presente em manuscritos do livro X dos Elementos de Euclides, atribuída a Aristóteles mostra que ele tinha conhecimento de que a suposição da comensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado conduzem a contradição de números pares serem iguais a números ímpares. Para o pitagorismo, isto não seria essencialmente uma contradição, já que o número um, a unidade, é ao mesmo tempo par e ímpar, portanto da suposta demonstração por absurdo poderia simplesmente levar a conclusão que cada número é feito de unidades e carrega dentro de si, o par e o ímpar. De qualquer forma ele não faz qualquer menção a crise dos incomensuráveis dentro do pitagorismo, ainda que lhes dedique uma forte crítica em sua Metafísica.

Diante de uma conexão tão duvidosa entre a filosofia pitagórica e a descoberta da incomensurabilidade, colocamos em xeque o vislumbre das grandezas incomensuráveis no seio do pitagorismo. Não há sequer certeza da relação entre o Teorema de Pitágoras e a descoberta dos irracionais visto que os babilônios e chineses conheciam o Teorema, mas não chegaram nos irracionais. O mais palpável é que na Grécia tenha ocorrido o mesmo e a incomensurabilidade tenha sido abordada primordialmente como um problema da Geometria livre sem essa carga filosófica que lhe atribuem, já que o grau de sofisticação deste tema não permitiria surpreender ninguém que não fosse suficientemente instruído em matemática.

Muito provavelmente tenhamos sustentado a visão a favor da versão "descoberta dentro da aritmética pitagórica" baseado no espanto que nós, fruto de uma matemática mais recente, sentimos com a existência de grandezas incomensuráveis que é absolutamente contraintuitiva: como não imaginar que duas grandezas físicas sempre terão uma unidade em comum? De modo que a crise dos incomensuráveis é muito mais um processo anacrônico da historiografia que se deu quando os intérpretes fizeram a leitura dos personagens e fatos históricos não nos termos destes, mas nos seus próprios.

3.2.1 Antifairese e proporções de Eudoxo, as evidências de uma não-crise

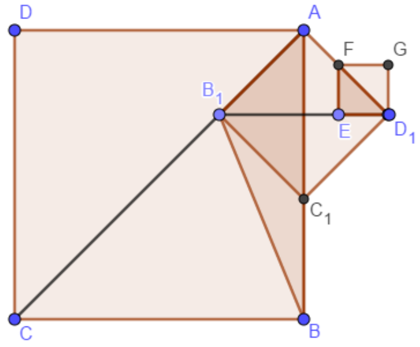
Gonçalves e Possani (2009) indicam que a geometria grega dispunha de uma ferramenta que lhes permitiria lidar com a incomensurabilidade sem crise alguma. A etimologia da palavra antifairese remete ao grego antigo *anti-hypo-hairesis* que significa literalmente subtração recíproca. A antifairese permite definir e comparar razões sem a necessidade dos conceitos de número racional, fração ou relação de proporções. O procedimento era empregado na aritmética do século V a.C., segundo o peripatético *De lineis insecabilibus* atribuído a Aritóteles. Alguns estudiosos afirmam que por trás dos livros II e X dos Elementos haveria um interesse de estudar a antifairese de razões quadráticas.

Em se tratando ainda dos Elementos, no livro X, a versão aritmética da antifairese fica conhecida como lema de Euclides estabelecendo um paralelo entre coprimos e incomensuráveis. Nas palavras de Roque e Carvalho (2012), o objetivo deste volume da obra de Euclides seria distinguir números que têm uma boa antifairese dos que têm uma má antifairese, o que basicamente significa verificar quando o procedimento mdc de dois números é diferente de 1. No caso geométrico, duas grandezas estariam na mesma razão quando possuem a mesma antifairese, isto quer dizer que ambas poderiam ser medidas com uma unidade comum, enquanto que se as diferenças não terminam nunca, isto é o processo é não finito, as grandezas são incomensuráveis.

Vamos empregar esse procedimento para concluir a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado.

Seja um quadrado $ABCD$, tomemos um ponto B_1 sobre a diagonal AC tal que $B_1C = AB$. Sobre B_1 baixemos uma perpendicular a AC definindo C_1 na interseção entre o lado AB e esta perpendicular. Traçamos C_1D_1 e AD_1 paralelas a AB_1 e B_1C_1

Figura 3.9: Antifairese



Fonte: o autor, 2020

respectivamente, definindo o ponto D_1 na interseção destas duas retas. Observe que de fato temos um qudrado, pois $AB_1 \perp B_1C_1$ por construção, AD_1 é paralelo a B_1C_1 então $AD_1 \perp AB_1$ e como D_1C_1 é paralelo a AB_1 podemos concluir que os dois últimos ângulos determinados por esses segmentos são retos também.

O triângulo AB_1C_1 é isósceles de base AC_1, pois sendo AC diagonal de $ABCD$, $B_1\mathrm{A}C_1 = 45°$ assim temos $AC_1B_1 = C_1AD_1 = AC_1D_1 = 45°$ o que acarreta na congruência dos triângulos AB_1C_1 e AD_1C_1 pelo caso LAA_o (lado/ângulo/ângulo oposto), garantindo a igualdade dos quatro lados.

Fizemos $BC = B_1C$ logo BCB_1 é isósceles com $B_1BC = CB_1B$, mas sendo assim $B\hat{B}_1C_1 = C_1B_1B$ pois ambos são complementos de um ângulo reto. Assim,

$$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB$$

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1 = AB - AB_1 = AB - AC + AB = 2AB - AC$$

Senso assim, supondo o segmento AP como unidade de medida, se AB e AC são comensuráveis em relação à AP, AB_1 e AC_1 também serão.

Repetindo indefinidamente o processo podemos tornar essas quantidades ainda menores, até o ponto de obter um quadrado de lado AB_n e diagonal AC_n cujos comprimentos serão menores que AP por menor que esta seja. Assim a escolha de AP e a suposição de AB e AC comensuráveis nos leva a $AB_n < AC_n < AP$ de modo que se diminuíssemos a unidade de medida AP ainda seria possível construir algum quadrado cujas dimensões fossem inferiores a AP, portanto somos levados a concluir que AB e AC são incomensuráveis.

Enquanto existe uma discussão para verificar a ocorrência ou não de uma crise dos fundamentos do pitagorismo, não resta dúvida que essa descoberta ocasionou um cisma entre o tratamento das grandezas e o universo dos números de forma definitiva ou em termos mais atuais a separação entre aritmética e geometria. Como acontece em geral na matemática, o problema dos incomensuráveis motivou descobertas interessantes e novos desenvolvimentos.

A existência de grandezas incomensuráveis demandava uma teoria de razões e proporções que fosse além da igualdade de números, uma vez que esta não era suficiente para explicar os fatos envolvendo incomensuráveis, já que a razão de incomensuráveis não podia estar associada a razão de suas medidas.

Nos Elementos de Euclides encontramos uma teoria das proporções devida ao platônico Eudoxo capaz de sobrepor a ideia da razão de grandezas pela razão de números e dissolver a mixórdia que os incomensuráveis traziam a tona. Na verdade, encontramos várias definições de razão nos Elementos de Euclides e isso se deve principalmente ao fato de que ao contrário do que erroneamente se fala sobre essa ser um tratado unicamente de geometria, na verdade ela estabelece a estrutura lógico dedutivo mínima (ao ver de Euclides) da geometria plana (livros I a VI), espacial (livros XI a XIII) e teoria dos números (livros VII a IX) sempre fazendo um tratamento separado dos números e das grandezas.

No livro VII (contexto aritmético) encontramos a definição $a : b :: c : d$ (lê-se a está para b assim como c está para d) enunciado como segue: "as áreas dos retângulos ad e bc se equivalem" o que corresponde na nossa notação atual a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. Porém essa definição vale apenas para segmentos comensuráveis.

No livro V encontramos um conjunto de quatro definições que dão fundamento a teoria das proporções de Eudoxo. A primeira estabelece razão como relação de tamanho de duas grandezas do mesmo tipo, isto faz referência a homogeneidade das grandezas, já que no contexto grego, o manejo de segmentos de reta se dava somente entre segmentos de reta, áreas entre áreas e assim por diante de modo que a natureza das grandezas deve ser observada. A segunda diz que duas grandezas possuem uma mesma razão entre elas se podem ultrapassar-se mutuamente quando multiplicadas o que equivale em nossa notação a $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $ma > nb$, assim fica estabelecido um critério operatório para determinar se duas grandezas possuem uma razão.

A terceira definição traz um critério para comparar duas razões entre grandezas. Em linguagem atual, traduz-se como: as grandezas homogêneas a, b, c, d são proporcionais, se e somente se, para todo par de inteiros positivos m e n temos um dos casos abaixo:

- se $ma < nb$ então $mc < nd$.

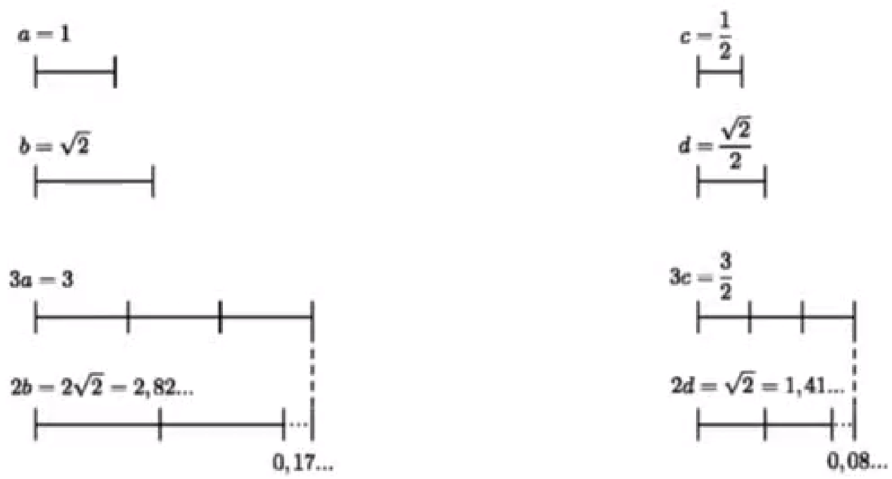
- se $ma = nb$ então $mc = nd$.

- se $ma > nb$ então $mc > nd$.

Esta definição nos diz que um conjunto de grandezas está em proporção quando a primeira e a terceira são expandidas ou contraídas pelos mesmos inteiros da mesma forma que a segunda e a quarta. Vejamos um exemplo:

Tomando os números $a = 1, b = \sqrt{2}, c = \dfrac{1}{2}$ e $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ao multiplicar a e c por 7 e b e d por 5 observamos que $7a < 5b$ assim como $7c < 5d$. Se procedemos analogamente utilizando os inteiros 2 e 3, percebemos que $2b < 3a$ bem como $2d < 3c$. Vejamos a Figura 3.10:

Figura 3.10: Proporções e grandezas incomensuráveis



Fonte: Roque, 2015

Assim Eudoxo introduziu uma noção de razão de grandezas puramente geométrica e distinta da razão entre números, de modo que a segunda é um caso particular da primeira (sempre que as grandezas forem comensuráveis). Por fim na última definição é estabelecido que grandezas que estão na mesma razão são chamadas proporcionais.

Segundo Roque e Carvalho (2012), alguns historiadores acreditam que a definição eudoxiana de proporção teria inspirado Dedekind a elaborar a teoria dos cortes. De fato, podemos observar que a definição de Eudoxo produz um corte de racionais, mas não há registros de que Dedekind tenha obtido seus resultados a partir de Eudoxo.

Reescrevendo os itens I e III da ideia de Eudoxo, segundo uma interpretação moderna, podemos vislumbrar conexões entre Eudoxo e Dedekind. Sejam m e n inteiros e $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ em que a, b, c e d são números quaisquer, temos:

I) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ II) $\dfrac{a}{b} > \dfrac{n}{m}$ e $\dfrac{c}{d} > \dfrac{n}{m}$ III) $\dfrac{a}{b} < \dfrac{n}{m}$ e $\dfrac{c}{d} < \dfrac{n}{m}$

Por I entendemos que existem infinitos racionais $\dfrac{n}{m}$ simultaneamente a esquerda de $\dfrac{a}{b}$ e de $\dfrac{c}{d}$ e por II pensamos nos racionais $\dfrac{n}{m}$ a direita de $\dfrac{a}{b}$ e de $\dfrac{c}{d}$. Pela proporcionalidade de $\dfrac{a}{b}$ e de $\dfrac{c}{d}$ sabemos que não há qualquer racional entre os dois o que nos leva a concluir que $\dfrac{a}{b}$ produz um corte que é único e serve para Dedekind definir os números reais, o que seria feito cerca de 2000 anos depois.

O livro X dos Elementos faz um tratamento sistemático dos segmentos incomensuráveis, sendo o mais volumoso com 115 proposições, tratando basicamente de radicais quadráticos, equações quadráticas cujas raízes necessitavam de análise de comensurabilidade e o que veríamos hoje como técnicas de racionalização de denominadores para expressões do tipo $a \pm \sqrt{b}$ e $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Segundo Boyer (1996), esse livro foi o mais admirado até o advento da álgebra moderna baseado no emprego da álgebra geométrica dos gregos que parece ter sido o recurso acessível na falta do conceito de número real para obter um maior grau de generalidade. Contudo o próprio Euclides enxergava seu livro dentro da geometria, quando as proposições 2 e 3 deste livro repetem o que está posto nas duas primeiras proposições do livro VII sobre a aplicação do algoritmo de Euclides para números inteiros, mas transpondo para o contexto das grandezas.

3.3 Nos três problemas clássicos da antiguidade e seus desdobramentos modernos

Há mais algumas ocorrências de números irracionais na matemática grega que merecem lugar nesse relato. Começamos pelas discussões que podem ter servido de matéria-prima para o décimo volume do Elementos de Euclides entre Teodoro de Cirene (470 a.C) e seu discípulo Teaetetus de Atenas(417 - 369 a.C), relatadas por Platão, de quem ambos gozavam de estima. Mestre e discípulo discutiam distinções entre grandezas incomensuráveis com o comprimento e com o quadrado. Para exemplificar essa distinção vejamos que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são incomensuráveis com o comprimento mas seus quadrados são comensuráveis. Entretanto números como $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ e $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ são incomensuráveis tanto com o comprimento quanto com o quadrado.

Segundo Eves (2004), em 425 a.C. Teodoro ampliou a lista dos irracionais conhecidos ao construir os segmentos $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ e demonstrar sua irracionalidade. Não se sabe ao certo que método utilizou: algumas versões contam que teria sido a espiral de triângulos retângulos com um vértice comum sendo o primeiro o triângulo retângulo isósceles, outras versões indicam que Teodoro teria obtido $\sqrt{n}$ como cateto de um triângulo retângulo onde a hipotenusa seria $n+1$ e o outro cateto $n-1$. Também não se sabe por quais razões suas construções pararam em $\sqrt{17}$. Quanto a demonstração da irracionalidade destes, a suposição é que tenha seguido àquela atribuída a Aristóteles e que foi interpolada posteriormente nos Elementos.

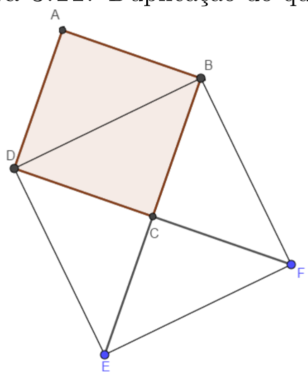
Este trabalho de Teodoro vem a reforçar a percepção do gosto que os gregos tinham por sua álgebra geométrica. Dentro desse rol temos os três problemas clássicos da Antiguidade: duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção do ângulo. Objetivamente, não se sabe ao certo quando ou quem os teria formulado, mas o fato é que entre lendas e verdades, a busca da solução para esses três problemas estimularam a curiosidade e a ambição de matemáticos ao longo de séculos e milênios, contribuindo de forma tão significativa para a evolução da matemática que se torna impraticável mensurar com exatidão todos os desdobramentos em técnicas, novos conhecimentos e inclusive áreas do saber que surgiram em razão dessa busca. Hoje já se sabe que dentro dos limites estabelecidos, as construções solicitadas pelos três problemas são impossíveis e a conexão desta impossibilidade com números irracionais são no mínimo intrigantes.

Contam lendas antigas que o povo da cidade de Atenas, afligido por uma praga, teria recorrido ao oráculo de Delos, dedicado ao deus Apolo, para que os deuses interviessem ao seu favor extirpando a peste. Como resposta, o oráculo havia determinado que os atenienses construíssem um altar para Apolo preservando sua forma cúbica original, mas dobrando o volume. Foi feita uma tentativa frustrada que resultou em um cubo com oito vezes o volume do original o que consequentemente não freou o alastramento da epidemia que continuou a fazer vítimas.

Esta história fantástica nos remete a origem do problema a duplicação do cubo que propunha a construção de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado a priori, mas a construção só poderia fazer uso de uma régua sem graduação e um compasso (instrumentos euclidianos). A princípio parece tratar-se de um problema de geometria plana! Teremos encontrado a solução do problema quando pudermos construir um segmento de medida $\sqrt[3]{2}$.

Os gregos detinham conhecimento sobre um problema bastante similar e aparentemente mais simples: duplicar o quadrado. Dado um quadrado $ABCD$, podemos traçar a sua diagonal BD e a partir dela construir um quadrado de lado BD. Seja $EF \parallel BD$ de modo que $\overline{BD} = \overline{EF}$. É fácil perceber que BDEF tem o dobro da área de $ABCD$. Assim dado um quadrado de lado a é possível encontrar um outro quadrado de lado $b = a\sqrt{2}$ cuja área seja o dobro da área do primeiro, sendo b a medida da diagonal do quadrado original. Veja a figura 3.11:

Figura 3.11: Duplicação do quadrado



Fonte: o autor, 2020

Note que esta construção é possível, porque o segmento de medida $\sqrt{2}$ é construtível. Provavelmente os gregos pensaram em uma solução análoga para o problema da duplicação do cubo. Diz-se que Arquitas de Tarento (428 a.C. a 347a.C.) teria dado uma solução tridimensional a partir de um cone circular reto, um cilindro e um toro cujas superfícies encontram-se determinando o segmento $\sqrt[3]{2}$. O que impressiona aqui é a maneira como Arquitas deu essa solução sem nenhuma geometria analítica na época. Hipócrates (440 a.C.) teria atacado o problema por meio das médias proporcionais reduzindo o problema a construir a aresta do cubo como $\sqrt[3]{2}$. Mas tal segmento é construtível? Os algebristas notáveis do século XIX descobriram que não.

É certo que alguns matemáticos ainda persistem incansáveis na busca de soluções, ignorando o fato da impossibilidade de obter as mesmas já ter sido demonstrada. Talvez pelo fato de ser possível obter uma solução aproximada e geral dentro de alguns contextos. Por exemplo: é possível trissectar qualquer ângulo se a régua estiver graduada. Sendo a régua não graduada, ainda podemos trissectar os ângulos reto e raso, construindo um triângulo equilátero e o ângulo de 135° por meio de um quadrado. Ainda na antiguidade, Arquimedes forneceu a trissecção do ângulo por meio de propriedades da espiral. Possivelmente são esses casos particulares de solução que mantém as esperanças dos matemáticos incautos em alcançar a solução geral do problema.

O jovem Evariste Galois, nascido em 1811, foi um gênio precoce. Com apenas 22 anos deixou registrado resultados de monta para o desenvolvimento da álgebra no século XX. Estudando a solução de equações por radicais determinou critérios para a possibilidade das construções com régua e compasso além de complementar e enriquecer a teoria dos números algébricos iniciada por Gauss que ocuparia um lugar central dentro da teoria dos números e que hoje se vê como uma das mais belas e profundas da matemática.

O problema da duplicação do cubo recai numa equação do tipo $x^3 - 2 = 0$ cuja raiz não é construtível já que esta é um número algébrico de grau 3, o Teorema das Construções Geométricas (adaptado da teoria de Galois) nos contará que somente números algébricos cujo grau é uma potência de 2 podem ser construídos a partir de segmentos unitários. Portanto o teorema das construções geométricas traduz a construtibilidade na tarefa de encontrar uma equação de grau 2^n e coeficientes inteiros.

Assim com o objetivo de trissectar o ângulo de 60°, devemos ser capazes de construir o ângulo de 20° a partir do segmento unitário, o que nos levaria a necessidade de construir um segmento de tamanho cos 20°. Vejamos pois um triângulo retângulo ABC, reto em B, cujo ângulo em A seja de 60° tal que $\overline{AB} = 1$. Devemos, portanto, definir o ponto D no cateto BC de forma que BAD = 20°, isto requer a construção do segmento AD que corresponde a sec 20°. Da reciprocidade entre cos 20° e sec 20° podemos afirmar que só seria possível construir o segundo se pudermos construir o primeiro. No exemplo 2.40, fazendo $x = 20°$, vimos que cos 20° é irracional e uma das soluções da equação $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Lembrando que cos 60° $= \dfrac{1}{2}$ e fazendo $\cos x = y$, obtemos

$$\frac{1}{2} = 4y^3 - 3y \Longleftrightarrow 8y^3 - 6y - 1 = 0,$$

uma equação polinomial de grau 3, cujas raízes não podem ser obtidas por construções euclidianas de acordo com o Teorema das Construções Geométricas.

Dos três problemas da antiguidade, a quadratura do círculo sem dúvida é o mais famoso e igualmente o mais difícil de provar sua impossibilidade. Pelo menos assim o foi para os gregos que durante muitos séculos acreditaram que o problema de construir um quadrado de área igual ao círculo tomando a medida do raio como unidade de comprimento e utilizando apenas régua não graduada e compasso era apenas muito difícil e não impossível. Vejamos que tal forma impõe ao círculo uma área de π unidades, portanto o quadrado desejado deveria ter lado $\sqrt{\pi}$. É um fato muito bem conhecido na teoria das construções geométricas que se pode construir o segmento de comprimento x^2 a partir dos segmentos de comprimento 1 e x. Desta forma construir o segmento $\sqrt{\pi}$ implicaria em poder construir o segmento π, mas este número não é solução de qualquer equação algébrica, isto é, π é dito um número transcendente (que não é algébrico) e do teorema das construções geométricas, temos a garantia a impossibilidade de tal construção e a insolubilidade do problema.

O problema da quadratura pode ser entendido como a gênese do método de exaustão devido a Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.) que daria origem ao cálculo integral. A partir desse método a distinção entre boa aproximação e exatidão do pensamento acentua-se. Eves (2004) faz constar que os chineses davam $\frac{355}{113} = 3,1415929$, enquanto os hindus empiricamente determinavam $\frac{22}{7} < \pi < \sqrt{10}$. No Egito antigo, como já ressaltamos, consta no papiro de Rhind um problema que nos dá $\frac{8}{9}$ como aproximação de π.

A primeira tentativa de calcular o valor de π partiu da comparação dos perímetros dos hexágonos regulares inscrito e circunscrito de uma circunferência unitária por Arquimedes ainda na Grécia antiga. Conhecidas as fórmulas de duplicação dos perímetros do par inscrito e circunscrito de polígonos regulares, os cálculos puderam avançar: em 1593 o holandês Adrien van Roomen conseguiu 15 casas decimais corretas a partir de um polígono de 2^{30} lados, ven Ceulen melhorou esse resultado obtendo 30 casas decimais corretas usando um polígono de 2^{62} lados em 1621 e em 1630 tivemos a última tentativa relevante do cálculo pelo método dos perímetros obtendo uma aproximação com 39 casas corretas. Daí para frente há registros de aproximações feitas por frações contínuas no século XVII e por séries de Gregory e relações trigonométricas nos séculos seguintes.

A partir do século XX, a tarefa de calcular aproximações do π passaram para os computadores. Numa primeira tentativa, em 1949 o ENIAC obteve 2037 casas decimais corretas em 1973 já eram um milhão de casas corretas a partir de um CDC 7600. O cálculo de um número muito extenso de casas decimais de π é importante na computação tanto para desenvolver sistemas de programação como para testes do funcionamento de computador novo.

Não podemos deixar de citar a demonstração da irracionalidade de π feita por Lambert em 1767 de π^2 por Legendre em 1794. Para uma leitura curiosa e surpreendente de ocorrências do π ao longo da história dos quais citamos apenas alguns recomendamos *A cronologia* π em Eves (2004) p. 141-148.

Por tudo que foi visto aqui não podemos deixar de associar problemas de construção geométrica com a teoria dos números algébricos e transcendentes que começa a se desenvolver em meados do século XVIII e segue fascinando matemáticos. Sabemos que existem os números transcendentes e que todos eles são irracionais (mas nem todo irracional é transcendente) mas provar que um determinado número é trascendente costuma ser bastante complicado. A primeira demonstração que e é transcendente deve-se a Hermite (1822-1901) em 1873, a demonstração da transcendência de π ocorreu em 1882 por Lindemann(1852-1839). Sabe-se que números da forma a^b com a algébrico diferente de 0 ou 1 e b irracional é um número irracional algébrico. Tal resultado foi obtido por Alexsander Osipovich Gelfond (1906-1968) em 1934 trinta anos depois que Hilbert lançou o problema da verificação da transcendência de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ que ficou conhecido como número de Hilbert mas um número como π^π é uma questão em aberto.

3.4 Na trigonometria e nos logaritmos

É curioso observar que mesmo as funções trigonométricas admitindo valores irracionais na maioria dos casos notáveis, a história da trigonometria não é associada a números irracionais. Faremos aqui uma breve explanação de como originalmente a tabela de senos, cujas aproximações encontramos nas tabelas atuais e empregamos amplamente nos problemas modernos, foi obtida a partir da trigonometria grega da antiguidade.

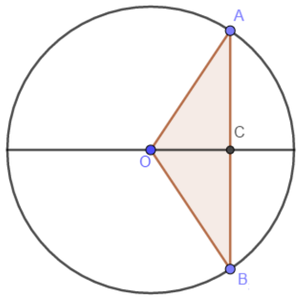
A trigonometria é uma criação grega destinada as necessidades da astronomia, navegação e cartografia que remonta os antigos conhecimentos dos babilônios. Recebeu contribuições de vários povos dentre eles hindus e mulçumanos. Seus estudos iniciais levavam em conta triângulos esféricos, o que de qualquer forma pressupunha conhecimentos da trigonometria plana. Os gregos acreditavam que a Terra era uma esfera envolta por outra de diâmetro muito maior onde ficavam as estrelas fixas cujo movimento era consequência da rotação da esfera celeste e os corpos errantes, chamados de planetas, o que incluía o Sol e a Lua vagueavam em movimento uniforme sobre a superfície da esfera.

Para obter relações entre ângulos e segmentos os gregos trabalhavam com cordas de circunferência. Eles a dividiam em 360 partes denominadas grau e ao optar pelo antigo sistema sexagesimal babilônio poderiam executar cálculos com mais facilidade do que sua tradição original envolvendo múltiplos e submúltiplos do ângulo reto. Na figura 3.12 temos uma noção de como os gregos procediam seu cálculo com cordas e como podemos relacionar a corda com o seno de um ângulo.

Admitindo o raio como 60 (unidade do sistema sexagesimal) temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{corda}\, AB}{OA} = \frac{1}{120}\, \text{corda}\, AB.$$

Figura 3.12: $sen\alpha = \frac{1}{120}\text{corda}AB$



Fonte: o autor, 2020

O Almagesto de Ptolomeu (90 - 168) é considerado a obra prima da antiguidade com relação ao assunto. Seu objetivo era descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, estreando e estabelecendo a teoria do geocentrismo que só seria contestado no século XV. Chegando até nós por interferências árabes como seu próprio título sugere, encontramos nele uma tabela de cordas devidas a Hiparco de Niceia (190 a.C a 120 a.C.) das quais nossas tabelas trigonométricas modernas descendem.

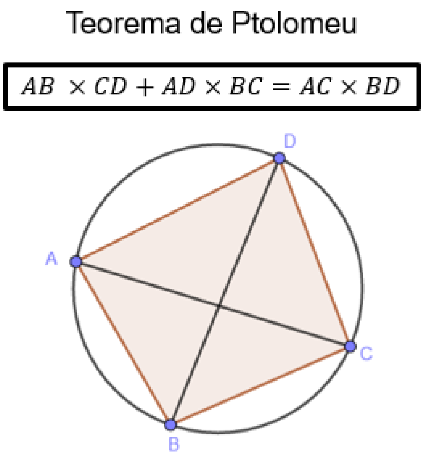
Já eram conhecidos os comprimentos das cordas referentes aos ângulos centrais 72° e 60°, que correspondem aos ângulos centrais do pentágono e do hexágono regular, figurais de bastante interesse desde outras épocas. A partir disso Hiparco teria utilizado o teorema dos quadiláteros inscritíveis de Ptolomeu em um quadrilátero cujo maior lado fosse o diâmetro do círculo trigonométrico para obter a corda da diferença de dois arcos conhecidos. Na Figura 3.13 podemos ver o teorema de Ptolomeu para quadiláteros inscritíveis e em 3.14 como Hiparco teria procedido para obter seus resultados.

Sejam os arcos $AB = \alpha$, $AC = \beta$ e AD o diâmtero do círculo, então temos $AC = \text{corda}\,\beta$ e $BD = \text{corda}\,(180°-\beta)$, a corda do seu suplemento bem como $AB = \text{corda}\,\alpha$ e $BD = \text{corda}\,(180°-\alpha)$, a corda do seu suplemento. Daí,

$$120 \times BC = AC \times BD - AB \times CD$$

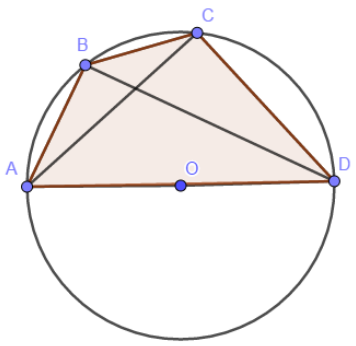
$$120\text{corda}\,(\beta - \alpha) = \text{corda}\,(\beta)\text{corda}\,(180 - \alpha) - \text{corda}\,(\alpha)\text{corda}\,(180 - \beta).$$

Figura 3.13: Teorema de Ptolomeu para quadrados inscritíveis



Fonte: o autor, 2020

Figura 3.14: Teorema da corda da diferença

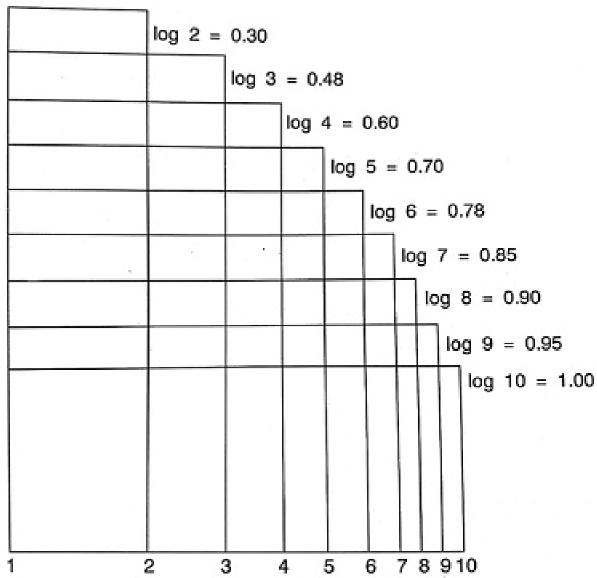


Fonte: o autor, 2020

Similarmente se pode obter procedimentos para o cálculo da corda metade e da corda soma de dois arcos o que permitiu a Hiparco construir uma tabela dos senos dos arcos de 0° até 90° com incrementos de 15´´, o que lhe permitiu resolver vários problemas de astronomia, cálculo de sombras e fazer resolução de triângulos.

Esta abordagem da astronomia por meio da trigonometria permaneceu em destaque até o Renascimento quando seu desenvolvimento viu-se acelerado por conta da necessidade de velocidade e precisão nos cálculos para os mapas e obtenção de rotas. Segundo essa mesma necessidade, surgiram os logaritmos com sua maravilhosa capacidade de converter multiplicações e divisões em adições e subtrações respectivamente. Para cálculos extremamente complexos como aqueles advindos da astronomia, da navegação e das atividades comerciais que estavam ganhando cada vez mais força, esta possibilidade significou o aumento da precisão já que os eventuais erros cometidos pelo volume de contas poderia ser menor.

Figura 3.15: Régua logarítmica



Fonte: Eves, 2004

John Napier (1550-1617) tinha conhecimento do método da prostaférese, que a partir de fórmulas tirgonométricas, podia reduzir longas multiplicações e divisões a somas e diferenças. É provável que sua invenção tenha sido influenciada por esse método antigo, mas o que de fato alicerçou sua visão dos logaritmos foi a associação entre os termos de uma progressão geométrica $(b, b^2, \ldots, b^m, \ldots)$ e aritmética $(1, 2, \ldots, m, \ldots)$ - ver Figura 3.15.

Napier percebeu que escolhendo ≈ 1 teria suficiente proximidade dos termos em progressão para que por meio de interpolações preenchesse as lacunas entre as correspondências anteriores. Assim, Napier tomou $b = 1 - \dfrac{1}{10^7} = 0,9999999$ e para evitar os decimais multiplicava cada potência por 10^7. O logaritmo neperiano de N, era o número L tal que

$$N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L \tag{3.1}$$

O tratamento computacional no desenvolvimento dos seus cálculos justifica muito bem as escolhas de Napier. Veja que por 3.1 se $N = 10^7$, temos $L = 0$ e para $N = \left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right) = 9999999$, virtualmente temos $L = 1$. Ainda em 3.1, podemos observar que, dividindo N e L por 10^7, obtemos um sistema de logaritmos de base[9]

[9]Vale ressaltar que originalmente em seus trabalhos, Napier não utilizou o conceito de base de um logaritmo.

$\frac{1}{e}$. De fato,

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Napier desenvolveu sua teoria durante 20 anos e publicou sua abordagem em 1614 num texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, algo como Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos. De acordo com Eves (2004), o impacto positivo foi tanto que toda a Europa rapidamente adotou a invenção e o notável astrônomo francês Laplace afirmou que os logaritmos duplicaram a vida dos astrônomos diminuindo seu penoso trabalho com os cálculos.

No ano seguinte a publicação de Napier, Henry Briggs (1562 - 1631) após reconhecer a genialidade da invenção de Napier sugeriu que as tábuas fossem refeitas, levando em conta que o logaritmo de 1 fosse zero e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente o que veio a dar origem aos logaritmos decimais dos dias de hoje. Esses logaritmos tem uma vantagem computacional já que nosso sistema de numeração é decimal. Briggs passou dez anos desenvolvendo sua ideia e publicou em *Arithmetica logarithmica* uma tábua com os logaritmos comuns dos números 1 a 20000 e de 90000 a 100000 com quatorze casas decimais algo que só veio ser superado entre 1924 e 1949 com publicações de tábuas de logaritmos com vinte casas decimais pela ocasião do tricentenário da descoberta dos logaritmos.

Por fim temos a invenção das réguas de cálculo logarítmicas retas em que as distâncias entre os números são proporcionais aos logaritmos indicados. Eves (2004) explica que esse instrumento operava com um par de ponteiros como se fosse um compasso fazendo deslizar duas escalas uma ao longo da outra efetuando multiplicações e divisões pela adição e subtração dos segmentos da escala e que veio recebendo aprimoramentos nos séculos seguintes e hoje diante das calculadoras e computadores cada vez mais modernos caíram totalmente em desuso figurando como peças de museu.

3.5 Na história recente

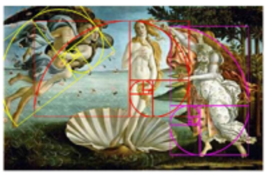
As narrativas em história da matemática dão um salto gigantesco entre o século III a.C. quando viveu Euclides e o século XV d.C. quando a Europa volta a desenvolver matemática. Este período envolve o processo de dominação islâmica marcado por práticas sociais e técnicas que levaram a investigações teóricas e o pensamento científico explicando a prática.

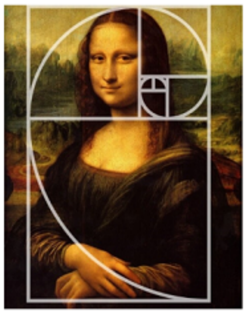
Os autores indicam que a exemplo do que havia nas culturas da antiguidade oriental, a matemática volta a se restringir ao tripé pragmatismo × recreação × pedagogia, adequando-se as regiões comerciais do antigo Império Romano, agora sob domínio do Islã. Exemplo disso é o desenvolvimento da matemática italiana a partir de Fibonacci (1170 - 1250) e seu *Liber Abaci* destinado as chamadas escolas de ábaco, daí o nome livro do ábaco, instituições com o objetivo de se ensinar matemática prática: cálculo com numerais indianos, regra de três, juros simples e compostos e o método da falsa posição para jovens.

O *Liber Abaci* apresentou uma álgebra desconhecida dos europeus com notações de extrema utilidade como os algarismos hindu-arábicos, sistema posicional de numeração e frações, adquirida por Fibonacci em suas viagens comerciais pela bacia Mediterrânea. O aclamado problema dos coelhos de Fibonacci, que daria visibilidade a uma das sequências mais instigantes ao pensamento humano, especialmente depois de serem verificadas relações com o número de ouro e sua presença em diversos padrões de fenômenos naturais, também surge nesse contexto. Devemos registrar que o termo "sequência de Fibonacci" foi cunhado apenas no século XIX bem como uma fórmula geradora dos termos dessa sequência, devido a Binet (1786-1856).

Nesse meio tempo, a sequência de Fibonacci foi apropriada pela arte, arquitetura e até mesmo por ramos das ciências naturais para explicar padrões de crescimento na natureza como a filotaxia.

Figura 3.16: Retângulo áureo nas Artes





Fonte: o autor, 2020

Quando a matemática na Europa retorna o seu olhar novamente a problemas mais abstratos, gerais e de consistência chegamos ao século XVI com uma álgebra que não dispunha de uma notação universal. Os símbolos eram introduzidos e assimilados num ritmo vagaroso. Nessa época Christoff Rudolff (1499 - 1545) introduz o símbolo $\sqrt{}$ em 1525 em alusão a abreviação da letra r, inicial da palavra raiz, o que permitiria escrever radicais em geral.

As equações algébricas eram particularizadas pelos coeficientes numéricos (não havia uma representação geral para estes) e tratada em casos dentre os quais negativos sequer eram admitidos. Sem dúvidas estes fatos contribuíram para o atraso no processo de teorias de resolução de equações por fórmulas. Viéte (1540 -1603) deu importantes contribuições na universalização das notações algébricas quando desenvolvia seus estudos de equações cúbicas e quárticas. Chama atenção que a essa época notações que se traduziriam na atualidade como $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ demonstram nenhum desconforto com o uso e emprego de fórmulas de soluções que envolvem números irracionais a ponto de sentirmos que esses números passam sem nenhum destaque pelo período.

Viéte chegou a empregar trigonometria na resolução de equações cúbicas a exemplo do que fizemos na seção anterior com o problema da trissecção do ângulo. Ele e matemáticos como Bombelli (1526 - 1572), Cardano (1501 - 1576) e Tartaglia (1499 - 1557) dedicaram-se a descobrir soluções por radicais de equações cúbicas, quárticas e quínticas, mas séculos depois seriam dois gênios precoces de morte igualmente precoce, Niels Henrik Abel (1802 - 1828) e Évariste Galois (1811 - 1832) que estabeleceriam a impossibilidade de resolver equações gerais quínticas por meio de radicais.

Muitos dos resultados não publicados de Galois vieram a público anos depois após o empenho de outros grandes matemáticos como Joseph Liouville que publicou vários de seus manuscritos e memórias e possivelmente se beneficiou destes para dar suas contribuições a recém-nascida teoria dos números algébricos iniciada pelos trabalhos de Gauss e desenvolvida por Kummer (1810-1893), Kronnecker (1823 - 1891) e Dedekind. Liouville foi o primeiro a provar que existem números irracionais transcendentes definindo pela série $\sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$ o que hoje chamamos de constante de Liouville. De lá para cá, já se sabe que todo número de Liouville é um número transcendente, mas o contrário não é verdade. Como discutimos na Seção 2.8 a teoria dos números algébricos e transcendentes é das mais belas e profundas dentro da matemática atual e um campo de pesquisa promissor com muitos problemas ainda em aberto.

Devemos ressaltar também a ocorrência de irracionais na teoria das probabilidades nos trabalhos de De Moivre (1667-1754) e Conde de Buffon (1707 - 1788) e o problema das agulhas estreando a probabilidade geométrica[10] e o problema das car-

[10]Recomendamos a leitura "Números irracionais" de LIMA (2016), conforme referências.

tas mal endereçadas que Nicolaus Bernoulli (1687 - 1759) propôs a Euler que além de resolvê-lo brilhantemente com o que ficaria conhecido como teoria das permutações caóticas ainda mostrou que esse número é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$[11].

Leonhard Euler é o autor de várias das notações que usamos hoje como e para a base dos logaritmos naturais e π para a razão entre o comprimento e o diâmetro de um círculo além de muitas outras que não estão diretamente ligadas ao histórico dos números irracionais, mas são de amplo uso. Os logaritmos naturais foram descritos pela primeira vez por Nikolaus Mercator (1629-1687), mas foi Euler quem por volta de 1730 estabeleceu a exponencial e o logaritmo como inversos. A Euler também se deve a fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$ que relaciona de forma simples e bela números cuja existência sempre foi relacionada a grandes evoluções da matemática.

Dedekind interessou-se pelos irracionais quando ministrava aulas de cálculo. O pensamento corrente a sua época era que a continuidade dos pontos sobre uma reta vinha da densidade, mas os racionais tem a propriedade de densidade e no entanto não formam um contínuo. Indagando sobre esse fato, Dedekind fez a conclusão contrária! Não seria a ligação dos pontos no segmento, mas sim a divisão deste em duas partes por um ponto, o que deu origem a sua teoria dos cortes que permitiu formar um *continum* de números reais. Nas palavras de Boyer:

> Em qualquer divisão dos pontos do segmento em duas classes tais que cada ponto pertence a uma e somente uma, e tal que todo ponto numa classe está à esquerda de todo ponto da outra, existe um e só um ponto que realiza a divisão [...] expresso aritmeticamente, isso significa que para toda divisão dos números racionais em duas classes A e B existe um e um só número real que produz essa *Schinitt* ou corte de Dedekind. Se A tem um maior número, ou se B contém um menor número, o corte define um número racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor, então o corte define um número irracional. (BOYER, p.390, 2004)

A geometria ajudou, mas foi excluída da defnição aritmética formal na busca pelo rigor e com isso a ideia de corte substituiu a grandeza geométrica que ocupava espaço relevante na análise.

Observa-se que Dedekind hesitou num primeiro momento a publicar seus pensamentos, os quais se referia como uma observação trivial capaz de revelar o segredo da continuidade. Outro que se enveredou na busca por sanar os imbróglios do contínuo e do infinito foi Cantor que seguiu um caminho radicalmente distinto do seu contemporâneo e amigo Dedekind com quem trocava correspondências e em certa ocasião escreveu "Eu vejo isso, mas não acredito" tão paradoxais eram os resultados obtidos.

[11] Para este sugerimos "As permutações caóticas respondem: qual a probabilidade da brincadeira de amigo oculto dar certo?" de Almeida, 2016.

Os primeiros interesses de Cantor eram referentes a teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas esta última o conduzindo a Análise o que resultou em sua bela teoria de abordagem dos números irracionais a partir de sequências convergentes e uma teoria dos números transfinitos, dando um tratamento ao infinito com certo grau de analogia a aritmética dos números finitos o que o lançou para a construção de sua obra prima: a teoria dos conjuntos de Cantor.

A teoria dos conjuntos de Cantor permitiu um avanço magnífico nas teorias matemáticas no final do século XIX, introduzindo mais clareza, generalidade e rigor em vários domínios da matemática além de novas possibilidades de demonstrações. Um dos primeiros resultados dessa teoria, bastante surpreendente, estabelece o conjunto dos racionais como enumerável o que não condiz com a intuição por conta da propriedade da densidade. A partir daí Cantor propôs-se a gerar uma hierarquia de conjuntos infinitos e isso dá origem a sua aritmética dos transfinitos.

Cantor prova ainda que o conjunto dos números algébricos é também enumerável (Teorema 2.51), mas dá uma prova indireta e muito questionada de que o intervalo $(0, 1)$ contém uma quantidade não enumerável de elementos. O método utilizado ficou conhecido por diagonalização de Cantor, supondo que o intervalo é enumerável podemos organizar uma sequência com todos os números do intervalo e observar que dessa disposição é possível obter um número que ainda não apareceu na nossa lista, concluindo, portanto que a hipótese inicial está equivocada. Em termos muito simplificados, o que Cantor faz é construir um número irracional que não está na lista a priori, mas ele vai bem além e estabelece a existência dos números transcendentes (ver detalhes no exemplo 2.50).

Desde então a teoria dos conjuntos de Cantor propõe duas subdivisões dentro dos números reais: racionais $\times$ irracionais e algébricos $\times$ transcendentes. Em cada caso temos o conjunto dos números reais como a união disjunta de ambas as classes de modo que a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$ decorre da não enumerabilidade dos irracionais na primeira e dos transcendentes na segunda. Curiosamente, a despeito de conhecermos bem menos exemplos de transcendentes, quase todos os reais são deste tipo e, portanto, irracionais (ver Figura 2.3).

Capítulo 4

Numa proposta de intervenção pedagógica

4.1 Algumas considerações sobre livros didáticos atuais

Conforme discutimos na nossa revisão de literatura, os livros didáticos são responsáveis por subsidiar boa parte do trabalho docente no ensino básico. Diante das dificuldades enfrentadas pelos professores desde sua formação, a abordagem e as tarefas propostas nos livros didáticos se sobressaem ao nortear o processo de transposição didática, chegando a ser muitas vezes o principal recurso para consulta de professores e alunos de forma que é oportuno observar e refletir sobre este importante recurso didático dentro da análise do problema dessa pesquisa.

Em suas investigações, Felix (2018), Santos (2013), Pommer e Pommer (2012) e Souto (2010) nos dão acesso a uma consistente análise de coleções de livros didáticos tradicionais na educação básica brasileira quanto a abordagem dos irracionais. Os referidos autores analisam a conceituação, conexão entre os temas tratados, adequação das figuras, exemplos, tarefas e intermediação pedagógica entre esses objetos. Embora as metodologias adotadas por cada um sejam ligeiramente diferentes, as observações feitas ao fim, são particularmente similares: a apresentação dos números irracionais geralmente se constitui em situações pragmáticas e ou empíricas envolvendo a aproximação de resultados sem maiores explicações.

Em Souto (2010) encontramos o maior volume de coleções analisadas (9 componentes do ensino fundamental e 5 do ensino médio) a partir de quatro pontos (definição, representação, tarefas e abordagem histórica). No item definição, o autor avalia como as definições dos objetos matemáticos colaboram na tarefa de conceitualização, o que em sua visão é algo mais amplo e delicado, envolvendo o item das representações. Para Souto (2010) é importante destacar que os objetos matemáticos se distinguem de suas representações e registros que podem ser verbais, simbólicos ou geométricos, mas que sem estas não há síntese de saber matemático, sendo necessária a coordenação de dois registros distintos, ao menos, para a compreensão de um conteúdo. Para Souto (2010) a abordagem histórica é a oportunidade de contextualizar o tema de forma interna a matemática ou externa no pertinente ao contexto sócio-cultural da época. Desta forma se avalia se a menção histórica apresenta-se deslocada da teoria e que serve apenas como informação adicional, dando ênfase a datas e nomes ou ajuda a problematizar enriquecendo a teoria e fundamentando técnicas, verificando também se essa abordagem se dá no decorrer do texto ou em anexos e apêndices.

Souto (2010) destaca as tarefas como fonte de interação e colaboração entre professores e alunos que estabelece os padrões práticos de ensino. Nesse sentido separa os exercícios que valorizam procedimentos e padrões de memória prévia daqueles que se centram na construção do conceito e exploração de múltiplas representações e explicação de raciocínio, promovendo domínio de conceitos. Dentro desses grupos, Souto (2010) enumera ainda as atividades mais frequentes no tratamento dos irracionais, conforme os objetivos da tarefa: classificatórios (verdadeiro $\times$ falso, pertinência, racional $\times$), encontrar fração geratriz, obter irracionais entre outros dois, calcular aproximações, sequenciar irracionais, representar números na reta real, estudo de intervalos numéricos.

A partir destes critérios, Souto (2010) faz um levantamento numérico levando em conta toda variedade comportada pelos itens apresentada nas obras exibindo-as em matrizes, conduzindo assim uma análise quantitativa-qualitativa que permite ver com bastante clareza os dados pesquisados.

Ao invés de apresentar uma nova análise dos mesmos livros que Souto (2010) já tem inclusas em seu trabalho, preferimos apropriamo-nos de sua metodologia para analisar as atuais coleções aprovadas pelo programa nacional do livro didático (PNLD) para fazer um levantamento das potencialidades e pontos onde há necessidade de uma complementação pedagógica segundo nossas referências para assim conceber uma proposta de intervenção pedagógica que sirva de subsídio para o professor ressignificar esse conteúdo em sua prática.

A coleção "A Conquista da Matemática" adotada dentro do programa PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) para o período 2020-2024 da editora FTD está em sua quarta edição. Os números irracionais são tratados nos volumes referentes aos oitavo e nono anos. No volume do oitavo ano, o conjunto dos números racionais é retomado com vistas, nas palavras do autor no manual do professor, para que o aluno possa explorar o conjuntos dos irracionais e dos reais estando essa progressão fundamentalmente associada a compreensão dos demais conjuntos numéricos já vistos pelos alunos. Os números racionais são então apresentados em situações cotidianas que enfatizem a inclusão de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Q}$. O autor afirma que todo racional é o resultado da divisão de dois números inteiros. A reta numérica é utilizada como instrumento para estabelecer a comparação de racionais e os algoritmos das quatro operações para racionais na forma fracionária e decimal são sistematizados, mas não justificados e seguidos de uma bateria de exercícios que visivelmente se propõe a promover a assimilação desses algoritmos. Temos uma abordagem de porcentagens num contexto altamente voltado para a matemática financeira para então o texto abordar as dízimas periódicas e suas frações geratrizes entre exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos similares aos resolvidos, havendo uma seção ao final do capítulo propondo-se a investigar a distinção entre decimais exatos e periódicos usando calculadora e uma seção de exercícios retomando os estudos da unidade.

O segundo capítulo do 8° ano pretende introduzir os números reais juntamente com o tema potenciação e raízes. Os números irracionais são apresentados por meio de exemplos que contrastam expansões decimais periódicas e aperiódicas sem muita conexão com o que foi feito anteriormente no capítulo. Por definição, diz-se que número irracional é todo número cuja representação decimal é sempre infinita e não periódica e que não pode ser representada na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$. Segue-se como atividade três exercícios classificatórios e o autor apresenta o conjunto dos números reais como reunião dos racionais e irracionais e as regras de fechamento das quatro operações dando uma ideia de gradação para induzir ao raciocínio da inclusão dos naturais pelos inteiros, dos inteiros pelos racionais e por fim dos racionais pelos reais propondo mais uma série de atividades sendo quatro classificatórios e três de ordenamento. Outra série de exercícios é proposta na seção retomando o que aprendeu com uma miscelânea de exercícios referentes aos assuntos do capítulo praticamente encerrando o tema neste volume. Não detectamos menção ao termo irracional ou o uso desses números em exemplos nos demais capítulos, exceto na apresentação de π como número irracional que aproxima a razão entre comprimento e diâmetro de qualquer circunferência. Neste momento também surge a fórmula da área do círculo e todos os exercícios propostos pedem para utilizar $\pi = 3,14$.

O tema é retomado no primeiro capítulo do volume seguinte, entitulado "A geometria e a descoberta do número irracional" que usa a relação do Teorema de Pitágoras de modo particular no triângulo retângulo isósceles para produzir radicais aritméticos. A abordagem é contextualizada com o cálculo aproximado de radicais e localização de irracionais na reta pelo transporte de medidas de segmentos de retas que correspondem as hipotenusas dos triângulos e que tem medidas irracionais. Temos quatro exercícios que simulam os procedimentos apresentados no texto e na sequência o número π é retomado aos moldes do que foi feito no volume anterior e acompanhado de seis exercícios. Repete-se também a sistematização dos números reais conforme a abordagem do livro anterior e três exercícios bastante similares e a discussão se envereda para a potenciação de números reais onde as bases em geral são inteiras ou racionais e os expoentes passam dos naturais aos inteiros e por fim racionais.

Na sequência não há mais menções aos irracionais. O capítulo seguinte trata de radicais aritméticos sem fazer qualquer conexão com os números irracionais. O foco é dado na álgebra das operações em meio a uma quantidade exorbitante de exercícios operacionais e até repetitivos em certo ponto. A potenciação com expoentes racionais que poderia ser um elo entre os dois elementos e um facilitador da aquisição, pelo aluno, dos mecanismos das operações com os radicais é apresentado ao final do capítulo sem fazer essa conexão. Na unidade 5, o autor começa a introduzir a geometria da semelhança por meio das ideias de razão e proporção de segmentos. A distinção entre segmentos comensuráveis e incomensuráveis é feita, mas não aprofundada ou contextualizada na história ao invés disso o texto desvia para as escalas como aplicação útil desse conhecimento e os quatro exercícios propostos tratam apenas de segmentos comensuráveis.

A partir da unidade 7 que trata do teorema de Pitágoras, agora de forma abrangente, e de relações métricas entre circunferências e figuras poligonais regulares, exemplos e exercícios com números irracionais tornam-se mais frequentes nos capítulos da unidade seguinte que trata de funções eles voltam a passar desapercebidos.

A coleção "Contato" adotada dentro do programa PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio) no período 2018-2020 da editora FTD está em sua primeira edição. O tema "números irracionais" aparece dentro do capítulo 1, que trata de conjuntos, no tópico conjuntos numéricos. Ao todo nove páginas desse volume de dedicam a este tópico e se propõem a retomar e aprofundar conceitos relacionados aos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}$ que já foram estudados nos anos anteriores.

Os números racionais são evocados a partir do problema da medida, a definição apresentada é a simbólica e muitos exemplos de decimais exatos e periódicos são mostrados bem como é mencionada a inclusão dos inteiros nos racionais e são citados os subconjuntos. Temos um grupo de exercícios resolvidos destinados a mostrar como determinar a fração geratriz de um número racional e na sequência um outro grupo de atividades com 11 questões propostas das quais três são classificatórios, dois de linguagem de conjuntos, três de ordenação, três de conversão entre as formas fracionária e decimal e percentual.

Os números irracionais surgem após esse grupo de exercícios. São apresentados como um complemento dos racionais quanto ao problema de medir e sua descoberta atribuída aos pitagóricos com menção ao caso da diagonal do quadrado. É dito que a representação decimal de $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não-periódicas e desta forma não admite ser escrito como fração de inteiros. As calculadoras e computadores são evocados para obter as expansões decimais com casas aproximadas. Raízes quadradas de números não quadrados perfeitos e cúbicas de não cubos perfeitos e o π são empregados como exemplos e tem sua representação decimal aproximada exibida. A seguir, a ideia de ordenamento é ilustrada numa figura que representa parte da reta real e o conjunto dos números reais é imediatamente apresentado como um conjunto infinito e ordenado que resulta da reunião de racionais e irracionais.

Na sequência temos uma nova seção de atividades. Em dois desses exercícios usa-se o Teorema de Pitágoras como instrumento para obter as medidas das diagonais de retângulos: um desses exercícios pede a classificação do resultado em racional e irracional enquanto no outro a finalidade é construir segmentos de reta cujo comprimento é dado por números irracionais, mas nada é dito sobre incomensurabilidade. Das demais atividades duas dizem respeito ao cálculo aproximado com radicais e uma delas utiliza o método de Herão e o uso da calculadora como forma de verificação do método. Há ainda uma atividade sobre ordenamento, linguagem de conjuntos, construção de exemplos sobre o não fechamento dos irracionais para o produto, um desafio retirado do ENEM relacionando frações e música e uma questão contextualizada envolvendo a sequência de Fibonacci e obtenção do número de ouro: o enunciado explica como obter novos termos da sequência a partir do terceiro e que a razão de qualquer termo pelo imediatamente anterior são valores aproximados para ϕ. Após enunciar estas propriedades, a questão pede para explicar porque ϕ não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ e para obter três aproximações para ϕ expandindo a sequência de Fibonacci.

Daí para frente temos exemplos isolados do cálculo de valor numérico de funções envolvendo radicais aritméticos. A maior concentração ocorre a partir do tratamento das funções exponencial e logaritmo, contudo não registramos nem mesmo nos capítulos referentes a estes temas, menção ao número e ou ao fato de que números da forma $\log a$ onde a não é potência de 10 são irracionais. Existe um exercício desafio associando a construção do retângulo áureo ao número de ouro na unidade sobre funções quadráticas. Chamamos a atenção para o fato de que a continuidade dos gráficos é tratada de forma absolutamente natural ainda que não se faça menção a ideia de densidade dos racionais ou irracionais dentro dos reais. A partir do capítulo 9 os autores iniciam o tratamento da geometria com a trigonometria do triângulo retângulo. Não há menção a comensurabilidade de dois segmentos, os irracionais cumprem um papel de ferramenta, aparecendo como medidas de razões trigonométricas dos ângulos notáveis ou do lado de algum polígono. A tabela trigonométrica apresenta aproximações dos seno, cosseno e tangente dos ângulos cujas medidas inteiras vão de 1° a 89° para a resolução de problemas, apenas no manual do professor se faz uma indicação de que o professor deve explicar que estes valores se tratam de aproximações de números irracionais. Os volumes seguintes, em essência, seguem essa forma.

Aplicando o crivo formulado por Souto (2010) concluímos que as duas coleções utilizam exemplos como fontes de conceituação, abusam de exercícios que valorizam a mecanização de memórias prévias e trazem pouquíssima contextualização histórica ao invés de usar essa contextualização para formular conceitos de forma aprofundada ao estabelecer relações internas e externas na matemática como da comensurabilidade e irracionalidade favorecendo a diversidade de registros e coordenação entre elas. Apresentamos a seguir nossa alternativa de complementação.

4.2 Aula 1 - Comensurabilidade, irracionais e construções geométricas

O objetivo geral da Atividade 1 é discutir a noção de comensurabilidade concretamente a exemplo de como faziam os antigos gregos, mostrando como se pode medir pares de segmentos usando uma unidade de medida comum para os dois (muitas vezes) um dos próprios segmentos) mas que há pares de segmentos em que isso é impossível. A partir daí podemos introduzir o contraste entre os conceitos de número racional e irracional associando concepções algébricas e geométricas e favorecendo uma compreensão aprofundada.

Pensamos em sugerir estas atividades conforme elas nos foram sugeridas em Santos (2013), fazendo uso dos instrumentos tradicionais de desenho geométrico (compasso, régua não graduada e esquadros), contudo o professor deve estar alerta quanto aos contratempos que podem surgir no desenvolvimento das tarefas: dificuldades dos alunos no manuseio correto dos instrumentos e até mesmo limitações físicas dos aparelhos. Alternativamente, para dirimir esses problemas o professor pode optar por conduzir a atividade com pedaços de barbante para simular os segmentos e fazer o transporte de medida de forma ainda mais eficaz ou até mesmo executá-la no ambiente do software Geogebra onde é possível movimentar segmentos de comprimento fixos previamente dados. Contudo esses pormenores que oferecem potenciais dificuldades devem ser mencionados mesmo na execução adaptada das aulas já que contribuíram de forma singular no desenvolvimento dos problemas relativos a comensurabilidade.

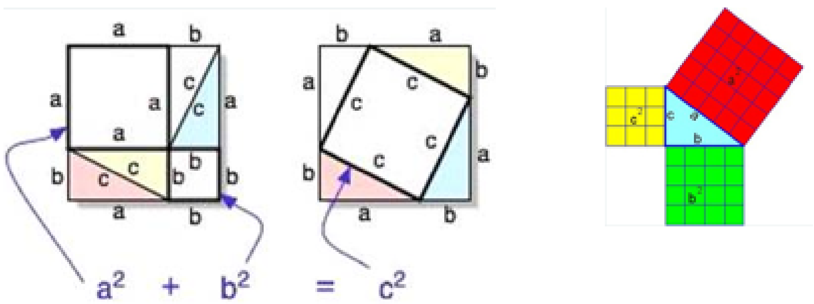
A primeira etapa desta sequência dedicar-se-ia de forma mais incisiva a mostrar as possibilidades de verificar que dois segmentos são comensuráveis. A essência dessa atividade está no significado do ato de medir assim é conveniente o professor fazer um recorte da evolução dessa noção ao longo do tempo ressaltando o papel de uma unidade de medida padrão adequada.

A segunda etapa apresenta um método de construção geométrica para obter um segmento de reta qualquer a partir de um segmento originalmente dado. Tal método tem sua execução e generalidade apoiada sobre o teorema fundamental da semelhança, dessa forma o professor pode estabelecer mais uma vez uma conexão entre ideias algébricas e geométricas. Após elucidar o método e seu funcionamento, propomos duas construções que podem ser executadas a partir da mediatriz de um segmento e do transporte de medida com compasso e a iteração do processo de construção o que permite ao aluno concluir que todos os segmentos representados por números racionais são comensuráveis.

A terceira etapa é um complemento a primeira. Apresentamos pares de segmentos comensuráveis, em particular o comprimento e o diâmetro da circunferência cuja razão é o número π. Ao propor que o experimento seja feito sobre distintos objetos pretendemos que o aluno verifique a incomensurabilidade destes pares de segmentos apesar dos possíveis tamanhos. Esta etapa pode estabelecer uma conexão com as representações decimais que serão discutidas na próxima seção de atividades, o professor pode solicitar que o aluno obtenha os valores das medidas e execute as razões para verificar o que seriam as aproximações de π. Com isso substituímos o empirismo que tradicionalmente permeia a abordagem de apresentação da irracionalidade de π pela sua representação como relação de dois segmentos incomensuráveis o que por definição faz dele um irracional.

Na quarta etapa trabalhamos com uma outra classe de irracionais: os radicais aritméticos. Como dissemos no capítulo anterior, existem fortes evidências de que o Teorema de Pitágoras não tenha de fato qualquer relação com a descoberta dos incomensuráveis mas pode ser um excelente recurso para ressignificar o conceito por detrás desses números além de que essa abordagem conjunta propõe a retomada do caráter geométrico do Teorema cujo conteúdo vem sendo reduzido pela presença massiva de exercícios essencialmente algébricos. O Teorema de Pitágoras coleciona mais de trezentas demonstrações e para este momento sugerimos aquelas que apelem fortemente para conceitos geométricos uma vez que estabelecem compreensão do fato de forma mais simplificada sem a necessidade de apelar para fatos complementares que nos desviariam o foco dos números irracionais.

Figura 4.1: "Demonstrações geométricas" do Teorema de Pitágoras



Fonte: Google, 2020

Estando esclarecido o conteúdo do Teorema de Pitágoras, vamos utilizá-lo como ferramenta para localizar os números irracionais da forma $\sqrt{p}$ onde p é primo. Vimos que os números irracionais correspondem a segmentos de reta incomensuráveis com a unidade, portanto não podemos localizá-lo na reta como fazemos com os racionais. Utilizando o Teorema de Pitágoras para obter segmentos de reta que correspondam a esses números e o compasso para fazer o transporte dessas medidas somos capazes de localizar esses números na reta real.

Esta atividade pode ser associada a ludicidade das artes gráficas, produzindo motivação como combustível para o aprendizado.

Figura 4.2: Espiral de triângulos retângulos e arte

Fonte: Google, 2020

4.3 Aula 2 - Representação decimal de números racionais e irracionais

O objetivo da Atividade 2 é caracterizar os números irracionais quanto a sua representação decimal infinita e não-periódica. Cada etapa dessa sequência gira em torno de uma situação onde o aluno é direcionado a verificar condições que estabelecem a aperiodicidade de uma representação decimal. Desta forma trabalhamos as duas definições de números irracionais coordenando ideias representativas diferentes do mesmo objeto o que favorece o aprendizado conforme Souto (2010).

Para início da primeira etapa, sugerimos que o professor retome a definição de número racional e os métodos de conversão entre as representações decimal e fracionária de um racional onde o aluno poderá relembrar a definição de fração de inteiros e o papel dos fatores no denominador. Vejamos nos parágrafos a seguir, como os itens da primeira etapa da atividade 2 exploram o tema dentro da teoria das probabilidades de um evento ocorrer dado um epsaço amostral finito.

Os itens "a" e "b" tratam de fazer o aluno observar sobre quais condições a divisão de dois inteiros resulta num outro inteiro ou num fracionário maior ou menor que um, relembrar as técnicas de conversão entre as formas fracionária juntamente com a análise do que é ser "ser mais ou menos provável".

O item "c" gira em torno da percepção das condições sobre as quais a divisão entre inteiros é decimal exato ou dízima periódica. Enquanto que o item "d" destina-se a perceber que é impossível a divisão de dois inteiros ser irracional e sendo este um evento impossível associado a probabilidade zero.

Os questionamentos seguintes ampliam o problema incluindo a reposição das fichas sorteadas e a ampliação da numeração das fichas até 20 e pretendem ampliar a percepção dos alunos quanto aos mecanismos do cálculo das probabilidades. Fazendo as comparações dos resultados item a item, o professor terá a oportunidade de formalizar a ideia de que as decomposições em primos no denominador são determinantes para as mudanças nas respostas. Podemos perceber que o problema fica cada vez mais complicado a medida que expandimos a quantidade de números primos incluídos na numeração das fichas pois os resultados dependerão do rastreio desses números. Este pode ser o momento mais conveniente para o professor discutir os Teoremas sobre representação decimal apresentadas no capítulo 2.

Na segunda etapa apresentamos a constante de Champernowne, cuja representação decimal é visivelmente construída pela sucessão dos números naturais, conclusão a ser retirada no item "a". No item "b" o aluno deverá aprofundar-se no padrão de formação indicado no item "a" e constituir um método eficaz para prever os dígitos da expansão decimal, dessa forma espera-se que os alunos percebam que diferente do que acontece com as dízimas periódicas, quanto maior a ordem da posição do dígito pedido mais difícil é prever que algarismo é esse. Este fato pode ser usado para principiar a conclusão de que este número é irracional como se pede em "c". Propomos um exercício similar com o número $1,101001000\ldots$ para fixar as ideias da discussão.

A terceira etapa pode ser iniciada da retomada da terceira etapa da atividade anterior. Esperamos que os alunos percebam que o valor do quociente entre o comprimento e o diâmetro de todas as circunferências gira em torno de 3,14 que é comumente estabelecido como valor aproximado da constante π. O uso da calculadora nesse momento é indicado como potencializador no sentido de acelerar o processo do cálculo e permitir que a experiência se concentre na análise dos resultados e seja ampliada analisando mais casos. Ainda nessa etapa, propomos uma segunda pesquisa que pretende investigar a distribuição irregular de dígitos na infinita expansão decimal de π que pode ser visualizada na página https://www.atractor.pt/mat/fromPI/PIsearch.html. Ao inserir um bloco de até oito dígitos consecutivos no buscador da página, podemos ver o número de ocorrências desse bloco dentro de um limite de observação que considera no mínimo 1000 e no máximo 2147483000 casas decimais (podemos ajustar esse limite de observações conforme nosso interesse) além de poder visualizar de qualquer uma dessas ocorrências. Dessa forma, entre os resultados que obtiver em comparação com os de seus colegas, o aluno deverá perceber que aumentando o limite de observação o número de ocorrências se distribuem de forma totalmente irregular levando a concluir que π é efetivamente irracional.

Estamos cientes de que essa é ainda uma observação empírica, contudo uma demonstração da irracionalidade de π é tão complicada e inapropriada nesse momento escolar que vemos nessa proposta um referencial adequado e mais profundo do que geralmente se faz nas apresentações de π nos livros didáticos. O fato é que o aluno não tem acesso aos conhecimentos necessários para compreender ou fazer uma demonstração efetiva da irracionalidade de π mas essa atividade visa que ele constitua uma argumentação satisfatória e embasada no conceito ao invés de meramente observar.

4.4 Aula 3 - Operações envolvendo números irracionais; Leis de fechamento e demonstração de resultados

Acreditamos que as duas atividades anteriores dão conta de apresentar os números irracionais conceitualmente de forma satisfatória a nível do nono ano do Ensino Fundamental. Indo pelo caminho normalmente adotado para outras espécies numéricas, temos o tratamento das operações aritméticas e suas propriedades. Propomos agora nesta terceira aula, algo similar para os números irracionais e que não costuma vir nos livros didáticos: um detalhamento do funcionamento das operações em $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$.

Conforme indicamos no Capítulo 2, há autores que cogitam a omissão do tratamento dos irracionais argumentando sobre a dificuldade conceitual e os poucos resultados práticos de tratar essa espécie numérica, contudo isso inevitavelmente abre uma lacuna no conhecimento dos alunos. Paralelamente assinalamos que a demonstração de fatos e propriedades matemáticas vem desaparecendo do ensino básico sob os mesmos argumentos. Graças a isso a disciplina vem sendo desenvolvida como um corpo de técnicas e procedimentos.

Dadas essas circunstâncias vimos oportunidade para aproveitar as características das demonstrações usuais sobre os conceitos e operações envolvendo números irracionais de acordo com o alerta feito por Schwarzenberger e Tall (1978) trazendo de volta o espírito argumentativo e a demonstração como objeto de consolidação de propriedades e fatos para o ensino básico conforme PCN, desta forma temos a oportunidade de apontar caminhos alternativos para dois problemas da educação básica cujas soluções se complementam no sentido de dirimir as dificuldades impostas por um e por outro.

Para que isso se dê, o professor mais do que nunca deverá assumir o papel de mediador para conduzir as etapas das demonstrações que compõem as atividades. Geralmente as demonstrações de irracionalidade sucedem por redução ao absurdo ou construção de contraexemplos, algo esperado haja visto que a definição de irracional está ligada a negação de uma condição de existência.

Um pequeno texto introdutório explicando a distinção entre a demonstração direta e a demonstração por absurdo, com ênfase nessa última, foi anexada no enunciado da primeira etapa com o intuito de tornar bastante acessível aos alunos da faixa etária indicada a execução da proposta. Exemplificamos os dois estilos de demonstração nos apropriando da transposição da linguagem quotidiana à algébrica que se espera que os alunos tenham contato desde o 7° ano do Ensino Fundamental conforme PCN e BNCC.

A princípio propomos a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ partindo da construção de uma igualdade algébrica que retrata a suposição da negação da tese, fazendo uso de argumentos e fatos gerais que podem ser observados no próprio desenvolvimento da demonstração, como a paridade de um inteiro ser condição necessária e suficiente para que o seu quadrado também o seja, chegasse a conclusão de que ambos os termos de uma fração que representasse em $\sqrt{2}$ deveriam ser pares ou equivalentemente perceber que a igualdade obtida em III é contraditória dadas as quantidades de fatores dois em cada membro sendo isto o que nos permite concluir a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

A forma como as demonstrações propostas foram fragmentadas para o aluno preencher focam em mostrar aos alunos as ações e os elementos de destaque de uma demonstração: conjecturação (hipótese), argumentação (fatos matemáticos gerais e conhecidos), conclusão (tese). O professor pode estimular demonstrações análogas para o aluno assimilar essa estruturação que além dos conhecimentos acerca dos irracionais traz reflexões sobre a estrutura do raciocínio lógico, verdadeira matéria da matemática.

As próximas demonstrações indicadas são feitas pela elaboração de contraexemplos o que pede ao aluno criatividade dentro de suas observações (competência prevista pela BNCC). É preciso deixar claro que o exemplo não serve para provar que vale, mas é útil para provar que não vale. Os radicais aritméticos, classe de irracionais mais estudada no Ensino Fundamental, pode ser amplamente explorada aqui, porém o professor do Ensino Médio poderia propor atividades similares a essas com logaritmos e números trigonométricos.

A segunda etapa dessa atividade traz a discussão da ideia de fechamento de um conjunto, resgatando o sentido dessa noção como algo que se estabelece intrinsecamente com relação a forma como a operação aplicada sobre elementos de um conjunto produz ainda elementos do conjunto, assim mostramos exemplos particulares restritos que permitem assimilar melhor o funcionamento dessa ideia e vamos em direção a conjuntos numéricos mais gerais abrindo espaço para a discussão da ampliação até o ponto de ruptura entre racionais e irracionais. O fechamento dos inteiros e a definição de racionais farão o papel de conhecimento matemático prévio que juntamente com a manipulação algébrica subsidiarão a possibilidade de concluir que os racionais são fechados para as quatro operações fundamentais. De posse dessa informação, o aluno poderá mostrar, com a técnica de redução ao absurdo, que somas e produtos entre racionais e irracionais são irracionais. Este movimento mimetiza a síntese e evolução do saber matemático: levantamento de hipóteses, apropriação e uso de conhecimentos matemáticos validados úteis, conclusão, generalização e aplicação. É importante que dentro desse processo o professor deixe claro que não há linearidade, portanto devemos valorizar as tentativas dos alunos e não censurar seus erros mas utiliza-los como potencializadores da percepção do porquê da estratégia ser considerada um equívoco e como chegar a estratégia correta.

Essa aula não se propõe a substituir o tratamento dos radicais aritméticos como propostos pela BNCC e PCN para o 9° ano do Ensino Fundamental mas permitem que o assunto seja tratado de forma qualitativa e ampla abrindo espaço para mais confrontos com registros distintos, representação algébrica e associação de definições abrindo espaço para um processo de contorno de obstáculos didáticos que favorecerão o aprendizado. Outra sugestão viável dentro desta situação é mostrar a equivalência entre os radicais e as potências de base positiva e expoente fracionário das quais o aluno poder-se-ia apropriar das propriedades operatórias destas para estabelecer as propriedades operatórias daqueles optando pelo uso de uma ou outra representação conforme a conveniência.

4.5 Aula 4 - Cálculo de aproximações

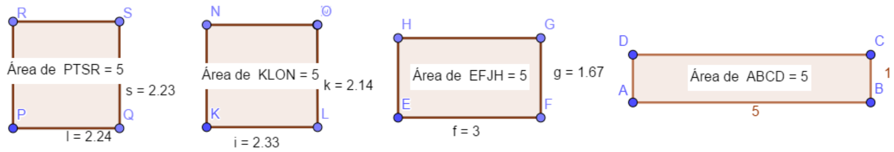
Essa sequência propõe-se a investigar a oposição entre aproximado e exato dentro da matemática, algo que costuma instigar e causar insegurança entre os alunos sobre quando e como está tudo bem utilizar aproximações para fazer cálculos. Os números irracionais são uma boa fonte para este debate já que nosso acesso a eles como recursos computacionais é essencialmente dado por aproximações racionais conforme Pommer (2012).

Este é o momento oportuno para enfatizar que não vivemos num mundo ideal onde nossas operações e problemas matemáticos lidam apenas com números inteiros, decimais finitos ou frações bem ajustadas como os livros, por excesso de exemplos, pretendem nos fazem crer. Qualquer medida abrange intrinsecamente algum erro decorrente de limitações físicas do processo de medir que podem ser relativos aos instrumentos utilizados ou a quem executa o processo de medição. Portanto o resultado de uma medida é sempre uma aproximação cuja lisura depende do grau de certeza ou precisão que podemos ter mediante a técnica executada e a ordem de grandeza do que se pretende medir. Fica então explícito que o problema a ser resolvido é o que define como devemos refinar uma aproximação para minimizar a incerteza e a propagação de erros.

A insegurança dos alunos advém de expressões como "adote $\pi = 3,14$", "use $\sqrt{2} = 1,4$", "considere $\sqrt{3} = 1,73$", frequentemente usados em exercícios de livros didáticos e exames como o ENEM onde o símbolo $=$ é empregado como abuso de notação quando pretende dizer que para aquela situação é suficiente tomar o irracional como aquele valor e não que é de fato igual àquele valor. As sociedades antigas já lidavam com aproximações na era pré-cristã conforme o capítulo 3. Buscamos neste fato uma sequência de atividades que possibilitasse o aluno entender na prática o que significa refinar uma aproximação com métodos iterativos capazes de fornecer resultados cada vez melhores, instruindo na direção desse julgamento.

A primeira etapa gira em torno de discutir a finalidade das aproximações quanto a cálculos consecutivos. A atividade pode ser realizada com apoio no desenho geométrico mas pode atingir maior grau de eficácia com o software Geogebra. A ideia da atividade é empregar o algoritmo babilônico para o cálculo aproximado de raízes quadradas (a calculadora deve ser utilizada substituindo o cálculo manual para potencializar o protagonismo da análise). Para cada iteração proponha a construção do quadrilátero retângulo cujas medidas dos lados sejam os números sugeridos no passo-a-passo, estimule o aluno a fazer os cálculos intermediários com a forma fracionária, discutindo como esse procedimento tende a minimizar a propagação do erro até que se chegue a um ponto onde seja interessante parar o processo. Sedimentado este conhecimento, o professor pode instigar o aluno como aplicar as novas ideias para cálculos do estilo $2^{\sqrt{5}}$.

Figura 4.3: Cálculo aproximado de $\sqrt{5}$ e áreas



Fonte: o autor, 2020

Esta etapa se conclui com um questionamento sobre a racionalização, outro ponto de instabilidade para os alunos: quando racionalizar? Para quê? As respostas para essa discussão podem surgir naturalmente quando se propõe o cálculo manual das formas decimais $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ que são indiscutivelmente o mesmo número mas o cálculo manual da aproximação é muito mais suave (e confiável) no primeiro caso.

A segunda etapa da aula pode se conectar de forma particular às 1ª e 2ª etapa da aula 3 onde se discutiu as operações com números irracionais, mas agora com o intento de contornar obstáculos didáticos que surgem aqui como herança da experiência do pensamento operacional dos demais conjuntos conforme apresentado em Corbo (2012). Aqui as observações restringem-se aos radicais aritméticos uma vez que a sugestão ambienta-se no nono ano, mas é possível para o professor do Ensino Médio fazer discussões similares envolvendo os logaritmos e os números trigonométricos neste mesmo segmento de Ensino. Novamente fazendo uso da calculadora, os alunos deverão usar as discrepâncias entre as aproximações para observar que:

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$
- $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

As duas sentenças a seguir por outro lado podem ser comprovadas com propriedades de potenciação:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

4.6 Aula 5 - Mais construções geométricas - quando algo é impossível de fazer por causa de algum número irracional

Esta última aula foi inspirada no trabalho de Mózer (2013) e pode ser proposta numa perspectiva avaliativa pois complementa bem tudo o que já foi feito até aqui ao retomar as definições de racional e irracional, construções geométricas e ideias relativas ao fechamento em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ e fazê-lo numa forma qualitativa abordando fatos interessantes da geometria que tem sua impossibilidade de ocorrer em decorrência de algum número ser irracional.

A execução demandará muitos conhecimentos prévios: classificação de triângulos quanto a medida dos lados e medidas dos ângulos, Teorema de Pitágoras, cálculo de áreas de figuras planas, coordenadas no plano cartesiano e no plano isométrico. Portanto é interessante que o professor faça uma revisão desses tópicos, especialmente sobre quais condições definimos um determinado tipo de triângulo pois a atividade desenvolve-se fundamentalmente dentro dessas informações.

Sugerimos mais uma vez o ambiente Geogebra para realização dessas atividades, uma vez que ele fornece janelas com as duas malhas, mas neste caso ela pode se tornar até mais significativa se executada no geoplano onde os alunos devem interpretar cada pino como um ponto do plano de coordenadas inteiras. A atividade começará com a tentativa de construir sete espécies de triângulos na malha, o professor deve deixar claro que é preciso estar atento para a possibilidade de existência para a construção evitando enviesamentos no sentido de obter resultados errôneas no esforço de conseguir fazer a construção ou mesmo a frustração de não obter algumas das construções cujo detalhamento da atividade nos mostrará depois o porquê da impossibilidade.

Após preencher a primeira tabela com os resultados obtidos, as duas questões que surgem têm suas respostas diretamente ligadas as peculiaridades do tipo de triângulo. O professor pode estimular a criatividade do aluno e sua visão de espaço sugerindo o uso dos eixos como suporte para construção e as translações de figuras. As conclusões vão para o papel! É hora de confrontá-las, refutá-las ou confirmá-las. As demonstrações funcionam como na aula 3: supõe-se por absurdo o contrário do que se pretende demonstrar, assim neste primeiro momento supomos que é possível existir um triângulo equilátero de coordenadas inteiras. Utilizamos então os conhecimentos já consolidados como ferramentas: fechamento dos inteiros para a soma e o produto, fórmulas do cálculo das áreas de triângulos e retângulos, manipulações algébricas e chegamos numa igualdade que não pode acontecer o que nos leva a conclusão da impossibilidade da construção. Podemos propor uma generalização do raciocínio explorado nessa etapa, tentando generalizar o problema para o uso de coordenadas exclusivamente racionais.

Trocando o plano de trabalho para a malha isométrica os procedimentos são análogos. É importante que o professor ressalte que todo ponto da malha isométrica tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Agora a impossibilidade recai sobre a construção de um triângulo isósceles cujos pontos sejam vértices do plano, impossibilidade advinda do fechamento do conjunto dos números da forma $\frac{\sqrt{3}}{2}$ quanto a soma. Apropriando-nos desse fato podemos verificar a impossibilidade da construção do quadrado na mesma malha já que supor o contrário implica admitir a possibilidade de construir um triângulo retângulo isósceles sobre a malha.

Considerações finais

Originalmente, esse trabalho pensou em discutir os números irracionais no contexto da resolução de problemas que recaíssem em equações algébricas e não-algébricas cujas soluções pudessem ser encontradas usando recursos tecnológicos e explorassem métodos numéricos. O objetivo seria destacar o emprego e a relevância dos números irracionais, no entanto ao nos debruçarmos em estudos para constituir e respaldar nosso aporte teórico em referências científicas, verificamos que ainda havia muito por ser esclarecido antes de chegarmos a um trabalho de caráter mais aplicado conforme o previsto.

A pesquisa em educação matemática sobre números irracionais é relativamente recente, aliás os mesmos números irracionais tem uma existência milenar, mas uma sistematização com menos de dois séculos. Ora se um conhecimento não é amplo e de acesso irrestrito, temos aí a primeira barreira para um processo de transposição didática satisfatória. Surgem as deficiências na formação do professor que não fazem uma articulação adequada entre os saberes matemáticos, pedagógico e escolar, dando maior projeção sempre ao primeiro conforme Broetto (2016) e Klein (1932) e os livros didáticos, utilizados para suprir as carências, fornecem abordagens superficiais que não dão subsídio adequado para o trabalho docente.

Deslocamos, então, nosso objetivo para constituir um material acessível a professores e alunos, capaz de romper com o ciclo retroalimentativo denominado por Klein (1932) como dupla ruptura. As atividades propostas foram pensadas tomando as representações conceituais como ponto de partida e problematizando aquilo que já é conhecido. Vimos a possibilidade de trazer as demonstrações importantes como alternativa aos excessivos exercícios classificatórios, estimulando a clareza em profundidade das definições, a retomada do raciocínio lógico e as habilidades de investigação, curiosidade e argumentação em lugar de exercícios paradigmáticos e técnicos. Nesse sentido, a tecnologia aparece como acessório potencializador, ao qual recorremos para abrir espaço a análise de fatos, dados e a elaboração conjecturas, generalizações e conclusões contundentes.

A pesquisa histórica fez importantes ampliações no nosso conhecimento tanto de forma técnica quanto sobre a evolução epistemológica a respeito do tema. Dedicamos um capítulo inteiro ao tratamento da evolução histórica e epistemológica do tema, minimizando os vácuos da historiografia e tentando estabelecer uma continuidade que permitisse melhor assimilação na leitura (algo icomum em materiais que discorrem sobre o tema). Reconhecemos a história como metodologia destacada no ensino e na prática docente já que é possível utilizar relações entre a síntese do saber dentro do processo histórico e na sala de aula que favorecem o aprendizado, sendo um esforço útil para o professor conhecer o contexto histórico do que pretende ensinar.

> A história não é apenas um recurso para ensinar alunos, mas também integra a formação de professores uma vez que permite aos docentes vislumbrar as dificuldades e prever os possíveis obstáculos que irão insurgir no processo, podendo ser utilizada inclusive como referencial para se refletir o currículo de ensino. A atividade matemática não é exclusivamente a demonstração de teoremas. Para Roque (2013, p. 20) bons matemáticos conhecem pelo menos a história do seu campo de trabalho, o que lhes possibilita resolver problemas com novas ideias além de teorias estabelecidas; resolver problemas importantes exige um conhecimento maior que o restrito a uma área específica. (Almeida, 2015, p. 58)

Em decorrência do fechamento das escolas pelo decreto estadual do dia 17 de março de 2020 como medida preventiva a pandemia de Covid-19 no estado da Bahia, não tivemos condições de aplicar nossa proposta nas turmas do 9° ano do Colégio Polivalente de Conceição do Coité conforme o planejamento do trabalho. A verificação na prática do que podemos alcançar com a aplicação da sequência de ensino é o nosso próximo passo. Pretendemos aplicar as atividades e aprimorar a proposta a partir das impressões e contribuições dos alunos bem como expandir a proposta em direção a uma abordagem mais concernente a temas próprios do Ensino Médio fazendo uso da história da matemática e tecnologias digitais: logaritmos e números trigonométricos na história das grandes navegações, construções geométricas e equações algébricas, propriedades de densidade e completude, pesquisa de raízes de equações algébricas: racionais, demonstração da irracionalidade dos números trigonométricos, métodos numéricos para obtenção de soluções não analíticas (este que era a princípio um objetivo final do trabalho deve ser conciliado com uma discussão sobre a ressignificação de tópicos de cálculo diferencial e integral inclusive no ensino médio conforme discussões em Almeida (2015) e (2018))

Acreditamos ter cumprido a missão ao trazer uma contribuição para o trabalho docente no ensino básico, fruto direto do conhecimento adquirido nas disciplinas do curso do PROFMAT. Mostramos que é possível trabalhar com os irracionais sem a necessidade de recorrer a uma axiomática extremamente formal e rigorosa, tampouco é necessário estabelecer a compreensão absoluta dos racionais como pré-requisito para estudar os irracionais até porque as experimentações com o funcionamento operatório das demais espécies numéricas é tão distinto que costuma ser uma fonte de obstáculos didáticos. Aliás o grau de sofisticação e dificuldade conceitual dos irracionais que parecem tão pouco práticos são os pretextos dados para justificar a pouca atenção dada a esse tópico da matemática e cogitar seu abandono definitivo.

Nos dias de hoje, não raramente o professor de matemática se vê compelido a convencer seus alunos sobre a necessidade e importância de se estudar matemática (embora não seja sua prerrogativa ter todas as respostas e justificativas). Enquanto para alguns a matemática escolar deve centrar-se em oferecer domínio das operações fundamentais e trato de aspectos quantitativos em problemas mais elementares relacionados com os desafios diários (algo como o que está proposto para o atual Ensino Fundamental), outros contentar-se-ão com a visão simplista de que os temas da matemática apresentados até o fim do Ensino Médio devem dedicar-se a desenvolver raciocínio lógico dos estudantes.

O ensino de matemática serve para ampliar os horizontes culturais. Não faltam pesquisas para comprovar o quanto estudos de temas próprios da matemática explicaram fenômenos e viabilizaram avanços em áreas como astronomia, aeronáutica, química, biologia molecular e engenharia genética, tecnologia e até mesmo na música e nas artes visuais. Estudar matemática exige de nós a competência lógica, mais sobressalente nos registros formais, mas também intuição, criatividade, imaginação, analogia, generalização, síntese, organização, avaliação e etecetera, portanto o ensino de matemática se justifica pelas diversas faculdades intelectuais e possibilidade do conhecer o mundo em que vivemos com mais detalhamento. A matemática é um patrimônio cognitivo da humanidade e todas as civilizações que existiram ao redor do nosso planeta ao longo das eras desenvolveram-na em algum nível: quanto maior o grau de desenvolvimento almejado, maiores as relações que esta sociedade mantém com a matemática.

Depois de tudo que pudemos investigar, refletir e apresentar podemos afirmar que tal proposta não tem espaço sob a égide do que está posto nos PCN do Ensino Médio: o saber matemático, científico e tecnológico contribuem para o exercício da cidadania e não são uma prerrogativa de cientistas. Os irracionais fundamentam fatos matemáticos curiosos e importantes e isso é suficiente para justificar sua permanência nos estudos da educação básica e os esforços que aqui depreendemos para tornar este saber acessível e significativo.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, Emerson Gordiano de. *O papel do cálculo diferencial e integral na formação do professor de matemática: uma análise sob o olhar da didática francesa.* 2015. 63p. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2015.

ALMEIDA, Emerson Gordiano de. *Abordagens do cálculo diferencial e integral por meio de aplicações práticas e tendências do ensino da matemática.* 2018. 30p. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Cândido Mendes, 2018.

AMARANTE, Evandro Menezes de Souza. *Uma abordagem sobre os números de Liouville.* 2017. 56p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, 2017. Acesso em 22/01/2020.

ARMÃO, Tiago Pereira. *Uma aplicação da robótica educacional no estudo do número irracional π utilizando LEGO Mindstorm EV3.* 2018. 110p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) ? Universidade Federal do Rio Grande (FURG), 2018. Acesso em 22/01/2020.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. *Várias faces da Matemática.* 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2001.

AZEVEDO, Natália de Carvalho de. *O número de ouro e construções geométricas.* 2013. 46 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Goiás (UFGO), 2013. Acesso em 22/01/2020.

BOYER, Carl. *História da Matemática.* Tradução de Elza F.Gomide. 2ª edição. São Paulo: Blucher, 1996.

BOFF, Daiane Scopel. *A construção dos números reais na escola básica.* 2006. 254 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2006.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.* Brasília: MEC/CNE - DF, 2001. 8p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Ensino Fundamental anos finais.* Brasília: MEC/SEF - DF, 1998. 148p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília, MEC/SEF - DF, 1999. p: 40-55.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular - Ensino Fundamental.* Brasília, MEC - DF, 2017. p: 261-216.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio.* Brasília, MEC - DF, 2018. p: 527-546.

BROETTO, Geraldo Claudio; *O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática.* 2016. 422p. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, 2016.

BROETTO, Geraldo Claudio; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos. O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso?. Bolema [online]. 2019, vol.33, n.64, pp.728-747. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a14. Acesso: 14/02/2020.

BURLE NETO, Augusto Frederico. *Potência de expoente irracional: uma aula para alunos da 3ª série do Ensino Médio.* 2013. 50p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013. Acesso em 22/01/2020.

CAMARGO, Bruno Aguiar Alves de. *Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio.* 2020.149p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, 2020. Acesso em: 22/01/2020.

CARVALHO, Wagner Wilson Pereira de. *Números transcendentes.* 2018. 49p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal da Paraíba (UFPB), 2018. Acesso em 22/01/2020.

CASTRO, Ana Paula Gomes. *Uma proposta pedagógica para o Ensino do Número de ouro através do software Geogebra na Educação Básica.* 2017. 106p. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática) - Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, Macapá, 2017. Acesso em 22/01/2020.

CORBO, Olga. *Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica.* 2012. 289 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

DOURADO, Rodrigo Novaes. *Uma introdução aos números algébricos com aplicações para o Ensino Médio.* 2017. 55p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2017. Acesso em 22/01/2020.

FOWLER, David; ROBSON Eleanor. Square roots approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context. *Historia mathematica.* v. 25, p. 366-378, 1998.

FARIA, Naiara Aparecida de. *Um estudo sobre números irracionais e transcendentes.* 2019. 68p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2019.

FELIX, Saulo Ferreira. *Estudo de Abordagens dos Números Irracionais nos Anos Finais do Ensino Fundamental.* 2018. 68 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Unidade Acadêmica Especial de Ciências e Tecnologia, Catalão, Universidade Federal de Goiás, 2018. Acesso em 22/01/2020.

FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, n. 29, p. 29-44, 1995.

FIGUEIRA, Ramon Formiga. *O Número de Euler.* 2017. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, 2017. Acesso em 22/01/2020.

FREITAS, Amauri Fernandes. *Explorando o conjunto de cantor e outros fractais no ensino básico.* 2014. 42p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2014. Acesso em 22/01/2020.

FRITZ, Kurt von. The discovery of incommensurability by Hipparcus of Metapontum. *Annals of mathmatics*, second series, vol. 46, n. 2 (april 1945), p. 242-264. Disponível em: ¡http://users.uoa.gr/ apgiannop/Sources/von-Fritz-discovery-of-incommensurability-by-Hippasus.pdf¿. Acesso em 16 abr. 2020.

GIOVANNI Júnior, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática.* 8° ano. 4ª edição. São Paulo: FTD, 2018.

GIOVANNI Júnior, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da Matemática.* 9° ano. 4ª edição. São Paulo: FTD, 2018.

GONÇALVES, Carlos H. B.; POSSANI, Cláudio. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga. *Matemática universitária.* v.47, p.16-24, 2009.

HEFEZ, Abramo. *Aritmética.* 2ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

JESUS, Bárbara Cristina Dâmaso de. *Números irracionais: Uma Análise De Livros Didáticos Dos Ensinos Fundamental II E Médio.* 2017. 50p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São João del Rei, São João del-Rei, 2017. Acesso em 22/01/2020.

LAURENTINO, Cledinardo Bernardo. *Números irracionais: uma visão mais ampla para o professor da educação básica.* 2013. 65p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2013. Acesso em 22/01/2020.

LANDIM, Nilo Pinheiro. *Razão áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio.* 2014. 70p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2014. Acesso em 22/01/2020.

LIMA, Igor de Oliveira. *Números irracionais.* 2016. 36p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2016. Acesso em 22/01/2020.

LIMA, Elon Lages. *Análise Real Funções de Uma Variável Real.* 12ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 1, p. 1-37.

LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio.* 11ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1, p. 25-79.

LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais.* 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MARQUES, Rodnei Alves. *Razão Áurea: uma proposta para o ensino de números irracionais.* 2013. 77p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013. Acesso em 22/01/2020.

MASCARENHAS, Sebastião Pontes. *A Irracionalidade e Transcendência dos Números.* 2017. 79 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017. Acesso em 22/01/2020.

MELO, Maria Isabel Afonso. *Razão áurea e números de Fibonacci : da teoria à prática através da fotografia.* 2017. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017. Acesso em 22/01/2020.

MOSCA, Marcos Antonio.*Números irracionais no Ensino Médio : desdobrando o tema com equações polinomiais.* 2013. 104 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Acesso em 22/01/2020.

MÓZER, Graziela Souza. *Para que servem os números irracionais? Manifestações em aritmética, combinatória e geometria.* 2013. 56p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013. Acesso em 22/01/2020.

MÓZER, Graziela Souza; BORTOLOSSI, Humberto. Para que servem os números irracionais? Indo além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes, In: XII ENEM, 2016, São Paulo - SP, *Anais*, Universidade Cruzeiro do Sul SBEM-SP.

NASCIMENTO, Raimundo Silva. *Frações Contínuas - Uma Forma de Representar e de Aproximar os Números Irracionais.* 2013. 41p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Piauí (UFPI), Teresina, 2013. Acesso em 22/01/2020.

NIVEN, Ivan.*Números: racionais e irracionais.* Tradução de Renata Watanabe. 1ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

NOLETO, Hugo Silva. *Irracionalidade de números envolvendo raízes não exatas e frações contínuas.* 2014. 69p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília (UNB),Brasília, 2014. Acesso em 22/01/2020.

OLIVEIRA, Antônio Marcos Nunes. *Irracionais e frações contínuas no Ensino Médio.* 2013. 81 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Acesso em 22/01/2020.

OLIVEIRA, Fernando Neres de. Uma prova elementar da irracionalidade de π. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 13, p. 32-45, 2018. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v13a02-uma-prova-elementar-da-irracionalidade.pdf . acesso em: 08 jun de 2020.

OLIVEIRA, Francisco Lucas Santos. *Histórico, cálculo e irracionalidade de pi-grego.* 2015. 46 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015. Acesso em 22/01/2020.

PEREIRA, Thiago Veríssimo. *Regiões circulares e o número pi.* 2013. 40p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, 2013. Acesso em 22/01/2020.

PINTO, Ronald Simões de Mattos *Notas sobre irracionalidade.* 2018. 79p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2018. Acesso em 22/01/2020.

POMMER, Wagner Marcelo. O número de Ouro: a abordagem nos livros didáticos do Ensino Médio, In: XV EBEM, 2013, Teixeira de Freitas-BA, *Anais*, Universidade do Estado da Bahia campus X, SBEM-BA.

POMMER, Marcelo Wagner; POMMER, Clarice Peres Carvalho Retroz. A abordagem de alguns números irracionais notáveis nos livros didáticos do ensino fundamental e médio. *Interfaces da educação*, São Paulo, n. 6, p. 5-22, setembro 2012.

POMMER, Marcelo Wagner; *A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais*. 2012. 235p. Tese - Universidade do Estado de São Paulo, São Paulo, 2012.

QUEIROZ, Sabrina da Costa. *O número de ouro: história, mitos e verdades e suas aplicações na educação básica*. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Ceará (UECE), Fortaleza, 2013. Acesso em 22/01/2020.

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira. *A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. 2013. 93p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Ilhéus, 2013. Acesso em 22/01/2020.

REZENDE, Veridiana; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Indicativo de números irracionais nas antigas civilizações: Egito, Babilônia e Grécia. *Revista NUPEM* v.5, p. 91-101, 2013. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/nupem/article/viewFile/380/234. Acesso em: 10 abr de 2020.

RIBEIRO, Mariane. *O número pi na educação*. 2014. 80p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014. Acesso em 22/01/2020.

RIPOLL, C. C. *A construção dos números reais no ensino fundamental e médio*. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004, Salvador, 23 p.,2001. Disponível em: http://www.bienalsbm.ufba.br/M54.pdf. Acesso em: 07 abr. 2020.

ROCHA, Arlei Ubiratã da.*Racionais e Irracionais: Conjuntos em R, algumas de suas propriedades e sugestões de atividades para os Ensinos Fundamental e Médio*. 2017. 59p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017. Acesso em 22/01/2020.

ROQUE, Tatiana. CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. *Tópicos de história da Matemática*. 1ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade brasileira de Matemática, 2012.

ROVERVAN, Adilson Pedro. *Atividades para a sala de aula usando como recurso pedagógico a história da matemática. Das quadraturas ao número π.*

Matemática na Antiga Grécia. 2015. 81p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, 2015. Acesso em 22/01/2020.

SANTOS, Ana Cláudia Guedes. *Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o Ensino Médio*. 2013. 147p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013. Acesso em 22/01/2020.

SANTOS, Aurenildo Bezerra dos. *Números irracionais: Da Irracionalidade de Números Algébricos aos Primeiros Transcendentes*. 2018. 47 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2018. Acesso em 22/01/2020.

SANTOS, Gilberto Vieira. *Explorando a Matemática do Número e, o Número de Ouro*. 2013. 71p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2013. Acesso em 22/01/2020.

SANTOS, Josimar José dos. *A conceitualização dos números irracionais no primeiro ano do Ensino Médio*. 2014. 43p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Acesso em 22/01/2020.

SILVA, Marcelo Miranda da. *Desmistificando o conjunto dos números irracionais*. 2018. 76p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Quixadá, 2018. Acesso em 22/01/2020.

SILVA, Reginaldo Leoncio. *A sequência de Fibonacci e o número de ouro: contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do ensino médio*. 2015. 129p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, 2015. Acesso em 22/01/2020.

SILVEIRA, TIAGO LOYO. *A Razão Áurea na Botânica - Práticas Contextualizadas Utilizadas como Elemento de Motivação da Educação Matemática*. 2018. 95p. Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), 2018. Acesso em 22/01/2020.

SOARES, Eliane Farias; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plínio Cavalcanti; Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura *Zetetike*, São Paulo, n. 2, p.95-117, v. 7, n. 2, 17 dez 1999. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/ article/view/8646776. Acesso em: 08 abr. 2020.

SODRÉ, Leandro de Oliveira.*O número 142857 e o número de ouro: curiosidades, propriedades matemáticas e propostas de atividades didáticas*. 2013. 79 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Acesso em 22/01/2020.

SOUTO, Alexandre Machado, *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. 2010. 106p. Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. *A Contato Matemática*. v. 1. 1ª edição. São Paulo: FTD, 2016.

VASCONCELOS, Getúlio de Assis. *A Irracionalidade e Transcendência do Número e*. 2013. 39p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Acesso em 22/01/2020.

VILLANI, Nayara de Novaes Rezende. *O número de Euler no Ensino Médio: propostas de abordagens com aplicações*. 2017. 82 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2017. Acesso em 22/01/2020.

ZAZKIS, Rina; SIROTIC, Natasa. Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathmatics Education, 2004, Bergen, Norway, Anais PME, 2004, p. 497-504.

Apêndice A

Irracionais no Ensino fundamental pela BNCC

Série escolar	Unidade temática	Objeto de conhecimento	Competência
7° ano	Geometria	Medida do comprimento da circunferência	(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
8° ano	Grandezas e medidas	Área do círculo e comprimento de sua circunferência	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
	Números	Potenciação e radiciação	(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
9° ano	Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta	(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo.
		Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica
		Potências com expoentes negativos e fracionários	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Apêndice B

Atividade 1

Atividade 1 - Segmentos comensuráveis × segmentos incomensuráveis; Números racionais × números irracionais.

1ª etapa:

Verifique se o segmento CD cabe um número inteiro de vezes em AB:

Figura B.1:

Fonte: Santos, 2013

Expresse a medida de AB em função de CD:

Verifique se o segmento EF cabe um número inteiro de vezes em AB:

Expresse a medida de AB em função de EF:

Verifique se o segmento CD cabe um número inteiro de vezes em AB:

Expresse a medida de AB em função de CD:

Figura B.2:

Fonte: Santos, 2013

Figura B.3:

Fonte: Santos, 2013

2ª etapa:

Veja como podemos construir um segmento de reta que tem medida $\frac{\overline{CD}}{3}$ a partir de um segmento CD dado.

- Trace uma reta CX tal que o ângulo entre CD e CX seja inferior a 90°;
- Tome o compasso com uma abertura que seja possível demarcar três pontos em CX que definam segmentos congruentes entre si.
- Trace uma reta ligando o ponto D ao ponto mais distante de C, no segmento CX, obtido no passo anterior. Utilize o par de esquadros e trace outros dois segmentos a partir dos pontos restantes sobre CX de modo que essas retas sejam paralelas ao que tem extremidade D em CD.

Observe que os três segmentos traçados por último determinam três triângulos semelhantes entre si que tem semelhança garantida pelo teorema fundamental da semelhança. Assim sendo, os segmentos definidos sobre CD são congruentes entre si e tem medida $\frac{\overline{CD}}{3}$. Utilize o compasso com abertura igual a um desses segmentos e marque dois pontos consecutivos a D. Esse último segmento tem medida $\frac{\overline{CD}}{3}$.

Utilize essas ideias e construa um segmento cuja medida corresponda a $\frac{5\overline{CD}}{6}$ e $\frac{4\overline{CD}}{9}$:

3ª etapa:

Com um pedaço de barbante, faça a medida de objetos cuja superfície ou lateral seja circular. A seguir, transporte a medida desse comprimento para um segmento de reta desenhado por você. Utilize a abertura do compasso igual ao diâmetro da circunferência que foi mensurada e verifique se existe uma unidade em comum entre esses dois segmentos.

4ª etapa:

A diagonal de um quadrado é o segmento de reta que une dois vértices opostos. Note que a diagonal de um quadrado sempre está oposta a um ângulo reto, determinando com os dois lados que formam esse ângulo reto um triângulo retângulo. Aplique o teorema de Pitágoras num quadrado de medida l e determine a medida da diagonal.

Utilize o resultado que você obteve no item anterior e construa um segmento de reta que tenha por medida $\sqrt{2}$. Se construirmos um triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{2}$, qual será a medida da hipotenusa?

Como poderíamos construir um triângulo retângulo para obter $\sqrt{5}$ como medida da hipotenusa?

Apêndice C

Atividade 2

Atividade 2 - Representação decimal de números racionais e irracionais

1ª etapa:

Coloca-se numa caixa fichas numeradas de 1 a 10 e se sorteiam duas fichas consecutivamente para formar uma fração, onde a primeira ficha sorteada será o numerador e a segunda ficha o denominador. Nesse contexto verifique os itens a seguir:

1. Qual a probabilidade de fração obtida representar um número inteiro?
2. O que é mais provável? Que a fração obtida seja um número maior ou menor que 1?
3. O que é mais provável? A fração obtida tenha representação decimal finita ou infinita e periódica?
4. Qual a probabilidade de obtermos um número irracional?

Verifique o que mudaria nos itens anteriores caso fizéssemos a reposição da primeira ficha sorteada antes de sortear a segunda.

Repita todo o experimento anterior, levando em conta que a caixa contém fichas numeradas de 1 a 20.

2ª etapa:

Analise o número a seguir 0,12345678910111213141 5... ele tem uma particularidade muito interessante que o distingue e, portanto, é chamado de constante de Champernowne.

1. Você consegue indicar o padrão de formação da parte decimal desse número? Escreva as próximas dez casas decimais desse número.

2. Você conseguiria prever qual seria o 99° dígito da expansão decimal? E o 500°?

3. No seu entendimento, a constante de Champernowne é um número racional ou irracional?

Outro número bem interessante é 1,1010010001... verifique um padrão de formação da expansão decimal e complete-o até a 21ª casa decimal. Você consegue identificar o número da 50ª posição? Esse número seria racional ou irracional?

3ª etapa:

Com um pedaço de barbante, faça a medida de objetos cuja superfície ou a lateral seja circular. A seguir, represente esse comprimento por meio de um segmento de reta e meça com uma régua o comprimento do barbante que equivale a circunferência. A seguir, obtenha o comprimento do diâmetro da mesma circunferência. Repita esse procedimento para os mais variados objetos circulares que você conseguir e preencha a tabela de três colunas como abaixo:

Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro da circunferência (D)	Razão comprimento/diâmetro $\frac{C}{D}$

O que você observa em relação aos resultados da terceira coluna?

Forme um número concatenando os dígitos consecutivos que formam a data de hoje, a data do seu aniversário, se você tiver CPF e RG pode fazer o mesmo com o número desses documentos e o seu número de telefone. A seguir acesse o site https://www.atractor.pt/mat/fromPI/PIsearch.html. Nele você poderá verificar a ocorrência desses números na expansão decimal de π. Preencha a tabela com as informações que você encontrar e compare os resultados que você obteve com os de seu colega. Você diria que π é um número racional ou irracional? Justifique sua resposta com os resultados que você e seus colegas obtiveram.

Número pesquisado	Casas decimais consideradas	Número de ocorrências
	1000	
	1000000	
	2000000	
	4000000	
	2147483000	
	1000	
	1000000	
	2000000	
	4000000	
	2147483000	
	1000	
	1000000	
	2000000	
	4000000	
	2147483000	
	1000	
	1000000	
	2000000	
	4000000	
	2147483000	

Apêndice D

Atividade 3

Atividade 3 - Operações envolvendo números irracionais; Leis de fechamento e demonstrações dos resultados.

1ª etapa:

Em matemática, diferente de outras áreas do saber, os fatos e as verdades não são postos por experimentação. O processo que valida uma verdade matemática chama-se demonstração, ele consiste em verificar se a condição dada como suficiente garante o fato sob certo grau de generalidade. Para entendermos melhor, "a soma de dois números pares é um número par" é uma proposição verdadeira, mas não podemos sustentar esse valor lógico pelo fato de 4 e 6 serem números pares e sua soma, que é 10, também ser par. Esta não seria uma demonstração, mas uma ilustração do que se afirmou. Também não é questão de usar outros exemplos, pois até aí teríamos uma coleção de ilustrações do fato, mas que não são capazes de garantir que a característica de dois números serem pares garante que sua soma seja par. Por outro lado, sabendo que todo número par é múltiplo de dois, podemos dizer que esses números sempre são da forma $2m$ onde m é inteiro. Então sendo $2m$ e $2n$ pares quaisquer, teremos como soma $2m + 2n = 2(m + n)$ e como m e n são inteiros (até para que nossa suposição faça completo sentido), o número $2(m + n)$ é claramente par. Feito! A proposição tem sua validade demonstrada já que dada a condição das parcelas serem pares, verificamos que o resultado também é par. Esse método de demonstração é o direto, nele testamos a condição enunciada a princípio como hipótese e esse teste nos leva a concluir justamente o que havia sido afirmado ao fim do enunciado da proposição e que chamamos de tese. Nem sempre as demonstrações seguem o método direto ou são tão simples, isso depende muito do que se quer provar. No caso dos números irracionais, uma técnica de demonstração, em geral, é muito útil: a demonstração indireta ou por absurdo. Ela consiste em supor o contrário do que diz a tese da proposição e como resultado chegar a uma conclusão absurda ou contraditória. Uma vez que a suposição do contrário leva a algo que não pode ser, resta a essa proposição ser verdadeira. Em se tratando de números irracionais, as demonstrações por absurdo são muito eficientes e bastante comuns! Vejamos.

O número $\sqrt{2}$ corresponde a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 u.c. Veja como podemos comprovar que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Primeiro vamos supor que existem a e b inteiros tais que $(a, b) = 1$ e $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$:

1. Escreva uma igualdade equivalente a anterior em que o radical seja eliminado no segundo membro:

2. Se o número a^2 é par, o que podemos concluir sobre a?

3. Podemos dizer que qualquer número par é da forma $2m$, sendo m um número inteiro. Justifique essa informação. Admita que $m = 22$ e substitua na igualdade obtida no item para obter uma nova equação.

4. Levando em conta a equação obtida em 3 e a conclusão em 2, qual a conclusão que se pode tirar sobre o número b?

5. Qual a conclusão final que podemos tirar sobre $\dfrac{a}{b}$?

O número $\sqrt{3}$ corresponde a diagonal de um cubo de aresta 1 u.c. Verifique! Utilize o mesmo passo a passo anterior para provar que $\sqrt{3}$ é irracional.

Outra forma de atestar fatos em matemática é com o chamado contraexemplo. Esse tipo de demonstração consiste em desmentir uma declaração, dando um exemplo contraditório ao que se afirma. Por exemplo, podemos atestar que a afirmação "se o produto de dois números é par, então ambos os números são pares" é falsa, pois $2 \cdot 3 = 6$ é um exemplo particular, dentre muitos que podemos citar. Este raciocínio para julgar a falsidade é válido, pois o exemplo que fabricamos contradiz a indicação da paridade dos fatores como condição suficiente para a paridade do produto. A mesma linha de raciocínio não valeria para provar ser verdadeira a afirmação "se o produto de dois números é ímpar então os fatores são ímpares" pois por mais que possamos fabricar inúmeros exemplos particulares que confirmem essa verdade nada nos garante que para algum caso particular, que não foi pensado, a condição suficiente enunciada não vá ser contradita. Neste caso, podemos e devemos comprovar da forma mais geral possível esta afirmação, basta multiplicar $2m + 1$ por $2n + 1$, formas genéricas de um inteiro ímpar, o resultado será um terceiro número inteiro desta mesma forma, o que confirma a proposição. Conclusão: em matemática, para provar que algo é falso, construir exemplos é uma boa estratégia, mas para tentar provar que algo é verdadeiro não vale!

Tente provar com algum contraexemplo as seguintes afirmações:

1. A razão entre dois inteiros é um número inteiro.

2. A soma de dois números irracionais é um número irracional.

3. O produto de dois números irracionais é um número irracional.

4. O produto de um número racional por um número irracional é irracional.

5. A razão entre dois números irracionais distintos é um número irracional.

2ª etapa:

Dizemos que um conjunto é fechado para uma operação, quando tomados dois elementos do conjunto e aplicando o procedimento da operação, o resultado é também um elemento do conjunto. Analise os quadros a seguir: No quadro 1, temos todas as somas possíveis do conjunto $K = \{-1, 0, 1\}$, o que nos permite ver que não é um conjunto fechado para a soma.

+	- 1	0	1
- 1	- 2	- 1	0
0	- 1	0	1
1	0	1	2

No quadro 2, temos todos os possíveis produtos do conjunto $K = \{-1, 0, 1\}$, o que nos permite ver que é um conjunto fechado para o produto.

x	- 1	0	1
- 1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

O conjunto dos números naturais é fechado para a adição e para a multiplicação, mas não é para a subtração. Dê um exemplo de dois números naturais cuja diferença não é natural. Com os números inteiros temos o fechamento da adição, subtração e multiplicação, mas não para a divisão. Mostre que a divisão de dois inteiros pode não ser um número inteiro. Agora, vamos demonstrar que os racionais são fechados para a soma e para a multiplicação. Sabemos que um número é racional quando pode ser escrito na forma de fração de dois inteiros. Suponha a, b, c e d inteiros com b e d não-nulos. Efetue as operações:

1. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$
2. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}$
3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}$
4. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}$

Observando os resultados, qual conclusão tiramos sobre o fechamento dos racionais para a soma, subtração, multiplicação e divisão?

Vamos ver o que acontece se somarmos um número racional da forma $\dfrac{a}{b}$ com o irracional x:

1. Escreva uma igualdade que represente a suposição da soma de x com $\dfrac{a}{b}$ ser um número racional:

2. Isole o x na igualdade escrita no passo anterior:

3. O segundo membro da igualdade representa um número racional ou irracional? Por quê?

4. Qual a sua conclusão, levando em conta os passos anteriores sobre a frase: "A soma de um número racional e um número irracional é racional". Por quê? De que forma poderíamos reescrever a proposição e obter uma informação verdadeira.

Com o mesmo passo-a-passo, mostre o que acontece quando multiplicamos um número racional não-nulo por um irracional. Qual a importância do termo 'não-nulo' referindo-se a racional?

Desafio:

Mostre que $\sqrt{6}$ é irracional utilizando o método de redução ao absurdo como fez para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$:

Utilize as leis do fechamento que investigamos na atividade e a irracionalidade de $\sqrt{6}$ para concluir que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é também irracional. Utilize a técnica de redução ao absurdo com o resultado de $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$:

Apêndice E

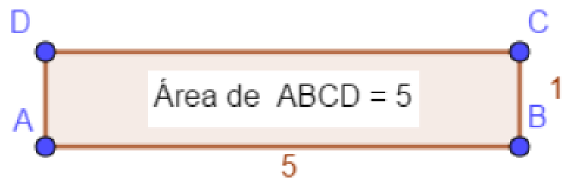
Atividade 4

Atividade 4 - Aproximações

1ª etapa:

Vejamos como calcular aproximações para $\sqrt{5}$ utilizando a áreas de figuras geométricas. Sabemos que a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas da base e da altura, temos que a área do retângulo a seguir é 5u.a. Calcule a média m das medidas dos dois lados e construa um novo retângulo tendo como medida da base esse número e a altura como o racional $\frac{5}{m}$:

Figura E.1: Área do retângulo ABCD



Fonte: o autor, 2020

Para fazer essa construção no Geogebra, clique na terceira janela da esquerda para a direita e selecione a opção segmento de comprimento fixo. Marque o ponto na janela de visualização e indique o valor desejado para a base. Selecione um dos pontos que definiu o segmento anterior e repita o procedimento para obter um segmento que corresponderá a altura. Deste último, segmento repita o procedimento para obter outro segmento equivalente a base e por último obtenha um segmento equivalente à altura. Se necessário, mova os segmentos para que surja a forma do retângulo, você pode construir uma reta auxiliar perpendicular a um dos segmentos obtidos, passando por um ponto fora dos segmentos, com isso para poderá ajustar corretamente os segmentos para obter ângulos retos, de fato. Selecione a opção polígono na quinta janela da esquerda para a direita e marque os quatro pontos visíveis definindo o retângulo. Desmarque os rótulos que nomeiam os segmentos e na oitava janela da esquerda para a direita selecione distância, comprimento e perímetro, clique sobre uma base e uma altura do retângulo para ver as medidas aproximadas dos segmentos. Nesta mesma janela selecione área e clique sobre o retângulo. Reitere esse processo algumas vezes e preencha a tabela a seguir, inserindo em cada linha os dados obtidos a cada passo:

Base	Altura	Média
5	1	

O que você observa no aspecto das figuras a medida que vai fazendo mais construções?

Por que é mais conveniente usar a forma fracionária dos números no campo de entrada da medida do segmento? O que você observa comparando as frações com os resultados obtidos na calculadora e exibidas no software?

De que maneira você utilizaria os números obtidos $\sqrt{5}$ para calcular uma expressão como $2^{\sqrt{5}}$?

Utilize o método visto anteriormente para valores aproximados até a casa dos milésimos:

1. $\sqrt{10}$
2. $\sqrt{21}$
3. $\sqrt{38}$
4. $\sqrt{52}$

É comum ao nos depararmos frações em que o denominador seja um número irracional eliminar retirar a irracionalidade, obtendo uma nova fração equivalente em que o novo numerador é irracional. Esse processo é conhecido como racionalização de denominadores. Faça cálculos manualmente para encontrar os valores de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ com precisão de milésimos. Qual das duas formas você acha melhor para fazer esse cálculo?

2ª etapa

Usando uma calculadora, copie e complete a tabela abaixo:

1. Compare os resultados das colunas I e II. Que relação existe entre eles? Enuncie uma regra geral com a sua conclusão:

2. Compare os resultados das colunas III e IV. Que relação existe entre eles? Enuncie uma regra geral com a sua conclusão:

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
a	b	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{a}.\sqrt{b}$	$\sqrt{a.b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
3	2								
5	3								
17	10								
49	34								
135	121								

3. Compare os resultados obtidos nas colunas V e VI e nas colunas VII e VIII. O que se pode afirmar sobre elas? Essas conclusões ainda serão válidas se a ou b forem iguais a zero? O que muda em suas conclusões se $a = 0$? E se $b = 0$?

Apêndice F

Atividade 5

Atividade 5 - Mais construções geométricas: quando algo é impossível de fazer por causa de algum irracional.

1ª etapa:

Utilize a malha quadriculada do Geogebra para construir os triângulos a seguir:

- Triângulo retângulo isósceles
- Triângulo retângulo escaleno
- Triângulo acutângulo isósceles
- Triângulo acutângulo escaleno
- Triângulo obtusângulo isósceles
- Triângulo obtusângulo escaleno
- Triângulo equilátero

Preencha a tabela a seguir com as coordenadas de cada vértice e as medidas dos lados dos triângulos que você conseguiu construir:

É possível montar um triângulo retângulo com uma hipotenusa na horizontal? Em caso afirmativo, dê um exemplo escrevendo as coordenadas dos vértices do triângulo. Em caso negativo, justifique!

É possível montar um triângulo isósceles com uma base não horizontal? Em caso afirmativo, dê um exemplo escrevendo as coordenadas dos vértices do triângulo. Em caso negativo, justifique!

	Vértice A	Vértice B	Vértice C	Lado AB	Lado AC	Lado BC
Retângulo isósceles						
Retângulo escaleno						
Acutângulo isósceles						
Acutângulo escaleno						
Obtusângulo isósceles						
Obtusângulo escaleno						
Equilátero						

É possível montar um triângulo equilátero com coordenadas inteiras? Em caso afirmativo, dê um exemplo escrevendo as coordenadas dos vértices do triângulo. Em caso negativo, justifique!

Vamos demonstrar que é impossível construir um triângulo equilátero de coordenadas inteiras. Considere na figura a seguir o retângulo $BDEF$ de lados a e b e o triângulo equilátero ABC de lado a:

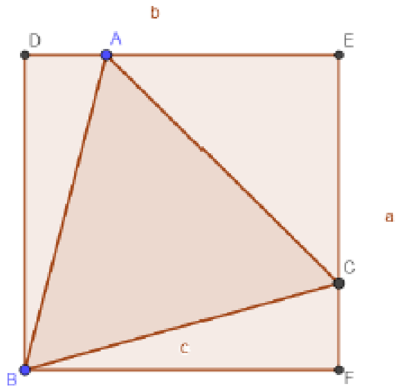
1. Suponha que todos os vértices do retângulo sejam de coordenadas inteiras. O que se pode concluir sobre as medidas dos lados do retângulo?

2. Determine a área do retângulo utilizando linguagem algébrica para a medida dos lados:

3. Levado em conta que a área do retângulo pode ser obtida pela soma da área do triângulo equilátero com os triângulos retângulos adjacentes, utilize novamente linguagem algébrica para definir uma expressão para essa soma:

4. Os itens b e c indicam expressões algébricas distintas para um mesmo elemento, a área do retângulo $BDEF$. A igualdade entre as duas expressões é possível? Justifique:

Figura F.1:



Fonte: o autor, 2020

5. Escreva sua conclusão sobre a possibilidade de construir um triângulo retângulo equilátero com coordenadas inteiras:

Utilize o raciocínio anterior e discuta a possibilidade de construir um triângulo equilátero com coordenadas racionais?

Agora habilite a malha isométrica no Geogebra: clique com o botão direito do mouse sobre a janela, selecione a opção 'janela de visualização'e em seguida clique sobre a opção malha. Vá até tipo de malha e selecione a opção isométrica. Tente fazer as construções, anteriormente feitas na malha quadrada. Tente organizar as informações numa tabela semelhante a que foi preenchida pelas construções anteriores.

Vamos demonstrar que não dá para construir um triângulo retângulo isósceles cujos vértices sejam pontos da malha isométrica:

Suponha que na figura a seguir, o triângulo ABC seja isósceles e retângulo de base a e o retângulo $BDEF$ tenha lados c e d:

1. Determine a área do retângulo $BDEF$ usando simbolismo algébrico:

2. Indique uma expressão algébrica que represente a área de $BDEF$ como soma da área do triângulo retângulo isósceles ABC e dos demais triângulos adjacentes:

3. É possível a igualdade entre as expressões indicadas nos itens a e b? Justifique:

4. Escreva sua conclusão sobre a possibilidade de construir um triângulo retângulo isósceles na malha isométrica.

	Vértice A	Vértice B	Vértice C	Lado AB	Lado AC	Lado BC
Retângulo isósceles						
Retângulo escaleno						
Acutângulo isósceles						
Acutângulo escaleno						
Obtusângulo isósceles						
Obtusângulo escaleno						
Equilátero						

5. Utilize sua conclusão sobre a construção do triângulo retângulo isósceles para argumentar sobre a possibilidade de construir um quadrado de vértices nos pontos dessa malha:

,,